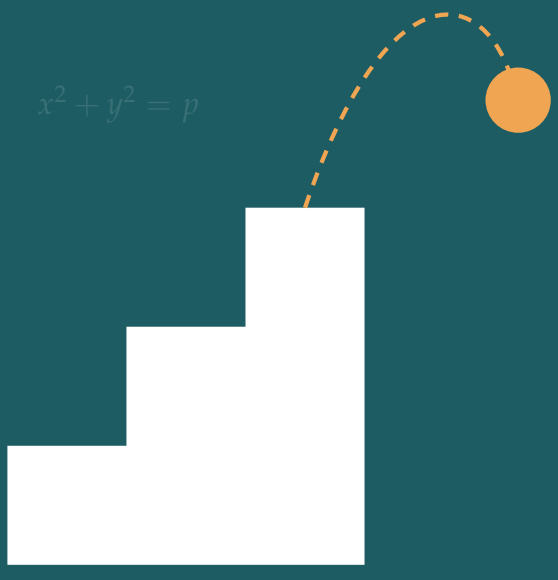
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2000년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2000년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2000년 풀이

2000년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 로그와 첫째 자리 숫자 순수수학 3

Q2 이항전개의 계수 순수수학 7

Q3 계단함수의 적분 순수수학 11

Q4 적분의 상계와 하계 순수수학 15

Q5 3차원 벡터 순수수학 19

Q6 직선으로 둘러싸인 영역 순수수학 22

Q7 도함수의 한계 순수수학 26

Q8 절댓값의 적분 순수수학 29

Q9 가속 좌표계에서의 포물체 역학 33

Q10 충돌과 반발계수 역학 37

Q11 사다리의 마찰 평형 역학 41

Q12 기하분포 확률과 통계 45

Q13 조건부 확률 확률과 통계 48

Q14 균등분포의 적률 확률과 통계 51

STEP II

Q1 이집트 분수 순수수학 54

Q2 다항식의 중근 순수수학 58

Q3 오차의 전파 순수수학 62

Q4 편각과 아크탄젠트 항등식 순수수학 66

Q5 최소제곱 근사 순수수학 70

Q6 반각 치환 순수수학 74

Q7 직선과 원뿔 순수수학 78

Q8 변수분리형 미분방정식 순수수학 82

Q9 공기 저항을 받는 운동 역학 85
Q10 연결된 도르래 계 역학 89
Q11 탄성 끈과 단진동 역학 93
Q12 정규확률변수의 합 확률과 통계 97
Q13 포획-재포획 추정 확률과 통계 101
Q14 중앙값의 분포 확률과 통계 105

STEP III

Q1 쌍곡선의 접선 순수수학 109
Q2 치환적분 순수수학 114
Q3 복소수와 기하 순수수학 118
Q4 유리함수의 그래프 그리기 순수수학 122
Q5 선형 변환 순수수학 127
Q6 사차다항식의 인수분해 순수수학 131
Q7 부등식과 극한 순수수학 135
Q8 점화식 순수수학 138
Q9 비스듬한 탄성 충돌 역학 142
Q10 최대 정지 마찰과 평형 역학 146
Q11 거친 회전축에 대한 회전 역학 150
Q12 푸아송 근사 확률과 통계 154
Q13 확률생성함수 확률과 통계 158
Q14 공분산과 독립 확률과 통계 162

풀이

STEP I 2000, 문제 1

순수수학 • 로그와 첫째 자리 숫자

> **STEP I 2000, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q1

핵심 아이디어

큰 수 N의 첫째 자리 숫자(leading digit)는 전적으로 $\log_{10} N$의 **소수 부분**(*fractional part*)에 의해 결정된다. k가 정수이고 $0 \le f < 1$일 때 $\log_{10} N = k + f$이면 $N = 10^f \times 10^k$이고, N의 첫째 자리 숫자가 d일 필요충분조건은 $\log_{10} d \le f < \log_{10}(d+1)$이다. 따라서 필요한 것은 1부터 9까지 각 숫자의 로그값뿐이며, 이는 $\log_{10} 2$와 $\log_{10} 3$으로부터 얻을 수 있다. 그리고 반올림 오차(rounding error)를 어디까지 허용할 수 있는지 꼼꼼히 살펴보아야 한다.

풀이

이 풀이 전체에서 log는 $\log_{10}$을 뜻한다. 구간 $[0, 1)$은 가능한 첫째 자리 숫자 하나마다 한 조각씩, 모두 아홉 조각으로 나뉜다.



소수 부분 f가 d라고 표시된 조각에 들어가면 첫째 자리 숫자는 d이다.

소문항 (i)

$5 = 10/2$이고 $6 = 2 \times 3$이므로

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0.301029996 = 0.698970004 \approx 0.699,$$
$$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.301029996 + 0.477121255 = 0.778151251 \approx 0.778,$$

이다(각각 소수점 아래 셋째 자리까지).

이제

$$\log 3^{100} = 100 \log 3 = 47.7121255.$$

주어진 $\log 3$의 값은 오차가 5×10^{-10} 이내이므로, 이 값의 오차는 5×10^{-8} 이내이다. 따라서 확실히 $47.712 < \log 3^{100} < 47.713$이다. 이를

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 5 \approx 47.699 \quad \text{그리고} \quad \log\left(6 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 6 \approx 47.778,$$

과 비교하면

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) < \log 3^{100} < \log\left(6 \times 10^{47}\right).$$

을 얻는다. 여유(약 0.013과 0.066)는 어떤 반올림 오차보다도 훨씬 크고, log는 순증가 함수(strictly increasing function)이므로

$$5 \times 10^{47} < 3^{100} < 6 \times 10^{47},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 따라서 3^{100}은 $5.\ldots \times 10^{47}$ 꼴이다. 즉 첫째 자리 숫자는 $\boxed{5}$이다(그리고 48자리 수이다).

소문항 (ii)

같은 아이디어를 $\log 2 = 0.301029996$에 적용한다. 이 값의 오차는 많아야 5×10^{-10}이다. 10^n을 곱하면 그 오차에도 10^n이 곱해지므로, 소수 부분이 수직선의 한 조각 안에 안전하게 머무는지 확인해야 한다.

2^{1000}. $\log 2^{1000} = 301.029996$이고, 오차는 많아야 5×10^{-7}이다. 소수 부분은 약 0.030으로 $\log 1 = 0$과 $\log 2 \approx 0.301$ 사이에 있으므로 $2^{1000} = 1.\ldots \times 10^{301}$이고, 첫째 자리 숫자는 $\boxed{1}$이다.

$2^{10\,000}$. $\log 2^{10\,000} = 3010.29996$이고, 오차는 많아야 5×10^{-6}이다. 소수 부분은 0.299955와 0.299965 사이에 있다.

> **생각해 보기** 소수 부분 0.29996은 $\log 2 = 0.30103$에 매우 가깝다. 첫째 자리 숫자가 2가 아니라고 확신할 수 있는가?

그렇다. 차이는 $0.30103 - 0.29996 \approx 0.0011$로, 가능한 최대 오차 5×10^{-6}의 이백 배가 넘는다. 따라서 소수 부분은 정말로 $\log 2$보다 작고, $10^{3010} < 2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$이다. (같은 말이지만, $2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$은 $2^{9999} < 10^{3010}$, 즉 $\log 2 < 3010/9999 = 0.3010301\ldots$이라는 뜻이며, 이는 참이다.) 첫째 자리 숫자는 $\boxed{1}$이다.

$2^{100\,000}$. $\log 2^{100\,000} = 30102.9996$이고, 오차는 많아야 5×10^{-5}이므로 소수 부분은 0.99955와 0.99965 사이에 있다. 이것이 수직선의 어느 조각에 속하는지 알아야 하는데, 맨 위 조각은

$$\log 9 = 2\log 3 = 0.954242510.$$

에서 시작한다. $0.954 < 0.99955$이고 $0.99965 < 1$이므로 $9 \times 10^{30102} < 2^{100\,000} < 10^{30103}$이고, 첫째 자리 숫자는 $\boxed{9}$이다.

> **생각해 보기** 오차 때문에 소수 부분이 1을 넘어가서, 이 수가 $1.\ldots \times 10^{30103}$ 꼴이 될 수는 없는가?

그렇게 되려면 $100\,000\log 2$의 참값이 30103 이상이어야 하고, 이를 위해서는 0.0004의 오차가 필요하다. 이는 최대 오차 5×10^{-5}의 여덟 배이다. 따라서 첫째 자리 숫자는 9이고 $2^{100\,000}$은 30 103자리 수이다.

검산

컴퓨터로 정확한 정수 계산을 하면 모든 결과가 확인된다. 3^{100}은 48자리 수이고 $515\ldots$로 시작한다. 2^{1000}은 $107\ldots$로 시작하고(302자리), $2^{10\,000}$은 $199\ldots$로 시작하며(3011자리), $2^{100\,000}$은 $999\ldots$로 시작한다(30 103자리). 방법이 타당한지 빠르게 점검해 보면, $\log 2^{10} = 3.0103$의 소수 부분은 $0.0103 < \log 2$로, $2^{10} = 1024$와 들어맞는다.

흔한 실수

- 로그의 정수 부분(integer part)에서 첫째 자리 숫자를 읽어 내는 것. 정수 부분은 자릿수(정수 부분보다 하나 많다)만 알려 줄 뿐이며, 첫째 자리 숫자는 소수 부분에 담겨 있다.
- 100 000을 곱하면 $\log 2$의 반올림 오차에도 같은 수가 곱해진다는 사실을 잊는 것. 여기서는 소수점 아래 아홉 자리가 딱 충분하며, 그 이유를 밝혀 둘 가치가 있다.
- $f = 0.9996 \approx 1$을 보고 첫째 자리 숫자가 1이라고 결론짓는 것. 소수 부분이 1보다 조금 작다는 것은 그 수가 10의 거듭제곱보다 조금 **작다**는 뜻이므로, 9로 시작한다.

STEP 너머

2^n의 첫째 자리 숫자는 $n\log 2$의 소수 부분이 결정한다. $\log 2$는 무리수(irrational number)이므로 이 소수 부분들은 $[0, 1)$에서 **균등분포**(*equidistributed*)한다(바일(Weyl)의 균등분포 정리). 따라서 2의 거듭제곱 가운데 숫자 d로 시작하는 것의 비율은 $\log(1 + 1/d)$로 수

렴(converge)한다. 이것이 벤포드 법칙(Benford's law)이며, 2의 거듭제곱 가운데 약 30%가 1로 시작한다. 이 이야기의 무리수와 근사 쪽 측면에 관해서는 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)이 읽기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2000, 문제 2

순수수학 • 이항전개의 계수

> **STEP I 2000, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q2

핵심 아이디어

분수 꼴의 항이 있는 두 이항식을 전개한 다음 차수가 맞는 거듭제곱을 찾아다니는 것은 번거롭다. 먼저 x의 음의 거듭제곱을 묶어 내어 각 괄호가 x의 한 거듭제곱(x^6 또는 x^2)에 대한 다항식(polynomial)이 되도록 하는 편이 훨씬 깔끔하다. 그러면 인수분해(factorisation) $x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$ 덕분에 두 번째 곱이 사실은 첫 번째 곱이 모양만 바꾼 것임이 드러나므로, "이를 이용하여(hence)" 부분은 거의 공짜로 얻어진다.

풀이

첫 번째 전개

각 괄호에서 x의 가장 낮은 거듭제곱을 묶어 내면

$$\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)^5=\left(\frac{x^6-1}{x^2}\right)^5=x^{-10}\,(x^6-1)^5,$$
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^6=x^{-6}\,(x^2-1)^6.$$

이다. 따라서 전체 식은 $x^{-16}P(x)$이고, 여기서

$$P(x)=(x^6-1)^5\,(x^2-1)^6.$$

이다. 그러므로 원래 전개식에서 x^n의 계수(coefficient)는 다항식 $P(x)$에서 x^{n+16}의 계수와 같다.

이항정리(binomial theorem)에 의해

$$(x^6-1)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(-1)^{5-j}x^{6j},\qquad (x^2-1)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}x^{2k},$$

이므로, $P(x)$에서 x^m의 계수는 $6j+2k=m,\ 0\le j\le 5,\ 0\le k\le 6$을 만족하는 모든 순서쌍에 대하여

$$\binom{5}{j}(-1)^{5-j}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}$$

를 더한 값이다.

x^{-12}의 계수. $m=-12+16=4$, 즉 $6j+2k=4$가 되어야 한다. $6j\le 4$이므로 $j=0$일 수밖에 없고, 가능한 순서쌍은 $(j,k)=(0,2)$ 하나뿐이다. 따라서

$$\binom{5}{0}(-1)^5\cdot\binom{6}{2}(-1)^4=(-1)(15)=-15,$$

이고, 이는 구하려던 값이다.

x^2의 계수. 이번에는 $m=2+16=18$이므로 $6j+2k=18$, 즉 $k\le 6$인 조건에서 $3j+k=9$이다. 따라서 $j=1,2,3$이 가능하다.

(j,k)	$(x^6-1)^5$에서	$(x^2-1)^6$에서	곱
$(3,0)$	$\binom{5}{3}(-1)^2=10$	$\binom{6}{0}(-1)^6=1$	10
$(2,3)$	$\binom{5}{2}(-1)^3=-10$	$\binom{6}{3}(-1)^3=-20$	200
$(1,6)$	$\binom{5}{1}(-1)^4=5$	$\binom{6}{6}(-1)^0=1$	5

그러므로 x^2의 계수는 $10+200+5=215$이다.

생각해 보기 왜 $j=0$이나 $j=4$는 x^{18}에 기여할 수 없을까?

$j=0$이면 $k=9$, $j=4$이면 $k=-3$이어야 하는데, 둘 다 $0\le k\le 6$의 범위에 들지 않는다. 여기서는 순서쌍 하나를 빠뜨리거나(또는 없는 것을 만들어 내기) 쉬우므로, 가능한 경우를 체계적으로 나열하는 것이 좋다.

두 번째 전개

생각해 보기 x^4+x^2+1은 앞부분과 무슨 관계가 있을까?

x^6-1을 x^2에 대한 세제곱의 차(difference of cubes)로 보았을 때 나오는 나머지 인수가 바로 이것이다.

$$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1).$$

$(x^2-1)^{11}$을 $(x^2-1)^5(x^2-1)^6$으로 나누어 쓰면

$$(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5 = \left[(x^2-1)(x^4+x^2+1)\right]^5(x^2-1)^6 = (x^6-1)^5(x^2-1)^6 = P(x).$$

이다. 따라서 두 번째 전개식은 정확히 $P(x)$이고, 이는 첫 번째 전개식에 x^{16}을 곱한 것이다.

x^4의 계수. 이는 $P(x)$에서 x^4의 계수이며, 앞에서 이미 구하였다(첫 번째 전개식의 x^{-12}에 대응한다). 그 값은 -15이다.

x^{38}의 계수. 이는 $6j+2k=38$, 즉 $j\le 5$, $k\le 6$인 조건에서 $3j+k=19$에 대응한다. $k\le 6$이므로 $3j\ge 13$이어야 하고, 따라서 $j=5$, $k=4$이다. 그러면

$$\binom{5}{5}(-1)^0\cdot\binom{6}{4}(-1)^2 = 15.$$

이다. 그러므로 x^{38}의 계수는 15이다.

세지 않고도 이를 알아보는 깔끔한 방법이 있다. P의 차수(degree)는 $30+12=42$이고, x를 $1/x$로 바꾸면

$$x^{42}P(1/x) = (1-x^6)^5(1-x^2)^6 = (-1)^{11}P(x) = -P(x).$$

를 얻는다. 계수를 비교하면 P에서 x^{42-m}의 계수는 x^m의 계수에 마이너스를 붙인 것이다. $m=4$로 두면 x^{38}의 계수는 $-(-15)=15$이고, 앞의 결과와 일치한다.

검산

- $P(x)$에 $x=1$을 대입하면 0이 되므로, P의 모든 계수의 합은 0이다. 완전히 전개했을 때 빠르게 확인해 볼 수 있는 방법이다.
- 두 곱을 컴퓨터로 (계수의 목록으로) 정확히 전개해 보았다. 첫 번째에서 x^{-12}의 계수는 -15, x^2의 계수는 215였고, 두 번째에서 x^4의 계수는 -15, x^{38}의 계수는 15였다. 또한 두 번째 곱의 차수가 42이며 첫 번째 곱에 x^{16}을 곱한 것과 같음을 확인하였다.
- 임의의 유리수 x 값에서 원래 식의 값을 계산하면 구한 전개식의 값과 정확히 일치한다.

흔한 실수

- 부호 오류: 선택한 거듭제곱이 x^{6j}와 x^{2k}일 때 항의 부호는 $(-1)^{5-j}(-1)^{6-k} = -(-1)^{j+k}$이지 $(-1)^{j+k}$가 아니다. 잘못된 것을 쓰면 모든 답의 부호가 뒤집힌다.
- x^2의 계수에서 $(1,6)$이나 $(3,0)$ 항을 빠뜨려 200 또는 205를 얻는 경우.

- 인수분해를 알아채지 못하고 $(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5$을 직접 전개하는 경우: 가능은 하지만 길고 실수하기 쉽다.

STEP 너머

합들의 곱을 하나의 합으로 쓰고 x의 한 거듭제곱을 골라내는 것은 **생성함수**(generating functions)의 바탕이 되는 아이디어이다. 곱의 한 계수는 부분들로부터 어떤 합계를 만드는 방법의 수를 세는데, 이는 위에서 순서쌍 (j,k)를 센 것과 정확히 같다. 대칭성 $x^{42}P(1/x) = -P(x)$는 P가 (반)**회문** 다항식(palindromic polynomial)임을 말해 준다. 이러한 다항식은 원분다항식(cyclotomic polynomials)과 단위근(roots of unity)을 연구할 때 등장하며, x^6-1은 그 첫 번째 예이다. 이런 방향의 문제를 더 원한다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*가 좋은 다음 단계이며, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 다항식의 인수분해를 제대로 다룬다.

풀이

STEP I 2000, 문제 3

순수수학 • 계단함수의 적분

STEP I 2000, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s1-q3

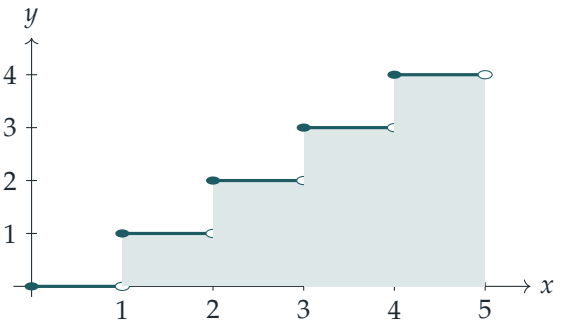
핵심 아이디어

어떤 값이든 그 정수 부분(integer part)은 계단 함수(step function)이다. 즉, 구간 위에서는 일정한 값을 유지하다가 1만큼 뛰어오른다. 따라서 적분은 직사각형 넓이의 합일 뿐이고, 실제로 해야 할 일은 각 계단이 어디에서 시작하고 끝나는지 찾는 것뿐이다. $[\mathrm{e}^x]$의 경우 e^x가 정수를 지나는 곳, 곧 $x = \ln k$에서 값이 뛰고, 그 결과로 얻는 로그의 합은 깔끔하게 소거(telescoping)된다.

풀이

$y = [x]$의 그래프

각 구간 $k \le x < k+1$ (k는 정수)에서 $[x] = k$이다. 따라서 그래프는 길이가 각각 1인 수평 선분들로 이루어진 계단 모양이며, 왼쪽 끝에는 속이 찬 점(그 값을 가짐)이, 오른쪽 끝에는 속이 빈 점(함수가 1만큼 뛰어오르는 곳)이 있다.



적분값은 색칠한 부분의 넓이이며, 이는 너비가 1이고 높이가 $0, 1, 2, 3, 4$인 직사각형들로 이루어진다(한 점 $x = 1, 2, 3, 4$에서의 값은 넓이에 아무 영향을 주지 않는다). 따라서

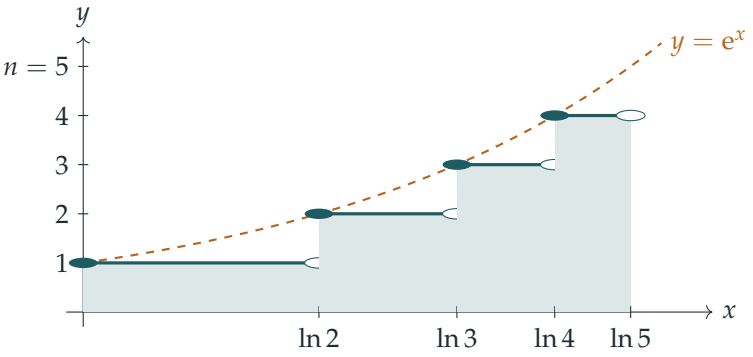
$$\int_0^5 [x]\,\mathrm{d}x = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

$y = [\mathrm{e}^x]$의 그래프

$0 \le x < \ln n$이면 $1 \le \mathrm{e}^x < n$이다. e^x는 증가함수이므로

$$[\mathrm{e}^x] = k \iff k \le \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \le x < \ln(k+1),$$

이다. 단, $k = 1, 2, \ldots, n-1$이다. 따라서 그래프는 이번에도 높이가 1씩 올라가는 계단 모양이지만, 이제는 x가 커질수록 계단의 폭이 좁아진다. 높이 k인 계단의 폭은 $\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$이다. 아래 그림은 $n = 5$인 경우이며, 곡선 $y = \mathrm{e}^x$는 점선으로 나타냈다. 계단은 각 계단의 왼쪽 끝에서 곡선과 만난다.



적분

높이 k에 폭 $\ln(k+1) - \ln k$를 곱한 직사각형 넓이들을 더하면

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} k\big(\ln(k+1) - \ln k\big) = \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k.$$

? **생각해 보기** 두 합이 서로 상쇄되게 하려면 어떻게 해야 할까?

각 $\ln j$는 두 합에 모두 나타나지만 계수가 다르다. 첫 번째 합에서 $j = k+1$로 치환하면 두

합의 항이 나란히 맞춰진다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k &= \sum_{j=2}^{n}(j-1)\ln j - \sum_{j=1}^{n-1} j\ln j \\ &= (n-1)\ln n + \sum_{j=2}^{n-1}\big((j-1)-j\big)\ln j - 1\cdot\ln 1 \\ &= (n-1)\ln n - \sum_{j=2}^{n-1}\ln j.\end{aligned}$$

여기서 첫 번째 합에서는 $j=n$인 항을, 두 번째 합에서는 $j=1$인 항을 따로 떼어 냈다(뒤의 것은 $\ln 1 = 0$이므로 0이다). 이제 $\sum_{j=2}^{n-1}\ln j = \ln\big((n-1)!\big)$이고 $(n-1)\ln n = n\ln n - \ln n$이므로

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = n\ln n - \big(\ln n + \ln((n-1)!)\big) = n\ln n - \ln(n!),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ($n=1$이면 적분 구간의 길이가 0이고, 양변 모두 0이다.)

그림을 이용한 증명 (선택)

폭이 $\ln n$이고 높이가 n인 직사각형의 넓이는 $n\ln n$이다. 이 직사각형에서 계단 **위쪽**에 놓인 부분은 높이가 1인 수평 띠들로 이루어진다. $m=1,\ldots,n$에 대하여 높이 $m-1$과 m 사이의 띠는 $x=0$부터 $x=\ln m$까지 뻗어 있는데, 이는 $[\mathrm{e}^x] < m$인 것이 정확히 $x < \ln m$일 때이기 때문이다. 이 띠의 넓이는 $\ln m$이므로, 계단 위쪽 영역의 넓이는 $\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$이다. 이를 $n\ln n$에서 빼면 같은 결과를 다시 얻는다. 이것은 x 대신 y에 대하여 적분하는 것의 이산적인 형태이다.

검산

$n=2$이면 계단은 높이 1, 폭 $\ln 2$인 직사각형 하나이고, 공식은 $2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$를 준다. $n=4$이면 공식은 $4\ln 4 - \ln 24 \approx 2.3671$을 준다. 중점 공식(midpoint rule)으로 $\int_0^{\ln 4}[\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$를 계산하면 소수점 아래 다섯째 자리까지 일치하며, 8 이하의 모든 n에 대해서도 마찬가지이다. 또한 계단이 곡선 아래에 놓이므로 답은 $\int_0^{\ln n}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = n-1$보다 작아야 한다. 실제로 $n=4$일 때 $2.37 < 3$이다.

흔한 실수

- 높이 k인 계단의 폭을 $\ln(k+1)-\ln k$가 아니라 (앞 문항을 그대로 따라) 1로 놓는 실수.
- 계단을 높이 0에서 시작하는 실수. $0 \le x < \ln n$에서는 $\mathrm{e}^x \ge 1$이므로 가장 낮은 계단의 높이는 1이다.

- 첨자를 잘못 옮겨 $(n-1)\ln n$ 항을 놓치거나, 이 항이 $\ln((n-1)!)$과 합쳐져 $\ln(n!)$이 되어야 한다는 점을 알아채지 못하는 실수.

STEP 너머

계단이 $y = \mathrm{e}^x$ 아래에 놓이므로 적분값은 $n-1$보다 작고, 이를 정리하면 $\ln(n!) > n\ln n - n + 1$이다. 같은 방식으로 계단을 위에서 어림하면 스털링 공식(Stirling's formula) $\ln(n!) \approx n\ln n - n$으로 나아갈 수 있는데, 이는 해석학, 확률론, 조합론에서 핵심적인 어림식이다. 직사각형의 합을 띠의 합으로 바꾸는 것은 또한 "부분 합산(summation by parts)"의 한 예이며, 이것은 부분적분(integration by parts)의 이산적인 사촌이다. 계단 함수의 적분을 엄밀한 토대 위에 세우는 다음 단계로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋다.

풀이

STEP I 2000, 문제 4

순수수학 • 적분의 상계와 하계

STEP I 2000, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s1-q4

핵심 아이디어

$1/(x^2+1)^4$은 초등적인 방법으로 쉽게 적분할 수 없으므로, 문제는 이를 두 조각으로 나눈다. 하나는 저절로 적분되는 어떤 함수의 도함수(exact derivative)이고, 다른 하나는 크기가 작은 나머지 항이다. 소문항 (ii)에서 이 분해를 만들고, 소문항 (i)에서 나머지 항의 상계(bound)를 얻는다. 적분값을 어림할 때는 보통 피적분함수(integrand)를 어림한 다음 구간의 길이를 곱한다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = \dfrac{x^6}{(x^2+1)^4}$라 하자. f는 x^2에만 의존하므로 $t = x^2$으로 치환(substitution)하면, x가 $[0,1]$에서 움직일 때 t도 $[0,1]$에서 움직이고 $f = g(t)$이다. 여기서

$$g(t) = \frac{t^3}{(1+t)^4}.$$

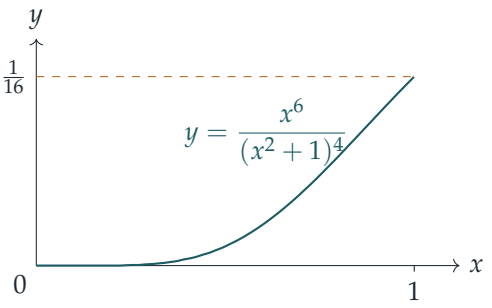
몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$g'(t) = \frac{3t^2(1+t)^4 - 4t^3(1+t)^3}{(1+t)^8} = \frac{t^2\big(3(1+t) - 4t\big)}{(1+t)^5} = \frac{t^2(3-t)}{(1+t)^5}.$$

$0 < t \le 1$일 때 모든 인수가 양수이므로(특히 $3 - t \ge 2$), $g'(t) > 0$이고 g는 $[0,1]$에서 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 최댓값은 $t = 1$, 즉 $x = 1$에서 나타나고

$$f(1) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 또한 구간 전체에서 $f(x) \ge 0$이고, 최솟값은 $f(0) = 0$이다.



소문항 (ii)

괄호 안의 식을 몫의 미분법으로 미분한다. $N = Ax^5 + Bx^3 + Cx$라 하고 분모 $(x^2+1)^3$의 도함수가 $6x(x^2+1)^2$임을 이용하면, $(x^2+1)^2$ 인수 하나가 약분되어

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{N}{(x^2+1)^3}\right) = \frac{(5Ax^4+3Bx^2+C)(x^2+1) - 6x(Ax^5+Bx^3+Cx)}{(x^2+1)^4}.$$

분자를 전개하여 x의 거듭제곱끼리 정리하면

$$\begin{aligned} &5Ax^6 + 5Ax^4 + 3Bx^4 + 3Bx^2 + Cx^2 + C - 6Ax^6 - 6Bx^4 - 6Cx^2 \\ &\quad = -Ax^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C. \end{aligned}$$

이제 모든 항의 분모가 $(x^2+1)^4$이므로, 이 항등식(identity)이 모든 x에 대하여 성립할 필요충분조건은 분자가 다항식으로서 같은 것이다.

$$(D-A)x^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C = 1.$$

낮은 차수부터 계수를 비교(comparing coefficients)하면 $C = 1$이고, 이어서 $3B = 5C = 5$, $5A = 3B = 5$, $D = A$이다. 따라서

$$A = 1, \qquad B = \tfrac{5}{3}, \qquad C = 1, \qquad D = 1.$$

소문항 (iii)

소문항 (ii)의 항등식을 $[0,1]$에서 적분한다. 우변의 첫째 항은 어떤 함수의 도함수이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} &= \left[\frac{x^5 + \frac{5}{3}x^3 + x}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1+\frac{5}{3}+1}{8} - 0 + J = \frac{11}{24} + J, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$이다.

생각해 보기 J를 직접 계산하지 않고 어떻게 어림할 수 있을까?

소문항 (i)에 의해 J의 피적분함수는 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $0 \le f(x) \le \frac{1}{16}$을 만족한다. 이 부등식을 길이가 1인 구간에서 적분하면

$$0 \le J \le \frac{1}{16} \times 1 = \frac{1}{16}.$$

각 변에 $\frac{11}{24}$를 더하면

$$\frac{11}{24} \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \le \frac{11}{24} + \frac{1}{16},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. (f는 연속이고 구간 전체에서 어느 한계값과도 항상 같지는 않으므로 사실 두 부등식 모두 등호 없이 성립하지만, 문제에서는 $\le$만 요구한다.)

검산

- 소문항 (ii)의 항등식에 $x = 0$을 대입하면 도함수 항은 $C = 1$이고 D 항은 0이 되어 $1 = 1$을 얻는다. $x = 1$에서는 도함수의 분자가 $-1+0+0+1 = 0$이므로 항등식은 $\frac{1}{16} = \frac{D}{16}$이 되어 $D = 1$과 들어맞는다.
- 수치적으로 심프슨 공식(Simpson's rule)을 쓰면 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \approx 0.47460$이고, 이는 $\frac{11}{24} \approx 0.45833$과 $\frac{11}{24} + \frac{1}{16} \approx 0.52083$ 사이에 넉넉히 들어간다. f는 $x = 1$ 근처를 제외하면 매우 작으므로, 나머지 $J \approx 0.01627$은 $\frac{1}{16}$보다 훨씬 작다.

흔한 실수

- 몫의 미분법에서 공통인수 $(x^2+1)^2$을 약분하지 않아 분모가 $(x^2+1)^6$으로 남고, 계수 비교가 엉망이 되는 경우.
- 소문항 (i)에서 $x = 1$이 정상점(stationary point)이거나 끝점(endpoint)이라는 것만 확인하는 경우. 끝점에서의 값이 최댓값임을 알려면 f가 증가함을 보이거나 모든 후보를 비교해야 한다.

STEP 너머

$x = \tan\theta$로 치환하면 이 적분은 $\int_0^{\pi/4} \cos^6\theta \, \mathrm{d}\theta$가 되고, 이는 점화식(reduction formula)을 이용하여 정확히 계산할 수 있다. 그 값은 $\frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}$로, 앞의 수치 추정과 일치한다. 피적분함수를 "어떤 함수의 도함수와 작은 나머지"로 나누는 것이 점화식의 바탕에 있는 아이디어이고, 피적분함수를 어림하여 적분을 어림하는 것은 해석학(real analysis)의 기본적인 추

정이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(해석학 입문)에서 이러한 추정을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2000, 문제 5

순수수학 • 3차원 벡터

> **STEP I 2000, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q5

핵심 아이디어

모든 일은 경사면 위에서 일어나므로, **그 평면 안에** 서로 수직인 두 단위벡터(unit vector)를 잡는다. 하나는 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 곧장 위쪽을 향하고, 다른 하나는 수평 방향이다. 그러면 아서(Arthur)와 버사(Bertha)의 위치는 이 두 벡터의 간단한 일차결합이 되고, 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formulae)을 쓰면 두 위치의 차가 곧바로 깔끔하게 정리된다. 연직선과 이루는 각을 구하려면 평면 안의 두 방향이 각각 연직 방향에 대해 어떻게 놓여 있는지만 알면 되는데, 바로 여기서 θ가 등장한다.

풀이

설정하기

$\mathbf{e}$를 O를 지나는 가장 가파른 선을 따라 위쪽을 향하는 단위벡터라 하고, $\mathbf{f}$를 평면 안에서 $\mathbf{e}$에 수직이며 두 사람이 걷는 쪽을 향하는 단위벡터라 하자. $\mathbf{f}$는 최대 경사선에 수직이므로 수평이다. $\mathbf{k}$를 연직 위쪽을 향하는 단위벡터라 하자. 그러면

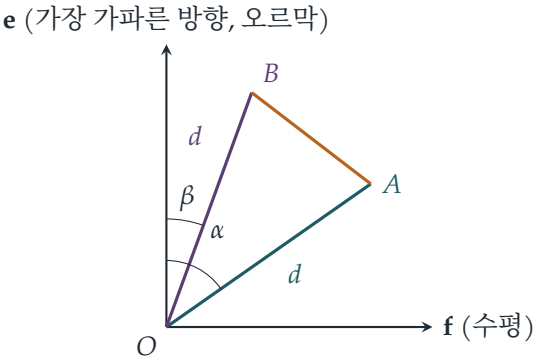
$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{k} = \sin\theta, \qquad \mathbf{f}\cdot\mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{f} = 0.$$

이다. (첫 번째 식이 성립하는 까닭은 $\mathbf{e}$가 수평면과 각 θ를 이루므로 $\mathbf{k}$와는 각 $\frac{\pi}{2} - \theta$를 이루기 때문이다.)

두 사람은 같은 속력으로 걸으므로, 아서가 거리 d만큼 걸었을 때 버사도 거리 d만큼 걸었다. O에 대한 두 사람의 위치는

$$\mathbf{a} = d(\cos\alpha\,\mathbf{e} + \sin\alpha\,\mathbf{f}), \qquad \mathbf{b} = d(\cos\beta\,\mathbf{e} + \sin\beta\,\mathbf{f}).$$

이다. 가장 가파른 선의 같은 쪽에서 오르막으로 걷는다는 것은 $0 \le \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$라는 뜻이다.



이 그림은 경사면 자체를 정면으로 바라보며 그린 것이다.

두 사람 사이의 거리

합을 곱으로 바꾸는 공식을 쓰면

$$\begin{aligned}\mathbf{a}-\mathbf{b} &= d\big[(\cos\alpha-\cos\beta)\,\mathbf{e}+(\sin\alpha-\sin\beta)\,\mathbf{f}\big]\\ &= d\big[-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{e}+2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{f}\big]\\ &= 2d\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\big[-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{f}\big].\end{aligned}$$

이다. $s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$라 하자. $\mathbf{e}$와 $\mathbf{f}$는 서로 수직인 단위벡터이고 $\sin^2 s+\cos^2 s=1$이므로, 벡터 $\mathbf{u}=-\sin s\,\mathbf{e}+\cos s\,\mathbf{f}$는 단위벡터이다. 따라서

$$AB=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2d\,\big|\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\big|,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (기하적으로 보면, OAB는 두 등변의 길이가 d이고 꼭지각이 $|\alpha-\beta|$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이다. O에서 수선을 내리면 같은 답을 얻는다.)

연직선과 이루는 각

$\alpha\neq\beta$이면 $0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\neq 0$이다. 따라서 $A\neq B$이고 직선 AB가 잘 정의된다. 위의 계산은 이 직선이 단위벡터 $\mathbf{u}$에 평행함을, 다시 말해 $\mathbf{v}=-\mathbf{u}=\sin s\,\mathbf{e}-\cos s\,\mathbf{f}$에 평행함을 보여 준다.

> ? **생각해 보기** 직선에는 두 방향이 있다. 그중 어느 방향을 연직 방향과 비교해야 할까?

직선과 연직선 사이의 각은 예각(또는 직각)이므로, 직선을 따르는 방향 가운데 위쪽을, 적어도 아래쪽은 아닌 쪽을 향하는 방향을 쓴다. 이제

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}=\sin s\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k})-\cos s\,(\mathbf{f}\cdot\mathbf{k})=\sin\theta\sin s.$$

이다. $0 \le s < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 이 값은 음이 아니며, 따라서 $\mathbf{v}$가 위쪽 방향이다. $\mathbf{v}$와 $\mathbf{k}$가 모두 단위벡터이므로 둘 사이의 각 ϕ는

$$\cos\phi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = \sin\theta \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

를 만족하고, 이것이 구하는 결과이다. 이 값이 d에 의존하지 않는다는 점에 주목하자. 두 사람이 걷는 동안 직선 AB는 자기 자신과 평행하게 움직인다.

검산

- 아서가 수평으로 걷고($\alpha = \frac{\pi}{2}$, 경계의 경우) 버사가 곧장 위로 걸으면($\beta = 0$), $AB = 2d\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,d$인데, 이는 길이가 d인 서로 수직인 두 경로에 대한 피타고라스(Pythagoras) 정리이다. $\theta = 30^\circ$, $d = 1$로 두고 좌표로 계산하면 $A = (1,0,0)$, $B = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$이므로, B에서 A까지 거리 $\sqrt{2}$ 동안 연직으로 $\frac{1}{2}$만큼 내려간다. 따라서 $\cos\phi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.354$이고, 이는 $\sin 30^\circ \sin 45^\circ$와 일치하며 $\phi \approx 69.3^\circ$이다.
- 평면이 수평이면($\theta = 0$) $\cos\phi = 0$이다. 즉 직선은 수평인데, 마땅히 그래야 한다.
- 실제 3차원 좌표에서 θ, α, β, d를 무작위로 10^5번 골라 컴퓨터로 확인한 결과, 두 공식 모두와 10^{-12} 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- 공간에서 연직선과 이루는 각 대신 평면 안에서 AB와 가장 가파른 선 사이의 각을 재는 실수. 답에는 반드시 θ가 나타나야 한다.
- 절댓값을 빠뜨리는 실수. $\beta > \alpha$이면 $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$는 음수이지만, 거리는 음수가 아니다.
- AB를 따라 아래쪽 방향을 잡아서 $\cos\phi = -\sin\theta\sin s$를 얻는 실수. 직선이 연직선과 이루는 각은 결코 둔각이 아니다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 문제에 맞춘 정규직교기저(orthonormal basis)를 고르고(평면 안의 두 벡터를 잡은 다음, 이를 주변 공간의 연직 방향과 관련짓는다), 내적(dot product)으로부터 길이와 각을 읽어 내는 것이다. 대학 1학년 선형대수학 강의에서 이것은 기저 변환(change of basis)과 정사영(orthogonal projection)의 개념으로 발전한다. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$는 $\mathbf{v}$를 연직 방향으로 정사영한 길이이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 풍부한 기하적 설명과 함께 이러한 개념들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2000, 문제 6

순수수학 • 직선으로 둘러싸인 영역

STEP I 2000, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s1-q6

핵심 아이디어

x와 y에 대한 이차식(quadratic expression)이 두 일차식의 곱으로 인수분해(factorise)되면, 그 식은 두 직선의 쌍을 나타낸다. 두 인수의 곱은 두 인수의 부호가 같을 때 정확히 양수이고, 부호가 다를 때 음수이다. 따라서 각 부등식은 교차하는 두 직선 사이에서 서로 마주 보는 한 쌍의 "쐐기(wedge)" 영역을 골라낸다. 두 영역을 같은 좌표축 위에 그리고 나면, 공통인 점을 찾는 일은 그림을 보기만 하면 된다.

풀이

첫 번째 인수분해와 영역

우변을 전개하면

$$\begin{aligned}(x-y+2)(x+y-1) &= x^2+xy-x-xy-y^2+y+2x+2y-2\\ &= x^2-y^2+x+3y-2,\end{aligned}$$

이므로 요구한 대로이다. 따라서 첫 번째 부등식은 양변에서 2를 빼면

$$(x-y+2)(x+y-1) > 0.$$

이 된다. 경계(boundary)는 두 직선

$$L_1:\ y = x+2, \qquad L_2:\ y = 1-x,$$

로 이루어진다. 두 직선의 기울기(gradient)는 각각 1과 -1이고, $x+2 = 1-x$일 때, 즉 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$에서 만난다.

곱은 두 인수의 부호가 같을 때 양수이다.

- 둘 다 양수인 경우: $y < x + 2$이고 $y > 1 - x$, 즉 L_1의 아래쪽이면서 L_2의 위쪽이다. 이것은 교점의 **오른쪽** 쐐기이다(예를 들어 $(5, 0)$을 포함한다).
- 둘 다 음수인 경우: $y > x + 2$이고 $y < 1 - x$, 즉 L_1의 위쪽이면서 L_2의 아래쪽이다. 이것은 교점의 **왼쪽** 쐐기이다($(-5, 0)$을 포함한다).

따라서 이 영역은 직선 $y = x + 2$와 $y = 1 - x$ 사이에서 왼쪽과 오른쪽으로 마주 보는 한 쌍의 쐐기이며, 직선 자체는 제외된다(직선 위에서 곱은 0이고, > 0이 아니다). 간단히 확인해 보자. 원점에서 식의 값은 $-2 < 0$이고, 원점은 아래쪽 쐐기에 있으므로 올바르게 제외된다.

두 번째 영역

> **생각해 보기** 이 식도 인수분해된다는 것을 어떻게 알 수 있을까? 그리고 인수는 어떤 모양이어야 할까?

이차항 $x^2 - 4y^2 = (x + 2y)(x - 2y)$을 보면

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = (x + 2y + a)(x - 2y + b).$$

의 꼴을 시도해 볼 만하다. 우변을 전개하면 $x^2 - 4y^2 + (a + b)x + (2b - 2a)y + ab$이다. 계수를 비교(matching coefficients)하면 $a + b = 3$, $b - a = -1$이므로 $a = 2$, $b = 1$이고, 이때 상수항 $ab = 2$도 일치한다. 따라서 두 번째 부등식의 양변에 2를 더하면

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y < -2 \iff (x + 2y + 2)(x - 2y + 1) < 0.$$

이다. 경계 직선은

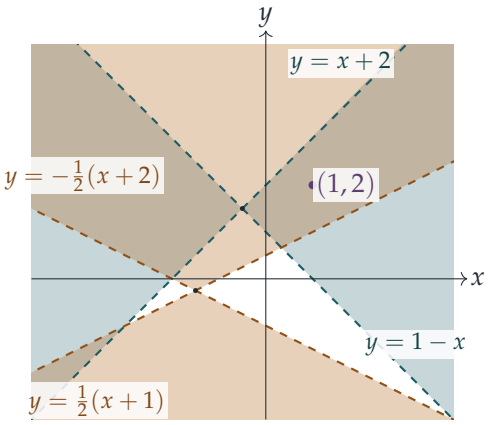
$$L_3 : \ y = -\tfrac{1}{2}(x + 2), \qquad L_4 : \ y = \tfrac{1}{2}(x + 1),$$

이고, 기울기는 $-\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{2}$이며, $-x - 2 = x + 1$일 때, 즉 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$에서 만난다.

이제 두 인수의 부호가 **서로 달라야** 한다.

- $x + 2y + 2 > 0$이고 $x - 2y + 1 < 0$인 경우: $y > -\frac{1}{2}(x + 2)$이고 $y > \frac{1}{2}(x + 1)$, 즉 두 직선 모두의 위쪽이다. 이것은 **위쪽** 쐐기이다($(0, 5)$를 포함한다).
- $x + 2y + 2 < 0$이고 $x - 2y + 1 > 0$인 경우: 두 직선 모두의 아래쪽이다. 이것은 **아래쪽** 쐐기이다($(0, -5)$를 포함한다).

따라서 두 번째 영역은 직선 L_3과 L_4 사이에서 위와 아래로 마주 보는 한 쌍의 쐐기이며, 이번에도 경계는 제외된다.



그림에서 첫 번째 영역은 청록색(왼쪽과 오른쪽 쐐기), 두 번째 영역은 호박색(위쪽과 아래쪽 쐐기)으로 칠했으므로, 더 진하게 겹친 부분이 두 부등식이 모두 성립하는 곳이다. 점선은 영역에 포함되지 않는다.

두 영역에 모두 속하는 점

두 쌍의 쐐기는 분명히 겹친다. 오른쪽 청록색 쐐기는 기울기 ± 1인 두 직선 사이에서 오른쪽으로 벌어지고, 위쪽 호박색 쐐기는 기울기가 $\pm\frac{1}{2}$인 더 완만한 두 직선 모두의 위쪽에 있는 모든 점을 포함한다. $x > -\frac{1}{2}$에서는 청록색 쐐기의 윗변 $y = x + 2$가 직선 $y = \frac{1}{2}(x+1)$보다 더 빠르게 올라가므로, 둘 사이에 공간이 생긴다.

예를 들어 $(x, y) = (1, 2)$를 잡자. 그러면

$$x^2 - y^2 + x + 3y = 1 - 4 + 1 + 6 = 4 > 2$$

이고

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = 1 - 16 + 3 - 4 = -16 < -2,$$

이므로 $(1, 2)$는 두 부등식을 모두 만족한다. (인수로 확인하면 $(x - y + 2)(x + y - 1) = 1 \cdot 2 > 0$이고 $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot (-2) < 0$이다.)

검산

- 각 인수분해는 임의의 점에서 확인할 수 있다. $(3, 1)$에서 $x^2 - y^2 + x + 3y - 2 = 12$이고 $(x - y + 2)(x + y - 1) = 4 \cdot 3 = 12$이다. 같은 점에서 $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = 14$이고 $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot 2 = 14$이다.
- 각 쐐기에서 점을 하나씩 확인한다. 예를 들어 $(0, -5)$에서는 $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = -90 < -2$이므로, 아래쪽 호박색 쐐기가 두 번째 영역에 속함을 확인할 수 있다.

- $[-10, 10]^2$에서 무작위로 고른 200 000개의 점으로 수치 검사를 해 보았더니, 부등식과 위의 쐐기 설명이 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- 엉뚱한 쌍의 쐐기를 칠하는 실수. "위쪽", "아래쪽"이라는 말에 의존하지 말고 항상 점 하나를 대입해 확인하라(원점이 가장 쉽다).
- 상수를 이항할 때 -2와 $+2$를 빠뜨리는 실수. 첫 번째 부등식은 $(x-y+2)(x+y-1) > 0$이고, 두 번째는 $(x+2y+2)(x-2y+1) < 0$이다.
- 경계 직선을 실선으로 그리는 실수. 부등식에 등호가 없으므로 직선은 제외된다.

STEP 너머

두 변수에 대한 이차식 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$는 원뿔곡선(conic)을 정의한다. 이 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되면 원뿔곡선은 두 직선의 쌍인 **퇴화**(*degenerate*) 원뿔곡선이 되며, 이는 계수로 만든 어떤 3×3 행렬식(determinant)이 0이 될 때 정확히 일어난다. 이차형식(quadratic form)의 부호 패턴(여기서는 $x^2 - y^2$와 $x^2 - 4y^2$로, 둘 다 부정부호(indefinite)이다)은 대학 1학년 선형대수(linear algebra)에서 대칭행렬(symmetric matrix)과 그 고윳값(eigenvalue)을 통해 공부한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)에서 이 내용을 살펴보기 좋다.

풀이

STEP I 2000, 문제 7

순수수학 • 도함수의 한계

> **STEP I 2000, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q7

핵심 아이디어

미분하면 조건 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$은 "a가 x에 관한 어떤 함수보다 크거나 같다"는 조건이 된다. 따라서 모든 것은 그 함수의 **최댓값**에 달려 있다. 이 함수는 x^2에만 의존하며, 치환 $u = 1 + x^2$를 하면 $1/u$에 관한 이차식이 된다. 그러면 완전제곱식(completing the square)으로 고쳐서 최댓값을 구할 수 있고, 최댓값이 정확히 어디에서 나타나는지도 알 수 있다.

풀이

도함수

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right) = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2},$$

이므로

$$\mathrm{f}'(x) = a - g(x), \qquad \text{여기서} g(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}.$$

따라서 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$인 것은 모든 x에 대하여 $a \geq g(x)$인 것과 정확히 같다. 이제 g의 최댓값을 구해야 한다.

g의 최댓값

$u = 1 + x^2$로 놓으면 $u \geq 1$이고 $x^2 = u - 1$이다. 그러면

$$g = \frac{(u-1)(u+2)}{u^2} = \frac{u^2 + u - 2}{u^2} = 1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}.$$

생각해 보기 이 식을 u가 아니라 $1/u$로 나타내는 것이 왜 좋은 생각일까?

$s = 1/u$로 나타내면 $g = 1 + s - 2s^2$으로 그저 이차식이 되고, 이차식의 최댓값은 미적분 없이 완전제곱식으로 고쳐서 구할 수 있다.

$$1 + s - 2s^2 = \frac{9}{8} - 2\left(s - \frac{1}{4}\right)^2.$$

제곱은 결코 음수가 아니므로 모든 x에 대하여 $g \le \frac{9}{8}$이고, 등호는 $s = \frac{1}{4}$, 즉 $u = 4$, $x = \pm\sqrt{3}$일 때만 성립한다.

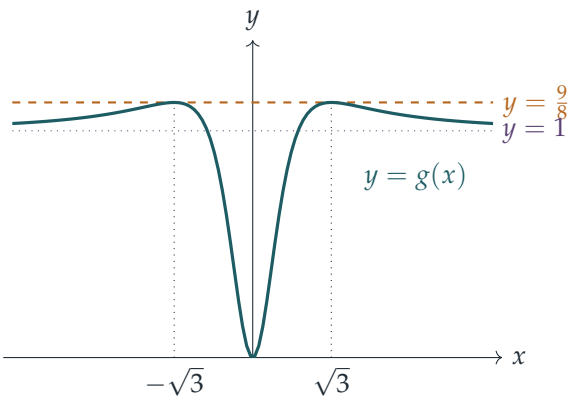
이것을 다시 x로 나타내면($s - \frac{1}{4} = \frac{3-x^2}{4(1+x^2)}$을 이용한다) 도함수에 대한 깔끔한 항등식을 얻는다.

$$\mathrm{f}'(x) = \left(a - \frac{9}{8}\right) + \frac{(3-x^2)^2}{8(1+x^2)^2}.$$

결론

$a \ge \frac{9}{8}$이면 첫 번째 괄호는 음이 아니고, 두 번째 항은 제곱을 양수로 나눈 것이므로 역시 음이 아니다. 따라서 요구한 대로 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}'(x) \ge 0$이다.

상수 $\frac{9}{8}$은 또한 가장 좋은 값이다. $a < \frac{9}{8}$이면 $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = a - \frac{9}{8} < 0$이기 때문이다. $a = \frac{9}{8}$일 때 f'은 $x = \pm\sqrt{3}$에서만 0이므로, f는 여전히 순증가(strictly increasing)하며 정류 변곡점(stationary point of inflection) 두 개를 가진다.



g의 그래프는 0에서 올라가 극한값 1을 넘어서고, $x = \pm\sqrt{3}$에서 최댓값 $\frac{9}{8}$에 이른 뒤 다시 1을 향해 내려간다. 도함수 $\mathrm{f}'(x)$는 직선 $y = a$가 이 곡선보다 위에 있는 높이이다.

검산

- $x = \sqrt{3}$에서: $g = \dfrac{3 \cdot 6}{4^2} = \dfrac{18}{16} = \dfrac{9}{8}$. ✓
- $x \to \infty$일 때 $g \to 1 < \frac{9}{8}$이다. x가 클 때 $\frac{x^3}{1+x^2}$은 x처럼 행동하므로 그 기울기가 1에 가까워지는 것이 타당하다.
- 수치적으로, $a = \frac{9}{8}$일 때 $[-100, 100]$에서 간격 0.001인 격자 위의 $\mathrm{f}'(x)$의 최솟값은 약 2×10^{-10}이다($x \approx \pm\sqrt{3}$에서 사실상 0). $a = 1.1$이면 $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = -0.025 < 0$이다.

흔한 실수

- 무한대에서 g의 극한값 1을 최댓값으로 착각하는 것. 곡선이 1을 넘어서기 때문에 답은 1이 아니라 $\frac{9}{8}$이다.
- g를 직접 미분하다가 계산 속에서 길을 잃는 것. 치환 $s = 1/(1+x^2)$을 하면 한 줄짜리 완전제곱식 변형으로 바뀐다.

STEP 너머

여기서는 "모든 x에 대하여"라는 명제를 **상한**(supremum)을 구하는 문제로 바꾸었다. 즉 모든 곳에서 $\mathrm{f}' \geq 0$인 것은 $a \geq \sup g$인 것과 정확히 같다. g가 무한대에서 극한값을 가지지만 최댓값은 유한한 점에서 나타난다는 사실은, 극한값이 반드시 경계가 되는 것은 아니라는 좋은 경고이다. 해석학(analysis)에서는 도함수가 음이 아닌 함수가 증가함수임을 (평균값 정리(Mean Value Theorem)를 이용하여) 증명하게 되는데, 이 때문에 이 문제는 사실 f가 단조(monotonic)인지를 묻는 문제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 이러한 아이디어들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2000, 문제 8

순수수학 • 절댓값의 적분

> **STEP I 2000, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q8

핵심 아이디어

적분 안에 절댓값(modulus) 기호가 있으면, 절댓값 안의 식의 부호가 바뀌는 곳을 찾아서 처리한다. 부호가 바뀌는 점들 사이의 각 구간에서 $|f|$는 f이거나 $-f$이므로, 그 점들에서 적분 구간을 나누고 보통의 함수를 적분하면 된다. 실제로 해야 할 일은 모두 영점을 찾는 데 있다. $x\mathrm{e}^x$는 눈으로 보고, 삼차식(cubic)은 인수분해(factorising)하여, $\sin x + \cos x$는 하나의 사인파로 나타내어 영점을 찾는다.

풀이

첫 번째 적분

모든 x에 대하여 $\mathrm{e}^x > 0$이므로 $x\mathrm{e}^x$의 부호는 x의 부호와 같다. 따라서 $[-1,0]$에서는 $x\mathrm{e}^x \le 0$이고 $|x\mathrm{e}^x| = -x\mathrm{e}^x$이며, $[0,1]$에서는 $x\mathrm{e}^x \ge 0$이고 $|x\mathrm{e}^x| = x\mathrm{e}^x$이다. 적분 구간을 0에서 나누면

$$\int_{-1}^{1} |x\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,$$

이고, 이것이 구하는 등식이다.

값을 계산하기 위해 $u = x$, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$로 놓고 부분적분(integration by parts)을 한다.

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x + c.$$

따라서

$$\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0} = -1-(-2e^{-1}) = \frac{2}{e}-1,$$
$$\int_{0}^{1} xe^x\,dx = \left[(x-1)e^x\right]_{0}^{1} = 0-(-1) = 1.$$

이 중 첫 번째 값은 음수이며(그 구간에서 피적분함수(integrand)가 음수이므로 당연히 그래야 한다),

$$\int_{-1}^{1} |xe^x|\,dx = \left(1-\frac{2}{e}\right)+1 = 2-\frac{2}{e}.$$

소문항 (i)

$p(x) = x^3-2x^2-x+2$라 하자. 항을 묶으면

$$p(x) = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x-2).$$

$[0,4]$에 있는 영점은 $x=1$과 $x=2$뿐이다. 최고차항의 계수가 양수이고 단순근 $-1,1,2$를 갖는 삼차식은 -1과 1 사이에서 양수, 1과 2 사이에서 음수, 2보다 큰 곳에서 양수이다. 따라서

$$|p(x)| = \begin{cases} p(x), & 0\le x\le 1,\\ -p(x), & 1\le x\le 2,\\ p(x), & 2\le x\le 4. \end{cases}$$

부정적분(antiderivative)으로

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+2x,$$

를 택하면

$$F(0)=0, \qquad F(1)=\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}+2=\tfrac{13}{12},$$
$$F(2)=4-\tfrac{16}{3}-2+4=\tfrac{2}{3}, \qquad F(4)=64-\tfrac{128}{3}-8+8=\tfrac{64}{3}.$$

생각해 보기 왜 그냥 $F(4)-F(0)$을 계산한 뒤 절댓값을 취하면 안 될까?

절댓값은 답이 아니라 피적분함수에 적용해야 하기 때문이다. $[1,2]$에서 삼차식은 음수이므로, $F(4)-F(0)$은 그 부분의 넓이를 더하는 대신 빼 버린다. 그래서 세 부분을 따로 다룬다.

$$\begin{aligned}\int_0^4 |p(x)|\,dx &= \big(F(1)-F(0)\big)-\big(F(2)-F(1)\big)+\big(F(4)-F(2)\big)\\ &= \tfrac{13}{12}-\big(\tfrac{2}{3}-\tfrac{13}{12}\big)+\big(\tfrac{64}{3}-\tfrac{2}{3}\big)\\ &= \tfrac{13}{12}+\tfrac{5}{12}+\tfrac{62}{3} = \tfrac{3}{2}+\tfrac{62}{3} = \frac{133}{6}.\end{aligned}$$

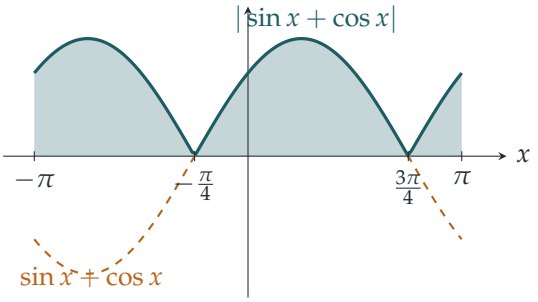
각 괄호의 값은 마땅히 그래야 하듯 모두 양수이다. $\frac{13}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{62}{3}$은 서로 다른 세 부분의 넓이이다. (비교하자면 $F(4)-F(0)=\frac{64}{3}$이고, 이는 $2\times\frac{5}{12}$만큼 작다.)

소문항 (ii)

$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$를 이용하면

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right).$$

이 식은 $[-\pi, \pi]$에서 $x = -\frac{\pi}{4}$와 $x = \frac{3\pi}{4}$일 때 0이 된다. $[-\pi, -\frac{\pi}{4}]$와 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$에서는 음수이고, 그 사이에서는 양수이다.



앞에서처럼 세 부분으로 나눌 수도 있지만, 더 깔끔한 방법이 있다. $u = x + \frac{\pi}{4}$로 치환(substitute)하면

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x + \cos x|\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4} |\sin u|\,\mathrm{d}u.$$

함수 $|\sin u|$의 주기(period)는 π이고, 새 적분 구간의 길이는 2π이므로 정확히 두 주기를 덮는다. 주기함수(periodic function)를 정수 개의 주기에 걸쳐 적분한 값은 시작점에 관계없으므로

$$\sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4} |\sin u|\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\times 2\int_{0}^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\times 2\times 2 = 4\sqrt{2}.$$

직접 나누는 방법을 선호한다면, $G(x) = \sin x - \cos x$는 $\sin x + \cos x$의 부정적분이고 $G(-\pi) = 1$, $G(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$, $G(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}$, $G(\pi) = 1$이다. 세 부분의 넓이는 $1+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1$이고, 이를 더하면 $4\sqrt{2}$이다.

검산

- (피적분함수가 매끄러운) 각 부분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 첫 번째 적분의 값으로 1.264241…을 얻고, 이는 $2 - 2/\mathrm{e} \approx 1.264241$과 일치한다.
- (i)에서 수치적분을 하면 22.16667을 얻고, 이는 $\frac{133}{6}$과 일치한다. 또한 이 값은 $F(4) - F(0) = \frac{64}{3} \approx 21.33$보다 조금 큰데, 절댓값이 작은 음의 넓이를 양의 넓이로 바꾸므로 당연히 그래야 한다.

- (ii)에서 수치적분을 하면 5.656854를 얻고, 이는 $4\sqrt{2}$와 일치한다. 타당성 검사: $|\sin x + \cos x|$는 $\sqrt{2}|\sin x|$와 모양이 같고, 그 평균값은 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$이며, $2\pi \times \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 4\sqrt{2}$이다.

흔한 실수

- 부호가 바뀌는 점을 그대로 가로질러 적분한 뒤 마지막에 절댓값을 취하는 것. 이렇게 하면 음수인 영역을 모두 적게 셈하게 된다.
- (i)에서 근 $x = 1$을 놓치는 것. 항상 완전히 인수분해하거나, 적어도 인수정리(factor theorem)로 작은 정수근을 확인하라.
- $\left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0}$에서의 부호 실수. $x = -1$에서의 값은 $-2\mathrm{e}^{-1}$이므로, 이를 빼면 $2/\mathrm{e}$를 더하는 것이 된다.

STEP 너머

적분 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$는 곡선과 축 사이의 전체 넓이이다. 대학에서는 이것이 f의 L^1 노름(L^1 norm)으로 다시 등장하는데, 이는 함수의 크기와 두 함수 사이의 거리를 재는 한 가지 방법이다. f가 적분가능(integrable)하면 $|f|$도 적분가능하다는 것과 $\left|\int f\right| \le \int |f|$임을 증명하는 것은 실해석(real analysis)의 초반에 나오는 표준적인 연습문제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 리만 적분(Riemann integral)을 이 두 가지를 모두 증명할 수 있을 만큼 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2000, 문제 9

역학 • 가속 좌표계에서의 포물체

> **STEP I 2000, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q9

핵심 아이디어

도달 거리(range)는 **객차 안에서** 측정하므로, 객차의 기준틀(frame of reference)에서 생각한다. 객차가 북쪽으로 가속도(acceleration) a로 가속하므로, 바닥에 대한 포탄의 가속도는 아래쪽으로 g에 더해 남쪽으로 a이며, 남쪽은 대포가 발사하는 방향이다. 운동은 여전히 등가속도 포물체 운동(projectile motion)이고, 수평 방향 항이 하나 더 있을 뿐이다. 도달 거리를 2θ로 나타내고 나면, 이를 최대화하는 것은 한 줄짜리 미분(differentiation)이다.

풀이

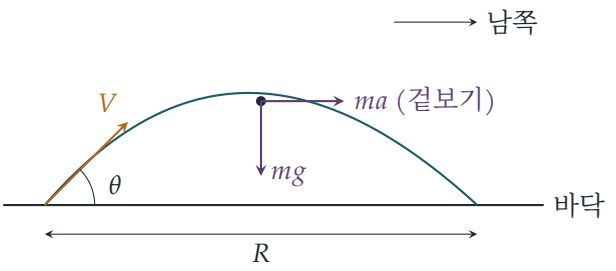
객차 안에서의 도달 거리

포탄을 질점(particle)으로 모형화하고 공기 저항(air resistance)은 무시한다. 포탄은 바닥 높이에서 발사되어 바닥에 떨어지며, 객차는 포탄이 그 안에 떨어질 만큼 충분히 길다고 가정한다. x축은 수평으로 남쪽(발사 방향)을 향하게, y축은 연직 위쪽을 향하게 잡고, 둘 다 객차에 대하여 측정한다.

지면 기준틀에서 포탄의 가속도는 아래쪽으로 g이고 수평 방향 가속도는 없다. 객차의 가속도는 북쪽으로 a이다. 따라서 **객차에 대한** 포탄의 가속도는

$$\ddot{x} = 0 - (-a) = a, \qquad \ddot{y} = -g.$$

이다. 같은 말로, 객차의 기준틀에서는 질량 m인 포탄에 무게 외에도 남쪽으로 크기 ma인 겉보기 힘(apparent force)이 작용한다.



객차에 대한 처음 속도는 남쪽으로 $V\cos\theta$, 위쪽으로 $V\sin\theta$이므로

$$x = Vt\cos\theta + \tfrac{1}{2}at^2, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 연직 방향 운동은 a의 영향을 받지 않는다. 포탄은 $t > 0$에서 $y = 0$일 때, 즉 $T = \dfrac{2V\sin\theta}{g}$에 떨어진다. 따라서 객차 안에서의 도달 거리는

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2V^2\sin\theta\cos\theta}{g} + \frac{a}{2}\cdot\frac{4V^2\sin^2\theta}{g^2} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$와 $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$를 이용하였다.

도달 거리의 최대화

θ에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2V^2}{g}\left(\cos 2\theta + \frac{a}{g}\sin 2\theta\right),$$

이고, 이것은

$$\boxed{\tan 2\theta = -\frac{g}{a}.}$$

일 때 영이 된다.

생각해 보기 탄젠트 값이 음수라니? 무언가 잘못되었다는 뜻일까?

그렇지 않다. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이면 $0 < 2\theta < \pi$이고, $\tan 2\theta < 0$은 단지 2θ가 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있다는 뜻이므로 $\theta > \frac{\pi}{4}$이다. 이는 이치에 맞는다. 추가로 미는 힘 a는 포탄이 공중에 있는 동안 계속 작용하므로, 45°보다 조금 높게 쏘아 비행 시간을 더 버는 것이 이득이다. $a = 0$이면 $\cos 2\theta = 0$이 되어 익숙한 $\theta = \frac{\pi}{4}$를 얻는다.

이것이 최댓값(maximum)임을 보이기 위해, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$로서 $\tan\varphi = \dfrac{a}{g}$라 하자. 그러면

$$\sin 2\theta - \frac{a}{g}\cos 2\theta = \frac{\sin(2\theta-\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad \text{이므로} \qquad R = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sin(2\theta-\varphi)}{\cos\varphi} + \frac{a}{g}\right).$$

이다. 이 값은 $2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$일 때, 즉 $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$일 때 가장 크며, 이것은 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있는 $\tan 2\theta = -g/a$의 근이다. 따라서 최적의 각은 정확히

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{g},$$

이고, $\cos\varphi = g/\sqrt{g^2+a^2}$이므로 최대 도달 거리는 정확히

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sqrt{g^2+a^2}}{g} + \frac{a}{g}\right) = \frac{V^2}{g^2}\left(a + \sqrt{g^2+a^2}\right).$$

이다.

a가 작을 때

u가 작으면 $\arctan u = u + O(u^3)$이다. $u = a/g$로 두면

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{g} + O\left(\frac{a^3}{g^3}\right)\right) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다. 도달 거리에 대해서는 $\sqrt{g^2+a^2} = g\sqrt{1+a^2/g^2} = g + O(a^2/g)$이므로

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g^2}\left(a + g + O(a^2/g)\right) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2},$$

이고, 이것이 요구한 두 번째 결과이다. 두 근사 모두 a/g에 대하여 일차까지 정확하며, 무시한 항은 $(a/g)^2$ 차수이거나 그보다 작다.

$\tan 2\theta$를 그대로 다루고 싶다면 $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$으로 둔다. 그러면 $\tan 2\theta = -\cot\varepsilon \approx -1/\varepsilon$이므로 $\varepsilon \approx a/g$이다. $\sin 2\theta = \cos\varepsilon \approx 1$과 $\cos 2\theta = -\sin\varepsilon \approx -\varepsilon$을 R에 대입하면 일차까지 $R \approx \frac{V^2}{g}(1 + \frac{a}{g})$를 얻는다.

검산

- $a = 0$: 공식은 $\theta = \frac{\pi}{4}$와 $R_{\max} = V^2/g$로 바뀌며, 이는 평지에서의 표준적인 결과이다.
- 차원(dimension): a/g는 차원이 없고 V^2/g는 길이이므로, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- 수치적으로, $V = 7$, $g = 9.8$, $a = 1.3$으로 두고 지면 기준틀에서 운동을 단계별로 계산한 뒤 객차의 위치를 빼면 R에 대한 공식이 재현된다(예를 들어 $\theta = 0.7$에서 $R \approx 5.478$). 여러 개의 무작위 a에 대하여 θ를 전수 탐색하면 $\tan 2\theta = -g/a$인 곳에서 최댓값이 나타나며, $R_{\max}$는 $\frac{V^2}{g^2}(a + \sqrt{g^2+a^2})$와 유효숫자(significant figures) 10자리까지 일치한다. $a = 0.05$일 때 정확한 최적의 각 $0.787949\ldots$는 $\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g}$와 소수점 아래 일곱째 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- a의 부호를 잘못 잡는 것. 객차는 포탄의 발사 방향과 **반대쪽으로** 가속하므로, 바닥에 대하여 포탄은 남쪽으로 속력을 얻는다. 따라서 항 $\frac{1}{2}aT^2$는 빼는 것이 아니라 더하는 것이다.
- 도달 거리를 객차 안이 아니라 지면에서 측정하는 것. 문제는 객차 바닥을 따라 잰 거리를 묻고 있다.
- 계산기로 $2\theta = \arctan(-g/a)$를 구하는 것. 이렇게 하면 음의 각이 나온다. 올바른 근은 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있다.

STEP 너머

가속하는 기준틀에서 생각하면서 겉보기 힘 $-m\mathbf{a}$를 더하는 것은 **관성력**(fictitious force)의 가장 간단한 예이다. 회전하는 기준틀에서는 같은 방식으로 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)이 등장한다. 여기서 겉보기 힘은 단지 "유효 중력(effective gravity)"을 기울여 그 크기를 $\sqrt{g^2 + a^2}$로 만들 뿐이며, 이것이 답에 $\sqrt{g^2 + a^2}$가 들어 있는 이유를 이해하는 한 가지 방법이다. 비관성 기준틀(non-inertial frame)은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 명료하게 설명되어 있다.

풀이

STEP I 2000, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

STEP I 2000, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s1-q10

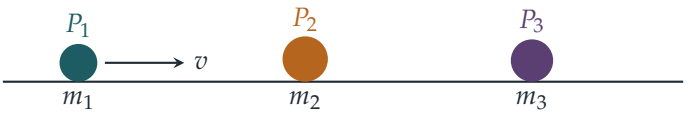
핵심 아이디어

각 충돌에서 두 개의 식을 얻는다. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(Newton's law of restitution)이다. 이 문제에서는 충돌 결과가 일부 주어져 있으므로(P_1은 멈추고, P_3은 속력 v로 떠난다) 속도를 구하는 대신 미지의 계수를 구한다. 충돌이 가능하기 위한 조건은 모든 반발 계수(coefficient of restitution)가 만족해야 하는 유일한 물리적 제약 $0 \leq e \leq 1$에서 나오고, 최종 에너지는 하나 남은 자유로운 질량 m_2의 함수가 된다. 이 함수를 그 조건들이 허용하는 구간에서 최적화한다.

풀이

모형

세 물체를 매끄러운 탁자 위에서 한 직선을 따라 움직이는 입자로 본다. 그러면 수평 방향의 외력이 작용하지 않으므로 각 충돌에서 운동량이 보존된다. P_1이 처음 움직이는 방향을 양의 방향으로 잡는다.



첫 번째 충돌

P_2가 속도 u로 움직이기 시작한다고 하자. P_1이 정지하므로

$$\text{운동량:} \qquad m_1 v = m_2 u \qquad \Longrightarrow \qquad u = \frac{m_1 v}{m_2},$$

$$\text{반발:} \qquad u - 0 = e(v - 0) \qquad \Longrightarrow \qquad e = \frac{u}{v} = \frac{m_1}{m_2}.$$

두 번째 충돌

이제 P_2가 속력 u로 정지해 있는 P_3에 부딪힌다. 충돌 후 P_2의 속도를 w라 하자. P_3의 속도는 v로 주어져 있다. 운동량 보존에 의해

$$m_2 u = m_2 w + m_3 v \quad \Longrightarrow \quad m_1 v = m_2 w + m_3 v \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{(m_1 - m_3)v}{m_2},$$

이다. 여기서 첫 번째 충돌에서 얻은 $m_2 u = m_1 v$를 사용하였다. 반발 법칙(분리 속력 $= e' \times$ 접근 속력)에 의해

$$v - w = e' u.$$

w와 u를 대입하고 양변에 m_2/v(0이 아니다)를 곱하면

$$m_2 - (m_1 - m_3) = e' m_1 \quad \Longrightarrow \quad e' = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

이러한 충돌은 언제 가능한가?

모든 반발 계수는 0과 1 사이에 있다. $0 \le e' \le 1$을 적용하고 $m_1 > 0$을 곱하면

$$0 \le m_2 + m_3 - m_1 \le m_1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 \le m_2 + m_3 \le 2m_1,$$

이고, 이것이 문제에서 요구한 부등식이다. 따라서 이 부등식은 충돌이 가능하기 위한 필요조건이다.

? **생각해 보기** 모든 제약을 다 사용했는가? e는 어떠한가?

$0 \le e \le 1$도 성립해야 한다. $e = m_1/m_2$이므로 이 조건은 정확히 $m_2 \ge m_1$일 때 성립한다. 이 조건은 보이라고 한 결과의 일부는 아니지만(사실 이 조건이 있으면 왼쪽 부등식 $m_2 + m_3 \ge m_1$은 저절로 성립한다), 마지막 부분에서 중요하다. 모두 종합하면, 충돌이 가능할 필요충분조건은

$$m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3.$$

이 구간이 공집합이 아니려면 $m_3 \le m_1$이어야 한다. 그러면 $w = (m_1 - m_3)v/m_2 \ge 0$이므로 두 번째 충돌 후 P_2는 계속 앞으로 움직이거나 멈추며, 정지해 있는 P_1에 다시 돌아와 부딪히지 않는다. 또한 $v - w = e' u \ge 0$이므로 P_2가 P_3를 다시 따라잡지도 않는다. 따라서 충돌은 이 두 번뿐이다.

최종 에너지

마지막에 P_1은 정지해 있고, P_2의 속도는 w, P_3의 속도는 v이므로 최종 운동 에너지(kinetic energy)는

$$E = \tfrac{1}{2}m_2w^2 + \tfrac{1}{2}m_3v^2 = \frac{(m_1-m_3)^2v^2}{2m_2} + \tfrac{1}{2}m_3v^2.$$

m_1, m_3, v가 고정되어 있으므로 m_2만이 $m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3$의 범위에서 변할 수 있다. 첫째 항은 음이 아닌 상수를 m_2로 나눈 것이므로 E는 m_2에 대한 감소함수이다($m_1 = m_3$이면 상수인데, 이 경우 구간은 어차피 한 점 $m_2 = m_1$뿐이다).

에너지가 가장 클 때는 $m_2 = m_1$일 때이다(첫 번째 충돌이 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌, 즉 $e = 1$):

$$E_{\max} = \frac{(m_1-m_3)^2v^2}{2m_1} + \frac{m_3v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - m_1m_3 + m_3^2)\,v^2}{2m_1}.$$

에너지가 가장 작을 때는 $m_2 = 2m_1 - m_3$일 때이다(두 번째 충돌이 완전 탄성 충돌, 즉 $e' = 1$):

$$E_{\min} = \frac{(m_1-m_3)^2v^2}{2(2m_1-m_3)} + \frac{m_3v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - 2m_1m_3 + m_3^2 + 2m_1m_3 - m_3^2)v^2}{2(2m_1-m_3)} = \frac{m_1^2v^2}{2(2m_1-m_3)}.$$

검산

- 충돌에서 에너지는 절대 증가할 수 없으므로 $E_{\max} \le \frac{1}{2}m_1v^2$이어야 한다. 이는 $m_1^2 - m_1m_3 + m_3^2 \le m_1^2$, 즉 $m_3(m_3 - m_1) \le 0$과 같고, $m_3 \le m_1$이므로 참이다.
- $E_{\max} - E_{\min} = \dfrac{(m_1-m_3)^3v^2}{2m_1(2m_1-m_3)} \ge 0$임을 확인할 수 있고, $m_1 = m_3$일 때 두 답은 모두 $\frac{1}{2}m_1v^2$와 같다(이때 $m_2 = m_1$이고 두 충돌 모두 탄성 충돌이어서 에너지 손실이 없다).
- 수치로 확인해 보자. $m_1 = 2$, $m_3 = 1$, $v = 1$이면 처음 에너지는 1이고 $E_{\max} = \frac{3}{4}$, $E_{\min} = \frac{2}{3}$이다. m_2를 $[2,3]$에서 조금씩 바꿔 가며 정확한 산술로 계산하면 이 극값들이 그대로 나오고, 이 구간 전체에서 $e, e' \in [0,1]$이 성립하며 구간 밖에서는 성립하지 않음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- (e'만 고려하여) $m_1 - m_3 \le m_2 \le 2m_1 - m_3$에서 최적화하는 것. 이렇게 하면 처음 에너지 전체인 $\frac{1}{2}m_1v^2$가 "최댓값"으로 나오는데, 이때의 m_2 값에서는 $e = m_1/m_2 > 1$이므로 불가능하다.
- 반발 법칙을 거꾸로 적용하는 것. e배가 되는 것은 **접근** 속력이고, 그 결과가 **분리** 속력이다. 즉 **분리** 속력이 **접근** 속력의 e배이다.

STEP 너머

여기서 본 패턴, 즉 각 제약이 매개변수가 가질 수 있는 구간을 잘라 내고 그 구간에서 단조함수를 최적화하는 것은 제약 최적화(constrained optimisation)의 가장 단순한 경우이며, 이는 선형 계획법(linear programming)과 라그랑주 승수(Lagrange multipliers)로 발전한다. 물리 쪽에서 보면, 충돌은 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 훨씬 깔끔해진다. 이 좌표계에서 반발 계수는 모든 속도에 단순히 $-e$를 곱하는 역할을 하고, 잃어버리는 에너지는 μ를 환산 질량(reduced mass)이라 할 때 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2) \times$ (상대 속력)^{2}이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 충돌을 이러한 관점으로 전개한다.

풀이

STEP I 2000, 문제 11

역학 • 사다리의 마찰 평형

> **STEP I 2000, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q11

핵심 아이디어

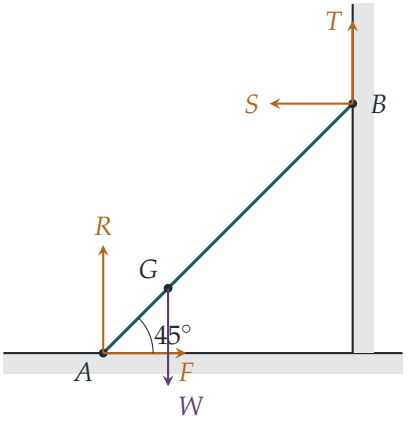
이 문제는 양 끝에 마찰이 있는 사다리 문제이다. "A와 B 모두에서 한계 상태"라는 조건은 모든 마찰력을 수직항력으로 나타내 주므로, 두 방향으로 힘을 분해한 두 식만으로 네 접촉력이 모두 결정된다. 그러면 모멘트 식은 조건이 하나 더 많은 셈이 된다. 이 식은 우연히 성립하거나, 성립하지 않거나 둘 중 하나이다. 첫 번째 부분에서는 이 식이 성립하지 않음을 보인다. 두 번째 부분에서는 추가 질량의 위치를 미지수로 두고 이 식이 성립하도록 만든다.

풀이

모형과 식

막대를 강체 막대(rigid rod)로 모형화하고, 그 무게 $W = 5g\,\mathrm{N}$이 G에 작용한다고 하자. A(바닥)와 B(벽)에서의 접촉은 모두 거칠다. 작용하는 힘은 다음과 같다.

- A에서: 위쪽으로 향하는 수직항력(normal reaction) R와 수평 방향의 마찰력(friction) F;
- B에서: 벽에서 멀어지는 수평 방향의 수직항력 S와 연직 방향의 마찰력 T(위쪽을 양의 방향으로 잡으므로 $T < 0$이면 아래쪽을 뜻한다);
- G에서 아래쪽으로 작용하는 무게 W.



수평 방향의 힘은 F와 S뿐이고, $S \geq 0$은 막대를 벽에서 밀어낸다. 따라서 F는 벽 쪽으로 작용해야 하며

$$F = S. \tag{1}$$

이다. 연직 방향으로 분해하면

$$R + T = W. \tag{2}$$

이다. A에 대한 모멘트(moment)를 구하기 위해 $AB = 0.81$, $c = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$로 두자. 그러면 B는 A로부터 수평 거리 $0.81c$, 높이 $0.81c$인 곳에 있고, G는 A로부터 수평 거리 $0.21c$인 곳에 있다. 시계 방향과 반시계 방향의 모멘트를 비교하면

$$S\,(0.81c) + T\,(0.81c) = W\,(0.21c),$$

이고, c를 약분하면

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W. \tag{3}$$

을 얻는다. 바로 여기서 45°가 도움이 된다. 모든 항에서 인수 c가 약분되기 때문이다.

양 끝에서 동시에 마찰이 한계 상태일 수는 없다

양 끝에서 마찰이 한계 상태(limiting)라고 가정하자. 그러면 $F = 0.2R$이고 $|T| = 1.0\,S = S$이다.

> **생각해 보기** B에서의 마찰력이 한계 상태일 때, 그 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가?

자연스러운 경우는 막대가 A는 벽에서 멀어지고 B는 아래로 미끄러지려는 상황이므로 $T = +S$이다. 빠짐없이 확인하기 위해 두 부호를 모두 따져 본다.

$T = S$인 경우. (1)에서 $S = F = 0.2R$이고, (2)에서 $R + 0.2R = W$이다. 따라서 $R = \frac{5}{6}W$,

$S = T = \frac{1}{6}W$이다. 그러면 (3)의 좌변은

$$0.81\left(\tfrac{1}{6}W + \tfrac{1}{6}W\right) = 0.27\,W \neq 0.21\,W.$$

이다. 따라서 모멘트 식이 성립하지 않는다.

$T = -S$인 경우. (3)의 좌변은 0이지만 우변은 $0.21W > 0$이므로 불가능하다.

두 경우 모두 막대는 평형(equilibrium) 상태에 있을 수 없다. 따라서 A와 B 모두에서 마찰이 한계 상태일 수는 없으며, 이것이 보이려던 것이다.

(한계 상태가 아닌 경우에는 평형이 분명히 가능하다. 예를 들어 $T = S = \frac{7}{54}W$는 (3)을 만족하고 $R = \frac{47}{54}W$를 주며, 이때 $F = S \leq 0.2R$이다.)

P에 질량 추가하기

$AP = x\,\mathrm{m}$라 하자. 추가된 무게도 $W = 5g\,\mathrm{N}$이고 P에 작용하므로 전체 무게는 $2W$이다. 식 (1)과 (2)는

$$F = S, \qquad R + T = 2W,$$

가 되고, A에 대한 모멘트 식에는 항 $W\,(xc)$가 더해진다. c를 약분하면 이 식은

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W + x\,W. \tag{4}$$

가 된다. 이제 양 끝에서 마찰이 한계 상태이다. $T = -S$인 경우는 이번에도 불가능하다. 그러면 (4)의 좌변은 0이지만 우변은 양수이기 때문이다. 따라서 $T = S$이고 $F = 0.2R$이므로

$$S = 0.2R, \qquad R + 0.2R = 2W \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{5}{3}W, \quad S = T = \tfrac{1}{3}W.$$

이다. 이를 (4)에 대입하면

$$0.81 \times \tfrac{2}{3}\,W = 0.54\,W = 0.21\,W + x\,W,$$

이므로 $x = 0.33$이다. 따라서

$$AP = 0.33\ \mathrm{m}.$$

이다. 이 값은 0과 0.81 사이에 있으므로 P는 막대 위에 있다. P는 G보다(그리고 중점보다) 더 위쪽에 있으므로, 추가 질량은 합쳐진 무게중심(centre of gravity)을 막대 위쪽으로 밀어 올리고, 이는 사다리를 미끄러지게 하는 경향이 있다.

검산

- P에 질량이 있을 때, W를 단위로 한 힘은 $R = \frac{5}{3}$, $F = S = T = \frac{1}{3}$이다. 그러면 $F/R = 0.2$, $T/S = 1$이므로 둘 다 한계 상태이다. 연직 방향으로는 $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$이고, 모멘트는 $0.81 \times \frac{2}{3} = 0.54 = 0.21 + 0.33$을 준다.

- 합쳐진 무게중심은 A로부터 $\frac{1}{2}(0.21 + 0.33) = 0.27\,\text{m}$인 곳에 있다. 이는 첫 번째 부분에서 양 끝의 마찰이 한계 상태가 되기 위해 필요했던 바로 그 위치이다($0.21W$ 대신 $0.27W$). 마찰 계수는 같고 전체 무게만 두 배가 되었으므로 이는 타당하다.
- 질량과 g는 전 과정에서 약분되므로 답은 이들과 무관하다. $g = 9.8$과 실제 $45°$ 모멘트를 써서 수치로 대입해 보면 잔차는 10^{-15} 정도이다.

흔한 실수

- A에서의 마찰력 방향을 반대로 잡는 것. 다른 수평 방향의 힘은 S뿐이므로 F는 벽 쪽을 향해야 한다.
- B에서의 마찰력이 연직 방향이라는 것을 잊는 것. 이 마찰력은 연직 방향 분해에 나타나며, R를 전체 무게보다 작게 만든다.
- G 대신 막대의 중점을 사용하는 것. 이 막대는 균일하지 않다.

STEP 너머

평면 위의 강체는 세 개의 평형 방정식을 주므로, 미지의 접촉력이 네 개인 문제는 **부정정**(*statically indeterminate*)이다. 강체 정역학만으로는 마찰이 양 끝에 어떻게 나뉘는지 알 수 없다. "양 끝에서 한계 상태"라는 조건을 부과하면 식이 두 개 더 생겨 계가 과잉 결정되는데, 바로 이 때문에 첫 번째 부분에는 해가 없다. 공학에서는 접촉부의 탄성을 모형화하여 부정정성을 해결한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 강체 정역학과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2000, 문제 12

확률과 통계 • 기하분포

> **STEP I 2000, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q12

핵심 아이디어

각 경우마다 **지금까지의 시도가 모두 실패했다는 조건에서, 다음 시도가 성공할 확률은 얼마인가?**를 묻는다. 그런 다음 처음 $n-1$번 시도의 실패 확률들과 n번째 시도의 성공 확률을 곱한다. 세 가지 규칙은 서로 매우 다른 모양의 답을 준다. 하나는 조건부 확률(conditional probability)이 점점 커지는 경우이고, 하나는 처음부터 일정한 경우이며, 나머지 하나는 첫 시도 이후에만 일정한 경우이다.

이 풀이 전체에서 필요한 시도 횟수를 N이라 하자. 그러면 구하려는 것은 $n = 1, 2, 3, \ldots$에 대한 $\mathrm{P}(N = n)$이다. 문에 맞는 열쇠를 **맞는** 열쇠라고 부르자.

풀이

소문항 (i)

이 경우에는 열쇠를 한 번도 반복하지 않으므로, 열쇠들을 균등하게 무작위인(uniformly random) 순서로 시도하는 것과 같다. 대칭성(symmetry)에 의해 맞는 열쇠는 그 순서의 k개 자리 중 어느 자리에나 같은 확률로 놓인다. 따라서

$$\mathrm{P}(N = n) = \frac{1}{k} \quad \text{단, } n = 1, 2, \ldots, k, \qquad \mathrm{P}(N = n) = 0 \text{ 단, } n > k.$$

대칭성 논증이 너무 매끄럽게 느껴진다면, 대신 조건부 확률들을 곱해 보자. j번 실패한 뒤에는 아직 시도하지 않은 열쇠가 $k-j$개 남아 있고 그중 하나가 맞는 열쇠이므로, $1 \le n \le k$일 때

$$\mathrm{P}(N = n) = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k-1} \cdots \frac{k-n+1}{k-n+2} \cdot \frac{1}{k-n+1} = \frac{1}{k},$$

이다. 이 곱은 앞뒤 항이 차례로 약분되는 망원 곱(telescoping product)이기 때문이다.

소문항 (ii)

이번에는 매 시도가 k개의 열쇠 전체에서 새로, 독립적으로(independent) 고르는 것이므로, 이전에 무슨 일이 있었든 각 시도는 확률 $\frac{1}{k}$로 성공한다. 정확히 n번의 시도가 필요하려면 처음 $n-1$번은 실패하고 n번째에 성공해야 한다.

$$\mathrm{P}(N=n)=\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}\frac{1}{k}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

이것은 모수가 $\frac{1}{k}$인 기하분포(geometric distribution)이며, n에는 상한이 없다.

소문항 (iii)

첫 번째 시도는 확률 $\frac{1}{k}$로 성공하므로 $\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{k}$이다.

이제 ($m\geq 1$인 어떤 m에 대하여) m번째 시도가 실패했다고 하자. 그러면 m번째 시도에서 쓴 열쇠는 틀린 열쇠이다. $m+1$번째 시도에서는 나머지 $k-1$개의 열쇠 중에서 균등하게 고른다.

> **생각해 보기** m번째 시도 이전의 이력이 $m+1$번째 시도의 성공 확률에 영향을 주는가?

그렇지 않다. 중요한 것은 어떤 열쇠가 제외되었는가뿐이며, 제외된 열쇠는 언제나 **틀린** 열쇠이다. 따라서 고를 수 있는 $k-1$개의 열쇠에는 항상 맞는 열쇠가 포함되어 있고, 이전에 무슨 일이 있었든 $m+1$번째 시도는 확률 $\frac{1}{k-1}$로 성공하고 확률 $\frac{k-2}{k-1}$로 실패한다.

그러므로 $n\geq 2$일 때, 첫 번째 시도가 실패하고(확률 $\frac{k-1}{k}$), $2,\ldots,n-1$번째 시도가 실패하며(각각 확률 $\frac{k-2}{k-1}$), n번째 시도가 성공한다(확률 $\frac{1}{k-1}$). 따라서

$$\mathrm{P}(N=n)=\frac{k-1}{k}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{n-2}\frac{1}{k-1}=\frac{1}{k}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{n-2}, \qquad n\geq 2,$$

이고, 여기에 $\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{k}$가 더해진다.

흥미롭게도 $\mathrm{P}(N=2)=\frac{1}{k}$ 역시 소문항 (i)과 같다. ($k=2$이면 이 규칙에 따라 열쇠를 번갈아 써야 하므로 N은 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 1 또는 2이다. 0^0을 1로 읽으면 공식도 이 결과를 준다.)

검산

- 각 분포의 합은 1이다. (iii)에서는 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{j\geq 0}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^j=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}(k-1)=1$이다.
- 평균(mean)도 합리적으로 나온다. (i)에서는 $\frac{k+1}{2}$, (ii)에서는 k, (iii)에서는 $1+\frac{(k-1)^2}{k}$이다. 마지막 열쇠를 반복하지 않는 것은 (ii)에 비해 조금 도움이 되지만, 어떤 열쇠도 반복하지 않는 것보다는 훨씬 덜 도움이 된다.

- $k = 2, \ldots, 5$와 $n \leq 7$에 대하여 모든 선택의 순서를 분수로 열거하여 세 공식을 정확히 확인하였다. 또한 $k = 5$인 (iii)을 2×10^5번 시뮬레이션(simulation)한 결과 $\mathrm{P}(N = 3) \approx 0.1496$을 얻었는데, 정확한 값은 $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0.15$이다.

흔한 실수

- (iii)에서 첫 번째 시도에도 $\frac{k-2}{k-1}$을 쓰는 것. 첫 선택은 k개의 열쇠 전체에서 하므로 첫 번째 인수는 $\frac{k-1}{k}$이다.
- (i)에서 $n > k$일 때 $\mathrm{P}(N = n) = 0$임을 밝히지 않는 것.
- (iii)에서 제외된 열쇠가 맞는 열쇠일 수도 있다고 생각하는 것. 제외되는 열쇠는 언제나 방금 실패한 열쇠뿐이다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 작은 **마르코프 연쇄**(Markov chain)이다. 다음에 일어날 일은 전체 이력이 아니라 현재 상태(여기서는 마지막으로 시도한 열쇠가 무엇인가)에만 의존한다. 과거를 무관하게 만드는 상태를 찾아내는 것이 마르코프 연쇄 이론의 핵심 기법이며, 이를 통해 복잡한 조건부 확률이 간단한 곱으로 바뀐다. Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 정확히 이 수준에서 마르코프 연쇄를 소개한다.

풀이

STEP I 2000, 문제 13

확률과 통계 • 조건부 확률

STEP I 2000, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s1-q13

핵심 아이디어

모든 것은 부모 각각에게서 하나씩 받는 유전자(gene)를 추적하는 일로 귀결된다. (i)에서 두 AB 부모의 각 자녀는 같은 작은 확률로 AA 또는 BB가 되고, 네 자녀는 서로 독립(independent)이므로 배열의 수를 세어 곱하면 된다. (ii)는 "거꾸로 가는" 조건부 확률(conditional probability)이다. 결과(자녀)를 알고 있을 때 원인(아버지)을 알고 싶은 것이다. 이것이 바로 베이즈 정리(Bayes' theorem)이며, 아버지의 가능한 세 유전자형(genotype)에 대한 수형도(tree diagram)로 정리할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

부모가 모두 AB이므로 각자 A 또는 B를 확률 $\frac{1}{2}$로 물려주며, 두 부모는 서로 독립적으로 작용한다. 자녀 한 명에 대하여

$$\mathrm{P}(AA) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(BB) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(AB) = \tfrac{1}{2},$$

이다. 여기서 마지막 확률은 두 순서(어머니에게서 A, 아버지에게서 B를 받는 경우와 그 반대의 경우)를 모두 센 것이다.

서로 다른 자녀들은 서로 독립적으로 유전자를 물려받는다. 네 자녀 중 둘이 AA, 둘이 BB인 특정한 순서, 예를 들어 AA, AA, BB, BB의 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^4$이다. 네 자녀 중 어느 두 명이 AA인지 고르는 방법의 수는 $\binom{4}{2} = 6$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{두 명은 } AA,\ \text{두 명은 } BB) = 6 \times \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 = \frac{6}{256} = \frac{3}{128},$$

이고, 이것이 증명하려던 결과이다.

소문항 (ii)

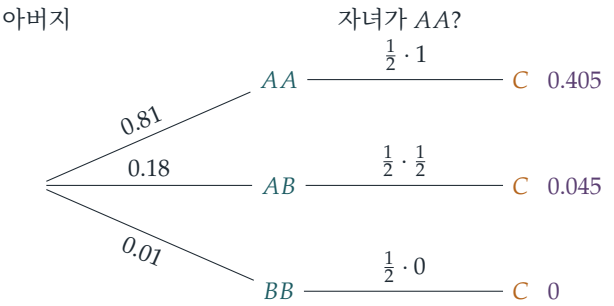
F_{AA}, F_{AB}, F_{BB}를 각각 나의 아버지가 AA, AB, BB인 사건이라 하고, C를 내가 AA인 사건이라 하자. 아버지는 어머니의 유전자형과 독립적으로 선택된, 집단의 무작위 구성원이라고 보자. 그러면

$$\mathrm{P}(F_{AA}) = 0.81, \qquad \mathrm{P}(F_{AB}) = 0.18, \qquad \mathrm{P}(F_{BB}) = 0.01.$$

? **생각해 보기** 왜 0.18이 곧바로 답이 되지 않을까?

추가 정보, 즉 내가 AA라는 사실이 있기 때문이다. 이 사실은 BB인 아버지를 완전히 배제하고, AA인 아버지는 언제나 A를 물려주므로 AA인 아버지의 가능성을 높인다. 따라서 C를 조건으로 하여 계산해야 한다.

내가 AA이려면 어머니에게서 A를, 아버지에게서도 A를 받아야 한다. 어머니는 AB이므로 아버지가 누구든 확률 $\frac{1}{2}$로 A를 준다. 아버지는 유전자형에 따라 확률 1, $\frac{1}{2}$, 0으로 A를 준다. 수형도는 다음과 같다.



전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C) &= 0.81 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 + 0.18 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + 0.01 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 0 \\ &= 0.405 + 0.045 + 0 = 0.45.\end{aligned}$$

그러면 베이즈 정리에 의하여

$$\mathrm{P}(F_{AB} \mid C) = \frac{\mathrm{P}(F_{AB})\,\mathrm{P}(C \mid F_{AB})}{\mathrm{P}(C)} = \frac{0.045}{0.45} = \frac{1}{10}.$$

따라서 나의 아버지가 AB일 확률은 $\frac{1}{10}$이다.

검산

- (i)에서 네 자녀의 유전자형 개수에 대한 확률을 모두 더하면 1이 되어야 한다. $\binom{4}{2}$라는 인수는 $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^4$의 다항 전개(multinomial expansion)에 나타나는 것과 같은 인

수이며, $3/128 \approx 0.0234$는 그 전개의 한 항이다. 여덟 개의 유전자가 유전되는 2^8가지 방법을 모두 정확히 나열해 보아도 $3/128$을 얻는다.

- (ii)에서 답은 사전확률(prior) 0.18에서 0.1로 줄었다. BB인 아버지가 배제되고 AA인 아버지가 유리해졌으니 당연한 결과이다. 10^6개의 가족을 시뮬레이션한 결과 0.0998을 얻었다.

흔한 실수

- (i)에서 인수 $\binom{4}{2} = 6$을 빠뜨려 $1/256$을 얻는 실수.
- (ii)에서 0.18이라고 답하거나, $\mathrm{P}(F_{AB} \mid C)$ 대신 $\mathrm{P}(C \mid F_{AB}) = \frac{1}{4}$를 계산하는 실수.
- 어머니의 인수 $\frac{1}{2}$를 일부 가지에서만 빠뜨리는 실수. 이 인수는 결국 약분되지만, 일관되게 사용했을 때만 그렇다.

STEP 너머

집단에서의 비율 81%, 18%, 1%는 $p = 0.9$, $q = 0.1$일 때의 p^2, $2pq$, q^2이다. 이것이 하디-바인베르크 평형(Hardy–Weinberg equilibrium)으로, 무작위 교배(random mating)에서는 세대에서 세대로 유지된다. 관찰된 결과로부터 숨은 원인을 추론하는 것은 베이즈 통계학(Bayesian statistics)의 핵심이며, 같은 계산이 유전 상담과 친자 확인 검사의 바탕이 된다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 조건부확률과 베이즈 정리를 이와 같은 많은 예제와 함께 철저하게 다룬다.

풀이

STEP I 2000, 문제 14

확률과 통계 • 균등분포의 적률

> **STEP I 2000, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q14

핵심 아이디어

여기서 다루는 모든 것은 균등분포(uniform distribution)의 적률(moment)이며, $[-1,1]$ 위의 X의 적률은 구하기 쉽다. 홀수 차 적률은 대칭성에 의해 0이 되고, 짝수 차 적률은 $1/(k+1)$이다. $Z = Y - X$에 대해서는 Z의 분포를 전혀 구할 필요가 없다. $(Y-X)^2$과 $(Y-X)^4$을 이항정리로 전개하고 독립성(independence)을 이용하면, 모든 기댓값이 이미 알고 있는 적률들의 곱으로 바뀐다.

풀이

X의 적률

X는 $[-1,1]$에서 확률밀도함수(density)가 $\frac{1}{2}$이므로, 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$\mathrm{E}(X^k) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k\text{가 홀수 (피적분함수가 기함수)}, \\ \dfrac{1}{k+1}, & k\text{가 짝수}. \end{cases}$$

특히 $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X^3) = 0$, $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{E}(X^4) = \frac{1}{5}$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X^2) = \mathrm{E}(X^4) - \big(\mathrm{E}(X^2)\big)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

Y도 같은 분포를 따르므로 적률도 같다.

Z^2의 평균

전개하면 $Z^2 = Y^2 - 2XY + X^2$이다. X와 Y는 독립이므로 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$이고, 따라서

$$\mathrm{E}(Z^2) = \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Z^2의 분산

$\mathrm{E}(Z^4)$가 필요하다. 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$Z^4 = (Y - X)^4 = Y^4 - 4Y^3X + 6Y^2X^2 - 4YX^3 + X^4.$$

? **생각해 보기** Y^3X의 기댓값을 정말 $\mathrm{E}(Y^3)\,\mathrm{E}(X)$로 놓아도 되는가?

그렇다. X와 Y가 독립이므로 Y^3과 X처럼 이들의 함수끼리도 독립이고, 독립인 확률변수들의 곱의 기댓값은 기댓값들의 곱과 같다. 두 교차항은 각각 X 또는 Y의 홀수 거듭제곱을 포함하므로 기댓값이 0이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^4) &= \mathrm{E}(Y^4) + 6\,\mathrm{E}(Y^2)\,\mathrm{E}(X^2) + \mathrm{E}(X^4)\\ &= \frac{1}{5} + 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

따라서

$$\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{E}(Z^4) - \big(\mathrm{E}(Z^2)\big)^2 = \frac{16}{15} - \frac{4}{9} = \frac{48-20}{45} = \frac{28}{45}.$$

$\frac{28}{45} = 7 \times \frac{4}{45}$이므로 $\mathrm{Var}(Z^2) = 7\,\mathrm{Var}(X^2)$이고, 이로써 증명이 끝난다.

검산

- Z는 $[-2, 2]$에서 삼각형 모양의 확률밀도함수 $f(z) = \frac{1}{4}(2 - |z|)$를 가진다. 직접 계산하면 $\mathrm{E}(Z^4) = 2\int_0^2 \frac{1}{4}z^4(2-z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{5} - \frac{32}{3}\right) = \frac{16}{15}$이고, 전개로 얻은 결과와 일치한다.
- $\mathrm{E}(Z) = 0$이므로 $\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y - X) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$이다.
- (X, Y) 쌍 백만 개를 시뮬레이션한 결과 $\mathrm{Var}(X^2) \approx 0.0889$, $\mathrm{Var}(Z^2) \approx 0.623$을 얻었으며, 이는 $4/45 \approx 0.0889$, $28/45 \approx 0.622$와 잘 맞는다.

흔한 실수

- $\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y^2) + \mathrm{Var}(X^2)$로 쓰는 것. 이는 Z^2 안의 $-2XY$ 항을 무시한 것인데, 이 항은 평균이 0이지만 $4\,\mathrm{Var}(XY) = \frac{4}{9} = \frac{20}{45}$만큼 기여한다. 이 실수를 하면 $\frac{28}{45}$ 대신 $\frac{8}{45}$를 얻게 된다.

- Y^2X^2 항의 이항계수 6을 빠뜨리는 것.
- $[-1,1]$에서 확률밀도함수를 $\frac{1}{2}$ 대신 1로 놓는 것. 이렇게 하면 모든 적률이 두 배가 된다.

STEP 너머

$\mathrm{E}(X^k)$를 X의 적률이라 하며, 독립인 확률변수들의 합을 다루는 깔끔한 방법은 적률생성함수(moment generating function) $M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$를 이용하는 것이다. 이때 $M_{Y-X}(t) = M_Y(t)M_X(-t)$가 성립한다. 이 곱을 t에 대한 멱급수로 전개하면 Z의 모든 적률을 한꺼번에 얻는다. 적률생성함수와 특성함수(characteristic function)는 대학 첫 확률론 강의에서 핵심적인 위치를 차지한다. 이들은 중심극한정리(central limit theorem)의 증명에서 주된 도구이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 이를 명료하게 전개한다.

풀이

STEP II 2000, 문제 1

순수수학 • 이집트 분수

STEP II 2000, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q1

핵심 아이디어

두 예에는 공통된 패턴이 있다. 첫 번째 분모는 N보다 1만큼 크고, 두 번째 분모는 N과 그 수의 곱이다. 유일성(uniqueness)을 보이는 부분에서는 분모를 없애고 "직사각형 완성하기"(completing the rectangle)를 하면 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{N}$이 곱이 N^2인 두 정수에 대한 식으로 바뀐다. 소수(prime)의 제곱은 인수분해(factorisation)하는 방법이 매우 적으므로 a와 b의 후보도 매우 적고, 그래서 이를 그냥 모두 나열하면 된다.

풀이

일반적인 결과

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$과 $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$에서 분모는 $N+1$과 $N(N+1)$이다($6=2\times3$이고 $12=3\times4$이므로). 따라서 다음과 같이 추측할 수 있다.

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}.$$

이를 증명하기 위해 우변을 통분한다.

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}=\frac{N+1}{N(N+1)}=\frac{1}{N}.$$

두 분모는 모두 1보다 큰 정수이므로 두 항은 모두 단위분수(unit fraction)이다. 또한 $N>1$일 때 $N(N+1)>N+1$이므로 두 항은 서로 다르다(distinct). 따라서 모든 단위분수는 서로 다른 두 단위분수의 합으로 나타낼 수 있다.

N이 소수일 때의 유일성

$\frac{1}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$의 양변에 abN을 곱하면 $ab = Nb + Na$, 즉

$$ab - Na - Nb = 0 \iff ab - Na - Nb + N^2 = N^2 \iff (a-N)(b-N) = N^2.$$

(a, b, N이 0이 아니므로) 각 단계는 거꾸로 되돌릴 수 있으므로 $(*)$의 해는 정확히 $(a-N)(b-N) = N^2$의 해와 같다.

? **생각해 보기** $a - N$과 $b - N$이 둘 다 음수일 수 있을까?

그럴 수 없다. $\frac{1}{b} > 0$이므로 $\frac{1}{a} < \frac{1}{N}$이고, 따라서 $a > N$이다. 마찬가지로 $b > N$이다. 그러므로 $a - N$과 $b - N$은 곱이 N^2인 **양의** 정수이다. (주목할 만한 점이 있다. 이 사실이 없다면 쌍 $(-1, -N^2)$도 배제해야 할 또 하나의 인수분해가 된다.)

이제 $N = p$가 소수라고 하자. p^2의 양의 약수(divisor)는 1, p, p^2뿐이므로 쌍 $(a-p, b-p)$는 다음 중 하나여야 한다.

$$(1, p^2), \qquad (p, p), \qquad (p^2, 1).$$

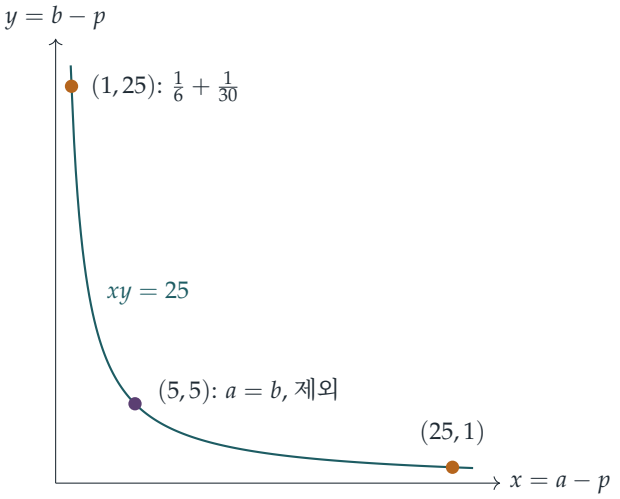
- (p, p)이면 $a = b = 2p$, 즉 $\frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}$이다. 두 단위분수가 서로 다르지 않으므로 이 경우는 제외된다.
- $(1, p^2)$이면 $a = p+1, b = p^2 + p = p(p+1)$이고, 이는 앞에서 찾은 표현이다. $(p^2, 1)$은 같은 쌍의 순서만 바꾼 것이다.

따라서 두 항의 순서를 제외하면 가능한 방법은

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)},$$

하나뿐이고, 이로써 증명이 끝난다.

그림을 보면 그 이유를 알 수 있다. 해는 제1사분면에서 쌍곡선(hyperbola) $xy = p^2$ 위의 격자점(lattice point)이며, 여기서 $x = a - p$, $y = b - p$이다. 그림에서는 $p = 5$이다.



$2/N$ 꼴의 분수

이제 $N = p$가 홀수인 소수이고 $\frac{2}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$라고 하자. 양변에 abp를 곱하면 $2ab = pa + pb$이다. 직사각형을 완성하기 위해 먼저 양변에 2를 곱한다.

$$4ab - 2pa - 2pb = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4ab - 2pa - 2pb + p^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (2a - p)(2b - p) = p^2.$$

? **생각해 보기** 인수분해하기 전에 왜 2를 곱할까?

$2ab - pa - pb$를 바로 인수분해하려면 $(a - \frac{p}{2})$와 같은 항이 필요한데, 이는 정수가 아니다. 2를 곱하면 모든 것이 정수로 유지되므로 인수 $2a - p$와 $2b - p$가 정수가 되고, 나누어떨어짐을 이용할 수 있다.

앞에서와 마찬가지로 $\frac{1}{a} < \frac{2}{p}$이므로 $2a > p$이고 $2a - p > 0$이다. 같은 방법으로 $2b - p > 0$이다. p^2의 양의 약수는 $1, p, p^2$이므로 $(2a - p, 2b - p)$는 다음 중 하나이다.

$$(1, p^2), \qquad (p, p), \qquad (p^2, 1).$$

- (p, p)이면 $a = b = p$, 즉 $\frac{2}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$이다. 서로 다르지 않으므로 제외된다.
- $(1, p^2)$이면
$$a = \frac{p+1}{2}, \qquad b = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}.$$
p가 홀수이므로 $p + 1$은 짝수이고, 따라서 둘 다 정수이다. $p \geq 3$이므로 $a \geq 2$이고, 따라서 둘 다 1보다 크다. 또 $b = pa > a$이므로 둘은 서로 다르다. $(p^2, 1)$인 경우는 같은 쌍의 순서만 바꾼 것이다.

직접 확인하면 다음과 같다.

$$\frac{2}{p+1} + \frac{2}{p(p+1)} = \frac{2(p+1)}{p(p+1)} = \frac{2}{p}.$$

따라서 $\frac{2}{p}$는 서로 다른 두 단위분수의 합으로 나타낼 수 있고, (순서를 무시하면) 그 방법은

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}(p+1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}p(p+1)},$$

하나뿐이다. 이로써 마지막 결과가 증명된다.

검산

- $p = 3$: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$; $p = 5$: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; $p = 7$: $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.
- $N < 300$인 모든 N에 대해 컴퓨터로 탐색한 결과, 모든 소수 N에 대해 $\frac{1}{N}$의 표현은 정확히 하나였고, 모든 홀수인 소수 N에 대해 $\frac{2}{N}$의 표현도 정확히 하나였으며, 이는 위의 공식과 일치한다.
- 소수라는 조건은 정말 중요하다. $N = 6$이면 표현이 네 가지 있다. 예를 들어 $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$이고, 이는 인수분해 $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9$ 각각에 하나씩 대응한다 (쌍 6×6은 $a = b$를 준다).
- $p > 2$인 이유: $p = 2$이면 $\frac{2}{2} = 1$은 서로 다른 $a, b > 1$에 대해 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 꼴로 나타낼 수 없으며, 실제로 $(p+1)/2$도 정수가 아니다.

흔한 실수

- $a - N > 0$과 $b - N > 0$을 보이는 것을 잊어서, N^2의 음수 인수분해를 고려하지 않는 것.
- 같은 단위분수를 주는 인수분해 $N \times N$을 배제하지 않는 것.
- $2/N$의 경우에 $\frac{1}{2}(p+1)$이 정수인지 확인하지 않는 것(바로 이 부분에서 $p \neq 2$가 쓰인다).

STEP 너머

분수를 서로 다른 단위분수의 합으로 나타내는 일은 고대 이집트인까지 거슬러 올라가며, "이집트 분수"(Egyptian fractions)에는 아직도 풀리지 않은 문제가 있다. 에르되시(Erdős)–Straus 추측(conjecture)은 $N \geq 2$일 때 $\frac{4}{N}$이 항상 세 단위분수의 합으로 나타난다는 것인데, 아직 아무도 이를 증명하지 못했다. $xy - Nx - Ny = 0$을 $(x - N)(y - N) = N^2$으로 바꾸는 기법은 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을 다루는 표준적인 도구이며, 이를 통해 해의 개수를 세는 문제는 약수의 개수를 세는 문제가 된다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 약수와 소수의 세계로 나아가는 훌륭한 다음 단계이다.

풀이

STEP II 2000, 문제 2

순수수학 • 다항식의 중근

STEP II 2000, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q2

핵심 아이디어

중복된 인수(factor)는 미분(differentiation)을 해도 살아남지만, 미분할 때마다 거듭제곱이 하나씩 줄어든다. 따라서 4제곱 인수 $(x-a)^4$가 있으면 p와 그 처음 세 도함수(derivative)가 모두 a에서 0이 되어야 한다. 6차 다항식(sextic)의 경우 3계 도함수는 3차식(cubic)에 불과하고, 그 근(root)들이 a의 후보를 아주 짧은 목록으로 줄여 준다. 이 후보들을 검사한 다음, 마지막에 k를 정한다. k는 미분하는 순간 사라지기 때문이다.

풀이

첫 번째 결과

$(x-a)^2$이 인수라고 하자. 그러면 어떤 다항식(polynomial) q에 대하여 $\mathrm{p}(x) = (x-a)^2\,\mathrm{q}(x)$이다. 곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$\mathrm{p}'(x) = 2(x-a)\,\mathrm{q}(x) + (x-a)^2\,\mathrm{q}'(x) = (x-a)\big[\,2\mathrm{q}(x) + (x-a)\mathrm{q}'(x)\,\big].$$

$x = a$를 대입하면 $\mathrm{p}'(a) = 0$이므로 증명이 끝난다.

대응하는 결과

같은 계산은 임의의 거듭제곱에 대해서도 성립한다. $m \geq 1$이고 g가 다항식일 때 $\mathrm{f}(x) = (x-a)^m\,\mathrm{g}(x)$이면

$$\mathrm{f}'(x) = (x-a)^{m-1}\big[\,m\,\mathrm{g}(x) + (x-a)\,\mathrm{g}'(x)\,\big],$$

이고, 대괄호 안은 다시 다항식이다. 따라서 $(x-a)^m$이 f를 나누면, $(x-a)^{m-1}$은 f'을 나눈다.

이제 $(x-a)^4$이 $\mathrm{p}(x)$의 인수라고 하자. 이 사실을 세 번 적용하면

$$(x-a)^3\text{이 나누는}\mathrm{p}'(x), \qquad (x-a)^2\text{이 나누는}\mathrm{p}''(x), \qquad (x-a)\text{가 나누는}\mathrm{p}'''(x).$$

$(x-a)^4$이 $\mathrm{p}(x)$ 자체를 나눈다는 사실과 함께, $x=a$를 대입하면

$$\mathrm{p}(a)=\mathrm{p}'(a)=\mathrm{p}''(a)=\mathrm{p}'''(a)=0.$$

k 구하기

$\mathrm{p}(x)=x^6+4x^5-5x^4-40x^3-40x^2+32x+k$라 하자. 세 번 미분하면

$$\begin{aligned}\mathrm{p}'(x)&=6x^5+20x^4-20x^3-120x^2-80x+32,\\ \mathrm{p}''(x)&=30x^4+80x^3-60x^2-240x-80=10\,(3x^4+8x^3-6x^2-24x-8),\\ \mathrm{p}'''(x)&=120x^3+240x^2-120x-240=120\,(x^3+2x^2-x-2).\end{aligned}$$

생각해 보기 네 조건 가운데 어느 것을 먼저 사용해야 할까?

가장 풀기 쉬운 것을 사용한다. 상수 k는 p'''에서 사라졌고, p'''은 3차식에 불과하며 항을 묶어서 인수분해할 수 있다.

$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x-1)(x+1).$$

따라서 대응하는 결과에 의하여 a는 -2, 1, -1 중 하나여야 한다. 각각을 p''에 넣어 검사한다.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(1)&=3+8-6-24-8=-27\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-1)&=3-8-6+24-8=5\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-2)&=48-64-24+48-8=0.\end{aligned}$$

$a=-2$만 살아남는다. 이 값은 p' 검사도 통과한다.

$$\mathrm{p}'(-2)=-192+320+160-480+160+32=0.$$

마지막으로 $\mathrm{p}(-2)=0$에서 k가 정해진다.

$$\mathrm{p}(-2)=64-128-80+320-160-64+k=k-48=0, \qquad \text{따라서} \qquad \boxed{k=48}.$$

생각해 보기 지금까지는 **필요조건**(*necessary condition*)만 사용하였다. $k=48$일 때 $(x+2)^4$이 정말로 인수라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

사실 네 조건 $p(a) = p'(a) = p''(a) = p'''(a) = 0$은 (다항식에 대한 테일러 정리(Taylor's theorem)에 의하여) $(x-a)^4$이 인수임을 함의한다. 하지만 가장 빠르게 확인하는 방법은 직접 전개해 보는 것이다. $(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$이므로, 몫(quotient)은 상수항이 $48/16 = 3$이고 최고차항의 계수가 1인(monic) 2차식이어야 한다. x^5의 계수를 맞추면 $x^2 - 4x + 3$을 얻고, 실제로

$$(x+2)^4(x^2 - 4x + 3) = x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48.$$

따라서 $k = 48$일 때

$$x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48 = (x+2)^4(x-1)(x-3),$$

이고, 이 인수는 $a = -2$로서 요구된 꼴을 갖는다.

검산

- $(x+2)^4(x-1)(x-3)$을 완전히 전개한다. 모든 계수가 주어진 다항식과 일치하고, 상수항은 $16 \times 3 = 48$이다.
- 계수의 합을 검사한다. $p(1) = 1 + 4 - 5 - 40 - 40 + 32 + 48 = 0$이며, $(x-1)$이 인수이므로 당연히 그래야 한다.
- 컴퓨터로 임의의 다항식 $(x-a)^4q(x)$에 대하여 일반적인 결과를 확인하였고, p'''의 근 $-2, \pm 1$을 구하여 그중 p''이 0이 되는 것은 -2뿐임을 확인하였으며, $k = 48$을 얻었다.

흔한 실수

- $p(a) = 0$이나 $p'(a) = 0$에서 시작하는 것. 이 식들은 5차식(quintic)이나 k 자체를 포함하므로 금방 막다른 길에 이른다. 차수가 가장 낮은 도함수에서 시작하라.
- p'''의 근에서 멈추는 것. 후보 $a = \pm 1$은 p'''의 근이지만 p''의 근은 아니다.
- 대응하는 결과를 "$p'''(a) = 0$"이라고만 쓰는 것. $p(a) = p'(a) = p''(a) = p'''(a) = 0$이라는 조건 전체를 제시하고, 이를 증명하라.

STEP 너머

역(converse)도 성립한다. $(x-a)^m$이 p를 나누는 것은 p와 그 처음 $m-1$개의 도함수가 a에서 모두 0이 되는 것과 동치이다. 다항식은 a를 중심으로 한 자기 자신의 테일러 전개(Taylor expansion)와 같기 때문이다. 대학 1학년 대수학 강의에서는 같은 아이디어로 근의 **중복도**(*multiplicity*)를 정의한다. 이 아이디어는 중근(repeated root)을 판정하는 방법

도 제공한다. 유클리드 호제법(Euclid's algorithm)으로 $\gcd(p, p')$을 계산하면 된다. 소수를 법으로 하는 정수와 같은 체(field) 위에서는 형식적 도함수(formal derivative)가 놀라운 방식으로 행동한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 이 내용을 다룬다.

풀이

STEP II 2000, 문제 3

순수수학 • 오차의 전파

> **STEP II 2000, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q3

핵심 아이디어

코사인법칙(cosine rule)은 a^2을 b, c, A로 정확히 나타내 준다. 따라서 이 문제의 핵심은 각 값을 조금씩 움직였을 때 a가 어떻게 변하는지 알아보는 것이다. 모든 재료를 작은 양에 대한 일차(first order)까지 전개하고, 작은 양끼리의 곱은 버린 뒤, 마지막으로 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$를 이용해 제곱근을 취한다. 범위를 구할 때는 η가 서로 독립인 오차들의 일차결합(linear combination)이라는 점에 주목한다. 각 항을 유리한 부호 쪽 극단값으로 밀어붙일 때 η가 가장 커진다.

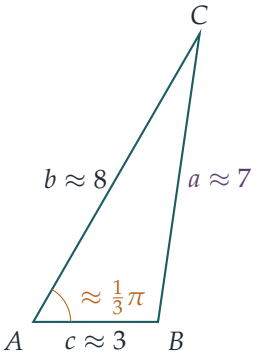
풀이

a의 근삿값

오차가 없는 값 $b = 8$, $c = 3$, $A = \frac{1}{3}\pi$를 코사인법칙에 넣으면

$$a^2 = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 49,$$

이므로 $a = 7$이다. 이것이 첫째 항이 7인 이유이다.



이제 값을 조금 움직여 보자. 이 풀이 전체에서 "≈"는 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$에 대한 일차항만 남기고 ϵ_1^2이나 $\epsilon_2\epsilon_3$처럼 이차 이상인 항은 모두 버린다는 뜻이다. 그러면

$$\begin{aligned} b^2 &= 64 + 16\epsilon_1 + \epsilon_1^2 \approx 64 + 16\epsilon_1, \\ c^2 &= 9 + 6\epsilon_2 + \epsilon_2^2 \approx 9 + 6\epsilon_2, \\ bc &= 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2 \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2. \end{aligned}$$

이다. 각에 대해서는 덧셈정리(compound-angle formula)와 작은 각 근사(small-angle approximation) $\cos\epsilon_3 \approx 1, \sin\epsilon_3 \approx \epsilon_3$을 쓰면

$$\cos A = \cos\tfrac{1}{3}\pi\cos\epsilon_3 - \sin\tfrac{1}{3}\pi\sin\epsilon_3 \approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3.$$

을 얻는다. ($\cos\epsilon_3 \approx 1$의 오차는 ϵ_3^2 정도의 크기이므로 이 차수에서는 정말로 무시할 수 있다.) 곱을 전개하고 다시 작은 양끼리의 곱을 버리면

$$2bc\cos A \approx 2\big(24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2\big)\Big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3\Big) \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3.$$

이다. 이 조각들을 코사인법칙에 넣으면

$$\begin{aligned} a^2 &\approx (64 + 16\epsilon_1) + (9 + 6\epsilon_2) - (24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3) \\ &= 49 + 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3. \end{aligned}$$

이다. 작은 양 $\delta = 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3$로 놓자. $a > 0$이므로

$$a = \sqrt{49 + \delta} = 7\Big(1 + \frac{\delta}{49}\Big)^{1/2} \approx 7\Big(1 + \frac{\delta}{98}\Big) = 7 + \frac{\delta}{14},$$

이다. 여기서 작은 x에 대한 이항전개(binomial expansion) $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$를 사용하였다. 따라서 $a \approx 7 + \eta$이고

$$\eta = \frac{13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3}{14},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

? 생각해 보기 곱을 손으로 전개하는 수고를 피할 수는 없었을까?

있다. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$를 미분하면 $2a\,\delta a = (2b - 2c\cos A)\,\delta b + (2c - 2b\cos A)\,\delta c + 2bc\sin A\,\delta A$를 얻는다. $a = 7$, $b = 8$, $c = 3$, $A = \frac{1}{3}\pi$에서 이 식은 $14\,\delta a = 13\,\delta b - 2\,\delta c + 24\sqrt{3}\,\delta A$가 되어, 한 줄 만에 같은 답이 나온다. 두 방법 모두 결국 일차 테일러 전개(Taylor expansion)일 뿐이다.

η의 범위

시험지에는 ϵ_2의 한계가 옛 방식의 위로 올린 소수점을 써서 $4\cdot 9\times 10^{-2}$로 인쇄되어 있다. 따라서 이는 $|\epsilon_2| \le 4.9\times 10^{-2}$라는 뜻이다.

세 오차는 서로 독립적으로 변하므로 삼각부등식(triangle inequality)에 의해

$$|\eta| \le \frac{13|\epsilon_1| + 2|\epsilon_2| + 24\sqrt{3}\,|\epsilon_3|}{14} \le \frac{13\times 2\times 10^{-3} + 2\times 4.9\times 10^{-2} + 24\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 10^{-3}}{14}.$$

이다. 분자는 $0.026 + 0.098 + 0.072 = 0.196$이므로

$$|\eta| \le \frac{0.196}{14} = 0.014.$$

이다. 이 한계는 실제로 도달된다. $\epsilon_1 = 2\times 10^{-3}$, $\epsilon_2 = -4.9\times 10^{-2}$, $\epsilon_3 = \sqrt{3}\times 10^{-3}$으로 잡으면 η의 모든 항이 양수이면서 가능한 한 커지므로 $\eta = 0.014$가 되고, 세 부호를 모두 뒤집으면 $\eta = -0.014$가 된다. η는 오차들의 연속함수(continuous function)(사실 일차함수)이고 허용되는 오차들의 집합은 직육면체이므로, 그 사이의 모든 값도 취한다. 따라서 범위는

$$-0.014 \le \eta \le 0.014,$$

이다. 즉 a는 대략 7 ± 0.014 안에 있다.

검산

- 오차가 모두 0이면 삼각형의 변은 8, 3, 7이고 끼인각이 60°이며, 실제로 $64 + 9 - 24 = 49$이다.
- 위의 극단적인 오차를 넣고 정확한 코사인법칙으로 계산하면 $a \approx 7.0141$과 $a \approx 6.9861$이 나와 7 ± 0.014에 매우 가깝다. 작은 차이는 버린 이차항 때문이다.
- 수치적으로 계산하면 기준값에서 a의 A에 대한 편도함수(partial derivative)는 $2.9692\ldots = 24\sqrt{3}/14$로, 예측과 일치한다.

흔한 실수

- 마지막에 제곱근 취하는 것을 잊는 실수: $a^2 \approx 49 + \delta$이면 $a \approx 7 + \delta/14$이지 $7 + \delta$가 아니다.
- 최댓값을 구할 때 세 오차를 모두 양수로 잡는 실수: ϵ_2는 음의 부호로 들어가므로 η를 키우려면 음수여야 한다.
- $4 \cdot 9 \times 10^{-2}$를 36×10^{-2}로 읽는 실수: 길이가 3인 변에 대해 그것은 결코 작은 오차가 아니다.

STEP 너머

이것은 전미분(total differential)을 통한 오차 전파(error propagation)이다. 여러 변수의 함수 f에 대해 $\delta f \approx \sum (\partial f/\partial x_i)\,\delta x_i$이고, 최악의 경우는 $\sum |\partial f/\partial x_i|\,|\delta x_i|$이다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 다변수 테일러 정리(multivariable Taylor theorem)가 되며, 이차 나머지 항에 대한 명시적인 한계가 "≈"가 정확히 얼마나 좋은 근사인지 알려 준다. 실험 과학자들은 서로 독립인 무작위 오차에 대해 대신 제곱합의 제곱근(root-sum-of-squares) 규칙을 쓰는 경우가 많다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 나머지항이 있는 테일러 정리를 꼼꼼히 다룬다.

풀이

STEP II 2000, 문제 4

순수수학 • 편각과 아크탄젠트 항등식

STEP II 2000, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q4

핵심 아이디어

처음 두 결과는 복소수를 곱하면 그 편각(argument)이 더해진다는 것을 말한다. 따라서 "아크탄젠트(arctangent)들의 합 $= \pi/4$" 꼴의 항등식은 사실 $5 - \mathrm{i}$와 $1 + \mathrm{i}$ 같은 가우스 정수(Gaussian integers)들의 곱에 관한 명제이다. $a > 0$인 각 인수 $a + b\mathrm{i}$는 각 $\arctan(b/a)$만큼을 기여하고, $\pi/4$는 직선 $y = x$ 위에 있는 수의 편각이다. 해야 할 일은 곱을 조심스럽게 전개한 다음, 두 각이 단지 2π의 배수만큼의 차이를 허용한 채 같은 것이 아니라 정말로 같다는 것을 확인하는 것이다.

풀이

곱셈 공식과 드무아브르 정리

전개하고 $\mathrm{i}^2 = -1$을 이용하면

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\ &= \cos(\theta + \phi) + \mathrm{i}\sin(\theta + \phi),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos(A + B)$와 $\sin(A + B)$에 대한 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)를 썼다.

두 번째 결과는 n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 보인다. $n = 1$일 때 양변은 모두 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$이다. $n = k$일 때 결과가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= \cos(k\theta + \theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta + \theta),\end{aligned}$$

이다. 여기서 귀납 가정을 쓰고, 이어서 $\phi = k\theta$로 둔 곱셈 공식을 썼다. 따라서 결과는 $n = k+1$일 때도 성립하고, 그러므로 모든 양의 정수 n에 대해 성립한다.

$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$를 $\operatorname{cis}\theta$로 쓰면 편리하다. 그러면 우리가 보인 것은 $\operatorname{cis}\theta\operatorname{cis}\phi = \operatorname{cis}(\theta+\phi)$와 $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$이다.

각에 관한 사실

$a > 0$이고 b가 실수이면

$$a + b\mathrm{i} = \sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{cis}\big(\arctan(b/a)\big),$$

이다. 왜냐하면 각 $\alpha = \arctan(b/a)$는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 $\cos\alpha > 0$이고, $\tan\alpha = b/a$이기 때문이다. 이 두 조건으로부터 $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$와 $\sin\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$가 반드시 성립한다.

또한 $R, R' > 0$이고 $R\operatorname{cis}S = R'\operatorname{cis}T$이면, 절댓값(modulus)을 취해 $R = R'$을 얻으므로 $\cos S = \cos T$이고 $\sin S = \sin T$이다. 따라서 $S - T$는 2π의 배수이다.

첫 번째 항등식

$\alpha = \arctan\frac{1}{5}$라 하자. 그러면 $5 - \mathrm{i} = \sqrt{26}\operatorname{cis}(-\alpha)$이고 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$이므로, 위의 결과들에 의해

$$(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = 26\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\big(\tfrac{\pi}{4} - 2\alpha\big).$$

이다. 한편 직접 전개하면

$$(5-\mathrm{i})^2 = 24 - 10\mathrm{i}, \qquad (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 24 + 24\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 10 = 34 + 14\mathrm{i},$$

이고, $\beta = \arctan\frac{14}{34} = \arctan\frac{7}{17}$로 두면 $34 + 14\mathrm{i} = \sqrt{1352}\operatorname{cis}\beta$이다. 두 식을 비교하면 $\frac{\pi}{4} - 2\alpha$와 β는 2π의 배수만큼 차이가 난다.

> **생각해 보기** 그 2π의 배수가 0이라는 것을 어떻게 알 수 있는가?

두 각의 범위를 좁혀 본다. $0 < \frac{1}{5} < 1$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이고, 따라서 $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - 2\alpha < \frac{\pi}{4}$이다. 또 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$이다. $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$에 속하는 두 각의 차는 2π보다 작으므로 그 배수는 0이고, $\beta = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$이다. 즉

$$\arctan\tfrac{7}{17} + 2\arctan\tfrac{1}{5} = \frac{\pi}{4},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

두 번째 항등식

같은 아이디어에 따라 $(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$를 살펴보자. 이 수의 편각이 좌변이 되어야 한다. 단계별로 곱하면

$$\begin{aligned}(4+\mathrm{i})^2 &= 15+8\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3 &= (15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 52+47\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i}) &= (52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i}) = 993+992\mathrm{i}.\end{aligned}$$

이다. 이 수는 이미 직선 $y=x$에 매우 가깝고, 마지막 인수가 일을 마무리한다.

$$\begin{aligned}(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i}) &= (993\times 1985-992)+(993+992\times 1985)\mathrm{i}\\ &= 1970113+1970113\,\mathrm{i} = 1970113\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(1985가 어디서 나왔는지 궁금하다면: $(993+992\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$의 실수부와 허수부가 같아지도록 하면 $993a-992 = 992a+993$이므로 $a=1985$이다.)

이제 $p=\arctan\frac{1}{4}$, $q=\arctan\frac{1}{20}$, $r=\arctan\frac{1}{1985}$라 하자. 각에 관한 사실에 의해 $4+\mathrm{i}$, $20+\mathrm{i}$, $1985+\mathrm{i}$는 각각 $\operatorname{cis}p$, $\operatorname{cis}q$, $\operatorname{cis}r$의 양의 실수배이므로, 그 곱은 $\operatorname{cis}(3p+q+r)$의 양의 실수배이다. 위의 식과 비교하면 $3p+q+r-\frac{\pi}{4}$는 2π의 배수이다.

p,q,r 각각은 그 탄젠트 값이 $(0,1)$에 속하므로 $(0,\frac{\pi}{4})$에 속하고, 따라서 $0<3p+q+r<\frac{5\pi}{4}$이다. 그러므로 $3p+q+r$와 $\frac{\pi}{4}$의 차는 2π보다 작고, 그 배수는 0이며,

$$3\arctan\tfrac{1}{4}+\arctan\tfrac{1}{20}+\arctan\tfrac{1}{1985}=\frac{\pi}{4}.$$

이다.

검산

절댓값이 일치해야 한다. $|34+14\mathrm{i}|^2 = 1156+196 = 1352 = 26^2\times 2$이므로 예상대로이다. 두 번째 곱에 대해서는 $17^3\times 401\times(1985^2+1)$이 2×1970113^2와 같아야 하는데, 실제로 같다. 수치적으로도 계산기로 두 좌변을 계산하면 모두 $0.785398163\ldots = \pi/4$가 나온다. 예를 들어 $\arctan\frac{7}{17}\approx 0.390607$이고 $\frac{\pi}{4}-2\arctan\frac{1}{5}\approx 0.390607$이다.

흔한 실수

- $2\pi k$만큼의 차이를 배제하지 않고 복소수가 같다는 것으로부터 각이 같다고 결론짓는 것. 범위에 관한 논증은 증명의 실질적인 일부이다.
- $(5-\mathrm{i})^2$에서의 부호 실수. 이 값은 $24-10\mathrm{i}$이므로 $5-\mathrm{i}$는 $-\arctan\frac{1}{5}$를 기여하고, 그래서 이 아크탄젠트가 반대편에서 더하기 부호로 나타난다.

▶ 큰 곱에서의 계산 실수. 위에서처럼 절댓값으로 검산하라.

STEP 너머

이와 같은 항등식을 마친형 공식(Machin-type formulae)이라 한다. John Machin의 공식 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$는 $(5+\mathrm{i})^4(239-\mathrm{i})$로부터 같은 방법으로 얻어지며, 1706년에 π를 소수점 아래 100자리까지 계산하는 데 쓰였다. 그 바탕에 있는 구조는 가우스 정수 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$의 산술이며, 여기서 가우스 소수(Gaussian primes)로의 소인수분해의 유일성(unique factorisation)이 어떤 항등식들이 존재할 수 있는지를 설명해 준다. 곱셈을 회전으로 보는 기하학에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 가우스 정수에 대해서는 Davenport, *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보라.

풀이

STEP II 2000, 문제 5

순수수학 • 최소제곱 근사

STEP II 2000, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q5

핵심 아이디어

제곱을 전개하면 최소화해야 할 양은 λ에 대한 이차식(quadratic)일 뿐이고, 그 계수는 고정된 수(f를 포함한 적분)이다. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면 가장 좋은 λ와 가장 작은 오차를 한 번에 얻는다. 사인 함수의 예에서 요점은 n이 클 때 $\sin(\pi x/n)$이 원점을 지나는 직선과 거의 같다는 것이며, 작은 각에 대한 근사(small-angle approximation)가 이를 정확하게 만들어 준다.

풀이

λ의 최적값

다음과 같이 놓는다.

$$J = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad K = \int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

이들은 λ에 의존하지 않는 상수이다. 제곱을 전개하고 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} I(\lambda) = \int_0^1 \big(f(x) - \lambda x\big)^2\,\mathrm{d}x &= K - 2\lambda J + \tfrac{1}{3}\lambda^2 \\ &= \tfrac{1}{3}\big(\lambda - 3J\big)^2 + K - 3J^2. \end{aligned}$$

제곱항은 결코 음수가 아니고 $\lambda = 3J$일 때에만 영이 되므로, $I(\lambda)$가 가장 작아지는 것은 정확히

$$\lambda = 3\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

일 때이며, 이것이 보이려던 것이다. (같은 이야기로, $I'(\lambda) = -2J + \frac{2}{3}\lambda = 0$에서 $\lambda = 3J$를 얻고, $I''(\lambda) = \frac{2}{3} > 0$이므로 최솟값임이 확인된다.)

잔차 오차

R^2은 I의 최솟값이고, 완전제곱식에 의해 이 값은 $K - 3J^2$이다. $J = \lambda/3$이므로 $3J^2 = \frac{1}{3}\lambda^2$이고, 따라서

$$R^2 = \int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{3}\lambda^2,$$

이며, 이것이 보이려던 것이다. (만약 미분으로 λ를 구했다면, $J = \lambda/3$을 $K - 2\lambda J + \frac{1}{3}\lambda^2$에 대입하여 $K - \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^2$을 얻는데, 이는 같은 결과이다.)

$f(x) = \sin(\pi x/n)$인 경우

계산을 깔끔하게 하기 위해 $a = \pi/n$으로 놓으면 $f(x) = \sin ax$이고 $n \to \infty$일 때 $a \to 0$이다. $u = x$, $\mathrm{d}v = \sin ax\,\mathrm{d}x$로 부분적분(integration by parts)하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \sin ax \,\mathrm{d}x &= \Big[-\frac{x\cos ax}{a}\Big]_0^1 + \frac{1}{a}\int_0^1 \cos ax \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\cos a}{a} + \frac{\sin a}{a^2},\end{aligned}$$

이므로

$$\lambda = \frac{3(\sin a - a\cos a)}{a^2}.$$

> **생각해 보기** $\sin\theta$의 근사에서 단순히 $\sin\theta \approx \theta$만 쓰지 않고 θ^3항까지 필요한 이유는 무엇인가?

$\sin a \approx a$와 $\cos a \approx 1$만 쓰면 분자는 $a - a = 0$이 되어 아무것도 알려 주지 않는다. 최고차항들이 상쇄되고, 답은 그다음 차수에 들어 있다. 힌트의 두 근사를 모두 이용하면

$$\sin a - a\cos a \approx \Big(a - \tfrac{1}{6}a^3\Big) - a\Big(1 - \tfrac{1}{2}a^2\Big) = \tfrac{1}{3}a^3,$$

이고, 따라서 n이 클 때

$$\lambda \approx \frac{3\cdot\frac{1}{3}a^3}{a^2} = a = \frac{\pi}{n}$$

이다. 이것이 결과 (i)이다.

(ii)를 위해서는 K도 필요하다. $\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax)$를 이용하면

$$K = \int_0^1 \sin^2 ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2a}{4a}.$$

$n \to \infty$일 때 $a \to 0$이고 $\dfrac{\sin 2a}{2a} \to 1$이므로 $K \to \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$이다. 또한 $\lambda \approx \pi/n$이므로 $\lambda \to 0$이다. 따라서

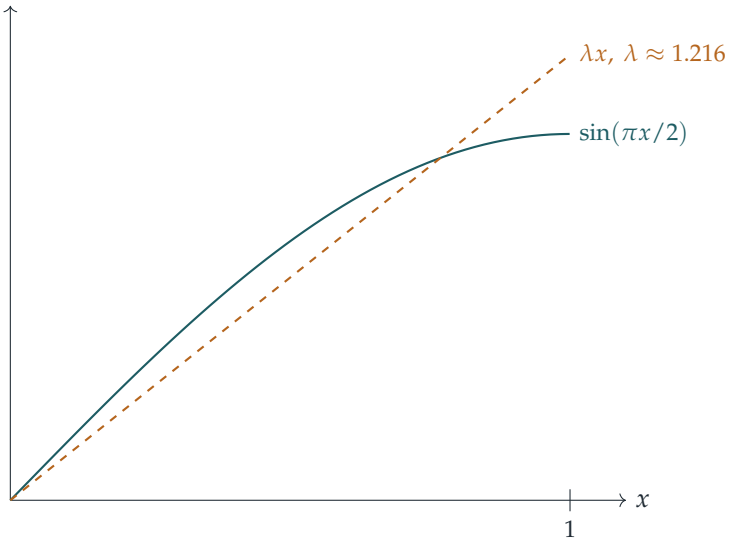
$$R^2 = K - \tfrac{1}{3}\lambda^2 \to 0 - 0 = 0,$$

이고, $R \geq 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} R = 0$을 얻는다. 이것이 결과 (ii)이다.

사실 상쇄는 이보다 훨씬 강하다. $\sin 2a \approx 2a - \frac{4}{3}a^3$을 쓰면 $K \approx \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}a^2\right) = \frac{1}{3}a^2$이고, $\frac{1}{3}\lambda^2 \approx \frac{1}{3}a^2$이기도 하다. 그러므로 R^2은 단지 작은 것이 아니라, f 자체의 크기인 K에 비해서도 작다. 직선이 f의 거의 전부를 담아낸다.

이런 결과가 예상되는 이유

$0 \leq x \leq 1$에서 각 $\pi x/n$은 0과 π/n 사이에 있고, n이 크면 이 각은 작다. 그러므로 구간 전체에서 $\sin(\pi x/n) \approx \pi x/n$이다. 즉 이 함수 자체가 $\lambda = \pi/n$인 일차함수 λx와 거의 같다. 따라서 가장 잘 맞는 직선의 기울기(gradient)는 π/n에 가까워야 하고, 근사는 사실상 완벽해져야 하므로 잔차(residual) 오차는 영으로 수렴(converge)해야 한다. 아래 그림은 $n = 2$일 때에도 곡선이 직선에서 크게 벗어나지 않음을 보여 준다.



검산

- 이미 $f(x) = cx$라면 $\lambda = 3c\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = c$이고 $R^2 = \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{3}c^2 = 0$이다. 당연히 그래야 한다.
- 수치로 보면, $n = 10$일 때 정확한 공식은 $\lambda = 0.31107$을 주며, 이는 $\pi/10 = 0.31416$과 비교된다. $n = 100$일 때 비 $\lambda/(\pi/n)$은 0.99990이다.

- $n = 10$일 때 수치 적분(quadrature)으로 $R^2 \approx 6.0 \times 10^{-7}$을 얻는 반면 $K \approx 0.032$이므로, 잔차는 f에 비해 정말로 아주 작다.

흔한 실수

- $\sin a \approx a, \cos a \approx 1$에서 멈추고 $\lambda \approx 0$을 얻는 것. 참이긴 하지만 쓸모가 없다. 삼차항을 남겨 두어야 한다.
- $\lambda = 3\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$의 3이 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$에서 나온다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 최소제곱 근사(least-squares approximation)이며, 실제로는 기하학이다. $[0,1]$ 위의 함수들을 "내적"(dot product) $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg\,\mathrm{d}x$를 갖는 벡터(vector)로 생각하자. 그러면 λx는 f를 x가 생성하는 직선 위로 정사영(orthogonal projection)한 것이고, $R^2 = K - \frac{1}{3}\lambda^2$은 피타고라스(Pythagoras) 정리이다. 전개를 한 단계 더 밀고 나가면 $R^2 \approx a^6/1575$임을 알 수 있는데, 이는 x^3항에서 x 방향 성분을 사영으로 제거한 데서 나온다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 사영과 최소제곱을 자세히 다루며, 같은 아이디어는 푸리에 급수(Fourier series)로 이어진다.

풀이

STEP II 2000, 문제 6

순수수학 • 반각 치환

STEP II 2000, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q6

핵심 아이디어

치환(substitution) $t = \tan\frac{1}{2}\theta$를 쓰면 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 유리함수(rational function)는 모두 t의 유리함수로 바뀌고, 이 문제에서는 그 결과가 2를 이차식으로 나눈 꼴이 된다. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면 아크탄젠트(arctangent)가 나오고, 첫 부분의 세 번째 항등식(identity)이 바로 위끝에서의 아크탄젠트를 간단히 하는 데 필요한 것이다. 두 번째 적분은 새로 적분할 필요 없이 대칭성(symmetry)을 이용해 첫 번째 적분에서 곧바로 얻는다.

풀이

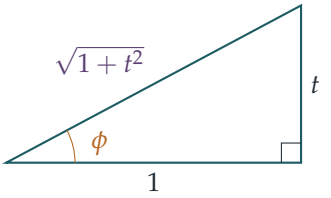
세 항등식

$\phi = \frac{1}{2}\theta$라 하면 $t = \tan\phi$이고 $1 + t^2 = \sec^2\phi$이다. 배각 공식(double-angle formulae)에 의해

$$\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi = 2\tan\phi\cos^2\phi = \frac{2\tan\phi}{\sec^2\phi} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\theta = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos^2\phi\,(1 - \tan^2\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(이 식들은 $\tan\frac{1}{2}\theta$가 정의될 때, 즉 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$일 때 항상 성립한다.) 아래와 같이 두 변이 1과 t이고 한 각이 ϕ인 직각삼각형을 떠올리면 이 식들을 기억하기 쉽다.



세 번째 항등식은 $\sin\theta \neq 0$일 때 $1+\cos\theta = 2\cos^2\phi$와 $\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi$를 이용한다.

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\phi}{2\sin\phi\cos\phi} = \cot\phi = \tan\left(\tfrac{1}{2}\pi - \phi\right) = \tan\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta\right),$$

여각(complementary angles)에 대하여 $\cot\phi = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - \phi\right)$이기 때문이다. 이로써 세 항등식이 모두 증명되었다.

첫 번째 적분

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$이면 $\theta = 2\arctan t$이므로

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\theta = 0$일 때 $t = 0$이고, $\theta = \frac{1}{2}\pi$일 때 $t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$이다. $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$라 하자. $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 둘 다 양수이다. 그러면

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c\sin\theta} = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2ct}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2ct+1}\,\mathrm{d}t.$$

완전제곱식으로 고치고 $1-c^2 = s^2$를 이용하면

$$t^2+2ct+1 = (t+c)^2+s^2.$$

$s > 0$이므로 기본 적분 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+s^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{u}{s}$에 의해

$$\int_0^1 \frac{2}{(t+c)^2+s^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\left[\arctan\frac{t+c}{s}\right]_0^1 = \frac{2}{s}\left(\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

생각해 보기 $\arctan\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$를 어떻게 간단히 할 수 있을까?

바로 여기서 첫 부분이 제 역할을 한다. 세 번째 항등식(θ 대신 α를 넣은 것)에 의해 $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha\right)$이다. 그러나 arctan과 tan을 상쇄하기 전에 그 각이 arctan의 치역인 $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$에 속하는지 확인해야 한다. $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$이고, 따라서 실제로

$$\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

마찬가지로 $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \tan(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$이고 $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\pi - \alpha$이다. 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\sin\theta} = \frac{2}{\sin\alpha}\Big(\big(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha\big) - \big(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\big)\Big) = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\sin\alpha},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 번째 적분

$\theta = \frac{1}{2}\pi - u$로 치환한다. 그러면 $\cos\theta = \sin u$, $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 끝 $0, \frac{1}{2}\pi$가 서로 바뀌면서 음의 부호가 상쇄된다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sin\alpha\sin u}.$$

이제 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$라 하자. 그러면 $\sin\alpha = \cos\beta$이고 $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$이므로, 방금 증명한 결과를 α 대신 β에 대해 적용할 수 있다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos\beta\sin u} = \frac{\beta}{\sin\beta}.$$

$\sin\beta = \cos\alpha$이므로, $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$일 때 다음을 얻는다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{\cos\alpha}.$$

검산

- $\alpha \to 0$일 때 $\cos\alpha \to 1$이므로 첫 번째 적분은 $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\theta} = 1$로 수렴해야 한다(치환하면 $\int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1$을 얻는다). 실제로 $\alpha/\sin\alpha \to 1$이다.
- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$일 때 피적분함수(integrand)는 1로 수렴하므로 첫 번째 적분은 $\frac{1}{2}\pi$로 수렴해야 하고, 이는 $\frac{\pi/2}{1}$과 일치한다. 두 번째 적분도 마찬가지로 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$일 때 1로 수렴하며, 이는 $\frac{\frac{1}{2}\pi-\alpha}{\cos\alpha} \to 1$과 맞아떨어진다.
- 수치적으로 확인하면, $\alpha = \frac{1}{4}\pi$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 첫 번째 적분을 계산하면 1.110721이 나와 $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1.110721$과 일치하고, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$일 때 두 번째 적분은 공식이 예측하는 대로 $1.047198 \approx \frac{1}{3}\pi$가 된다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}\theta$에서 나오는 인수 $\frac{2}{1+t^2}$이나 새로운 적분 구간의 끝 0과 1을 빠뜨리는 것.

- x가 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는지 확인하지 않고 $\arctan(\tan x) = x$라고 쓰는 것. 이 문제에서는 조건 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$가 바로 이것을 정당화해 준다.
- 두 번째 적분에서 $\theta \mapsto \frac{1}{2}\pi - \theta$와 $\alpha \mapsto \frac{1}{2}\pi - \alpha$를 이용하지 않고 적분 전체를 처음부터 다시 하는 것.

STEP 너머

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ 치환(바이어슈트라스 치환(Weierstrass substitution)이라고도 한다)이 잘 통하는 까닭은 점 $(\cos\theta, \sin\theta) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$가 단위원(unit circle)의 유리 매개화(rational parametrisation)이기 때문이다. t에 유리수를 넣으면 모든 피타고라스 세 쌍(Pythagorean triple)을 얻는다. 대학에서는 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 꼴의 적분을 보통 $z = e^{i\theta}$로 놓고 유수 정리(residue theorem)를 이용해 계산하는데, 그러면 계산이 단위원 안에 있는 극점(pole)을 찾는 문제로 바뀐다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 아이디어를 아름답게 소개하는 책이다.

풀이

STEP II 2000, 문제 7

순수수학 • 직선과 원뿔

> **STEP II 2000, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q7

핵심 아이디어

무엇보다 먼저 $\mathbf{s}$의 길이를 구한다. $\cos\theta \pm \sqrt{3}$ 항들은 교차항이 상쇄되고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta$가 나타나도록 짜여 있으므로, $|\mathbf{s}|$는 θ에 전혀 의존하지 않는다. 그다음부터는 모든 것이 스칼라곱(scalar product)에서 나온다. 조합 $s_x - s_z$ 역시 θ와 무관한데, 이것이 곧바로 m의 방향을 가리키며 마지막 소문항에서 평면 $x - z = \text{constant}$가 등장하는 이유를 설명해 준다.

풀이

l과 일반적인 직선 사이의 각

간단히 $c_\theta = \cos\theta$로 쓴다. $\mathbf{s}$의 길이는

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}|^2 &= (c_\theta + \sqrt{3})^2 + 2\sin^2\theta + (c_\theta - \sqrt{3})^2 \\ &= 2c_\theta^2 + 6 + 2\sin^2\theta = 8, \end{aligned}$$

이다. $\pm 2\sqrt{3}\,c_\theta$ 교차항이 상쇄되기 때문이다. 따라서 모든 θ에 대하여 $|\mathbf{s}| = 2\sqrt{2}$이다.

$\mathbf{d} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$라 하자. 그러면

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{d} = a(c_\theta + \sqrt{3}) + \sqrt{2}\,b\sin\theta + c(c_\theta - \sqrt{3}) = (a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c).$$

이다. 따라서 두 직선 사이의 각 ϕ는

$$\cos\phi = \frac{(a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c)}{2\sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

를 만족한다. 직선에는 정해진 방향이 없으므로, 예각을 원한다면 우변에 절댓값을 취하면 된다.

직선 m

$\cos\phi$가 θ와 무관하도록 하는 방향 $\mathbf{d}$를 찾고자 한다. 분자를 보면, θ에 대한 의존성은 정확히 $a+c=0$이고 $b=0$일 때 사라진다. 그러므로 $\mathbf{d}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$ ($a=1, b=0, c=-1$)를 시도해 보면

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

이다. 이 값은 양수이므로 ϕ는 이미 예각이고, 모든 θ에 대하여 $\phi=\pi/6$이다. 따라서 원점을 지나는 직선

$$m: \quad \mathbf{r}=\mu(\mathbf{i}-\mathbf{k})$$

가 요구 조건을 만족한다. θ가 변할 때 l은 축이 m이고 반꼭지각(semi-vertical angle)이 $\pi/6$인 원뿔(cone)을 그린다.

P가 그리는 원

l 위에서 $x-z=\lambda(s_x-s_z)=\lambda\big((c_\theta+\sqrt{3})-(c_\theta-\sqrt{3})\big)=2\sqrt{3}\,\lambda$이다. 이것을 $4\sqrt{3}$과 같다고 놓으면 θ가 무엇이든 $\lambda=2$이므로

$$\overrightarrow{OP}=2\mathbf{s}=(2\cos\theta+2\sqrt{3})\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+(2\cos\theta-2\sqrt{3})\,\mathbf{k}.$$

이다. 직선 m은 $\mu-(-\mu)=4\sqrt{3}$, 즉 $\mu=2\sqrt{3}$인 곳에서 평면과 만나며, 그 교점 C는

$$\overrightarrow{OC}=2\sqrt{3}\,\mathbf{i}-2\sqrt{3}\,\mathbf{k}.$$

이다.

생각해 보기 왜 C가 중심의 자연스러운 후보인가?

평면 $x-z=4\sqrt{3}$의 법선(normal)은 $\mathbf{i}-\mathbf{k}$이고, 이는 m의 방향이다. 따라서 m은 원뿔의 축이면서 평면에 수직이고, 어떤 원뿔이든 축에 수직인 평면으로 자르면 축이 그 평면과 만나는 점을 중심으로 하는 원이 생긴다. 이제 이것을 직접 확인한다.

$$\overrightarrow{CP}=2\cos\theta\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+2\cos\theta\,\mathbf{k}, \qquad |\overrightarrow{CP}|^2=4\cos^2\theta+8\sin^2\theta+4\cos^2\theta=8.$$

따라서 P의 모든 위치는 평면 위에 있고, 그 평면 위의 고정점 C로부터 거리 $2\sqrt{2}$만큼 떨어져 있다. 다시 말해, P는 평면 위에서 중심이 C이고 반지름이 $2\sqrt{2}$인 원 위에 있으며, C는 m 위에 있다.

P가 실제로 원 전체를 그린다는 것을 보이기 위해

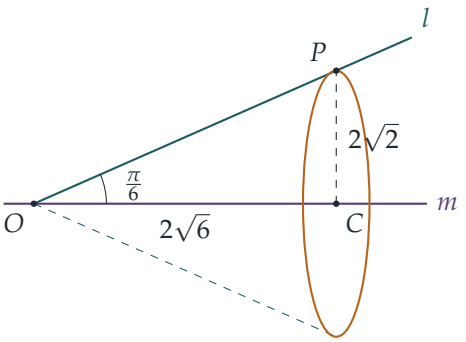
$$\overrightarrow{CP}=2\sqrt{2}\,(\cos\theta\,\mathbf{u}+\sin\theta\,\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k}), \quad \mathbf{v}=\mathbf{j}.$$

로 쓴다. 여기서 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 서로 수직인 단위벡터(unit vector)이고, 둘 다 $\mathbf{i}-\mathbf{k}$에 수직이므로 평면을 따라 놓여 있다. θ가 0부터 2π까지 변할 때 P는 원을 한 바퀴 돈다. 반지름은

$$\boxed{2\sqrt{2}}.$$

이다.

반지름을 더 빨리 구하는 방법도 있다. $|OP| = 2|\mathbf{s}| = 4\sqrt{2}$이고 $|OC| = 2\sqrt{6}$이며 OC가 평면에 수직이므로, 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 $CP = \sqrt{32-24} = 2\sqrt{2}$이다. 같은 말로, $CP = OC\tan\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{6}/\sqrt{3}$이다.



검산

- $\theta = 0$일 때 $\mathbf{s} = (1+\sqrt{3}, 0, 1-\sqrt{3})$이고, $|\mathbf{s}|^2 = (4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3}) = 8$, $\mathbf{s}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{k}) = 2\sqrt{3}$이므로 $\cos\phi = \sqrt{3}/2$이다.
- 반지름을 구하는 두 방법의 결과가 일치한다. $\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8}$이고 $2\sqrt{6}\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{8} \approx 2.828$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 20 000개의 θ (일반 공식에 대해서는 무작위 a, b, c도 함께)에 대하여 m과 이루는 각은 $\pi/6$이고, P는 평면 위에 있으며, $|CP| = 2.8284\ldots$이다. 모두 10^{-15} 이내의 오차로 성립한다.

흔한 실수

- $|\mathbf{s}|$로 나누는 것을 잊거나, $\mathbf{s}$가 단위벡터라고 가정하는 것. 그 길이는 $2\sqrt{2}$이다.
- P가 O를 중심으로 하는 구 위에 있다는 것(즉 $|OP| = 4\sqrt{2}$)만 보이는 것. 구를 평면으로 자르면 원이 생기지만, 그 중심이 왜 m 위의 점 C인지는 여전히 설명해야 한다. 그 이유는 OC가 평면에 수직이기 때문이다.

STEP 너머

직선 l은 원뿔을 그리며, 원뿔을 평면으로 자르는 것에서 원뿔곡선(conic sections)이라는 이름이 유래했다. 축에 수직인 평면으로 자르면 원이 되고, 평면을 기울이면 타원, 포물선, 쌍곡선이 된다. 대학 1학년 과정에서는 이 원뿔을 이차곡면(quadric surface) $(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 = |\mathbf{r}|^2\cos^2\alpha$로 기술하고, 대칭행렬의 고윳값(eigenvalues)을 이용하여 이러한 곡면을 분류한다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 이 내용을 다룬다.

풀이

STEP II 2000, 문제 8

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

STEP II 2000, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q8

핵심 아이디어

두 방정식은 모두 변수분리형(separable)이다. 즉 x에 대한 의존성과 y에 대한 의존성이 곱의 꼴로 나타나므로, y가 포함된 것은 모두 한쪽으로, x가 포함된 것은 모두 다른 쪽으로 옮길 수 있다. 각 x 쪽은 $x\,\mathrm{e}^{ax^2}$ 꼴인데, x가 x^2의 도함수(derivative)의 (상수배)이므로 곧바로 적분된다. 소문항 (ii)에서는 $(y+3)$의 거듭제곱 지수를 우리가 정할 수 있으며, y의 증가가 e^{3x^2}과 정확히 맞아떨어지도록 지수를 고른다.

풀이

소문항 (i)

$x=0$에서 $y=6$이므로 시작점 근처에서 $y+3>0$이고, 따라서 $(y+3)^{1/2}$로 나눌 수 있다.

$$(y+3)^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x^2} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$을 이용하여 양변을 x에 대하여 적분하면

$$2(y+3)^{1/2} = 2\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

$x=0, y=6$을 대입하면 $2\cdot 3 = 2 + C$이므로 $C=4$이고

$$(y+3)^{1/2} = \mathrm{e}^{-x^2} + 2.$$

우변은 항상 2 이상이므로 정당한 (양의) 제곱근이며, $y+3$은 결코 0에 이르지 않는다. 따라서 위에서 나눈 것은 모든 $x \geq 0$에 대하여 정당하다. 양변을 제곱하면

$$\boxed{y = \left(2+\mathrm{e}^{-x^2}\right)^2 - 3 = 1 + 4\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-2x^2}}.$$

$x\to\infty$일 때 $\mathrm{e}^{-x^2}\to 0$이고 $\mathrm{e}^{-2x^2}\to 0$이므로, 요구한 대로 $y\to 1$이다.

소문항 (ii)

여기서 방정식은 다음과 같다.

$$(y+3)^{k-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}.$$

일반적인 (정수가 아닐 수도 있는) 거듭제곱이 의미를 가지려면 $y+3>0$이어야 한다. 그런데 $x>0$에서 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$이므로 y는 증가하고, 따라서 $y+3$은 처음에 양수이면 계속 양수로 남는다. $k\neq 0$일 때 적분하면

$$\frac{(y+3)^k}{k} = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{12} + C, \qquad \text{따라서} \qquad (y+3)^k = \frac{k}{12}\,\mathrm{e}^{6x^2} + kC.$$

? **생각해 보기** 어떤 k를 시도해야 할까?

$k>0$이면, x가 클 때 상수는 무시할 수 있고 $y+3\approx (k/12)^{1/k}\,\mathrm{e}^{6x^2/k}$이다. y가 e^{3x^2}처럼 증가하기를 원하므로 $6/k=3$, 즉 $k=2$이어야 한다. (다른 어떤 $k>0$에 대해서도 $\mathrm{e}^{-3x^2}y$는 0이나 ∞로 간다.)

그러므로 $k=2$로 잡는다. 그러면 방정식은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}/(y+3)$이고, 해는

$$(y+3)^2 = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{6} + D,$$

이다. 여기서 $D=(y_0+3)^2-\frac{1}{6}$이고 y_0은 $x=0$에서의 y의 값이다. 우변은 $(y_0+3)^2>0$에서부터 증가하므로 계속 양수이고, 해는 모든 $x\geq 0$에 대하여 존재한다.

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2}+D}\; - 3.$$

e^{-3x^2}을 곱하고 $\mathrm{e}^{-3x^2}=\sqrt{\mathrm{e}^{-6x^2}}$을 근호 안으로 넣으면, $x\to\infty$일 때

$$\mathrm{e}^{-3x^2}y = \sqrt{\tfrac{1}{6}+D\,\mathrm{e}^{-6x^2}}\; - \; 3\mathrm{e}^{-3x^2} \;\longrightarrow\; \sqrt{\tfrac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

이다. 두 지수함수가 모두 0으로 가기 때문이다. 따라서 $k=2$일 때 극한은

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-3x^2}y = \frac{1}{\sqrt{6}}},$$

이고, 이는 초깃값과 관계없다. 상수 D가 답에서 사라졌으며, 바로 이 때문에 문제에서 "임의의 해"라고 말할 수 있는 것이다.

$k=2$일 때 거듭제곱 $(y+3)^{-1}$은 $y<-3$에서도 의미를 가진다. 그 분지에서는 $y+3=-\sqrt{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2}+D}$이고, 같은 논법으로 극한 $-1/\sqrt{6}$을 얻는다. 의도된 답은 $y>-3$인 해에 대한 $1/\sqrt{6}$이다.

검산

- (i)에서 $x = 0$이면 $y = (2+1)^2 - 3 = 6$이고, $y = (2+\mathrm{e}^{-x^2})^2 - 3$을 미분하면 $-4x\mathrm{e}^{-x^2}(2+\mathrm{e}^{-x^2}) = -4x\mathrm{e}^{-x^2}(y+3)^{1/2}$이다.
- 두 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법) 풀어 보면 공식과 일치한다. 예를 들어 (i)에서 $y(2) \approx 1.07360$이고, (ii)에서 $y_0 = 6$으로 시작하면 $\mathrm{e}^{-12}y(2) \approx 0.408230$으로, 이미 $1/\sqrt{6} \approx 0.408248$에 가깝다.

흔한 실수

- 적분 상수(constant of integration)를 제곱한 뒤에야 붙이거나, 엉뚱한 식에 $y = 6$을 맞추는 것.
- $x\,\mathrm{e}^{6x^2}$을 $\mathrm{e}^{6x^2}/12$가 아니라 $\mathrm{e}^{6x^2}/6$으로 적분하는 것. 이 실수는 k를 바꾸지는 않지만 극한값은 바꾼다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 점근 해석(asymptotic analysis)의 작은 한 조각이다. 증가하는 항이 적분 상수를 압도하기 때문에, 초깃값에 신경 쓰지 않고도 x가 클 때 해가 어떻게 행동하는지 알아낼 수 있었다. 해의 어떤 성질이 초기 조건(initial conditions)과 무관한지를 묻는 것은 미분방정식(differential equations)의 정성적 이론에서 핵심적인 문제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 변수분리형 방정식과 이런 종류의 장기적 거동을 다룬다.

풀이

STEP II 2000, 문제 9

역학 • 공기 저항을 받는 운동

STEP II 2000, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

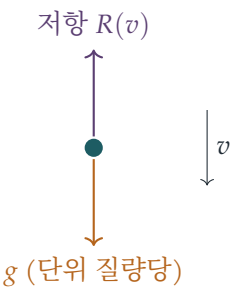
step.maths.org/questions/00-s2-q9

핵심 아이디어

두 낙하자는 모두 속력에만 의존하는 저항을 받으며 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 따른다. 따라서 v와 t에 대한 일계 미분방정식(first-order differential equation)을 얻고, 이 방정식은 변수분리(separation of variables)가 된다. "속력이 결코 도달할 수 없다"는 결과는 종단 속력(terminal speed), 즉 저항이 중력과 정확히 균형을 이루는 속력에서 나온다. 해는 이 값을 향해 서서히 다가가지만 유한한 시간 안에는 결코 도달하지 않는다. Karen의 경우에는 무차원(dimensionless) 속력 $u = kv/g$로 나타내면 이차식이 깔끔하게 인수분해된다.

풀이

각 낙하자를 정지 상태에서 연직으로 떨어지는 입자로 모형화하고, 중력 가속도 g는 아래쪽으로 일정하다고 한다. 아래쪽 방향의 속력을 $v \geq 0$으로 두고, t는 뛰어내린 순간부터 잰다. 단위 질량당 작용하는 힘은 아래쪽으로 중력 g, 위쪽으로 공기 저항이므로, 뉴턴의 제2법칙에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g -$ (단위 질량당 저항)이다.



Jane의 속력의 상한

Jane의 운동 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv = k\Big(\frac{g}{k} - v\Big).$$

처음에는 $v = 0 < g/k$이다. $v < g/k$인 동안에는 $g/k - v > 0$으로 나눌 수 있으므로 변수를 분리하면

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}w}{g/k - w} = \int_0^t k\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad -\ln\Big(1 - \frac{kv}{g}\Big) = kt,$$

이고, 따라서

$$v = \frac{g}{k}\big(1 - \mathrm{e}^{-kt}\big).$$

이 식은 모든 $t \geq 0$에서 성립한다. 우변이 모든 유한한 t에 대해 g/k보다 작으며, 이것이 바로 나눗셈에 사용한 조건이기 때문이다. $\mathrm{e}^{-kt} > 0$이므로 모든 t에 대해 $v < g/k$이다. 따라서 Jane의 속력은 $t \to \infty$일 때 g/k로 수렴(converge)하지만 결코 그 값에 도달하지 않는다.

Karen의 속력의 상한

Karen의 운동 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv - \frac{2k^2}{g}v^2.$$

무차원 속력 $u = kv/g$를 도입한다. 그러면 우변은

$$g\big(1 - u - 2u^2\big) = g(1 - 2u)(1 + u), \qquad \text{그리고} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k(1 - 2u)(1 + u).$$

가속도는 $u = \frac{1}{2}$일 때 영이 되며(근 $u = -1$은 물리적인 속력이 아니다), 이는 $v = g/(2k)$일 때이다. 이것이 Karen의 종단 속력이다.

처음에는 $u = 0 < \frac{1}{2}$이다. $0 \leq u < \frac{1}{2}$인 동안에는 두 인수가 모두 양수이므로 변수를 분리할 수 있다. 부분분수(partial fractions)로 나타내면

$$\frac{1}{(1 - 2u)(1 + u)} = \frac{2/3}{1 - 2u} + \frac{1/3}{1 + u},$$

이며, 이는 $1 = A(1 + u) + B(1 - 2u)$에 $u = -1$과 $u = \frac{1}{2}$를 대입하여 확인할 수 있다. 따라서

$$kt = \int_0^u \Big(\frac{2/3}{1 - 2w} + \frac{1/3}{1 + w}\Big)\mathrm{d}w = \frac{1}{3}\Big[-\ln(1 - 2w) + \ln(1 + w)\Big]_0^u = \frac{1}{3}\ln\frac{1 + u}{1 - 2u}.$$

$\dfrac{1 + u}{1 - 2u} = \mathrm{e}^{3kt}$을 정리하면

$$u = \frac{\mathrm{e}^{3kt} - 1}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{3/2}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} < \frac{1}{2}.$$

앞에서와 같은 이유로 이 식은 모든 $t \geq 0$에서 성립하므로, Karen의 속력은 다음을 만족한다.

$$v < \frac{g}{2k} \quad \text{모든 시각} t.$$

이것이 대응하는 결과이다. 그녀의 속력은 $g/(2k)$에 가까워지지만 결코 그 값에 도달하지 않는다.

Jane이 $g/(3k)$에 도달하는 시간

Jane의 해에 $v = g/(3k)$를 대입하면 $1 - \mathrm{e}^{-kt} = \frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{e}^{-kt} = \frac{2}{3}$이고

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{3}{2},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

Karen이 $g/(3k)$에 도달하는 시간

? **생각해 보기** t에 대한 u의 공식이 필요한가, 아니면 더 빠른 방법이 있는가?

더 빠른 방법은 이미 구해 둔 u에 대한 t의 공식을 쓰는 것이다. 속력 $g/(3k)$는 $u = \frac{1}{3}$을 뜻하고, 이는 $\frac{1}{2}$보다 작으므로 그녀는 이 속력에 실제로 도달한다. 그러면

$$\frac{1+u}{1-2u} = \frac{4/3}{1/3} = 4, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{1}{3k} \ln 4 = \frac{2}{3k} \ln 2.$$

검산

- Karen은 모든 양의 속력에서 Jane보다 더 큰 저항을 받으므로, 같은 속력에 도달하는 데 더 오래 걸려야 한다. 실제로 $\frac{2}{3} \ln 2 \approx 0.462$는 $\ln \frac{3}{2} \approx 0.405$보다 크다.
- t가 작을 때 두 공식 모두 $v \approx gt$를 주는데, 이는 저항이 없는 자유 낙하이므로 마땅히 그래야 한다. $u = (\mathrm{e}^{3kt} - 1)/(2\mathrm{e}^{3kt} + 1) \approx 3kt/3 = kt$로 전개하면 $v \approx gt$를 얻는다.
- 두 방정식을 정지 상태에서부터 수치적으로 풀어 보았다(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법, $g = 9.8$, $k = 0.7$). 속력은 각각 g/k와 $g/(2k)$인 14와 7 아래에 머물렀고, 속력 $g/(3k)$에는 $t \approx 0.5792$와 $t \approx 0.6601$에서 도달하였다. 이 값들은 $k^{-1} \ln \frac{3}{2}$ 및 $\frac{2}{3k} \ln 2$와 약 10^{-9} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 가속도가 양수라는 사실만으로 "속력이 결코 g/k에 도달할 수 없다"고 주장하는 것. 이는 속력이 증가한다는 것을 보여 줄 뿐, 속력이 g/k 아래에 머문다는 것을 보여 주지는

않는다. 명시적인 해를 구하거나, 종단 속력에 도달하는 데 걸리는 시간이 무한하다는 논증이 필요하다.

- $\ln(1-2u)$ 항의 부호를 틀리는 것. $\frac{1}{1-2u}$를 적분하면 $-\frac{1}{2}\ln(1-2u)$이다.

STEP 너머

두 방정식은 모두 자율(autonomous) 방정식, 즉 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(v)$ 꼴이다. 종단 속력은 이러한 방정식의 안정 평형점(stable equilibrium)이다. 상미분방정식(ODE)의 유일성 정리(uniqueness theorem)에 따르면 f가 매끄러울 때 해는 유한한 시간 안에 평형점에 결코 도달할 수 없으며, 이것이 두 상한 뒤에 있는 일반적인 이유이다. Karen의 방정식은 리카티 방정식(Riccati equation)이며, 같은 로지스틱(logistic) 형태의 거동이 개체군 모형에서도 나타난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 자율 방정식과 그 평형점을 다루고, Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 저항을 받는 운동을 논의한다.

풀이

STEP II 2000, 문제 10

역학 • 연결된 도르래 계

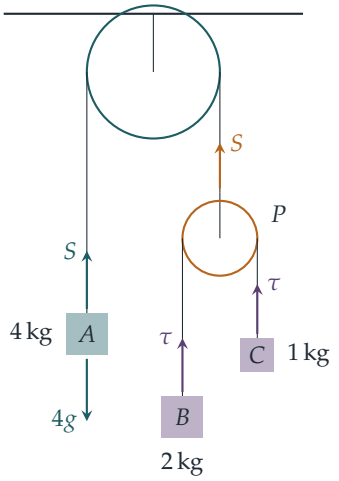
> **STEP II 2000, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q10

핵심 아이디어

이것은 이중 애트우드 기계(double Atwood machine)이다. A를 붙잡고 있는 동안에는 두 번째 도르래(pulley)가 고정되어 있으므로 B, C는 보통의 애트우드 기계(Atwood machine)를 이룬다. A를 놓으면 두 번째 도르래도 움직이므로, 깔끔하게 접근하려면 B와 C의 운동을 **그 도르래에 대한 상대 운동**(*relative motion*)으로 나타내고, 가벼운 도르래에는 알짜힘이 작용하지 않는다는 사실을 이용하면 된다. 즉 도르래 위쪽 줄은 아래쪽 줄의 장력(tension)의 정확히 두 배로 당긴다.

풀이

입자는 질점(point mass)으로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 두 도르래는 매끄럽고 가벼운 것으로 모형화한다. 두 번째 도르래를 P라 하자. 모든 가속도에 대하여 **아래쪽**을 양의 방향으로 잡고, A를 지나는 줄의 장력을 S, BC 줄의 장력을 τ라 쓰며, g의 단위는 $\mathrm{m\,s^{-2}}$로 한다.



P는 가벼우므로 P에 작용하는 알짜힘(net force)은 0이어야 한다(그렇지 않으면 가속도가 무한대가 된다). P는 위로 S, 아래로 양쪽에서 각각 τ의 힘을 받으므로 항상

$$S = 2\tau$$

이다.

첫 번째 단계: A를 붙잡고 있을 때

A를 정지한 채로 붙잡고 있으면 고정 도르래에 걸린 줄은 움직이지 않으므로 P는 고정되어 있다. 그러면 B와 C는 보통의 애트우드 기계를 이룬다. 즉 B가 아래로 가속도 a로 움직이면 C는 위로 가속도 a로 움직인다. 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)에 의하여

$$2a = 2g - \tau, \qquad 1 \cdot a = \tau - g.$$

두 식을 더하면 $3a = g$이므로

$$a = \tfrac{1}{3}g, \qquad \tau = \tfrac{4}{3}g.$$

따라서 B는 아래쪽으로, C는 위쪽으로 각각 $\frac{1}{3}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$의 가속도로 움직인다.

이 단계가 끝날 때($t = T$) B는 아래로, C는 위로 각각 속력 $\frac{1}{3}gT$로 움직이고 있으며, B는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}g\,T^2 = \frac{1}{6}gT^2$만큼 내려왔다. 이 단계 내내 A와 P는 정지해 있다.

두 번째 단계: 모두 자유롭게 움직일 때

A의 가속도를 a_A(아래쪽)라 하자. 고정 도르래에 걸린 줄의 길이는 일정하므로 P의 가속도는 $-a_A$이다. 즉 P는 A가 내려가는 만큼 빠르게 올라간다.

생각해 보기 B와 C가 매달린 도르래 자체가 가속하고 있을 때, B와 C의 가속도는 어떻게 나타낼까?

P에 대하여 상대적으로 보면 BC 줄은 고정된 애트우드 기계에서와 똑같이 행동한다. 즉 B가 P에 대하여 아래로 가속도 r로 움직이면 C는 P에 대하여 위로 가속도 r로 움직인다. 여기에 P 자신의 가속도를 더하면

$$a_B = -a_A + r, \qquad a_C = -a_A - r.$$

이제 $S = 2\tau$를 이용하여 각 입자에 뉴턴의 제2법칙을 적용한다(아래쪽이 양의 방향).

$$\begin{aligned} A: &\quad 4a_A = 4g - 2\tau, \\ B: &\quad 2(-a_A + r) = 2g - \tau, \\ C: &\quad 1(-a_A - r) = g - \tau. \end{aligned}$$

A의 식에서 $\tau = 2g - 2a_A$이다. 이를 B의 식에 대입하면 $-2a_A + 2r = 2a_A$이므로 $r = 2a_A$이다. 두 결과를 모두 C의 식에 대입하면

$$-3a_A = g - (2g - 2a_A) = -g + 2a_A \quad \Longrightarrow \quad a_A = \tfrac{1}{5}g.$$

따라서 $r = \frac{2}{5}g$, $\tau = \frac{8}{5}g$, $S = \frac{16}{5}g$이고

$$a_A = \tfrac{1}{5}g \text{ (아래쪽)}, \qquad a_B = -\tfrac{1}{5}g + \tfrac{2}{5}g = \tfrac{1}{5}g \text{ (아래쪽)}, \qquad a_C = -\tfrac{1}{5}g - \tfrac{2}{5}g = -\tfrac{3}{5}g,$$

이므로 C는 **위쪽으로** $\frac{3}{5}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$의 가속도로 움직인다.

이 가속도들은 일정하며, A를 놓는 순간 갑자기 변하는 것은 없다. A와 P는 정지 상태에서 출발하고, B, C는 속력 $\frac{1}{3}gT$를 그대로 유지한다.

A의 속력

첫 번째 단계에서 B는 $\frac{1}{6}gT^2$만큼 움직였으므로, 남은 거리는

$$0.6\,gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{3}{5}gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{13}{30}gT^2$$

이다. 두 번째 단계에서 B는 아래쪽 속도 $\frac{1}{3}gT$로 출발하고 아래쪽 가속도가 $\frac{1}{5}g$이므로, 속도가 계속 양수이고 이동 거리는 변위(displacement)와 같다. 이 거리를 가는 데 걸리는 시간을 t라 하면 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$에 의하여

$$\tfrac{1}{3}gT\,t + \tfrac{1}{10}gt^2 = \tfrac{13}{30}gT^2.$$

$t = kT$로 놓고 양변에 $30/(gT^2)$을 곱하면

$$3k^2 + 10k - 13 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (k-1)(3k+13) = 0.$$

$t > 0$이므로 $k = 1$이다. 즉 두 번째 단계는 정확히 T초 동안 지속된다. A는 이 단계를 정지 상태에서 가속도 $\frac{1}{5}g$로 시작했으므로, 이때의 속력은

$$v_A = \tfrac{1}{5}g \cdot T = \tfrac{gT}{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

검산

- 구한 값들로 각 운동 방정식(equation of motion)이 성립한다. A에 대하여 $4 \cdot \frac{1}{5}g = 4g - \frac{16}{5}g$이고, C에 대하여 $-\frac{3}{5}g = g - \frac{8}{5}g$이다.
- 독립적인 검산: 줄에 의하여 $y_C = $ 상수 $- 2y_A - y_B$(아래쪽 위치)가 강제되며, 두 자유 좌표 y_A, y_B를 사용한 에너지 방법으로도 똑같이 $a_A = a_B = \frac{1}{5}g$, $a_C = -\frac{3}{5}g$를 얻는다.
- $g = 9.8$, $T = 1.7$로 운동을 수치적으로 단계별 계산하면, B는 $t = 3.400$(즉 $2T$)일 때 $0.6gT^2$만큼 이동하며, 이때 A의 속력은 $3.332 = gT/5$이다.
- 전체 무게는 $7g$이지만 고정 도르래가 받치는 힘은 $2S = \frac{32}{5}g$뿐으로 $7g$보다 작으므로, 두 번째 단계에서 계의 질량중심(centre of mass)은 당연히 아래쪽으로 가속한다.

흔한 실수

- 두 번째 단계에서도 P를 고정된 것으로 보고 B와 C에 $\pm\frac{1}{3}g$를 그대로 다시 쓰는 것.
- 가벼운 도르래에서 $S = 2\tau$임을 잊거나, 도르래에 질량 항을 넣는 것.
- 이미 이동한 $\frac{1}{6}gT^2$를 빼지 않고 $0.6gT^2$ 전체를 두 번째 단계의 이동 거리로 잡는 것.

STEP 너머

두 번째 검산에서처럼 줄의 구속 조건(constraint)을 자동으로 만족하는 위치 좌표를 고르는 것은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 운동 에너지와 위치 에너지를 자유 좌표로 나타내면 장력은 전혀 등장하지 않은 채 운동 방정식이 따라 나온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 도르래와 같은 구속된 계를 꼼꼼하게 다루므로 다음 단계로 읽기에 좋다.

풀이

STEP II 2000, 문제 11

역학 • 탄성 끈과 단진동

STEP II 2000, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q11

핵심 아이디어

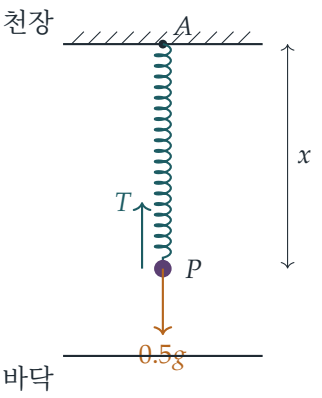
두 정성적 주장은 에너지(energy)로 빠르게 해결된다. 놓는 순간 줄에 저장된 탄성 에너지(elastic energy)를, 자연 길이와 천장에 도달하는 데 필요한 중력 위치 에너지와 비교하면 된다. 시간을 구할 때는 운동을 두 단계로 나눈다. 줄이 팽팽한 동안 입자는 평형 위치를 중심으로 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 줄이 느슨해지면 중력만 받으며 자유롭게 운동한다. 돌아오는 여정은 올라가는 여정을 거꾸로 되짚는 것이므로, 올라가는 데 걸린 시간을 두 배 하면 된다.

풀이

P를 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 탄성 줄에 매달린 입자로 모형화하고, 공기 저항은 없다고 한다. x를 A에서 아래쪽으로 잰 P까지의 거리(단위는 미터)라 하자. $x > 1.5$일 때 줄은 팽팽하며, 이때 늘어난 길이는 $x - 1.5$이고 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda}{l}(x - 1.5) = \frac{5g}{1.5}(x - 1.5) = \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

이다. 방의 높이는 2.5 m이므로 P는 $x = 2$에서 출발하고, 이때 늘어난 길이는 0.5 m이다.



줄이 느슨해진다

놓는 순간 저장된 탄성 에너지는

$$\frac{\lambda e^2}{2l} = \frac{5g\,(0.5)^2}{2(1.5)} = \frac{5g}{12}\,\text{J}.$$

이다. 줄이 자연 길이에 도달하려면 P는 0.5 m 올라가야 하고, 이때 위치 에너지(potential energy)가 $0.5g \times 0.5 = \frac{g}{4}$ J만큼 늘어난다. $\frac{5g}{12} > \frac{g}{4}$이므로 P는 여전히 위로 움직이는 채로 $x = 1.5$에 도달하며, 이때 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}(0.5)v^2 = \frac{5g}{12} - \frac{g}{4} = \frac{g}{6}, \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = \frac{2g}{3}.$$

이다. 그러므로 P는 줄이 자연 길이가 되는 지점보다 위로 지나가고, 줄은 느슨해진다.

P는 천장에 닿지 않는다

천장에 닿으려면 P는 출발점에서 2 m 올라가야 하고, 위치 에너지가 $0.5g \times 2 = g$ J만큼 늘어나야 한다. 쓸 수 있는 에너지는 놓는 순간 줄에 저장된 $\frac{5g}{12}$ J가 전부이며(줄이 느슨해지면 에너지를 전혀 저장하지 않는다), $\frac{5g}{12} < g$이다. 따라서 P는 천장에 닿을 수 없다.

더 정확히 말하면, 줄이 느슨해진 뒤 P는 속력 v로 연직 방향으로 움직이는 포물체(projectile)이므로 $\frac{v^2}{2g} = \frac{1}{3}$ m를 더 올라간다. 최고점은 $x = 1.5 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$이고, 이는 여전히 천장보다 $\frac{7}{6}$ m 아래이다.

줄이 팽팽한 동안의 단진동

$x > 1.5$일 때 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(아래쪽을 양의 방향으로)에 의해

$$0.5\,\ddot{x} = 0.5g - \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

이다. 평형 위치는 우변이 0이 되는 곳이다. 즉 $x - 1.5 = 0.15$이므로 $x = 1.65$이다. 평형 위치 아래쪽으로의 변위를 $y = x - 1.65$라 두자. 그러면

$$\ddot{y} = 2g - \frac{20g}{3}(y + 0.15) = -\frac{20g}{3}y,$$

이고, 이는 $y = 0$을 중심으로 하고 $\omega^2 = \dfrac{20g}{3}$인 단진동이다. 요구된 대로, 이 식은 줄에 장력이 작용하는 동안 언제나 성립한다.

돌아오는 데 걸리는 시간

P는 $y = 2 - 1.65 = 0.35$에서 정지 상태로 출발하므로, 줄이 팽팽한 동안

$$y = 0.35\cos\omega t.$$

이다. 줄은 $x = 1.5$, 즉 $y = -0.15$일 때 느슨해진다. 따라서 이 일이 처음 일어나는 시각 t_1은

$$\cos\omega t_1 = -\frac{0.15}{0.35} = -\frac{3}{7}.$$

을 만족한다.

> **생각해 보기** $\cos\omega t_1 = -\frac{3}{7}$의 해 가운데 어느 것이 필요하며, 그것을 arccos를 써서 어떻게 나타낼까?

t가 0에서부터 증가하면 ωt도 0에서부터 증가하고, $\cos\omega t$가 처음으로 $-\frac{3}{7}$이 되는 것은 ωt가 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있을 때이다. $\arccos\frac{3}{7} \in (0, \frac{\pi}{2})$이고 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$이므로, 그 값은 $\omega t_1 = \pi - \arccos\frac{3}{7}$이다. 따라서

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}\right) = \left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}\left(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}\right).$$

이다. (검산으로, 이때의 속력은 $\omega\sqrt{0.35^2 - 0.15^2} = \sqrt{\frac{20g}{3} \times 0.1} = \sqrt{\frac{2g}{3}}$이며, 에너지 계산과 일치한다.)

줄이 느슨한 동안 P는 중력만 받으며 운동한다. P는 속력 $v = \sqrt{2g/3}$로 위로 움직이며 $x = 1.5$를 떠나고, 같은 속력으로 아래로 움직이며 $x = 1.5$로 돌아오는데, 이때까지 걸리는 시간은

$$t_2 = \frac{2v}{g} = \frac{2}{g}\sqrt{\frac{2g}{3}} = \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}.$$

이다.

위치에만 의존하는 힘을 받는 운동은 가역적(reversible)이다. P는 떠날 때와 같은 속력으로 $x = 1.5$에서 팽팽한 구간에 다시 들어오므로, 단진동 단계를 거꾸로 되짚으며 다시 t_1의

시간이 지난 뒤 처음 위치인 $y = 0.35$에서 정지한다. 전체 시간은

$$\begin{aligned} 2t_1 + t_2 &= 2\left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}) + \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2} + \left(\frac{3}{5g}\right)^{1/2}(\pi - \arccos\tfrac{3}{7})\,, \end{aligned}$$

이며, 여기서 $2\sqrt{3/(20g)} = \sqrt{12/(20g)} = \sqrt{3/(5g)}$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 자연 길이에서의 속력을 구하는 두 방법(에너지, 그리고 단진동의 $v^2 = \omega^2(a^2 - y^2)$)이 모두 $v^2 = \frac{2g}{3}$을 준다.
- $g = 9.8$로 두면 공식은 약 1.0199 s를 준다. 운동 방정식을 수치적으로 한 단계씩 풀면($x < 1.5$일 때는 장력을 끄고) 출발점에서 다시 정지할 때까지 같은 시간이 나오고, 최고점은 천장보다 $\frac{7}{6}$ m 아래이다.
- 느슨한 단계가 없다면 단진동의 주기는 $2\pi/\omega \approx 0.77$ s일 것이다. 우리가 구한 $2t_1 \approx 0.50$ s는 이보다 작은데, 진동의 일부만 이루어지므로 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 단진동의 중심을 평형 위치가 아니라 자연 길이로 잡는 것. 중력 때문에 중심은 늘어난 길이가 0.15 m인 곳으로 옮겨진다.
- $\omega t_1 = \arccos(-\frac{3}{7})$로 두고는 이것이 $\pi - \arccos\frac{3}{7}$임을 알아차리지 못하는 것.
- 돌아오는 여정을 잊는 것. 묻는 시간에는 올라가는 것과 돌아오는 것이 모두 포함되므로, 두 단계 모두 두 배가 된다.

STEP 너머

이것은 구간별로 정의된, 즉 "매끄럽지 않은(non-smooth)" 동역학계(dynamical system)이다. 영역마다 서로 다른 운동 방정식이 성립하고, 해는 경계에서 위치와 속도를 맞추어 이어 붙인다. 튀는 공, 충돌, 스위칭 회로도 같은 아이디어로 다루며, 우리가 사용한 가역성 논증은 보존계에서의 시간 역전 대칭(time-reversal symmetry)을 처음으로 엿보는 것이다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP II 2000, 문제 12

확률과 통계 • 정규확률변수의 합

> **STEP II 2000, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q12

핵심 아이디어

헨리(Henry)가 지각하는 것은 정확히 **전체** 이동 시간이 09시 전까지 남은 시간을 넘을 때이다. 따라서 각 경로마다 서로 독립(independent)인 두 정규분포(normal distribution) 이동 시간을 더해 하나의 정규확률변수로 만든다. 표준화(standardising)하면 "지각"은 "표준정규변수가 어떤 수보다 크다"는 사건이 되고, Φ가 증가함수이므로 표 없이도 두 경로를 비교할 수 있다. 나머지는 전확률 법칙(law of total probability)과 베이즈 정리(Bayes' theorem)이다.

풀이

두 경로 비교하기

각 경로에서 기차 이동과 그 이후의 이동은 서로 독립이라고 가정한다.

킹스크로스(King's Cross). 기차 이동 시간을 $X_1 \sim N(55, 25)$, 그 이후의 이동 시간을 $Y_1 \sim N(30, 144)$라 하자. 두 변수는 독립인 정규확률변수이므로 그 합도 정규분포를 따르며, 평균과 분산(variance)은 각각 더해진다.

$$T_1 = X_1 + Y_1 \sim N(85,\, 169), \qquad \text{표준편차} 13.$$

기차는 07시 15분에 출발하므로 헨리에게는 105분이 있고, $T_1 > 105$일 때 지각한다. $Z \sim N(0,1)$이라 하면

$$\mathrm{P}(\text{지각} \mid \text{킹스크로스}) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{105-85}{13}\right) = 1 - \Phi\left(\tfrac{20}{13}\right) = A.$$

리버풀 스트리트(Liverpool Street). 마찬가지로 $X_2 \sim N(65, 16)$와 $Y_2 \sim N(25, 9)$가 독립

일 때 $T_2 = X_2 + Y_2$이므로

$$T_2 \sim N(90,\, 25), \qquad \text{표준편차5.}$$

이 기차는 07시 20분에 출발하여 100분이 남으므로

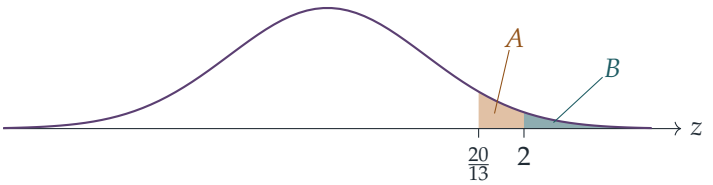
$$\mathrm{P}(\text{지각} \mid \text{리버풀 스트리트}) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{100-90}{5}\right) = 1 - \Phi(2) = B.$$

생각해 보기 표 없이 A와 B를 어떻게 비교할 수 있을까?

Φ는 양의 확률밀도(density)를 갖는 누적분포함수(cumulative distribution function)이므로 순증가한다. $\frac{20}{13} < \frac{26}{13} = 2$이므로 $\Phi(\frac{20}{13}) < \Phi(2)$이고, 따라서

$$A = 1 - \Phi\left(\tfrac{20}{13}\right) > 1 - \Phi(2) = B.$$

그러므로 요구한 대로, 헨리는 킹스크로스행 기차를 탈 때 지각할 가능성이 더 크다. (흥미롭게도 이 경로는 평균적으로 **더 빠르다**. 그런데도 불리한 까닭은 킹스크로스에서 이어지는 지하철 구간의 변동이 매우 크기 때문이다.)



표준정규곡선의 색칠된 꼬리 부분: A는 색칠된 영역 전체이고, B는 2 너머의 더 진한 부분이다.

지각 횟수의 기댓값

한 번의 이동에서 헨리가 킹스크로스행 기차를 타는 사건을 K라 하여 $\mathrm{P}(K) = p$라 하고, 지각하는 사건을 D라 하자. 전확률 법칙에 의해

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(D \mid K)\,\mathrm{P}(K) + \mathrm{P}(D \mid K')\,\mathrm{P}(K') = pA + (1-p)B.$$

M번의 이동이 서로 독립이라고 가정하면 지각 횟수는 모수가 M과 $\mathrm{P}(D)$인 이항분포(binomial distribution)를 따르므로

$$L = M(pA + (1-p)B) = M(B + p(A-B)).$$

$A - B > 0$이고 $0 \le p \le 1$이므로 식 $B + p(A-B)$는 p에 대해 증가하며, $p = 0$일 때 B에서 $p = 1$일 때 A까지 변한다. 따라서 가능한 모든 p에 대하여

$$BM \le L \le AM,$$

이고, 왼쪽 등호는 $p = 0$일 때만, 오른쪽 등호는 $p = 1$일 때만 성립한다. 말로 하면, L/M은 A와 B의 가중평균(weighted average)이므로 둘 사이에 있어야 한다.

p 추정하기

지각한 경우 가운데 킹스크로스행 기차를 탔던 경우의 비율은 $\mathrm{P}(K \mid D)$의 추정값이며, M이 크므로 관측된 $\frac{3}{5}$를 이 확률과 같다고 본다. 베이즈 정리에 의해

$$\mathrm{P}(K \mid D) = \frac{\mathrm{P}(D \mid K)\,\mathrm{P}(K)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{pA}{pA + (1-p)B}.$$

이것을 $\frac{3}{5}$와 같다고 놓으면

$$\begin{aligned} 5pA &= 3pA + 3(1-p)B \\ 2pA + 3pB &= 3B, \end{aligned}$$

이므로 추정값은

$$\hat{p} = \frac{3B}{2A + 3B}.$$

검산

- 수치로는 $A \approx 0.0620$, $B \approx 0.0228$이므로 킹스크로스 경로는 약 6%, 리버풀 스트리트 경로는 약 2%의 확률로 지각한다. 각 경로에서 4×10^5번의 이동을 모의실험한 결과는 소수점 아래 셋째 자리까지 일치했다.
- 이 값들을 쓰면 $\hat{p} \approx 0.355$이다. 다시 대입하면 $pA/(pA + (1-p)B) = 0.6$이 정확히 성립하며, 이 p로 전체 과정을 모의실험하면 지각의 약 60%가 킹스크로스 경로에서 나왔다.
- 마지막 답의 타당성 점검: 두 경로의 신뢰도가 같다면($A = B$) 지각은 기차 선택만을 반영하므로, 지각의 $\frac{3}{5}$가 킹스크로스 경로라는 것은 $p = \frac{3}{5}$를 뜻한다. 공식은 $3B/5B = \frac{3}{5}$를 준다. 킹스크로스는 신뢰도가 더 낮은 경로이므로 지각한 날 가운데 실제보다 많이 나타나고, 따라서 p는 $\frac{3}{5}$보다 작아야 하는데, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- 분산 대신 표준편차(standard deviation)를 더하는 실수: 킹스크로스 경로의 전체 시간의 분산은 $25 + 144 = 169$이므로 표준편차는 $5 + 12 = 17$이 아니라 13이다.
- 두 기차 모두에 똑같이 105분의 여유를 적용하는 실수: 리버풀 스트리트행 기차는 5분 늦게 출발한다.

- 곧바로 $p = \frac{3}{5}$로 놓는 실수. $\frac{3}{5}$는 $\mathrm{P}(K)$가 아니라 $\mathrm{P}(K \mid D)$이며, 두 경로의 신뢰도가 같지 않으므로 둘은 다르다.

STEP 너머

여기 나온 두 아이디어는 대학 첫 확률론 강의 내내 되풀이해 등장한다. 독립인 정규확률변수의 합이 정규분포를 따른다는 사실은 적률생성함수(moment generating function)로 가장 깔끔하게 증명되며, 이는 중심극한정리(central limit theorem)의 바탕이 되는 정규분포족의 안정성의 특수한 경우이다. 마지막 소문항은 축소판 통계적 추론(statistical inference)이다. 우리는 결과(지각)를 관측하고 베이즈 정리를 이용해 숨은 원인(기차 선택)을 추론했다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 두 주제를 모두 다루며, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 바로 이런 유형의 베이즈 문제가 훨씬 많이 실려 있다.

풀이

STEP II 2000, 문제 13

확률과 통계 • 포획-재포획 추정

STEP II 2000, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 13.2 절 **들쥐 세기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch13/voles.html

핵심 아이디어

이것은 포획–재포획(capture–recapture) 문제이다. 두 번째 표본은 N마리 가운데 200마리의 들쥐를 무작위로 고른 것이고, 그중 200마리가 표시되어 있으므로, 표본 속 표시된 들쥐의 수는 초기하분포(hypergeometric distribution)를 따른다. p_N이 최대가 되는 곳을 찾을 때는 미분하지 말아야 한다(N의 계승(factorial)은 쉬운 의미로는 미분할 수 없다). 대신 비 p_N / p_{N-1}을 통해 이웃한 항을 비교하면 거의 모든 것이 약분된다. 마지막 항등식은 덤으로 얻어진다. 세 번째 표본에 대한 확률들의 합은 1이어야 하기 때문이다.

풀이

확률 p_N

두 번째 표본을 N마리 들쥐 가운데 200마리를 고르는 것으로 모형화하고, 크기가 200인 모든 부분집합이 똑같은 확률로 뽑힌다고 하자. 이러한 부분집합은 $\binom{N}{200}$개 있다. N마리 가운데 200마리는 표시되어 있고 $N-200$마리는 표시되어 있지 않다. 표시된 들쥐가 정확히 11마리인 표본은 표시된 들쥐 11마리와 표시되지 않은 들쥐 189마리를 고른 것이므로

$$p_N = \frac{\binom{200}{11}\binom{N-200}{189}}{\binom{N}{200}}.$$

N이 들어 있는 두 이항계수(binomial coefficient)를 계승으로 쓰면

$$\begin{aligned} p_N &= \binom{200}{11} \cdot \frac{(N-200)!}{189!\,(N-389)!} \cdot \frac{200!\,(N-200)!}{N!} \\ &= k\,\frac{((N-200)!)^2}{N!\,(N-389)!}, \qquad \text{여기서} k = \binom{200}{11}\frac{200!}{189!}, \end{aligned}$$

이고, k는 N에 의존하지 않는다. 이것이 요구된 꼴이다. (두 표본을 합하면 서로 다른 들쥐 $200+189=389$마리가 들어 있으므로 $N \geq 389$이어야 한다.)

p_N의 최대화

$N \geq 390$일 때 p_N을 p_{N-1}로 나눈다. $(N-200)! = (N-200)\,(N-201)!$, $N! = N\,(N-1)!$, $(N-389)! = (N-389)\,(N-390)!$을 이용하면 다음을 제외한 모든 것이 약분된다.

$$\frac{p_N}{p_{N-1}} = \frac{(N-200)^2}{N(N-389)}.$$

분자와 분모가 모두 양수이므로

$$\begin{aligned} p_N > p_{N-1} &\iff (N-200)^2 > N(N-389) \\ &\iff N^2 - 400N + 40000 > N^2 - 389N \\ &\iff 40000 > 11N \\ &\iff N < 3636.\overline{36}. \end{aligned}$$

생각해 보기 이것은 수열 $p_{389}, p_{390}, \ldots$의 모양에 대해 무엇을 말해 주는가?

$390 \leq N \leq 3636$이면 비가 1보다 크므로 수열은 p_{3636}까지 순증가한다. $N \geq 3637$이면 비가 1보다 작으므로(등호가 성립하려면 $11N = 40000$이어야 하는데, 이 식은 정수해를 갖지 않는다) 수열은 그 이후로 순감소한다. 따라서 p_N은

$$N = 3636.$$

에서 유일한 최댓값을 갖는다. 이는 $\frac{200\times200}{11}$의 정수 부분이다. 표본에서 표시된 비율 $\frac{11}{200}$이 모집단에서 표시된 비율 $\frac{200}{N}$과 같아야 한다고 생각하면 짐작할 수 있는 값이다.

세 번째 표본

모집단의 크기를 방금 구한 추정값 3636으로 놓자. 두 번째로 풀어 준 뒤에는 원래의 200마리에 새로 표시된 189마리가 더해져 표시된 들쥐가 389마리이고, 표시되지 않은 들쥐는 $3636-389=3247$마리이다. 앞에서와 똑같이 추론하면, 크기가 200인 무작위 표본에 표시

된 들쥐가 정확히 j마리 들어 있을 확률은

$$\frac{\binom{389}{j}\binom{3247}{200-j}}{\binom{3636}{200}}, \qquad j = 0, 1, \ldots, 200.$$

$389 \geq 200$이고 $3247 \geq 200$이므로 0부터 200까지의 모든 j가 가능하며, 이것들이 일어날 수 있는 모든 결과이다. 이 결과들은 서로 배반이므로 확률의 합은 1이다.

$$\sum_{j=0}^{200} \frac{\binom{389}{j}\binom{3247}{200-j}}{\binom{3636}{200}} = 1.$$

양변에 $\binom{3636}{200}$을 곱하면

$$\sum_{j=0}^{200} \binom{389}{j}\binom{3247}{200-j} = \binom{3636}{200},$$

이 되어 증명이 끝난다.

검산

- 정수 이항계수로 p_N을 정확히 계산하면 여러 N 값(예를 들어 389, 1000, 5000)에서 계승 공식과 일치하고, $389 \leq N < 20000$ 범위를 탐색하면 최댓값이 $N = 3636$에서 나온다.
- 전환점에서 $p_{3636}/p_{3635} = 3436^2/(3636 \times 3246) \approx 1.0003 > 1$이지만 $p_{3637}/p_{3636} < 1$이다.
- 마지막 항등식의 양변을 정수로 정확히 계산하면 서로 같다. 마땅히 그래야 하듯이 $389 + 3247 = 3636$임에 주목하라.

흔한 실수

- N을 연속인 양으로 보고 미분하는 것. 대신 이웃한 항의 비를 이용하고, 부등식을 정확히 판정하라.
- 두 번째로 풀어 준 뒤에는 표시된 들쥐가 200마리가 아니라 389마리라는 것을 잊는 것.
- "$N = 3636.36$에서 최대"라고 말하는 것. 모집단의 크기는 자연수여야 하며, 이웃한 두 정수 가운데 어느 쪽이 더 큰지 확인해야 한다.

STEP 너머

관측된 자료가 나올 확률을 가장 크게 만드는 모수의 값을 고르는 것을 **최대가능도**(maximum likelihood) 방법이라고 하며, 이는 대학 1학년 통계학의 핵심 아이디어이다. 여기서는 이 방법이 포획–재포획에 대한 링컨–피터슨 추정량(Lincoln–Petersen estimator)을 준다. 마지막 항등식은 방데르몽드 항등식(Vandermonde's identity)이며, 여기서 쓴 논법, 즉 같은 것을 두 가지 방법으로 세는 것은 조합론에서 강력한 기법이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction* (확률론 입문서)에서 초기하분포와 이러한 논법을 다룬다.

풀이

STEP II 2000, 문제 14

확률과 통계 • 중앙값의 분포

STEP II 2000, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q14

이 문제는 *Beyond STEP*의 13.4 절 **평균인가, 중앙값인가?**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch13/mean-or-median.html

핵심 아이디어

중앙값(median)의 밀도함수(density)는 $y^r(1-y)^s$ 꼴의 다항식이므로, 주어진 적분 하나로 모든 계산을 할 수 있다. 먼저 정규화 상수(normalising constant)를 구하는 데 한 번 쓰고, 이어서 y의 지수를 하나, 그리고 둘 올려서 처음 두 적률(moment)을 구하는 데 다시 쓴다. 마지막 부분에서는 Y와 $\bar{X}$ 모두 $\frac{1}{2}$을 중심으로 하며, 정규분포(normal distribution)에서는 중심에서 일정한 거리 안에 떨어질 확률이 표준편차(standard deviation)에만 의존한다. 퍼짐이 더 작은 확률변수가 이긴다.

풀이

상수 k

밀도함수를 적분하면 1이 되어야 한다. 주어진 결과에 $r = s = n$을 대입하면

$$1 = \int_0^1 k y^n (1-y)^n \, \mathrm{d}y = k \, \frac{n!\, n!}{(2n+1)!}, \qquad \text{따라서} \qquad k = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

평균

밀도함수는 $y = \frac{1}{2}$에 대하여 대칭(symmetric)이다(y를 $1-y$로 바꾸어도 변하지 않는다). 따라서 $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}$이다. 이를 적분으로 확인하기 위해 $r = n+1, s = n$으로 두면

$$\mathrm{E}(Y) = k\int_0^1 y^{n+1}(1-y)^n \,\mathrm{d}y = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{(n+1)!\,n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

분산

이제 $r = n+2, s = n$으로 두면

$$\mathrm{E}(Y^2) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{(n+2)!\,n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}.$$

따라서

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n+2)-(2n+3)}{4(2n+3)} = \frac{1}{4(2n+3)}.$$

중앙값과 평균의 비교

각 X_i는 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로 $\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{2}$이고 $\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{12}$이다. X_i들은 서로 독립(independent)이므로

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot(2n+1)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{12(2n+1)}.$$

생각해 보기 두 확률변수 모두 $\frac{1}{2}$을 중심으로 한다. 어느 쪽이 중심에서 $d/\sqrt{n}$ 이내에 떨어질 가능성이 더 큰지를 결정하는 수 하나는 무엇인가?

바로 표준편차이다. n이 클 때 $Y \sim \mathrm{N}(\frac{1}{2}, \sigma_Y^2)$, $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\frac{1}{2}, \sigma_{\bar{X}}^2)$로 볼 수 있다. $W \sim \mathrm{N}(\frac{1}{2}, \sigma^2)$이고 $c > 0$일 때, 표준정규분포의 분포함수(distribution function)를 Φ로 쓰면

$$\mathrm{P}\left(|W - \tfrac{1}{2}| < c\right) = \mathrm{P}\left(|Z| < \frac{c}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1,$$

이다. 여기서 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$이다. Φ는 순증가하므로 이것은 σ에 대한 순감소함수(decreasing function)이다. 따라서 $c = d/\sqrt{n}$일 때 요구한 부등식은 정확히 $\sigma_Y > \sigma_{\bar{X}}$일 때, 즉 $\mathrm{Var}(Y) > \mathrm{Var}(\bar{X})$일 때 성립한다.

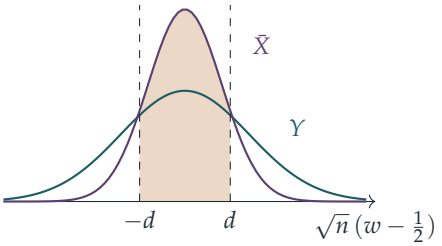
$$\begin{aligned}\frac{1}{4(2n+3)} > \frac{1}{12(2n+1)} &\iff 12(2n+1) > 4(2n+3)\\ &\iff 24n+12 > 8n+12\\ &\iff n > 0.\end{aligned}$$

이는 모든 $n \geq 1$에 대하여 참이다. 따라서 n이 정규근사(normal approximation)가 타당할 만큼 크기만 하면, 양수 d가 무엇이든 Y에 대한 확률은 $\bar{X}$에 대한 확률보다 순전히 작다. 이로써 증명이 끝난다.

차이가 얼마나 큰지 보기 위해 표준화(standardise)하면

$$\frac{d/\sqrt{n}}{\sigma_Y} = 2d\sqrt{\frac{2n+3}{n}} \to 2\sqrt{2}\,d, \qquad \frac{d/\sqrt{n}}{\sigma_X} = d\sqrt{\frac{12(2n+1)}{n}} \to 2\sqrt{6}\,d.$$

점근적으로(asymptotically) 평균의 표준편차가 $\sqrt{3}$배만큼 더 작다.



그림은 두 극한 밀도함수를 $\sqrt{n}\,(w-\frac{1}{2})$ 척도로 나타낸 것이다. 더 좁은 곡선(평균)이 어떤 중심 구간에서든 더 많은 확률을 갖는다.

검산

- $n = 0$: 균등분포 확률변수 하나의 "중앙값"은 그냥 X_1이며, 우리가 구한 공식은 $k = 1$과 $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12}$, 즉 균등분포의 분산을 주므로 마땅히 그래야 하는 결과와 맞다.
- 두 분산은 $n = 0$일 때 모두 $\frac{1}{12}$이고 $n \geq 1$이면 서로 달라지는데, 이는 위의 부등식 $n > 0$과 일치한다.
- $n = 50$(101개의 균등분포 확률변수)으로 모의실험(simulation)을 한 결과 $\mathrm{Var}(Y) \approx 0.00243$으로, $1/412 \approx 0.00243$과 같았다. $d = 0.3$일 때 $\mathrm{P}(|Y - \frac{1}{2}| < d/\sqrt{n}) \approx 0.607$, $\mathrm{P}(|\bar{X} - \frac{1}{2}| < d/\sqrt{n}) \approx 0.859$를 얻었는데, 이는 정규근사 값 0.611, 0.860에 가깝다.

흔한 실수

- $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{12}$로 쓰거나, 분모에 $(2n+1)^2$을 얻은 뒤 $2n+1$을 곱하는 대신 $2n+1$로 한 번만 나누는 것.
- 방향을 반대로 잡는 것: 분산이 **클수록** 중심 근처에 있을 확률은 **작아진다**.
- $\mathrm{E}(Y^2)$에는 $r = 2n$이 아니라 $r = n+2$를 써야 한다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

중앙값의 밀도함수는 베타분포(Beta distribution) Beta$(n+1, n+1)$이고, 주어진 적분은 베타함수(Beta function)이다. 방금 한 비교는 **점근 상대 효율**(asymptotic relative efficiency)이라는 개념이다. 균등분포 자료에서는 표본평균(sample mean)이 중앙값 분산의 3분의 1의 분산으로 중심을 추정하지만, 꼬리가 두꺼운(heavy-tailed) 자료에서는 중앙값이 이길 수 있다. 순서통계량(order statistics)과 베타함수는 Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*(확률론 입문)에 잘 설명되어 있다.

풀이

STEP III 2000, 문제 1

순수수학 • 쌍곡선의 접선

> **STEP III 2000, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q1

핵심 아이디어

두 곡선은 모두 원점을 중심으로 하는 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이고, 둘 다 반회전(half-turn) $(x, y) \mapsto (-x, -y)$에 대하여 변하지 않는다. 이 대칭성 덕분에 Q는 저절로 얻어진다. 접선(tangent)에 대해서는 연립방정식을 무작정 푸는 대신, 제시된 점이 두 직선 위에 모두 있음을 $ab = 1$과 $a^2 - b^2 = 2$라는 두 사실을 이용해 **확인**하는 것이 깔끔한 요령이다. 네 점을 구하고 나면, 원점을 중심으로 하는 4분의 1 회전이 정사각형이 되는 이유를 설명해 준다.

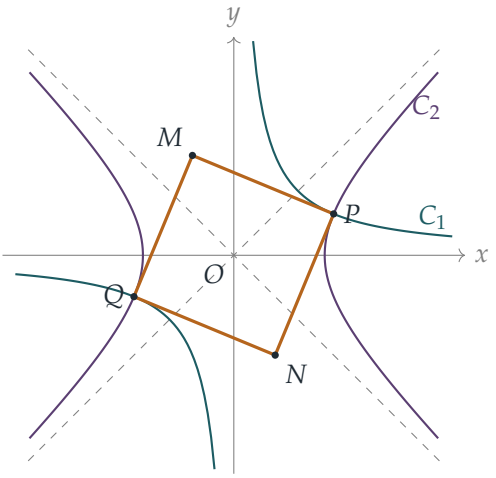
풀이

개형 그리기

C_1, 즉 $xy = 1$은 제1사분면과 제3사분면에 놓인 익숙한 직각쌍곡선이며, 좌표축을 점근선(asymptote)으로 가진다.

C_2, 즉 $x^2 - y^2 = 2$는 x축과 $(\pm\sqrt{2}, 0)$에서 만나고 y축과는 만나지 않는다(만나려면 $-y^2 = 2$이어야 한다). $y^2 = x^2 - 2$로 쓰면 $|y| < |x|$이고 $|x|$가 클 때 $y \approx \pm x$임을 알 수 있으므로, 점근선은 $y = \pm x$이다. 이 곡선은 C_1을 원점을 중심으로 $45°$ 회전시킨(그리고 $\sqrt{2}$배 확대한) 것이며, 두 가지가 왼쪽과 오른쪽으로 열려 있다.

두 곡선은 어디에서 만나는가? $xy = 1 > 0$이므로 공통점은 모두 제1사분면 또는 제3사분면에 있다. $y = 1/x$를 C_2에 대입하면 $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$이므로 $x^2 = 1 + \sqrt{2}$이다(다른 근 $1 - \sqrt{2}$는 음수이다). 따라서 교점은 정확히 두 개이고, 두 사분면에 하나씩 있다.



그림에서 C_1은 청록색, C_2는 자주색이며, 점선은 C_2의 점근선 $y = \pm x$이다. 호박색 정사각형 $PMQN$이 지금부터 구하려는 것이다.

점 Q

(x, y)를 $(-x, -y)$로 바꾸어도 xy와 $x^2 - y^2$는 모두 변하지 않는다. 따라서 (a, b)가 두 곡선 위에 있으면 $(-a, -b)$도 두 곡선 위에 있다. 교점은 두 개뿐이므로

$$Q = (-a, -b).$$

앞으로 계속 P가 두 곡선 위에 있다는 두 사실을 이용한다.

$$ab = 1, \qquad a^2 - b^2 = 2.$$

접선

C_1에 대하여, $xy = 1$을 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로, C_1 위의 점 (p, q)에서의 기울기(gradient)는 $-q/p$이다. 그 점에서의 접선은 $p(y - q) = -q(x - p)$, 즉

$$qx + py = 2pq = 2.$$

C_2에 대하여, $x^2 - y^2 = 2$를 미분하면 $2x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로, (p, q)에서의 기울기는 p/q이다. 접선은 $q(y - q) = p(x - p)$, 즉

$$px - qy = p^2 - q^2 = 2.$$

(두 식은 기울기가 수직인 점에서도 성립한다. 이 식들은 곡선의 기울기 벡터와 (x, y)의 내적일 뿐이기 때문이다.) $P = (a, b)$와 $Q = (-a, -b)$를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\text{곡선} C_1\text{의 접선, 접점} P: &\quad bx + ay = 2,\\
\text{곡선} C_2\text{의 접선, 접점} Q: &\quad -ax + by = 2,\\
\text{곡선} C_2\text{의 접선, 접점} P: &\quad ax - by = 2,\\
\text{곡선} C_1\text{의 접선, 접점} Q: &\quad -bx - ay = 2.
\end{aligned}$$

점 M

M은 처음 두 직선의 교점이다. $(x, y) = (-b, a)$를 대입해 보자.

$$\begin{aligned}
bx + ay &= -b^2 + a^2 = 2,\\
-ax + by &= ab + ab = 2ab = 2.
\end{aligned}$$

따라서 $(-b, a)$는 두 직선 위에 모두 있다. 계수의 행렬식(determinant)이 $b \cdot b - a \cdot (-a) = a^2 + b^2 \neq 0$이므로 두 직선은 평행하지 않고, 따라서 정확히 한 점에서 만난다. 그러므로

$$M = (-b, a),$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

> ? **생각해 보기** 주어진 답을 확인하는 것은 직접 구하는 것보다 약한 논증이 아닐까?

여기서는 그렇지 않다. 평행하지 않은 두 직선은 정확히 한 점에서 만나므로, 두 직선 위에 모두 있는 점은 **바로** 그 교점이다. 직접 풀어도 되지만, 그렇게 하더라도 결국 $ab = 1$과 $a^2 - b^2 = 2$를 이용해 답을 정리해야 한다.

점 N

같은 방법으로, N은 $ax - by = 2$와 $-bx - ay = 2$의 교점이다. 점 $(b, -a)$를 대입하면

$$ab + ab = 2, \qquad -b^2 + a^2 = 2,$$

이고, 행렬식은 $a(-a) - (-b)(-b) = -(a^2 + b^2) \neq 0$이다. 따라서

$$N = (b, -a).$$

$PMQN$은 정사각형이다

네 위치 벡터(position vector)를 살펴보자.

$$P = (a, b), \quad M = (-b, a), \quad Q = (-a, -b), \quad N = (b, -a).$$

O를 중심으로 시계 반대 방향으로 90° 회전하면 (x, y)는 $(-y, x)$로 옮겨진다. 따라서 이 회전은 $P \to M \to Q \to N \to P$로 옮긴다. 이것만으로도 답이 짐작되지만, 직접적인 논증을 해 보자.

- 대각선 PQ와 MN의 중점이 모두 O이므로 두 대각선은 서로를 이등분하고, $PMQN$은 평행사변형(parallelogram)이다.
- 두 대각선의 길이는 모두 $2\sqrt{a^2+b^2}$이므로 같고, 따라서 이 평행사변형은 직사각형이다.
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = a(-b) + b(a) = 0$이므로 두 대각선은 수직이고, 따라서 이 직사각형은 마름모(rhombus)이다.

직사각형이면서 마름모인 사각형은 정사각형이다. 꼭짓점의 순서도 올바르다. P, M, Q, N은 O를 중심으로 4분의 1 회전씩 차례로 놓여 있으므로, $PMQN$은 스스로 교차하지 않고 정사각형의 둘레를 따라 돈다. 따라서 $PMQN$은 정사각형이다. ■

한 변의 길이의 제곱은 $|PM|^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2 = 2(a^2+b^2)$이다. $a^2 = 1+\sqrt{2}$, $b^2 = 1/a^2 = \sqrt{2}-1$이므로 이 값은 $4\sqrt{2}$이다.

검산

- 수치로 계산하면 $a = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.5538$, $b \approx 0.6436$이다. 접선들의 교점을 수치적으로 구하면 주장한 대로 $M \approx (-0.6436, 1.5538)$, $N \approx (0.6436, -1.5538)$이다. 네 변의 길이는 모두 $2.3784 \approx \sqrt{4\sqrt{2}}$이고, 이웃한 변은 서로 수직이다.
- P의 각은 $\arctan(b/a) = \arctan(\sqrt{2}-1) = 22.5°$로, C_1의 점근선 $y = 0$과 C_2의 점근선 $y = x$의 정확히 중간이다. 따라서 정사각형은 개형 그림에서 보듯이 22.5°만큼 기울어져 있다.

흔한 실수

- C_2의 접선을 $px + qy = 2$로 쓰는 것. 빼기 부호가 중요하며, 바로 이 부호 덕분에 계산이 맞아떨어진다.
- 반사 대칭을 짐작하여 $Q = (b, a)$ 또는 $(-b, -a)$로 잡는 것. 직선 $y = x$에 대한 반사는 C_1을 보존하지만 C_2는 보존하지 않는다. 두 곡선을 모두 보존하는 것은 O를 중심으로 하는 반회전뿐이다.
- 네 변의 길이가 같다는 것만 보이는 것. 그것으로는 마름모일 뿐이고, 직각(또는 대각선의 길이가 같음)도 보여야 한다.

STEP 너머

우리가 사용한 접선 공식 $qx + py = 2$와 $px - qy = 2$는, 원뿔곡선(conic) $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x} = c$ 위의 점 $\mathbf{p}$에서의 접선이 $\mathbf{p}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x} = c$라는 일반 규칙의 예이다. 대학 1학년의 이차형식(quadratic form) 강의에서는 회전을 이용해 A를 대각화(diagonalise)하는 법을 배우는데, 바로 이것이 $xy = 1$과 $x^2 - y^2 = 2$가 45° 회전시킨 같은 곡선인 이유이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이차형식과 회전을 명료하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 형식의 좌표기하 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2000, 문제 2

순수수학 • 치환적분

STEP III 2000, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q2

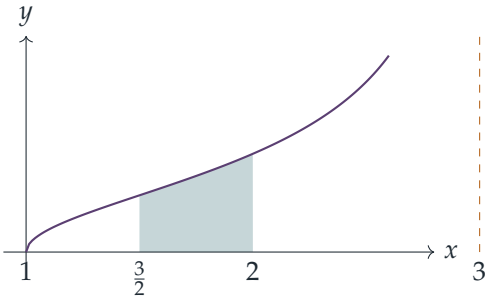
핵심 아이디어

$(x-1)/(3-x)$ 같은 몫의 제곱근을 보면 반각 공식(half-angle formulae)을 떠올려야 한다. $x = 2 - \cos\theta$로 두면 분자는 $1 - \cos\theta$, 분모는 $1 + \cos\theta$가 되고, 그 비는 완전제곱식 $\tan^2\frac{\theta}{2}$이다. 일반적인 결과를 위해 계산을 다시 할 필요는 없다. 일차 변수변환(linear change of variable)으로 a에서 b까지의 구간을 1에서 3까지의 구간으로 옮기면, 일반적인 적분이 첫 번째 적분의 상수배가 된다.

풀이

첫 번째 적분

피적분함수(integrand)는 $1 \le x < 3$에서 정의되고, 적분 구간 $\frac{3}{2} \le x \le 2$는 그 안에 들어 있다. 아래 색칠한 넓이가 우리가 구하려는 적분이다.



$x = 2 - \cos\theta$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$이다. $x = \frac{3}{2}$일 때 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이고,

$x = 2$일 때 $\cos\theta = 0$이므로 θ의 범위를 $\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지로 잡는다. 그러면

$$x - 1 = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}, \qquad 3 - x = 1 + \cos\theta = 2\cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

이므로

$$\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\tan\tfrac{\theta}{2}\right| = \tan\tfrac{\theta}{2},$$

이다. 이 범위에서 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 탄젠트 값이 양수이기 때문이다.

생각해 보기 피적분함수가 $\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta$가 되었을 때, 탄젠트를 적분하는 일을 어떻게 피할 수 있을까?

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$로 쓰면 코사인이 약분된다.

$$\tan\tfrac{\theta}{2}\,\sin\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \cdot 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2} = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta.$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x &= \int_{\pi/3}^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big[\theta - \sin\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{6}.\end{aligned}$$

일반적인 적분

첫 번째 적분은 $a = 1$, $b = 3$인 경우로, 이때 $p = \frac{3+3}{4} = \frac{3}{2}$, $q = \frac{1+3}{2} = 2$이다. 그러므로 $u = 1$을 $x = a$로, $u = 3$을 $x = b$로 보내는 일차 치환을 찾는다.

$$x = a + \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1), \qquad \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(b-a)\,\mathrm{d}u.$$

그러면

$$x - a = \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1), \qquad b - x = (b-a) - \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1) = \tfrac{1}{2}(b-a)(3-u),$$

이고, $b - a \neq 0$이므로 공통인수가 약분된다.

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{u-1}{3-u}.$$

적분 구간의 끝을 보자. $u = \frac{3}{2}$이면 $x = a + \frac{1}{4}(b-a) = \frac{3a+b}{4} = p$이고, $u = 2$이면 $x = a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{a+b}{2} = q$이다. $b - a > 0$이므로 이 치환은 증가함수이고, 따라서 적분

구간의 끝의 순서가 그대로 유지된다. 그러므로 첫 번째 결과를 이용하면

$$\int_p^q \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{3/2}^2 \left(\frac{u-1}{3-u}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u$$
$$= \frac{b-a}{2}\cdot\frac{\pi+3\sqrt{3}-6}{6} = \frac{(b-a)(\pi+3\sqrt{3}-6)}{12},$$

이다. 이것이 보여야 할 결과이다.

(같은 방법으로, $x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\theta$로 바로 치환해도 된다. 이때도 적분 구간의 끝은 $\frac{\pi}{3}$와 $\frac{\pi}{2}$이고, 계산 과정은 인수 $\frac{b-a}{2}$가 더 붙는 것만 빼면 똑같다.)

검산

- 수치적으로 $\frac{1}{6}(\pi+3\sqrt{3}-6) \approx 0.38962$이다. 원래의 피적분함수에 $[\frac{3}{2}, 2]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열째 자리까지 같은 값이 나온다.
- 타당성: 피적분함수는 길이가 $\frac{1}{2}$인 구간에서 $\sqrt{1/3} \approx 0.577$부터 1까지 증가하므로, 넓이는 대략 0.29와 0.5 사이에 있어야 한다. 실제로 그렇다.
- 일반 공식은 음수 a를 포함하여 무작위로 고른 $a < b$ 20쌍에 대해 심프슨 공식의 결과와 일치했다.
- 척도 변환: 구간 $[a, b]$를 k배로 늘이면 피적분함수의 값들은 변하지 않지만 $[p, q]$는 k배로 늘어난다. 따라서 답은 $b-a$에 비례해야 하고, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$를 빠뜨리고 $\tan\frac{\theta}{2}$만을 θ에 대하여 적분하려 한다.
- 적분 구간의 끝을 $\theta = -\frac{\pi}{3}$이나 $\frac{5\pi}{3}$로 잡는다. 어떻게 잡든 θ가 $\sin\theta > 0$이고 $\tan\frac{\theta}{2} > 0$인 범위를 지나며 $\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 증가하도록 해야 한다.
- 일반적인 경우에 $\mathrm{d}x$에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}(b-a)$를 빠뜨려 분모에 12 대신 6이 나온다.

STEP 너머

두 번째 부분은 정적분(definite integral)이 아핀 변수변환(affine change of variable)에 따라 예측 가능한 방식으로 변한다는 것을 보여 준다. 이 때문에 이와 같은 양은 a와 b에 오직 길이 $b-a$를 통해서만 의존한다. 피적분함수 자체는 베타 함수(beta function) 꼴의 피적분함수이다. 전체 구간에서 $\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{1/2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(b-a)$이고, 함수 $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$는 확률론과 해석학 곳곳에서 거듭 등장한다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률

론 입문)에서는 이를 베타 분포(Beta distribution)의 정규화 상수(normalising constant)로 만나게 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에서는 치환적분법을 엄밀하게 증명한다.

풀이

STEP III 2000, 문제 3

순수수학 • 복소수와 기하

STEP III 2000, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.6 절 **페르마 점**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/fermat-point.html

핵심 아이디어

아르강 평면(Argand plane)에서 벡터를 60° 회전(rotation)시키는 것은 $\alpha = e^{i\pi/3}$를 곱하는 것과 같다. 따라서 주어진 변 위에 세운 정삼각형(equilateral triangle)의 세 번째 꼭짓점은 한 줄로 적을 수 있다. 그 뒤의 모든 것은 항등식(identity) $1 + \alpha^2 = \alpha$와 $\alpha^3 = -1$ 같은 그 친척들에서 나온다. 이 식들은 꼭짓점의 식을 아주 간단한 꼴로 정리해 주며, 그 꼴이 보이면 마지막 부분은 거의 바로 끝난다.

풀이

항등식

$\alpha^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로

$$1 + \alpha^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} = \alpha.$$

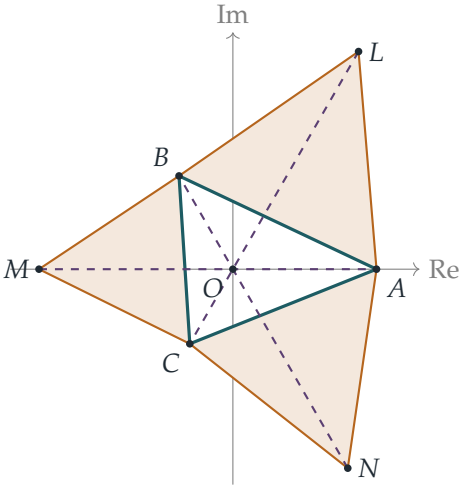
다음 따름 결과들도 사용할 것이다.

- $\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$;
- $1 - \alpha = -\alpha^2$ (항등식을 이항한 것이다);
- $\alpha^2 - \alpha = -1$ (이것도 이항한 것이다);
- $\alpha + \bar{\alpha} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$이므로 $1 - \alpha = \bar{\alpha} = e^{-i\pi/3}$.

마지막 식은 $1-\alpha$를 곱하면 **시계 방향**으로 60° 회전한다는 뜻이다.

삼각형 ABC

$A = p$는 양의 실수축 위에 있고, $B = q\alpha^2 = q\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$는 편각(argument)이 120°인 반직선 위에, $C = -r\alpha = r\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$는 편각이 240°인 반직선 위에 있다. 따라서 세 꼭짓점은 O에서 서로 120°씩 떨어진 세 반직선 위에, O로부터 각각 거리 p, q, r인 곳에 놓인다. 원점은 삼각형 내부에 있고, $A \to B \to C$는 **시계 반대 방향**으로 돈다. 아래 그림은 $p = 2$, $q = 1.5$, $r = 1.2$인 경우이며, 바깥에 세운 삼각형들도 함께 나타낸다.



꼭짓점 N, L, M

XYZ가 시계 방향으로 이름 붙인 정삼각형이면, X에서 출발해 돌 때 변 XZ는 변 XY를 X를 중심으로 시계 방향으로 60° 돌린 것이다. 따라서

$$Z - X = (Y - X)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = (Y - X)(1 - \alpha), \qquad \text{즉} \qquad Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y.$$

? **생각해 보기** 왜 "시계 방향"이면 새 삼각형들이 ABC의 **바깥쪽**에 놓이는가?

$A \to B \to C$가 시계 반대 방향이므로, C는 방향이 있는 변 AB의 왼쪽에 있다. AB를 A를 중심으로 시계 방향으로 돌리면 오른쪽으로 꺾이므로, L은 AB에 대해 C와 반대쪽에 놓인다. 나머지 두 변에서도 마찬가지이며, 이는 그림과 일치한다.

N (CAN이므로 $X = C, Y = A$):

$$N = \alpha(-r\alpha) + (1 - \alpha)p = (1 - \alpha)p - \alpha^2 r,$$

이므로 요구한 결과가 나온다. $1 - \alpha = -\alpha^2$를 쓰면 이 식은 $N = -\alpha^2(p + r)$로 정리된다.

L (삼각형 ABL이므로 $X = A, Y = B$):

$$L = \alpha p + (1-\alpha)q\alpha^2 = \alpha p + q(\alpha^2 - \alpha^3) = \alpha p + q(1+\alpha^2) = (p+q)\alpha,$$

여기서 $\alpha^3 = -1$을 쓴 다음 $1 + \alpha^2 = \alpha$를 썼다.

M (삼각형 BCM이므로 $X = B, Y = C$):

$$M = \alpha \cdot q\alpha^2 + (1-\alpha)(-r\alpha) = q\alpha^3 + r(\alpha^2 - \alpha) = -q - r = -(q+r),$$

여기서 $\alpha^3 = -1$과 $\alpha^2 - \alpha = -1$을 썼다.

따라서 주어진 N의 꼴과 같은 방식으로 쓰면

$$L = \alpha p + \alpha q, \qquad M = -q - r, \qquad N = (1-\alpha)p - \alpha^2 r.$$

세 직선

이제 각 점의 쌍을 단위 복소수(unit complex number)의 양수배로 살펴보자.

$$\begin{aligned} L &= (p+q)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, & C &= -r\alpha = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\cdot(-1), \\ M &= (q+r)\cdot(-1), & A &= p\cdot 1, \\ N &= (p+r)\cdot(-\alpha^2), & B &= q\,\alpha^2. \end{aligned}$$

각 쌍에서 두 점은 어떤 단위 복소수 u(차례로 $u = \alpha$, $u = 1$, $u = \alpha^2$)에 대해 u와 $-u$의 양의 실수배이다. 따라서 두 점은 O를 지나는 한 직선 위에, O를 사이에 두고 **반대쪽**에 놓인다. 그러므로 직선 LC, MA, NB는 모두 원점을 지나며, 실제로 원점은 각 선분 위에 있다. 또 두 점이 O의 반대쪽에 있으므로 각 선분의 길이는 O로부터의 거리의 합이다.

$$LC = (p+q) + r, \qquad MA = (q+r) + p, \qquad NB = (p+r) + q,$$

이 값은 모두 $p + q + r$로 같으므로 요구한 결과가 성립한다.

검산

$p = 1$, $q = 2$, $r = 3$이면 공식에서 $L = 3\alpha \approx 1.5 + 2.598\mathrm{i}$, $M = -5$, $N = -4\alpha^2 \approx 2 - 3.464\mathrm{i}$를 얻는다. $|L - A| = |L - B| = |A - B| = \sqrt{7}$을 계산해 보면 ABL이 정삼각형임이 확인된다. 컴퓨터로 각 삼각형을 $\pm 60^\circ$의 두 회전으로부터 직접 만들고 시계 방향인 것을 택하여, p, q, r를 무작위로 10 000번 골랐을 때 세 공식, O에서의 공점(concurrence), 공통 길이 $p + q + r$가 모두 성립함을 확인했다. 멋진 특수한 경우로, $p = q = r$이면 삼각형 ABC는 중심이 O인 정삼각형이 되고, 그림은 예상대로 3회 대칭성을 가진다.

흔한 실수

- $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ 대신 α를 곱해 반대 방향으로 회전하는 실수. 그러면 L, M, N이 삼각형 안쪽에 놓이고, 주어진 N의 꼴이 나오지 않는다.
- O가 각 직선 위에 있다는 것만 보이고, 길이를 구하려면 O가 양 끝점 사이에 있어야 한다는 점을 잊는 실수. 실수배의 부호가 이를 결정해 준다.

STEP 너머

이것은 나폴레옹(Napoleon) 배치의 특수한 경우이다. 임의의 삼각형의 각 변 바깥쪽에 정삼각형을 세우면, 직선 AM, BN, CL은 한 점(페르마 점(Fermat point))에서 만나고 그 길이도 모두 같다. 페르마 점은 세 꼭짓점까지의 거리의 합을 최소로 하는 점이며, 여기서는 각 변이 120°의 각을 이루며 보이는 점 O이다. 복소수는 회전을 곱셈으로 바꾸어 주며, 그래서 이런 증명이 짧은 대수 계산이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2000, 문제 4

순수수학 • 유리함수의 그래프 그리기

STEP III 2000, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q4

핵심 아이디어

$f(x) = x + c$로 놓고 분모를 없애면 삼차(cubic) 항이 소거되어 x에 대한 이차식(*quadratic*)만 남는다. 그러면 직선이 곡선과 만나는지는 판별식(discriminant)의 부호에 달려 있게 되는데, 그 판별식 자체가 c에 대한 이차식이므로 판별식의 판별식을 구하게 된다. 그래프를 그릴 때는 f를 일차 부분과 부분분수(partial fractions)로 나누면 필요한 모든 것을 알 수 있다. 곧 점근선(asymptote), 곡선이 점근선의 어느 쪽에 놓이는지, 그리고 곡선이 사점근선(oblique asymptote)과 만나는 위치이다.

풀이

직선과 곡선이 만나는 곳

$x \neq \pm 1$일 때 방정식 $f(x) = x + c$는 다음과 동치이다.

$$x(x-2)(x-a) = (x+c)(x^2-1).$$

전개하면 $x^3 - (a+2)x^2 + 2ax = x^3 + cx^2 - x - c$이다. x^3 항이 소거되어 다음이 남는다.

$$q(x) \equiv (a+2+c)x^2 - (2a+1)x - c = 0. \qquad (*)$$

따라서 직선이 곡선과 만나는 것은 $(*)$가 $x = \pm 1$이 아닌 실근을 가질 때와 정확히 같다.

생각해 보기 $(*)$의 근이 제외된 값 $x = \pm 1$ 중 하나일 수 있을까?

대입하면 $q(1) = (a+2+c) - (2a+1) - c = 1 - a$이고 $q(-1) = (a+2+c) + (2a+1) - c = 3(a+1)$이다. 둘 다 c에 의존하지 않으므로, $x = 1$이 근이 되는 것은 $a = 1$일 때뿐이고

$x=-1$이 근이 되는 것은 $a=-1$일 때뿐이다. $|a|\neq 1$이면 $(*)$의 모든 실근은 실제 교점을 준다.

$a+2+c=0$인 경우. 이때 $(*)$는 일차식(linear)이다: $-(2a+1)x+(a+2)=0$. $|a|>1$이면 $2a+1\neq 0$이므로 근 $x=\frac{a+2}{2a+1}$이 존재한다.

$a+2+c\neq 0$인 경우. 이때 $(*)$는 진짜 이차방정식이며 판별식은 다음과 같다.

$$D(c)=(2a+1)^2+4c(a+2+c)=4c^2+4(a+2)c+(2a+1)^2.$$

D를 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수인 c에 대한 이차식으로 생각하자. 그 판별식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}16(a+2)^2-16(2a+1)^2&=16\big[(a+2)-(2a+1)\big]\big[(a+2)+(2a+1)\big]\\&=16(1-a)\cdot 3(1+a)=48(1-a^2).\end{aligned}$$

$|a|>1$이면 이 값은 음수이므로 모든 c에 대하여 $D(c)>0$이다. 그러면 $(*)$는 서로 다른 두 실근을 가지며, 어느 것도 ± 1과 같지 않다. 일차식인 경우와 합치면, 모든 c에 대하여 직선 $y=x+c$는 곡선과 만난다.

$|a|=1$이면 모든 c에 대하여 $D(c)\geq 0$이므로 $(*)$는 여전히 항상 실근을 가지며, 이것이 주장의 대수적 내용이다. 그러나 이 경우에는 곡선 자체가 퇴화한다. 인수 하나가 약분되어 곡선은 한 점이 빠진 쌍곡선(hyperbola)이 된다. 예를 들어 $a=1$이면 $f(x)=x-3+\frac{3}{x+1}$ $(x\neq 1)$이고, 직선 $y=x-3$ (이 곡선의 점근선)은 곡선과 만나지 않는다. $(*)$에서 이는 $c=-3$인 경우로, 이때 유일한 근은 제외된 값 $x=1$이다. 따라서 $|a|=1$이면 이러한 예외적인 c 값을 제외하고 명제가 성립하며, $|a|>1$이면 예외 없이 성립한다.

$|a|<1$이면 이차식 $D(c)$는 두 실근을 가지며 두 근 사이에서 음수이다. 구체적인 선택으로 두 근의 중점인 $c=-\frac{1}{2}(a+2)$를 잡으면 다음과 같다.

$$D\big(-\tfrac{1}{2}(a+2)\big)=(a+2)^2-2(a+2)^2+(2a+1)^2=3(a^2-1)<0.$$

이 c에 대하여 $a+2+c=\frac{1}{2}(a+2)\neq 0$ ($a>-1$이므로)이므로, $(*)$는 판별식이 음수인 진짜 이차방정식이 되어 실근을 갖지 않는다. 따라서 요구한 대로 직선 $y=x-\frac{1}{2}(a+2)$는 곡선과 만나지 않는다.

사점근선

$x^3-(a+2)x^2+2ax$를 x^2-1로 나누면 다음을 얻는다.

$$f(x)=x-(a+2)+\frac{(2a+1)x-(a+2)}{x^2-1}.$$

$x\to\pm\infty$일 때 분수 부분은 0으로 수렴하므로 사점근선은 다음과 같다.

$$y=x-a-2.$$

그래프를 그리려면 분수를 부분분수로 나누는 것이 도움이 된다.

$$f(x) = x - (a+2) + \frac{a-1}{2(x-1)} + \frac{3(a+1)}{2(x+1)}.$$

이로부터 모든 것을 알 수 있다.

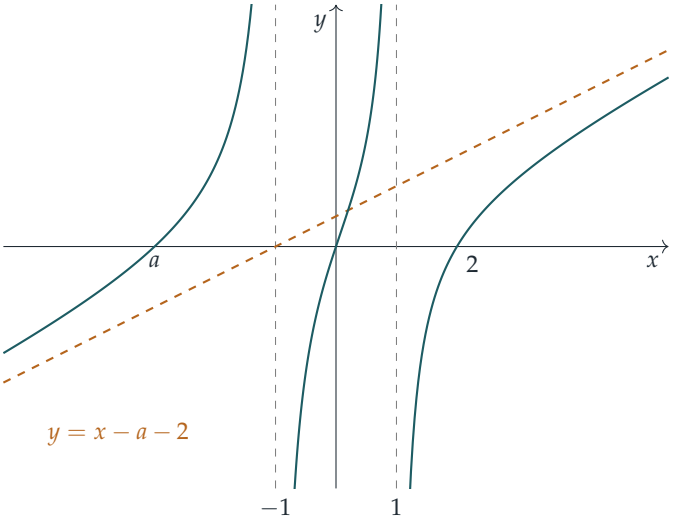
- 영점은 $x = 0,\ 2,\ a$이고, 수직점근선(vertical asymptote)은 $x = \pm 1$이다.
- 곡선은 $(2a+1)x = a+2$인 곳, 곧 $x_0 = \frac{a+2}{2a+1}$에서만 사점근선과 만난다(이것은 다시 $(*)$의 일차식인 경우이다).
- $|x|$가 클 때 차이 $f(x) - (x-a-2)$는 $\frac{2a+1}{x}$처럼 행동한다. 두 경우 모두 $2a+1 < 0$이므로, 곡선은 $x \to +\infty$일 때 점근선의 **아래쪽**에, $x \to -\infty$일 때 점근선의 **위쪽**에 놓인다.
- 계수 $\frac{a-1}{2}$와 $\frac{3(a+1)}{2}$가 $x = 1$과 $x = -1$의 양쪽에서의 행동을 결정한다.

경우 (i): $a < -1$

두 계수가 모두 음수이다: $\frac{a-1}{2} < 0$이고 $\frac{3(a+1)}{2} < 0$. 따라서 $x \to 1^-$ 또는 $x \to -1^-$일 때 $f(x) \to +\infty$이고, $x \to 1^+$ 또는 $x \to -1^+$일 때 $f(x) \to -\infty$이다. 또한

$$f'(x) = 1 - \frac{a-1}{2(x-1)^2} - \frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} > 0,$$

인데, 빼는 두 항이 모두 음수이기 때문이다. 따라서 f는 세 갈래 각각에서 증가하며 극점(turning point)은 전혀 없다. 교차점은 $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} > 0$이고 $x_0 - 1 = \frac{1-a}{2a+1} < 0$을 만족하므로 $-1 < x_0 < 1$이다. 곧 곡선은 가운데 갈래에서 점근선과 만난다. 영점은 $a < -1$ (왼쪽 갈래), 0 (가운데), 2 (오른쪽)이다.



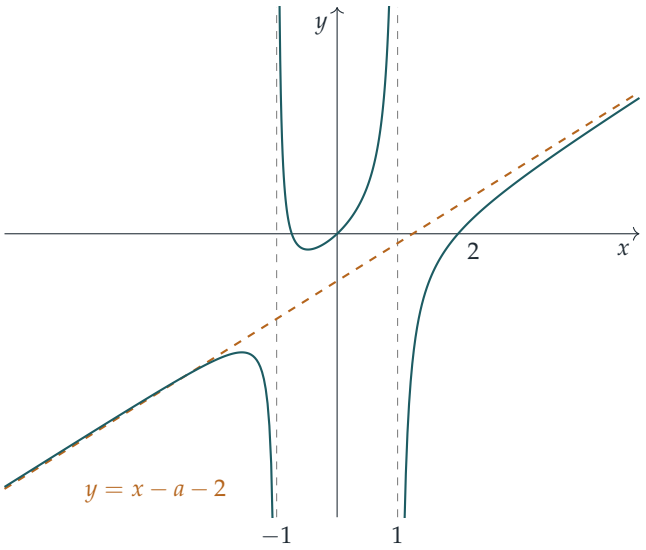
($a = -3$인 경우를 그린 것으로, 이때 점근선은 $y = x + 1$이고 $x_0 = \frac{1}{5}$이다.)

경우 (ii): $-1 < a < -\frac{1}{2}$

이제 $\frac{a-1}{2} < 0$이지만 $\frac{3(a+1)}{2} > 0$이다. $x = 1$ 근처의 행동은 앞에서와 같지만(왼쪽에서 $+\infty$, 오른쪽에서 $-\infty$), $x = -1$ 근처에서는 뒤집힌다. 곧 $x \to -1^-$일 때 $f(x) \to -\infty$이고 $x \to -1^+$일 때 $f(x) \to +\infty$이다. 이제 $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} < 0$이므로 $x_0 < -1$이다. 곧 교차는 왼쪽 갈래에서 일어난다. 영점 a와 0은 둘 다 $(-1, 0)$에 놓인다.

생각해 보기 극점을 구하라는 요구는 없지만, 극점은 어디에 있어야 할까?

왼쪽 갈래에서 곡선은 점근선 위쪽에서 $-\infty$로부터 올라와 x_0에서 점근선과 만나고, $x \to -1^-$일 때 $-\infty$로 떨어진다. 따라서 극대(maximum)를 갖는다. 이 갈래에는 영점이 없으므로(세 영점이 모두 > -1), 갈래 전체가 x축 아래에 놓인다. 가운데 갈래에서는 양 끝에서 $f \to +\infty$이고, a와 0 사이에서 축 아래로 내려가며 나머지 부분에서는 양수이므로, a와 0 사이에 극소(minimum)가 있다. 오른쪽 갈래에서는 $x > 1$일 때 $\frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} < 1$이므로 $f'(x) > 0$이다. 곧 곡선은 $-\infty$로부터 올라와 $x = 2$를 지나 아래쪽에서 점근선에 다가간다.



($a = -\frac{3}{4}$인 경우를 그린 것이다: 점근선은 $y = x - \frac{5}{4}$, 교차점은 $x_0 = -\frac{5}{2}$이며, $-\frac{3}{4}$와 0 사이에서 축 아래로 얕게 내려간다.)

검산

- $a = 0, c = -1$ (우리가 선택한 $c = -\frac{1}{2}(a+2)$)이면 $(*)$는 $x^2 - x + 1 = 0$이 되고, 그 판별식은 -3이다. 예측한 대로 교점이 없다.

- $a = -3$이면 $f(-1.1) \approx 30.9$이고 $f(-0.9) \approx -28.8$이며, 이는 경우 (i)에서 $x \to -1^{\mp}$일 때 구한 부호와 일치한다. $a = -\frac{3}{4}$이면 $f(-1.1) \approx -5.7$이고 $f(-0.9) \approx 2.1$이며, 이는 경우 (ii)의 뒤집힌 행동이다.
- 각 범위에서 여러 a에 대하여 f'의 부호 변화를 수치적으로 세어 보면, 경우 (i)에서는 극점이 없고 경우 (ii)에서는 왼쪽 갈래와 가운데 갈래에 각각 정확히 하나씩 있음이 확인된다.

흔한 실수

- $(*)$의 근 $x = \pm 1$이 교점이 아니라는 사실을 잊는 것. $|a| = 1$일 때 바로 이 부분에서 문제가 생긴다.
- $(*)$가 일차식이 되어 판별식 논법을 쓸 수 없는 경우인 $a + 2 + c = 0$을 무시하는 것.
- 경우 (ii)에서 수직점근선 $x = -1$의 어느 쪽인지를 잘못 판단하는 것. 그곳에서는 $a + 1$의 부호가 그림을 바꾼다.

STEP 너머

$|a| < 1$이면 $D(c)$의 두 근은 곡선에 접하는 직선 $y = x + c$를 주고, 그 사이에 있는 직선들은 곡선과 만나지 않는다. a가 ± 1을 지날 때 이 접선들이 나타나거나 사라지고 곡선의 모양이 바뀐다. 곧 영점 하나가 수직점근선을 지나가고 그 옆에서의 행동이 뒤집힌다. 곡선족의 정성적 모양이 매개변수에 따라 어떻게 변하는지를 연구하는 것이 분기 이론(bifurcation theory)의 출발점이며, 이는 대학 1학년 미분방정식(differential equations) 강의에서 만나게 된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라. 이런 종류의 그래프 그리기를 더 연습하고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)가 훌륭하다.

풀이

STEP III 2000, 문제 5

순수수학 • 선형 변환

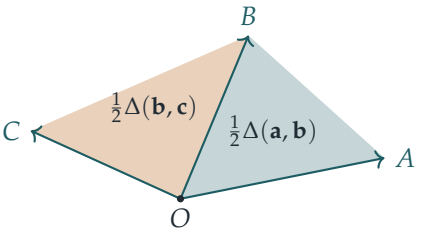
STEP III 2000, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q5

핵심 아이디어

$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$를 열로 하는 행렬의 행렬식(determinant)이므로, 삼각형 OAB의 부호 있는 넓이(signed area)의 두 배이다. 또한 이 값은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행(parallel)하지 않을 때, 그리고 그때에만 0이 아니다. 선형사상(linear map)은 이러한 넓이를 모두 같은 배율, 곧 자신의 행렬식만큼 곱한다. 이 사실 하나로 필요성(necessity)은 곧바로 얻어진다. 충분성(sufficiency)의 경우, (ii)의 항등식(identity)은 Δ 값들만을 사용하여 $\mathbf{c}$를 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$로 나타낸다. 따라서 A와 B에 의해 $\mathbf{M}$이 정해지고 나면, C가 어디로 가는지는 달리 선택의 여지가 없다.



풀이

이 풀이 전체에서 $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]$는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 열로 하는 2×2 행렬을 나타낸다. 그러면

$$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det[\mathbf{u}\ \mathbf{v}].$$

영벡터가 아닌 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$에 대하여, $\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$인 것은 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 평행할 때, 그리고 그때에만이다. 행렬식은 한 열이 다른 열의 상수배일 때, 정확히 그때에만 0이 되기 때문이다. 따라서 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})$, $\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})$, $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $\Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})$, $\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$의 여섯 값은 모두 0이 아니다.

앞으로 되풀이해서 쓰이는 사실이 두 가지 더 있다. (열마다 계산하면) $\mathbf{M}[\mathbf{u}\ \mathbf{v}] = [\mathbf{Mu}\ \mathbf{Mv}]$이고 행렬식은 곱을 곱으로 보내므로

$$\Delta(\mathbf{Mu}, \mathbf{Mv}) = \det \mathbf{M}\, \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \qquad (*)$$

또한 $\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$이다.

소문항 (i)

$\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$이고 $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$여야 하며, 이 둘을 합치면

$$\mathbf{M}\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}].$$

$\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행하지 않으므로 $\det[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$이다. 따라서 $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$는 가역(invertible)이고,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

가 조건을 만족한다. 사실 오른쪽에 역행렬을 곱할 수 있으므로, 이 $\mathbf{M}$이 그러한 **유일한** 행렬이다. 양변의 행렬식을 취하면 $\det \mathbf{M} = \Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$이고, 이는 0이 아니다.

소문항 (ii): 항등식

좌변의 첫째 성분을 계산하면

$$\begin{aligned}&(a_1 b_2 - a_2 b_1)c_1 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)b_1 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)a_1 \\ &\quad = a_1 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_1 + a_2 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_1 = 0,\end{aligned}$$

이다. 여섯 항이 둘씩 짝지어 소거되기 때문이다. 둘째 성분은 Δ 바깥에 있는 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 아래첨자를 모두 1에서 2로 바꾼 같은 계산이다.

$$\begin{aligned}&(a_1 b_2 - a_2 b_1)c_2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)b_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)a_2 \\ &\quad = a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1 - a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 = 0.\end{aligned}$$

따라서

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\mathbf{c} + \Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})\,\mathbf{b} + \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c})\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

이 되어 요구된 식이 성립한다. 이 항등식은 **임의의** 세 벡터에 대하여 성립하므로 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$에 대해서도 성립한다.

$$\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,\mathbf{r} + \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})\,\mathbf{q} + \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r})\,\mathbf{p} = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

? **생각해 보기** 비율 조건을 식으로 쓰면 정확히 무엇을 말하는가?

Δ 값이 모두 0이 아니므로, 조건 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) : \Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) : \Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) : \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) : \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$ 는 다음을 만족하는 하나의 수 $k \neq 0$가 존재한다는 뜻이다.

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) = k\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}), \qquad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) = k\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}), \qquad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = k\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}). \tag{3}$$

말로 하면, 세 삼각형 OPQ, OQR, ORP의 부호 있는 넓이는 각각 OAB, OBC, OCA의 넓이를 모두 같은 배율로 늘인 것이다.

소문항 (ii): 필요성

$\mathbf{Ma} = \mathbf{p}, \mathbf{Mb} = \mathbf{q}, \mathbf{Mc} = \mathbf{r}$라고 하자. $(*)$에 의하여

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}), \quad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}), \quad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}).$$

이것은 $k = \det\mathbf{M}$인 경우의 (3)이며, $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) \neq 0$이므로 $k \neq 0$이다. 따라서 비율이 같다.

소문항 (ii): 충분성

이제 어떤 $k \neq 0$에 대하여 (3)이 성립한다고 하자. 소문항 (i)에 의하여 $\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$이고 $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$인 행렬 $\mathbf{M}$이 존재한다. 이제 바로 이 $\mathbf{M}$이 $\mathbf{c}$도 $\mathbf{r}$로 보낸다는 것을 보여야 한다.

(1)에 $\mathbf{M}$을 적용한다. 행렬의 곱셈은 선형이고 Δ 값들은 단지 수일 뿐이므로

$$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{Mc} = -\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})\,\mathbf{q} - \Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{p}.$$

양변에 k를 곱하고 각 항에 (3)을 적용하면

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc} = -\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})\,\mathbf{q} - \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})\,\mathbf{p}.$$

(2)에 의하여 우변은 $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r}$와 같다. 따라서

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc} = \Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r},$$

이고, ($\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$가 평행하지 않으므로) $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) \neq 0$이기 때문에 $\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$이다. 그러므로 P, Q, R는 $\mathbf{M}$에 의한 A, B, C의 상이다.

필요성과 충분성을 합하면, 비율 조건이 필요충분조건(necessary and sufficient condition)임이 증명된다.

검산

- $\mathbf{a} = \binom{1}{0}$, $\mathbf{b} = \binom{0}{1}$, $\mathbf{c} = \binom{1}{1}$로 놓아 보자. 그러면 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1$, $\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) = -1$, $\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}) = -1$이고, (1)은 $\binom{1}{1} - \binom{0}{1} - \binom{1}{0} = \mathbf{0}$가 된다. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$로 놓으면 $\mathbf{p} = \binom{2}{0}$, $\mathbf{q} = \binom{1}{3}$, $\mathbf{r} = \binom{3}{3}$이고, 세 Δ 값은 $6, -6, -6$이다. 다시 비율 $1 : -1 : -1$이 나오며, $k = 6 = \det\mathbf{M}$이다.

- 수치적으로, 정확한 분수 계산을 사용하여 무작위 정수 벡터 세 쌍 20,000개에 대해 항등식을 검사하였다. 어느 두 벡터도 평행하지 않은 약 17,700개의 세 쌍에 대해서는 소문항 (i)의 방법으로 $\mathbf{M}$을 만들어 필요성을 확인하였고, $\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$가 (3)이 성립할 때, 그리고 그때에만 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- Δ 값이 0이 아니라는 말 없이 비율 조건을 분수로 이루어진 하나의 등식으로 쓰는 것. 어느 두 벡터도 평행하지 않다는 가정은 바로 모든 나눗셈을 정당하게 만들기 위해 있는 것이다.
- 필요성만 증명하는 것. 진짜 핵심은 충분성이다. 행렬은 일차독립인 두 벡터에 대한 작용으로 결정되므로, 조건이 셋째 벡터의 상을 강제해야 한다.
- Δ 안의 순서 때문에 생기는 부호 실수. $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})$이므로 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 다음에 $\mathbf{c}, \mathbf{a}$로 이어지는 순환 순서가 중요하다.

STEP 너머

항등식 (1)은 모습을 바꾼 크라메르 공식(Cramer's rule)이다. 이 항등식은 기저(basis) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$에 대한 $\mathbf{c}$의 좌표를 행렬식의 비로 나타낸다. 선형사상이 모든 부호 있는 넓이를 $\det \mathbf{M}$배 한다는 사실 $(*)$은 행렬식의 기하학적 정의이며, 이중적분(double integral)의 변수변환(change of variables)에서 나타나는 야코비안(Jacobian) 인수의 바탕이 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 두 아이디어를 모두 전개한다.

풀이

STEP III 2000, 문제 6

순수수학 • 사차다항식의 인수분해

> **STEP III 2000, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q6

핵심 아이디어

계수를 비교하면 인수분해(factorisation)는 p, q, r와 a, b, c를 잇는 세 방정식이 된다. a만의 방정식을 얻으려면 b와 c를 소거해야 하는데, 항등식 $4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2$가 정확히 이 일을 해 준다. $b+c$와 $b-c$가 자연스럽게 나타나는 조합이기 때문이다. 마지막 사차식에서는 먼저 y^3 항을 없애야 하는데, 평행이동 $y = x + k$로 이를 할 수 있다.

풀이

p, q, r 구하기

우변을 전개하면

$$(x^2 - ax + b)(x^2 + ax + c) = x^4 + (b + c - a^2)x^2 + a(b-c)x + bc,$$

이고, 여기서 x^3 항 $ax^3 - ax^3$은 상쇄된다. 계수를 비교하면

$$p = b + c - a^2, \qquad q = a(b-c), \qquad r = bc.$$

a^2에 대한 삼차방정식

$u = a^2$이라 하자. 첫째 식에서 $b + c = p + u$이다.

$a \neq 0$이면 둘째 식에서 $b - c = q/a$이므로 $(b-c)^2 = q^2/u$이다. 이제

$$4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2 \quad \Longrightarrow \quad 4r = (p+u)^2 - \frac{q^2}{u}.$$

양변에 $u \neq 0$을 곱하면

$$4ru = u(u^2 + 2pu + p^2) - q^2 \quad \Longrightarrow \quad u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0,$$

이므로 $u = a^2$은 근이다.

$a = 0$이면 $q = a(b-c) = 0$이고, 이때 삼차식의 모든 항이 $u = 0$에서 0이 되므로 $u = a^2 = 0$은 근이다. 따라서 어느 경우든 a^2은 근이며, 이것이 증명하려던 것이다.

생각해 보기 p, q, r가 무엇이든 $u \geq 0$인 근이 반드시 존재하는 이유는 무엇인가?

이 삼차식을 $f(u)$라 하자. $u = 0$에서 $f(0) = -q^2 \leq 0$이고, 최고차항이 u^3이므로 $u \to +\infty$일 때 $f(u) \to +\infty$이다. $q = 0$이면 $u = 0$ 자체가 근이다. 그렇지 않으면 $f(0) < 0$이고 충분히 큰 어떤 U에 대해 $f(U) > 0$이므로, f가 연속이라는 사실과 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 0과 U 사이에 근이 존재한다. 어느 경우든 음이 아닌 근이 있다.

이것이 중요한 까닭은 $a = \sqrt{u}$가 실수여야 하기 때문이다. 음이 아닌 근은 언제나 실수 a를 주므로, x^3 항이 없는 모든 실계수 사차식은 주어진 꼴의 두 실계수 이차식으로 분해될 수 있다. ($u > 0$이면 $b + c = p + u$와 $b - c = q/\sqrt{u}$로부터 b와 c를 구할 수 있다.)

$p = -1, q = -6, r = 15$인 경우

이때 $p^2 - 4r = 1 - 60 = -59$이므로 삼차방정식은

$$u^3 - 2u^2 - 59u - 36 = 0.$$

$u = 9$를 대입하면 $729 - 162 - 531 - 36 = 0$이므로 $u = 9$는 근이다. (나누면 $(u-9)(u^2 + 7u + 4)$가 되고, 이 이차 인수는 두 음의 근을 가지므로 $u = 9$가 유일한 음이 아닌 근이다.)

사차식 인수분해하기

주어진 사차식에는 y^3 항이 있으므로 평행이동하여 이를 없앤다. 근의 합이 8이므로 근의 평균은 2이고, $y = x + 2$로 놓는다. 각 항을 전개하면

$$\begin{aligned}(x+2)^4 &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16,\\ -8(x+2)^3 &= -8x^3 - 48x^2 - 96x - 64,\\ 23(x+2)^2 &= 23x^2 + 92x + 92,\\ -34(x+2) &= -34x - 68,\end{aligned}$$

이고, 이들과 39를 더하면

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = x^4 - x^2 - 6x + 15.$$

이것이 바로 $p = -1, q = -6, r = 15$인 경우이며, 그래서 앞에서 이 경우가 등장한 것이다.

$u = a^2 = 9, a = 3$으로 잡자. 그러면

$$b + c = p + a^2 = 8, \qquad b - c = \frac{q}{a} = -2,$$

이므로 $b = 3, c = 5$이다. 검산하면 $bc = 15 = r$이다. 따라서

$$x^4 - x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 5).$$

마지막으로 $x = y - 2$를 대입하면

$$x^2 - 3x + 3 = (y^2 - 4y + 4) - (3y - 6) + 3 = y^2 - 7y + 13,$$
$$x^2 + 3x + 5 = (y^2 - 4y + 4) + (3y - 6) + 5 = y^2 - y + 3.$$

그러므로

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = (y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3).$$

대신 $a = -3$으로 잡으면 b와 c가 서로 바뀌어, 같은 두 인수가 순서만 바뀐 채로 나온다.

검산

- 답을 전개하면 $(y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3) = y^4 - 8y^3 + (3 + 7 + 13)y^2 - (21 + 13)y + 39$로 일치한다.
- $y = 1$을 대입하면 사차식은 $1 - 8 + 23 - 34 + 39 = 21$이고, 인수들은 $7 \times 3 = 21$을 준다.
- 두 이차 인수의 판별식(discriminant)이 모두 음수(-3과 -11)이므로 어느 것도 실수 범위에서 더 분해되지 않으며, 사차식은 실근을 갖지 않는다. 이는 $y = 1$에서 양수 값이 나온 것과 맞아떨어진다.

또한 a, b, c를 무작위 유리수로 2000번 골라 p, q, r에 대한 공식과 삼차방정식을 확인했고, 무작위 (p, q, r) 2000개에 대해 이분법으로 음이 아닌 근을 찾았다.

흔한 실수

- $a = 0$인 경우를 다루지 않고 a로 나누어 $b - c = q/a$를 얻는 것.
- "삼차방정식은 언제나 실근을 갖는다"고 논증하는 것. 이는 참이지만 그 근이 음이 아님을 보여 주지는 못한다. 핵심은 $f(0) = -q^2$의 부호이다.
- 마지막에 x에서 y로 되돌려 대입하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 본질적으로 일반 사차방정식을 푸는 데카르트(Descartes)의 (그리고 페라리(Ferrari)의) 방법이다. 삼차항을 평행이동으로 없앤 다음, 보조 삼차방정식인 **분해**

삼차방정식(*resolvent cubic*)을 풀어 두 이차식으로 인수분해한다. 삼차방정식에 대한 카르다노(Cardano)의 공식과 함께 쓰면, 모든 사차방정식이 거듭제곱근으로 풀린다(solvable by radicals)는 것을 알 수 있다. 왜 이것이 사차에서 멈추고 일반 오차방정식에는 그런 공식이 없는지가 바로 갈루아 이론(Galois theory)의 주제이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 2000, 문제 7

순수수학 • 부등식과 극한

> **STEP III 2000, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q7

핵심 아이디어

두 부등식 모두 곱을 이미 잘 알고 있는 대상과 비교하는 데서 나온다. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$을 이항정리(binomial theorem)로 전개하면 $\frac{1}{r!}$과 꼭 닮았지만 그보다 조금 작은 항들이 나온다. 곱 $\mathrm{P}(n)$에 대해서는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 쓰면 n개 인수의 곱이 그 평균의 n제곱으로 바뀐다. 인수는 $1+\frac{1}{2^k}$이고, 그 평균은 $1+\frac{1}{n}$보다 조금 작으므로 곧바로 첫 번째 부분과 이어진다.

풀이

부등식 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$

이항정리에 의해

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}.$$

두 번째 분수는 r개 인수의 곱

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right),$$

이고, $0\le j\le r-1\le n-1$이므로 각 인수는 $(0,1]$에 속한다. 따라서 이 곱은 1 이하이고, 전개식의 모든 항은 $\frac{1}{r!}$ 이하이다. 그러므로

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} < \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!} = \mathrm{e},$$

이다. 여기서 마지막 부등식이 등호 없이 성립하는 것은 빠진 항 $\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{(n+2)!}, \ldots$이 모두 양수이기 때문이다. 이는 모든 양의 정수 n에 대해 성립한다.

부등식 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$

$\mathrm{P}(n) = a_1 a_2 \cdots a_n$, $a_k = \dfrac{2^k+1}{2^k} = 1 + \dfrac{1}{2^k}$로 쓰자. a_k는 모두 양수이므로 산술-기하 평균 부등식을 쓸 수 있다. 산술평균(arithmetic mean)은

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1-2^{-n}}{n},$$

이다. 이는 등비급수(geometric series)의 합 $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{-n}$을 이용한 것이다. $1 - 2^{-n} < 1$이므로 이 평균은 $1 + \frac{1}{n}$보다 엄격히 작다. 따라서 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$\mathrm{P}(n)^{1/n} \le 1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

양변이 모두 양수이므로 n제곱해도 부등식은 유지된다.

$$\mathrm{P}(n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e},$$

두 번째 부등식에는 첫 번째 부분의 결과를 썼다. 이는 모든 양의 정수 n에 대해 성립한다.

생각해 보기 등호 없는 부등식은 어디에서 나오는가? 산술-기하 평균 부등식은 $\le$만 준다.

등호 없는 부등식은 산술-기하 평균 부등식이 아니라 $1 - 2^{-n} < 1$에서 나온다. 사실 $n \ge 2$이면 인수 a_k가 모두 다르므로 산술-기하 평균 부등식 자체도 등호 없이 성립한다. 그러나 $n = 1$이면 인수가 하나뿐이어서 산술-기하 평균 부등식은 등식($\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$)이 된다. 단계 $1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}$은 모든 경우에 등호 없이 성립하므로, 이 논증은 모든 n을 다룬다.

극한

각 인수 $a_{n+1} = 1 + 2^{-(n+1)}$은 1보다 크므로 $\mathrm{P}(n+1) = a_{n+1}\mathrm{P}(n) > \mathrm{P}(n)$이다. 따라서 수열 $\mathrm{P}(n)$은 순증가하고, 위로 e에 의해 유계(bounded above)이다. 위로 유계인 증가수열은 수렴(converge)하므로, $\mathrm{P}(n)$은 어떤 극한(limit) L로 간다.

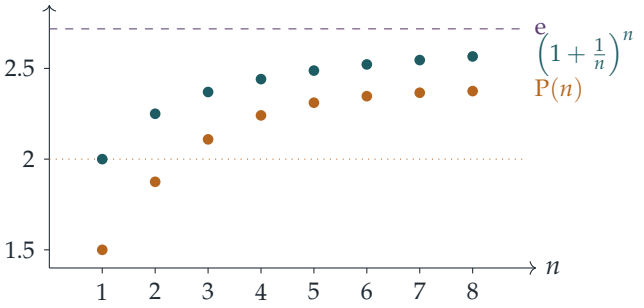
상계: 모든 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$이므로 극한은 $L \le \mathrm{e}$를 만족한다. (극한을 취하면 등호를 포함한 부등식만 보존되므로 $<$가 아니라 $\le$를 얻는다.)

하계를 위해 몇 개의 항을 계산하자.

$$\mathrm{P}(1) = \frac{3}{2}, \qquad \mathrm{P}(2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8}, \qquad \mathrm{P}(3) = \frac{15}{8}\cdot\frac{9}{8} = \frac{135}{64} > \frac{128}{64} = 2.$$

수열이 증가하므로 $L \ge \mathrm{P}(4) > \mathrm{P}(3) > 2$이다. 이를 종합하면

$$2 < L \le \mathrm{e}.$$



검산

- $n=1$: $(1+1)^1 = 2 < \mathrm{e}$이고 $\mathrm{P}(1) = 1.5 < 2$이다. $n=4$일 때: $\mathrm{P}(4) = \frac{2295}{1024} \approx 2.241 < \left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx 2.441$.
- 곱을 수치로 계산하면 $\mathrm{P}(n)$은 $L \approx 2.3842$에 자리 잡는다($n=60$이면 소수점 아래 여러 자리까지 변하지 않는다). 이는 2와 $\mathrm{e} \approx 2.7183$ 사이에 넉넉히 들어간다.

흔한 실수

- 각 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$라는 이유만으로 $L < \mathrm{e}$라고 주장하는 것. 등호 없는 부등식도 극한에서는 등식이 될 수 있으므로 $L \le \mathrm{e}$만 따라 나온다. (여기서는 실제로 $L < \mathrm{e}$가 참이지만, 이를 보이려면 별도의 논증이 필요하다.)
- 어떤 n에 대해 $\mathrm{P}(n) > 2$임을 보이고는 수열이 증가한다는 사실을 말하지 않는 것. 바로 이 사실이 그 하계를 L에 전달한다.
- a_k가 양수인지 확인하지 않고 산술-기하 평균 부등식을 적용하는 것.

STEP 너머

"증가하고 위로 유계이므로 수렴한다"는 단계는 단조수렴정리(monotone convergence theorem)이며, 이는 실수의 완비성(completeness)과 동치이다. 이를 기본 원리에서부터 증명하는 것은 대학 해석학(analysis) 강의에서 가장 먼저 하는 일 가운데 하나이다. 로그를 취하면 $\mathrm{P}(n)$은 급수 $\sum \ln\left(1+2^{-k}\right)$로 바뀌고, 이 급수는 $\sum 2^{-k}$와의 비교에 의해 수렴한다. 이것이 무한곱(infinite product)을 다루는 표준적인 방법이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 두 아이디어를 모두 아름답게 다룬다.

풀이

STEP III 2000, 문제 8

순수수학 • 점화식

STEP III 2000, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q8

핵심 아이디어

정의하는 규칙이 비선형(non-linear)이고 나눗셈을 포함하므로 직접 다루기가 까다롭다. 요령은 이것을 곱의 꼴 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 = 1$로 다시 쓰는 것이다. 이 식은 연속한 세 항으로 만든 어떤 조합이 항상 1이라는 뜻이다. 같은 사실을 한 단계 뒤에 대해서도 쓰고 두 식을 빼면 비선형 규칙이 선형(linear) 규칙으로 바뀐다. 점화식(recurrence)이 선형이 되면, 일반항(closed form)은 이제 점화식을 푸는 표준적인 방법으로 구할 수 있다. 특성이차방정식(auxiliary quadratic)의 근을 구한 다음, 두 초깃값을 맞추면 된다.

풀이

예비 단계: 수열이 잘 정의됨

각 단계에서 a_{n-2}로 나누므로, 0인 항이 없음을 확인해야 한다. 사실 모든 항은 양수이다. $a_0 = a_1 = 1 > 0$이다. a_{n-1}과 a_{n-2}가 양수이면 $1 + a_{n-1}^2 > 0$이고 $a_{n-2} > 0$이므로 $a_n > 0$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대하여 $a_n > 0$이다. 처음 몇 항은 다음과 같다.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1+1}{1} = 2, \quad a_3 = \frac{1+4}{1} = 5, \quad a_4 = \frac{1+25}{2} = 13.$$

선형 점화식

정의의 양변에 a_{n-2}를 곱하면, 모든 $n \geq 2$에 대하여 다음을 얻는다.

$$a_n a_{n-2} = 1 + a_{n-1}^2. \qquad (*)$$

$P(k)$를 명제 $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$라 하자. k에 대한 귀납법으로 모든 $k \geq 2$에 대하여 $P(k)$를 증명한다.

기저 단계(base case). $a_2 = 2$이고 $3a_1 - a_0 = 3 - 1 = 2$이므로 $P(2)$는 참이다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $k \geq 2$에 대하여 $P(k)$가 참이라고 가정하자. 즉,

$$a_k + a_{k-2} = 3a_{k-1}.$$

$a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$임을 보여야 한다. 정의에 의해 $a_{k+1} = (1 + a_k^2)/a_{k-1}$이다. 핵심은 분자의 거추장스러운 1을 $n = k$일 때의 $(*)$, 즉 $1 = a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$을 이용하여 바꾸는 것이다.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2 + a_k^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k\,(a_k + a_{k-2}) - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k \cdot 3a_{k-1} - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} && \text{귀납 가정} P(k) \\ &= 3a_k - a_{k-1} && \text{왜냐하면} a_{k-1} > 0. \end{aligned}$$

따라서 $P(k+1)$은 참이다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 2$에 대하여 $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$이다.

> **생각해 보기** 귀납 가정(inductive hypothesis)은 어디에서 쓰였는가? 그리고 $n = k$일 때의 $(*)$를 써도 되는 이유는 무엇인가?

귀납 가정은 $a_k + a_{k-2}$를 $3a_{k-1}$로 바꿀 때 한 번 쓰였다. 그 괄호는 1을 $a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$으로 바꾸었기 때문에 나타난 것이다. $(*)$를 쓰는 데에는 가정이 전혀 필요 없다. 이것은 a_k의 정의를 곱해서 풀어 쓴 것일 뿐이며, 모든 $k \geq 2$에 대하여 성립한다. 다시 말해, 양 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$은 모든 단계에서 같은 값이며, 바로 이것이 선형 관계를 다음 단계로 넘겨 준다.

일반항

$\beta = \alpha^{-1}$이라 하자. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\beta = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha + \beta = \sqrt{5}, \quad \alpha\beta = 1.$$

그러므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5 - 2 = 3, \qquad \alpha^2\beta^2 = 1,$$

이므로 α^2과 β^2은 우리 점화식의 특성방정식(auxiliary equation) $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근이다. (구체적으로 쓰면 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$이다.)

이제 $n \geq 1$에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\sqrt{5}}.$$

b_n이 a_n과 처음 두 항이 같고 같은 점화식을 만족함을 확인하여 $b_n = a_n$임을 보인다.

점화식을 만족한다. x가 $x^2 = 3x - 1$의 근이면, 양변에 x^{n-2}를 곱하여 $x^n = 3x^{n-1} - x^{n-2}$를 얻는다. ($\alpha\beta = 1$을 이용하면) $\alpha^{2n-1} = \beta\,(\alpha^2)^n$이므로, $x = \alpha^2$으로 놓고 β를 곱하면

$$\alpha^{2n-1} = 3\alpha^{2n-3} - \alpha^{2n-5}.$$

같은 방법으로 $x = \beta^2$으로 놓고 α를 곱하면 $\beta^{2n-1} = 3\beta^{2n-3} - \beta^{2n-5}$를 얻는다. 두 식을 더하고 $\sqrt{5}$로 나누면

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2} \qquad (n \geq 3).$$

초깃값이 일치한다.

$$b_1 = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_1,$$
$$b_2 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 = a_2.$$

결론. (a_n)과 (b_n)은 모두 $n \geq 3$에 대하여 $u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}$를 만족하고, $n = 1$과 $n = 2$에서 일치한다. 이런 점화식은 각 항을 바로 앞의 두 항으로부터 결정하므로, (강한) 귀납법(strong induction)에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $a_n = b_n$이다. 즉,

$$a_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \alpha^{-(2n-1)}}{\sqrt{5}} \qquad (n \geq 1),$$

이므로 증명이 끝났다.

? **생각해 보기** 왜 비교를 $n = 0$이 아니라 $n = 1$부터 시작하는가?

$n = 3$일 때 a_n에 대한 선형 점화식에는 a_2와 a_1이 들어가므로, $n \geq 1$에 대해서는 b_1과 b_2만 맞추면 충분하다. 사실 이 공식은 $n = 0$에서도 성립한다. $b_0 = (\alpha^{-1} + \alpha)/\sqrt{5} = 1 = a_0$이다. 따라서 어느 쪽을 택하든 잃는 것은 없다.

검산

- 항들은 $1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, \ldots$이며, 이는 피보나치 수(Fibonacci numbers) $F_1, F_3, F_5, \ldots$이다($a_0 = 1 = F_{-1}$로 본다). 각 항은 바로 앞 항의 세 배에서 그 앞 항을 뺀 것이다: $3 \cdot 13 - 5 = 34$.
- $(*)$를 직접 확인하면: $34 \cdot 5 - 13^2 = 170 - 169 = 1$.

- 수치적으로 $a_{10} = 4181$이고 $(\alpha^{19} + \alpha^{-19})/\sqrt{5} \approx 4181.000$이다. 항 $\alpha^{-19}/\sqrt{5}$는 아주 작으므로, a_n은 $\alpha^{2n-1}/\sqrt{5}$에 가장 가까운 정수이다.
- 원래 규칙으로 $n = 39$까지 수열을 정확히 계산하면, 매번 선형 점화식을 만족하는 정수가 나오며 일반항과도 일치한다.

흔한 실수

- $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$를 $(1 + a_k^2)/a_{k-1}$에 대입하고 전개하여 $a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$을 증명하려는 것. 이렇게 하면 식만 지저분해진다. 1은 한 단계 앞의 정의를 이용하여 바꾸어야 한다.
- 정의에서 a_{n-2}로 나눈다는 사실을 잊는 것. 완전한 답안이라면 항들이 양수이므로 나눗셈과 마지막에 a_{k-1}을 약분하는 것이 정당하다는 점을 밝혀야 한다.
- b_n이 점화식을 만족하는지만 확인하고 초깃값 **두** 개를 맞추지 않는 것. 이계 점화식에는 두 초깃값이 모두 필요하다.

STEP 너머

상수 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$은 피보나치 수에 대한 카시니(Cassini) 항등식(Cassini's identity) $F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$의 한 예이다. 여기서는 홀수 번째 항만 나타나므로 부호는 항상 $+1$이다. 더 일반적으로, 임의의 선형 이계 점화식에 대하여 $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$은 각 단계마다 일정한 비율로 변한다(이것은 2×2 행렬식(determinant)이고, 행렬식은 곱셈적이기 때문이다). 이 수열처럼 놀랍게도 항상 정수를 만들어 내는 유리 점화식은 "소모스 수열(Somos sequences)"과 로랑 현상(Laurent phenomenon)의 연구와 관련이 있다. 피보나치형 수열과 연분수(continued fractions)의 정수론(number theory)에 대해서는(α가 황금비(golden ratio)라는 점에 주목하라) Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 읽기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2000, 문제 9

역학 • 비스듬한 탄성 충돌

STEP III 2000, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

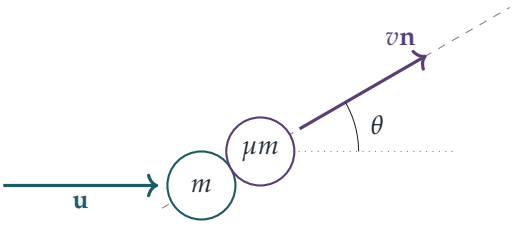
step.maths.org/questions/00-s3-q9

핵심 아이디어

두 원판은 매끄러우므로(smooth), 충돌(impact)하는 동안 둘 사이에 작용하는 힘은 중심선(line of centres)을 따라서만 작용한다. 따라서 처음에 정지해 있던 원판은 그 선을 따라 움직이기 시작하고, 그러므로 $\mathbf{n}$이 바로 중심선의 방향이다. 이 원판의 속도를 $v\mathbf{n}$으로 쓰고, 운동량 보존(conservation of momentum)(벡터 방정식이다)을 이용해 다른 원판의 속도를 구한 다음, 운동 에너지 보존(conservation of kinetic energy)으로 v를 결정한다. 그러면 소문항 (ii)는 에너지 방정식 하나만 더 세우면 되고, 부등식(inequality)은 코사인 값이 1 이하여야 한다는 조건에서 나온다.

풀이

원판들을 매끄러운 수평면 위의 매끄러운 입자로 모형화한다. 즉 원판들 사이에도, 원판과 면 사이에도 마찰이 없다. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{n}$ 사이의 각을 θ라 하고 $u = |\mathbf{u}|$로 쓰면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u\cos\theta$이다.



충돌하는 순간 중심선(점선)은 $\mathbf{n}$ 방향을 향하며, $\mathbf{u}$의 방향(작은 점선)과 각 θ를 이룬다. 그림은 개략적인 것일 뿐이며, 식을 전개하는 데에는 필요하지 않다.

소문항 (i)

질량이 μm인 원판은 처음에 정지해 있고, 충돌하는 동안 이 원판에 작용하는 수평 방향의 힘은 다른 원판이 주는 접촉력(contact force)뿐이며, 이 힘은 중심선을 따라 작용한다. 이 원판은 $\mathbf{n}$ 방향으로 움직이기 시작하므로, 충돌 후의 속도는 어떤 속력 $v > 0$에 대하여 $v\mathbf{n}$이다.

충돌 후 질량이 m인 원판의 속도를 $\mathbf{w}$라 하자. 운동량 보존에 의해

$$m\mathbf{u} = m\mathbf{w} + \mu m v\,\mathbf{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mu v\,\mathbf{n}.$$

충돌은 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌이므로 운동 에너지가 보존된다.

$$\tfrac{1}{2}m\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}m\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + \tfrac{1}{2}\mu m v^2.$$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$을 이용하면

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n})\cdot(\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n}) = u^2 - 2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2.$$

이를 대입하고 $\frac{1}{2}m$과 u^2을 소거하면

$$0 = -2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2 + \mu v^2 = \mu v\big((1+\mu)v - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big).$$

그런데 $\mu > 0$이고, 충돌당한 원판은 실제로 움직이므로 $v \neq 0$이다. 따라서 μv로 나눌 수 있고,

$$v = \frac{2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{1+\mu},$$

이것이 구하는 속력이다. 덤으로 $v > 0$으로부터 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} > 0$임을 알 수 있으므로 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$이다.

> **생각해 보기** 여기서 왜 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)이 필요하지 않을까?

그 법칙을 써도 된다. $e = 1$이면 $\mathbf{n}$ 방향의 상대 속도(relative velocity) 성분(component)은 부호가 반대로 바뀌고, 원판이 매끄러우므로 $\mathbf{n}$에 수직인 성분은 변하지 않는다. 그러나 "완전 탄성"이란 운동 에너지가 보존된다는 뜻이고, 이 스칼라 방정식 하나와 운동량만으로 이미 v가 결정된다. 위의 풀이는 이와 정확히 동치이며, 성분으로 나누는 과정을 피할 수 있다.

소문항 (ii)

충돌 후의 전체 운동 에너지는 처음의 $\frac{1}{2}mu^2$과 같다. 두 원판이 이를 똑같이 나누어 가지면 각각 $\frac{1}{4}mu^2$을 가지므로, 충돌당한 원판에 대하여

$$\tfrac{1}{2}\mu m v^2 = \tfrac{1}{4}mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu v^2 = \tfrac{1}{2}u^2.$$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = u\cos\theta$와 함께 소문항 (i)을 이용하면 $v = \dfrac{2u\cos\theta}{1+\mu}$이므로

$$\frac{4\mu u^2\cos^2\theta}{(1+\mu)^2} = \frac{u^2}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\theta = \frac{(1+\mu)^2}{8\mu}.$$

(소문항 (i)의 끝부분에서) $\cos\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 택한다.

$$\cos\theta = \frac{1+\mu}{2\sqrt{2\mu}}.$$

이러한 각이 존재하려면 $\cos\theta \le 1$, 즉 $\cos^2\theta \le 1$이어야 한다.

$$\begin{aligned}\frac{(1+\mu)^2}{8\mu} \le 1 &\iff (1+\mu)^2 \le 8\mu \qquad\qquad (\text{양변에} 8\mu > 0\text{을 곱함})\\ &\iff \mu^2 - 6\mu + 1 \le 0.\end{aligned}$$

이차식(quadratic) $\mu^2 - 6\mu + 1$의 근(root)은 $\mu = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm \sqrt{8}$이고, 이 이차식은 두 근 사이에서 정확히 음수이거나 0이다. 따라서

$$3 - \sqrt{8} \le \mu \le 3 + \sqrt{8},$$

이므로 증명이 끝난다. (하한은 $3 - \sqrt{8} \approx 0.172$로 양수이므로 $\mu > 0$과 모순되지 않는다.) 역으로, 이 범위에 있는 모든 μ에 대하여 위의 식은 $(0, 1]$에 속하는 올바른 코사인 값을 주므로, 에너지를 똑같이 나누는 것이 실제로 가능하다. 범위의 양 끝에서는 $\theta = 0$으로, 정면 충돌(head-on collision)이 된다.

검산

- 정면 충돌인 경우: $\mathbf{n}$이 $\mathbf{u}$와 평행하면 소문항 (i)에서 $v = 2u/(1+\mu)$를 얻는데, 이는 익숙한 일차원 탄성 충돌의 결과이다. $\mu = 1$이면 $v = u$가 되어, 스누커(snooker)에서처럼 움직이던 원판은 멈추고 자신의 운동을 모두 넘겨준다.
- 질량이 같은 경우, $\mu = 1$: 소문항 (ii)에서 $\cos\theta = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$이므로 $\theta = 45°$이다. 이는 질량이 같은 매끄러운 원판들이 탄성 충돌한 뒤 서로 직각을 이루며 움직인다는 고전적인 사실과 맞아떨어진다. 이때 에너지가 같으면 두 속력이 같아야 하므로, 각 원판은 $\mathbf{u}$와 $45°$를 이룬다.
- 수치적으로, 무작위로 생성한 매끄러운 탄성 충돌 10 000개($\mathbf{n}$ 방향의 충격량(impulse))를 시뮬레이션하여 운동량과 에너지의 보존 및 소문항 (i)의 속력을 확인하였고, 0.172와 5.83 사이의 μ에 대하여 소문항 (ii)에서 구한 각에서 운동 에너지가 같아짐을 확인하였다. 예를 들어 $\mu = 0.1$이면 $\cos^2\theta = 1.51 > 1$이 되어 불가능하다.

흔한 실수

- **u**와 **n**을 평행한 것으로 취급하는 것. 이 충돌은 비스듬한 충돌(oblique collision)이며, 중심선 방향의 성분 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$만 전달된다.
- v가 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 v로 나누는 것($v=0$은 에너지 방정식의 "충돌이 없는 경우" 해이다).
- $\cos\theta$에 대하여 음의 제곱근을 배제하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

충돌당한 입자의 속도를 충격량 방향으로 쓰고 운동량과 에너지를 이용하는 이 방법은 물리학에서 탄성 산란(elastic scattering)의 핵심이다. 이는 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 가장 깔끔한데, 이 좌표계에서 탄성 충돌은 두 속도의 크기는 바꾸지 않고 방향만 회전시킨다. 그러면 소문항 (ii)의 각의 범위는 실험실 좌표계(lab frame)에서 어떤 각에 도달할 수 있는지에 대한 명제가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 좌표계에서의 충돌을 매우 명료하게 다룬다.

풀이

STEP III 2000, 문제 10

역학 • 최대 정지 마찰과 평형

STEP III 2000, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q10

핵심 아이디어

기하에서 시작한다. 거리 $\sqrt{3}a$와 a는 보가 특별한 각도로 지면과 만나도록 정해진 것이고, 이 각도가 문제의 모든 방향을 결정한다. 그다음 미지의 힘이 사라지는 두 점에 대해 모멘트(moment)를 잡는다. 경첩(hinge) X에 대해 잡으면, 보의 식에는 구가 주는 수직항력(normal reaction)만 남는다. 구가 주는 마찰력(friction)은 보 자체를 따라 작용하기 때문이다. 구의 중심에 대해 잡으면, 두 마찰력을 제외한 모든 힘이 중심을 지나므로 두 마찰력은 같아야 한다.

풀이

모형과 기하

보는 균일한 막대로, 구는 무게가 중심 C에 작용하는 균일한 강체(rigid body)로 본다. 두 접촉면은 모두 거칠다. 구가 지면에 닿는 점을 O라 하면 $OX = \sqrt{3}\,a$, $OC = a$이고 OC는 연직이다.

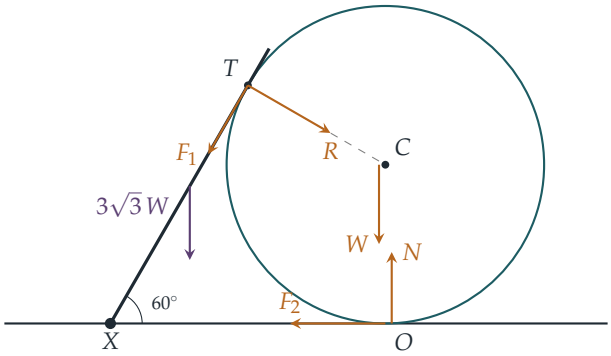
보는 점 T에서 구에 닿으며, 그 점에서 구에 접한다. 지면은 X에서 그은 또 하나의 접선(tangent)이다. 직각삼각형 XOC에서

$$\tan\angle OXC = \frac{a}{\sqrt{3}\,a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{따라서} \qquad \angle OXC = 30^\circ.$$

X에서 그은 두 접선은 직선 XC에 대해 대칭이므로, 보는 지면과 $2 \times 30^\circ = 60^\circ$의 각을 이룬다. 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $XT = XO = \sqrt{3}\,a$이다. $\sqrt{3}\,a < 2a$이므로 접점은 실제로 보 위에 있으며, 보의 중점을 조금 지난 곳에 있다.

반지름 CT는 보에 수직이다. 따라서 T에서의 수직항력은 수평과 30°를 이루고, T에서의 마

찰력은 보를 따라 수평과 $60°$를 이루며 작용한다.



호박색 화살표는 구에 작용하는 힘이다. 보는 R와 F_1을 반대 방향으로 받으며, 이와 함께 중점(즉 X로부터 거리 a인 점)에 작용하는 무게 $3\sqrt{3}\,W$와 경첩에서의 미지의 반작용을 받는다.

마찰력의 방향은 추측한 것이다. 구에 대해 F_1은 보를 따라 X 쪽으로 내려가는 방향으로, F_2는 지면을 따라 X 쪽으로 작용한다고 두었다. 추측이 틀렸다면 그 힘은 음수로 나올 것이다.

보: X에 대한 모멘트

경첩의 반작용은 X에 작용하므로 X에 대한 모멘트가 없다. 구가 주는 마찰력은 보를 따라 작용하고, 보의 직선은 X를 지나므로 이 힘 역시 모멘트가 없다. 수직항력 R는 거리 $XT = \sqrt{3}\,a$인 점에서 보에 수직으로 작용한다. 무게는 X로부터 수평 거리 $a\cos 60° = \frac{1}{2}a$인 곳에 작용한다. 따라서

$$R \cdot \sqrt{3}\,a = 3\sqrt{3}\,W \cdot \tfrac{1}{2}a, \qquad \text{따라서} \qquad R = \tfrac{3}{2}W.$$

구: C에 대한 모멘트

힘 R, W, N은 모두 C를 지난다. (수직항력은 반지름 방향으로 작용한다.) 두 마찰력은 접선 방향이며, 각각 C로부터 거리 a인 곳에 작용한다. T에서의 F_1은 구를 C에 대해 한쪽으로 돌리고, O에서의 F_2는 반대쪽으로 돌리므로

$$F_1 a = F_2 a, \qquad \text{따라서} \qquad F_1 = F_2.$$

이 공통의 값을 F라 하자.

? **생각해 보기** 두 마찰력에 대해 다른 아무것도 모르는 상태에서, 왜 두 마찰력이 같다고 확신할 수 있는가?

구는 평형(equilibrium) 상태에 있으므로 어느 점에 대해서든 전체 모멘트는 0이다. 중심은 영리한 선택이다. 무게와 두 수직항력이 모두 중심을 지나므로 마찰력만 남고, 두 마찰력의 팔 길이는 a로 같다.

구: 힘의 분해

수평 방향에서 X로부터 멀어지는 쪽을 양의 방향으로 잡자. R의 성분은 $R\cos 30^\circ$, F_1의 성분은 $-F\cos 60^\circ$이고, F_2는 $-F$를 준다. 따라서

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{1}{2}F + F = \frac{3}{2}F, \qquad \text{따라서} \qquad F = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}W.$$

이 값은 양수이므로 추측한 마찰력의 방향이 옳았다. 연직 방향에서 R는 성분 $R\sin 30^\circ$로 아래로 밀고, F_1은 성분 $F\sin 60^\circ$로 아래로 당긴다. 따라서

$$N = W + \tfrac{1}{2}R + \tfrac{\sqrt{3}}{2}F = W + \tfrac{3}{4}W + \tfrac{3}{4}W = \tfrac{5}{2}W.$$

마찰 계수

구는 두 접촉점 모두에서 막 미끄러지려는 상태이므로, 두 곳 모두 마찰이 한계 마찰(limiting friction)이다. 즉 $F_1 = \mu_1 R$, $F_2 = \mu_2 N$이다. 그러므로 마찰 계수(coefficient of friction)는

$$\mu_1 = \frac{F}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{3}{2}W} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \mu_2 = \frac{F}{N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{5}{2}W} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

검산

- 좌표를 이용한 수치 검산($a = 1.3$, $W = 2$)으로 T가 구 위에 있고 CT가 보에 수직임을 확인했다. 구의 세 평형 방정식을 직접 풀면 $R = 1.5W$, $F_1 = F_2 \approx 0.8660W$, $N = 2.5W$를 얻으므로 $\mu_1 \approx 0.5774 = 1/\sqrt{3}$, $\mu_2 \approx 0.3464 = \sqrt{3}/5$이다.
- 독립적인 방정식: 구에 대해 O에 관한 모멘트를 잡는다. 이번에는 N, F_2, W의 모멘트가 없다. R의 작용선은 C를 지나므로, 그 모멘트는 높이 a에서의 수평 성분의 모멘트, 즉 $\frac{\sqrt{3}}{2}R\,a$와 같다. O에 대한 F_1의 모멘트를 계산하면 $\frac{3}{2}aF$가 된다. 두 값을 같게 놓으면 C에 대한 모멘트 방정식을 쓰지 않고도 다시 $F = R/\sqrt{3}$을 얻는다.
- 두 계수 모두 1보다 작으며, 이는 일반적인 거친 접촉면으로서 물리적으로 타당하다.

흔한 실수

- 보의 각도를 60°가 아니라 30°(XC의 각도)로 잡는 실수.

- N을 구할 때 F_1의 연직 성분을 빠뜨리는 실수. 이러면 $N = \frac{7}{4}W$가 되어 μ_2가 틀리게 나온다.
- 구가 주는 마찰력을 X에 대한 보의 모멘트 방정식에 포함하는 실수. 이 힘은 보를 따라 작용하므로 X에 대한 모멘트가 0이다.

STEP 너머

평면 위의 강체는 자유도(degrees of freedom)가 3이므로, 서로 독립인 평형 방정식 세 개를 준다. 여기서 구에는 미지의 접촉력이 다섯 개 있고, 보가 R를 알려 주어 그 수를 줄인다. 그러면 두 "한계 마찰" 조건이 문제를 풀 수 있는 연립방정식으로 바꾸어 준다. 이처럼 방정식의 개수와 미지수의 개수를 세어 보고, 계가 정역학적으로 부정정(statically indeterminate)인 때를 알아보는 것이 구조역학(structural mechanics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 정역학(statics)과 토크(torque)를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2000, 문제 11

역학 • 거친 회전축에 대한 회전

STEP III 2000, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q11

핵심 아이디어

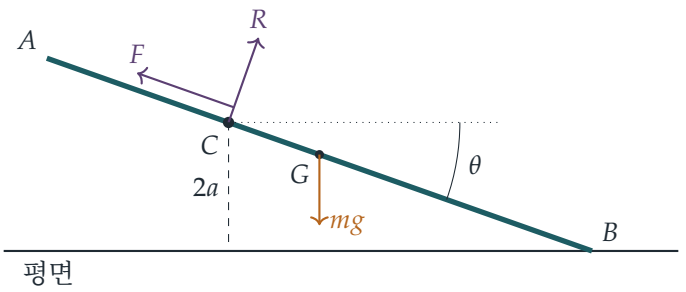
미끄러지지 않는 한, 막대는 들보 위의 점 C를 중심으로 회전할 뿐이므로 고정축을 중심으로 회전하는 강체(rigid body)이다. 에너지로부터 각속도(angular speed)를 얻고, 모멘트 방정식으로부터 각가속도(angular acceleration)를 얻는다. 그다음 질량중심(centre of mass)에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 막대 방향과 막대에 수직인 방향으로 분해하면, 들보가 제공해야 하는 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)을 알 수 있다. 마찰력이 수직항력의 μ배 이하로 유지되는 동안에는 미끄러지지 않으며, 이 조건이 B가 평면에 닿을 때까지 줄곧 성립해야 한다.

풀이

모형과 기하

막대를 균일한 강체 막대로, 들보를 고정된 가늘고 거친 직선으로 모형화한다. 그러면 들보는 C에서 하나의 접촉력을 작용하는데, 이는 막대에 수직인 수직항력 R와 막대 방향의 마찰력 F로 이루어진다.

질량중심 G는 중점이며 A에서 $4.5a$만큼 떨어져 있다. $AC = 3a$이므로 G는 C에 대해 B 쪽에 있고 $CG = \frac{3}{2}a$이며, $CB = 6a$이다. 따라서 무게는 C에 대한 모멘트를 가지고, 막대는 B가 내려가는 방향으로 기운다. 막대가 회전한 각을 θ라 하면, 막대는 수평선과 각 θ를 이룬다.



B는 $2a$만큼 내려갔을 때, 즉 $6a\sin\theta = 2a$일 때 평면에 닿는다. 곧

$$\sin\theta = \tfrac{1}{3}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

C를 중심으로 한 회전

평행축 정리(parallel axes theorem)에 의해 C에 대한 관성모멘트(moment of inertia)는

$$I_C = \tfrac{1}{12}m(9a)^2 + m\left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 = \tfrac{27}{4}ma^2 + \tfrac{9}{4}ma^2 = 9ma^2.$$

이다. 미끄러지지 않는 동안 C는 고정되어 있으므로 접촉력은 일을 하지 않는다. G는 $\frac{3}{2}a\sin\theta$만큼 내려갔으므로, (정지 상태에서 출발한다고 하고) 에너지 보존(conservation of energy)에 의해

$$\tfrac{1}{2}(9ma^2)\dot\theta^2 = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta^2 = \frac{g\sin\theta}{3a}.$$

C에 대한 모멘트를 취하면 (무게만 모멘트를 가진다)

$$9ma^2\,\ddot\theta = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \ddot\theta = \frac{g\cos\theta}{6a}.$$

(에너지 방정식을 t에 대해 미분해도 같은 결과를 얻으며, 이는 유용한 검산이 된다.)

접촉력

G는 C를 중심으로 반지름 $\frac{3}{2}a$인 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 막대를 따라 C를 향하는 성분 $\frac{3}{2}a\dot\theta^2$와, 막대에 수직이며 θ가 증가하는 방향(막대를 가로질러 아래쪽)의 성분 $\frac{3}{2}a\ddot\theta$를 가진다.

> **생각해 보기** 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가? 그리고 왜 단순히 $mg\sin\theta$가 아닌가?

무게의 막대 방향 아래쪽 성분 $mg\sin\theta$는 막대를 B 쪽으로 들보에서 끌어내리려 한다. 게다가 G에는 C를 향하는 구심력(centripetal force)이 필요하다. 이 둘을 모두 마찰력이 제공해

야 하므로, 마찰력은 막대를 따라 위쪽, 즉 A 쪽으로 작용한다. G의 가속도에 대해 C를 향하는 방향을 양으로 잡고 막대 방향으로 분해하면

$$F - mg\sin\theta = m\cdot\tfrac{3}{2}a\dot{\theta}^2 = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\sin\theta}{3a} = \tfrac{1}{2}mg\sin\theta,$$

이므로

$$F = \tfrac{3}{2}mg\sin\theta.$$

G가 가속되는 방향으로 막대에 수직하게 분해하면

$$mg\cos\theta - R = m\cdot\tfrac{3}{2}a\ddot{\theta} = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\cos\theta}{6a} = \tfrac{1}{4}mg\cos\theta,$$

이므로

$$R = \tfrac{3}{4}mg\cos\theta,$$

이다. 이 값은 내내 양수이므로 막대는 들보와 접촉한 상태를 유지한다.

미끄러지지 않을 조건

$F \le \mu R$인 한 막대는 C에서 미끄러지지 않는다. 즉

$$\frac{F}{R} = \frac{\frac{3}{2}mg\sin\theta}{\frac{3}{4}mg\cos\theta} = 2\tan\theta \le \mu.$$

비 $2\tan\theta$는 놓는 순간 0에서 출발하여 θ와 함께 증가하므로, 이 조건은 마지막 순간, 곧 B가 평면에 닿는 순간에 가장 만족하기 어렵다. 그때 $\tan\theta = 1/(2\sqrt{2})$이므로

$$\mu \ge 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

이어야 한다. 따라서 μ의 최솟값은

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707.}$$

이다. 정확히 이 값일 때 마찰력은 B가 평면에 부딪히는 순간에만 한계에 이르며, 이보다 작은 μ에 대해서는 그 전에 미끄러지기 시작한다.

검산

- 놓는 순간 $\dot{\theta} = 0$이므로 $F = 0$이고 $R = \tfrac{3}{4}mg$이다. G가 $\tfrac{3}{2}a\ddot{\theta} = \tfrac{1}{4}g$로 아래쪽으로 가속되기 시작하므로 들보는 전체 무게보다 적은 힘을 떠받친다. 이것이 익숙한 "놓은 판자는 가볍게 느껴진다" 효과이다.
- 단위: F와 R는 모두 mg의 배수이고, μ는 당연히 무차원량이다.

- 방정식 $\ddot{\theta} = g\cos\theta/(6a)$를 정지 상태에서 출발하여 수치적으로 풀고, 유한 차분으로 G의 가속도를 계산한 뒤, 뉴턴의 제2법칙으로 F와 R를 복원하였다. 그 결과는 $\frac{3}{2}mg\sin\theta$ 및 $\frac{3}{4}mg\cos\theta$와 일치하며, F/R는 $\sin\theta = \frac{1}{3}$일 때 $0.7071\ldots = 1/\sqrt{2}$까지 꾸준히 증가한다.

흔한 실수

- 중심에 대한 모멘트를 취하거나 평행축 항을 빠뜨리는 것: $I_C = 9ma^2$이지, $\frac{27}{4}ma^2$가 아니다.
- 문제를 정역학으로 취급하여 $F = mg\sin\theta$, $R = mg\cos\theta$로 두는 것. 그러면 $\mu \geq \tan\theta$가 된다. G의 구심 가속도와 접선 가속도가 모두 힘을 바꾼다.
- 마찰 조건을 가장 까다로운 지점이 아니라 $F = 0$인 놓는 순간에서만 확인하는 것.

STEP 너머

이 문제는 구속력(constraint force)이 있는 강체 동역학을 처음 맛보게 해 준다. 에너지와 모멘트로 운동을 구한 다음에야, 질량중심에 대한 뉴턴의 법칙을 이용해 거꾸로 구속이 제공해야 하는 힘을 구하였다. 같은 방식(운동을 구한 다음, 구속이 필요한 힘을 실제로 제공할 수 있는지 확인하기)으로 사다리가 언제 미끄러지기 시작하는지, 쓰러지는 연필이 언제 탁자에서 떨어지는지, 구슬이 언제 철사에서 벗어나는지를 판단한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축 회전과, 돌림힘과 질량중심의 운동 사이의 관계를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 2000, 문제 12

확률과 통계 • 푸아송 근사

> **STEP III 2000, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q12

핵심 아이디어

자신의 복권이 당첨된다는 것을 알고 나면, 남은 무작위성은 다른 참가자들의 복권뿐이다. 다른 참가자 각각은 독립적으로(independently) 확률 $\frac{1}{N}$로 당첨 번호와 일치하므로, 다른 당첨자의 수는 이항분포(binomial distribution)를 따른다. 참가자가 많고 성공 확률이 작으면 이 이항분포는 푸아송 분포(Poisson distribution)에 가까워지며, 주어진 극한 $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \approx \mathrm{e}^{-a}$가 바로 이것을 가능하게 한다.

풀이

정확한 확률

당첨 복권을 가지고 있다고 하자. 나머지 $2N-1$명의 참가자 가운데 당첨 번호를 가진 사람의 수를 X라 하면, 전체 당첨자 수는 $W = 1 + X$이다.

기계는 각 참가자의 번호를 다른 모든 사람의 번호와 독립적으로, 그리고 추첨과도 독립적으로 균등하게(uniformly) 고른다. 따라서 당첨 번호가 (무엇이든) 주어지고 자신의 복권이 주어졌을 때, 다른 $2N-1$명의 참가자 각각은 서로 독립적으로 확률 $\frac{1}{N}$로 당첨 번호와 일치한다. 그러므로

$$X \sim \mathrm{B}\left(2N-1,\ \tfrac{1}{N}\right).$$

당첨자가 세 명 이하라는 것은 $X \le 2$라는 뜻이므로, 정확한 확률은

$$\mathrm{P}(W \le 3) = \sum_{k=0}^{2} \binom{2N-1}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-1-k}.$$

이를 모두 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-1}+\frac{2N-1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-2}+\frac{(2N-1)(2N-2)}{2N^2}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-3}.$$

근사

고정된 각 $k\in\{0,1,2\}$에 대하여 거듭제곱을 다음과 같이 나눈다.

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-1-k}=\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N}\right]^{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{-(1+k)}.$$

주어진 사실에 $a=1$, $n=N$을 대입하면 대괄호 안은 약 e^{-1}이다. 마지막 인수는 1에 매우 가까운 수의 고정된 작은 거듭제곱이므로 약 1이다. 따라서 각 거듭제곱은 약 e^{-2}이다.

이항계수에 대해서는, k가 많아야 2이고 N이 크므로

$$\binom{2N-1}{k}\frac{1}{N^k}=\frac{(2N-1)(2N-2)\cdots(2N-k)}{k!\,N^k}\approx\frac{(2N)^k}{k!\,N^k}=\frac{2^k}{k!}.$$

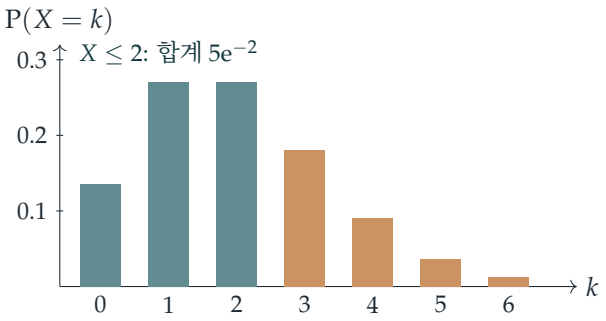
이것들을 종합하면 $k=0,1,2$에 대한 항은 각각 약 e^{-2}, $2\mathrm{e}^{-2}$, $2\mathrm{e}^{-2}$이므로, $\mathrm{e}^2\approx 7.39$를 이용하면

$$\mathrm{P}(W\le 3)\approx \mathrm{e}^{-2}\left(1+2+\frac{2^2}{2!}\right)=5\mathrm{e}^{-2}\approx 0.677\approx\frac{2}{3},$$

이다. 이것이 구하는 결과이다.

? 생각해 보기 X는 왜 평균이 2인 푸아송 확률변수처럼 행동하는가?

위의 계산은 이항분포의 표준적인 푸아송 극한이다. 시행 횟수 $2N-1$은 크고 성공 확률 $\frac{1}{N}$은 작으며, 둘의 곱은 2에 가깝게 유지된다. 이러한 상황에서 $\lambda=np$라 하면 $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\to \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$이고, 여기서는 $\lambda\to 2$이다.



X의 극한분포는 평균이 2인 푸아송 분포이다. 청록색 막대($X\le 2$, 즉 전체 당첨자가 많아야 세 명)는 전체의 약 3분의 2를 차지한다.

참가자가 직접 번호를 고르는 경우

참가자가 직접 고르면 번호는 더 이상 균등하지 않다. 사람들은 생일(31 이하의 번호), 행운의 숫자, 규칙적인 패턴을 선호한다. 참가자가 번호 i를 확률 p_i로 고른다고 하자. 여기서 $\sum p_i = 1$이고, 당첨 번호는 여전히 균등하게 추첨된다. 그러면 자신이 당첨되었다는 조건 아래에서 자신의 번호가 i일 확률은 $p_i \cdot \frac{1}{N}$에 비례하며, 곧 p_i이다. 따라서 인기 있는 번호는 당첨 복권 가운데 실제보다 많이 나타난다. 자신의 번호가 i이면 다른 당첨자의 수는 $\mathrm{B}(2N-1, p_i)$를 따르고 평균은 $(2N-1)p_i$이다. i에 대해 평균을 내면 다른 당첨자 수의 기댓값(expectation)은 코시–슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality) $(\sum p_i)^2 \le N \sum p_i^2$에 의해

$$(2N-1)\sum_i p_i^2 \;\ge\; (2N-1)\cdot\frac{1}{N},$$

이고, 등호는 모든 $p_i = \frac{1}{N}$일 때에만 성립한다. 따라서 번호 선택이 균등하지 않으면 평균적으로 더 많은 사람이 당첨을 나누어 가지게 되고, 당첨자가 세 명 이하일 확률은 대체로 **감소**한다. (인기 없는 번호를 일부러 고르는 한 참가자는 평균보다 나은 결과를 얻겠지만, 참가자 전체로는 더 나빠진다.)

당첨자 수의 기댓값

$X \sim \mathrm{B}\left(2N-1, \frac{1}{N}\right)$이므로 그 평균은 $np = (2N-1)\cdot\frac{1}{N}$이다. (같은 이야기로, X를 다른 참가자 한 명마다 하나씩, 각각 평균이 $\frac{1}{N}$인 $2N-1$개의 지시확률변수(indicator variable)의 합으로 쓸 수 있다.) 그러므로

$$\mathrm{E}(W) = 1 + \mathrm{E}(X) = 1 + \frac{2N-1}{N} = 3 - \frac{1}{N} = 3 - N^{-1},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 이것은 근사가 아니라 정확한 값임에 유의한다.

검산

- $N = 2$와 $N = 3$에 대하여 $2N$명의 참가자에게 번호를 배정하는 모든 경우와 모든 당첨 번호를 나열하면, 정확히 이항분포 식과 정확히 $3 - \frac{1}{N}$을 얻는다.
- 정확한 확률은 $N = 10$일 때 0.7054, $N = 100$일 때 0.6794, $N = 10\,000$일 때 0.6767로, $5\mathrm{e}^{-2} = 0.67668$에 가까워진다.
- $N = 50$으로 시뮬레이션(10^5주)을 하면 정확한 값 0.682에 대해 0.683을 얻었고, 당첨자 수의 평균은 $3 - \frac{1}{50} = 2.98$에 대해 2.981이었다.
- $N = 10$이고 번호의 절반이 나머지보다 두 배 인기가 있을 때, 확률은 0.705에서 0.641로 떨어지고 당첨자 수의 기댓값은 2.9에서 3.11로 올라간다.

흔한 실수

- 시행 횟수를 $2N-1$이 아닌 $2N$으로 쓰는 것: 자신의 복권은 이미 당첨된다는 것을 알고 있으므로 무작위인 것은 다른 참가자들뿐이다. 시행 횟수를 $2N$으로 하면 기댓값이 $3-\frac{1}{N}$이 아니라 $1+2=3$으로 나온다.
- 조건 없는 평균을 쓰는 것: 모든 주를 통틀어 당첨자 수의 기댓값은 $2N\cdot\frac{1}{N}=2$이지만, 자신이 당첨된다는 것을 알면 확실한 당첨자 한 명이 더해지고 나머지는 $2N-1$명이 된다.
- $k=2$인 항을 빠뜨리거나, $\frac{1}{2!}$ 없이 2^2e^{-2}로 쓰는 것.

STEP 너머

여기서의 근사는 희귀 사건의 법칙(law of rare events)이다. 즉 시행 횟수가 많고 성공 확률이 작은 이항분포는 푸아송 분포로 수렴한다. 마지막 소문항은 검사 역설(inspection paradox), 또는 크기 편향 표본추출(size-biased sampling)과 맞닿아 있다. 자신의 복권이 당첨된다는 조건을 걸면 많은 사람이 고른 번호일 가능성이 커지며, 그래서 조건부(conditional) 평균이 2가 아니라 3이 된다. 두 아이디어 모두 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에 잘 설명되어 있다.

풀이

STEP III 2000, 문제 13

확률과 통계 • 확률생성함수

STEP III 2000, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q13

핵심 아이디어

두 확률변수(random variable) 모두 "꼬리(tail)" 사건 또는 "누적(cumulative)" 사건을 통해 다루는 것이 가장 쉽다. 첫 번째 6이 r번째 던지기 이후에 나온다는 것은 처음 r번의 던지기에서 **모든** 주사위가 매번 6이 아닌 눈을 냈다는 것과 정확히 같다. 마지막 6이 r번째 던지기까지 이미 나왔다는 것은 **각** 주사위가 이미 6을 한 번 이상 냈다는 것과 정확히 같다. 이 사건들은 각각 독립(independent)인 사건들의 교집합이므로 그 확률은 곱으로 주어지고, 분포는 연속한 값끼리 빼서 얻는다. 첫 번째 6에 대한 확률변수가 기하분포(geometric distribution)를 따른다는 것을 알아차리면, 그에 관한 모든 것은 금방 구할 수 있다.

풀이

전체에 걸쳐 주사위들은 서로 독립이고, 던질 때마다도 독립이라고 가정한다. 주사위 하나에 대하여, 주사위 i가 처음으로 6을 내는 던지기의 번호를 X_i라 하면

$$\mathrm{P}(X_i > r) = q^r \qquad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

이다. $X_i > r$는 연속으로 r번 6이 아닌 눈이 나왔다는 뜻이기 때문이다. 그러면 $R = \min_i X_i$이고 $S = \max_i X_i$이다.

첫 번째 6

사건 $R > r$는 처음 r번의 던지기에서 n개의 주사위 중 어느 것도 6을 내지 않았다는 것, 즉 nr번의 개별 던지기가 모두 6이 아니었다는 것을 뜻한다. 독립성에 의하여

$$\mathrm{P}(R > r) = q^{nr}.$$

따라서 $r \geq 1$일 때

$$\mathrm{P}(R = r) = \mathrm{P}(R > r-1) - \mathrm{P}(R > r) = q^{n(r-1)} - q^{nr} = q^{nr}\left(q^{-n} - 1\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$Q = q^n$이라 쓰면 이것은 $\mathrm{P}(R = r) = Q^{r-1}(1-Q)$이다. 즉 R는 기하분포를 따르며, 주사위 전체를 한 번 던지는 것이 확률 $1-Q$로 "성공"(적어도 하나의 6)이 된다. 따라서 확률생성함수(probability generating function)는 기하급수(geometric series)이다.

$$\begin{aligned} G_R(t) = \sum_{r=1}^{\infty} t^r Q^{r-1}(1-Q) &= (1-Q)\, t \sum_{r=1}^{\infty} (Qt)^{r-1} \\ &= \frac{(1-q^n)\, t}{1-q^n t}, \end{aligned}$$

이 식은 $|t| < q^{-n}$에서 (특히 $t = 1$ 근처에서) 성립한다.

평균(mean)을 구하기 위해 몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하면

$$G_R'(t) = (1-q^n)\,\frac{(1-q^n t) + q^n t}{(1-q^n t)^2} = \frac{1-q^n}{(1-q^n t)^2},$$

이므로

$$\mathrm{E}(R) = G_R'(1) = \frac{1}{1-q^n}.$$

$n = 2$, $p = \frac{1}{6}$이면 $q^2 = \frac{25}{36}$이므로 구하려던 대로 $\mathrm{E}(R) = 1/\frac{11}{36} = \frac{36}{11}$이다.

마지막 6

사건 $S \leq r$는 처음 r번의 던지기 중 어딘가에서 모든 주사위가 6을 냈다는 것을 뜻한다. 주사위 하나에 대해 이 확률은 $1-q^r$이고, 주사위들은 독립이므로

$$\mathrm{P}(S \leq r) = (1-q^r)^n.$$

연속한 값끼리 빼면 $r \geq 1$일 때

$$\mathrm{P}(S = r) = \mathrm{P}(S \leq r) - \mathrm{P}(S \leq r-1) = \left(1-q^r\right)^n - \left(1-q^{r-1}\right)^n,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($r = 1$일 때 둘째 항은 $0^n = 0$으로, 올바르게 된다.)

> **생각해 보기** $t^r\left[(1-q^r)^2 - (1-q^{r-1})^2\right]$를 더하는 것은 복잡해 보인다. 어떻게 하면 이것을 기하급수로 바꿀 수 있을까?

$n = 2$일 때 제곱을 전개하면

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S = r) &= \left(1 - 2q^r + q^{2r}\right) - \left(1 - 2q^{r-1} + q^{2r-2}\right) \\ &= 2q^{r-1}(1-q) - q^{2(r-1)}(1-q^2) \\ &= 2p\, q^{r-1} - (1-q^2)\,(q^2)^{r-1}. \end{aligned}$$

각 항은 기하분포(의 상수배)이므로

$$G_S(t) = \sum_{r=1}^{\infty} t^r \,\mathrm{P}(S=r) = \frac{2pt}{1-qt} - \frac{(1-q^2)\,t}{1-q^2t}.$$

이것은 이치에 맞는다. $S = X_1 + X_2 - R$이므로 그 분포는 "모수 p인 기하분포의 두 배에서 R의 분포를 뺀 것"이기 때문이다. 간단히 하기 위해 모든 것을 $(1-qt)(1-q^2t)$로 통분하고 $1-q^2 = p(1+q)$를 이용하면

$$\begin{aligned} 2p(1-q^2t) - p(1+q)(1-qt) &= p\big[\,2 - 2q^2t - 1 - q + qt + q^2t\,\big] \\ &= p\big[(1-q) + qt(1-q)\big] = p^2(1+qt). \end{aligned}$$

따라서

$$G_S(t) = \frac{p^2\,t\,(1+qt)}{(1-qt)(1-q^2t)}.$$

간단한 확인으로, $G_S(1) = \dfrac{p^2(1+q)}{p\cdot p(1+q)} = 1$이다.

평균을 구할 때는 나누어 쓴 꼴을 미분하는 것이 가장 쉽다. 각 조각은 기하분포의 확률생성함수(PGF)이고, 그 1에서의 도함수 값은 평균에 계수를 곱한 것이기 때문이다. $\dfrac{(1-a)t}{1-at}$의 $t=1$에서의 도함수 값은 (위의 G_R와 꼭 마찬가지로) $\dfrac{1}{1-a}$이므로

$$\mathrm{E}(S) = G_S'(1) = 2\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2(1+q)-1}{p(1+q)} = \frac{1+2q}{p(1+q)}.$$

$p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}$이면

$$\mathrm{E}(S) = 12 - \frac{36}{11} = \frac{96}{11} \approx 8.73.$$

검산

- $\mathrm{E}(R) + \mathrm{E}(S) = \frac{36}{11} + \frac{96}{11} = 12 = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2)$이다. $\min + \max = X_1 + X_2$이므로 당연히 그래야 한다.
- $n = 1$이면 첫 번째 6과 마지막 6이 일치하고, G_R는 주사위 하나의 기하분포 PGF인 $pt/(1-qt)$가 된다.
- 주사위 쌍 2×10^5개에 대한 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)에서 표본평균(sample mean)은 3.274와 8.709로, $\frac{36}{11} \approx 3.273$ 및 $\frac{96}{11} \approx 8.727$과 비교된다. 또 G_S의 급수를 수치적으로 더한 값은 여러 t 값에서 닫힌 꼴과 일치한다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(S = r)$를 "어떤 주사위가 r번째 던지기에서 처음 6을 내고 나머지는 그 전에 냈다"로 쓰면서, 두 주사위가 같은 던지기에서 처음 6을 내는 경우를 빠뜨리는 것. $\mathrm{P}(S \leq r)$로 계산하면 이 문제를 완전히 피할 수 있다.
- 나누어 쓴 꼴 대신 간단히 정리한 G_S를 미분하는 것. 틀리지는 않지만 계산이 훨씬 많아지고 실수할 여지도 많다.

STEP 너머

R와 S는 독립인 확률변수들의 최솟값과 최댓값으로, **순서통계량**(*order statistics*)의 가장 간단한 예이다. $\mathrm{P}(\min > r)$와 $\mathrm{P}(\max \leq r)$를 이용하는 기법은 어떤 분포에도 통한다. 무기억성(memoryless)을 가진 기하분포는 지수분포(exponential distribution)의 이산 사촌이며, 연속 극한에서 n개의 지수분포 확률변수의 최댓값의 기댓값은 조화합(harmonic sum) $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ (에 평균을 곱한 것)이 된다. 이는 쿠폰 수집가 문제(coupon collector's problem)의 핵심 단계이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 이러한 아이디어들을 깊이 있게 다룬다.

풀이

STEP III 2000, 문제 14

확률과 통계 • 공분산과 독립

STEP III 2000, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q14

핵심 아이디어

빠진 네 번째 확률을 먼저 채운 다음, $\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$를 항별로 전개한다. 모든 항이 하나의 인수 $a - pq$와 결코 0이 될 수 없는 어떤 식의 곱으로 모이며, $a = pq$는 바로 왼쪽 위 칸이 곱으로 분해된다는 진술이다. 2×2 표에서 한 칸이 곱으로 분해되면, 주변합이 나머지 세 칸도 곱으로 분해되도록 강제한다. 값이 세 개이면 여유가 더 생기고, 대칭인 표를 쓰면 이 연결이 끊어진다.

풀이

항등식

네 확률의 합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X = x_2,\, Y = y_2) = 1 - a - (q - a) - (p - a) = 1 - p - q + a.$$

행과 열을 따라 더하면 주변분포(marginal distribution)를 얻는다.

$$\mathrm{P}(X = x_1) = a + (q - a) = q, \qquad \mathrm{P}(Y = y_1) = a + (p - a) = p,$$

따라서 $\mathrm{P}(X = x_2) = 1 - q$이고 $\mathrm{P}(Y = y_2) = 1 - p$이다. 이것이 p와 q의 진짜 의미이다.

	y_1	y_2	
x_1	a	$q - a$	q
x_2	$p - a$	$1 - p - q + a$	$1 - q$
	p	$1 - p$	

이제

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= a\,x_1y_1 + (q-a)\,x_1y_2 + (p-a)\,x_2y_1 + (1-p-q+a)\,x_2y_2,\\ \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) &= \big(qx_1 + (1-q)x_2\big)\big(py_1 + (1-p)y_2\big)\\ &= pq\,x_1y_1 + q(1-p)\,x_1y_2 + p(1-q)\,x_2y_1 + (1-p)(1-q)\,x_2y_2.\end{aligned}$$

계수끼리 빼면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}x_1y_1 :&\quad a-pq,\\ x_1y_2 :&\quad (q-a)-(q-pq) = -(a-pq),\\ x_2y_1 :&\quad (p-a)-(p-pq) = -(a-pq),\\ x_2y_2 :&\quad (1-p-q+a)-(1-p-q+pq) = a-pq.\end{aligned}$$

그러므로

$$\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = (a-pq)(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2) = (a-pq)(x_1-x_2)(y_1-y_2).$$

따라서 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$이면 좌변이 0이 되어 $(a-pq)(x_1-x_2)(y_1-y_2) = 0$이고, 이것이 보여야 할 것이었다.

독립성

서로 다른 두 값을 각각 취하는 확률변수(random variable)의 쌍은 적당한 a, p, q에 대하여 (각 칸에 이름만 붙이면) 위와 같은 꼴의 결합분포표(joint table)를 가진다. $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$이면 위의 곱은 0이다. $x_1 \neq x_2$이고 $y_1 \neq y_2$이므로 뒤의 두 인수는 0이 아니고, 따라서 $a = pq$이다.

> **생각해 보기** 이제 한 칸이 곱으로 분해된다는 것을 안다. 왜 이것으로 나머지 세 칸이 해결되는가?

나머지 각 칸은 주변합에서 이미 아는 칸을 뺀 것이기 때문이다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X=x_1, Y=y_2) = q-pq = q(1-p) = \mathrm{P}(X=x_1)\,\mathrm{P}(Y=y_2),\\ &\mathrm{P}(X=x_2, Y=y_1) = p-pq = p(1-q) = \mathrm{P}(X=x_2)\,\mathrm{P}(Y=y_1),\\ &\mathrm{P}(X=x_2, Y=y_2) = 1-p-q+pq = (1-p)(1-q) = \mathrm{P}(X=x_2)\,\mathrm{P}(Y=y_2).\end{aligned}$$

모든 칸이 주변확률의 곱이므로 X와 Y는 독립(independent)이다. (역, 즉 독립이면 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$라는 것은 잘 알려진 사실이므로, 두 값을 취하는 확률변수에 대해서는 두 조건이 동치이다.)

세 값을 취하는 예

A와 B는 각각 $\{-1, 0, 1\}$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따르므로 $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$이다. 따라서 모든 행과 열의 합이 $\frac{1}{3}$이고, $\mathrm{E}(AB) = 0$이지만 모든 칸이 $\frac{1}{9}$인 것은 아닌 표가 필요하다. 대칭인 선택이 통한다.

	$B=-1$	$B=0$	$B=1$
$A=-1$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
$A=0$	0	$\frac{1}{3}$	0
$A=1$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

각 행과 각 열의 합이 $\frac{1}{3}$이므로 A와 B는 각각 $-1, 0, 1$을 확률 $\frac{1}{3}$로 취한다. 0이 아닌 곱 ab는 네 귀퉁이에서만 나온다.

$$\mathrm{E}(AB) = \tfrac{1}{6}(1) + \tfrac{1}{6}(-1) + \tfrac{1}{6}(-1) + \tfrac{1}{6}(1) = 0 = \mathrm{E}(A)\mathrm{E}(B).$$

그러나 $\mathrm{P}(A=0, B=0) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{9} = \mathrm{P}(A=0)\,\mathrm{P}(B=0)$이므로 A와 B는 독립이 아니다. 말로 하면, $B=0$인 것은 정확히 $A=0$일 때이고, 그렇지 않을 때에는 A가 무엇이든 B는 같은 확률로 ± 1이다.

검산

- $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = 0$으로 두고 $X = Y$인 경우를 시험해 보자. 그러면 $a = p = q$이고, 항등식은 $\mathrm{Var}(X) = p - p^2$를 말해 주는데, 이는 베르누이(Bernoulli) 확률변수에 대해 옳은 값이다.
- 이 항등식은 다항식 항등식으로서 성립한다. x_i, y_i, a, p, q를 무작위로 2000번 골라 유리수 연산으로 정확히 확인하였다. 세 값을 취하는 표도 같은 방법으로 확인하였다. 주변확률은 모두 $\frac{1}{3}$이고, $\mathrm{E}(AB) = 0$이며, $\mathrm{P}(A=0, B=0) = \frac{1}{3}$이다.

흔한 실수

- $a = pq$를 보이고 멈추는 것. 독립이려면 **모든** 칸이 곱으로 분해되어야 하므로, 나머지 세 칸도 (간단히) 확인해야 한다.
- $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$로 나누어도 되는 이유를 말하지 않는 것. 값들이 서로 다르므로 이 식은 0이 아니다.
- 마지막 소문항에서 $B = A^2$나 $B = |A|$를 제시하는 것. 이들은 공분산이 0이면서 종속이지만, B가 결코 -1이 되지 않으므로 요구된 주변분포를 갖지 않는다.

STEP 너머

양 $\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$는 공분산(covariance)이며, 이 문제는 "상관이 없다(uncorrelated)"가 "독립이다"보다 약한 조건임을 보여 준다. 단, 두 값을 취하는 (지시변수와 비슷한) 확률변수는 예외인데, 이 경우 항등식이 모든 것을 두 지시변수(indicator)의 공분산으로 환원하기 때문이다. 앞으로 만나게 될 관련된 사실이 하나 있다. 결합정규분포(jointly normal)를 따르는 확률변수에 대해서는 공분산이 0이면 실제로 독립이다. 더 알고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서), 또는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문서)를 보라.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2000년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

