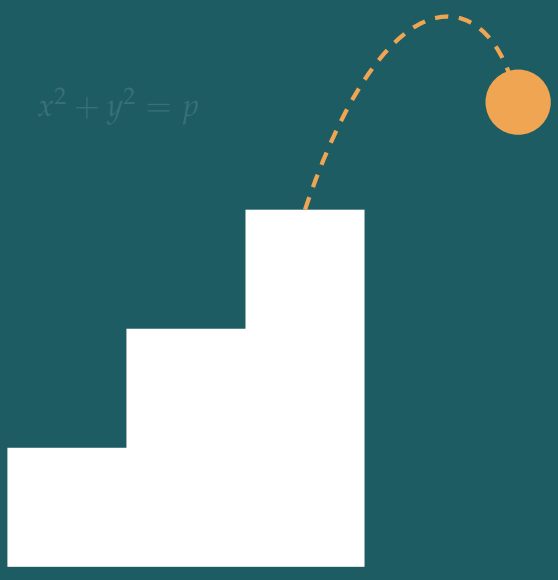
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1999년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1999년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1999년 풀이

1999년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 서로소인 정수 세기 순수수학 3

Q2 자취와 무게중심 순수수학 6

Q3 순환 연립방정식 순수수학 9

Q4 절댓값이 포함된 영역 순수수학 13

Q5 작은 각 근사 순수수학 18

Q6 이차식의 극값 순수수학 22

Q7 2계 미분방정식 순수수학 26

Q8 조화급수의 한계 순수수학 30

Q9 등속 운동학 역학 34

Q10 단순 조화 운동 역학 38

Q11 중력에 의한 원운동 역학 42

Q12 치우친 주사위의 부등식 확률과 통계 46

Q13 지시변수 확률과 통계 50

Q14 조건부 확률 확률과 통계 53

STEP II

Q1 큰 수의 비교 순수수학 56

Q2 이차식의 판별식 순수수학 59

Q3 수학적 귀납법 순수수학 63

Q4 이항계수 항등식 순수수학 67

Q5 삼각방정식 순수수학 71

Q6 치환적분 순수수학 75

Q7 곡선 그리기 순수수학 78

Q8 삼각급수 순수수학 83

Q9 가변적인 힘에 의한 운동 역학 87
Q10 연속 충돌 역학 91
Q11 포물체와 움직이는 표적 역학 95
Q12 베이즈 정리 확률과 통계 99
Q13 연속확률변수 확률과 통계 103
Q14 최적 정지 확률과 통계 107

STEP III

Q1 삼차방정식의 근 순수수학 111
Q2 실근의 개수 세기 순수수학 114
Q3 리만 합과 극한 순수수학 118
Q4 오일러 공식과 다면체 순수수학 122
Q5 피보나치 항등식과 수학적 귀납법 순수수학 126
Q6 매개변수 곡선과 넓이 순수수학 129
Q7 군과 동형사상 순수수학 133
Q8 구간별로 정의된 미분방정식 순수수학 137
Q9 뉴턴의 껍질 정리 역학 141
Q10 떨어지는 사슬의 충격량 역학 146
Q11 강체의 회전 역학 149
Q12 이산 결합분포 확률과 통계 152
Q13 연속 사전분포를 이용한 베이즈 추론 확률과 통계 155
Q14 조건부를 이용한 기댓값 확률과 통계 158

풀이

STEP I 1999, 문제 1

순수수학 • 서로소인 정수 세기

> **STEP I 1999, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q1

핵심 아이디어

2와 5로 나누어떨어지는지(divisibility)는 마지막 자리 숫자에만 달려 있고, 3과 7로 나누어떨어지는지는 21을 법(modulo)으로 한 나머지(remainder)에만 달려 있다. 따라서 구하는 정수들은 묶음마다 일정한 패턴으로 반복되며, 그 개수를 세려면 한 묶음을 세어 곱하기만 하면 된다. 평균에 대해서는 대칭성(symmetry)이 요령이다. n이 집합에 속하면 그 "짝" $N-n$도 집합에 속하므로, 수들이 중점을 중심으로 짝을 이룬다.

풀이

소문항 1: 2 또는 5로 나누어떨어지지 않는, 백만 미만의 수

"2 또는 5로 나누어떨어지지 않는다"는 것은 둘 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는다는 뜻이다. 정수가 2 또는 5로 나누어떨어지는 것은 정확히 그 마지막 자리 숫자가 $0, 2, 4, 5, 6$ 또는 8일 때이다. 따라서 구하는 정수는 마지막 자리 숫자가 $1, 3, 7$ 또는 9인 정수이다.

정수 $0, 1, \ldots, 999\,999$는 연속한 열 개의 정수 $10k, 10k+1, \ldots, 10k+9$로 이루어진 $100\,000$개의 묶음으로 나뉘고, 각 묶음에는 구하는 정수가 정확히 네 개씩 들어 있다. 따라서 개수는

$$4 \times 100\,000 = 400\,000.$$

이다. (포함–배제의 원리(inclusion–exclusion)로도 같은 결과를 얻는다: $10^6 - \frac{1}{2}10^6 - \frac{1}{5}10^6 + \frac{1}{10}10^6 = 400\,000$.)

평균을 구하기 위해, 이러한 각 n을 $10^6 - n$과 짝짓는다. n이 $1, 3, 7, 9$로 끝나면 $10^6 - n$은 각각 $9, 7, 3, 1$로 끝나고, $n \neq 0$이므로 $0 < 10^6 - n < 10^6$이다. 따라서 $n \mapsto 10^6 - n$은 이 집합을 자기 자신으로 보내며, 자기 자신이 역함수(inverse)이다. 또 $n = 500\,000$은 짝수이므로

고정점(fixed point)이 없다. 그러므로 이 집합은 합이 각각 10^6인 200 000개의 쌍으로 나뉜다. 전체 합은 $200\,000 \times 10^6$이고, 평균은

$$\frac{200\,000 \times 10^6}{400\,000} = 500\,000.$$

이다.

소문항 2: 3 또는 7로 나누어떨어지지 않는, 4179 미만의 수

수 4179는 신중하게 고른 것이다:

$$4179 = 3 \times 1393 = 3 \times 7 \times 199 = 21 \times 199.$$

n이 3 또는 7로 나누어떨어지는지는 n을 21로 나눈 나머지에만 달려 있다. 나머지 $0, 1, \ldots, 20$ 가운데 3의 배수는 $0, 3, \ldots, 18$(일곱 개)이고 7의 배수는 $0, 7, 14$(세 개)이며, 0은 양쪽에 모두 세어졌다. 따라서 $21 - 7 - 3 + 1 = 12$개의 나머지는 어느 쪽으로도 나누어떨어지지 않는다:

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20.$$

정수 $0, 1, \ldots, 4178$은 정확히 21개짜리 완전한 묶음 199개로 이루어지므로, 개수는

$$12 \times 199 = 2388.$$

이다. 검산 삼아 포함–배제의 원리를 쓰면 $4179 - 1393 - 597 + 199 = 2388$이다.

> **생각해 보기** 수들이 십진법 자릿수와 아무 관계가 없는데도, 왜 여기서 대칭을 이용한 방법이 여전히 통할까?

핵심은 21이 4179의 약수라는 것이다. 그러면 $4179 - n \equiv -n \pmod 3$이고 $\pmod 7$에서도 마찬가지이므로, $3 \mid 4179 - n$일 필요충분조건은 $3 \mid n$이며, 7에 대해서도 같다. 또 $n = 0$은 제외되므로(모든 수로 나누어떨어진다) 집합의 모든 n은 $1 \le n \le 4178$을 만족하고, 그러면 $1 \le 4179 - n \le 4178$도 성립한다. 따라서 $n \mapsto 4179 - n$은 이 집합을 자기 자신으로 보낸다. 4179가 홀수이므로 고정점은 없다. 그러므로 2388개의 정수는 합이 각각 4179인 1194개의 쌍을 이루고, 평균은

$$\frac{1194 \times 4179}{2388} = \frac{4179}{2} = 2089\tfrac{1}{2}.$$

이다.

검산

모든 정수를 하나하나 확인하는 컴퓨터 계산으로 개수 400 000과 2388, 평균 500 000과 2089.5가 정확히 맞음을 확인할 수 있다. 작은 경우를 손으로 확인해 볼 수도 있다. 21 미만

에서 위에 나열한 열두 개의 나머지를 더하면 $126 = 12 \times \frac{21}{2}$이므로, 그 평균은 $10.5 = \frac{21}{2}$로, 짝짓기 논증이 예측한 그대로이다.

흔한 실수

- "2 또는 5로 나누어떨어지지 않는다"를 "둘 다로는 나누어떨어지지 않는다", 즉 10으로 나누어떨어지지 않는다는 뜻으로 읽는 것. 그러면 900 000개의 정수가 나온다.
- 포함–배제의 원리에서 21의 배수(또는 10의 배수)는 두 번 빼졌으므로 다시 더해야 한다는 것을 잊는 것.
- 집합이 대칭인지 확인하지 않고 평균이 범위의 중점이어야 한다고 가정하는 것. 여기서 그것이 성립하는 것은 오직 10이 10^6을 나누고 21이 4179를 나누기 때문이다.

STEP 너머

$1, \ldots, m$ 가운데 m과 서로소(coprime)인 정수의 개수는 오일러(Euler)의 피 함수(totient function) $\varphi(m)$이다. 여기서 $\varphi(10) = 4$, $\varphi(21) = 12$이고, 개수는 $\varphi(10^6) = 400\,000$과 $199\,\varphi(21)$이다. 짝짓기 $n \leftrightarrow m - n$은 $m > 2$일 때 m과 서로소인 정수들의 합이 항상 $\frac{1}{2} m\,\varphi(m)$임을 보여 주며, 이 사실은 m을 법으로 하는 정수의 산술로 들어가는 첫걸음이다. 더 읽어 보려면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)이 훌륭한 출발점이다.

풀이

STEP I 1999, 문제 2

순수수학 • 자취와 무게중심

STEP I 1999, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q2

핵심 아이디어

조건을 식으로 쓰고 전개하면 x^2과 y^2의 계수가 모두 3이고 xy항이 없는 식을 얻는다. 이것이 바로 원의 특징이다. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면 중심이 어디인지 드러나며, 일차항에 나타나는 것이 정확히 $x_1 + x_2 + x_3$이므로 무게중심(centroid)이 자연스럽게 등장한다. 그러면 a^2에 대한 제약은 "반지름의 제곱"이 언제 음수가 될 수 있는지를 따져 보는 것에서 곧바로 나온다.

풀이

자취

$P = (x, y)$를 자취(locus) 위의 점이라 하고, $i = 1, 2, 3$에 대하여 $A_i = (x_i, y_i)$라 하자. 조건은

$$\sum_{i=1}^{3} \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right] = a^2.$$

이다. 이를 전개하고 $x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{x}$와 $y_1 + y_2 + y_3 = 3\bar{y}$를 이용하면

$$3x^2 - 6\bar{x}\,x + 3y^2 - 6\bar{y}\,y + \sum_i (x_i^2 + y_i^2) = a^2.$$

이다. 이것이 자취의 방정식이다. 이것이 어떤 도형인지 보기 위해 3으로 나누고 완전제곱식으로 고치면

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - \sum_i (x_i^2 + y_i^2) + 3\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2}{3}.$$

이다. 분자는 깔끔하게 정리된다. $\sum_i x_i = 3\bar{x}$이므로

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - 2\bar{x}\cdot 3\bar{x} + 3\bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - 3\bar{x}^2,$$

이고, y에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 세 점에서 그 무게중심 $G = (\bar{x}, \bar{y})$까지의 거리의 제곱의 합을

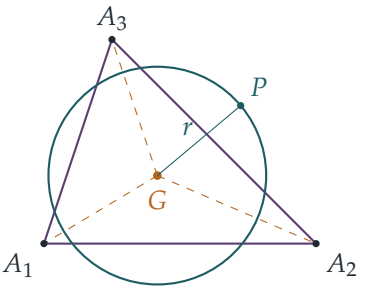
$$S = \sum_{i=1}^{3} \left[(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right]$$

이라 하면, 자취는

$$\boxed{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - S}{3}}.$$

이다.

해석. $a^2 > S$일 때 이것은 세 점의 무게중심 G를 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{(a^2 - S)/3}$인 원이다. a^2이 변하면 G를 중심으로 하는 동심원(concentric circles)의 族을 얻는다. 경계인 경우 $a^2 = S$에서는 이 "원"이 한 점 G로 줄어든다.



a^2이 S보다 작을 수 없는 이유

생각해 보기 상자 안 방정식의 우변이 음수라는 것은 무엇을 뜻하는가?

좌변 $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$은 실수의 제곱의 합이므로 결코 음수가 아니다. $a^2 < S$이면 우변이 음수이므로 방정식을 만족하는 실수 점 (x, y)는 없다. 즉 자취는 공집합이다. 따라서 점이 주어진 대로 움직일 수 있으려면 $a^2 \geq S$이어야 한다.

같은 계산을 거꾸로 읽어 보면 많은 것을 알 수 있다. 우리가 실제로 증명한 것은 모든 점 P에 대하여 성립하는 항등식

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 = 3\,PG^2 + S.$$

이다. $PG^2 \geq 0$이므로 합 $PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2$은 항상 S 이상이고, 등호는 $P = G$일 때만 성립한다. 말로 하면, 무게중심은 세 점까지의 거리의 제곱의 합을 최소로 하는 점이며 그 최솟값은 S이다. 이 최솟값보다 작은 일정한 합 a^2은 불가능하다.

검산

- $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (4,0)$, $A_3 = (1,3)$으로 잡으면 $G = (\frac{5}{3}, 1)$이고 $S = \frac{34}{9} + \frac{58}{9} + \frac{40}{9} = \frac{44}{3}$이다. $P = G$에서 거리의 제곱의 합은 정확히 $\frac{44}{3} \approx 14.67$이다. $P = (0,0)$에서는 $0 + 16 + 10 = 26$이고, $3PG^2 + S = 3 \cdot \frac{34}{9} + \frac{44}{3} = 26$이므로 항등식이 예측한 대로이다.
- 또 하나의 유용한 형태: $S = \frac{1}{3}(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2)$. 위의 예에서 변의 길이의 제곱은 16, 18, 10이므로 다시 $\frac{44}{3}$을 얻는다.
- 무작위로 뽑은 점 세 개의 조 2000개에 대해 분수로 항등식을 정확히 확인했고, 원 위의 점들에서 합이 a^2이 되는 것과 합의 최솟값이 S이며 G에서 얻어진다는 것을 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- 반지름을 $\sqrt{\left(a^2 - \sum(x_i^2 + y_i^2)\right)/3 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}$로 두고 S를 써서 나타낼 수 있음을 알아차리지 못하는 것. 그러면 마지막 부분을 알아보기가 매우 어려워진다.
- 자취가 원이 아니라 한 점이 되는 퇴화된 경우(degenerate case) $a^2 = S$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

항등식 $\sum PA_i^2 = 3PG^2 + \sum GA_i^2$은 관성 모멘트에 대한 평행축 정리(parallel axis theorem)의 한 형태이며, 통계학에서는 제곱합을 "집단 간"과 "집단 내" 부분으로 분해하는 것이다. 평균은 편차의 제곱의 합을 최소로 하는 값이며, 바로 이것이 최소제곱법(least squares) 적합이 통하는 근본적인 이유이다. 선형대수학에서 이것은 모습을 바꾼 피타고라스(Pythagoras) 정리이다. G에서 P로 가는 벡터가 합이 0인 편차 $A_i - G$들과 (적절한 의미에서) 직교(orthogonal)하기 때문이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 최소제곱법을 이러한 사영(projection)의 관점에서 전개한다.

풀이

STEP I 1999, 문제 3

순수수학 • 순환 연립방정식

> **STEP I 1999, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q3

핵심 아이디어

각 방정식은 $f(x) = 1 + 1/x$에 대하여 $x_k = f(x_{k+1})$이라는 뜻이고, 이 연립방정식은 닫혀서 하나의 고리(loop)를 이룬다. 이웃한 항 사이의 차는 간단한 규칙을 따른다. 각 차는 다음 차를 1보다 큰 두 수의 곱으로 나눈 것이다. 따라서 고리를 한 바퀴 도는 동안 차는 작아질 수밖에 없다. 그런데 결국 출발점으로 되돌아오므로, 차는 모두 0이어야 한다.

이 풀이 전체에서 첨자는 순환적으로(cyclically) 읽는다. 즉 x_{n+1}은 x_1을, x_{n+2}는 x_2를 뜻한다. 그러면 연립방정식의 모든 방정식은 하나의 꼴

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

로 쓸 수 있다.

풀이

소문항 (i)

모든 x_k가 양수이므로 모든 k에 대하여 $1/x_{k+1} > 0$이다. 따라서

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}} > 1 \qquad \text{단, } k = 1, 2, \ldots, n,$$

이고, 첨자를 순환적으로 읽으므로 이것은 $x_1, \ldots, x_n$ 모두에 해당한다(마지막 것은 $x_n = 1 + 1/x_1$이다). 그러므로 $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$이다.

소문항 (ii)

첫 번째 방정식에서 두 번째 방정식을 빼면

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 x_3} = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 여기서는 $x_1 = 1 + 1/x_2$와 $x_2 = 1 + 1/x_3$만 사용했다(그리고 x_3이 다른 변수가 되도록 $n \geq 3$이라는 사실도 사용했다). 연속한 임의의 두 방정식에 대하여 똑같이 계산하면, 모든 k에 대하여

$$x_k - x_{k+1} = -\frac{x_{k+1} - x_{k+2}}{x_{k+1} x_{k+2}} \qquad \text{(첨자는 순환적)}.$$

을 얻는다.

소문항 (iii)

이웃한 항 사이의 차를 $d_k = x_k - x_{k+1}$로 쓰자. 그러면 $d_n = x_n - x_1$이다. (ii)의 일반형은 $d_k = -d_{k+1}/(x_{k+1}x_{k+2})$가 된다. 절댓값(absolute value)을 취하고, $x_{k+1}x_{k+2} > 1$임을 알려 주는 소문항 (i)을 이용하면

$$|d_k| = \frac{|d_{k+1}|}{x_{k+1}x_{k+2}} \leq |d_{k+1}|,$$

이고, $d_{k+1} \neq 0$일 때마다 **등호가 없는**(*strict*) 부등식이 성립한다. 이 부등식들을 고리를 따라 이어 붙이면

$$|d_1| \leq |d_2| \leq |d_3| \leq \cdots \leq |d_n| \leq |d_1|.$$

이다. 양 끝이 같으므로 이 사슬의 모든 부등식은 등식이다. 특히 $|d_1| = |d_2|$이다. 그런데 $d_2 \neq 0$이라면 등호 없이 $|d_1| < |d_2|$가 되어야 하므로 $d_2 = 0$이고, 그러면 $|d_2|$와 같은 모든 $|d_k|$도 0이다.

> ? **생각해 보기** 연립방정식이 $x_n = 1 + 1/x_1$로 닫혀 있다는 사실을 정확히 어디에서 사용했는가?

사슬의 마지막 고리인 $|d_n| \leq |d_1|$에서만 사용했으며, 이것은 $x_n = 1 + 1/x_1$에서 나온다. 이것이 없다면 차는 k가 커짐에 따라 그냥 커질 수도 있고, 실제로 열린 사슬 $x_1, \ldots, x_n$은 상수일 필요가 없다. 출발점으로 되돌아온다는 사실이 바로 "작아짐"을 "전혀 작아지지 않음"으로 만든다.

따라서 모든 k에 대하여 $x_k = x_{k+1}$, 즉 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$이다.

x_1의 값

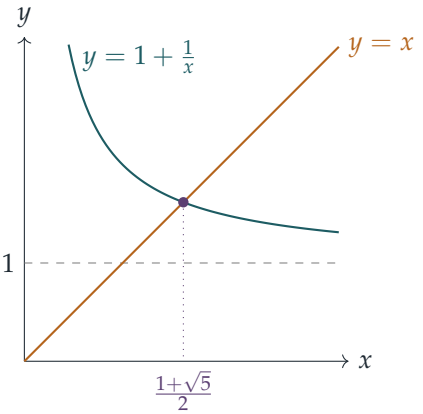
이 공통값을 x라 하자. 이제 어느 방정식이든 $x = 1 + 1/x$를 뜻하므로

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

이다. 소문항 (i)에 의해 $x > 1$이므로 음의 근은 제외되고, 따라서

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

이다. 역으로 모든 x_k를 이 값으로 놓으면 n개의 방정식을 모두 만족하므로, 연립방정식은 실제로 이 해를 가지며 (iii)에 의해 다른 해는 없다. 기하학적으로 x는 곡선 $y = 1 + 1/x$와 직선 $y = x$가 만나는 점이다.



검산

- $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$이면 $1 + 1/x \approx 1 + 0.6180 = 1.6180$이 되어 조건을 만족한다.
- (ii)의 항등식은 임의의 열린 사슬에서 확인해 볼 수 있다. $x_3 = 2$로 잡으면 $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{5}{3}$이다. 그러면 $x_1 - x_2 = \frac{1}{6}$이고 $-(x_2 - x_3)/(x_2 x_3) = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$이다.
- 고리를 한 바퀴 다 돌면 $f(x) = 1 + 1/x$에 대하여 $x_1 = f^n(x_1)$이다. $n = 3, \ldots, 11$에 대하여 $(0, 20)$에서 $f^n(x) - x$를 수치적으로 조사하면 부호가 바뀌는 곳은 $x \approx 1.618$ 한 곳뿐이므로, 다른 해가 없음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $|d_1| \le |d_2|$만으로 (iii)을 증명하려는 것. 한 단계만으로는 차가 커지지 않는다는 것밖에 알 수 없다. 고리를 한 바퀴 다 돌아 $|d_1|$로 되돌아와야 한다.

- x_k들이 같다고 가정한 뒤 x_1을 구하는 것. 그 가정을 정당화하는 것이 바로 소문항 (iii)이며, 여기에는 소문항 (i)에서 얻은 등호 없는 부등식 $x_{k+1}x_{k+2} > 1$이 필요하다.
- 음수인 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$를 제외하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 문제의 핵심은 $|f(a) - f(b)| = |a-b|/(ab)$이므로 $f(x) = 1 + 1/x$가 $x > 1$에서 점들을 서로 더 가깝게 만든다는 것이다. 이런 사상을 **축소사상**(*contraction*)이라 하며, 바나흐(Banach) 고정점 정리(fixed-point theorem)에 따르면 완비 공간(complete space)에서의 축소사상은 단 하나의 고정점을 가지고, 어떤 점에서 출발하든 반복(iteration)하면 그 고정점으로 수렴한다. 여기서 $x = 1$에서 출발하여 반복하면 연속한 피보나치(Fibonacci) 수의 비 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$를 얻고, 황금비(golden ratio)의 연분수(continued fraction) 전개 $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$를 얻는다. 해석학(analysis)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라. 연분수에 대해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(정수론 입문서)을 읽어 보라.

풀이

STEP I 1999, 문제 4

순수수학 • 절댓값이 포함된 영역

> **STEP I 1999, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q4

핵심 아이디어

절댓값 기호(modulus signs)는 평면을 각 괄호 안의 부호가 일정한 영역들로 나누고, 각 영역에서 주어진 조건은 평범한 일차부등식(마지막 문항에서는 쌍곡선(hyperbola) 꼴의 부등식)이 된다. 시간을 크게 아껴 주는 또 다른 도구는 대칭(symmetry)과 평행이동(translation)이다. $|x|$와 $|y|$가 들어 있으면 집합은 두 좌표축에 대하여 모두 대칭이므로, 한 사분면(quadrant)에서만 작업한 뒤 대칭이동하면 된다. 또 x를 $x-1$로 바꾸면 그림이 오른쪽으로 한 칸 미끄러질 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

x를 $-x$로, 또는 y를 $-y$로 바꾸어도 집합은 변하지 않으므로, 이 집합은 두 좌표축에 대하여 모두 대칭이다. 제1사분면($x \geq 0, y \geq 0$)에서 조건은 단순히 $x+y \leq 1$이며, 이는 꼭짓점이 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$인 삼각형이다. 이를 두 축에 대하여 대칭이동하면 네 개의 삼각형이 모여 한 꼭짓점으로 선 정사각형을 이루며, 그 꼭짓점은 다음과 같다.

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (-1,0), \quad (0,-1).$$

같은 말로, 이 집합은 네 반평면(half-plane) $\pm x \pm y \leq 1$의 교집합이다. 부등식이 $\leq$이므로 경계도 포함되며, 넓이는 2이다.

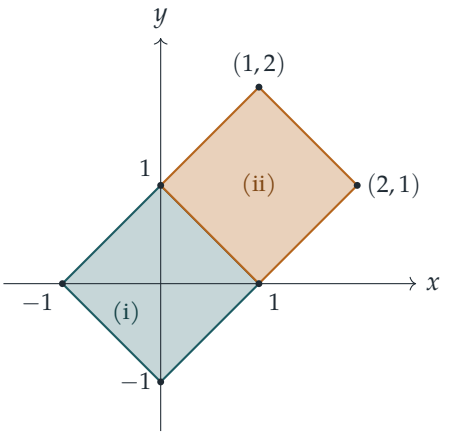
소문항 (ii)

$X = x-1, Y = y-1$로 놓자. 그러면 조건은 $|X|+|Y| \leq 1$이 되고, 이는 (X,Y) 좌표에서 본 소문항 (i)이다. 따라서 이 집합은 소문항 (i)의 정사각형을 $(1,1)$만큼 평행이동한 것으

로, 중심은 $(1,1)$이고 꼭짓점은

$$(2,1), \quad (1,2), \quad (0,1), \quad (1,0),$$

이며, 직선 $x+y=1$, $x+y=3$, $y=x+1$, $y=x-1$로 둘러싸여 있다. 이 정사각형은 $(1,0)$과 $(0,1)$에서 두 축에 모두 닿는다.



소문항 (iii)

이번에도 평행이동하자. $X=x-1$, $Y=y+1$로 놓으면 조건은 다음이 된다.

$$|X| \le 1+|Y|.$$

이 조건은 X축과 Y축에 대하여, 즉 직선 $x=1$과 $y=-1$에 대하여 모두 대칭이다. 사분면 $X\ge 0$, $Y\ge 0$에서 조건은 $X\le 1+Y$이며, 이는 $(1,0)$을 지나고 기울기가 1인 직선 $X=1+Y$의 왼쪽 전체이다. 대칭이동하면, 이 집합은 두 개의 열린 쐐기(wedge)를 **제외한** 모든 점으로 이루어진다.

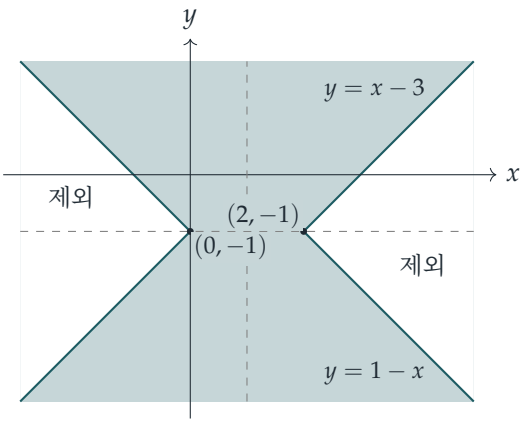
- 오른쪽의 $X>1+|Y|$: 꼭짓점이 $(X,Y)=(1,0)$이고 오른쪽으로 열려 있으며 $Y=\pm(X-1)$로 둘러싸인 직각 쐐기이다.
- 왼쪽의 $X<-1-|Y|$: 그 거울상으로, 꼭짓점이 $(-1,0)$이고 왼쪽으로 열려 있다.

? **생각해 보기** 이 집합은 (i), (ii)에서처럼 유계(bounded)인가?

그렇지 않다. 빼기 부호 하나가 모든 것을 바꾼다. $|Y|$를 크게 할수록 조건은 **더 쉽게** 만족되므로, 고정된 각 Y에 대하여 허용되는 X는 구간 $-1-|Y|\le X\le 1+|Y|$를 이루고, 이 구간은 $|Y|$가 커질수록 넓어진다. 특히 세로 직선 $X=0$(즉 $x=1$) 전체가 이 집합에 속한다.

다시 x,y 좌표로 돌아가면 두 꼭짓점은 $(2,-1)$과 $(0,-1)$이다. 제외되는 오른쪽 쐐기는 $x>2+|y+1|$로, $x\ge 2$에서 반직선 $y=x-3$과 $y=1-x$로 둘러싸여 있다. 제외되는 왼

쪽 쐐기는 $x < -|y+1|$로, $x \le 0$에서 $y = x-1$과 $y = -1-x$로 둘러싸여 있다. 경계 직선 자체는 집합에 속한다. 직선 $y=-1$ 위에서 집합은 선분 $0 \le x \le 2$뿐이며, 이곳이 집합의 가장 좁은 부분이다.



점선 $x=1$과 $y=-1$은 대칭축이다.

소문항 (iv)

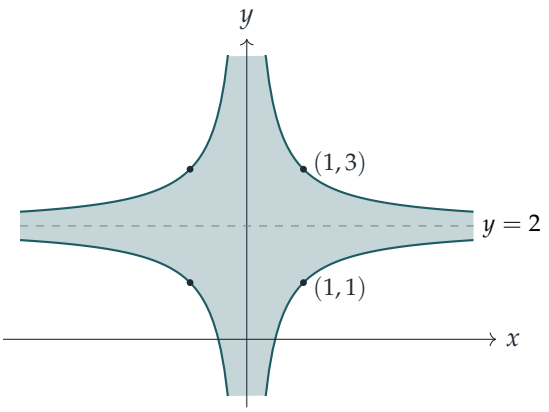
$Y = y-2$로 놓으면 조건은 $|x|\,|Y| \le 1$이 되고, 이는 x축과 직선 $Y=0$(즉 $y=2$)에 대하여 모두 대칭이다. 사분면 $x \ge 0, Y \ge 0$에서 다음과 같다.

- $x=0$이면 모든 Y에 대하여 조건이 성립하므로, y축 전체가 집합에 속한다.
- $x>0$이면 x로 나눌 수 있고, 조건은 $0 \le Y \le 1/x$, 즉 쌍곡선 $Y=1/x$ 아래의 영역이 된다.

두 대칭축에 대하여 대칭이동하면 집합은

$$x=0, \quad \text{또는} \quad 2-\frac{1}{|x|} \le y \le 2+\frac{1}{|x|} \ \ (x \ne 0),$$

이며, 이는 쌍곡선 $(y-2)x = \pm 1$의 네 가지 사이에 갇힌 영역이다. 이 집합은 y축 전체와 직선 $y=2$ 전체를 포함하며, 이 두 직선은 경계 곡선의 점근선(asymptote)이다. 모양은 $(0,2)$를 중심으로 하는 뚱뚱한 더하기 기호처럼 생겼다. "정사각형" $|x| \le 1, |y-2| \le 1$의 꼭짓점은 경계 위의 $(\pm 1, 1)$과 $(\pm 1, 3)$에 있고, 가로 팔은 $|x| \to \infty$일 때 $y=2$ 쪽으로 좁아지며, 세로 팔은 $|y| \to \infty$일 때 y축 쪽으로 좁아진다. 이 집합은 유계가 아니다(그리고 흥미롭게도 넓이가 무한하다).



검산

- 몇 개의 점을 원래 부등식에 대입해 보자. (iii)에서 $(1, 100)$을 대입하면 $0 - 101 \leq 1$이므로 이 점은 집합에 속하고(집합이 유계가 아님을 확인해 준다), $(2.01, -1)$을 대입하면 $1.01 > 1$이므로 오른쪽 꼭짓점 바로 바깥에 있다. (iv)에서 $(2, 2.5)$를 대입하면 $2 \times 0.5 = 1$로 경계 위에 있고, $(2, 2.51)$은 바로 바깥에 있다.
- (i)에서 네 삼각형의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}$이므로 정사각형의 넓이는 2이다. 격자 세기로 구하면 2.002가 나온다.
- 각 소문항마다 $[-6, 6]^2$에서 무작위로 고른 400,000개의 점에 대하여 원래 부등식과 우리의 기술(반평면, 제외된 쐐기, 또는 $|y - 2| \leq 1/|x|$)을 비교했으며, 어긋나는 경우는 하나도 없었다.

흔한 실수

- (ii)와 (iii)에서 반대 방향으로 평행이동하는 실수: $|x - 1|$은 그림을 $x = +1$로 옮기고, $|y + 1|$은 그림을 $y = -1$로 옮긴다.
- (iii)에서 (i)과의 유추로 유계인 마름모를 그리는 실수. 빼기 부호가 $|y + 1|$의 역할을 뒤집으므로 집합은 유계가 아니다.
- (iv)에서 $x = 0$인 경우를 따로 다루지 않고 $|x|$로 나누어, y축 전체가 집합에 속한다는 사실을 놓치는 실수.

STEP 너머

(i)의 집합은 "택시" 노름(norm) $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$에 대한 단위 공(unit ball)이고, (ii)는 $(1,1)$을 중심으로 하는 반지름 1인 공이다. 노름이 다르면 단위 공의 모양도 달라지며(보통의 거리에서는 원, $\max(|x|,|y|)$에서는 변이 수평인 정사각형), 해석학(analysis)이나 거리 공간(metric space)의 첫 강의에서는 $\mathbb{R}^2$ 위에서 이 노름들이 모두 같은 수렴(convergence)과 연속성(continuity)의 개념을 정의한다는 것을 보인다. 바틀(Bartle)과 셔버트(Sherbert)의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 이러한 개념을 처음 만나기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1999, 문제 5

순수수학 • 작은 각 근사

STEP I 1999, 5번 문제

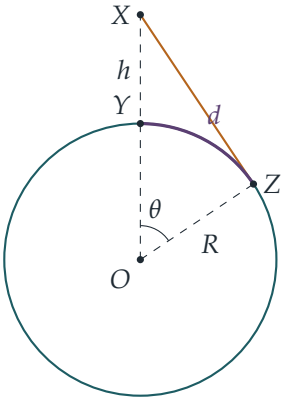
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q5

핵심 아이디어

"지평선에 겨우 보인다"는 것은 Z에서 X로 향하는 시선이 지구를 스치듯 지나간다는 뜻이다. 따라서 이 시선은 Z에서의 접선(tangent)이고, 반지름(radius) OZ에 수직이다. 이로부터 중심 O를 꼭짓점으로 하는 직각삼각형을 얻고, 호(arc) YZ의 길이는 O에서의 각에 R를 곱한 것이다. 두 근사(approximation)는 이 각이 작을 때와 직각에 가까울 때를 각각 살펴보면 얻어진다.

풀이



소문항 (i)

지구의 중심을 O라 하고 $\theta = \angle YOZ$라 하자. X는 Y의 바로 위에 있으므로 세 점 O, Y, X는 한 직선 위에 있고 $OX = R + h$이다. X가 Z에서 겨우 보이므로 직선 ZX는 Z에서 지구에

접하고, 따라서 반지름 OZ에 수직이다. 직각삼각형 OZX에서

$$\cos\theta = \frac{OZ}{OX} = \frac{R}{R+h}.$$

반지름이 R인 원에서 중심각 θ에 대한 호 YZ의 길이는 $R\theta$이므로

$$d = R\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right).$$

여기서 $0 < R/(R+h) < 1$이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

소문항 (ii)

h가 R에 비해 작으면 $\cos\theta = R/(R+h)$는 1에 가까우므로 θ는 작고, $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$을 쓸 수 있다. 또한 $R+h \approx R$이므로

$$\frac{R}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R},$$

이다. 두 식을 같게 놓으면

$$1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \approx 1 - \frac{h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta^2 \approx \frac{2h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}},$$

이다. 여기서 $\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 택했다. 따라서

$$d = R\theta \approx R\sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2}\,(Rh)^{1/2},$$

이고, 이는 $k = \sqrt{2}$일 때 요구된 꼴이다.

소문항 (iii)

이번에는 $R/(R+h)$가 작으므로 $\cos\theta$는 0에 가깝고, θ는 작은 것이 아니라 $\frac{\pi}{2}$에 가깝다. 주어진 근사는 작은 각에서만 성립하므로, 실제로 **작은** 각을 재기로 한다.

> **생각해 보기** 여기서 작은 각은 어느 것이고, 그 각에는 어떤 근사를 쓸 수 있는가?

$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$로 놓자. 여기서 $\phi = \angle OXZ$는 위성에서의 각으로, 위성이 멀리 있을 때 작다. 그러면 $\cos\theta = \sin\phi$이므로

$$\sin\phi = \frac{R}{R+h}.$$

답에 R^2/h 항이 있으므로 이 식을 R/h에 대한 2차까지 구해야 한다. $R/h < 1$이므로 이항 전개(binomial expansion)를 쓸 수 있고,

$$\frac{R}{R+h} = \frac{R}{h}\left(1 + \frac{R}{h}\right)^{-1} = \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2} + \cdots.$$

$\sin\phi \approx \phi$를 쓰면

$$\phi \approx \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2}.$$

따라서

$$\begin{aligned} d = R\theta &= R\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \\ &\approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h} + \frac{R^3}{h^2}. \end{aligned}$$

마지막 항은 R^2/h보다 R/h배만큼 더 작으므로 이를 버리면

$$d \approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h},$$

를 얻고, 이는 $a = \frac{\pi}{2}, b = -1$일 때 요구된 꼴이다.

이 차수에서는 $\sin\phi \approx \phi$를 써도 문제가 없다. 이 근사의 오차는 약 $\frac{1}{6}\phi^3$으로 R^3/h^3 정도의 크기이므로, d는 R^4/h^3 차수에서만 달라진다.

검산

- 극한이 타당하다. $h \to 0$이면 $d \to 0$이다. $h \to \infty$이면 $d \to \frac{\pi}{2}R$로, 지구 둘레의 4분의 1이다. 아주 멀리 있는 위성은 거의 반구 전체를 본다. $-R^2/h$ 항은 음수이므로 d는 아래쪽에서 $\frac{\pi}{2}R$에 다가가는데, $\theta < \frac{\pi}{2}$이므로 당연히 그래야 한다.
- 수치로 확인하면, $R = 1, h = 10^{-4}$일 때 정확한 d를 $\sqrt{2Rh}$로 나눈 값은 0.99996이다. $h = 1, R = 0.01$일 때 정확한 d와 $\frac{\pi}{2}R - R^2/h$의 차는 9.9×10^{-7}으로, 예측한 대로 대략 R^3/h^2이다.
- 반지름이 6370 km인 지구 위 300 km에 있는 위성의 경우, 정확한 d는 약 1918 km이고 $\sqrt{2Rh}$는 1955 km를 준다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 θ가 작지 않고 $\frac{\pi}{2}$에 가까운데도 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$을 쓰는 것.
- 소문항 (iii)에서 $R/(R+h)$를 1차까지만 전개하여 R^2/h 항을 잃고 잘못된 b를 얻는 것.

STEP 너머

두 소문항 모두 점근 전개(asymptotic expansion)이다. 정확한 d를 작은 매개변수 h/R 또는 R/h의 거듭제곱으로 전개하고, 오차를 제한하면서 정해진 차수까지의 항만 남긴다. 빅

오 표기법(big-O notation)과 나머지항이 있는 테일러 정리(Taylor's theorem)로 "$\approx$"를 엄밀하게 만드는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 이런 종류의 근사를 다루는 STEP 연습 문제가 더 있다.

풀이

STEP I 1999, 문제 6

순수수학 • 이차식의 극값

STEP I 1999, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q6

핵심 아이디어

닫힌구간(closed interval)에서 직선은 양 끝점에서 극값을 가지며, 어느 끝점에서 최댓값이 되고 어느 끝점에서 최솟값이 되는지는 오직 기울기(gradient)의 부호에 달려 있다. $c > 0$인 이차함수(quadratic)의 그래프는 $\cup$ 모양의 포물선(parabola)이다. 최댓값은 여전히 끝점에서 나타나지만, 최솟값은 **꼭짓점**(*vertex*)**이 구간 안에 있으면** 꼭짓점에서, 그렇지 않으면 더 가까운 끝점에서 나타난다. 따라서 이 문제 전체는 꼭짓점 $x = -b/(2c)$가 $[-10, 10]$에 대해 어디에 놓이는지를 묻는 것으로 귀결된다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = bx + a$라 하면 $f(10) = a + 10b$이고 $f(-10) = a - 10b$이다.

- $b > 0$이면 f는 순증가(strictly increasing)하므로, 최솟값은 $f(-10) = a - 10b$($x = -10$에서)이고 최댓값은 $f(10) = a + 10b$($x = 10$에서)이다.
- $b = 0$이면 모든 x에 대해 $f(x) = a$이므로, 최댓값과 최솟값은 모두 a이다.
- $b < 0$이면 f는 순감소(strictly decreasing)하므로, 최댓값은 $f(-10) = a - 10b$($x = -10$에서)이고 최솟값은 $f(10) = a + 10b$($x = 10$에서)이다.

세 경우를 모두 한꺼번에 나타내면 다음과 같다.

$$\text{최댓값} = a + 10|b|, \qquad \text{최솟값} = a - 10|b|.$$

소문항 (ii)

$c \geq 0$일 때 $g(x) = cx^2 + bx + a$라 하자. $c = 0$이면 이는 소문항 (i)이므로, 답은 위와 같이 $a \pm 10|b|$이다. 이제부터는 $c > 0$이라 하고 완전제곱식(completing the square)으로 고친다.

$$g(x) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4c}.$$

그래프는 꼭짓점이 $x_0 = -\dfrac{b}{2c}$인 $\cup$ 모양의 포물선이며, 이 점에서 g는 **모든** 실수 x에 대한 최솟값을 가진다. 또한 g는 $x < x_0$에서 감소하고 $x > x_0$에서 증가한다. 끝점에서의 값은 다음과 같다.

$$g(10) = a + 100c + 10b, \qquad g(-10) = a + 100c - 10b.$$

최댓값.

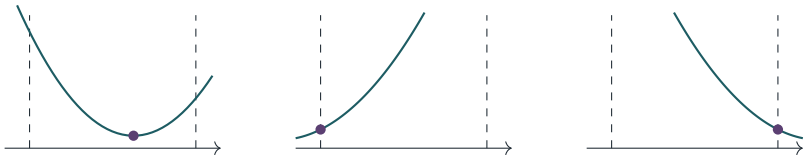
> **생각해 보기** 꼭짓점이 어디에 있든 구간에서 g의 최댓값이 반드시 끝점 중 하나에서 나타나는 이유는 무엇인가?

$c > 0$이므로 $g(x)$는 거리 $|x - x_0|$를 통해서만 x에 의존하며, 그 거리가 커질수록 증가한다. $[-10, 10]$에서 거리 $|x - x_0|$는 끝점 중 하나(x_0에서 더 먼 쪽)에서 가장 크다. 따라서 최댓값은 $g(10)$과 $g(-10)$ 중 큰 값이고, 두 값의 차는 $g(10) - g(-10) = 20b$이다. 그러므로 다음이 성립한다.

- $b > 0$이면 최댓값은 $x = 10$에서 $a + 100c + 10b$이다.
- $b < 0$이면 최댓값은 $x = -10$에서 $a + 100c - 10b$이다.
- $b = 0$이면 최댓값은 양 끝점에서 $a + 100c$이다.

어느 경우든 최댓값 $= a + 100c + 10|b|$이다. 이는 $c = 0$일 때도 성립한다.

최솟값. 이제는 x_0이 어디에 있는지가 중요하다. 꼭짓점이 구간 안에 있을 필요충분조건은 $-10 \leq -\frac{b}{2c} \leq 10$, 즉 ($2c > 0$을 곱하면) $-20c \leq b \leq 20c$, 곧 $|b| \leq 20c$이다.



점선은 $x = \pm 10$이고, 점은 구간에서의 최솟값을 나타낸다.

- $|b| \le 20c$ **(꼭짓점이 구간 안에 있는 경우).** 최솟값은 전역 최솟값(global minimum)이다.
$$a - \frac{b^2}{4c}, \quad \text{위치: } x = -\frac{b}{2c}.$$
- $b > 20c$ **(꼭짓점이 왼쪽에 있는 경우,** $x_0 < -10$**).** $[-10, 10]$에서 $x > x_0$이므로 g는 그곳에서 증가하고, 최솟값은 $x = -10$에서 $g(-10) = a + 100c - 10b$이다.
- $b < -20c$ **(꼭짓점이 오른쪽에 있는 경우,** $x_0 > 10$**).** 이번에는 g가 구간 전체에서 감소하므로, 최솟값은 $x = 10$에서 $g(10) = a + 100c + 10b$이다.

구간 밖의 두 경우를 합치면 $|b| > 20c$일 때 최솟값 $= a + 100c - 10|b|$이다.

> **생각해 보기** 경계 $|b| = 20c$에서는 어떻게 되는가? 그곳에서 두 공식이 서로 어긋나는가?

그렇지 않다. $b = 20c$이면 꼭짓점이 정확히 $x = -10$에 있으므로 $a - \frac{b^2}{4c} = a - 100c$이고 $a + 100c - 10b = a - 100c$도 성립한다. $b = -20c$인 경우도 마찬가지이다. 따라서 b가 $\pm 20c$를 지날 때 답은 연속적으로 변하며, 어느 경우에 경계를 포함시키든 상관없다.

정리. $-10 \le x \le 10$이고 $c \ge 0$일 때

$$\text{최댓값} = a + 100c + 10|b|, \qquad \text{최솟값} = \begin{cases} a - \dfrac{b^2}{4c}, & c > 0 \text{ 이고} |b| \le 20c, \\ a + 100c - 10|b|, & |b| > 20c, \\ a, & b = c = 0. \end{cases}$$

$c = 0, b \ne 0$인 경우는 $|b| > 20c = 0$에 해당하며 소문항 (i)의 결과를 다시 준다.

검산

- $g(x) = x^2 + 4x + 1$을 생각하자. 여기서 $|b| = 4 \le 20$이므로 최솟값은 $x = -2$에서 $1 - 4 = -3$이고, 최댓값은 $x = 10$에서 $1 + 100 + 40 = 141$이다. 직접 대입한 결과와 일치한다.
- $g(x) = x^2 + 30x$를 생각하자. 여기서 $b = 30 > 20$이므로 꼭짓점 $x = -15$는 구간 밖에 있고, 최솟값은 $g(-10) = 100 - 300 = -200$이다. 실제로 $g(-10) = -200$이고 g는 $[-10, 10]$에서 증가한다.
- 간단한 컴퓨터 검산으로, $c = 0$과 경계 $|b| = 20c$를 포함한 무작위 (a, b, c) 1000개에 대해 $[-10, 10]$의 401개 점에서 전수 탐색(정확한 유리수 연산)한 결과와 공식을 비교하였다. 모든 경우가 일치한다.

흔한 실수

- 꼭짓점이 $[-10, 10]$ 안에 있는지 확인하지 않고 $a - \frac{b^2}{4c}$를 최솟값으로 제시하는 것.
- $c = 0$인 경우(꼭짓점이 없고, c로 나눌 수도 없다)와 $b = c = 0$인 경우를 빠뜨리는 것.
- 꼭짓점이 구간 밖에 있을 때 어느 끝점에서 최솟값이 나오는지 헷갈리는 것. 꼭짓점에 더 가까운 끝점이다.

STEP 너머

이 문제의 바탕에 있는 사실은 최대최소 정리(Extreme Value Theorem)이다. 유계인 닫힌구간에서 연속(continuous)인 함수는 최댓값과 최솟값을 가지며, 이 값들은 끝점이나 구간 내부의 정류점(stationary point)에서 나타난다. $c \geq 0$인 $cx^2 + bx + a$와 같은 볼록함수(convex function)가 끝점에서 최댓값을 가진다는 관찰은 볼록 최적화(convex optimisation)의 첫걸음이며, 볼록 최적화는 현대 응용수학의 상당 부분을 떠받치고 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 최대최소 정리를 꼼꼼하게 증명한다.

풀이

STEP I 1999, 문제 7

순수수학 • 2계 미분방정식

STEP I 1999, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q7

핵심 아이디어

함수 $\sin(k\sin^{-1}x)$를 두 번 미분하는 것은 번거로워 보이지만, $x=\sin\theta$로 놓아 $y=\sin k\theta$가 되게 하면 다루기 쉬워진다. 다시 미분하기 전에 1계 도함수(derivative)에 $\sqrt{1-x^2}$을 곱해 두면 계산이 짧아진다. 마지막 부분의 요점은, 한 점에서 함숫값과 기울기가 주어진 2계 미분방정식(second-order differential equation)의 해는 하나뿐이라는 것이다. 따라서 우리가 찾은 다항식은 **반드시** $\sin(3\sin^{-1}x)$이어야 한다.

풀이

미분방정식

$-1<x<1$에서 $y=\sin(k\sin^{-1}x)$라 하자. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$을 이용하여 연쇄법칙(chain rule)을 적용하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \text{이므로}\qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=k\cos(k\sin^{-1}x).$$

이 두 번째 식을 x에 대하여 미분하면(좌변에는 곱의 미분법(product rule), 우변에는 연쇄법칙을 쓴다)

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{k^2\sin(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{k^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$-1<x<1$에서 0이 아닌 $\sqrt{1-x^2}$을 양변에 곱하면

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+k^2y=0,$$

이고, 이것이 바로 구하려던 $(*)$이다.

$k = 3$일 때의 삼차식 해

$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$로 놓자. $x = 0$에서 $y = 0$이라는 조건에서 $D = 0$이고, $x = 0$에서 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3$이라는 조건에서 $C = 3$이다. 이제

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y'' = 6Ax + 2B,$$

이고, 이를 $k^2 = 9$인 $(*)$에 대입하면

$$(1 - x^2)(6Ax + 2B) - x(3Ax^2 + 2Bx + C) + 9(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0.$$

이 식은 모든 x에 대하여 성립해야 하므로 계수를 비교한다(계수비교법(comparing coefficients)).

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad -6A - 3A + 9A = 0 \quad (A\text{에 관계없이 항상 성립}),\\
x^2 &: \quad -2B - 2B + 9B = 5B = 0,\\
x^1 &: \quad 6A - C + 9C = 6A + 8C = 0,\\
x^0 &: \quad 2B + 9D = 0.
\end{aligned}$$

따라서 $B = 0$이고($D = 0$과도 모순이 없다), $6A = -8C = -24$에서 $A = -4$이다. 구하는 해는

$$y = 3x - 4x^3.$$

$\sin 3\theta$를 나타내기

생각해 보기 같은 방정식의 해가 두 개 있다. 바로 $\sin(3\sin^{-1}x)$와 $3x - 4x^3$이다. 이 둘은 왜 같은 함수여야 할까?

두 함수 모두 $k = 3$인 $(*)$를 만족하고, $x = 0$에서 같은 조건을 만족한다. 다항식은 애초에 그 조건을 만족하도록 만들었다. $y = \sin(3\sin^{-1}x)$에 대해서는 $y(0) = \sin 0 = 0$이고, 위에서 구한 1계 도함수로부터 $y'(0) = 3\cos 0/1 = 3$이다.

$-1 < x < 1$에서는 $1 - x^2 \neq 0$이므로 $(*)$를 이것으로 나눌 수 있다. 그러면 $y'' = \dfrac{xy' - 9y}{1 - x^2}$이 되는데, 이는 계수가 연속인 2계 선형 미분방정식(linear differential equation)이고, 이러한 방정식은 $x = 0$에서 y와 y'의 값이 주어지면 해가 정확히 하나 존재한다. ($x = 0$에서 한 걸음씩 나아간다고 생각해 보자. 방정식은 y와 y'으로부터 y''을 알려 주므로, 처음 값들이 모든 것을 결정한다.) 따라서

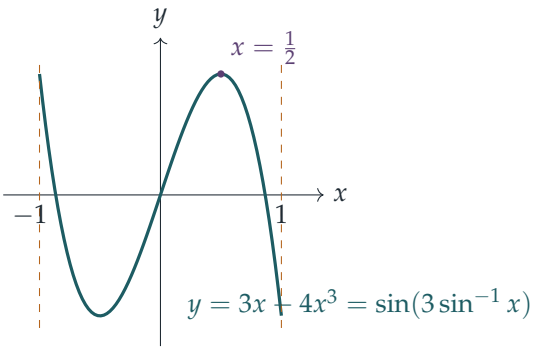
$$\sin(3\sin^{-1}x) = 3x - 4x^3 \qquad \text{단, } -1 < x < 1,$$

이고, 연속성(continuity)에 의해 $x = \pm 1$에서도 성립한다.

이제 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $x = \sin\theta$로 놓으면 $\sin^{-1} x = \theta$이므로

$$\boxed{\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.}$$

이 항등식(identity)은 $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$일 때뿐만 아니라 모든 θ에 대하여 성립한다. 양변 모두 주기(period)가 2π이다. $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$이면 $\varphi = \pi - \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$로 놓는다. 그러면 $\sin\varphi = \sin\theta$이고 $\sin 3\varphi = \sin(3\pi - 3\theta) = \sin 3\theta$이므로, φ에 대한 항등식으로부터 θ에 대한 항등식이 얻어진다.



이 그래프는 익숙한 곡선 $\sin 3\theta$를 $x = \sin\theta$를 통해 본 것이다. θ가 $-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때 3θ는 한 번 반 진동하며, 그래서 $x = \pm\frac{1}{2}$($3\theta = \pm\frac{\pi}{2}$인 곳)에서 두 개의 극점(turning point)이 생긴다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$이고 $3 - 4 = -1$이다. $\theta = \frac{\pi}{6}$: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$이고 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$이다.
- 수치로 확인하면, $\theta = 0.7$에서 $\sin 2.1 = 0.86321$이고 $3(0.64422) - 4(0.64422)^3 = 0.86321$이다.
- 같은 항등식을 $\sin(2\theta + \theta)$와 배각 공식(double-angle formulae)으로도 얻을 수 있으며, 이는 좋은 독립적인 검산이 된다.

흔한 실수

- $\dfrac{k\cos(k\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$을 몫의 미분법(quotient rule)으로 바로 미분하는 것: 틀리지는 않지만 계산이 지저분하다. 먼저 제곱근을 없애는 편이 훨씬 깔끔하다.
- 삼차식이 $\sin(3\sin^{-1} x)$와 같은 **이유**를 밝히지 않는 것. 같은 방정식을 만족한다는 것만으로는 충분하지 않다. 두 해가 $y(0)$과 $y'(0)$도 같아야 한다.

STEP 너머

방정식 $(*)$는 체비쇼프(Chebyshev) 방정식이다. $k = n$이 자연수이면 이 방정식은 다항식 해를 가지며, $\cos(n\cos^{-1}x)$는 수치 근사(numerical approximation)에서 핵심적인 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial) $T_n(x)$이다. 우리가 사용한 유일성 정리(uniqueness theorem)(피카르–린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem))는 대학 1학년 미분방정식 강의에서 증명한다. 이런 방정식을 푸는 멱급수(power series) 방법은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)에서 다룬다.

풀이

STEP I 1999, 문제 8

순수수학 • 조화급수의 한계

STEP I 1999, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q8

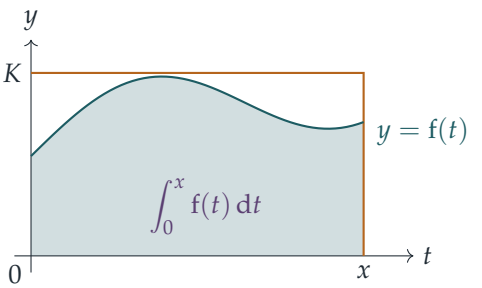
핵심 아이디어

적분(integral)은 넓이이므로, 곡선을 직사각형 안에 가두면 그 넓이도 0과 직사각형의 넓이 사이에 갇힌다. 문제에서 제시한 피적분함수(integrand)는 부분분수(partial fractions)로 분해되어, 그 적분이 정확히 $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$이 되는 꼴이 되고, 피적분함수에 대한 범위로부터 부등식을 얻는다. 그다음에는 모든 것이 연쇄적으로 소거된다(telescoping). n에 대하여 더하면 로그들의 사슬은 $\ln N$이 되고, 역수의 차들의 사슬은 거의 아무것도 남지 않는다.

풀이

적분의 범위 잡기

$0 \le t \le x$에서 $y = \mathrm{f}(t)$의 그래프를 그려 보자. $0 \le \mathrm{f}(t) \le K$이므로, 곡선 전체가 꼭짓점이 $(0,0)$과 (x,K)인 직사각형 안에, t축 위 또는 그보다 위쪽에 놓인다.



적분은 곡선 아래 색칠한 부분의 넓이이다. 곡선이 축 아래로 내려가는 일이 없으므로 이 넓이는 음수가 될 수 없고, 영역이 직사각형 안에 있으므로 직사각형의 넓이 Kx를 넘을 수 없

다. 따라서

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \le Kx.$$

$\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$에 대한 부등식

$n > 1$이라 하자. $0 \le t \le 1$에서 $n - t \ge n - 1 > 0$이므로 피적분함수가 정의된다. 이를 부분분수로 분해하면

$$\frac{t}{n(n-t)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-(n-t)}{n-t} = \frac{1}{n-t} - \frac{1}{n},$$

이므로

$$\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln(n-t) - \frac{t}{n}\Big]_0^1 = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n}.$$

이제 $[0,1]$에서 피적분함수의 범위를 잡는다. 분자 t는 음이 아니고 분모 $n(n-t)$는 양수이므로, 피적분함수는 0 이상이다. t가 0에서 1로 증가하면 분자는 커지고 양수인 분모는 작아지므로, 피적분함수는 증가하고 최댓값은 $t = 1$에서 갖는다.

$$0 \le \frac{t}{n(n-t)} \le \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

첫 번째 결과에 $x = 1, K = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$을 적용하면

$$0 \le \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n} \le \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$n = 2$부터 N까지 더하기

$n = 2, 3, \ldots, N$ (단, $N \ge 2$)에 대한 부등식을 모두 더한다. 로그들은 연쇄적으로 소거되는데, 이는

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{N}{N-1}\Big) = \ln N,$$

이기 때문이고, 우변들도 마찬가지이다.

$$\sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\Big) = 1 - \frac{1}{N}.$$

따라서

$$0 \le \ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le 1 - \frac{1}{N} \le 1.$$

($N = 1$일 때는 합이 비어 있고 $\ln 1 = 0$이므로, 이 경우에도 명제가 성립한다.)

생각해 보기 이 이중 부등식의 어느 쪽 절반이 조화급수(harmonic series)가 발산(diverge)함을 알려 주고, 어느 쪽 절반이 상계(upper bound)를 주는가?

왼쪽 절반은 합이 $\ln N$ 이하라는 것이고, 오른쪽 절반은 합이 $\ln N - 1$ 이상이라는 것이다. 발산을 보이려면 하계(lower bound)가 필요하므로 오른쪽 절반을 사용한다.

발산

$\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq 1$로부터 $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N - 1$을 얻고, 여기에 $n = 1$인 항을 더하면

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N.$$

$N \to \infty$일 때 $\ln N \to \infty$이므로, 합도 무한대로 발산한다.

$N < 10^{30}$일 때의 범위

이제 왼쪽 절반을 사용한다. $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq \ln N$이므로

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N.$$

$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$이므로, 양변을 열 제곱하면 $10^{30} < 2^{100}$이다. 따라서 $N < 10^{30}$이면 $N < 2^{100}$이고, ln은 증가함수이므로

$$\ln N < 100 \ln 2 < 100,$$

이다. 여기서 $2 < \mathrm{e}$이므로 성립하는 $\ln 2 < 1$을 사용했다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N < 101.$$

검산

- $\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값은 $n > 1$인 여러 값에 대하여 $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$과 일치한다. 예를 들어 $n = 2$이면 둘 다 $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$이고, 이는 0과 $\frac{1}{2}$ 사이에 있다.
- 2×10^5 이하의 모든 N에 대하여 $\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$은 $[0, 1]$에 속한다. $N = 2 \times 10^5$일 때 이 값은 약 0.4228로, $1 - \gamma \approx 0.4228$에 가깝다. 여기서 γ는 오일러(Euler) 상수(Euler's constant)이다.
- 이 범위는 넉넉하다. $1 + 30 \ln 10 \approx 70.1$이고, 실제로 $\sum_{n=1}^{10^{30}} \frac{1}{n} \approx 69.65$이다. 조화급수는 발산하지만, 극도로 느리게 발산한다.

흔한 실수

- 이중 부등식의 엉뚱한 쪽 절반을 사용하는 것: 발산을 보이려면 합의 **하계**가 필요하고, 마지막 부분에는 **상계**가 필요하다.
- $n = 1$인 항을 빠뜨리는 것: 부등식은 $\sum_{n=2}^{N}$에 관한 것이지만, 결론은 $\sum_{n=1}^{N}$에 관한 것이다.
- 피적분함수의 최댓값이 $t = 1$에서 나타난다는 것을 정당화하지 않는 것. 피적분함수가 증가한다고 말하는 것(또는 단순히 $t \leq 1$이고 $n - t \geq n - 1$이라고 말하는 것)이면 충분하다.

STEP 너머

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N$은 감소하고 아래로 유계이므로 수렴한다. 그 극한이 오일러 상수 $\gamma \approx 0.5772$이며, γ가 유리수(rational)인지는 아직 아무도 모른다. 여기서 한 것처럼 합을 적분과 비교하는 방법이 **적분 판정법**(integral test)으로, 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서 급수를 다루는 첫 도구 가운데 하나이다. 이를 엄밀하게 다루는 과정을 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP I 1999, 문제 9

역학 • 등속 운동학

STEP I 1999, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

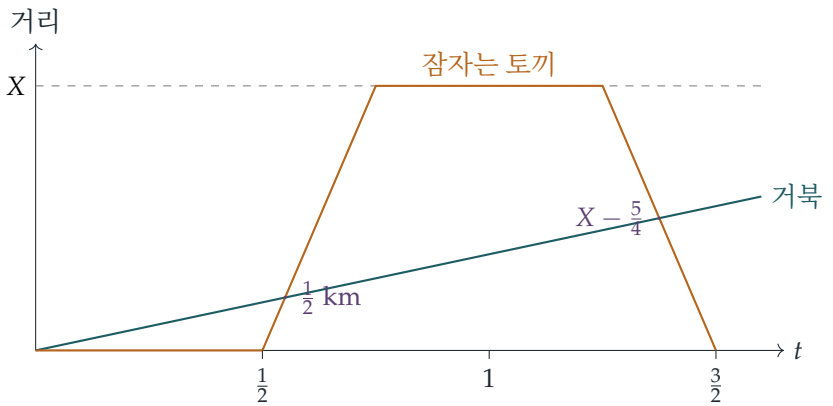
step.maths.org/questions/99-s1-q9

핵심 아이디어

모든 움직임이 일정한 속력으로 일어나므로, 모든 이동 시간은 단순히 거리를 속력으로 나눈 값이다. 두 동물이 만날 때마다 둘은 같은 순간에 같은 장소에 있으므로, 각각에 대해 시계의 시각을 적고 두 값을 같다고 놓는다. 두 번의 만남에서 v와 V에 대한 두 개의 방정식을 얻는다. $1/v$와 $1/V$(킬로미터당 시간)로 다루면 방정식이 일차(linear)로 유지된다.

풀이

두 동물 모두 같은 직선 경로를 따라 일정한 속력(constant speed)으로 움직인다고 모형화하고, 방향을 바꾸는 데 걸리는 시간은 무시한다. 시간 t는 출발 시점부터 시간 단위로 잰다. 거리–시간 그래프(distance–time sketch)(마지막에 구한 X의 값으로 그렸다)에 우리가 이용하는 두 교차점이 나타나 있다.



첫 번째 만남

거북은 출발점에서 $\frac{1}{2}$ km 떨어진 지점에 시각 $\dfrac{1/2}{v}$에 도착한다. 토끼는 $t = \frac{1}{2}$에 출발하여 같은 지점에 시각 $\frac{1}{2} + \dfrac{1/2}{V}$에 도착한다. 둘은 그곳에 함께 있으므로

$$\frac{1}{2v} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2V}, \qquad \text{즉} \qquad \frac{1}{v} = 1 + \frac{1}{V}. \tag{1}$$

두 번째 만남

토끼는 채소밭에 시각 $\frac{1}{2} + \dfrac{X}{V}$에 도착하고, 30분 동안 잠을 잔 뒤 $1 + \dfrac{X}{V}$에 떠난다. 그다음 $\frac{5}{4}$ km를 되돌아 달리므로, 토끼가 거북을 만나는 시각은

$$1 + \frac{X}{V} + \frac{5}{4V} = 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V}.$$

이다. 거북은 아직 가는 길 위에 있으며 출발점에서 $X - \frac{5}{4}$ km 떨어져 있으므로, 거북은 $\dfrac{X - \frac{5}{4}}{v}$시간 동안 걸어온 것이다. 두 시각을 같다고 놓으면

$$\frac{X - \frac{5}{4}}{v} = 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V}. \tag{2}$$

생각해 보기 방정식 두 개와 미지수 두 개가 있지만, (2)에서는 $1/v$에 X가 곱해져 있다. 어떻게 하면 V만 따로 구할 수 있을까?

(1)을 (2)에 대입한다. 그러면 X/V 항들이 소거되며, 바로 이 덕분에 V가 깔끔하게 구해진다.

$$\begin{aligned}
\left(X - \tfrac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{V}\right) &= 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V} \\
X - \tfrac{5}{4} + \frac{X - \frac{5}{4}}{V} &= 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V} \\
X - \tfrac{9}{4} &= \frac{5/2}{V}.
\end{aligned}$$

따라서

$$V = \frac{5/2}{X - \frac{9}{4}} = \frac{10}{4X - 9},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (이것이 양의 속력이 되려면 $X > \frac{9}{4}$이어야 하며, 이 점을 마지막 부분을 위해 기억해 둔다.)

그러면 (1)로부터

$$\frac{1}{v} = 1 + \frac{4X - 9}{10} = \frac{4X + 1}{10}, \qquad \text{따라서} \qquad v = \frac{10}{4X + 1}.$$

X 구하기

토끼는 채소밭을 $1+\dfrac{X}{V}$에 떠나 집까지 다시 $\dfrac{X}{V}$시간이 걸리므로, $1+\dfrac{2X}{V}$에 경주를 마친다. 이것을 $\frac{3}{2}$와 같다고 놓으면 $\dfrac{2X}{V}=\frac{1}{2}$이므로 $V=4X$이다. 그러므로

$$\begin{aligned} 4X &= \frac{10}{4X-9} \\ 16X^2-36X-10 &= 0 \\ 8X^2-18X-5 &= 0 \\ (2X-5)(4X+1) &= 0. \end{aligned}$$

근 $X=-\frac{1}{4}$는 거리로서 불가능하므로(게다가 $X>\frac{9}{4}$이어야 한다)

$$X=\tfrac{5}{2}\text{ km}.$$

이 값에서 토끼의 속력은 $V=10\,\text{km/h}$이고 거북의 속력은 $v=\frac{10}{11}\,\text{km/h}$이다.

검산

$X=\frac{5}{2}$, $V=10$, $v=\frac{10}{11}$을 이야기에 다시 넣어 보자. 거북은 $t=0.55$에 $\frac{1}{2}$ km 지점에 도착하고, $t=0.5$에 출발한 토끼는 그곳까지 0.05 h가 걸리므로 둘은 만난다. 토끼는 $t=0.75$에 채소밭에 도착하여 $t=1.25$에 떠난다. 토끼는 $t=1.375$에 채소밭에서 1.25 km 떨어진 지점(출발점에서도 1.25 km 떨어진 지점)에 도착하고, 거북은 $1.25\times 1.1=1.375$에 1.25 km 지점에 도착하므로 둘은 다시 만난다. 토끼는 $1.25+0.25=1.5$에 집에 도착한다. $X>\frac{9}{4}$인 임의의 값을 V와 v의 공식에 대입하여 경주를 다시 재현해 보아도 정확히 올바른 지점에서 만난다.

흔한 실수

- 토끼의 시각을 적을 때 토끼의 30분 낮잠 중 하나, 특히 채소밭에서의 낮잠을 빠뜨린다.
- 두 번째 만남 지점을 채소밭이 아니라 **출발점**에서 $\frac{5}{4}$ km 떨어진 곳으로 잡는다.
- 이차방정식(quadratic)의 두 근을 모두 남겨 둔다. 음의 거리는 이유를 밝혀 버려야 한다.

STEP 너머

위와 같은 거리–시간 그래프는 문장제를 직선들이 어디에서 교차하는가에 대한 문제로 바꾸어 주며, 이는 모든 역학(mechanics) 강의에서 운동학(kinematics)의 출발점이다. 여

기서는 속력의 역수(reciprocal)(페이스(*pace*))를 이용하여 방정식을 일차로 만들었다. 문제를 선형화하는 변수를 고르는 것은 응용수학 전반에 걸쳐 거듭 등장하는 기법이다. 이러한 아이디어에서 발전하는 운동에 대한 대학 1학년 수준의 내용을 보려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 1999, 문제 10

역학 • 단순 조화 운동

> **STEP I 1999, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q10

핵심 아이디어

입자는 용수철을 두 개의 용수철 AP와 PB로 나눈다. 탄성률(modulus)은 재료의 성질이므로 두 조각은 모두 전체 용수철과 같은 탄성률 λ를 갖지만, 자연 길이(natural length)는 각각 a와 b이다. 하나의 좌표, 즉 위쪽 끝에서 입자까지의 거리를 써서 각 조각에 대한 훅의 법칙(Hooke's law)을 쓰면, 운동 방정식(equation of motion)이 그 좌표에 대해 일차식이 된다. 좌표의 계수가 주기(period)를 결정하므로, 그 계수가 무엇에 의존하고 무엇에 의존하지 않는지만 살펴보면 된다.

풀이

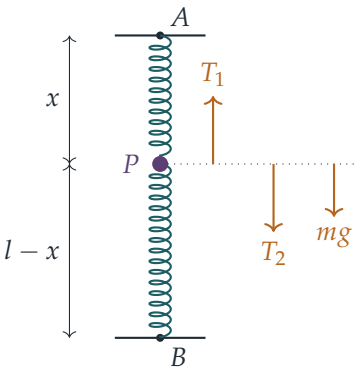
모형

입자의 질량을 m이라 하자. 용수철은 가벼우므로 각 조각 안에서는 장력(tension)이 어디서나 같고, 용수철은 늘어날 때(extension)와 압축될 때(compression) 모두 훅의 법칙을 따른다(줄이 아니라 용수철이므로 당길 뿐 아니라 밀 수도 있다). 먼저 A가 위쪽 끝이라고 하자. 시각 t에서 입자가 A 아래로 떨어진 거리를 x라 하면 $AP = x$, $PB = l - x$이다.

AP의 자연 길이는 a이고 PB의 자연 길이는 b이므로, 훅의 법칙에 의해

$$T_1 = \frac{\lambda(x-a)}{a}, \qquad T_2 = \frac{\lambda(l-x-b)}{b},$$

이다. 여기서 T_1은 AP의 장력이고 T_2는 PB의 장력이다. 장력이 양수이면 입자를 그 조각의 고정된 끝 쪽으로 당기고, 음수이면 그 조각이 압축되어 입자를 반대쪽으로 민다는 뜻이다. 어느 경우든 이 식들은 부호까지 올바른 힘을 주므로, 어느 조각이 늘어나 있는지 미리 알 필요가 전혀 없다.



단순 조화 운동

입자에 작용하는 힘을 아래 방향으로 분해하면, 무게 mg, 위쪽으로 작용하는 장력 T_1, 아래쪽으로 작용하는 장력 T_2가 있다.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{\lambda(x-a)}{a} + \frac{\lambda(l-x-b)}{b} \\ &= mg + \lambda - \frac{\lambda x}{a} + \frac{\lambda l}{b} - \frac{\lambda x}{b} - \lambda \\ &= mg + \frac{\lambda l}{b} - \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x. \end{aligned}$$

상수 $\pm\lambda$는 소거되고, 우변은 기울기가 음수인 x의 일차함수(linear function)이다. 이제

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\lambda(a+b)}{mab}, \qquad x_0 = \frac{mg + \lambda l/b}{\lambda(a+b)/(ab)} = \frac{a(mgb+\lambda l)}{\lambda(a+b)}.$$

이라 두자. 그러면 운동 방정식은

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0),$$

이 되므로, $X = x - x_0$(평형 위치(equilibrium position) x_0로부터의 변위)라 하면 $\ddot{X} = -\omega^2 X$이다. 이것은 $x = x_0$를 중심으로 하는 단순 조화 운동(simple harmonic motion)의 방정식이며, 주기는

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mab}{\lambda(a+b)}}}$$

이다. 이로써 첫 번째 결과가 증명된다.

생각해 보기 한 조각이 압축되는 순간 운동이 더 이상 단순 조화 운동이 아니게 되지 않을까?

탄성 줄이라면 그렇다. 줄의 장력 공식은 줄이 늘어나 있을 때만 성립하기 때문이다. 용수철은 압축될 때에도 같은 훅의 법칙 공식을 따르므로, (코일이 서로 맞닿지 않는 한) 위의 방정식 하나가 운동 내내 성립하며, l이나 진폭(amplitude)을 제한할 필요가 없다.

l과 방향에 대한 무관성

길이 l은 x_0에만 나타난다. l을 바꾸면 진동의 중심은 이동하지만 ω, 따라서 주기는 변하지 않는다.

반대로 B가 위쪽에 있다면, 두 조각의 역할을 바꾸어 같은 계산을 하면 된다. 이제 위쪽 조각의 자연 길이는 b이고 아래쪽 조각의 자연 길이는 a이다. 이는 모든 곳에서 a와 b를 맞바꾸는 것일 뿐이다. 주기는 ab와 $a+b$를 통해서만 a와 b에 의존하고, 이 둘은 모두 대칭이므로 주기는 변하지 않는다. (평형 위치는 달라진다. 이제는 중력이 자연 길이가 a인 조각이 아니라 b인 조각을 늘리기 때문이다.)

따라서 l의 값이 무엇이든, 어느 끝이 위쪽에 있든 주기는 $2\pi\sqrt{mab/(\lambda(a+b))}$이다.

검산

- 질량의 양쪽에 있는 두 용수철은 **병렬**(*in parallel*)로 작용한다. 강성(stiffness) λ/a와 λ/b를 더하면 위의 ω^2에서처럼 $\lambda(a+b)/(ab)$가 된다.
- 극한의 경우 $b \to \infty$: 아래쪽 조각이 매우 약해져서, 자연 길이가 a인 용수철 하나에 매달린 질량이 되고, 주기는 $2\pi\sqrt{ma/\lambda}$가 된다.
- 단위: λ는 힘이므로 ma/λ의 단위는 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$이다.
- 수치적으로, $m=1$, $\lambda=50$, $a=1$, $b=2$일 때 공식은 주기 0.72552를 준다. $l=2$, 3, 4.5에 대해(두 조각이 모두 압축되는 경우도 포함하여) 어느 끝을 위로 하든 전체 운동 방정식을 수치적으로 단계별 계산하면 유효숫자 다섯 자리까지 같은 주기를 얻으며, 상수를 무작위로 여러 번 골라도 10^{-5} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 각 조각의 탄성률로 $\lambda a/(a+b)$ 같은 값을 쓰는 것. 각 조각의 탄성률은 여전히 λ이며, 변하는 것은 강성 $\lambda/$(자연 길이)이다.
- 아래쪽 장력의 부호를 잘못 잡는 것. 늘어난 PB는 입자를 B 쪽, 즉 **아래로** 당긴다.
- 방향에 관한 부분의 논증을 빠뜨리는 것. 두 끝을 맞바꾸면 a와 b가 맞바뀌고, 주기는 이 둘에 대해 대칭이라는 것을 말해야 한다.

STEP 너머

계를 여러 용수철로 나누고 강성을 더하는 것은 연성 진동자(coupled oscillators)로 가는 첫걸음이다. 용수철을 따라 여러 개의 질량이 있으면 운동 방정식은 선형 연립방

정식을 이루고, 가능한 진동수는 어떤 행렬의 고윳값(eigenvalues)(“정규 모드(normal modes)”)으로 주어진다. 아주 작은 질량이 매우 많은 극한에서는 용수철이나 막대 속의 종파(longitudinal waves)에 대한 파동 방정식(wave equation)을 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동과 정규 모드를 다룬다.

풀이

STEP I 1999, 문제 11

역학 • 중력에 의한 원운동

STEP I 1999, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.8 절 **삼각형을 이룬 세 별**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/three-stars.html

핵심 아이디어

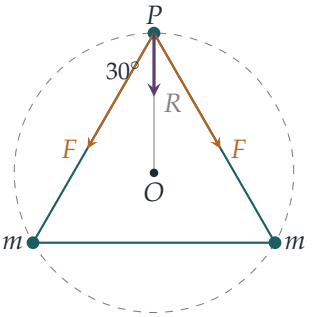
운동을 추측하고 확인해 본다. 삼각형이 중심을 축으로 강체처럼 회전한다면 각 별은 원을 그리며 움직이므로, 중심을 향하는 크기가 정확히 $m\omega^2 R$인 알짜힘(net force)이 필요하다. 대칭성에 의해 나머지 별들이 각 별에 작용하는 중력은 중심을 정확히 향한다. 따라서 그 크기를 $m\omega^2 R$과 같게 놓고 ω를 읽어 내기만 하면 된다. 중심에 별을 하나 놓으면 크기를 알고 있는 안쪽 방향의 인력이 하나 더해진다.

풀이

별들을 서로의 인력만으로 움직이는 입자로 모형화한다. O를 질량중심(centre of mass)이라 하자. 질량이 같은 세 물체의 경우 이 점은 삼각형의 무게중심(centroid)이고, 각 꼭짓점에서의 거리는

$$R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

이다.



세 개의 별

위쪽 꼭짓점에 있는 별 P를 생각하자. 나머지 두 별은 각각 크기가

$$F = \frac{\gamma m^2}{a^2},$$

인 힘으로 P를 끌어당기며, 그 방향은 삼각형의 한 변을 따른다. PO는 P에서의 60° 각을 이등분하므로, P를 지나는 각 변은 PO와 30°의 각을 이룬다. PO에 평행한 방향과 수직인 방향으로 힘을 분해(resolving)하면 다음과 같다.

- PO에 수직인 방향으로는 두 성분의 크기가 같고 방향이 반대이므로 상쇄된다.
- PO 방향으로는 합력(resultant)이 O를 향하는 $2F\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,\dfrac{\gamma m^2}{a^2}$이다.

대칭성에 의해 나머지 두 별도 같은 상황에 놓여 있다.

이제 삼각형이 O를 축으로 각속도(angular velocity) ω로 강체처럼 회전한다고 하자. 그러면 각 별은 반지름 R인 원 위를 일정한 속력 $R\omega$로 움직이므로, O를 향하는 가속도 $R\omega^2$이 필요하다. O를 향하는 방향으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

을 얻는다.

> **생각해 보기** 이것이 왜 어느 한 순간에 힘이 맞아떨어진다는 것만이 아니라 그 운동이 **가능하다**는 것을 보여 주는가?

별들을 꼭짓점에서 출발시키되, 크기가 $R\omega$이고 OP에 수직이며 모두 같은 방향으로 도는 속도를 준다. 이 배치가 O를 중심으로 하는 한 변의 길이 a인 정삼각형으로 유지되는 동안, 각 별에 작용하는 힘은 각속도 ω의 원운동에 필요한 크기와 방향을 정확히 가진다. 따라서 강체처럼 회전하는 삼각형은 모든 순간에 모든 별의 운동 방정식(equation of motion)을 만족한다. 그러므로 이것은 계의 실제 운동이다. 즉 그 초기 조건에서 따라 나오는 해이다. 전체 운동량(momentum)이 0이므로 O는 마땅히 고정된 채로 있다. 따라서 각 별은 질량중심을 축으로 각속도 $(3\gamma m/a^3)^{1/2}$로 공전할 수 있다.

중심에 네 번째 별 추가하기

질량이 λm인 별을 O에 놓자. 질량중심은 여전히 O이다. 바깥쪽 세 별은 서로 $120°$를 이루는 같은 크기의 힘으로 중심의 별을 끌어당기므로 합력은 0이다. 따라서 바깥쪽 세 별이 대칭적인 배치를 유지하는 한, 중심의 별은 O에 정지한 채로 있다.

이제 바깥쪽의 각 별에는 O를 향하는 크기가

$$\frac{\gamma(\lambda m)m}{R^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2},$$

인 인력이 추가로 작용한다. 여기서 $R^2 = a^2/3$을 썼다. 이 추가된 힘은 PO 방향으로 작용하므로 안쪽 방향의 합력에 그대로 더해진다. O를 향하는 운동 방정식은

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} + 3\lambda\,\frac{\gamma m^2}{a^2}$$

$$\omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3} + \frac{3\sqrt{3}\,\lambda\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}\left(1+\sqrt{3}\,\lambda\right).$$

이 된다. 앞에서와 같은 논증으로 이 강체 회전이 실제 운동임을 알 수 있다. 따라서 네 번째 별이 중심에 정지해 있을 때, 바깥쪽 세 별은 그 별을 축으로 각속도

$$\omega = \left(\frac{3\gamma m\,(1+\sqrt{3}\,\lambda)}{a^3}\right)^{1/2}.$$

로 공전할 수 있다.

검산

- $\lambda = 0$으로 놓으면 마땅히 처음의 답이 다시 나온다.
- 차원(dimensions): $\gamma m/r^2$은 가속도이므로 $\gamma m/a^3$의 단위는 시간$^{-2}$이고, 이는 ω^2의 단위로 알맞다.
- λ가 매우 크면 바깥쪽 별들은 서로의 인력을 거의 느끼지 못한다. 그러면 이들은 중심의 질량만을 축으로 $\omega^2 \approx \gamma\lambda m/R^3 = 3\sqrt{3}\,\gamma\lambda m/a^3$로 공전하며, 이는 지배적인 항과 일치한다.
- 전체 운동 방정식을 ($\gamma = m = a = 1$로 두고) 수치적으로 적분해 보았다. 예측한 원운동 속도에서 출발하면, $\lambda = 0, 1, 2.5$인 경우 모두 별들이 세 바퀴를 돈 뒤 상대 오차 10^{-7} 미만으로 출발 위치에 돌아왔다. 예를 들어 $\lambda = 1$이면 $\omega^2 = 3(1+\sqrt{3}) \approx 8.196$이다.

흔한 실수

- 원의 반지름이나 중심 별까지의 거리로 $R = a/\sqrt{3}$ 대신 a를 쓴다.

- 크기가 F인 두 인력이 PO와 30°를 이룬다는 것을 잊고 $2F$로 더한다.
- 중심의 별이 왜 제자리에 있는지, 즉 그 별에 작용하는 세 인력이 상쇄된다는 것을 언급하지 않는다.

STEP 너머

이것은 삼체 문제(three-body problem)에 대한 라그랑주(Lagrange)의 정삼각형 해의 특수한 경우이다. 이 해는 회전하는 정삼각형의 꼭짓점에 놓인 **임의의** 세 질량에 대해 성립한다. 같은 아이디어로 라그랑주 점(Lagrange points) L_4와 L_5를 얻는데, 이곳에서 트로이 소행성군(Trojan asteroids)이 목성과 궤도를 공유한다. 이러한 배치가 **안정**(stable)한지는 더 깊은 문제로, 회전하는 해 주위에서 운동 방정식을 선형화(linearising)하여 답할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 수준에서 중심력(central forces)과 궤도(orbits)를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1999, 문제 12

확률과 통계 • 치우친 주사위의 부등식

> **STEP I 1999, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.13 절 **조작된 주사위**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/loaded-dice.html

핵심 아이디어

첫 줄의 부등식(inequality)이 이 문제를 움직이는 엔진의 전부이다. 모든 합이 같은 확률(probability)로 나온다면, 두 "모서리" 합 2와 12는 각각 확률의 곱이 $\frac{1}{11}$이 되도록 강제하고, 그러면 합 7에는 두 교차항이 들어 있게 되는데 그 합은 $c\,(x + x^{-1})$ 꼴이 된다. 부등식에 의해 이 합은 너무 커진다. 소문항 (ii)도 모양만 다를 뿐 같은 아이디어이다. 제곱의 합은 모든 값이 같을 때 가장 작다.

풀이

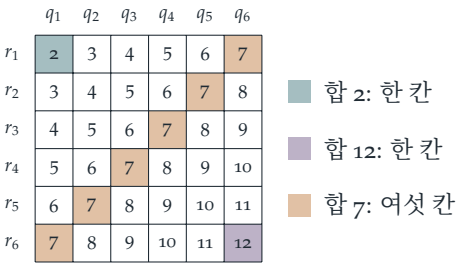
소문항 (i)

부등식. $x > 0$이면 제곱근을 취할 수 있고,

$$x + x^{-1} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

이므로 $x + x^{-1} \geq 2$이며, 등호는 $\sqrt{x} = 1/\sqrt{x}$, 즉 $x = 1$일 때만 성립한다. (같은 이야기로, $(x-1)^2 \geq 0$에 양수 x^{-1}을 곱해도 된다.)

주사위. $2 \leq s \leq 12$에 대하여 합이 s일 확률을 p_s라 하자. 두 주사위는 독립(independent)이므로, (첫째 주사위가 i, 둘째 주사위가 j)라는 쌍이 나올 확률은 $q_i r_j$이다. 아래 격자는 우리에게 필요한 합이 어떤 쌍에서 나오는지 보여 준다.



합 2는 $(1,1)$에서만, 합 12는 $(6,6)$에서만 나오므로

$$p_2 = q_1 r_1, \qquad p_{12} = q_6 r_6.$$

합 7은 $(1,6)$과 $(6,1)$을 포함한 여섯 쌍에서 나온다. 여섯 항은 모두 음이 아니므로

$$p_7 = q_1 r_6 + q_2 r_5 + \cdots + q_6 r_1 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

이제 귀류법(proof by contradiction)으로, 열한 가지 합이 모두 같은 확률로 나온다고 가정하자. 이 합들은 가능한 모든 경우를 빠짐없이 나타내므로, 각각의 확률은 $\frac{1}{11}$이다. 그러면 $q_1 r_1 = \frac{1}{11}$이고 $q_6 r_6 = \frac{1}{11}$이다. 특히 q_1, r_1, q_6, r_6 중 어느 것도 0이 아니므로 $r_1 = \dfrac{1}{11 q_1}$, $r_6 = \dfrac{1}{11 q_6}$로 쓸 수 있다. 이를 대입하면

$$\begin{aligned} p_7 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1 &= \frac{q_1}{11 q_6} + \frac{q_6}{11 q_1} = \frac{1}{11}\left(x + x^{-1}\right), \qquad \text{단, } x = \frac{q_1}{q_6} > 0, \\ &\geq \frac{2}{11} \end{aligned}$$

이고, 마지막 부등식은 방금 증명한 부등식에서 나온다. 그런데 $p_7 = \frac{1}{11} < \frac{2}{11}$이므로 모순이다. 따라서 두 주사위를 어떻게 조작하더라도 합 $2, 3, \ldots, 12$가 모두 같은 확률로 나올 수는 없다.

? **생각해 보기** q_1과 q_6이 0이 아님을 짚어 둔 것이 왜 중요했을까?

우리는 q_1과 q_6으로 나누었고, 부등식 $x + x^{-1} \geq 2$는 $x > 0$이어야 쓸 수 있다. 두 조건 모두 곱 $q_1 r_1$과 $q_6 r_6$이 각각 $\frac{1}{11} \neq 0$이라는 사실로 보장된다. 이 단계가 없으면 논증에 구멍이 생긴다. 일반적으로는 1이 절대 나오지 않는 주사위도 얼마든지 허용되기 때문이다.

소문항 (ii)

첫째 주사위를 두 번 던졌을 때 같은 수가 나오는 사건을 S라 하자. 두 번의 던지기는 독립이므로 둘 다 j가 나올 확률은 q_j^2이고, 이 여섯 사건은 서로 배반이다. 따라서

$$\mathrm{P}(S) = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2.$$

$q_j \geq 0$이고 $\sum q_j = 1$이라는 조건에서 이 값이 가장 작을 때를 구하려고 한다. 주사위가 공정한 주사위에서 얼마나 벗어나 있는지를 재는 제곱의 합을 전개하자.

$$0 \leq \sum_{j=1}^{6} \left(q_j - \tfrac{1}{6}\right)^2 = \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} q_j + 6 \cdot \tfrac{1}{36}$$
$$= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \mathrm{P}(S) - \tfrac{1}{6}.$$

따라서 $\mathrm{P}(S) \geq \frac{1}{6}$이고, 등호는 모든 $q_j = \frac{1}{6}$일 때, 즉 공정한 주사위일 때 정확히 성립한다.

생각해 보기 1/36은 어디에서 나온 값이며, 왜 함정일까?

$\frac{1}{36}$은 공정한 주사위에서 더블 식스처럼 **특정한** 한 쌍이 나올 확률이다. "두 수가 같다"는 이런 쌍 여섯 개를 포함하므로, 공정한 주사위에서는 그 확률이 $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$이고, 주사위를 조작하면 이 값은 커질 수만 있다.

따라서 답은 **아니다**이다. q_j의 값이 무엇이든 두 수가 같을 확률은 적어도 $\frac{1}{6}$이며, 이는 $\frac{1}{36}$보다 훨씬 크다.

검산

- 공정한 주사위: $p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}$이지만 $p_7 = \frac{6}{36}$이므로, 결과가 예측하는 대로 확률이 분명히 서로 다르다.
- 조작된 주사위 쌍 20,000개를 무작위로 수치 탐색했을 때, 열한 가지 합이 모두 $\frac{1}{11}$과 0.05 이내로 가까워진 경우는 한 번도 없었고, 분수를 이용한 정확한 계산으로 매번 $p_7 \geq q_1 r_6 + q_6 r_1$임을 확인했다.
- $(q_1, \ldots, q_6) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.15, 0.1)$인 주사위에 대해 $\mathrm{P}(S) = 0.195 \geq \frac{1}{6}$이다. 두 번 던지기를 200,000회 모의실험한 결과는 0.194였다.

흔한 실수

- 두 주사위가 같다고($q_i = r_i$) 가정하는 것. 문제에서는 두 주사위를 서로 다르게 조작해도 되며, 위의 논증은 두 주사위가 같을 필요가 없다.
- $p_7 = q_1 r_6 + q_6 r_1$이라고 쓰는 것. 항이 네 개 더 있다. 부등식만 있으면 되므로 그 항들은 버려도 되지만, 그 이유($q_i r_j \geq 0$)는 밝혀야 한다.
- 소문항 (ii)에서 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{36}$이라고 답하거나, "같다"가 여섯 가지 결과 중 어느 것이든 된다는 뜻임을 잊는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum q_j\right)^2$이라는 명제로, 코시–슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)의 특수한 경우이다. $\sum q_j^2$이라는 양은 **충돌 확률**(collision probability)이라 불리며, 정보 이론과 해싱(hashing) 분석에 등장한다. 소문항 (i)은 생성함수(generating function)에 관한 고전적인 결과이다. 두 주사위의 합의 확률생성함수(probability generating function)는 $Q(t)R(t)$인데, 깔끔한 다른 증명은 다음과 같다. 합이 균등하게 나온다면 $1 + t + \cdots + t^{10}$이 5차 실계수 다항식 두 개의 곱의 상수배가 되어야 하고, 각 5차 다항식은 실근을 가진다. 그런데 $1 + t + \cdots + t^{10} = (t^{11} - 1)/(t - 1)$은 실근이 없다. 이런 종류의 생성함수는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP I 1999, 문제 13

확률과 통계 • 지시변수

> **STEP I 1999, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q13

핵심 아이디어

단위의 개수를 직접 세지 말고, 대신 **틈**을 센다. 단위의 개수는 이웃한 자석이 서로 떨어져 있는 곳의 개수보다 하나 많다. 틈이 생기는지는 이웃한 두 자석이 같은 방향을 향하는지에만 달려 있고, 이 $N-1$개의 사건은 서로 독립(independent)인 공정한 동전 던지기임이 밝혀진다. 따라서 틈의 개수는 이항분포(binomial distribution)를 따르고, 기댓값(expectation)과 분산(variance)이 곧바로 나온다.

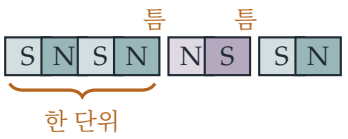
풀이

모형 세우기

"무작위로 놓는다"는 것을 각 자석이 다른 자석과 독립적으로 두 방향 중 어느 쪽이든 같은 확률로 향한다는 뜻으로 받아들인다. N극이 오른쪽에 있는 자석(SN)을 A**형**, N극이 왼쪽에 있는 자석(NS)을 B**형**이라 하자. 왼쪽부터 차례로 읽은 자석의 형을 $X_1, \ldots, X_N$이라 하자.

이웃한 두 자석을 보자. 서로 마주 보는 끝은 첫 번째 자석의 오른쪽 끝과 두 번째 자석의 왼쪽 끝이다.

- 같은 형(A 다음 A): 마주 보는 끝은 N과 S로 서로 반대이므로 **붙는다**. (B 다음 B도 S와 N으로 마찬가지이다.)
- 다른 형(A 다음 B): 마주 보는 끝은 N과 N이므로 **떨어진다**. (B 다음 A이면 S와 S가 된다.)



따라서 자석 i와 $i+1$ 사이에 틈이 생기는 것은 정확히 $X_i \neq X_{i+1}$일 때이다. $i = 1, \ldots, N-1$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$G_i = \begin{cases} 1 & \text{만약} X_i \neq X_{i+1} \text{ (틈)}, \\ 0 & \text{만약} X_i = X_{i+1} \text{ (붙음)}. \end{cases}$$

틈이 하나 생길 때마다 줄이 한 조각씩 더 나뉘므로, 분리된 단위의 개수는 다음과 같다.

$$U = 1 + G_1 + G_2 + \cdots + G_{N-1}.$$

틈의 분포

각 G_i는 확률 $\frac{1}{2}$로 1이다. X_i가 무엇이든 X_{i+1}이 그와 다를 확률은 $\frac{1}{2}$이기 때문이다.

> **생각해 보기** 사건 "i에서의 틈"과 "$i+1$에서의 틈"은 둘 다 자석 $i+1$과 관련된다. G_i들은 정말 독립인가?

이웃한 G들이 자석을 공유하는데도 독립이다. 첫 번째 자석의 형 X_1을 고정하자. 그러면 수열 $G_1, \ldots, G_{N-1}$이 $X_2, X_3, \ldots, X_N$을 하나씩 차례로 결정하고($G_i = 0$이면 X_{i+1}은 X_i와 같고, $G_i = 1$이면 다른 형이다), 거꾸로 형들이 G들을 결정한다. 따라서 X_1이 어느 값이든, 같은 확률을 갖는 $(X_2, \ldots, X_N)$의 2^{N-1}가지 선택은 가능한 2^{N-1}가지 수열 $(G_1, \ldots, G_{N-1})$과 일대일로 대응한다. 그러므로 틈의 모든 수열은 확률 $1/2^{N-1}$을 가지며, 이는 바로 G_i들이 독립이고 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 0 또는 1이라는 뜻이다.

따라서 $G_1 + \cdots + G_{N-1} \sim \mathrm{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$이다.

기댓값과 분산

$\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수의 평균은 np, 분산은 $np(1-p)$이다. $n = N-1$, $p = \frac{1}{2}$로 두고, 상수 1을 더하면 평균은 이동하지만 분산은 변하지 않는다는 점을 기억하면 다음을 얻는다.

$$\mathrm{E}(U) = 1 + \tfrac{1}{2}(N-1) = \frac{N+1}{2},$$
$$\mathrm{Var}(U) = (N-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{N-1}{4}.$$

이항분포의 결과를 그대로 인용하고 싶지 않다면 이렇게 해도 된다. $\mathrm{E}(G_i) = \frac{1}{2}$이고, $G_i^2 = G_i$이므로 $\mathrm{Var}(G_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$이다. 선형성으로 평균을 얻고, 독립성 덕분에 $N-1$개의 분산을 더할 수 있다.

검산

- $N = 1$: 자석 하나는 언제나 한 단위이고, 공식도 평균 1, 분산 0을 준다.
- $N = 2$: 두 자석은 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 1개 또는 2개의 단위를 이루므로 평균은 $\frac{3}{2}$이고 분산은 $\frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$로, 예측과 같다.
- $N \leq 12$에 대해 2^N가지 배열을 모두 정확히 열거하여 $\frac{N+1}{2}$과 $\frac{N-1}{4}$를 정확히 재현했고, $N = 20$으로 한 시뮬레이션에서는 평균 약 10.5, 분산 약 4.73을 얻었다(예측값은 10.5와 4.75).

흔한 실수

- **같은** 방향의 두 자석이 서로 밀어낸다고 생각하는 것. 두 자석은 반대 극(N과 S)으로 마주 보므로 서로 끌어당겨 붙는다.
- 독립성을 정당화하지 않고 분산을 더하는 것. 여기서 독립성은 참이지만 자명하지 않은데, 이웃한 틈들이 자석을 공유하기 때문이다.
- 틈을 $N - 1$개가 아니라 N개로 세어 $\mathrm{Var}(U) = \frac{N}{4}$로 쓰거나, 평균에서 추가되는 1을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

단위 사이의 경계를 세어 단위를 세는 방법은 **지시변수**(indicator variable)의 방법으로, 확률론에서 가장 유용한 도구 가운데 하나이다. 개수를 0–1 변수들의 합으로 쓴 다음 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용하는데, 여기에는 독립성이 전혀 필요하지 않다. 이 문제에서 U는 두 기호로 이루어진 무작위 수열의 **연**(run)의 개수를 센다. 연의 개수는 통계학에서 수열이 무작위로 보이는지 검사하는 Wald–Wolfowitz 연 검정(runs test)의 바탕이 된다. 지시변수와 그 분산에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 보라.

풀이

STEP I 1999, 문제 14

확률과 통계 • 조건부 확률

> **STEP I 1999, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q14

핵심 아이디어

연속확률변수(continuous random variable)는 이산(discrete) 확률변수를 만들기 위한 장치일 뿐이다. 밀도함수(density)를 4, 3, 2, 1점을 얻을 네 확률로 바꾸고 나면, 소문항 (i)은 한 줄짜리 기댓값(expectation) 계산이다. 소문항 (ii)는 조건부확률(conditional probability) 문제인데, 합계가 정확히 3이 되어야 하므로 이기는 경우가 매우 적어서 모두 나열할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$0 \le a \le b \le 1$에 대하여

$$\mathrm{P}(a \le X < b) = \int_a^b 2x \,\mathrm{d}x = b^2 - a^2.$$

(연속확률변수에서는 끝점을 포함하든 제외하든 차이가 없다.) 다트 한 번으로 얻는 점수를 S라 하자. 그러면

$$\mathrm{P}(S=4) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - 0 = \tfrac{1}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=3) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{3}{16},$$

$$\mathrm{P}(S=2) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=1) = 1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{16}.$$

이 확률들의 합은 마땅히 그래야 하듯 1이다. 바깥쪽 고리일수록 확률이 더 크다는 점에 주목하자. 중심에서 먼 곳일수록 넓이가 더 넓기 때문에 밀도 $2x$가 x와 함께 커진다.

따라서

$$\mathrm{E}(S) = 4\cdot\tfrac{1}{16} + 3\cdot\tfrac{3}{16} + 2\cdot\tfrac{5}{16} + 1\cdot\tfrac{7}{16} = \frac{4+9+10+7}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

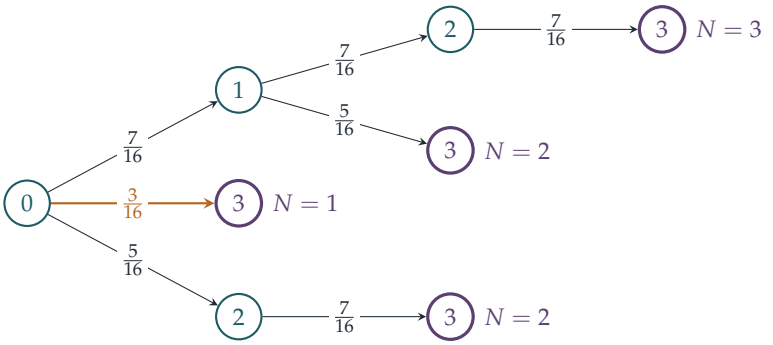
각 던지기는 독립(independent)이고, 모두 위의 S와 같은 분포를 따른다고 가정한다. 내가 이기는 사건을 W, 게임에서 던지는 횟수를 N이라 하자.

> **?** **생각해 보기** 어떤 점수의 나열이 승리로 이어지는가?

누적 합계가 먼저 넘어서는 일 없이 3에 도달할 때, 그리고 오직 그때만 내가 이긴다. 모든 점수는 적어도 1이므로 합계는 매번 적어도 1씩 늘어나고, 게임은 많아야 세 번 던지면 끝난다. 이기는 게임은 합이 정확히 3이 되는 양의 점수들의 나열이다. (합계가 3보다 작을 때만 다시 던지므로, 이러한 나열은 모두 실제로 하나의 완결된 게임이다.) 그런 나열은 다음 네 가지뿐이다.

$$(3), \qquad (1,2), \qquad (2,1), \qquad (1,1,1).$$

점수 4는 단번에 합계가 3을 넘어서게 하므로 결코 나타나지 않는다.



이 나무 그림은 승리로 끝나는(보라색 원으로 표시) 각 경로를 따라 누적 합계를 보여 주며, 각 던지기의 확률을 함께 적어 두었다.

독립성에 의해 각 나열의 확률은 그 점수들의 확률의 곱이다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(W \cap N = 1) &= \mathrm{P}(3) = \tfrac{3}{16} = \tfrac{768}{4096}, \\
\mathrm{P}(W \cap N = 2) &= \mathrm{P}(1,2) + \mathrm{P}(2,1) = 2 \cdot \tfrac{7}{16} \cdot \tfrac{5}{16} = \tfrac{70}{256} = \tfrac{1120}{4096}, \\
\mathrm{P}(W \cap N = 3) &= \mathrm{P}(1,1,1) = \left(\tfrac{7}{16}\right)^3 = \tfrac{343}{4096}.
\end{aligned}$$

이 세 사건은 서로 배반(disjoint)이고 합치면 W가 되므로

$$\mathrm{P}(W) = \frac{768 + 1120 + 343}{4096} = \frac{2231}{4096}.$$

그러므로

$$\mathrm{P}(N = 3 \mid W) = \frac{\mathrm{P}(W \cap N = 3)}{\mathrm{P}(W)} = \frac{343/4096}{2231/4096} = \frac{343}{2231},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

검산

- 네 점수의 확률 $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{16}$의 합은 1이다. 이들이 분모가 16인 홀수 분자의 분수인 것은 $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$이기 때문이다.
- 목표값 $343 = 7^3$을 보면 세 번 던져 이기는 경우가 $(1,1,1)$이어야 함을 곧바로 알 수 있으며, 이는 설정이 맞음을 확인해 준다.
- 10^6번의 게임을 컴퓨터 모의실험(simulation)으로 돌린 결과 $\mathrm{P}(W) \approx 0.5452$(정확한 값 0.5447), $\mathrm{P}(N = 3 \mid W) \approx 0.1535$(정확한 값 $343/2231 \approx 0.1537$)를 얻었다.

흔한 실수

- 점수 구간들의 확률이 모두 같다고 보는 것. 확률은 구간의 폭이 아니라 밀도함수를 적분해서 얻는다.
- $(1,2)$는 세고 $(2,1)$을 빠뜨리는 것. 이렇게 하면 $\mathrm{P}(W) = \frac{1671}{4096}$이 나온다.
- $\mathrm{P}(W)$로 나누지 않고 $\mathrm{P}(N = 3 \text{ 이고} W) = \frac{343}{4096}$을 답으로 쓰는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 작은 마르코프 연쇄(Markov chain)이다. 상태는 누적 합계이고, 3과 "초과(bust)"는 흡수 상태(absorbing state)이다. 목표값이 더 커지면 경로를 일일이 나열하는 것은 더 이상 실용적이지 않다. 대신 합계 t에서 출발하여 이길 확률을 w_t라 쓰면 점화식(recurrence) $w_t = \sum_s \mathrm{P}(S = s)\, w_{t+s}$를 얻는다. 이러한 첫걸음 분석(first-step analysis)은 대학 1학년 확률론의 핵심 도구이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 무작위 행보(random walk)와 마르코프 연쇄를 다루는 부분에서 이를 설명한다.

풀이

STEP II 1999, 문제 1

순수수학 • 큰 수의 비교

STEP II 1999, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s2-q1

핵심 아이디어

이 수들은 직접 비교하기에는 너무나 크고, 그 로그(logarithm)조차도 여전히 너무 크다. 실마리는 $\log_{10}$을 **두 번** 취하는 것이다. x, y, z가 각각 10의 거듭제곱이므로, 이중 로그는 모두 100, x, y의 짧은 합이 되고, 이들은 쉽게 비교할 수 있다. $\log_{10}$은 증가함수(increasing function)이므로, 이중 로그를 비교하면 원래 수들을 비교한 것이 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\log_{10}$을 log로 쓰고,

$$L(a) = \log(\log a)$$

로 둔다. 함수 $t \mapsto \log t$는 순증가(strictly increasing)하므로, 수 $a, b > 10$에 대하여 (이때 $\log a, \log b > 1 > 0$이다) $a < b$일 필요충분조건은 $L(a) < L(b)$이다. 사용할 기본 사실은 다음과 같다.

$$\log x = 100, \qquad \log y = x = 10^{100}, \qquad \log z = y = 10^{x}.$$

소문항 (i)

$n = x$일 때 스털링(Stirling) 근사의 양변에 $\log_{10}$을 취하면

$$\begin{aligned}\log a_1 &\approx \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x\log \mathrm{e} \\ &= 100x - x\log \mathrm{e} + 50 + \log\sqrt{2\pi} \\ &= x\,(100 - \log \mathrm{e}) + 50.4\ldots.\end{aligned}$$

이다. 이제 $\log \mathrm{e} \approx 0.434$이고, 상수 $50.4\ldots$는 $x = 10^{100}$에 비하면 완전히 무시할 수 있다. 따라서

$$\log a_1 \approx 99.566 \times 10^{100}, \qquad L(a_1) \approx 100 + \log 99.566 \approx 100 + 1.998 = 101.998\ldots \approx 102,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

각 수에 대하여 $\log a_i$를 구하고, 이어서 $L(a_i)$를 구한다.

- $a_2 = x^y$: $\log a_2 = y \log x = 100y$이므로 $L(a_2) = 2 + \log y = x + 2$이다.
- $a_3 = y^x$: $\log a_3 = x \log y = x^2 = 10^{200}$이므로 $L(a_3) = 200$이다.
- $a_4 = z^x$: $\log a_4 = x \log z = xy$이므로 $L(a_4) = \log x + \log y = x + 100$이다.
- $a_5 = \mathrm{e}^{xyz}$: $\log a_5 = xyz \log \mathrm{e}$이므로

  $$L(a_5) = 100 + x + y + \log(\log \mathrm{e}) \approx y + x + 99.64,$$

  이다. 여기서 $\log(\log \mathrm{e}) = \log 0.434\ldots \approx -0.36$이기 때문이다.
- $a_6 = z^{1/y}$: $\log a_6 = \frac{1}{y} \log z = 1$이므로 정확히 $a_6 = 10$이다.
- $a_7 = y^{z/x}$: $\log a_7 = \frac{z}{x} \log y = \frac{z}{x} \cdot x = z$이므로 $L(a_7) = \log z = y$이다.

소문항 (i)에서 얻은 $L(a_1) \approx 102$와 함께 이중 로그를 나열하면 다음과 같다.

$$\underbrace{0}_{a_6},\ \underbrace{102}_{a_1},\ \underbrace{200}_{a_3},\ \underbrace{x+2}_{a_2},\ \underbrace{x+100}_{a_4},\ \underbrace{y}_{a_7},\ \underbrace{y+x+99.6}_{a_5}.$$

? **생각해 보기** 소문항 (i)은 a_1의 근삿값만 준다. 그것으로 순서를 정하기에 충분할까?

충분하며, 스털링 근사조차 필요하지 않다. $x!$의 x개의 인수는 각각 x 이하이므로 $x! \le x^x$이고 $\log a_1 \le x \log x = 10^{102}$이다. 따라서 $L(a_1) \le 102 < 200 = L(a_3)$이다. 또 $a_1 = x! > 10 = a_6$임은 자명하다. 그러므로 엄밀하게 $a_6 < a_1 < a_3$이다.

이제 나머지 비교를 하나씩 정당화한다.

- $a_3 < a_2$: $200 < 10^{100} + 2$이다.
- $a_2 < a_4$: $x + 2 < x + 100$이다.
- $a_4 < a_7$: $x + 100 < y = 10^x$임을 보여야 한다. 이는 엄청난 차이로 성립하는데, 모든 $t \ge 3$에 대하여 $10^t > t + 100$이고 여기서 $t = x = 10^{100}$이기 때문이다.

- $a_7 < a_5$: $x + 99.6 > 0$이므로 $y < y + x + 99.6$이다. (직접 보이면: $\log a_5 = z \cdot xy \log \mathrm{e}$이고 $xy \log \mathrm{e} > 1$이므로 $\log a_5 > z = \log a_7$이다.)

a_6을 제외한 모든 수는 10보다 크므로 L의 단조성(monotonicity)을 적용할 수 있고, 크기 순서는 다음과 같다.

$$a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5.$$

검산

소문항 (i)에 대해서는 $n = 10^2, 10^3, 10^5, 10^8$일 때 스털링 공식을 (로그 감마 함수(log-gamma function)로 구한) 정확한 $\log_{10} n!$과 비교하였다. a_1에 대한 이중 로그 공식은 10^{-6} 이내로 일치하며, $n = 10^{100}$일 때는 101.998을 준다. 소문항 (ii)에 대해서는 $k = 2, 3, 4$에 대하여 $x = 10^k$로 두고 전체 계산을 반복하였는데, 이 경우 $y = 10^x$를 정수로 정확히 다룰 수 있다. 매번 같은 순서 $a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5$가 나오므로, 이 결과는 100이라는 수의 크기에 좌우되지 않는다.

흔한 실수

- 로그를 한 번만 취해 비교하다가 길을 잃는 것: $\log a_7 = z$와 $\log a_4 = xy$는 여전히 눈으로 비교하기에는 너무 크다. 로그를 한 번 더 취하라.
- e^{xyz}를 밑 10으로 바꿀 때 인수 $\log \mathrm{e}$를 빠뜨리는 것. 여기서는 거의 영향이 없지만, $L(a_5)$를 약 0.36만큼 바꾸기는 한다.
- a_6이 단순히 10으로, 모든 수 가운데 가장 작다는 것을 놓치는 것.

STEP 너머

반복 로그(iterated logarithm)와 지수 탑(tower of exponents)은 해석학과 컴퓨터 과학에서 증가 속도를 재는 도구이다. 예를 들어 반복 로그 $\log^* n$은 몇몇 알고리즘의 실행 시간에 나타나며, "탑" 함수는 램지 이론(Ramsey theory)의 결과들을 위에서 누른다. 스털링 공식 자체는 점근 급수(asymptotic series)의 첫째 항이며, 이를 꼼꼼히 증명하는 것은 대학 1학년 해석학의 고전적인 연습 문제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 여기에 쓰이는 극한과 부등식에 익숙해지기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 1999, 문제 2

순수수학 • 이차식의 판별식

> **STEP II 1999, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q2

핵심 아이디어

모든 것은 $(*)$의 판별식(discriminant)에 달려 있다. x의 계수에 인수 2가 들어 있으므로 판별식의 4분의 1인 $\frac{1}{4}(b^2 - 4ac)$가 특히 깔끔한 꼴이 되며, 이것은 n에 대한 이차식(quadratic)으로 나타난다. 따라서 각 소문항은 이번에는 n을 변수로 하는 **두 번째** 이차식의 부호에 관한 문제가 된다.

풀이

풀이 전체에서 $pn^2 + q \geq 0$이라고 가정한다. 그러면 제곱근이 실수가 되고 $(*)$는 실수 계수를 갖는 보통의 이차방정식이 된다. (이 조건은 $q > 0$ 또는 $q \geq 0$인 소문항 (i)과 (iii)에서는 저절로 성립한다.) $a = n$, $b = 2\sqrt{pn^2 + q}$, $c = rn + s$라 하면, 이 방정식이 실근(real root)을 가질 필요충분조건은 $b^2 - 4ac \geq 0$, 즉 $\frac{1}{4}b^2 - ac \geq 0$이다. 이제

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}b^2 - ac &= (pn^2 + q) - n(rn + s) \\ &= (p - r)n^2 - sn + q. \end{aligned}$$

$f(n) = (p - r)n^2 - sn + q$라 하자. 그러면

$$(*)\text{는 실근을 갖지 않는다} \iff f(n) < 0.$$

소문항 (i)

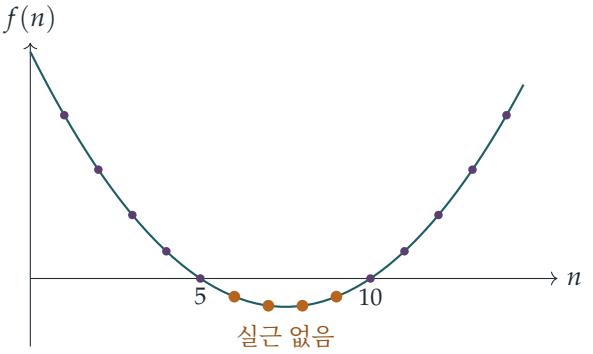
여기서는 $p - r = 1$이므로

$$f(n) = n^2 - 15n + 50 = (n - 5)(n - 10).$$

이것은 정확히 $5 < n < 10$일 때 음수이다. n은 양의 정수이므로, $(*)$가 실근을 갖지 않는 것은 정확히

$$n \in \{6, 7, 8, 9\}.$$

일 때이다. $n = 5$와 $n = 10$에서는 $f(n) = 0$이므로 실수인 중근(repeated root)이 존재하고, 따라서 이 값들은 제외된다.



소문항 (ii)

이제 $p < r$이므로 f의 최고차항의 계수(leading coefficient) $p - r$는 음수이다. f를 실수 변수 t에 대한 이차식으로 생각하자.

$$f(t) = (p - r)t^2 - st + q.$$

이 식의 판별식은

$$s^2 - 4(p - r)q,$$

이고, 가정 $4q(p - r) > s^2$에 의해 이것은 음수이다.

> **생각해 보기** f의 판별식이 음수라는 사실이 왜 $f(n)$의 부호에 대해 무언가를 알려주는가?

판별식이 음수인 이차식은 실수 영점을 갖지 않으므로, 그 그래프는 축과 만나지 않고 모든 실수 t에 대해 한 가지 부호를 유지한다. 최고차항의 계수가 음수이면 그래프는 위로 볼록한 포물선이므로 그 부호는 음이다. 구체적으로 완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$f(t) = (p - r)\left(t - \frac{s}{2(p - r)}\right)^2 + \frac{4q(p - r) - s^2}{4(p - r)},$$

이고 두 항은 모두 음수이거나 0이다. 첫째 항은 $p - r < 0$이기 때문이고, 둘째 항은 분자가 양수이고 분모가 음수이기 때문이다. 둘째 항은 엄격하게 음수이므로 모든 실수 t에 대해 $f(t) < 0$이다.

특히 모든 양의 정수 n에 대해 $f(n) < 0$이므로, 어떤 n의 값에 대해서도 $(*)$는 실근을 갖지 않는다. 이로써 증명이 끝난다.

가정으로부터 $q < 0$이 강제된다는 점에 주의하자. $p - r < 0$이고 $4q(p-r) > s^2 \geq 0$이므로 q는 음수여야 한다. 따라서 작은 n에 대해서는 $pn^2 + q$가 실제로 음수가 될 수 있고, 제곱근이 실수라는 우리의 기본 가정이 여기서 중요해진다. (허수 계수를 허용한다면 $x = 0$이 근이 될 수 있다. $p = 1, r = 2, s = -2, q = -10, n = 1$로 확인해 보라.)

소문항 (iii)

이제 $n = 1, p - r = 1, q = s^2/8 \geq 0$이므로 $p + q > 0$이고 계수들은 실수이다. 여기서

$$f(1) = 1 - s + \frac{s^2}{8} = \frac{s^2 - 8s + 8}{8}.$$

실근이 존재할 필요충분조건은 $f(1) \geq 0$, 즉

$$s^2 - 8s + 8 \geq 0.$$

이다. $s^2 - 8s + 8 = 0$의 근은

$$s = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2},$$

이므로 $s^2 - 8s + 8 = \left(s - (4 - 2\sqrt{2})\right)\left(s - (4 + 2\sqrt{2})\right)$이다. 이 곱은 정확히 s가 두 근 사이의 열린구간 밖에 있을 때 음이 아니다. 따라서 $(*)$가 실근을 가질 필요충분조건은

$$s \leq 4 - 2\sqrt{2} \quad \text{또는} \quad s \geq 4 + 2\sqrt{2},$$

이고, 이로써 증명이 끝난다. 모든 단계가 거꾸로도 성립하며, 바로 이 점이 "필요충분조건"의 양쪽 방향을 모두 보장해 준다. 두 끝점에서는 근이 중근이 된다.

검산

- (i)에서 $n = 7$로 놓으면 $\frac{1}{4}b^2 = 3 \cdot 49 + 50 = 197$이고 $ac = 7 \cdot 29 = 203$이므로 $\frac{1}{4}b^2 - ac = -6 < 0$이다. $n = 11$로 놓으면 $413 - 11 \cdot 37 = 6 > 0$이다.
- (iii)에서 $4 - 2\sqrt{2} \approx 1.1716$이고 $4 + 2\sqrt{2} \approx 6.8284$이다. $s = 4$이면 $f(1) = 1 - 4 + 2 = -1 < 0$이 되어, 예상대로 두 값 사이의 구간 안에 있다.
- 컴퓨터로 (i)에 대해 n을 1부터 199까지 조사하고, (ii)의 무작위 사례 약 5백만 개를 시험하고, (iii)에 대해 s의 무작위 값 10^5개를 시험했다. 모두 위의 결과와 일치했다.

흔한 실수

- (i)에서 $n = 5$와 $n = 10$을 포함하는 것. 이때 판별식은 0이므로 실수인 (중)근이 존재한다.
- (ii)에서 큰 n에 대해서만 $f(n) < 0$임을 확인하는 것. 판별식 조건의 핵심은 작은 n을 포함하여 **모든 곳에서** f가 음수라는 것이다.
- x의 계수에 있는 인수 2를 잊어서 판별식에서 $4(pn^2 + q)$를 엉뚱한 자리에 두는 것.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 매개변수를 새로운 변수로 보고 그에 대한 이차식의 부호를 묻는 것은 다항식(polynomial)의 근이 계수에 어떻게 의존하는지를 연구하는 출발점이다. 대학에서는 이것이 고차 다항식의 판별식으로 이어지고, 이차형식(quadratic form) $at^2 + bt + c$가 음의 정부호(negative definite)일 필요충분조건이 $a < 0$이고 $b^2 < 4ac$라는 생각으로 이어진다. 바로 이 판정법을 두 변수로 확장하면 다변수 함수의 정류점(stationary point)을 분류할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 세심한 판별식 논증에 바탕을 둔 STEP 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP II 1999, 문제 3

순수수학 • 수학적 귀납법

> **STEP II 1999, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q3

핵심 아이디어

e^{-x^3}을 처음부터 거듭 미분하지 않는다. 대신 n계 도함수를 $\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x)$로 쓰고 그것을 한 번 더 미분한다. 그러면 S_{n+1}을 S_n과 S_n'으로 나타내는 점화식(recurrence)이 얻어지고, 문제의 모든 부분이 이 하나의 관계식에서 나온다. 구체적인 다항식, 귀납법, 차수와 최고차항의 계수, 그리고 마지막 부등식까지 모두 그렇다.

풀이

점화식

정의에 따라

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^3}\right) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n(x).$$

곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(\mathrm{e}^{-x^3}\right) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n'(x) - 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x),$$

이고, 양변에 e^{x^3}을 곱하면

$$\boxed{S_{n+1}(x) = S_n'(x) - 3x^2S_n(x).}$$

을 얻는다. 이 식은 모든 $n \geq 0$에 대해 성립하며, 여기서 $S_0(x) = 1$이다(0계 도함수는 함수 자신이다).

S_2와 S_3

$S_0 = 1$에서 점화식을 쓰면 $S_1 = 0 - 3x^2 = -3x^2$이고, 이는 직접 계산해도 알 수 있다. 그러면

$$S_2 = S_1' - 3x^2 S_1 = -6x - 3x^2(-3x^2) = 9x^4 - 6x,$$

이므로 요구된 결과가 나온다. 점화식을 다시 적용하면

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2' - 3x^2 S_2 = (36x^3 - 6) - 3x^2(9x^4 - 6x) \\ &= 36x^3 - 6 - 27x^6 + 18x^3, \end{aligned}$$

이므로

$$S_3(x) = -27x^6 + 54x^3 - 6.$$

귀납법

더 강한 명제를 증명한다. 추가 비용이 들지 않으면서 다음 질문에도 답이 되기 때문이다.

$P(n)$: $S_n(x)$는 차수(*degree*)가 $2n$이고 최고차항의 계수(*leading coefficient*)가 $(-3)^n$인 다항식(*polynomial*)이다.

기저 단계. $S_1(x) = -3x^2$는 차수가 2이고 최고차항의 계수가 $-3 = (-3)^1$이므로 $P(1)$이 성립한다. ($S_0 = 1$이므로 $P(0)$도 성립한다.)

귀납 단계. $P(k)$가 성립한다고 가정하면

$$S_k(x) = (-3)^k x^{2k} + (\text{차수가 다음보다 작은 항들: } 2k).$$

다항식의 도함수는 다항식이고 $3x^2 S_k$도 다항식이므로, $S_{k+1} = S_k' - 3x^2 S_k$는 다항식이다. 그 차수를 알기 위해 두 부분을 따로 살펴본다.

- S_k'의 차수는 많아야 $2k - 1$이다.
- $-3x^2 S_k(x) = -3(-3)^k x^{2k+2} + (\text{낮은 차수의 항}) = (-3)^{k+1} x^{2k+2} + \cdots$.

> **생각해 보기** S_k'이 $-3x^2 S_k$의 최고차항을 상쇄할 수 있을까?

그럴 수 없다. S_k'의 차수는 많아야 $2k - 1$로 $2k + 2$보다 한참 작으므로 x^{2k+2} 항에 영향을 줄 수 없다. 따라서 S_{k+1}의 차수는 정확히 $2k + 2 = 2(k + 1)$이고, 최고차항의 계수는 $(-3)^{k+1}$(0이 아님)이다. 이것이 바로 $P(k + 1)$이다.

수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 $n \geq 1$에 대해 $P(n)$이 성립한다. 따라서 $S_n(x)$는 차수가 $2n$인 다항식이고, x^{2n}의 계수는 $(-3)^n$이다. 이는 $S_2(9 = (-3)^2$, 차수 4)와 $S_3(-27 = (-3)^3$, 차수 6)과도 일치한다.

마지막 부분

$S_n'(a) = 0$이라 하자. 점화식에 $x = a$를 대입하면 도함수 항이 사라진다.

$$S_{n+1}(a) = S_n'(a) - 3a^2 S_n(a) = -3a^2 S_n(a).$$

따라서

$$S_n(a)\, S_{n+1}(a) = -3a^2 \big(S_n(a)\big)^2 \le 0,$$

이다. $a^2 \ge 0$이고 $\big(S_n(a)\big)^2 \ge 0$이기 때문이다. 등호는 $a = 0$ 또는 $S_n(a) = 0$일 때에만 성립한다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- 최고차항: S_3는 $(-3)^3 x^6 = -27x^6$으로 시작해야 하고, 실제로 그렇다.
- S_3의 상수항: $x = 0$ 근처에서 $\mathrm{e}^{-x^3} = 1 - x^3 + \cdots$이므로 0에서의 3계 도함수는 $-3! = -6$이다. 이는 $S_3(0) = -6$과 일치한다.
- 정류점(stationary point): $S_3'(x) = -162x^5 + 162x^2$는 $x = 1$에서 0이 된다. 이때 $S_3(1) = 21$이고 $S_4(1) = -3 \cdot 21 = -63$이므로 곱은 $-1323 \le 0$이다.
- 또한 서른 개의 무작위 유리수 점 a에서 $\mathrm{e}^{-(a+h)^3}$의 정확한 테일러 급수(Taylor series)와 $S_0, \ldots, S_9$를 대조했고, $[-4, 4]$에 있는 $S_1, \ldots, S_8$의 모든 정류점에서 부등식을 확인했다.

흔한 실수

- 차수가 왜 **정확히** $2n + 2$인지 설명하지 않는 것. 최고차항의 계수가 0이 아니고 S_k'이 그것을 상쇄할 수 없다는 점이 필요하며, 그래서 귀납 가정에 최고차항의 계수를 함께 넣어 두는 것이 유리하다.
- "S_n은 다항식이다"만 증명하고 차수는 패턴에서 추측하는 것. 문제는 차수를 귀납 논증 자체에서 얻어 내라고 요구한다.

STEP 너머

여기 나온 다항식들은 에르미트(Hermite) 다항식의 사촌뻘로, 에르미트 다항식은 e^{-x^2}에 같은 기법을 적용하여 정의된다("로드리게스 공식(Rodrigues formula)"). 이 다항식들은 우리 것과 비슷한 점화식을 만족하며, 확률론과 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)에서 등장한다. 마지막 부등식은 이런 점화식이 다항식족 전체의 영점과 극점(turning points)이 어디에 놓이는지를 어떻게 제어하는지 처음으로 엿보게 해 준다.

Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서는 급수해를 다루는 장에서 에르미트 방정식을 만난다.

풀이

STEP II 1999, 문제 4

순수수학 • 이항계수 항등식

> **STEP II 1999, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q4

핵심 아이디어

두 다항식(polynomial)이 항등적으로 같으면, x의 각 거듭제곱의 계수(coefficient)가 서로 같다. 그래서 x^n의 계수가 우리가 원하는 합이 되도록 두 이항전개(binomial expansion)의 곱을 고른 다음, 같은 계수를 그 곱의 더 간단한 형태로부터 계산한다. 실제로 선택해야 할 것은 어떤 두 인수를 곱할지뿐이다. 한 인수에서 x를 $-x$로 바꾸면 (i)에 필요한 부호가 생기고, 한 인수를 미분(differentiation)하면 (ii)에 필요한 추가 인수 t가 생긴다.

풀이

첫 번째 결과

이항정리(binomial theorem)에 의해

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r.$$

이 식 두 개를 서로 곱한다. x^n 항은 $0 \le s \le n$인 어떤 s에 대하여 첫 번째 괄호에서 x^s를, 두 번째 괄호에서 x^{n-s}를 택하여 얻어진다. 따라서 $(1+x)^n(1+x)^n$에서 x^n의 계수는

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2,$$

이다. 여기서 계승 공식으로부터 분명한 대칭성(symmetry) $\binom{n}{n-s} = \binom{n}{s}$를 사용하였다. 항등식(identity)의 다른 쪽에서, $(1+x)^{2n}$의 x^n의 계수는 $\binom{2n}{n}$이다. 두 다항식은 항등적으로 같으므로 x^n의 계수도 같다.

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2 = \binom{2n}{n}.$$

소문항 (i)

부호가 번갈아 나타나야 하므로, 첫 번째 인수를 $(1-x)^n = \sum_r \binom{n}{r}(-1)^r x^r$로 바꾸고 항등식

$$(1-x)^n(1+x)^n \equiv (1-x^2)^n.$$

을 사용한다. 앞에서와 마찬가지로 좌변의 x^n 항은 첫 번째 괄호의 x^s와 두 번째 괄호의 x^{n-s}에서 나오므로, x^n의 계수는

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2.$$

이다. 우변의

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

는 x의 짝수 거듭제곱만 포함한다. n이 짝수이므로 x^n은 실제로 나타나는데, 바로 $2k=n$, 즉 $k=n/2$일 때이고, 그 계수는 $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$이다. 계수를 비교하면

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2 = (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (같은 논증으로 n이 홀수일 때는 합이 0임을 알 수 있다. 그 때는 $(1-x^2)^n$에 x^n 항이 없기 때문이다.)

소문항 (ii)

? **생각해 보기** $\binom{n}{t}$ 옆에 인수 t가 나타나게 하려면 어떻게 해야 할까?

미분을 하면 된다. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^t = t\,x^{t-1}$이기 때문이다. 이항전개를 미분하면

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}x^{t-1}.$$

을 얻는다. 이제 여기에 $(1+x)^n = \sum_u \binom{n}{u}x^u$를 곱하고 항등식

$$n(1+x)^{n-1}(1+x)^n \equiv n(1+x)^{2n-1}.$$

을 사용한다. 좌변에서 x^{n-1} 항은 첫 번째 괄호의 $t\binom{n}{t}x^{t-1}$과 두 번째 괄호의 $\binom{n}{n-t}x^{n-t}$의 곱에서 나오므로, x^{n-1}의 계수는

$$\sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}\binom{n}{n-t} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}^2.$$

이다. 우변에서 $n(1+x)^{2n-1}$의 x^{n-1}의 계수는 $n\binom{2n-1}{n-1}$이다. 마지막으로

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = 2\binom{2n-1}{n-1},$$

이므로, 계수를 비교하고 두 배 하면

$$\sum_{t=1}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = 2n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n}{n}.$$

다른 방법: 깔끔한 대칭성 논증이 있다. t를 $n-t$로 바꾸고 $\binom{n}{n-t} = \binom{n}{t}$를 사용하면 $\sum_{t=0}^{n} t\binom{n}{t}^2 = \sum_{t=0}^{n}(n-t)\binom{n}{t}^2$임을 알 수 있다. 같은 합에 대한 이 두 표현을 더하면, 첫 번째 결과에 의해

$$\sum_{t=0}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = n\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}^2 = n\binom{2n}{n}$$

을 얻고, $t=0$인 항은 0이다.

검산

$n=4$를 택하면 파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)의 해당 행은 $1,4,6,4,1$이다. 그러면 $1+16+36+16+1 = 70 = \binom{8}{4}$이고, 부호가 번갈아 나타나는 합은 $1-16+36-16+1 = 6 = (-1)^2\binom{4}{2}$이며, $2(1\cdot 16 + 2\cdot 36 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1) = 280 = 4\times 70$이다. 또한 세 항등식 모두 39 이하의 모든 n에 대하여 정확히 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 우변에는 짝수 거듭제곱만 있으므로, 바로 n이 짝수라는 사실 덕분에 x^n이 나타난다는 점을 잊는 것.
- 소문항 (ii)에서 엉뚱한 거듭제곱을 비교하는 것: 미분한 뒤에는 지수가 하나씩 줄어들므로 x^n이 아니라 x^{n-1}을 보아야 한다.

STEP 너머

첫 번째 항등식은 방데르몽드 항등식(Vandermonde's identity) $\sum_s \binom{m}{s}\binom{n}{k-s} = \binom{m+n}{k}$의 특수한 경우이며, 이 항등식에는 세기를 이용한 증명도 있다. 여자 m명과 남자 n명 중에서 k명을 뽑을 때, 여자를 몇 명 뽑을지 먼저 정하는 것이다. 다항식을 수열을 기록하는 장치로 사용하는 것이 바로 **생성함수**(*generating functions*)의 방법이며, 이는 조합론(combinatorics)과 확률론(probability)의 핵심 도구이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 책 전체에서 생성함수를 사용하며, Siklos의

Advanced Problems in Mathematics(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 1999, 문제 5

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 1999, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q5

핵심 아이디어

자연스러운 풀이 방법은 두 가지이다. 하나는 $\cos\alpha$를 미지수로 삼는 것이다. $\sin\alpha$를 한쪽으로 모으고 양변을 제곱한 뒤 $\sin^2+\cos^2=1$을 이용하면 $\cos\alpha$에 대한 이차방정식(quadratic)을 얻는다. 다른 하나는 $5\cos x+12\sin x$를 하나의 코사인 $13\cos(x-\beta)$로 나타내는 것인데, 이 방법을 쓰면 이차방정식의 두 근이 모두 실제로 나타난다는 것도 알 수 있다. 마지막 부분에서 $\alpha<\frac{3}{4}\pi$는 $\cos\alpha$에 대한 명제가 된다. 코사인은 $[0,\pi]$에서 감소(decreasing)하기 때문이다. 결국 문제는 근호가 포함된 두 수(surd)를 비교하는 것으로 귀결된다.

풀이

$\cos\alpha$의 두 값

$c=\cos\alpha$라 하자. 주어진 방정식에서 $12\sin\alpha=7-5c$이다. 양변을 제곱하고 $\sin^2\alpha=1-c^2$을 이용하면

$$144(1-c^2)=49-70c+25c^2,$$
$$169c^2-70c-95=0.$$

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$c=\frac{70\pm\sqrt{70^2+4\cdot169\cdot95}}{2\cdot169}=\frac{70\pm\sqrt{69120}}{338}.$$

$69120=576\times120=24^2\times120$이므로 $\sqrt{69120}=24\sqrt{120}$이다. 따라서

$$\cos\alpha=\frac{35-12\sqrt{120}}{169}\qquad\text{또는}\qquad\cos\alpha=\frac{35+12\sqrt{120}}{169},$$

이것이 구하는 결과이며, 다른 값은 $\dfrac{35+12\sqrt{120}}{169}$이다.

> **생각해 보기** 제곱을 하면 거짓 해가 생길 수 있다. 두 값이 모두 실제로 원래 방정식의 해에서 나오는가?

그렇다. 하나의 코사인으로 나타낸 꼴을 보면 그 이유를 알 수 있다. $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$인 예각(acute angle)을 β라 하자. 그러면

$$5\cos x + 12\sin x = 13\cos(x-\beta),$$

이므로 주어진 방정식은 $\cos(x-\beta) = \frac{7}{13}$이라는 뜻이다. $\cos\gamma = \frac{7}{13}$인 예각을 γ라 하면 $\sin\gamma = \frac{\sqrt{169-49}}{13} = \frac{\sqrt{120}}{13}$이다. 해는 $x = \beta \pm \gamma + 2k\pi$이고,

$$\cos(\beta\pm\gamma) = \cos\beta\cos\gamma \mp \sin\beta\sin\gamma = \frac{35\mp 12\sqrt{120}}{169}.$$

따라서 각 부호가 모두 실제 해를 준다. $\alpha = \beta+\gamma$는 빼기 부호에, $\alpha = \beta-\gamma$는 더하기 부호에 해당한다.

제2사분면의 해

$\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$라 하자. 그러면 $\cos\alpha < 0$이다. $\sqrt{120} > 10$이므로 $35+12\sqrt{120} > 0$이고, 따라서 이 근은 제외된다. 또한 $12\sqrt{120} > 120 > 35$이므로 다른 근은 음수이다. 그러므로

$$\cos\alpha = \frac{35-12\sqrt{120}}{169}.$$

코사인은 $[0,\pi]$에서 순감소한다. α와 $\frac{3}{4}\pi$가 모두 이 구간에 속하므로

$$\alpha < \tfrac{3}{4}\pi \iff \cos\alpha > \cos\tfrac{3}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

따라서 $\dfrac{12\sqrt{120}-35}{169} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 즉 $12\sqrt{120}-35 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$임을 보이면 된다.

> **생각해 보기** 계산기 없이, 그리고 음수일지도 모르는 것을 제곱하지 않고 이 두 수를 어떻게 비교할 수 있을까?

먼저 $\sqrt{120}$을 대략적으로 어림한다. $120 < 121$이므로 $\sqrt{120} < 11$이고, 따라서

$$12\sqrt{120} - 35 < 132 - 35 = 97.$$

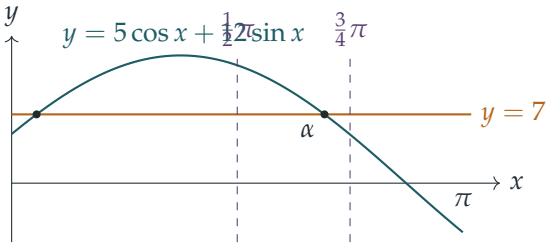
이제 $97 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$, 즉 $97\sqrt{2} < 169$임을 보이면 충분하다. 양변이 모두 양수이므로 이는 양변을 제곱한 부등식과 동치이다.

$$2\times 97^2 = 18\,818 < 28\,561 = 169^2,$$

이고 이는 참이다. 이를 종합하면

$$\cos\alpha = -\frac{12\sqrt{120}-35}{169} > -\frac{97}{169} > -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\tfrac{3}{4}\pi,$$

이고, 코사인은 $[0,\pi]$에서 감소하므로 $\alpha < \frac{3}{4}\pi$이다. 이로써 증명이 끝난다.



검산

- 수치적으로 $[0,2\pi)$에서의 근은 $x \approx 0.1738$과 $x \approx 2.1782$이다. 이들의 코사인 값은 0.98493과 -0.57073으로, $(35 \pm 12\sqrt{120})/169$와 일치한다.
- 제2사분면의 근은 2.1782이고, 그래프에서 보듯이 $\frac{3}{4}\pi \approx 2.3562$보다 작다. 여유도 충분하다. $\cos\alpha \approx -0.571$을 $-1/\sqrt{2} \approx -0.707$과 비교하면 된다. 그래서 $\sqrt{120} < 11$이라는 대략적인 어림으로도 충분한 것이다.
- 이차방정식이 맞는지 확인하는 방법으로, 두 근의 곱은 $-\frac{95}{169}$, 합은 $\frac{70}{169}$이다.

흔한 실수

- 부호를 확인하지 않고 부등식을 제곱하는 것. 여기서 $12\sqrt{120}-35$와 $169/\sqrt{2}$는 모두 양수이지만, 그 이유를 밝혀야 한다.
- 코사인이 $[0,\pi]$에서 **감소**하여 부등호의 방향이 바뀐다는 것을 잊는 것. $\alpha < \frac{3}{4}\pi$는 $\cos\alpha > -\frac{1}{\sqrt{2}}$에 대응한다.
- 제2사분면에서 양수인 근이 왜 제외되는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

마지막 부분은 엄밀한 어림(rigorous estimation)의 작은 연습 문제이다. 다루기 까다로운 양을 더 간단한 한계로 바꾸고, 그래도 여유가 남는지 확인한다. 해석학(analysis)의 많은 부등식이 바로 이런 방식으로 증명된다. 코사인 값에서 각으로 넘어가는 단계에서는 순단

조(strictly monotonic) 함수가 순서를 보존(또는 역전)한다는 사실을 이용하는데, 이는 해석학 입문 과정에서 배우는 역함수(inverse function)의 바탕이 되는 아이디어이다. 부등식을 이용한 엄밀한 증명에 대해 더 알고 싶다면 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP II 1999, 문제 6

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 1999, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q6

핵심 아이디어

분수 $\frac{ax+b}{cx+d}$의 도함수(derivative)는 상수를 $(cx+d)^2$으로 나눈 꼴이다. 따라서 피적분함수(integrand)가 $\frac{1}{(x+3)^2}$에 $\frac{x+1}{x+3}$ 또는 $\frac{x+2}{x+3}$의 함수를 곱한 꼴이면, 그 분수를 새 변수로 치환(substitution)할 때 $\frac{1}{(x+3)^2}$이 완전히 흡수되고, 남는 것은 기껏해야 $\int \ln y \, \mathrm{d}y$이다. 나머지 두 적분은 로그의 법칙(laws of logarithms)으로부터 얻어진다.

풀이

도함수

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

분자의 x 항이 소거되어 상수만 남는다. 바로 이 점이 문제 전체를 풀리게 한다.

첫 번째 적분

$y = \dfrac{x+1}{x+3}$이라 하자. 이것은 $a=1, b=1, c=1, d=3$인 $(*)$ 꼴이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3-1}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

$x=0$일 때 $y=\frac{1}{3}$이고, $x=1$일 때 $y=\frac{1}{2}$이다. $\int \ln y\,\mathrm{d}y = y\ln y - y$ ($u=\ln y$로 놓은 부분적분(integration by parts))를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1/2}\ln y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[y\ln y - y\Big]_{1/3}^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\ln 3 + \tfrac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{12},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$와 $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다. 이 적분을 I_1이라 하자.

짝이 되는 적분

생각해 보기 x^2+3x+2는 방금 사용한 치환과 무슨 관계가 있을까?

이 식은 $(x+1)(x+2)$로 인수분해되므로

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{x+2}{x+3} \qquad \text{그리고} \qquad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+1}{x+3}\Big/\frac{x+2}{x+3}.$$

따라서 마지막 두 적분에 나오는 로그는 모두 $\ln\frac{x+1}{x+3}$과 $\ln\frac{x+2}{x+3}$의 합과 차로 나타난다($0\le x\le 1$에서 이 분수들은 모두 양수이다). 그러므로 적분이 하나 더 필요하다.

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\mathrm{d}x.$$

$y=\dfrac{x+2}{x+3}$이라 하자. 이번에는 $a=1, b=2, c=1, d=3$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{(x+3)^2}$이고, 적분 구간은 $y=\frac{2}{3}$과 $y=\frac{3}{4}$가 된다.

$$\begin{aligned}J &= \int_{2/3}^{3/4}\ln y\,\mathrm{d}y = \Big[y\ln y - y\Big]_{2/3}^{3/4}\\ &= \tfrac{3}{4}(\ln 3 - 2\ln 2) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) + \tfrac{2}{3}\\ &= \frac{17}{12}\ln 3 - \frac{13}{6}\ln 2 - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

나머지 두 적분

$\ln\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \ln\frac{x+1}{x+3} + \ln\frac{x+2}{x+3}$이므로 두 번째 적분은

$$\begin{aligned}I_1 + J &= \left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{13}{6}\right)\ln 2 - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{12}\\ &= \frac{19}{12}\ln 3 - \frac{29}{12}\ln 2 - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

이다. $\ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\frac{x+1}{x+3} - \ln\frac{x+2}{x+3}$이므로 세 번째 적분은

$$\begin{aligned} I_1 - J &= \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 \\ &= \frac{23}{12}\ln 2 - \frac{5}{4}\ln 3, \end{aligned}$$

이다. 여기서 상수항 $-\frac{1}{12}$끼리는 소거되었다.

검산

- $[0,1]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I_1 \approx -0.07352$, $J \approx -0.02878$이고, 두 번째와 세 번째 적분은 각각 ≈ -0.10230과 -0.04473이다. 모두 정확한 값과 소수점 아래 열째 자리까지 일치한다.
- 대략적인 범위: $\int_0^1 (x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$이고, $\ln\frac{x+1}{x+2}$는 $\ln\frac{1}{2} \approx -0.69$와 $\ln\frac{2}{3} \approx -0.41$ 사이에 있다. 따라서 세 번째 적분은 대략 -0.058과 -0.034 사이에 있어야 하고, 실제로 -0.0447은 그 사이에 있다.
- $[0,1]$에서 모든 피적분함수는 음수이다(로그 안의 분수가 모두 1보다 작다). 따라서 세 답은 모두 음수여야 하고, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- 첫 번째 치환에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 것: 거기서는 $ad - bc = 2$이지만, 두 번째 치환에서는 1이다.
- 적분 구간을 바꾸지 않거나, 치환한 뒤에도 x의 구간 0과 1을 그대로 두는 것.
- $\frac{x+1}{x+2}$에 대해 새로운 치환을 시도하는 것: 가능은 하지만 $(x+3)^{-2}$을 y로 나타낸 식이 복잡해진다. 로그를 쪼개는 편이 훨씬 빠르다.

STEP 너머

$ad - bc \neq 0$인 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 꼴의 사상을 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformation*)이라 한다. 두 뫼비우스 변환의 합성은 2×2 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 곱에 대응하고, $ad - bc$는 행렬식(determinant)이다. 도함수에 이 값이 나타나는 것은 이 때문이다. 복소해석학(complex analysis)에서 뫼비우스 변환은 정확히 확장된 평면(extended plane)의 등각(conformal) 전단사(bijection)이며, 원과 직선을 원과 직선으로 보낸다. 니덤(Needham)의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 이에 관한 아름다운 장이 있다.

풀이

STEP II 1999, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기

STEP II 1999, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s2-q7

핵심 아이디어

미분한 뒤 모든 항을 공통분모(common denominator)로 묶으면 분자(numerator)가 거의 완전히 사라진다. 이차항은 모두 소거되고 일차인수 하나만 남으므로 정류점(stationary point)이 곧바로 결정된다. 그래프를 그릴 때는 근호 안을 완전제곱식으로 고친다(completing the square). 그러면 곡선이 어디에서 정의되는지, $|x|$가 클 때 어떻게 행동하는지 알 수 있고, $a = 1$일 때는 제곱근이 절댓값(modulus)이 되어 곡선이 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)의 두 조각으로 바뀐다는 것도 알 수 있다.

풀이

$Q(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + (a-1)$로 놓는다.

$a > 1$일 때 정류점은 정확히 하나

$a > 1$이면 모든 x에 대해 $Q(x) \geq a - 1 > 0$이므로, 곡선은 모든 실수 x에서 정의되고 미분가능하다. $y = xQ^{-1/2}$이고 $Q'(x) = 2x - 2$이므로, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= Q^{-1/2} - \tfrac{1}{2}x(2x-2)Q^{-3/2} = \frac{Q - x(x-1)}{Q^{3/2}} \\ &= \frac{x^2 - 2x + a - x^2 + x}{Q^{3/2}} = \frac{a - x}{(x^2 - 2x + a)^{3/2}}.\end{aligned}$$

분모는 모든 x에 대해 양수이고 유한하므로, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$인 것은 정확히 $x = a$일 때이다. 따라서 C는 정확히 하나의 정류점을 가지며, 그 위치는

$$x = a, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - a}} = \sqrt{\frac{a}{a-1}}$$

이다. 이것이 구하는 결과이다. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$의 부호는 $a-x$의 부호와 같으므로, 곡선은 $x<a$에서 증가하고 $x>a$에서 감소한다. 따라서 이 점은 극대(maximum)이다.

? 생각해 보기 $a>1$은 어디에서 쓰였는가?

두 번 쓰였다. 첫째, 이 조건 덕분에 모든 곳에서 $Q>0$이므로 곡선에 끊어진 곳이 없고 도함수가 존재하지 않는 점도 없다. 둘째, $Q(a)=a^2-a>0$이므로 $x=a$가 실제로 곡선 위의 점이 된다. $a=1$이면 정류점이 될 뻔한 $x=a=1$이 바로 $Q=0$인 점이 되고, 소문항 (ii)에서 문제가 생기는 것은 바로 이 때문이다.

두 그래프를 그리는 데 도움이 되는 사실이 두 가지 더 있다. $|x|$가 클 때 $\sqrt{Q}=|x|\sqrt{1-2/x+a/x^2}\approx|x|$이므로

$$y\to 1,\text{ 단}x\to+\infty,\qquad y\to-1,\text{ 단}x\to-\infty.$$

또 y의 부호는 x의 부호와 같고, 곡선은 원점을 기울기 $a/a^{3/2}=1/\sqrt{a}$로 지난다.

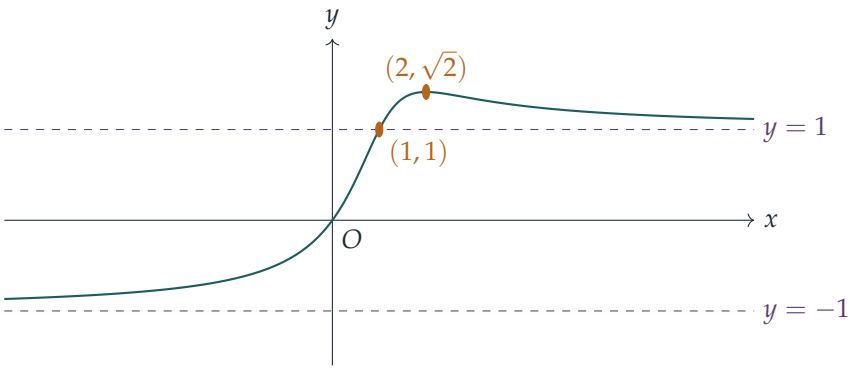
소문항 (i): $a=2$

이때 $y=\dfrac{x}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$이고 모든 x에서 정의되며, 다음과 같은 성질을 가진다.

- $(2,\sqrt{2})$에서 극대이고, $x<2$에서 증가하며 $x>2$에서 감소한다.
- 원점이 곡선 위에 있고, 그 점에서의 기울기는 $1/\sqrt{2}$이다.
- 수평점근선(horizontal asymptote)은 $y=1(x\to\infty$일 때)과 $y=-1(x\to-\infty$일 때)이다.

곡선은 각 점근선의 어느 쪽에 있는가? $y=\pm1$로 놓고 제곱하면 $x^2=x^2-2x+2$이므로 $x=1$이고, (y의 부호가 x의 부호와 같으므로) 이에 맞는 것은 $y=+1$뿐이다. 따라서 곡선은 $y=1$과 $(1,1)$에서 단 한 번 만난다. 곡선은 모든 $x>1$에서 $y=1$보다 위에 있으며, 극대점을 지난 뒤 위쪽에서 점근선을 향해 내려온다. 곡선은 $y=-1$과는 만나지 않으므로 항상 $y=-1$보다 위에 있고, x가 $-\infty$에서부터 증가함에 따라 $y=-1$에서 멀어지며 올라간다.

(더 자세히 알고 싶다면: 한 번 더 미분하면 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=(2x^2-7x+4)/Q^{5/2}$이므로 변곡점(point of inflection)은 $x=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{17})$, 즉 대략 $x\approx0.72$와 $x\approx2.78$에 있다. 그래프를 그리는 데 이것까지 필요하지는 않지만, 이것으로 그래프의 모양을 설명할 수 있다.)



소문항 (ii): $a = 1$

이제 $Q = (x-1)^2$이므로 $x = 1$은 제외되고, 제곱근은 양의 제곱근이므로

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

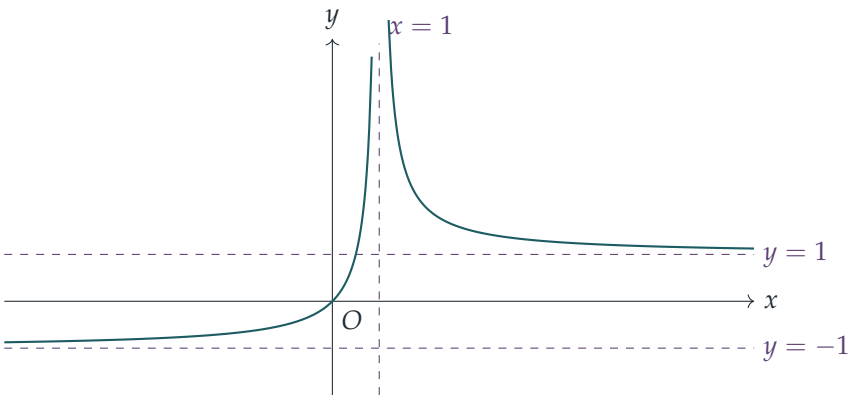
따라서

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}, & x < 1, \\ \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

각 가지(branch)는 $x = 1$을 중심으로 하는 직각쌍곡선의 일부이다.

- $x < 1$일 때: y는 증가하며(도함수가 $1/(1-x)^2 > 0$), $-1 (x \to -\infty$일 때 위쪽에서 다가감)에서 출발하여 원점을 기울기 1로 지나고, $x \to 1^-$일 때 $+\infty$로 간다.
- $x > 1$일 때: y는 감소하며(도함수가 $-1/(x-1)^2 < 0$), $x \to 1^+$일 때의 $+\infty$에서 1을 향해 내려온다($x \to \infty$일 때 위쪽에서 다가감).

직선 $x = 1$은 수직점근선(vertical asymptote)이며, **양쪽** 모두에서 $y \to +\infty$이다(분자는 1에 가깝고 분모는 작은 양수이기 때문이다). 정류점은 없다. $a > 1$인 곡선들의 극대점은 높이가 $\sqrt{a/(a-1)}$이므로, $a \to 1^+$일 때 무한히 멀리 밀려 올라가 버린 것이다. 일반적인 공식도 이와 일치한다. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (1-x)/|x-1|^3$은 결코 0이 되지 않기 때문이다.



검산

- 수치적으로, 도함수 공식 $(a-x)/Q^{3/2}$는 무작위로 고른 수천 개의 점에서 유한차분(finite difference)으로 구한 도함수와 일치하며, 부호를 차례로 조사해 보면 여러 $a>1$ 값에 대해 부호가 바뀌는 곳이 정확히 한 곳이다.
- $a=2$일 때: $y(2)=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}\approx 1.414$, $y(1)=1$이고, $y(10^6)\approx 1.000001$, $y(-10^6)\approx -0.999999$이므로 곡선이 점근선에 어느 쪽에서 다가가는지가 확인된다.
- $a=1$일 때: $y(0.999)\approx 999$, $y(1.001)\approx 1001$로, 앞에서 말한 대로 둘 다 큰 양수이다.
- $a\to\infty$일 때 극댓값 $\sqrt{a/(a-1)}$은 1로 수렴하는데, 이는 타당하다. a가 매우 크면 곡선은 원점 근처에서 거의 $x/\sqrt{a}$와 같고, 볼록 솟은 부분이 평평해지기 때문이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$로 쓰는 것. 그러면 모든 곳에서 $y=x/(x-1)$이 되어 왼쪽 가지가 틀리게 되는데, 이 가지는 $x\to-\infty$일 때 $+1$로 가고 $x\to 1^-$일 때 $-\infty$로 가게 된다.
- 곡선의 양 끝 모두에 점근선 $y=1$을 주는 것. $\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $x\to-\infty$일 때의 극한은 -1이다.
- $a>1$일 때 분모가 결코 0이 되지 않음을 보이는 것을 잊는 것. 이것이 없으면 "분자는 $x=a$에서만 0이다"라는 사실만으로는 정류점이 정확히 하나라는 것이 아직 증명되지 않는다.

STEP 너머

여기서 다룬 곡선족은 $a = 1$에서 성격이 갑자기 바뀐다. 극대점이 하나인 매끄러운 곡선이 수직점근선을 사이에 둔 두 개의 분리된 가지로 바뀌는 것이다. 곡선족의 정성적인 모양이 매개변수에 따라 어떻게 달라지는지 연구하는 것이 분기 이론(bifurcation theory)의 출발점이며, $\sqrt{x^2} = |x|$와 $x \to \pm\infty$일 때의 극한(limit)을 다룰 때 필요한 주의는 바로 대학 1학년 해석학(analysis)이 엄밀하게 다듬는 그 주의이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 극한과 연속성(continuity)을 제대로 다루는 모습을 볼 수 있는 친절한 책이다.

풀이

STEP II 1999, 문제 8

순수수학 • 삼각급수

> **STEP II 1999, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q8

핵심 아이디어

$\sin k\theta$에 $2\sin\frac{1}{2}\theta$를 곱하면 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)에 의해 두 코사인의 차가 되고, 그러면 합이 연쇄적으로 소거된다(telescoping). 그다음 두 소문항 모두 θ를 잘 고르는 것이 관건이다. $\theta = \pi/n$으로 두면 다루기 까다로운 코사인 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta$가 $\cos\frac{1}{2}\theta$의 간단한 배수가 된다. (ii)에서는 반각 공식(half-angle formula)으로 $\sin^2$을 코사인으로 바꾸는데, 이때 나오는 합 $\sum k\cos k\theta$는 바로 $(*)$를 미분하면 얻어지는 것이다.

풀이

$(*)$의 증명

우변이 의미를 가지도록 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$이라 가정한다. 항등식 $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$에 $A = k\theta$, $B = \frac{1}{2}\theta$를 대입하면

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\sin k\theta = \cos\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\theta.$$

을 얻는다. 이를 $k=0$부터 n까지 더하면 k번째 줄에서 빼진 각 $\cos(k+\frac{1}{2})\theta$가 $k+1$번째 줄에서 다시 더해지므로, 처음 항과 마지막 항만 남는다.

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \cos\left(-\tfrac{1}{2}\theta\right) - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\tfrac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta,$$

여기서 코사인이 우함수(even function)라는 사실을 썼다. 양변을 $2\sin\frac{1}{2}\theta$로 나누면 $(*)$가 나온다.

소문항 (i)

$\theta = \pi/n$ $(n \geq 1)$으로 두면 $\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\frac{\pi}{2n} \neq 0$이다. 그러면

$$\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{2n}\right) = -\cos\tfrac{\pi}{2n},$$

이므로 $(*)$의 분자는 $2\cos\frac{\pi}{2n}$이고

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \cot\frac{\pi}{2n}.$$

이다. 이것은 정확한 값이다. n이 클 때 $\frac{\pi}{2n}$은 작으므로 $\cos\frac{\pi}{2n} \approx 1$, $\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$이고, 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \approx \frac{1}{\pi/(2n)} = \frac{2n}{\pi}.$$

이다.

소문항 (ii)

배각 공식(double-angle formula)에 의해 $\sin^2\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$이므로, $\theta = \pi/n$으로 두면

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta. \qquad (1)$$

이다. $\sum k\cos k\theta$를 구하기 위해 $(*)$를 θ에 대하여 미분한다. 그러면 좌변은 정확히 이 합이 된다. 먼저 우변을

$$\frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

로 나눈다. $S = \sin\frac{1}{2}\theta$, $c = \cos\frac{1}{2}\theta$라 하자. 첫째 부분을 미분하면 $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{4S^2}$이다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해 둘째 부분을 미분하면

$$\frac{(n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})\theta \cdot 2S + \cos(n+\frac{1}{2})\theta \cdot c}{4S^2}.$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{-1 + (2n+1)S\sin(n+\frac{1}{2})\theta + c\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{4S^2}.$$

이다.

생각해 보기 왜 $\theta = \pi/n$을 미분하기 전이 아니라 후에 대입하는가?

항등식 $(*)$는 $(\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$인$)$ 모든 θ에 대하여 성립하므로 미분할 수 있다. 만약 $\theta = \pi/n$을 먼저 고정하면 하나의 수만 남아 미분할 대상이 없다. 도함수를 θ에 관한 항등식으로 얻고 나면, 원하는 어떤 값이든 대입할 수 있다.

이제 $\theta = \pi/n$으로 두자. (i)에서처럼 $(n+\frac{1}{2})\theta = \pi + \frac{1}{2}\theta$이므로 $\sin(n+\frac{1}{2})\theta = -S$, $\cos(n+\frac{1}{2})\theta = -c$이다. 그러므로

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{-1-(2n+1)S^2-c^2}{4S^2} = \frac{-2-2nS^2}{4S^2} = -\frac{1}{2S^2} - \frac{n}{2},$$

이다. 여기서 $c^2 = 1-S^2$을 이용했다. 이를 (1)에 대입하면

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{4S^2} = \frac{n(n+2)}{4} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

이다. 이것은 정확한 값이다. n이 클 때 $\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$이므로 $\frac{1}{4\sin^2(\pi/2n)} \approx \frac{n^2}{\pi^2}$이고, $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$에서 둘째 항은 n^2에 비해 무시할 수 있다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \approx \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)n^2,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- (ii)에서 $n=1$일 때: 합은 $0 + 1\cdot\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$이고, 정확한 공식은 $\frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$을 준다.
- (i)에서 $n=2$일 때: 합은 $0+1+0=1$이고, $\cot\frac{\pi}{4} = 1$이다.
- 수치적으로, $n=1000$일 때 (i)의 합은 $636.6192\ldots$로 $2n/\pi = 636.6198\ldots$와 비교되고, (ii)의 합은 $351\,821.3$으로 $(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2})n^2$과 0.15% 이내로 차이 난다. (ii)의 상대 오차는 무시한 $\frac{n}{2}$ 항 때문에 $1/n$처럼 줄어든다.

흔한 실수

- $\cos(\pi+x) = \cos x$라고 쓰는 것: 올바른 값은 $-\cos x$이며, 바로 이 부호 때문에 (i)에서 분자가 두 배가 된다.
- (ii)에서 $\frac{1}{4}n^2$을 만들어 주는 $\frac{1}{2}\sum k = \frac{n(n+1)}{4}$ 항을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

소문항 (i)은 사실 리만 합(Riemann sum)이 모습을 바꾼 것이다. $\frac{\pi}{n}\sum\sin\frac{k\pi}{n} \to \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$이고, 이는 정확히 $\sum \approx 2n/\pi$라는 명제이다. 마찬가지로 (ii)는

$\frac{1}{n^2}\sum k\sin^2\frac{k\pi}{2n} \to \int_0^1 x\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}$이라는 뜻이다. 같은 연쇄 소거 기법을 $\sum\cos k\theta$에 적용하면 푸리에 해석(Fourier analysis)의 디리클레 핵(Dirichlet kernel)을 얻는다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 리만 합과 푸리에 급수(Fourier series)를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1999, 문제 9

역학 • 가변적인 힘에 의한 운동

> **STEP II 1999, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q9

핵심 아이디어

가속도(acceleration)는 시간이 아니라 거리 x에만 의존하므로, 알맞은 도구는 $\ddot{x} = v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$이다. 이것을 쓰면 운동 방정식(equation of motion)이 바로 적분할 수 있는 꼴로 바뀌어 v^2을 x의 함수로 얻을 수 있다(모습을 바꾼 에너지 방정식(energy equation)이다). 나머지는 모두 v^2이 어디에서 0이 되는지를 묻는 일이다. 그곳이 바로 파편(fragment)이 멈추고 되돌아오는 지점이다.

풀이

각 파편을 고정점 G를 지나는 직선 위에서 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. x는 G로부터의 거리이고, $v = \dot{x}$는 속도(velocity)로, G에서 멀어지는 방향으로 움직일 때 양수이다. 처음에 $x = 0$이고 $v = u > 0$이다. 가속도는 G를 향하므로 이 부호 약속에서는 음수이다.

소문항 (i)

$x < R$이면 $\ddot{x} = -k_1 x^3$이고, $\ddot{x} = v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_1 x^3.$$

변수를 분리하여 출발 시점($x = 0$, $v = u$)부터 적분하면

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}u^2 = -\tfrac{1}{4}k_1 x^4, \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4 \quad (x < R).$$

파편이 아직 바깥쪽으로 움직이는 동안에는 $v = \sqrt{u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4}$이다.

소문항 (ii)

$2a^2 = k_1R^4$이므로 (i)의 식은 $v^2 = u^2 - a^2(x/R)^4$이 된다. x가 0에서부터 증가하면 v^2은 감소하고, 다음에서 0이 된다.

$$x_0 = \left(\frac{2u^2}{k_1}\right)^{1/4}.$$

$u < a$이면 $2u^2 < 2a^2 = k_1R^4$이므로 $x_0 < R$이다.

> **생각해 보기** x_0에서 속력이 0이 되는데, 왜 그것이 파편이 더 멀리 가지 못한다는 뜻일까?

x_0에서 파편은 순간적으로 정지하지만, 그곳에서의 가속도는 $-k_1x_0^3 \neq 0$이고 G를 향한다. 따라서 파편은 평형(equilibrium) 상태가 아니며, G를 향해 되돌아가기 시작한다. 사실 x는 결코 x_0을 넘을 수 없다. 넘는다면 (i)의 식에서 $v^2 < 0$이 되기 때문이다. 파편이 도달하는 가장 먼 거리는 $x_0 < R$이므로, 요구한 대로 파편은 G로부터 거리 R에 결코 도달하지 못한다.

소문항 (iii)

먼저 $u \geq b$인 파편은 분명히 R에 도달한다. 정의로부터

$$b^2 = \tfrac{1}{2}k_1R^4 + \frac{2k_2}{3R^3} = a^2 + \frac{2k_2}{3R^3} > a^2,$$

이므로 $x \leq R$에 대하여 소문항 (i)에서

$$v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1x^4 \geq u^2 - a^2 \geq b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3} > 0.$$

특히 파편은 $v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4 = u^2 - a^2$인 상태로 $x = R$에 도착한다.

$x \geq R$에서 운동 방정식은 $v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_2x^{-4}$이다. $x = R$부터 적분하면

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_R^2 = \frac{k_2}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

이므로

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - \tfrac{1}{2}k_1R^4 - \frac{2k_2}{3R^3} + \frac{2k_2}{3x^3} \\ &= u^2 - b^2 + \frac{2k_2}{3x^3} \qquad (x \geq R). \end{aligned}$$

b를 그렇게 정의한 이유가 바로 이 조합 때문이다. b^2은 G에서 무한히 먼 곳까지 탈출하는 데 드는 $\frac{1}{2}v^2$의 총 "비용"이다.

$u \geq b$이면 $u^2 - b^2 \geq 0$이고 $\frac{2k_2}{3x^3} > 0$이므로, 모든 $x \geq R$에 대하여 $v^2 > 0$이다(경계인 경우 $u = b$도 포함된다). $x \leq R$에서의 부등식과 함께 보면, 파편이 도달할 수 있는 모든 거리에서 v^2은 엄밀하게 양수이다.

속도 v는 시간에 대해 연속이고 $u > 0$에서 시작한다. 음수가 되려면 0을 지나야 하고, 그러려면 어떤 위치에서 $v^2 = 0$이어야 하는데, 방금 그런 일은 일어나지 않음을 보였다. 따라서 $v > 0$이 항상 성립한다. 즉 폭발 순간부터 파편은 언제나 G에서 멀어지는 방향으로 움직인다. ($v^2 \geq 2k_2/(3x^3)$이므로 파편은 계속 나아가며 $x \to \infty$이다.)

소문항 (iv)

이제 $a < u < b$이다. $u > a$이므로 (iii)의 논증에 따라 $[0, R]$에서 $v^2 \geq u^2 - a^2 > 0$이고, 따라서 파편은 여전히 바깥쪽으로 움직이면서 R에 도달한다. R 너머에서는

$$v^2 = \frac{2k_2}{3x^3} - (b^2 - u^2),$$

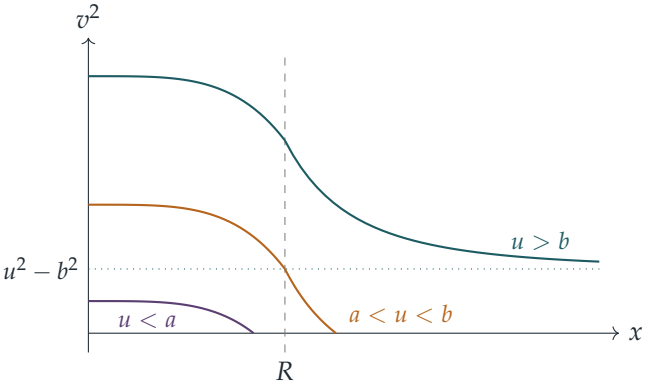
이고, 이제 $b^2 - u^2 > 0$이다. 이 값은 x가 증가함에 따라 감소하며, 다음일 때 0이 된다.

$$x^3 = \frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}.$$

이 점은 실제로 $x \geq R$ 영역에 있다. $u > a$이므로 $b^2 - u^2 < b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3}$이고, 따라서 $x^3 > R^3$이다. (ii)에서와 마찬가지로 파편은 그 점에서 G를 향하는 0이 아닌 가속도 $-k_2x^{-4}$를 가진 채 멈추고, 더 나아가면 v^2이 음수가 되므로 더 멀리 갈 수 없다. G로부터의 최대 거리는

$$\boxed{x_{\max} = \left(\frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}\right)^{1/3}}$$

아래 그림은 $k_1 = 2, k_2 = 3, R = 1$ (따라서 $a^2 = 1, b^2 = 3$)일 때 세 종류의 처음 속력에 대하여 v^2을 x에 대해 그린 것이다. 각 파편은 자신의 곡선이 축과 만날 때까지 이동한다.



검산

- $k_1 = 2, k_2 = 3, R = 1$이면 $a = 1, b = \sqrt{3}$이다. $u = \sqrt{2}$일 때 식은 $x_{\max} = (2 \cdot 3/(3 \cdot 1))^{1/3} = 2^{1/3} \approx 1.26$을 주는데, 이는 마땅히 그래야 하듯 R을 약간 넘는 값이다.

- $u \to a^+$일 때 $b^2 - u^2 \to 2k_2/(3R^3)$이고 $x_{\max} \to R$이다. $u \to b^-$일 때 $x_{\max} \to \infty$이다. 두 결과 모두 경계에서 소문항 (ii), (iii)과 들어맞는다.
- 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보면(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법, k_1, k_2, R을 무작위로 열두 번 선택), v^2에 대한 식, $u < a$일 때의 되돌아오는 점 $(2u^2/k_1)^{1/4}$, (iv)의 $x_{\max}$ 값이 0.1% 이내로 재현되고, $u \geq b$일 때는 되돌아오는 일이 전혀 없다.

흔한 실수

- 두 번째 단계를 $v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4$을 가지고 $x = R$부터 적분하지 않고 $x = 0$부터 적분하는 것. 힘의 법칙이 R에서 바뀌므로 적분상수도 바뀐다.
- 부호를 잃어버리는 것. 가속도는 G를 향하므로 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$는 k_1x^3 또는 k_2x^{-4}에 **음의 부호**를 붙인 것이다.
- (iii)에서 $x \geq R$만 확인하고, R 안쪽에서도 v가 양수로 유지되어야 한다는 점을 잊는 것.

STEP 너머

$V'(x)$가 가속도에 음의 부호를 붙인 것과 같을 때, 양 $\frac{1}{2}v^2 + V(x)$는 위치에만 의존하는 모든 힘에 대하여 보존된다. V("퍼텐셜 우물(potential well)")를 그려 보면 어떤 운동이 유계이고 어떤 운동이 탈출하는지 한눈에 알 수 있으며, b는 바로 이 우물의 탈출 속력(escape speed)이다. 같은 추론으로 실제 중력에서의 탈출 속도를 얻을 수 있으며, 이는 비선형 진동자(nonlinear oscillator)의 위상 평면 분석(phase-plane analysis)의 출발점이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이와 같은 에너지 도표를 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 1999, 문제 10

역학 • 연속 충돌

> **STEP II 1999, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q10

핵심 아이디어

이 사슬에서 일어나는 충돌은 모두 같은 모양이다. 질량이 μ이고 속력 u로 움직이는 입자가 정지해 있는 질량 $q\mu$의 입자와 충돌한다. 따라서 첫 번째 충돌의 계산을 비율만 맞추어 적용하면 **모든** 충돌을 설명할 수 있다. 각 입자의 최종 속도를 알고 나면, 추가 충돌이 일어나는지의 문제는 이웃한 입자들의 최종 속도를 비교하는 문제로 바뀐다. 또 $q = e$이면 속도가 매우 간단해져서 에너지 손실이 등비급수(geometric series) 하나로 정리된다.

풀이

첫 번째 충돌

입자들을 직선 위를 움직이는 질점(point mass)으로 모형화하고, P_1에서 P_2를 향하는 방향을 양의 방향으로 잡는다. 충돌 직후 P_1과 P_2의 속도를 각각 v_1, v_2라 하자. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 의해

$$\begin{aligned} mV &= mv_1 + qm\,v_2, \\ v_2 - v_1 &= eV. \end{aligned}$$

이다. 첫 번째 식에 $v_2 = v_1 + eV$를 대입하면 $V = v_1 + qv_1 + qeV$이므로

$$v_1 = \left(\frac{1-eq}{1+q}\right)V, \qquad v_2 = v_1 + eV = \frac{1-eq+e+eq}{1+q}\,V = \left(\frac{1+e}{1+q}\right)V,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

모든 충돌은 같은 꼴이다

다음과 같이 놓자.

$$\alpha = \frac{1-eq}{1+q}, \qquad \beta = \frac{1+e}{1+q}.$$

위의 계산에서는 m의 실제 값을 전혀 사용하지 않았다. 즉 질량이 μ이고 속도 u로 움직이는 입자가 정지해 있는 질량 $q\mu$의 입자와 충돌하면, 충돌한 입자는 속도 αu로 움직이고 상대 입자는 속도 βu로 튕겨 나간다. 각 P_{k+1}의 질량은 P_k의 질량의 q배이므로, 이 결과는 P_{k+1}이 아직 정지해 있는 한 P_k가 P_{k+1}에 충돌하는 경우에 그대로 적용된다.

$q \le e$일 때 정확히 $N-1$번의 충돌

$q \le e$라고 가정하자. 그러면 $eq \le e^2 < 1$이므로 $\alpha > 0$이고, 또한 $\beta > 0$이다.

사슬을 따라가 보자. P_1이 P_2와 충돌하면 P_1의 속도는 αV, P_2의 속도는 βV가 된다. $\beta V > 0$이므로 P_2는 정지해 있는 P_3 쪽으로 움직여 충돌하고, 그 결과 P_2의 속도는 $\alpha\beta V$, P_3의 속도는 $\beta^2 V$가 된다. 이를 계속하면 P_k는 속도 $u_k = \beta^{k-1}V > 0$으로 정지해 있는 P_{k+1}에 도달하므로, 이웃한 각 쌍 사이에서 충돌이 한 번씩 일어난다. 즉 충돌은 적어도 $N-1$번 일어난다. 이 충돌들이 끝난 뒤의 속도는

$$w_k = \alpha\beta^{k-1}V \quad (1 \le k \le N-1), \qquad w_N = \beta^{N-1}V.$$

이다. 이 값들은 모두 양수이므로 모든 입자가 같은 방향으로 움직인다.

> **?** **생각해 보기** P_k가 다시는 P_{k+1}을 따라잡지 못한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

두 입자가 충돌한 뒤 P_k는 그 이후로 일정한 속도 w_k로 움직인다. 이후에 P_k가 접촉할 수 있는 입자는 P_{k+1} 또는 P_{k-1}뿐이기 때문이다. 한편 P_{k+1}은 P_{k+2}와 충돌할 때까지는 $u_{k+1} = \beta^k V$로, 그 이후에는 w_{k+1}로 움직인다($k+1 = N$이면 계속 같은 속도로 움직인다). P_k와 P_{k+1} 사이의 간격은 P_k가 더 빠르게 움직일 때에만 줄어들 수 있는데,

- $u_{k+1} > w_k$이다. $\beta^k V > \alpha\beta^{k-1}V$는 $\beta > \alpha$, 즉 $1+e > 1-eq$와 동치이고, 이것은 참이기 때문이다.
- $k \le N-2$이면 $w_{k+1} \ge w_k$이다. $w_{k+1}/w_k = \beta = \dfrac{1+e}{1+q} \ge 1$인데, 이것이 성립하는 이유가 바로 $q \le e$이기 때문이다.
- $k = N-1$이면 $w_N > w_{N-1}$이다. $w_N/w_{N-1} = \beta/\alpha > 1$이기 때문이다.

따라서 충돌 후 P_{k+1}은 결코 P_k보다 느리지 않으며, 둘 사이의 간격은 절대 줄어들지 않는다. ($q = e$이면 $w_{k+1} = w_k$이다. 이때 간격은 일정하게 유지될 뿐 줄어들지는 않는다.) 이는 이웃한 모든 쌍에 대해 성립하므로 더 이상의 충돌은 일어나지 않고, 충돌은 **정확히** $N-1$번 일어난다.

바로 이 부분에서 $q \le e$라는 조건이 중요하다. 만약 $q > e$이면 $\beta < 1$이 되어 각 입자가 결국 뒤따르는 입자보다 느려지고, 사슬이 스스로를 따라잡으면서 더 많은 충돌이 일어난다.

$q = e$일 때 잃는 운동 에너지

이제 $q = e$이므로

$$\beta = \frac{1+e}{1+e} = 1, \qquad \alpha = \frac{1-e^2}{1+e} = 1-e.$$

이다. 모든 입자는 속력 V로 충돌을 받고, 그 뒤 $P_1, \dots, P_{N-1}$은 $(1-e)V$로, P_N은 V로 움직인다. P_k의 질량이 $e^{k-1}m$이므로 최종 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{N-1} \tfrac{1}{2} e^{k-1} m (1-e)^2 V^2 + \tfrac{1}{2} e^{N-1} m V^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)^2 \cdot \frac{1-e^{N-1}}{1-e} + e^{N-1} \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)(1-e^{N-1}) + e^{N-1} \right], \end{aligned}$$

이다. 여기서 등비급수의 합 $1 + e + \cdots + e^{N-2} = \dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$를 이용하였다. 처음 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mV^2$이므로 손실은

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m V^2 - T &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e^{N-1}) - (1-e)(1-e^{N-1}) \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m e \left(1 - e^{N-1} \right) V^2, \end{aligned}$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

검산

- **충돌 하나씩 따져 보기.** $q = e$일 때 P_k가 P_{k+1}에 충돌하면 P_k의 속도는 V에서 $(1-e)V$로, P_{k+1}의 속도는 0에서 V로 바뀌고, 이때 잃는 에너지는 $\frac{1}{2}e^{k-1}mV^2\left[1-(1-e)^2-e\right] = \frac{1}{2}m(1-e)e^kV^2$이다. 이를 $k = 1, \dots, N-1$에 대해 더하면 $\frac{1}{2}m(1-e)V^2 \cdot e\,\dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$이 되어 같은 답을 얻는다.
- **극한.** $e \to 0$이면 손실은 0으로 수렴하는데, 실제로 $q = e \to 0$이면 뒤쪽 입자들의 질량은 무시할 수 있을 만큼 작아진다. $N = 2$이면 공식은 $\frac{1}{2}me(1-e)V^2$을 주며, 이는 충돌 한 번을 직접 계산한 결과와 일치한다.
- **수치 계산.** 무작위로 고른 $N \le 12$, 무작위 간격, 무작위 $q \le e$에 대해 사건 단위로 운동을 시뮬레이션해 보았더니 항상 정확히 $N-1$번의 충돌이 나왔다. $N = 5$, $q = e = \frac{1}{2}$, $m = V = 1$일 때 시뮬레이션으로 얻은 손실은 $0.234375 = \frac{15}{64}$로, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)$과 일치하였다.

흔한 실수

- 처음 $N-1$번의 충돌이 일어난다는 것만 확인하는 것. "정확히"라고 하려면 나중에 어떤 입자도 앞의 입자를 따라잡지 못한다는 논증도 필요하다.
- P_k의 최종 속도를, P_{k+2}와 충돌하여 느려진 뒤의 최종 속도가 아니라 둘이 충돌한 **직후**의 P_{k+1}의 속도(βu_k)와 비교하는 것.
- 반발 법칙에서 부호를 틀리는 것. 접근 속력(speed of approach)의 e배와 같은 것은 분리 속력(speed of separation) $v_2 - v_1$이다.

STEP 너머

운동량을 한 번에 하나씩 다음 입자로 전달하는 질량들의 사슬은 입상 물질(granular material) 속을 지나가는 충격파(shock)의 1차원 모형이다. $q < 1$일 때의 이 사슬처럼 질량이 꾸준히 감소하는 사슬은 충격을 분산시키고 흡수하는 방법으로서 물리학자들이 연구하고 있다. 에너지 계산을 깔끔하게 재구성하는 좋은 방법은 **환산 질량**(*reduced mass*) $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$를 이용하는 것이다. 충돌 한 번에서 잃는 에너지는 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)w^2$이며, 여기서 w는 접근 속력이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 충돌을 다루는데, 그 좌표계에서는 이런 결과가 한눈에 드러난다.

풀이

STEP II 1999, 문제 11

역학 • 포물체와 움직이는 표적

> **STEP II 1999, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q11

핵심 아이디어

표적은 원 위에 머무르므로, 포탄은 O로부터 정확히 거리 R인 지점에서 수평면에 떨어져야 한다. 또한 포는 언제든지 표적이 도달할 위치를 향하도록 돌릴 수 있다. 따라서 모든 것은 하나의 포물체(projectile)에 관한 두 가지 사실, 곧 사정거리(range)와 비행 시간(time of flight)으로 귀결된다. 회전각은 $\beta = \omega T$이고, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$을 이용하여 α를 소거하면 사차방정식(quartic)이 나온다. 마지막 부분은 비에타 공식(Vieta's formulas)과 원의 현(chord)으로 해결된다.

풀이

포탄을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받아 움직이는 입자로 모형화한다. 포탄은 원을 포함하는 수평면 위의 점 O에서 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$로 발사된다.

소문항 1: $V^2 < gR$인 경우

(발사가 이루어지는 평면 안에서) 지면을 따르는 축과 연직 위쪽 축을 잡는다. 시각 t에서

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

포탄은

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad \text{일 때 수평 거리} \qquad x(T) = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V^2\sin 2\alpha}{g}.$$

인 지점에서 평면으로 돌아온다($y = 0, t > 0$). $\sin 2\alpha \le 1$이므로, 어떤 연직 평면에서 쏘든 포탄은 O로부터 V^2/g보다 먼 곳에 떨어질 수 없다. 표적은 항상 평면 위에서 O로부터 거리

R인 곳에 있으므로, 명중하려면 $R \le V^2/g$, 즉 $V^2 \ge gR$이어야 한다. 따라서 $V^2 < gR$이면 포탄은 결코 표적을 맞힐 수 없고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 2: β에 대한 방정식

이제 $V^2 > gR$이라 하자. 포탄은 시각 T에 거리 R에서 표적을 맞히므로

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad R = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

표적은 일정한 각속도 ω로 돌므로 $\beta = \omega T$이고, 따라서

$$\sin\alpha = \frac{g\beta}{2V\omega}.$$

이를 사정거리 식에 대입하면

$$\cos\alpha = \frac{gR}{2V^2\sin\alpha} = \frac{gR}{2V^2}\cdot\frac{2V\omega}{g\beta} = \frac{R\omega}{V\beta}.$$

이제 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$로부터

$$\frac{g^2\beta^2}{4V^2\omega^2} + \frac{R^2\omega^2}{V^2\beta^2} = 1,$$

이고, 양변에 $4V^2\omega^2\beta^2$을 곱하면

$$g^2\beta^4 - 4\omega^2V^2\beta^2 + 4R^2\omega^4 = 0,$$

이 되어 구하는 방정식을 얻는다.

? **생각해 보기** 값이 왜 최대 네 개도, 없는 것도 아니고 정확히 두 개일까?

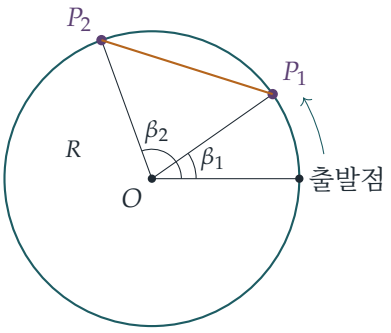
β^2에 대한 이차방정식으로 보면 판별식(discriminant)은

$$16\omega^4V^4 - 16g^2R^2\omega^4 = 16\omega^4\left(V^4 - g^2R^2\right) > 0,$$

이다. $V^2 > gR$이기 때문이다. 따라서 β^2의 서로 다른 실숫값이 두 개 있다. 두 값의 합 $4\omega^2V^2/g^2$과 곱 $4R^2\omega^4/g^2$이 모두 양수이므로, β^2의 두 값은 모두 양수이다. 각 $\beta = \omega T$는 양수이므로 β^2의 각 값은 정확히 하나의 β를 주고, 따라서 후보는 정확히 두 개 $\beta_1 < \beta_2$이다.

각 후보는 실제로 명중을 준다. 어느 근에 대해서든 두 수 $g\beta/(2V\omega)$와 $R\omega/(V\beta)$는 양수이고 (방정식에 의해) 그 제곱의 합이 1이므로, 이 두 수를 각각 사인과 코사인으로 갖는 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$가 존재한다. 이 앙각(elevation)으로, 표적이 β만큼 회전한 뒤 도달할 점을 지나는 연직 평면에서 발사하면 비행 시간은 β/ω, 사정거리는 R이 되므로 포탄은 표적과 만난다. 따라서 β의 가능한 값은 정확히 두 개이다. (이 두 값은 사정거리 R을 주는 서로 여각(complementary angle)인 두 앙각 α와 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$에 대응한다.)

소문항 3: 거리 P_1P_2



두 탄착점은 모두 원 위에 있으며, 발사 순간 표적의 위치로부터 시계 반대 방향으로 잰 각이 각각 β_1과 β_2이다. 따라서 각 P_1OP_2는 $\beta_2-\beta_1$이고 (필요하면 2π를 법으로 줄이는데, 이는 현에 영향을 주지 않는다), 이등변삼각형(isosceles triangle) OP_1P_2로부터

$$P_1P_2 = 2R\left|\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\right|.$$

를 얻는다. β^2에 대한 이차방정식으로부터

$$\beta_1^2+\beta_2^2 = \frac{4\omega^2V^2}{g^2}, \qquad \beta_1^2\beta_2^2 = \frac{4R^2\omega^4}{g^2},$$

이고, $\beta_1,\beta_2>0$이므로 양의 제곱근을 취할 수 있다: $\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$. 따라서

$$\begin{aligned}(\beta_2-\beta_1)^2 &= \beta_1^2+\beta_2^2-2\beta_1\beta_2\\ &= \frac{4\omega^2V^2}{g^2}-\frac{4R\omega^2}{g} = \frac{4\omega^2}{g^2}(V^2-Rg),\end{aligned}$$

이므로 $\beta_2-\beta_1 = \dfrac{2\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}$이다. 그러므로

$$P_1P_2 = 2R\sin\left(\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\right),$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. (엄밀히 말하면 이를 위해서는 사인값이 음이 아니어야, 즉 $\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\le\pi$여야 한다. 그렇지 않으면 거리는 이 식의 절댓값이다.)

검산

- $V^2\to gR^+$이면 두 앙각이 모두 45°로 가까워지므로 P_1과 P_2는 하나로 합쳐져야 한다. 실제로 공식은 0으로 수렴한다.

- $\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$를 직접 확인하자: $\beta_1\beta_2 = (2V\omega/g)^2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$이고, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi - \alpha_1$이므로 이는 $(2V\omega/g)^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 = (4V^2\omega^2/g^2)(gR/2V^2)$가 되어 예상과 일치한다.
- 수치적으로, $g = 9.8$, $R = 10$, $V = 14$, $\omega = 0.3$ (SI 단위)으로 두 궤적을 단계별로 계산하면 현의 길이가 약 5.97 m로 나와, $20\sin\left(0.3\sqrt{98}/9.8\right) \approx 5.969$와 일치한다.

흔한 실수

- 포를 어떤 연직 평면으로든 조준할 수 있다는 사실을 잊는 것. 첫 번째 부분은 사정거리만의 문제이지, 표적이 마침 어디에 있는지의 문제가 아니다.
- $\beta_1\beta_2$가 왜 양수인지 밝히지 않고 $\beta_1^2\beta_2^2$의 제곱근을 취하는 것.
- $P_1P_2 = R(\beta_2 - \beta_1)$이라고 쓰는 것. 이는 직선거리가 아니라 호의 길이(arc length)이다.

STEP 너머

움직이는 표적을 맞히는 것은 작은 **추적**(*pursuit*) 또는 **요격**(*interception*) 문제이다. 먼저 명중 시각을 구하고, 그다음에 조준 방향을 구한다. 두 방정식에서 매개변수를 소거하여 다항식을 얻은 뒤, 그 다항식을 풀지 않고 계수로부터 필요한 정보를 읽어 내는 것은 대학에서 끊임없이 쓰게 될 기법이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 회전 운동을 이처럼 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1999, 문제 12

확률과 통계 • 베이즈 정리

> **STEP II 1999, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q12

핵심 아이디어

이 문제는 모수가 남아 있는 상태의 베이즈(Bayes) 정리(Bayes' theorem)이다. 전확률 법칙(law of total probability)으로 $\mathrm{P}(S)$를 구하고 나면 두 조건부 확률(conditional probability)은 모두 p에 대한 간단한 유리함수(rational function)가 되고, 각각 허용된 구간에서 단조(monotonic)이다. 따라서 각 검사관의 절차에서 "최댓값"은 구간 $0 \le p \le \frac{1}{3}$의 끝점에서 나타나며, 흥미로운 부분은 이것이 단 하나의 관측으로 추정하는 일에 대해 무엇을 말해 주는가이다.

풀이

조건부 확률

임의로 고른 칩이 각각 A, B, C에서 만들어졌다는 사건을 A, B, C라 하고, 그 칩이 정상이라는 사건을 S라 하자. 이 세 사건은 표본공간(sample space)을 분할(partition)하며,

$$\mathrm{P}(A) = 2p, \quad \mathrm{P}(B) = p, \quad \mathrm{P}(C) = 1 - 3p,$$
$$\mathrm{P}(S \mid A) = \tfrac{7}{10}, \quad \mathrm{P}(S \mid B) = \tfrac{8}{10}, \quad \mathrm{P}(S \mid C) = \tfrac{9}{10}.$$

이다. 전확률 법칙에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= 2p \cdot \tfrac{7}{10} + p \cdot \tfrac{8}{10} + (1 - 3p) \cdot \tfrac{9}{10} \\ &= \tfrac{1}{10}\left(14p + 8p + 9 - 27p\right) = \tfrac{1}{10}(9 - 5p).\end{aligned}$$

이다. $0 \le p \le \frac{1}{3}$ 전체에서 $9 - 5p > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다. 베이즈 정리에 의해

$$\mathrm{P}(A \mid S) = \frac{\mathrm{P}(S \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{\frac{14p}{10}}{\frac{9-5p}{10}} = \frac{14p}{9 - 5p},$$

이고, 마찬가지로

$$\mathrm{P}(C \mid S) = \frac{\frac{9}{10}(1-3p)}{\frac{1}{10}(9-5p)} = \frac{9(1-3p)}{9-5p} = \frac{9-27p}{9-5p}.$$

이다.

첫 번째 검사관의 추정값

p가 0에서 $\frac{1}{3}$까지 증가하면 분자 $14p$는 증가하고 양수인 분모 $9-5p$는 감소하므로, $\mathrm{P}(A \mid S)$는 순증가한다. (같은 말로, 그 도함수(derivative)는 $126/(9-5p)^2 > 0$이다.) 따라서 최댓값은 오른쪽 끝점 $p = \frac{1}{3}$에서 나타나며, 그 값은

$$\frac{14/3}{9-5/3} = \frac{14/3}{22/3} = \frac{7}{11}.$$

이다. 그러므로 첫 번째 검사관의 추정값은 $\hat{p} = \frac{1}{3}$이다.

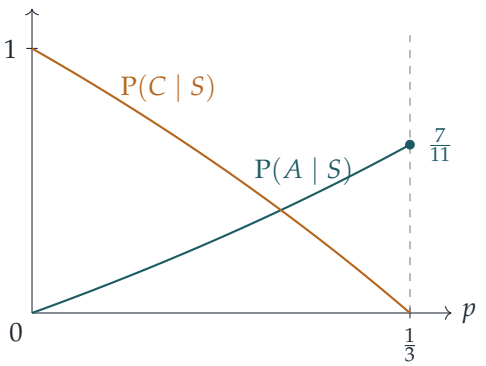
두 번째 검사관의 추정값

> **생각해 보기** $\mathrm{P}(C \mid S)$는 증가하는가, 감소하는가? p가 커지면 분자와 분모가 모두 감소한다.

분자와 분모가 같은 방향으로 움직이면 답을 바로 읽어 낼 수 없으므로, 몫의 미분법(quotient rule)으로 미분한다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{9-27p}{9-5p} = \frac{-27(9-5p)+5(9-27p)}{(9-5p)^2} = \frac{-243+135p+45-135p}{(9-5p)^2} = \frac{-198}{(9-5p)^2} < 0.$$

따라서 $\mathrm{P}(C \mid S)$는 $[0, \frac{1}{3}]$에서 순감소하고, 최댓값은 $p = 0$에서 나타나며 그 값은 1이다. 두 번째 검사관의 추정값은 $\hat{p} = 0$이다.



논평

두 검사관은 똑같이 타당한 단 하나의 관측에 같은 방법을 적용했는데도, 허용된 범위의 정반대 양 끝에 이른다. 바로 $\hat{p} = \frac{1}{3}$(C에서 나온 칩이 하나도 없음)과 $\hat{p} = 0$(모든 칩이 C에서 나옴)이다. 각 추정값은 그저 "내 칩을 만든 제조사가 가능한 한 흔해지게 하는 p의 값"일 뿐이며, 크기가 1인 표본은 필연적으로 이런 결과를 낳는다. 두 번째 추정값은 첫 번째 검사관의 칩과도 모순되는데, $p = 0$이라는 것은 A가 칩을 하나도 만들지 않는다는 뜻이기 때문이다. 어느 추정값도 믿을 만하지 않다. 관측 하나에 담긴 정보는 p를 추정하기에 턱없이 부족하며, (각 제조사별 개수를 포함한) 더 큰 표본이 필요하다.

칩이 정상이라는 사실이 거의 아무런 역할도 하지 않는다는 점도 눈여겨볼 만하다. "정상이고 A에서 나옴"의 우도(likelihood)는 $\frac{7}{10} \cdot 2p$이며, 이는 $2p$ 자체와 같은 곳에서 최대가 된다. 인수 $\frac{7}{10}$은 p에 의존하지 않기 때문이다.

검산

- $p = 0$이면 모든 칩이 C에서 나오므로 $\mathrm{P}(C \mid S)$는 1, $\mathrm{P}(A \mid S)$는 0이어야 한다. 두 공식 모두 이와 일치한다.
- 마찬가지로 $\mathrm{P}(B \mid S) = 8p/(9 - 5p)$이고, 세 조건부 확률의 합은

$$\frac{14p + 8p + 9 - 27p}{9 - 5p} = 1.$$

  이다.
- $p = 0.2$일 때 공식은 $\mathrm{P}(A \mid S) = 0.35$, $\mathrm{P}(C \mid S) = 0.45$를 준다. 칩 400 000개를 시뮬레이션한 결과는 0.3505와 0.4505였다.

흔한 실수

- 도함수를 0으로 놓고 극점(turning point)을 찾는 것. 극점은 없다. 두 최댓값은 모두 $[0, \frac{1}{3}]$의 끝점에서 나타난다.
- $\mathrm{P}(C \mid S)$에는 세심한 논증이 필요하다는 점을 잊는 것. 분자와 분모가 모두 감소하므로 "분자가 작아진다"는 것만으로는 충분하지 않다.

STEP 너머

두 검사관이 하고 있는 일은 사실상 최대우도추정(maximum likelihood estimation), 즉 자신이 관측한 것이 가장 일어날 법해지는 모수 값을 고르는 일이다. 관측이 하나뿐이면 최대

우도추정값은 모수 공간(parameter space)의 경계에 놓이는 경우가 많은데, 이는 이 방법이 제대로 작동하려면 데이터가 충분히 많아야 한다는 경고이다. 베이즈주의자(Bayesian)라면 대신 p에 사전분포(prior distribution)를 두고 칩 하나하나를 볼 때마다 이를 갱신할 것이며, 이렇게 하면 단 하나의 관측으로부터 이런 극단적인 결론을 내리는 일을 피할 수 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 두 관점을 모두 다룬다.

풀이

STEP II 1999, 문제 13

확률과 통계 • 연속확률변수

> **STEP II 1999, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q13

핵심 아이디어

역학 단원으로 분류되어 있지만, 이 문제는 사실 연속확률변수(continuous random variable)에 관한 문제이다. **짧은** 조각이 간단한 분포를 따른다는 점만 알아차리면 모든 것이 쉬워진다. 막대가 부러지는 지점이 막대 위에서 균등하게 분포하면, 짧은 조각의 길이는 전체 길이의 $[0, \frac{1}{2}]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 비율 R는 짧은 조각의 길이에 대한 증가함수이므로, "$R < r$"는 짧은 조각만에 관한 명제로 바뀐다. 이로부터 분포함수(distribution function)를 얻고, 이를 미분하면 확률밀도함수를 얻는다.

풀이

R의 분포

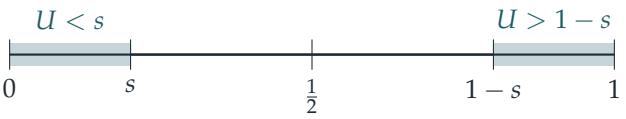
막대의 길이를 1로 놓자. 비율은 단위에 의존하지 않는다. 부러지는 지점이 한쪽 끝에서 거리 U만큼 떨어져 있다고 하고, U는 $[0,1]$에서 균등분포를 따른다고 하자. 두 조각의 길이는 U와 $1-U$이므로, 짧은 조각의 길이는

$$S = \min(U, 1-U),$$

이고 긴 조각의 길이는 $1-S$이다. 그러면 $0 \le S \le \frac{1}{2}$이고

$$R = \frac{S}{1-S}.$$

$0 \le s \le \frac{1}{2}$에 대하여, 사건 $S < s$는 정확히 $U < s$ 또는 $U > 1-s$일 때 일어난다. 이 둘은 서로소인 두 구간이고 길이의 합이 $2s$이므로 $\mathrm{P}(S < s) = 2s$이다. 다시 말해 S는 $[0, \frac{1}{2}]$에서 균등분포를 따른다.



이제 $0 \le r \le 1$이라 하자. 함수 $s \mapsto \dfrac{s}{1-s}$는 $[0, \frac{1}{2}]$에서 순증가한다(도함수가 $1/(1-s)^2 > 0$이다). 따라서 부등식을 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$R < r \iff \frac{S}{1-S} < r \iff S < r(1-S) \iff S < \frac{r}{1+r},$$

여기서 양변에 $1-S$를 곱해도 되는 것은 $1 - S \ge \frac{1}{2} > 0$이기 때문이다. $0 \le r \le 1$이면 $\dfrac{r}{1+r}$의 값은 $[0, \frac{1}{2}]$에 속하므로

$$\boxed{\mathrm{P}(R < r) = \frac{2r}{1+r} \qquad (0 \le r \le 1).}$$

짧은 조각이 긴 조각보다 길 수는 없으므로 R는 항상 $[0,1]$에 속한다. 따라서 $r \le 0$이면 $\mathrm{P}(R < r) = 0$이고 $r \ge 1$이면 $\mathrm{P}(R < r) = 1$이며, 이는 $r = 1$에서 공식의 값이 1인 것과 맞아떨어진다.

생각해 보기 왜 U를 직접 써서 $R = U/(1-U)$로 계산하지 않는가?

그 식은 $U \le \frac{1}{2}$일 때만 옳다. $U > \frac{1}{2}$이면 짧은 조각은 $1-U$이고 $R = (1-U)/U$이다. 이 두 경우로 나누어 계산할 수도 있는데, 대칭성에 의해 각 경우가 $\frac{r}{1+r}$씩 기여한다. S로 넘어가면 이런 경우 나누기를 한 번에 처리할 수 있다.

확률밀도함수, 평균, 분산

분포함수 $F(r) = \dfrac{2r}{1+r} = 2 - \dfrac{2}{1+r}$를 $(0,1)$에서 미분하면 확률밀도함수(probability density function)

$$f(r) = \frac{2}{(1+r)^2} \quad (0 \le r \le 1), \qquad f(r) = 0 \text{ 그 외.}$$

를 얻는다. 검산으로, $\int_0^1 f(r)\,\mathrm{d}r = F(1) - F(0) = 1$이다.

평균(mean)을 구하기 위해 $r = (1+r) - 1$로 쓰면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R) &= \int_0^1 \frac{2r}{(1+r)^2}\,\mathrm{d}r = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+r)^2}\right)\mathrm{d}r \\ &= 2\Big[\ln(1+r) + \frac{1}{1+r}\Big]_0^1 = 2\left(\ln 2 + \tfrac{1}{2} - 1\right) \\ &= 2\ln 2 - 1 \approx 0.386.\end{aligned}$$

이차 적률(second moment)을 구하기 위해 $r^2 = (1+r)^2 - 2(1+r) + 1$로 쓰면

$$\frac{r^2}{(1+r)^2} = 1 - \frac{2}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2}.$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R^2) &= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2}\right)\mathrm{d}r = 2\Big[r - 2\ln(1+r) - \frac{1}{1+r}\Big]_0^1 \\ &= 2\left(1 - 2\ln 2 - \tfrac{1}{2} + 1\right) = 3 - 4\ln 2.\end{aligned}$$

따라서 분산(variance)은

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R) &= \mathrm{E}(R^2) - \big(\mathrm{E}(R)\big)^2 = 3 - 4\ln 2 - \big(4(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 1\big) \\ &= 2 - 4(\ln 2)^2 \approx 0.0782.\end{aligned}$$

이다. $\ln 2$ 항들이 상쇄되어 이렇게 깔끔한 꼴이 남는다.

검산

- $r = 1$에서 확률은 당연히 1이다. $r = \frac{1}{2}$에서는 $\frac{2}{3}$이다. 긴 조각이 짧은 조각의 두 배보다 길어지는 것은 정확히 부러지는 지점이 막대의 양 끝 3분의 1 구간에 떨어질 때이고, 이 구간들의 길이의 합은 $\frac{2}{3}$이다.
- 평균 0.386은 0과 1 사이에 있고 $\frac{1}{2}$보다 작다. 이는 확률밀도함수가 $r = 0$에서 2로부터 $r = 1$에서 $\frac{1}{2}$로 감소한다는 사실과 잘 맞는다.
- 무작위로 10^6번 부러뜨린 시뮬레이션에서 표본평균은 0.3862, 표본분산은 0.0783이었다. 이론값은 $2\ln 2 - 1 = 0.38629$와 $2 - 4(\ln 2)^2 = 0.07819$이다.

흔한 실수

- 모든 U에 대하여 $R = U/(1-U)$로 놓는 것. 이 값은 1보다 클 수 있으므로 짧은 조각과 긴 조각의 비율이 아니다.
- 부러지는 지점이 양쪽 끝 어느 쪽 근처에도 있을 수 있다는 것을 잊어서 $\mathrm{P}(R < r) = \frac{r}{1+r}$를 얻는 것.
- 짧은 조각의 평균 $\frac{1}{4}$를 써서 $\mathrm{E}(R) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$로 계산하는 것. 일반적으로 $\mathrm{E}\big(g(S)\big) \neq g\big(\mathrm{E}(S)\big)$이다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 확률변수를 변환할 때 쓰는 표준적인 "분포함수 기법(distribution function technique)"이다. g가 증가함수이고 $Y = g(X)$이면 $F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$이고, 이를 미분하면 변수변환 공식(change-of-variables formula) $f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\mathrm{d}g^{-1}/\mathrm{d}y\right|$를 얻는다. 같은 아이디어는 순서통계량(order statistics)과, 세 조각으로 삼각형을 만들 수 있을 확률과 같은 고전적인 막대 부러뜨리기 문제(broken-stick problem)로 이어진다. 연속확률변수의 변환에 대해서는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 읽어 보기 좋다.

풀이

STEP II 1999, 문제 14

확률과 통계 • 최적 정지

> **STEP II 1999, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q14

핵심 아이디어

주사위에는 기억이 없다. 다시 던지기로 결정할 때마다 같은 게임의 맨 처음으로 되돌아가는 것이므로, 그 시점부터 기대할 수 있는 최선은 똑같은 수 V, 곧 게임 전체의 최대 기대 점수(expected score)이다. 그러면 매번 던진 뒤의 결정은 단순한 비교가 된다. 지금 가진 수가 V보다 크면 그 수를 갖고, 그렇지 않으면 다시 던진다. 이것을 식으로 적으면 V에 대한 방정식 하나가 나오고, 그 방정식을 풀면 값과 전략(strategy)을 모두 알 수 있다.

풀이

설정하기

1이 나온 던지기를 **강제 종료**(*forced*)라고 부르자. 게임은 그 자리에서 점수 1로 끝난다. 그 밖의 던지기 결과 $x \in \{2,3,4,5,6\}$이 나온 뒤에는 멈출지(점수 x) 계속할지를 선택한다. 모든 점수는 1과 6 사이에 있으므로, 모든 전략의 기대 점수는 $[1,6]$에 속한다.

$$V = \text{어떤 전략으로든 얻을 수 있는 가장 큰 기대 점수}$$

라 하자(엄밀히는 모든 전략에 대한 최소 상계(least upper bound)이며, 이 값이 실제로 달성됨을 곧 보게 된다).

점수 4를 얻는 전략

다음 전략을 생각하자. **4, 5, 6 중 하나가 나오는 즉시 멈춘다**(물론 1이 나와도 멈춘다). 이 전략의 기대 점수를 E라 하자. 첫 번째 던지기에 대해 조건화(conditioning)한다. 각각 확률(probability) $\frac{1}{6}$로 $1,4,5,6$이 나오고 게임은 그 점수로 끝난다. 확률 $\frac{2}{6}$로 2 또는 3이 나오는데, 이때는 다시 던지고, 주사위에는 기억이 없으므로 거기서부터의 기대 점수는 다시

E이다. 따라서

$$E = \tfrac{1}{6}(1+4+5+6) + \tfrac{2}{6}E \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{4}{6}E = \tfrac{16}{6} \quad \Longrightarrow \quad E = 4.$$

(멈추지 않고 n번 던질 확률이 $(\tfrac{1}{3})^n \to 0$이므로 게임은 확률 1로 끝난다.) 그러므로 $V \geq 4$이다.

어떤 전략도 4를 넘을 수 없다

아무 전략이나 하나 택하자. 이 전략은 지금까지 던진 결과 전체에 의존해도 된다. 첫 번째 던지기 결과 x를 보자.

- $x = 1$이면 점수는 1이다.
- $x \geq 2$이고 전략이 멈추면 점수는 x이다.
- $x \geq 2$이고 전략이 계속하면, 이제부터 하는 일은 새로 시작한 같은 게임에 대한 어떤 전략일 뿐이다(앞선 던지기는 나중 던지기에 영향을 줄 수 없다). 따라서 여기서부터의 기대 점수는 많아야 V이다.

어느 경우든 $x \geq 2$일 때의 기대 점수는 많아야 $\max(x, V)$이다. 그러므로 모든 전략의 기대 점수는 많아야

$$g(V) = \tfrac{1}{6}\Big(1 + \sum_{x=2}^{6} \max(x, V)\Big),$$

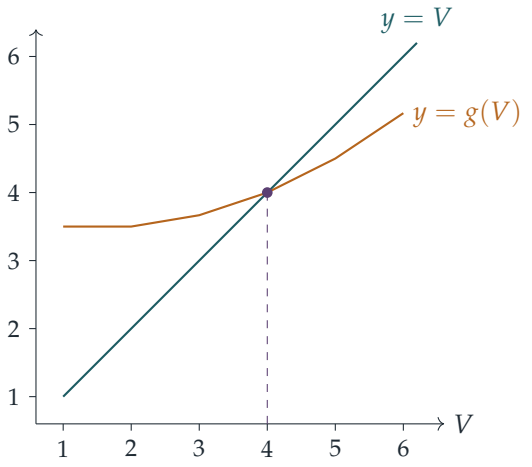
이고, 전략들에 대한 최소 상계를 취하면 $V \leq g(V)$를 얻는다.

생각해 보기 부등식(inequality) $V \leq g(V)$는 어떻게 V를 결정하는가?

$h(V) = g(V) - V$를 보자. 각 항 $\max(x, V)$는 V가 증가할 때 변화율 0 또는 1로 증가하고, 그런 항은 다섯 개뿐이므로 g의 증가율은 많아야 $\frac{5}{6}$이다. 따라서 h는 순감소한다. $V = 4$에서

$$g(4) = \tfrac{1}{6}(1+4+4+4+4+5+6) = \tfrac{24}{6} = 4,$$

이므로 $h(4) = 0$이고, 모든 $V > 4$에 대해 $h(V) < 0$이다. $h(V) \geq 0$이므로 $V \leq 4$여야 한다.



결론

두 부분을 합치면 $V = 4$이다. 가능한 최대 기대 점수는 4이고, 이는 4, 5, 6이 나오면 멈추고 2 또는 3이 나오면 다시 던져서 얻어진다. 이것은 바로 "던진 결과가 V 이상이면 멈춘다"라는 규칙이다. 2나 3은 계속해서 기대할 수 있는 4보다 나쁘고, 5나 6은 그보다 좋다.

4는 비기는 경우이다. 4에서 멈추면 4를 얻고, 계속해도 기대 점수는 4이다. 따라서 "5 또는 6에서만 멈춘다"도 똑같이 좋다. 같은 조건화로

$$E' = \tfrac{1}{6}(1+5+6) + \tfrac{3}{6}E' \quad \Longrightarrow \quad E' = 4.$$

다른 규칙은 모두 엄밀히 더 나쁘다. 예를 들어 3 이상에서 멈추면 $\frac{1+3+4+5+6}{5} = \frac{19}{5}$이고, 6에서만 멈추면 $\frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$이다.

검산

"1과 집합 S에 속한 눈에서 멈춘다"라는 규칙에 대해 쓸 수 있는 깔끔한 지름길이 있다. 매번 던질 때 게임이 끝날 확률은 같고, 끝나는 눈은 $\{1\} \cup S$의 어느 것이든 같은 가능성으로 나오므로, 기대 점수는 그 눈들의 평균이다. $S = \{4,5,6\}$이면 $\frac{16}{4} = 4$이고, $S = \{5,6\}$이면 $\frac{12}{3} = 4$이다. 이런 규칙 32가지를 모두 정확히 확인해 보았더니, 4를 주는 것은 이 두 가지뿐이고 그다음으로 좋은 값은 $\frac{19}{5}$였다. 4 이상에서 멈추는 게임을 400 000번 시뮬레이션(simulation)한 결과 평균은 3.998이었다.

흔한 실수

- 한 번 던진 결과의 평균인 3.5를 계속하는 것의 가치로 쓰는 것. 계속하면 다시 던질 선택권이 남아 있으므로 그 가치는 3.5보다 크다. 따라서 3.5와 비교하는 것으로는 "4 이상에

서 멈춘다"를 정당화할 수 없다.

- 1이 강제 종료라는 점을 잊고, 마치 위험 없이 영원히 던질 수 있는 것처럼 계속하는 것의 가치를 적는 것.
- 문턱값 전략(threshold strategy)만 확인하고, 지난 결과에 의존하는 더 교묘한 규칙이 왜 더 나을 수 없는지는 설명하지 않는 것. 위의 무기억성(memorylessness) 논증은 모든 전략을 다룬다.

STEP 너머

이것은 **최적 정지**(*optimal stopping*)의 작은 예이고, 방정식 $V = g(V)$는 동적 계획법(dynamic programming)과 마르코프 결정 과정(Markov decision process)의 기본 도구인 **벨만 방정식**(*Bellman equation*)이다. 같은 추론으로 금융에서 아메리칸 옵션(American option)의 가격을 매기고, 유명한 비서 문제(secretary problem)를 푼다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 여기서 쓴 조건화 논증을 다루고, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 같은 맥락의 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 1999, 문제 1

순수수학 • 삼차방정식의 근

STEP III 1999, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q1

핵심 아이디어

여기서 쓰는 모든 것은 비에트(Vieta)의 공식, 즉 근과 계수의 관계(Vieta's formulas)에서 나온다. 세 근이 α, β, γ인 삼차방정식(cubic) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$에 대하여

$$\alpha + \beta + \gamma = p, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \qquad \alpha\beta\gamma = r.$$

등비수열(geometric progression)은 가운데 항을 중심으로 **곱셈적으로** 대칭이므로, 곱 r와 비 q/p가 가운데 근을 가려낸다. 반면 등차수열(arithmetic progression)은 **덧셈적으로** 대칭이므로, 이번에는 합 p가 가운데 근을 가려낸다.

풀이

소문항 (i)

세 근이 a/k, a, ak라고 하자. a/k가 의미를 가지려면 $k \neq 0$이어야 하고, 세 근의 곱이 $r \neq 0$이므로 $a \neq 0$이기도 하다. 비에트의 공식에 의해

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{k} + a + ak = a\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ q &= \frac{a}{k} \cdot a + a \cdot ak + \frac{a}{k} \cdot ak = a^2\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ r &= \frac{a}{k} \cdot a \cdot ak = a^3. \end{aligned}$$

p와 q에 같은 괄호가 나타난다. $p \neq 0$이므로 이 괄호는 0이 아니고, 따라서 나눌 수 있다.

$$\frac{q}{p} = a.$$

그러므로 q/p는 근(가운데 근)이다. 그러면 $q = ap$이므로

$$q^3 = a^3p^3 = rp^3, \qquad \text{즉,} \qquad q^3 - rp^3 = 0,$$

이 되어 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

이제 $r = q^3/p^3$이라 하고 $a = q/p$로 놓으면 $r = a^3$이다. 삼차방정식에 $x = a$를 대입하고 $p\,a^2 = q^2/p = q\,a$를 이용하면

$$a^3 - pa^2 + qa - r = a^3 - qa + qa - a^3 = 0,$$

이므로 q/p는 근이다.

$r \neq 0$이므로 $q \neq 0$이고, 따라서 $a \neq 0$이다. 나머지 두 근을 β, γ라 하자. 세 근의 곱은 r이므로, $a \neq 0$으로 나누면

$$a\beta\gamma = r = a^3 \quad \Longrightarrow \quad \beta\gamma = a^2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

를 얻는다.

생각해 보기 $\beta\gamma = a^2$을 어떻게 a/k, a, ak 꼴로 바꿀 수 있을까?

k를 정해야 한다. $\beta\gamma = a^2 \neq 0$이므로 β와 γ 모두 0이 아니다. $k = \gamma/a$로 정의하면 $\gamma = ak$이고 $k \neq 0$이다. 그러면

$$\beta = \frac{a^2}{\gamma} = \frac{a^2}{ak} = \frac{a}{k}.$$

따라서 세 근은 a/k, a, ak이고, 각 근은 바로 앞의 근에 k를 곱하여 얻어진다. 즉 세 근은 등비수열을 이룬다. (β와 γ가 실수가 아니면 공비 k는 복소수일 수도 있다. 이 논증에서는 두 근이 실수일 필요가 없다.)

소문항 (i)과 (ii)를 합치면, $p \neq 0$이고 $r \neq 0$일 때 세 근이 등비수열을 이룰 필요충분조건(if and only if)은 $q^3 = rp^3$임을 알 수 있다.

소문항 (iii)

필요조건(*necessity*). 세 근이 $b - d$, b, $b + d$라고 하자. 세 근의 합은 $3b = p$이므로 가운데 근은 $b = p/3$이다. 삼차방정식에 $x = p/3$을 대입하고 27을 곱하면

$$p^3 - 3p^3 + 9pq - 27r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2p^3 - 9pq + 27r = 0.$$

충분조건(*sufficiency*). 역으로 $2p^3 - 9pq + 27r = 0$이라 하자. 위의 과정을 거꾸로 따라가면 $p/3$은 근이다. 그러면 나머지 두 근의 합은 $p - p/3 = 2p/3$이므로, 어떤 (복소수일 수도

있는) d에 대하여 두 근을 $p/3-d$, $p/3+d$로 쓸 수 있다. 세 근 $p/3-d$, $p/3$, $p/3+d$는 등차수열을 이룬다.

따라서 구하는 필요충분조건은

$$\boxed{2p^3-9pq+27r=0}.$$

검산

- 근이 $1,2,4$(등비수열)이면 $p=7$, $q=14$, $r=8$이다. 이때 $q/p=2$는 가운데 근이고, $q^3=2744=8\cdot 343=rp^3$이다.
- 근이 $1,2,3$(등차수열)이면 $p=6$, $q=11$, $r=6$이고, $2\cdot 216-9\cdot 66+27\cdot 6=432-594+162=0$이다. 등비수열 $1,2,4$에 대해서는 $686-882+216=20\neq 0$이 되어, 기대한 대로이다.
- 복소근을 갖는 것을 포함하여 수천 개의 무작위 삼차방정식에 대해 세 소문항을 모두 수치적으로 검사하였다. 모두 10^{-11} 이내의 오차로 일치하였다.

흔한 실수

- $1/k+1+k$가 왜 o이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 것. 이 값은 p/a와 같고 $p\neq 0$이므로 o이 아니다.
- 소문항 (ii)에서 q/p가 근이라는 것과 $\beta\gamma=(q/p)^2$이라는 것만 보이고, 공비를 제시하지 않은 채 등비수열이라고 단정하는 것.
- 소문항 (iii)에서 한 방향만 증명하는 것. "필요충분조건"이라면 양방향이 모두 필요하다.

STEP 너머

비에트의 공식은 다항식의 계수가 그 근들의 **기본 대칭함수**(*elementary symmetric functions*)임을 말해 준다. 고전적인 정리에 따르면, 근에 대한 모든 대칭다항식은 이 기본 대칭함수들로 나타낼 수 있다. 이것이 다항식의 근을 언제 거듭제곱근으로 구할 수 있는지를 설명하는 갈루아(Galois) 이론의 출발점이다. 덧붙이자면, 치환 $x=y+p/3$은 삼차방정식에서 x^2 항을 없애 주는데, 그 결과로 얻는 축약 삼차방정식(depressed cubic)의 상수항은 $2p^3-9pq+27r$의 상수배이다. 이러한 아이디어가 어디로 이어지는지 알고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 1999, 문제 2

순수수학 • 실근의 개수 세기

STEP III 1999, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q2

핵심 아이디어

(i)에서 도함수(derivative)는 완전제곱식과 e^x의 곱으로 인수분해되므로, 이 함수는 결코 감소하지 않으며 실제로는 순증가(strictly increasing)한다. (ii)에서 새 함수의 도함수는 정확히 $(1+x^2)e^x = k$일 때 0이 되는데, 이것은 바로 (i)의 방정식이다. 이로부터 새 함수가 극점(turning point)을 단 하나, 즉 최솟점 하나만 가진다는 것을 알 수 있다. 그다음부터는 모든 것이 $x \to -\infty$일 때 어떤 일이 일어나는지에 달려 있는데, 이때 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$이다. 수 $2/\pi$는 바로 여기서 나온다.

풀이

소문항 (i)

곱의 미분법(product rule)에 의해

$$f'(x) = 2x\,e^x + (1+x^2)e^x = e^x\left(x^2+2x+1\right) = e^x(1+x)^2.$$

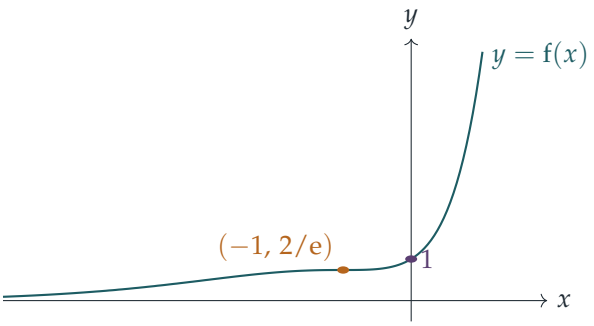
$e^x > 0$이고 $(1+x)^2 \geq 0$이므로, 요구된 대로 모든 x에 대해 $f'(x) \geq 0$이다. 등호는 $x = -1$에서만 성립한다.

생각해 보기 $f'(-1) = 0$인데, f는 정말 순증가하는가?

그렇다. $a < b$이면 $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$이고, 피적분함수는 연속이고 음이 아니며 $[a,b]$의 많아야 한 점에서만 0이 되므로 이 적분값은 0보다 크다. 정상점(stationary point) 하나만으로는 함수가 증가하는 것을 막을 수 없다. 여기서 $x = -1$은 변곡점이기도 한 정상점(stationary point of inflection)이다: f'은 그 양쪽에서 모두 양수이다.

그래프를 그리려면 다음이 필요하다.

- 두 인수가 모두 양수이므로 모든 x에 대해 $\mathrm{f}(x) > 0$이다;
- $\mathrm{f}(0) = 1$이고, 변곡점(point of inflection)은 $(-1, 2/\mathrm{e}) \approx (-1, 0.74)$이다;
- $x \to \infty$일 때 $\mathrm{f}(x) \to \infty$이다;
- $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{f}(x) \to 0$이다. e^x는 어떤 다항식이 증가하는 것보다도 빠르게 감소하기 때문이다($x^2\mathrm{e}^x \to 0$). 따라서 음의 x축이 점근선(asymptote)이다.



이제 f는 연속이고 순증가하며, $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{f}(x) \to 0$이고 $x \to \infty$일 때 $\mathrm{f}(x) \to \infty$이다. 따라서 이 함수는 $(0, \infty)$의 모든 값을 취하고(중간값 정리(intermediate value theorem)), 각 값을 정확히 한 번씩 취한다(순증가). 또 ≤ 0인 값은 결코 취하지 않는데, $\mathrm{f} > 0$이기 때문이다. 그러므로 $(1 + x^2)\mathrm{e}^x = k$는 $k > 0$일 때 정확히 하나의 실근을 갖고, $k \leq 0$일 때는 실근을 갖지 않는다. ■

소문항 (ii)

다음과 같이 놓자.

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{e}^x - 1 - k\tan^{-1} x.$$

곧바로 $\mathrm{g}(0) = 1 - 1 - 0 = 0$이므로 $x = 0$은 항상 근이다. 다음으로,

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{k}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)\mathrm{e}^x - k}{1+x^2} = \frac{\mathrm{f}(x) - k}{1+x^2}.$$

두 경우 모두 $k > 0$이므로, (i)에 의해 수 a로서 $\mathrm{f}(a) = k$를 만족하는 것이 정확히 하나 존재한다. f는 순증가하므로 $\mathrm{f}(x) < k$는 $x < a$일 때, $\mathrm{f}(x) > k$는 $x > a$일 때 성립한다. 따라서

$$\mathrm{g}'(x) < 0, \text{단} x < a, \qquad \mathrm{g}'(x) > 0, \text{단} x > a.$$

그러므로 g는 $(-\infty, a]$에서 순감소하고 $[a, \infty)$에서 순증가하며, $x = a$에서 유일한 최솟값을 갖는다. 특히 g는 a의 양쪽에 각각 많아야 하나의 근을 가지므로, 근은 모두 합쳐 많아야 두 개이다.

a는 어디에 있는가? 두 경우 모두 $k < 1 = \mathrm{f}(0)$이므로 $\mathrm{f}(a) = k < \mathrm{f}(0)$이고, 이로부터 $a < 0$이다. 그러면 $x = 0$은 증가 구간 $[a, \infty)$에 놓인다. 이것이 그 구간의 유일한 근이고,

$$\mathrm{g}(a) < \mathrm{g}(0) = 0.$$

남은 일은 g가 $(-\infty, a)$에서도 근을 갖는지 판정하는 것이다.

$x \to -\infty$일 때의 거동. $\mathrm{e}^x \to 0$이고 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$이므로

$$\mathrm{g}(x) \to -1 + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(k - \frac{2}{\pi}\right) \quad \text{단, } x \to -\infty.$$

이 극한을 L이라 하자. g는 $(-\infty, a]$에서 순감소하므로, 그 구간에서 g의 모든 값은 L보다 작다. 이를 확인하기 위해 $x \le a$와 임의의 $x' < x$를 잡자. $y < x'$이면 언제나 $\mathrm{g}(y) > \mathrm{g}(x')$이므로, $y \to -\infty$로 보내면 $L \ge \mathrm{g}(x')$를 얻는다. 따라서 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x') \le L$이다.

(a) $0 < k \le 2/\pi$. 이때 $L \le 0$이므로 $\mathrm{g}(x) < L \le 0$이 모든 $x \le a$에 대해 성립한다. a의 왼쪽에는 근이 없으므로, 방정식은 **정확히 하나의 실근**, 즉 $x = 0$을 갖는다.

(b) $2/\pi < k < 1$. 이때 $L > 0$이므로 충분히 작은 음수 x에 대해 $\mathrm{g}(x) > 0$이고, 한편 $\mathrm{g}(a) < 0$이다. 중간값 정리에 의해 $(-\infty, a)$에 근이 존재하며, g가 순감소하므로 그 구간의 근은 그것 하나뿐이다. $x = 0$과 함께, 방정식은 **정확히 두 개의 실근**을 갖는다: 음의 근 하나(a보다 작다)와 $x = 0$이다.

> **?** **생각해 보기** 경계인 경우 $k = 2/\pi$는 왜 (a)에 속하는가?

$k = 2/\pi$일 때 왼쪽 극한은 정확히 $L = 0$이다. 감소하는 가지는 아래쪽에서 0에 다가가지만 결코 도달하지 않으므로, 두 번째 근은 나타나지 않는다. 이를 결정짓는 것이 바로 순단조성(strict monotonicity)이다.

검산

- 임의의 점들에서 f를 수치적으로 미분한 값은 $\mathrm{e}^x(1+x)^2$와 일치하며, $\mathrm{f}(-1) = 2/\mathrm{e} \approx 0.736$이다.
- $[-200, 10]$ 위의 촘촘한 격자에서 g의 부호 변화를 세어 보았다. $k = 0.05, 0.3, 0.5, 0.6$과 $2/\pi \approx 0.6366$에서는 근이 하나이고, $k = 0.65, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$에서는 근이 두 개이다. $k = 0.65$일 때 음의 근은 아주 멀리($x \approx -31$ 근처) 있는데, $L = 0.65 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.021$이 매우 작기 때문이다.
- 최솟점은 $a \approx -1.81$이고($k = 0.7$일 때), $a \to 0^-$는 $k \to 1^-$일 때 성립한다. 이는 앞뒤가 맞는다: $k = 1$에서는 $\mathrm{g}'(0) = 0$이 되어 $x = 0$이 중근(double root)이 된다.

흔한 실수

- $x = 0$이 항상 근이라는 사실을 잊고, $-\infty$에서의 부호 변화로부터 나오는 근만 세는 것.
- $\tan^{-1} x \to -\infty$가 $x \to -\infty$일 때 성립한다고 생각하는 것. 이 함수는 유계이며 $-\frac{\pi}{2}$로 수렴한다.
- $f'(-1) = 0$으로부터 f가 $x = -1$에서 극점을 갖는다고 결론짓는 것.

STEP 너머

여기서의 논증은 실해석학(real analysis)의 표준적인 기법을 보여 주는 전형적인 예이다: 어떤 구간에서 연속이고 순단조인 함수는 그 구간에서 많아야 하나의 영점을 가지며, (무한대에서의 극한과 함께 적용한) 중간값 정리는 언제 영점이 존재하는지 알려 준다. 함수의 극점들의 위치를 찾은 다음 극점과 양 끝에서 부호를 확인하여 근의 개수를 세는 방법은 롤의 정리(Rolle's theorem)와 그 따름정리들의 바탕에 있는 아이디어이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 연속성, 중간값 정리, 평균값 정리(mean value theorem)를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 1999, 문제 3

순수수학 • 리만 합과 극한

> **STEP III 1999, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q3

핵심 아이디어

식 $\frac{1}{n}\sum f(1+m/n)$은 $[1,2]$ 위에 세운 너비 $\frac{1}{n}$인 얇은 직사각형 n개의 넓이의 합이고, 직사각형이 얇아질수록 이들은 곡선 아래의 넓이를 정확히 채운다. 나머지 두 극한(limit)은 같은 그림이 모습만 바꾼 것이다. 해야 할 일은 인수 $\frac{1}{n}$을 묶어 내고 각 항을 m/n만의 함수로 쓰는 것이다.

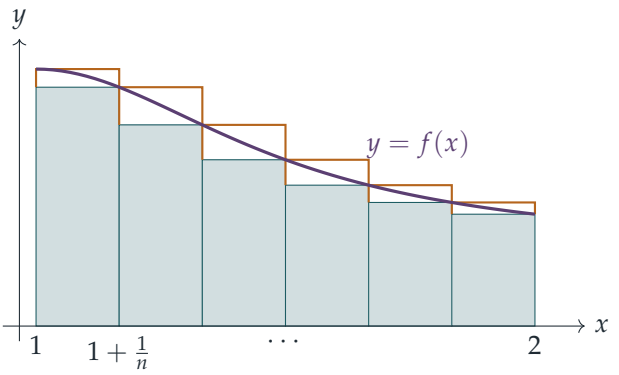
풀이

극한 공식

$[1,2]$를 너비 $\frac{1}{n}$인 띠 n개로 나눈다. m번째 띠는 $\left[1+\frac{m-1}{n},\, 1+\frac{m}{n}\right]$이다. 그 위에 높이가 띠의 오른쪽 끝에서의 f의 값 $f(1+m/n)$인 직사각형을 세운다. 그 넓이는 $\frac{1}{n}f(1+m/n)$이므로

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n)$$

은 직사각형들의 넓이의 합이다.



그림은 감소(decreasing)하는 f를 보여 준다. 색칠한(청록색) 직사각형은 오른쪽 끝의 높이를 쓰므로 곡선 아래에 놓인다. 그 위의 호박색 계단은 왼쪽 끝의 높이를 쓸 때 얻는 직사각형을 나타내며, 이들은 곡선 위로 올라간다. 따라서

$$S_n \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; S_n + (\text{호박색 조각들의 넓이의 합}).$$

이제 호박색 조각을 모두 옆으로 밀어 너비 $\frac{1}{n}$인 한 기둥으로 모은다. 높이들이 차례로 소거되므로(telescope) 쌓인 전체 높이는 $f(1) - f(2)$이다. 그러므로

$$0 \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \;\le\; \frac{f(1)-f(2)}{n} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{극한} n \to \infty,$$

이고 $S_n \to \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$이다. 증가하는 f도 부등식의 방향만 바꾸면 똑같이 된다. 또 웬만한 함수(이를테면 연속(continuous)이고 구간별로 단조(monotonic)인 함수)는 유한 개의 단조인 조각으로 자를 수 있고, 각 조각이 만드는 오차는 $\frac{1}{n}$ 정도의 크기이다. 이로써 다음이 정당화된다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(1+m/n) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

극한 $\ln 2$

? **생각해 보기** $\dfrac{1}{n+m}$을 어떻게 $\dfrac{1}{n} f(1+m/n)$ 꼴로 만들 수 있을까?

분모에서 인수 n을 묶어 낸다.

$$\frac{1}{n+m} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+m/n} = \frac{1}{n} f(1+m/n) \qquad \text{여기서} f(x) = \frac{1}{x}.$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{1+m/n}$$
$$=\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln 1=\ln 2,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (여기서 f는 감소하므로 그림을 이용한 논증이 그대로 적용된다. 심지어 합이 $\ln 2-\frac{1}{2n}$과 $\ln 2$ 사이에 있다는 것까지 알려 준다.)

마지막 극한

$m=1,\ldots,n$에 대하여 m번째 항은 $\dfrac{n}{n^2+m^2}$이다. 분자와 분모를 n^2으로 나눈다.

$$\frac{n}{n^2+m^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(m/n)^2}.$$

공식은 f를 $x=1+m/n$에서 계산하므로, 이에 맞추려면 $f(x)=\dfrac{1}{1+(x-1)^2}$로 두어야 한다. 그러면 $f(1+m/n)=\dfrac{1}{1+(m/n)^2}$이 된다. 이 f는 $[1,2]$에서 감소한다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{n}{n^2+m^2}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1+(x-1)^2}=\Big[\tan^{-1}(x-1)\Big]_1^2$$
$$=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}.$$

(같은 방법으로, $u=x-1$로 치환하면 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$를 얻는다.)

검산

합은 직접 계산할 수 있다. $n=1000$일 때 두 번째 합은 0.69290으로 $\ln 2\approx 0.69315$와 비교되고, 세 번째 합은 0.78515로 $\pi/4\approx 0.78540$과 비교된다. 두 경우 모두 모자라는 양은 약 $\frac{1}{4000}$으로, 그림에서 얻은 한계 $\frac{f(1)-f(2)}{n}=\frac{1}{2000}$ 안에 든다. 또 두 합 모두 극한보다 약간 작게 나오는데, 오른쪽 끝의 높이를 쓰는 감소함수 f라면 마땅히 그래야 한다.

흔한 실수

- 세 번째 극한을 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$로 쓰는 것. 공식은 f를 m/n이 아니라 $1+m/n$에서 계산하므로, 1만큼의 평행이동을 f 안에 넣어야 한다.
- 마지막 항($m=n$)이 $\frac{n}{2n^2}$이고 이것이 $\frac{1}{n}f(2)$와 일치한다는 것을 잊는 것. 합은 $n+1$개의 점이 아니라 n개의 오른쪽 끝점 전체에 걸쳐 있다.

STEP 너머

이들은 리만 합(Riemann sum)이고, 그림을 이용한 논증은 리만 적분(Riemann integral)의 정의의 씨앗이다. 함수는 상합과 하합(upper and lower sums)을 서로 얼마든지 가깝게 조일 수 있을 때 적분가능(integrable)하며, 폐구간(closed interval) 위의 모든 연속함수는 이 성질을 가진다. 같은 아이디어를 거꾸로 써서 합을 적분으로 바꾸어 추정할 수도 있는데, $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$이 수렴(converge)한다는 증명이 그 예이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에는 리만 적분에 관한 아주 읽기 쉬운 장이 있다.

풀이

STEP III 1999, 문제 4

순수수학 • 오일러 공식과 다면체

> **STEP III 1999, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.9 절 **정다면체는 다섯 개뿐이다**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/platonic-solids.html

핵심 아이디어

모서리(edge)의 개수를 두 가지 방법으로 센다. 한 번은 면(face)을 하나씩 돌며 세고, 또 한 번은 꼭짓점(vertex)을 하나씩 돌며 센다. 각각의 셈은 E를 F(또는 V)로 나타내 주고, 이를 오일러(Euler)의 공식에 대입하면 F에 대한 방정식 하나만 남는다. 그 뒤의 분류는 모두 한 가지 관찰로 귀결된다. F는 양수이므로 h도 양수여야 하고, 이 조건을 만족하는 정수 쌍 (m, n)은 몇 개밖에 남지 않는다.

풀이

F에 대한 공식 유도하기

각 면은 m각형이므로 모서리를 m개 가진다. 모든 면을 돌며 각 면의 모서리를 세면 mF가 된다. 그런데 각 모서리는 정확히 두 면의 경계이므로, 이렇게 세면 모든 모서리가 두 번씩 세어진다.

$$mF = 2E.$$

마찬가지로 각 꼭짓점에서 모서리 n개가 만나므로, 꼭짓점마다 모서리를 세면 nV가 된다. 각 모서리는 끝점을 정확히 두 개 가지므로, 이 셈에서도 모든 모서리가 두 번씩 세어진다.

$$nV = 2E.$$

따라서 $E = \frac{1}{2}mF$이고 $V = \frac{2E}{n} = \frac{mF}{n}$이다. 이를 $V - E + F = 2$에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2$$
$$F(2m - mn + 2n) = 4n \qquad (\text{양변에 } 2n\text{을 곱함}).$$

이제 주어진 h를 전개하면

$$4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn,$$

이 되는데, 이는 정확히 위의 괄호 안의 식이다. 따라서 $Fh = 4n$이다. 여기서 F와 n은 양수이므로 $h \neq 0$이고, 양변을 h로 나눌 수 있다.

$$F = \frac{4n}{h}, \qquad h = 4 - (n-2)(m-2),$$

이로써 원하는 식이 증명되었다.

정다면체는 다섯 가지뿐이다

생각해 보기 공식이 아니라 기하학에서 나오는 m과 n에 대한 제약은 무엇인가?

다각형은 변이 적어도 세 개이므로 $m \geq 3$이다. 입체의 꼭짓점에서는 적어도 세 개의 면이 만나야 한다. 두 면만 한 꼭짓점에서 만나면 입체의 꼭짓점이 아니라 납작한 날개 모양이 되기 때문이다. 따라서 $n \geq 3$이기도 하다. 그러면 $m - 2 \geq 1$이고 $n - 2 \geq 1$이다.

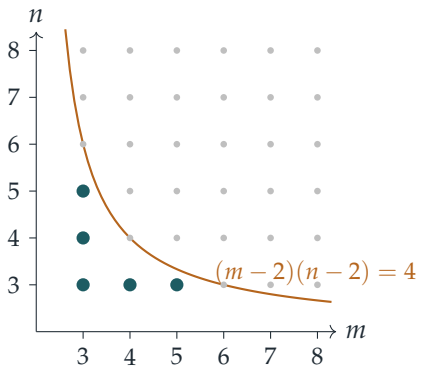
$F > 0$이고 $4n > 0$이므로, 공식에 의해 $h > 0$이어야 한다. 즉,

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

따라서 두 양의 정수 $m-2$와 $n-2$의 곱은 $1, 2, 3$ 중 하나이고, $h = 3, 2, 1$이다. 가능한 인수분해(factorisation)는 다음뿐이다.

- $(m-2)(n-2) = 1$: $m = n = 3$이므로 $h = 3$이다.
- $(m-2)(n-2) = 2$: $(m, n) = (3, 4)$ 또는 $(4, 3)$이므로 $h = 2$이다.
- $(m-2)(n-2) = 3$: $(m, n) = (3, 5)$ 또는 $(5, 3)$이므로 $h = 1$이다.

그림도 같은 사실을 보여 준다. 표시된 점은 $m, n \geq 3$인 격자점(lattice point) 가운데 쌍곡선(hyperbola) $(m-2)(n-2) = 4$의 안쪽에 엄격하게 놓인 점들이다.



각 쌍에 대하여 $F = 4n/h$, $E = \frac{1}{2}mF$, $V = mF/n$이다.

	m	n	h	V	E	F
정사면체	3	3	3	4	6	4
정팔면체	3	4	2	6	12	8
정육면체	4	3	2	8	12	6
정이십면체	3	5	1	12	30	20
정십이면체	5	3	1	20	30	12

예를 들어 정이십면체의 경우 $F = 4 \cdot 5/1 = 20$, $E = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30$, $V = 3 \cdot 20/5 = 12$이다.

따라서 가능한 (m, n)의 조합은 많아야 다섯 가지이다. 표에 이름이 나온 익숙한 다섯 플라톤 입체(Platonic solids)가 보여 주듯이, 각 조합은 실제로 존재한다. 그러므로 정다면체(regular polyhedron)는 정확히 다섯 가지이다.

검산

- 모든 행이 $V - E + F = 2$를 만족한다. 정십이면체의 경우 $20 - 30 + 12 = 2$이다.
- 정육면체는 $V = 8$, $E = 12$, $F = 6$인데, 이는 주사위를 보며 직접 셀 수 있다.
- m과 n을 바꾸면 V와 F가 서로 바뀌고 E는 그대로이다(정육면체와 정팔면체, 정십이면체와 정이십면체). 이것이 쌍대성(duality)이다. 각 면의 중심에 꼭짓점을 하나씩 놓으면 된다.
- 독립적인 검산: 각 꼭짓점에서의 각결손(angle deficit) $2\pi - n\pi(m-2)/m$은 양수여야 하고, V개의 꼭짓점 전체에 대한 합은 4π이다(데카르트(Descartes)의 정리). 이는 다섯 가지 모두에서 성립하며, $3 \le m, n < 200$ 범위를 컴퓨터로 탐색해도 $h > 0$인 다른 쌍은 발견되지 않았다.

흔한 실수

- 모서리를 셀 때 인수 2를 빠뜨리는 것. 각 모서리는 두 면에 속하고 끝점이 두 개이다.
- $n \geq 3$인 이유를 말하지 않는 것. 이 조건이 없으면 $n = 2$일 때 모든 m에 대해 $h = 4$가 되어 무수히 많은 "해"가 생긴다.
- 개수 세기만으로 "정확히 다섯 가지"라고 결론 내리는 것. 이 논증은 **많아야** 다섯 가지임을 보일 뿐이다. 각 경우가 존재함을 보이려면 실제 입체가 필요하다.

STEP 너머

오일러의 공식은 위상수학(topology)의 출발점이다. 수 $V - E + F$(**오일러 지표**(Euler characteristic))는 곡면을 면으로 나누는 방법과 관계없이 항상 같으므로, 구에서는 2, 원환면(torus)에서는 0 등이 된다. 원환면에서 같은 논증을 되풀이하면 정사각형 격자처럼 무수히 많은 "정규" 타일링이 나온다. 다섯 입체의 대칭군(symmetry group)은 군론(group theory) 입문 강의에서도 중심적인 예이다. 생생한 설명을 원한다면 Richeson의 *Euler's Gem*(오일러의 보석)을 읽어 보라. Armstrong의 *Basic Topology*(기초 위상수학)는 이 아이디어를 더 깊이 다룬다.

풀이

STEP III 1999, 문제 5

순수수학 • 피보나치 항등식과 수학적 귀납법

STEP III 1999, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q5

핵심 아이디어

이것은 피보나치 수열(Fibonacci sequence)을 $u_n = F_{n+1}$이 되도록 한 칸 밀어 놓은 것이다. 첫 번째 항등식(identity)을 보이려면 u_{n+2}와 u_{n-1}을 모두 가운데 두 항 u_{n+1}과 u_n으로 나타낸다. 그러면 교차항이 서로 소거된다. 두 배 공식(doubling formulae)은 두 명제를 함께 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. 점화식(recurrence)을 통해 각 명제가 서로를 뒷받침하기 때문이다. 홀수 경우를 마무리하는 데 필요한 도구가 바로 첫 번째 항등식이다.

풀이

첫 번째 항등식

$n \geq 1$을 고정하면 $u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}$가 모두 정의된다. 점화식으로부터

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad \text{그리고} \qquad u_{n-1} = u_{n+1} - u_n,$$

을 얻는다. 두 번째 식은 $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$에서 나온다. 각각 제곱하여 더하면

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 + u_{n-1}^2 &= \left(u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}u_n + u_n^2\right) + \left(u_{n+1}^2 - 2u_{n+1}u_n + u_n^2\right) \\ &= 2\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right), \end{aligned}$$

이 되고, 이것이 구하는 항등식이다.

두 배 공식

$P(n)$을 다음 두 식이 모두 성립한다는 명제라 하자.

$$u_{2n} = u_n^2 + u_{n-1}^2 \qquad \text{그리고} \qquad u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2.$$

처음 몇 항은 $u_0, u_1, \cdots = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ 이다.

기저 단계(base case). $n = 1$일 때 $u_2 = 2 = 1^2 + 1^2 = u_1^2 + u_0^2$이고 $u_3 = 3 = 2^2 - 1^2 = u_2^2 - u_0^2$이다. 따라서 $P(1)$이 성립한다.

> ? **생각해 보기** 왜 두 공식을 하나씩 따로 증명하지 않고 함께 증명할까?

점화식으로 u_{2n+2}를 구하려면 u_{2n+1}과 u_{2n}이 필요하므로, $n+1$에서의 짝수 공식에는 n에서의 두 공식이 **모두** 필요하다. 또 $n+1$에서의 홀수 공식에는 $n+1$에서의 짝수 공식도 필요하다. 어느 명제도 혼자서는 다음 단계로 나아갈 수 없다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다고 가정하자.

짝수 번째 항. 점화식과 $P(n)$을 차례로 쓰면

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= u_{2n+1} + u_{2n} \\ &= (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + (u_n^2 + u_{n-1}^2) \\ &= u_{n+1}^2 + u_n^2, \end{aligned}$$

이고, 이것은 짝수 공식에서 n을 $n+1$로 바꾼 것이다.

홀수 번째 항. 점화식, 방금 증명한 식, 그리고 $P(n)$을 쓰면

$$\begin{aligned} u_{2n+3} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ &= (u_{n+1}^2 + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) \\ &= 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2. \end{aligned}$$

이 값이 $u_{n+2}^2 - u_n^2$과 같음을 보이고 싶은데, 여기서 첫 번째 항등식이 쓰인다. $n \geq 1$이므로 첫 번째 항등식에서 $u_{n+2}^2 = 2u_{n+1}^2 + 2u_n^2 - u_{n-1}^2$을 얻고, 따라서

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n+3}.$$

$2(n+1)+1 = 2n+3$이고 $(n+1) \pm 1 = n+2,\ n$이므로, 이것은 홀수 공식에서 n을 $n+1$로 바꾼 것이다.

그러므로 $P(n)$이면 $P(n+1)$이다. 기저 단계와 함께, 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

검산

$n = 5$를 넣어 보자. $u_{10} = 89$이고 $u_5^2 + u_4^2 = 64 + 25 = 89$이다. 또 $u_{11} = 144$이고 $u_6^2 - u_4^2 = 169 - 25 = 144$이다. 정확한 정수 연산으로 첫 번째 항등식은 $n \leq 299$인 모든 n에 대하여, 두 배 공식은 둘 다 $n \leq 189$인 모든 n에 대하여 확인하였다. 또한

$u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}) = u_n(u_{n+1} + u_{n-1})$임에 주목하자. 이것은 홀수 번째 항을 나타내는 편리한 다른 형태이다.

흔한 실수

- 짝수 공식 하나만으로 귀납법을 쓰는 것: 귀납 단계에서 u_{2n+1}이 필요하므로 막혀 버린다.
- u_{-1}이 정의되지 않는 $n = 0$에서 첫 번째 항등식을 쓰는 것. 귀납 단계에서는 $n \geq 1$일 때만 이 항등식을 쓴다.
- 첨자가 보통의 피보나치 수에서 한 칸 밀려 있다는 것($u_0 = u_1 = 1$)을 잊고 잘못된 값으로 기저 단계를 확인하는 것.

STEP 너머

두 배 공식을 쓰면 N을 거듭 반으로 나누어 약 $\log_2 N$단계 만에 u_N을 계산할 수 있다. 이것이 "빠른 두 배(fast doubling)" 방법으로, 빠른 거듭제곱(fast exponentiation)과 가까운 방법이다. 그 배경에는 행렬(matrix) 항등식 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$이 있으며, 이 행렬을 제곱하면 두 공식을 한꺼번에 얻는다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이 행렬의 거듭제곱과 고윳값(eigenvalue)을 통해 피보나치 수를 다루고, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)에서 연분수(continued fraction)를 다루는 장에서는 연속한 피보나치 수의 비가 황금비(golden ratio)의 근사분수(convergent)로 다시 등장한다.

풀이

STEP III 1999, 문제 6

순수수학 • 매개변수 곡선과 넓이

STEP III 1999, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q6

핵심 아이디어

주어진 방정식은 $\left(x^{1/n}\right)^2 + \left(y^{1/n}\right)^2 = \left(a^{1/n}\right)^2$이라는 뜻이므로, 사실은 모습을 바꾼 원이다. 따라서 원을 다룰 때와 똑같이 $x^{1/n} = a^{1/n}\cos t$, $y^{1/n} = a^{1/n}\sin t$로 놓은 다음 양변을 n제곱하면 된다. n이 홀수이기 때문에 음수의 실수 n제곱근을 취할 수 있고, 그래서 이 곡선은 네 사분면(quadrant) 모두에 걸쳐 있다.

풀이

매개변수화

n이 홀수이므로 모든 실수 x는 x와 부호가 같은 실수 n제곱근 $x^{1/n}$을 꼭 하나 가지며, $x^{2/n}$은 $\left(x^{1/n}\right)^2$을 뜻한다. $X = x^{1/n}$, $Y = y^{1/n}$, $R = a^{1/n} > 0$이라 쓰면 방정식 $(*)$는

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

즉 반지름이 R인 원이 되고, 이 원은 $X = R\cos t, Y = R\sin t$로 매개변수화(parametrisation)할 수 있다. 양변을 n제곱하면(n이 홀수이므로 이는 $\mathbb{R}$에서의 전단사(bijection)이다)

$$\boxed{x = a\cos^n t, \qquad y = a\sin^n t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.}$$

를 얻는다. 원 위의 모든 점 (X, Y)가 이런 식으로 나타나므로, 곡선 위의 모든 점도 이런 식으로 나타난다.

? **생각해 보기** 이것이 곡선을 그저 "어떤 방식으로" 한 바퀴 도는 것이 아니라, 왜 시계 반대 방향으로 도는 것일까?

사상 $(X, Y) \mapsto (X^n, Y^n)$은 각 좌표의 부호를 보존하므로 각 사분면을 자기 자신으로 보낸다. t가 0에서 2π까지 변할 때 점 $(R\cos t, R\sin t)$는 원을 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돌며, 양의 x축, 제1사분면, 양의 y축, 제2사분면, …의 순서로 지나간다. 그 상 (x, y)도 같은 축과 사분면을 같은 순서로 지나가므로, 역시 원점 둘레를 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돈다. (예를 들어 제1사분면에서는 $x = a\cos^n t$가 a에서 0으로 감소하는 동안 $y = a\sin^n t$는 0에서 a로 증가한다.) $n = 1$이면 이것은 익숙한 원 $x = a\cos t$, $y = a\sin t$일 뿐이다.

$n = 3$일 때의 개형

이제 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$이고, 곡선은 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$이다.

대칭성(*symmetry*). 이 방정식은 $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$, 그리고 x와 y를 맞바꾸는 변환에 대해 변하지 않는다. 따라서 곡선은 두 좌표축과 직선 $y = \pm x$에 대해 대칭이고, 제1사분면 $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$만 살펴보면 충분하다.

절편(*intercept*). $t = 0$일 때는 점 $(a, 0)$에, $t = \frac{\pi}{2}$일 때는 점 $(0, a)$에 있다. 대칭성에 의해 곡선은 $(\pm a, 0)$과 $(0, \pm a)$에서만 좌표축과 만난다. 직선 $y = x$ 위에서는($t = \frac{\pi}{4}$) 점 $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$에 있으며, 이는 각 축 방향으로 약 $0.35a$에 불과하다.

기울기(*gradient*).

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

이므로 $0 < t < \frac{\pi}{2}$에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t.$$

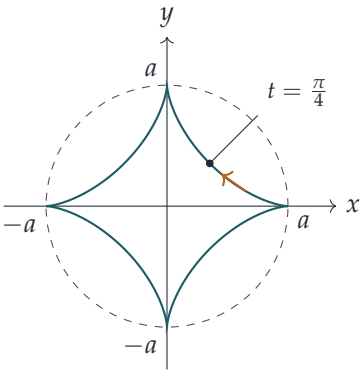
이다. 이 값은 $t \to 0$일 때 0이고, $t \to \frac{\pi}{2}$일 때 $-\infty$로 발산한다. 따라서 곡선은 $(a, 0)$에서 x축에 접하며 도달하고, $(0, a)$에서 y축에 접하며 도달한다. $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$와 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$는 $t = 0$과 $t = \frac{\pi}{2}$에서 모두 0이 된다. 제1사분면의 호는 제4사분면에서 대칭으로 옮겨진 호와 $(a, 0)$에서 만나고, 두 호 모두 그 점에서 x축에 접하므로 두 호가 뾰족한 점을 이루며 만난다. 이 곡선은 네 점 $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$에서 **첨점**(*cusp*)을 가진다.

오목·볼록(*concavity*). $-\tan t$를 x에 대해 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t} > 0 \quad \text{for } 0 < t < \tfrac{\pi}{2}.$$

이다. 따라서 제1사분면의 호는 아래로 볼록(convex)하다. 즉 원처럼 바깥으로 부풀지 않고 원점 쪽으로 휘어 들어간다. 이 호는 현 $x + y = a$보다 아래에 있다. 실제로 $\cos^3 t + \sin^3 t \le \cos^2 t + \sin^2 t = 1$이고, 등호는 첨점에서만 성립한다.

이를 종합하면 꼭짓점이 네 개인 별 모양(**아스테로이드**(*astroid*))을 얻는다. 아래 그림에는 비교를 위해 반지름이 a인 원을 점선으로 함께 그렸다.



$n = 3$일 때의 넓이

위의 도함수를 이용하면

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t = \tfrac{3}{4}a^2\sin^2 2t. \end{aligned}$$

이다. $\sin^2 2t = \frac{1}{2}(1-\cos 4t)$이고 $\cos 4t$를 $[0, 2\pi]$에서 적분하면 0이므로

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

이다. 따라서

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\pi = \boxed{\frac{3\pi a^2}{8}}.$$

이다. 곡선을 시계 반대 방향으로 돌기 때문에 이 공식이 양의 넓이를 주며, 바로 이 때문에 첫 번째 부분에서 방향이 중요했던 것이다.

검산

- 아스테로이드는 넓이가 $2a^2$인 마름모 $|x| + |y| \le a$의 내부에 있으므로, 답은 $2a^2$보다 작아야 한다. 실제로 $\frac{3\pi}{8}a^2 \approx 1.178a^2$이다.
- 공식을 쓰지 않는 검산으로, $a = 1$일 때 $4\int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}\mathrm{d}x$를 수치적으로 계산하면 $1.178097\ldots$이 나와 $3\pi/8 = 1.1780972\ldots$과 일치한다.
- $n = 1$일 때 같은 방법을 쓰면 $x\dot{y} - y\dot{x} = a^2$이고 $A = \pi a^2$, 즉 원의 넓이가 나오니 예상대로이다.

흔한 실수

- 음수 x가 왜 허용되는지 설명하지 않고 $x = a\cos^n t$라고 쓰는 것. $x < 0$일 때 $x^{2/n}$이 의미를 갖게 하는(그리고 매개변수화가 곡선 전체를 덮게 하는) 것이 바로 n이 홀수라는 사실이다.
- 곡선을 찌그러진 원처럼 바깥으로 부푼 모양으로 그리는 것. 이계도함수를 보면 곡선은 안쪽으로 휘어 있고, 좌표축 위에 뾰족한 첨점이 있다.
- $[0, \frac{\pi}{2}]$에서만 적분하고 4를 곱하는 것을 잊거나, $-y\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$에서 부호를 틀리는 것(결국 두 항 모두 양수가 된다).

STEP 너머

이 넓이 공식은 **그린 정리**(*Green's theorem*)의 특수한 경우이다. 그린 정리는 어떤 영역 위의 적분을 그 경계를 따라 도는 적분으로 바꾸어 준다. 이것은 경계를 따라 그리면서 넓이를 재는 기계 장치인 구적기(planimeter)의 원리이기도 하다. $|x|^p + |y|^p = 1$ 같은 곡선은 해석학과 선형대수학에서 만나는 ℓ^p 노름(norm)의 "단위원"이기도 하다. 아스테로이드는 $p = \frac{2}{3}$인 경우인데, 이 곡선은 볼록하지 않으므로 노름을 주지 않는다. 아스테로이드는 또한 반지름이 네 배인 원의 안쪽을 따라 굴러가는 원 위의 한 점이 그리는 자취로도 나타난다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)을 참고하라.

풀이

STEP III 1999, 문제 7

순수수학 • 군과 동형사상

> **STEP III 1999, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q7

핵심 아이디어

식 $x+y+axy$는 거의 곱에 가깝다. a를 곱하고 1을 더하면

$$1+a(x*y)=1+ax+ay+a^2xy=(1+ax)(1+ay),$$

이므로, 변수변환(change of variable) $X=1+ax$ 아래에서 연산 $*$는 사실 보통의 곱셈이 모습만 바꾼 것이다. 그러면 군(group)의 모든 성질은 곱셈의 대응하는 성질에서 나오고, 우리가 버려야 할 수는 단 하나, $X=0$에 대응하는 수뿐이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\phi(x)=1+ax$라 쓴다. $a\neq 0$이므로 ϕ는 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 전단사(bijection)이고, 따라서 두 실수 u,v가 같을 필요충분조건은 $\phi(u)=\phi(v)$이다. 위의 항등식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(x*y)=\phi(x)\,\phi(y) \qquad \text{임의의 실수} x,y. \tag{†}$$

결합법칙

양변에 각각 (†)를 두 번 쓰면

$$\phi\big((x*y)*z\big)=\phi(x*y)\,\phi(z)=\phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z),$$
$$\phi\big(x*(y*z)\big)=\phi(x)\,\phi(y*z)=\phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z).$$

실수의 곱셈은 결합법칙(associativity)을 만족하므로 두 식은 같고, ϕ가 일대일(one-to-one)이므로 $(x*y)*z=x*(y*z)$이다. 따라서 $*$는 결합법칙을 만족한다.

(직접 확인하고 싶다면, $(x*y)*z$와 $x*(y*z)$를 모두 전개하면 대칭식 $x+y+z+a(xy+yz+zx)+a^2xyz$가 된다.)

군

? **생각해 보기** 어떤 수를 빼야 하며, 왜 $\mathbb{R}$ 전체를 그대로 둘 수 없을까?

ϕ 아래에서 수 $x=-\frac{1}{a}$는 $\phi(x)=0$에 대응하는데, 0은 곱셈에 대한 역원(multiplicative inverse)이 없다. 구체적으로, 임의의 실수 y에 대하여

$$\left(-\tfrac{1}{a}\right)*y=-\tfrac{1}{a}+y-y=-\tfrac{1}{a},$$

이므로 $-\frac{1}{a}$는 모든 것을 흡수해 버리고, 어떤 수와 연산해도 항등원이 될 수 없다. 그래서

$$G=\mathbb{R}\setminus\left\{-\tfrac{1}{a}\right\},$$

로 잡는데, 이것은 정확히 $\phi(x)\neq 0$인 x들의 집합이다. 네 가지 공리를 확인하자.

닫혀 있음. $x,y\in G$이면 $\phi(x)\neq 0$이고 $\phi(y)\neq 0$이므로, (†)에 의해 $\phi(x*y)=\phi(x)\phi(y)\neq 0$이다. 따라서 $x*y\neq -\frac{1}{a}$이고, $x*y$는 당연히 실수이므로 $x*y\in G$이다. 즉 G는 연산에 대하여 닫혀 있다(closure).

결합법칙. 이는 위에서 모든 실수에 대하여 보였으므로, 특히 G의 원소에 대해서도 성립한다.

항등원. 모든 x에 대하여 $x*0=x+0+0=x$이고 $0*x=x$이며, $\phi(0)=1\neq 0$이므로 $0\in G$이다. 따라서 0이 항등원(identity)이다. (이는 곱셈의 항등원인 $\phi(0)=1$과 맞아떨어진다.)

역원. $x\in G$가 주어졌을 때 $x*y=0$, 즉 $x+y(1+ax)=0$인 y를 찾고자 한다. $1+ax\neq 0$이므로 나눌 수 있고, 따라서

$$x^{-1}=\frac{-x}{1+ax}.$$

이 역원(inverse)은 G에 속한다. 왜냐하면

$$\phi\left(\frac{-x}{1+ax}\right)=1-\frac{ax}{1+ax}=\frac{1}{1+ax}\neq 0,$$

이기 때문이다. 또한 $*$는 교환법칙을 만족하므로(식에서 $x*y=y*x$임이 분명하다) $x^{-1}*x=0$도 성립한다.

네 공리가 모두 성립하므로 $(G,*)$는 군이며(실제로는 가환군(abelian group)이다), 제외되는 수는 $-\frac{1}{a}$이다.

위수가 2인 부분군

0이 아닌 실수들의 곱셈군은 부분군(subgroup) $\{1, -1\}$을 가진다. 이것을 ϕ를 통해 거꾸로 옮기면, $\phi(x) = 1$에서 $x = 0$이고 $\phi(x) = -1$에서 $x = -\frac{2}{a}$이다. 그래서

$$H = \left\{0, -\tfrac{2}{a}\right\}.$$

를 시도해 본다. 이 둘은 G의 서로 다른 두 원소이다($a \neq 0$이므로 $-\frac{2}{a} \neq 0$이고 $-\frac{2}{a} \neq -\frac{1}{a}$이다). 직접 계산하면

$$\left(-\tfrac{2}{a}\right) * \left(-\tfrac{2}{a}\right) = -\tfrac{4}{a} + a \cdot \tfrac{4}{a^2} = 0,$$

이고, $0 * 0 = 0, 0 * \left(-\frac{2}{a}\right) = -\frac{2}{a}$이다. 따라서 H는 닫혀 있고, 항등원을 포함하며, 각 원소는 자기 자신의 역원이다. 그러므로 H는 정확히 두 원소를 가진 $(G, *)$의 부분군이다.

사실 이런 부분군은 이것 하나뿐이다. 위수(order)가 2인 군은 $h * h = e$이고 $h \neq e$인 $\{e, h\}$ 꼴인데, $h * h = 0$은 $h(2 + ah) = 0$을 뜻하므로 $h = -\frac{2}{a}$이다.

검산

$a = 1$로 놓자. 그러면 $x * y = x + y + xy = (1 + x)(1 + y) - 1$이고, 제외되는 수는 -1이며, 위수가 2인 부분군은 $\{0, -2\}$이다. 실제로 $(-2) * (-2) = -4 + 4 = 0$이다. 또한 $2 * 3 = 11$이고 $(1 + 2)(1 + 3) = 12 = 1 + 11$이므로 (†)가 예측하는 대로이다. 컴퓨터로 약 5000개의 무작위 a, x, y, z에 대하여 정확한 유리수 연산으로 항등식 (†), 결합법칙, G에서 닫혀 있음, 항등원 0, 역원 공식, 그리고 $\{0, -\frac{2}{a}\}$가 닫혀 있음을 확인하였다.

흔한 실수

- 역원 $\frac{-x}{1+ax}$ 자체가 G에 속하는지, 또는 $x * y$가 제외된 수와 결코 같지 않은지 확인하는 것을 잊는 실수. 정확히 한 점을 빼는 것을 정당화하는 공리가 바로 닫혀 있음이다.
- 부분군으로 $\{0\}$이나 $\{0, -\frac{1}{a}\}$를 제시하는 실수. 앞의 것은 원소가 하나뿐이고, $-\frac{1}{a}$는 애초에 G에 속하지 않는다.

STEP 너머

사상 $\phi(x) = 1 + ax$는 $(G, *)$에서 군 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$로의 **동형사상**(isomorphism)이다. 즉 한 연산을 다른 연산으로 바꾸어 주는 전단사이다. 동형사상을 한번 찾아내면 모든 구조적 사실이 공짜로 옮겨 오며, 바로 그래서 $\times$에서 위수가 2인 원소가 -1뿐인 것처럼 $(G, *)$에도 위수가 2인 원소가 정확히 하나 있다. 동형사상, 그리고 두 군이 겉모습은 달라도 "같을" 수 있다는 생각은 추상대수학(abstract algebra) 첫 강의의 핵심이다. 이에 대해 읽어 보기에는

Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 1999, 문제 8

순수수학 • 구간별로 정의된 미분방정식

STEP III 1999, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q8

핵심 아이디어

각 구간에서 이 방정식은 진동수가 일정한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이므로, 그 구간에서의 일반해(general solution)는 $\cos nx$와 $\sin nx$의 일차결합이다. 해야 할 일은 이어 붙이는 것뿐이다. 연속성 조건(continuity conditions)이 앞 구간의 끝에서의 y와 y'의 값을 다음 구간의 시작값으로 넘겨준다. 모든 구간의 길이가 2π이므로 시작값이 매번 똑같다는 것이 밝혀지고, 수학적 귀납법(induction)으로 증명할 수 있는 규칙이 드러난다.

풀이

소문항 (i)

$0 < x < 2\pi$에서는 $n = 1$이므로 $y'' + y = 0$이고, 일반해는

$$y = A\cos x + B\sin x.$$

이다. y와 y'이 $x = 0$에서 연속이므로 조건 $y(0) = 0$과 $y'(0) = 1$이 이 해에 적용된다. 즉 $y(0) = A = 0$이고 $y'(0) = B = 1$이다. 따라서

$$y = \sin x \qquad (0 \le x \le 2\pi).$$

이다. 오른쪽 끝에서는 $y(2\pi) = \sin 2\pi = 0$이고 $y'(2\pi) = \cos 2\pi = 1$이다.

소문항 (ii)

$2\pi < x < 4\pi$에서는 $n = 2$이므로 $y'' + 4y = 0$이고

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

이다. $x = 2\pi$에서 y와 y'이 연속이므로, 이 해는 그 점에서 소문항 (i)의 끝에서 구한 값인 $y = 0$과 $y' = 1$을 가져야 한다. $\cos 4\pi = 1$이고 $\sin 4\pi = 0$이므로

$$y(2\pi) = A = 0, \qquad y'(2\pi) = 2B\cos 4\pi = 2B = 1,$$

이다. 따라서 $B = \frac{1}{2}$이고, $2\pi \le x \le 4\pi$에서 $y = \frac{1}{2}\sin 2x$이다. 이로써 요구된 결과가 증명된다.

여기서도 $y(4\pi) = \frac{1}{2}\sin 8\pi = 0$이고 $y'(4\pi) = \cos 8\pi = 1$임에 주목하자. 다음 구간은 정확히 같은 값에서 시작한다. 이로부터 다음 주장을 추측할 수 있다.

주장. 모든 양의 정수 n에 대하여

$$y = \frac{1}{n}\sin nx \qquad \text{단, } 2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi.$$

수학적 귀납법에 의한 증명. $n = 1$인 경우는 소문항 (i)이다. $n = k$일 때 주장이 성립한다고 가정하자. $x = 2k\pi$에서 앞 조각은

$$y = \frac{1}{k}\sin(2k^2\pi) = 0, \qquad y' = \cos(2k^2\pi) = 1,$$

을 준다. $2k^2\pi$는 2π의 정수배이기 때문이다. $2k\pi < x < 2(k+1)\pi$에서 방정식은 $y'' + (k+1)^2 y = 0$이므로

$$y = A\cos(k+1)x + B\sin(k+1)x.$$

이다.

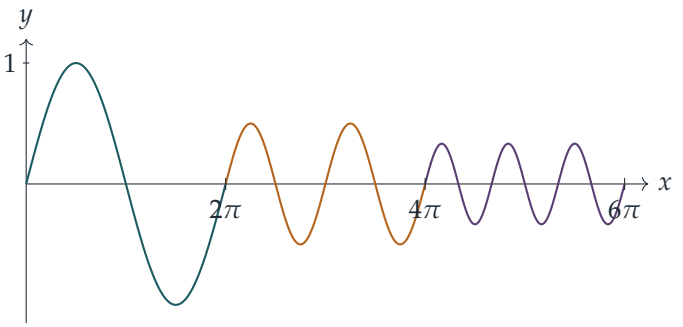
생각해 보기 왼쪽 끝 $x = 2k\pi$에서 $\cos(k+1)x$와 $\sin(k+1)x$의 값은 무엇인가?

그 점에서 $(k+1)x = 2k(k+1)\pi$이고, 이 역시 2π의 정수배이므로 코사인 값은 1, 사인 값은 0이다. 따라서 $x = 2k\pi$에서 y와 y'의 연속성으로부터

$$A = 0, \qquad (k+1)B = 1,$$

을 얻는다. 그러므로 $2k\pi \le x \le 2(k+1)\pi$에서 $y = \dfrac{1}{k+1}\sin(k+1)x$이다. 이것은 $n = k+1$일 때의 주장이며, 수학적 귀납법에 의해 주장은 모든 $n \ge 1$에 대하여 성립한다. □

따라서 $2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi$일 때마다 $y(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$이다. (각 이음점 $x = 2n\pi$에서 이웃한 두 식이 모두 $y = 0$을 주므로 모호함은 없다.)



소문항 (iii)

소문항 (ii)를 이용하면, n번째 구간에서

$$\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} (1-\cos 2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{n^2},$$

이다. 각 적분 한계가 π의 배수이고 $2n$이 정수이므로 $\sin 2nx$는 두 한계에서 모두 0이 되어, 코사인 항의 적분은 0이기 때문이다.

처음 N개의 구간을 더하면

$$\int_0^{2N\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}.$$

이다. 이상적분(improper integral)은 $X\to\infty$일 때 $\int_0^X y^2\,\mathrm{d}x$의 극한이다. $y^2\geq 0$이므로 이것은 X에 대한 증가함수이고, $2(N-1)\pi \leq X \leq 2N\pi$일 때 그 값은 $2(N-1)\pi$와 $2N\pi$에서의 값 사이에 있다. 급수가 수렴(converge)하므로, $N\to\infty$일 때 이 두 값은 모두 $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$로 수렴한다. 따라서

$$\int_0^{\infty} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

이고, 이로써 요구된 결과가 증명된다.

검산

- 각 조각 $\frac{1}{n}\sin nx$는 $y''=-n^2y$를 만족하고, $y=0, y'=1$에서 시작하여 $y=0, y'=1$에서 끝나므로, 조각들은 함숫값과 기울기 모두에서 매끄럽게 이어진다.
- 미분방정식(differential equation)을 수치적으로(4차 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로) 처음 여섯 구간에 걸쳐 풀면 $\frac{1}{n}\sin nx$가 10^{-10} 이내의 오차로 재현되고, 12π까지의 y^2의 적분은 4.685336으로 나와 $\pi(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{36})$과 일치한다.
- 오일러(Euler)의 결과 $\sum 1/n^2=\pi^2/6$을 이용하면 이 적분은 $\pi^3/6\approx 5.168$이다.

흔한 실수

- 초기 조건을 각 구간의 왼쪽 끝 $x = 2(n-1)\pi$가 아니라 모든 구간에서 $x = 0$에 적용하는 것. 여기서 이렇게 해도 우연히 올바른 답이 나오는 것은 시작점이 2π의 배수이기 때문일 뿐이며, 이 사실을 반드시 밝혀야 한다.
- $y' = nB\cos nx$임을 잊는 것. 바로 이 인수 n이 진폭(amplitude) $\frac{1}{n}$을 만들어 낸다.
- 극한이 존재하는 이유를 말하지 않고 적분을 무한급수로 쓰는 것. y^2이 음이 아니라는 사실을 이용하면 이 부분은 쉽게 해결된다.

STEP 너머

이것은 구간별 상수 계수(piecewise-constant coefficients)를 갖는 미분방정식의 간단한 예이다. 이런 방정식은 정해진 시각마다 강성이 바뀌는 용수철을 모형화한다. 각 전환 시점에서 y''은 불연속적으로 뛰지만 해는 여전히 연속이고 미분가능하다. 최종 답 $\pi^3/6$은 미분방정식을 바젤 문제(Basel problem)의 합 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$과 연결해 주는데, 이 합은 대학 학부의 푸리에 급수(Fourier series) 강의에서 파스발 정리(Parseval's theorem)를 이용해 처음 증명하는 경우가 많다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 2계 선형 방정식과 푸리에 급수를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 1999, 문제 9

역학 • 뉴턴의 껍질 정리

STEP III 1999, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q9

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.7 절 **구 껍질 안의 중력**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/shell-theorem.html

핵심 아이디어

크기가 있는 물체(extended body)가 만드는 중력은 그 물체를 이루는 작은 조각들이 끌어당기는 힘의 벡터 합(vector sum)이다. 고리의 경우에는 대칭성(symmetry)이 대부분의 일을 해 준다. 고리의 맞은편에 있는 조각들은 서로의 옆 방향 힘을 상쇄하고, 모든 조각이 입자로부터 같은 거리에 있으므로 단순한 성분 하나만 남는다. 구껍질(shell)의 경우에는 축이 입자를 지나는 고리들로 구껍질을 자르고, 각 조각에 고리의 결과를 적용한 다음, 적분으로 그 조각들을 모두 더한다. 치환(substitution)을 잘 고르면 그 적분이 0으로 깔끔하게 정리된다.

풀이

고리

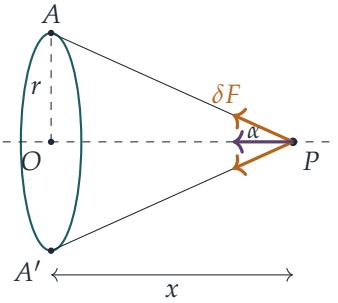
고리를 질량 m인 가늘고 균일한 원으로, 입자를 축 위에서 중심 O로부터 거리 x만큼 떨어진 점 P에 있는 단위 질량의 점으로 모형화한다. P, O와 고리 위의 한 점이 이루는 직각삼각형에서 피타고라스(Pythagoras)의 정리에 의해, 고리 위의 모든 점은 P로부터 같은 거리

$$d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

에 있다.

방향. 고리의 A에 있는 작은 요소 하나를 지름의 반대쪽 점 A'에 있는 같은 크기의 요소와

짝짓는다. 두 요소는 P로부터 같은 거리 d에 있으므로, PA와 PA' 방향으로 같은 크기의 힘으로 끌어당긴다. 이 두 직선은 축에 대하여 서로 대칭이므로, 축에 수직인 성분은 상쇄되고 축 방향 성분은 더해지며, 둘 다 P에서 O를 향한다. 고리 전체가 이러한 짝들로 이루어져 있으므로, 입자에 작용하는 알짜힘은 축 방향이고 고리의 중심을 향한다.



크기. 질량 δm인 요소는 PA 방향으로 크기 $G\,\delta m/d^2$인 힘으로 끌어당긴다. α를 PA와 축 PO 사이의 각이라 하면 $\cos\alpha = x/d$이므로, 이 힘의 O를 향하는 성분은

$$\frac{G\,\delta m}{d^2}\cdot\frac{x}{d} = \frac{Gx\,\delta m}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

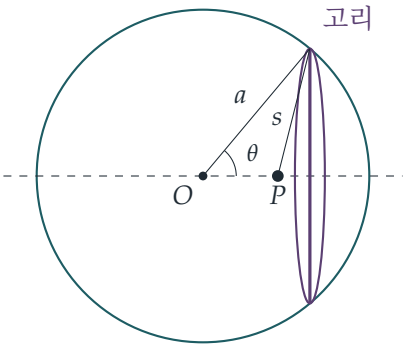
이다. δm에 곱해지는 인수는 모든 요소에 대하여 같으므로, 고리 전체에 대하여 더하면 δm이 m으로 바뀔 뿐이다.

$$F = \frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}},$$

그리고 힘은 중심을 향하므로, 요구한 결과를 얻는다. P가 고리의 반대편에 있으면 x를 $|x|$로 바꾸어 이 식이 성립한다. 다음 부분에서는 x를 부호 있는 거리로 사용하는데, 그러면 부호 있는 x로 쓴 식이 힘의 부호 있는 성분을 올바르게 준다.

구껍질

구껍질의 중심을 O, 반지름을 a, 질량을 M이라 하면, 면밀도(surface density)는 $M/(4\pi a^2)$이다. 입자를 $OP = b < a$인 점 P에 둔다. $b = 0$이면 O에서 보는 모든 방향이 같고 구껍질의 서로 반대쪽 점들이 끌어당기는 힘이 상쇄되므로, 힘은 0이다. 이제부터는 $0 < b < a$로 두고 직선 OP를 축으로 삼아, 그 위의 거리를 O에서 P 쪽 방향으로 잰다.



OP에 수직인 평면들로 구껍질을 얇은 고리들로 자른다. (O에서 OP 방향을 기준으로 잰) 극각 θ와 $\theta + \delta\theta$ 사이의 고리는 반지름이 $a\sin\theta$이고, 중심이 축 위의 위치 $a\cos\theta$에 있으며, 폭이 $a\,\delta\theta$이다. 이 고리의 질량은

$$\delta M = \frac{M}{4\pi a^2} \cdot 2\pi a \sin\theta \cdot a\,\delta\theta = \tfrac{1}{2} M \sin\theta\,\delta\theta.$$

이다. 이 고리의 중심은 P로부터 부호 있는 거리 $a\cos\theta - b$에 있다. 고리의 결과에 의해 이 고리가 P를 끌어당기는 힘은 축 방향이고, 양의 방향(O에서 멀어지며 P를 지나는 방향) 성분은

$$\frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta - b)}{\left((a\cos\theta - b)^2 + a^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta - b)}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}}.$$

이다. 이 부호 규약은 두 경우 모두 옳다. $a\cos\theta > b$이면 고리가 P 너머에 있어 양의 방향으로 끌어당기고, $a\cos\theta < b$이면 반대 방향으로 끌어당긴다. 모든 고리가 같은 축 방향으로 끌어당기므로 전체 힘은 OP 방향이고, 그 성분은

$$F = \frac{GM}{2} \int_0^{\pi} \frac{(a\cos\theta - b)\sin\theta}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

이다.

? 생각해 보기 어떤 치환이 분모를 다루기 쉽게 만들어 줄까?

코사인 법칙(cosine rule)에 의해 $a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$는 P에서 고리까지의 거리 s(그림에서 s로 표시한 선분)의 제곱이다. 따라서

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta, \qquad 2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

로 치환한다. θ가 0에서 π까지 변할 때 s는 $a - b$에서 $a + b$까지 증가한다($b < a$이므로 양수이다). 또한

$$a\cos\theta - b = \frac{a^2 + b^2 - s^2}{2b} - b = \frac{a^2 - b^2 - s^2}{2b}.$$

이다. $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{s\,\mathrm{d}s}{ab}$를 이용하면

$$F = \frac{GM}{2}\int_{a-b}^{a+b}\frac{a^2-b^2-s^2}{2b}\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\frac{s}{ab}\,\mathrm{d}s = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\right)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{GM}{4ab^2}\left[-\frac{a^2-b^2}{s}-s\right]_{a-b}^{a+b}.$$

이다. $s = a+b$에서 괄호 안의 값은 $-(a-b)-(a+b) = -2a$이고, $s = a-b$에서는 $-(a+b)-(a-b) = -2a$이다. 두 값이 같으므로

$$F = \frac{GM}{4ab^2}\big(-2a-(-2a)\big) = 0.$$

이다. 힘은 OP 방향이고 그 OP 방향 성분이 0이므로, 입자는 구껍질에 의한 중력을 전혀 받지 않는다. 이로써 요구한 결과를 얻는다.

검산

- 고리: $x = 0$에서 힘은 0이고(입자가 중심에 있어 힘들이 균형을 이룬다), $x \gg r$이면 모든 질량이 O에 있는 것처럼 Gm/x^2에 가까워진다.
- 구껍질의 바깥: 만약 $b > a$이면 아래끝이 $s = b-a$가 되고, 여기서 괄호 안의 값은 $(a+b)-(b-a) = 2a$이다. 그러면 $F = \frac{GM}{4ab^2}(-4a) = -GM/b^2$로, 전체 질량이 중심에 있는 것처럼 O를 향하는 인력이다. 이것은 뉴턴(Newton)의 또 다른 구껍질 정리로, 적분이 옳다는 좋은 신호이다.
- 수치적으로, 고리 둘레의 점질량 2000개를 더하면 소수점 아래 열째 자리까지 공식과 일치했다. θ에 대한 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 무작위로 고른 여러 $b < a$에 대하여 약 10^{-15}가 나왔고, $a = 2$, $b = 1.3$, $GM = 1$로 무작위 점 2×10^5개를 사용한 몬테카를로(Monte Carlo) 구껍질은 전형적인 크기 $GM/a^2 = 0.25$에 비해 10^{-3}보다 작은 힘을 주었다.

흔한 실수

- 고리의 질량 요소를 $M\,\delta\theta/\pi$로 잡는 것. $\theta = \pi/2$ 근처의 고리들이 더 크므로, 질량은 $\delta\theta$가 아니라 $\sin\theta\,\delta\theta$에 비례한다.
- 고리 공식에서 $|a\cos\theta - b|$를 사용하는 것. P의 양쪽에 있는 고리들은 반대 방향으로 끌어당기며, 바로 그 상쇄가 핵심이다.
- s의 적분 범위를 잘못 잡는 것. P가 안쪽에 있으므로 $\theta = 0$에서 거리는 $b-a$가 아니라 $a-b$이다.

STEP 너머

이것은 뉴턴의 구껍질 정리(shell theorem)이며, 중력에 대한 가우스(Gauss) 법칙을 이용한 더 매끄러운 증명이 있다. 임의의 닫힌 곡면을 지나는 중력장의 선속(flux)은 그 안의 질량에 비례하므로, 대칭성에 의해 속이 빈 구껍질 내부의 장은 0이어야 한다. 같은 수학으로 퍼텐셜(potential)도 구할 수 있는데, 구껍질 내부에서 퍼텐셜이 상수라는 사실은 대학 1학년 벡터 해석(vector calculus)에서 배우는 조화 함수(harmonic function)의 초기 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구껍질 정리와 중력 퍼텐셜을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1999, 문제 10

역학 • 떨어지는 사슬의 충격량

STEP III 1999, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q10

핵심 아이디어

사슬이 무너져 내리는 동안 아직 매달려 있는 부분은 자유낙하(free fall) 상태에 있다. 즉 중력 말고는 그 부분을 당기는 것이 없다. 따라서 각 고리는 처음 있던 자리에서 그대로 떨어지고, 고리마다 달라지는 것은 떨어지는 높이뿐이다. 탁자는 각 고리를 멈추기 위해 고리 하나당 충격량(impulse) 하나를 가한다. 이를 모두 더하면 제곱근들의 합이 되고, n이 클 때 이 합은 $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$에 대한 리만 합(Riemann sum)이다.

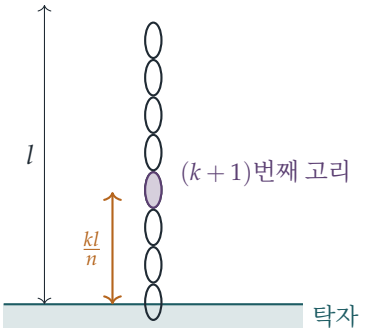
풀이

모형

각 고리의 질량은 $\frac{m}{n}$이고 길이는 $\frac{l}{n}$이다. 고리들은 매끄럽고 사슬은 완전히 유연하므로 미는 힘을 전달할 수 없다. 각 고리를 하나의 입자로 보고, 탁자에 닿는 순간 즉시 정지한다(충돌은 비탄성(inelastic) 충돌이다)고 가정한다.

생각해 보기 아래쪽 고리들은 탁자에 의해 멈추고 있는데, 왜 매달려 있는 사슬 부분은 자유낙하 상태에 있는가?

사슬을 놓았을 때 장력(tension)이 없다면 모든 고리의 가속도는 g이고, 장력이 0인 채로 떨어지는 사슬은 모순 없이 성립한다. 모든 고리가 함께 움직이므로 늘어나지 않고 서로 맞닿은 채로 있기 때문이다. 탁자는 고리를 위로 밀어서 멈추게 하는데, 유연한 사슬은 그 미는 힘을 위쪽 고리들에 전달할 수 없다. 또 고리들이 매끄러우므로 고리 사이에 마찰도 없다. 따라서 아직 공중에 있는 고리에는 중력 이외의 힘이 작용하지 않고, 각 고리는 착지할 때까지 자유낙하한다.



$(k+1)$번째 고리

$(k+1)$번째 고리 아래에는 고리가 k개 있고, 그 전체 길이는 $\frac{kl}{n}$이다. 사슬의 아래쪽 끝이 탁자에 막 닿아 있으므로, $(k+1)$번째 고리는 탁자에 닿기 전까지 거리 $\frac{kl}{n}$만큼 떨어진다. 정지 상태에서 자유낙하하므로, 도착할 때의 속력은 $v^2 = 2gs$로 주어진다.

$$v_k = \sqrt{\frac{2gkl}{n}}.$$

그런 다음 고리가 정지하므로, 운동량(momentum) 변화의 크기는

$$\frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = \frac{m}{n}\sqrt{2gl}\,\sqrt{\frac{k}{n}},$$

이고 방향은 위쪽이다(고리는 아래 방향 운동량 $\frac{m}{n}v_k$를 잃는다). $k = 0$일 때 이 값은 0이다. 맨 아래 고리는 이미 탁자에 닿아 있기 때문이다.

전체 충격량

뉴턴(Newton)의 제3법칙(Newton's third law)에 의해, 탁자가 $(k+1)$번째 고리로부터 받는 충격량은 그 고리의 운동량 변화와 크기가 같고 방향은 아래쪽이다. 고리의 번호는 $k+1 = 1, 2, \ldots, n$이므로, 충돌로 인해 탁자가 받는 전체 충격량은

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = m\sqrt{2gl}\ \cdot\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

이다.

> **생각해 보기** $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k/n}$은 어떤 적분의 근삿값인가?

이것은 폭이 $\frac{1}{n}$인 직사각형 n개의 넓이의 합으로, 각 직사각형의 높이는 $[0,1]$을 나눈 띠들의 왼쪽 끝 $x = 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$에서의 $\sqrt{x}$의 값이다. 따라서 n이 클 때

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \approx \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

이고, 그러므로

$$J \approx \tfrac{2}{3}\, m\sqrt{2gl},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

이 근사가 얼마나 좋은지 알아보자. $\sqrt{x}$는 증가함수이므로, 띠 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$에서 왼쪽 끝의 높이 $\sqrt{k/n}$은 곡선보다 아래에 있고, $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$에서는 곡선보다 위에 있다. 모든 띠에 대해 더하면

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \;\le\; \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{즉} \quad \tfrac{2}{3}\Big(1-\tfrac{1}{n}\Big)^{3/2} \le \frac{J}{m\sqrt{2gl}} \le \tfrac{2}{3}.$$

을 얻는다. 두 경계 모두 $\frac{2}{3}$으로 수렴하므로, 상대 오차(relative error)는 많아야 약 $\frac{3}{2n}$이다.

검산

- 단위: $m\sqrt{gl}$은 질량 × 속력이므로 운동량이고, 충격량이라면 마땅히 그래야 한다.
- 수치로 확인하면, $m = 2$, $l = 3$, $g = 9.8$일 때 $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl} \approx 10.224$이고, 정확한 합은 $n = 10$일 때 9.363, $n = 100$일 때 10.144, $n = 1000$일 때 10.216이다. 비율은 1에 가까워지며, 항상 위의 경계 안에 있다.
- 마지막으로 착지하는 고리는 거의 전체 길이 l만큼 떨어지므로, 속력이 $\sqrt{2gl}$에 가깝다. 모든 질량이 그 속력으로 도착한다면 충격량은 $m\sqrt{2gl}$이 될 것이다. 대부분의 고리는 그보다 덜 떨어지므로, 답이 이 값의 일부라는 것은 타당하다.

흔한 실수

- $(k+1)$번째 고리가 거리 $\frac{(k+1)l}{n}$만큼 떨어진다고 하는 것. 그 아래에는 고리가 k개뿐이다.
- 이미 탁자 위에 놓인 사슬의 일정한 무게까지 포함하는 것. 문제는 충돌로 인한 충격량만을 묻는다.

STEP 너머

모든 고리가 시간 $\sqrt{2l/g}$ 안에 착지하므로, 충돌만으로 탁자가 받는 평균 힘은 $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl}/\sqrt{2l/g} = \frac{2}{3}mg$이다. 실제로 매 순간의 충돌 힘은 이미 탁자 위에 놓인 사슬 무게의 두 배이므로, 탁자 아래에 둔 저울의 눈금은 마지막 고리가 착지하는 순간 $3mg$까지 올라간다. 이처럼 질량이 연속적으로 늘거나 줄어드는 문제(떨어지는 사슬, 로켓, 빗방울)는 뉴턴 제2법칙의 가변 질량(variable-mass) 형태로 다룬다. 자세한 설명은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 1999, 문제 11

역학 • 강체의 회전

> **STEP III 1999, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q11

핵심 아이디어

테 바퀴가 모서리에 올라서면 고정점을 중심으로 회전하는 강체(rigid body)가 되므로, 두 식이면 충분하다. 에너지 보존(conservation of energy)으로 임의의 각에서의 각속력(angular speed)을 구하고, 중심에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 회전축 방향으로 분해하여 수직항력(normal reaction)을 구한다. 이 수직항력이 0이 되는 순간 접촉이 끊어진다. 첫 번째 부분에서 구한 관성 모멘트가 바로 에너지 식에 필요한 값이다.

풀이

관성 모멘트

얇은 테 바퀴의 모든 입자는 중심 C에서 거리 a만큼 떨어져 있으므로, C를 지나고 테 바퀴의 평면에 수직인 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는

$$I_C = \sum \delta m \, a^2 = ma^2.$$

이다. 원주 위의 점 O는 C에서 거리 a만큼 떨어져 있고 새 축은 원래 축과 평행하므로, 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해

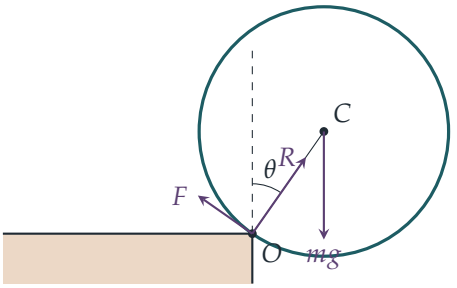
$$I_O = I_C + ma^2 = 2ma^2.$$

이다.

모서리를 넘어 구르기

테 바퀴를 균일한 강체 고리로, 탁자의 모서리를 고정점 O로 모형화한다. 두 면은 모두 거칠고, 마찰(friction)이 충분히 커서 테 바퀴가 결코 미끄러지지 않는다고 가정한다. 즉 탁자

위에서는 구르고, 모서리를 넘어갈 때는 미끄러짐 없이 O를 중심으로 회전한다. OC가 위쪽 연직 방향과 이루는 각을 θ라 하면 테 바퀴가 모서리에 도달하는 순간 $\theta = 0$이고, $\omega = \dot{\theta}$로 쓴다.



생각해 보기 테 바퀴가 모서리에 도달하는 순간, O에 대한 테 바퀴의 각속력은 얼마인가?

속력 v로 미끄러지지 않고 구르는(rolling without slipping) 테 바퀴의 각속력은 v/a이며, 매 순간 테 바퀴의 운동은 접촉점을 중심으로 한 회전이다. 모서리에 도달하는 순간 접촉점이 **바로** O이고, 테 바퀴는 그 점을 중심으로 계속 회전할 뿐이다. 테 바퀴가 접촉을 잃지 않으므로 충돌은 일어나지 않는다. 따라서 $\theta = 0$일 때 $\omega = v/a$이다.

에너지. 테 바퀴가 O와 접촉해 있는 동안 O에서 작용하는 힘은 일을 하지 않으므로(작용점이 정지해 있으므로) 역학적 에너지가 보존된다. 중심은 $a - a\cos\theta$만큼 내려왔으므로

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\left(\frac{v}{a}\right)^2 + mga(1-\cos\theta), \qquad \text{즉} \qquad a\omega^2 = \frac{v^2}{a} + g(1-\cos\theta).$$

이다.

회전축 방향. 중심 C는 O를 중심으로 하는 반지름 a인 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 C에서 O를 향하는 성분 $a\omega^2$을 가진다. 테 바퀴에 작용하는 힘은 무게 mg, OC를 따라 작용하는(즉 O에서 밀어내는) 수직항력 R, 그리고 OC에 수직인 마찰력 F이며, F는 OC 방향의 성분이 없다. CO 방향으로 분해하면

$$mg\cos\theta - R = ma\omega^2.$$

이다. 에너지 식을 대입하면

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{a} - mg(1-\cos\theta) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mv^2}{a}.$$

이다. 이 값은 θ가 커질수록 감소하며, 테 바퀴는 R이 처음으로 0이 될 때 모서리와의 접촉을 잃는다. 이는

$$2g\cos\theta = g + \frac{v^2}{a}, \qquad \text{즉} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2ag},$$

일 때 일어나며, 이것이 보이려던 결과이다.

생각해 보기 이 결과는 모든 v에 대해 타당한가?

$\theta = 0$에서 $R = m(g - v^2/a)$이고, 이는 $v^2 < ag$일 때에만 양수이다. 이것이 테 바퀴가 곧바로 접촉을 잃지 않고 모서리를 넘어 구르기 위한 조건이며 문제에서 가정하고 있는 것이다. 또한 이는 정확히 우변이 1보다 작을 조건이므로, 조건을 만족하는 각 θ가 존재한다.

덧붙여, $I_O\ddot{\theta} = mga\sin\theta$를 써서 OC에 수직인 방향으로 분해하면 $\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$와 $F = \frac{1}{2}mg\sin\theta$를 얻는다. 이것이 미끄러짐을 막기 위해 모서리가 제공해야 하는 마찰력이며, 두 면이 모두 거칠어야 하는 이유이다.

검산

- $v \to 0$이면 테 바퀴는 그냥 모서리에서 넘어지며 $\cos\theta = \frac{1}{2}$, 즉 $\theta = 60°$에서 접촉을 잃는다. $v^2 \to ag$이면 $\theta \to 0$이다. 즉 테 바퀴가 모서리에 거의 닿지 않는다. 두 극한 모두 타당하다.
- 수치적으로, $a = 0.6\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $v = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 두고 $\dot{\theta} = v/a$에서 시작하여 $g\cos\theta = a\dot{\theta}^2$이 될 때까지 $\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$를 단계적으로 계산하면 $\cos\theta \approx 0.69132$를 얻으며, 이는 $\frac{1}{2} + v^2/(2ag) = 0.69133$과 일치한다.

흔한 실수

- 에너지 식에 $I_C = ma^2$을 쓰거나, $\frac{1}{2}I_O\omega^2$에 병진 운동 에너지 항을 따로 더하는 것. O에 대한 회전에는 이미 중심의 운동이 포함되어 있다.
- 처음의 운동 에너지를 빠뜨리는 것. 그러면 모든 v에 대해 $\cos\theta = \frac{1}{2}$가 나온다.

STEP 너머

모서리에서 굴러떨어지는 것은 전형적인 **일방적 구속**(unilateral constraint)이다. 모서리는 밀 수는 있지만 당길 수는 없으므로, 운동 방정식은 그것이 예측하는 수직항력이 음이 아닌 동안에만 적용된다. 구면에서 미끄러져 떨어지는 입자나 볼록한 다리를 넘어가는 자동차도 같은 원리를 따른다. 대학 1학년 과정에서는 강체 동역학, 평행축 정리와 수직축 정리와 함께 이 개념을 배운다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 모든 내용을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1999, 문제 12

확률과 통계 • 이산 결합분포

STEP III 1999, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q12

핵심 아이디어

결합확률(joint probability)은 j와 k에 대부분 $j+k$를 통해서만 의존하므로, 항들을 합 $n = j+k$에 따라 묶는다. 그러면 $\sum_j \frac{1}{j!(n-j)!}$이 남는데, 이것은 모습을 바꾼 이항 합이다. $n!$을 곱하면 $\sum_j \binom{n}{j} = 2^n$이 된다. 그다음부터는 모든 소문항이 지수급수(exponential series)로 귀결된다.

풀이

소문항 (i)

$n \geq 1$이라 하자. 사건 $\{X+Y=n\}$은 $j = 0, 1, \ldots, n$에 대한 사건 $\{X=j,\ Y=n-j\}$들의 서로 배반인 합집합(disjoint union)이다. 이 각 사건에서 $j+k=n$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X+Y=n) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-1} \frac{n\lambda^n}{j!\,(n-j)!} = \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n 2^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 이항정리(binomial theorem)에 의해 $\sum_j \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n$이고, $n \geq 1$일 때 $n/n! = 1/(n-1)!$임을 이용하였다.

덧붙이면, 인수 $j+k$ 때문에 $\mathrm{P}(X+Y=0) = \mathrm{P}(X=0,\ Y=0) = 0$이다.

소문항 (ii)

모든 $n \geq 0$에 대한 확률 $\mathrm{P}(X+Y=n)$의 합은 1이어야 한다. $n=0$인 항은 0이므로

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-1}(2\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-1}\, 2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda},$$

이다. 여기서 $m = n-1$로 놓고 지수급수 $\sum_m t^m/m! = \mathrm{e}^t$를 이용하였다. 따라서 요구한 대로 $2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda-1} = 1$이다.

소문항 (iii)

$g(x) = 2x\, \mathrm{e}^{2x-1}$이라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1} + 4x\, \mathrm{e}^{2x-1} = 2(1+2x)\, \mathrm{e}^{2x-1}.$$

$x > 0$이면 $1+2x$와 e^{2x-1}이 모두 양수이므로 $g'(x) > 0$이고, 따라서 g는 $x > 0$에서 순증가(strictly increasing)한다.

> **생각해 보기** 왜 "증가한다"는 것이 "해가 많아야 하나"라는 결론을 주는가?

$0 < x_1 < x_2$이면 $g(x_1) < g(x_2)$이므로, g는 서로 다른 두 점에서 값 1을 가질 수 없다. $\lambda > 0$이므로 (ii)에서 얻은 방정식 $g(\lambda) = 1$의 해는 많아야 하나이다.

이제 지수를 0으로 만드는 자연스러운 후보 $x = \frac{1}{2}$를 대입해 보자. $g(\frac{1}{2}) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$이다. 따라서 $\frac{1}{2}$는 해이고, 유일성에 의해 이것이 유일한 해이다.

$$\lambda = \tfrac{1}{2}.$$

이 값을 넣으면 소문항 (i)의 결과는 $n \geq 1$에 대하여 $\mathrm{P}(X+Y=n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!}$이 된다.

소문항 (iv)

$X+Y$는 방금 구한 확률로 $n \geq 1$인 값만 가지므로

$$\mathrm{E}\left(2^{X+Y}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!} = 2\mathrm{e}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = 2\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e},$$

이다. 여기서도 $m = n-1$로 놓고 지수급수를 이용하였다(이 급수는 수렴(converge)하므로 기댓값(expectation)은 유한하다).

검산

- $\lambda = \frac{1}{2}$일 때 (i)의 공식은 $X+Y-1$이 평균이 1인 포아송 분포(Poisson distribution)를 따른다는 뜻이다. 그 확률 $\mathrm{e}^{-1}/m!$의 합은 당연히 1이므로 (ii)와 일치한다.

- $j+k<60$인 범위에서 결합확률을 수치적으로 더하면 합이 1.000000이고, $2^{j+k}\,\mathrm{P}(X=j, Y=k)$를 더하면 5.436564가 되어 $2\mathrm{e}\approx 5.436564$와 일치한다.
- (iv)를 간단히 확인해 보자. $N\sim \mathrm{Po}(1)$일 때 $2^{X+Y}=2\cdot 2^{N}$이고, 포아송 확률변수에 대해 $\mathrm{E}(s^N)=\mathrm{e}^{s-1}$이므로 답은 $2\mathrm{e}^1$이다.

흔한 실수

- $n/n!=1/(n-1)!$임을 잊어서 (ii)의 급수 안에 성가신 인수 n이 남는 경우.
- $n=0$인 항을 0이 아닌 것으로 취급하는 경우. 인수 $j+k$ 때문에 이 항은 사라지며, 바로 그래서 합이 $n=1$부터 시작한다.
- (iii)에서 $\lambda=\frac{1}{2}$가 해라는 것만 보이는 경우. 다른 해가 없음을 보이려면 단조성(monotonicity)도 필요하다.

STEP 너머

$\mathrm{E}(s^{X+Y})$는 $X+Y$의 **확률생성함수**(*probability generating function*)이며, 여기서는 $s=2$에서의 값을 구한 것이다. 생성함수는 확률의 합을 멱급수로 바꾸어 주며, 대학 첫 확률론 강의에서 분포를 판별하고 적률(moment)을 구하는 표준 도구이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 포아송 분포를 명료하게 설명한다.

풀이

STEP III 1999, 문제 13

확률과 통계 • 연속 사전분포를 이용한 베이즈 추론

> **STEP III 1999, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q13

핵심 아이디어

이 문제에는 무작위성이 두 겹으로 들어 있다. 먼저 내 몫의 크기 X가 정해지고, 그다음에 건포도가 어디에 놓이는지가 정해진다. $X = x$라는 **조건을 주면**(condition) 각 건포도는 다른 건포도와 독립적으로 확률 x로 내 몫에 들어가므로, 건포도의 개수는 이항분포(binomial distribution)를 따른다. 그다음 (i)은 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)이고, (ii)는 연속 사전분포(prior)를 갖는 베이즈 정리(Bayes' theorem)이다.

풀이

먼저 A를 구한다. 확률밀도함수(density)는 적분값이 1이어야 하므로

$$\int_0^1 Ax\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 2,$$

이고, 따라서 X의 확률밀도함수는 $[0,1]$에서 $\mathrm{f}(x) = 2x$이다.

내 몫에 들어 있는 건포도의 개수를 N이라 하자. "무작위로 놓인다"는 말은 자연스러운 방식으로 모형화한다. 즉 각 건포도의 위치는 케이크 전체에 균등하게 분포하며, 다른 건포도의 위치와도, 내가 케이크를 얼마나 가져가는지와도 독립이다. 그러므로 내가 케이크의 비율 x만큼을 가져가면 각 건포도는 다른 건포도와 독립적으로 확률 x로 내 몫에 놓이고, 따라서

$$N \mid (X = x) \sim \mathrm{B}(4, x).$$

소문항 (i)

$X = x$가 주어지면 이항분포의 평균은 $\mathrm{E}(N \mid X = x) = 4x$이다. 이것을 X에 대하여 평균하면(전체 기댓값의 법칙)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \int_0^1 \mathrm{E}(N \mid X = x)\, \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 4x \cdot 2x \, \mathrm{d}x \\ &= 8\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

같은 말이지만, $\mathrm{E}(X) = \frac{2}{3}$이므로 $\mathrm{E}(N) = 4\,\mathrm{E}(X)$이다. 내 몫에 들어 있는 건포도 개수의 기댓값은 $\frac{8}{3}$이다.

소문항 (ii)

구하려는 것은 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$이다. $X = x$가 주어지면 건포도 네 개가 모두 내 몫에 있을 확률은 x^4이다.

> ? **생각해 보기** X가 연속이어서 $\mathrm{P}(X = x) = 0$일 때 베이즈 정리를 어떻게 쓸 수 있을까?

베이즈 정리의 합을 확률밀도함수에 대한 적분으로 바꾼다. 가능한 몫의 크기 가운데 작은 구간 $[x, x + \mathrm{d}x]$의 확률은 $2x\,\mathrm{d}x$이고, 그 구간이 주어졌을 때 건포도 네 개가 모두 들어 있을 확률은 x^4이다. 모든 구간에 대하여 더하면

$$\mathrm{P}(N = 4) = \int_0^1 x^4 \cdot 2x \, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^5 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

같은 방법으로 $x > \frac{1}{2}$인 구간만 남기면

$$\mathrm{P}\left(X > \tfrac{1}{2} \text{ 이고} N = 4\right) = \int_{1/2}^1 2x^5 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}.$$

따라서

$$\mathrm{P}\left(X > \tfrac{1}{2} \mid N = 4\right) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}}{\frac{1}{3}} = \frac{63}{64}.$$

다른 방법으로 볼 수도 있다. $N = 4$가 주어졌을 때 X의 조건부 확률밀도함수는 $x^4 \cdot 2x$에 비례하므로 $[0, 1]$에서 $6x^5$이다. 그 분포함수(distribution function)는 x^6이고, $1 - (\frac{1}{2})^6 = \frac{63}{64}$이다.

검산

- (ii)의 답은 1에 아주 가까운데, 이는 납득할 만하다. 건포도를 모두 찾았다는 것은 내가 큰 조각을 가져갔다는 강력한 증거이기 때문이다. 사전확률 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$가 $\frac{63}{64} \approx 0.984$로 올라갔다.

- $\frac{8}{3}$은 0과 4 사이에 있고, 마땅히 그래야 하듯 2보다 크다. 확률밀도함수 $2x$는 큰 몫에 더 큰 비중을 주기 때문이다.
- 10^6번 시행한 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)(U가 균등분포를 따를 때 확률밀도함수가 $2x$인 $X = \sqrt{U}$를 택한 뒤 건포도 네 개를 놓는다)에서 $\mathrm{E}(N) \approx 2.667$, $\mathrm{P}(N = 4) \approx 0.333$, 조건부 확률 ≈ 0.9846을 얻었는데, 이는 $\frac{63}{64} = 0.984375$와 잘 맞는다.

흔한 실수

- A를 구하는 것을 잊거나 $A = 1$로 두는 실수. 그러면 f는 확률밀도함수가 아니게 되고, (i)의 기댓값이 틀리게 나온다(다만 (ii)에서는 A가 약분된다).
- $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$ 대신 $\mathrm{P}(N = 4 \mid X > \frac{1}{2})$를 계산하는 실수. 조건이 반대 방향이다.
- 적분 대신 $(\frac{1}{2})^4$를 쓰는 실수. 몫의 크기가 무작위이므로 값 하나를 대입할 것이 아니라 x^4를 확률밀도함수에 대하여 평균해야 한다.

STEP 너머

이것은 베이즈 추론(Bayesian inference)의 축소판이다. 확률밀도함수 $2x$는 알려지지 않은 비율에 대한 **사전분포**이고, 이항분포는 **가능도**(likelihood)이며, $6x^5$는 **사후분포**(posterior)이다. 사전분포와 사후분포는 모두 베타분포(beta distribution)인데, 이는 이항 자료에 대한 켤레 사전분포(conjugate prior)의 한 예이며, 같은 계산이 라플라스(Laplace)의 계승 규칙(rule of succession)의 바탕을 이룬다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 베타-이항 이야기와 연속 확률변수에 대한 조건부 확률을 매우 명료하게 다룬다.

풀이

STEP III 1999, 문제 14

확률과 통계 • 조건부를 이용한 기댓값

STEP III 1999, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q14

핵심 아이디어

H1에서 상금은 첫 번째 성공이 언제 일어나는지에만 의존하므로, 기댓값(expectation)은 유한한 등차·등비 혼합 합(arithmetico-geometric sum) $\sum r\,p\,q^{r-1}$이 된다. 이런 합을 다루는 표준적인 요령은 합에서 그 합의 q배를 빼는 것이다. H2에서는 시행 횟수 N에 대하여 조건을 걸고(conditioning), H1의 답을 푸아송 분포(Poisson distribution)에 대하여 평균한다. 이를 위해서는 푸아송 합 $\sum \lambda^n x^n/n!$과 $\sum n\lambda^n x^n/n!$만 있으면 되는데, 둘 다 지수급수(exponential series)에서 얻어진다.

풀이

게임 H1

W를 파운드 단위의 상금이라 하자. 각 시행은 독립(independent)이고, 각각 확률 p로 성공한다. 첫 번째 성공이 r번째 시행에서 일어나는 것은 처음 $r-1$번의 시행이 실패하고 r번째 시행이 성공할 때이고, 오직 그때뿐이므로

$$\mathrm{P}(W = r) = q^{r-1}p \qquad (1 \le r \le n),$$

이고, 그 밖의 경우에는 $W = 0$이므로 기댓값에 아무것도 더하지 않는다. 따라서

$$\mathrm{E}(W) = p\,S, \qquad \text{여기서} S = \sum_{r=1}^{n} r\,q^{r-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}.$$

q를 곱한 다음, q의 같은 거듭제곱끼리 줄을 맞추어 뺀다.

$$\begin{aligned} S - qS &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n, \end{aligned}$$

여기서 등비급수(geometric series)의 합 공식을 썼는데, $q \neq 1$이므로 이 공식을 쓸 수 있다. $1-q=p$이므로 $S=\dfrac{1-q^n}{p^2}-\dfrac{nq^n}{p}$이고, 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W)=pS&=\frac{1-q^n-npq^n}{p}=\frac{1-q^n-n(1-q)q^n}{p}\\&=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right],\end{aligned}$$

이며, 이것이 구하는 결과이다.

게임 H2

허용되는 시행 횟수를 $N\sim\mathrm{Po}(\lambda)$라 하면 $\mathrm{P}(N=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!$이다. 다음과 같이 쓰자.

$$g(n)=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right].$$

$N=n\geq 1$이 주어지면 n번의 시행으로 H1을 하는 것이므로, 상금의 기댓값은 $g(n)$이다. $N=0$이 주어지면 아무것도 받지 못한다. 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)에 의하여(N에 대하여 조건을 걸면)

$$\mathrm{E}(W)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(N=n)\,g(n).$$

> **생각해 보기** $g(n)$의 세 부분은 $n=0$부터 시작하는 완전한 푸아송 합으로 다루는 것이 더 쉬울 것이다. 합을 $n=0$부터 시작해도 될까?

그렇다. $g(0)=p^{-1}[1+0-1]=0$이고, 이는 $N=0$일 때 상금이 없다는 것과 일치한다. 따라서

$$\mathrm{E}(W)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left[1+nq^{n+1}-nq^n-q^n\right].$$

확률의 합은 1이므로 첫째 항의 합은 1이다. 나머지 항들을 위해서는 두 급수가 필요한데, 둘 다 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x},\\\sum_{n=0}^{\infty}n\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\lambda x\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}.\end{aligned}$$

$x=q$를 대입하고, $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}=\mathrm{e}^{-\lambda(1-q)}=\mathrm{e}^{-\lambda p}$임에 주목하자. 그러면

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,q^n=\mathrm{e}^{-\lambda p},\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,nq^n=\lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p}.$$

항 nq^{n+1}은 nq^n의 q배이므로, $\lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p}$만큼 기여한다. 모두 합하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \frac{1}{p}\left[1 + \lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p} - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p} - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right] \\ &= \frac{1}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right) + \frac{\lambda q(q-1)}{p}\,\mathrm{e}^{-\lambda p} \\ &= \frac{1}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right) - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

이며, 마지막 단계에서 $q - 1 = -p$를 이용하였다. 이것이 파운드 단위로 나타낸, 구하는 식이다.

검산

- $n = 1$인 H1: 공식은 $p^{-1}[1 + q^2 - 2q] = p^{-1}(1-q)^2 = p$를 준다. 확률 p로 £1을 받으므로 이는 옳다.
- H1에서 $n \to \infty$이면 $q^n \to 0$이고 $nq^n \to 0$이므로, 기댓값은 기하분포(geometric distribution)의 평균인 $1/p$로 수렴한다. 마찬가지로 H2는 $\lambda \to \infty$일 때 $1/p$로 수렴한다.
- λ가 작을 때 지수함수를 전개하면 $\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 p - \lambda q + O(\lambda^2) = \lambda p + O(\lambda^2)$를 얻는다. 이는 타당하다. 거의 항상 시행이 한 번도 없거나 한 번뿐이고, $\mathrm{P}(N = 1) \approx \lambda$이기 때문이다.
- 수치적으로, H1 공식은 $n \le 14$에 대하여 (분수를 이용한) 직접 계산한 합과 정확히 일치하였다. H2 공식은 유한 항까지 자른 푸아송 합과 일치하였고, $\lambda = 2$, $p = 0.4$로 4×10^5번의 게임을 모의실험한 결과는 0.836으로, 공식의 값 0.837과 비교된다.

흔한 실수

- $S - qS$의 마지막 항을 잘못 구하는 것: 합 S는 nq^{n-1}에서 끝나므로, qS를 빼면 $-nq^n$이 남는다.
- $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}$가 $\mathrm{e}^{-\lambda p}$로 간단해진다는 것을 잊고, 그 결과 식 계산에서 길을 잃는 것.

STEP 너머

H2에서 사용한 합 $\sum \mathrm{P}(N = n)\,x^n$은 **확률생성함수**(probability generating function) $G_N(x) = \mathrm{E}(x^N)$의 값이고, $\sum n\,\mathrm{P}(N = n)\,x^n = xG'_N(x)$이다. 푸아송 확률변수에 대해서는 $G_N(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$이다. 생성함수는 무작위 횟수의 시행에 대하여 조건을 거는 방

법과 함께 대학 1학년 확률론의 핵심 도구이며, 예를 들어 무작위 합(random sum)과 분기 과정(branching process)을 연구할 때 쓰인다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 두 가지를 모두 명료하게 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1999년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

