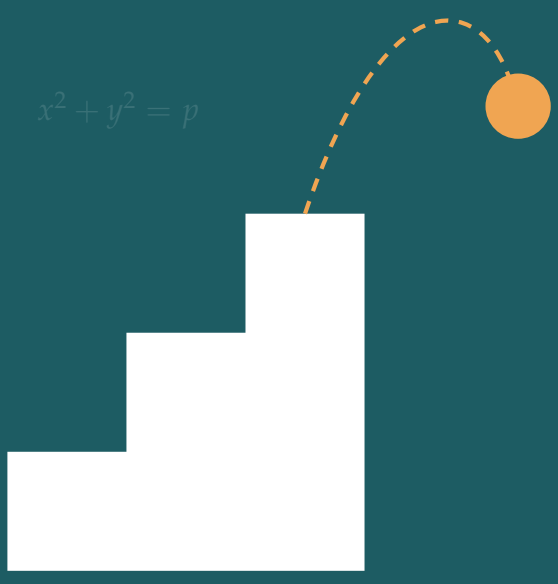
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1998년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1998년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1998년 풀이

1998년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 숫자 패턴의 개수 세기 순수수학 . . . 3

Q2 치환적분 순수수학 . . . 6

Q3 참 또는 거짓 증명 순수수학 . . . 9

Q4 제약 조건이 있는 최적화 순수수학 . . . 13

Q5 복소수와 회전 순수수학 . . . 17

Q6 삼각함수 점화식 순수수학 . . . 20

Q7 등비급수 순수수학 . . . 23

Q8 2계 미분방정식 순수수학 . . . 26

Q9 진자의 충돌 역학 . . . 29

Q10 포물체 운동 역학 . . . 33

Q11 도르래에 걸린 연결된 입자 역학 . . . 36

Q12 경우의 수와 독립 확률과 통계 . . . 40

Q13 복원추출 확률과 통계 . . . 44

Q14 기하학적 확률 확률과 통계 . . . 47

STEP II

Q1 디오판토스 방정식과 홀짝성 순수수학 . . . 51

Q2 이항급수를 이용한 근사 순수수학 . . . 54

Q3 망원급수 순수수학 . . . 57

Q4 부분적분 순수수학 . . . 60

Q5 복소수의 삼각부등식 순수수학 . . . 63

Q6 사이클로이드와 법선 순수수학 . . . 67

Q7 도함수를 이용한 부등식 순수수학 . . . 71

Q8 벡터 기하 순수수학 . . . 75

Q9 골조의 정역학 역학 79
Q10 움직이는 쐐기 위의 입자 역학 83
Q11 포물체 운동 역학 87
Q12 베이즈 정리 확률과 통계 91
Q13 지수분포 확률과 통계 94
Q14 이항분포와 푸아송 분포의 기댓값 확률과 통계 97

STEP III

Q1 곡선 그리기 순수수학 100
Q2 베타 적분의 점화식 순수수학 104
Q3 선형 점화식 순수수학 107
Q4 장미 곡선 순수수학 111
Q5 행렬 지수함수 순수수학 115
Q6 다면체의 부피 순수수학 119
Q7 곡선 그리기와 적분 순수수학 123
Q8 구의 벡터 기하 순수수학 127
Q9 관성 모멘트 역학 131
Q10 비스듬한 충돌 역학 135
Q11 큰 진폭의 진자 역학 139
Q12 네트워크 신뢰도 확률과 통계 143
Q13 최대가능도 추정 확률과 통계 146
Q14 불편추정량 확률과 통계 150

풀이

STEP I 1998, 문제 1

순수수학 • 숫자 패턴의 개수 세기

> **STEP I 1998, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q1

핵심 아이디어

수를 하나하나 나열하려 하지 말자. 그 대신 먼저 **어떤** 두 숫자가 나타나는지 고른 다음, 그 두 숫자를 모두 사용하는 다섯 자리 문자열의 개수를 센다. 유일한 걸림돌은 수가 0으로 시작할 수 없다는 점이므로, 두 숫자 중 하나가 0인지 아닌지에 따라 경우를 나누어 센다. 그리고 범위의 양 끝을 확인하는 것도 잊지 말자.

풀이

10 000부터 99 999까지의 모든 정수는 첫째 자리가 0이 아닌 정확히 다섯 자리 수이다. 범위 안에 남은 정수는 100 000 하나뿐이며, 이것은 마지막에 따로 다룬다.

다섯 자리 수가 정확히 두 종류의 서로 다른 숫자를 포함한다는 것은, 그 수의 모든 자리 숫자가 어떤 쌍 $\{a, b\}$에서 나오고 a와 b가 실제로 둘 다 나타난다는 뜻이다. 이러한 수는 각각 자신의 쌍을 하나로 결정하므로, 쌍별로 개수를 세어 더하면 된다.

경우 1: 두 숫자 모두 0이 아닌 경우

$1, 2, \ldots, 9$에서 서로 다른 두 숫자를 고르는 방법은 $\binom{9}{2} = 36$가지이다. 쌍 $\{a, b\}$를 하나 고정하면, 다섯 자리 각각에 a 또는 b가 올 수 있으므로 문자열은 $2^5 = 32$개이다. 이 가운데 두 개($aaaaa$와 $bbbbb$)는 한 숫자만 사용하므로, 두 숫자를 모두 사용하는 것은 $32 - 2 = 30$개이다. 이들 중 0으로 시작하는 것은 없으므로 30개 모두 진짜 다섯 자리 수이다. 따라서 이 경우의 개수는

$$36 \times 30 = 1080.$$

? **생각해 보기** 쌍 $\{0, a\}$는 왜 똑같은 방법으로 다룰 수 없을까?

0과 a로 만든 32개의 문자열 중 절반은 0으로 시작하는데, 이들은 다섯 자리 수가 아니기 때문이다(예를 들어 $0a0aa$는 사실 네 자리 수이다). 그래서 개수를 세기 전에 첫째 자리를 먼저 고정해야 한다.

경우 2: 두 숫자 중 하나가 0인 경우

다른 숫자 a는 $1, \ldots, 9$ 중 어느 것이든 될 수 있으므로 9가지이다. 첫째 자리는 0일 수 없으므로 반드시 a이다. 나머지 네 자리 각각에는 0 또는 a가 올 수 있으므로 $2^4 = 16$가지 경우가 있다. 이 가운데 정확히 하나인 $aaaa$는 0을 포함하지 않아서 서로 다른 숫자가 하나만 남게 된다. 따라서 각 a마다 $16 - 1 = 15$개의 수가 있고, 이 경우의 개수는

$$9 \times 15 = 135.$$

끝점 100 000

범위는 양 끝을 포함하며, 100 000은 숫자 1과 0만 사용하므로 이것도 세어야 한다.

합계

$$1080 + 135 + 1 = 1216.$$

따라서 조건을 만족하는 정수는 **1216**개이다.

검산

- 10 000부터 100 000까지의 모든 정수를 차례로 살펴보며 자릿수들의 집합의 크기가 2인 것을 세는 컴퓨터 검산을 하면 1216이 나온다. 이 검산으로 경우의 분할도 확인된다. 0이 없는 것이 1080개, 0이 있는 것이 135개, 그리고 100 000이다.
- 손으로 나열할 수 있는 더 작은 경우에 같은 방법을 적용해 보자. 두 자리 수에 대해서는 $\binom{9}{2}(2^2 - 2) + 9(2^1 - 1) = 72 + 9 = 81$이 나온다. 이는 직접 센 결과와 일치한다. 두 자리 수 90개에서 같은 숫자로만 이루어진 수(repdigit) $11, 22, \ldots, 99$의 9개를 빼면 된다.

흔한 실수

- 100 000을 빠뜨려서 1215라고 답하는 실수. "양 끝을 포함하는" 범위에서는 항상 끝점을 살펴보아야 한다.
- $\binom{10}{2} \times 30 = 1350$으로 세는 실수. 이렇게 하면 0으로 시작하는 수까지 포함된다.

- 경우 2에서 1 대신 2를 빼는 실수. 모든 자리가 0인 문자열은 첫째 자리를 a로 고정할 때 이미 제외되었다.

STEP 너머

$\{a, b\}$로 만든 모든 문자열에서 한 숫자만 쓰는 문자열을 빼는 요령은 포함배제의 원리(inclusion–exclusion principle)의 가장 간단한 경우이다. 일반적으로, 주어진 k개의 기호를 **모두** 사용하는 길이 n인 문자열의 개수는 $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$이며, 이는 제2종 스털링 수(Stirling number of the second kind)에 $k!$을 곱한 값이다. 이러한 개수는 조합론(combinatorics)과 확률(probability) 곳곳에서 나타나며, 예를 들어 쿠폰 수집가 문제(coupon collector problem)에도 등장한다. 이런 종류의 세기를 더 공부하고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 또는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 실린 조합론 문제들을 풀어 보자.

풀이

STEP I 1998, 문제 2

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1998, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q2

핵심 아이디어

다루기 까다로운 식 $(x^2+1)^{1/2}+x$가 f 안에 들어 있으므로, 이 식 전체를 t로 놓는 것이 자연스럽다. 놀랍게도 이 식은 거꾸로 풀기가 쉽다. 근호를 한쪽으로 분리한 뒤 제곱하면 x^2 항이 소거되어 x가 t의 간단한 함수로 남는다. 첫 번째 항등식(identity)을 얻고 나면, 두 번째 적분은 $f(t)=t^{-3}$인 특수한 경우일 뿐이다.

풀이

변수 바꾸기

다음과 같이 놓는다.

$$t=(x^2+1)^{1/2}+x.$$

x가 0에서 ∞까지 변할 때 $(x^2+1)^{1/2}$와 x는 모두 증가하므로 t는 순증가(strictly increasing)한다. $x=0$일 때 $t=1$에서 출발하고, $x\to\infty$일 때 ∞로 발산한다. 따라서 이 치환(substitution)은 $[0,\infty)$를 $[1,\infty)$ 위로 보내는 일대일(one-to-one) 대응이고, 새로운 적분 구간의 끝은 1과 ∞이다.

> ? **생각해 보기** x를 다시 t로 나타내려면 어떻게 해야 할까?

제곱근을 분리하고 제곱한다. $t-x=(x^2+1)^{1/2}$로부터

$$t^2-2tx+x^2=x^2+1 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-t^{-1}\right),$$

을 얻는다. 여기서 $t\geq 1$이므로 t로 나누어도 문제가 없다. (제곱하면 무연근(extraneous solution)이 생길 수 있지만, 여기서는 $t-x=(t+t^{-1})/2>0$이므로 제곱한 근호는 실제

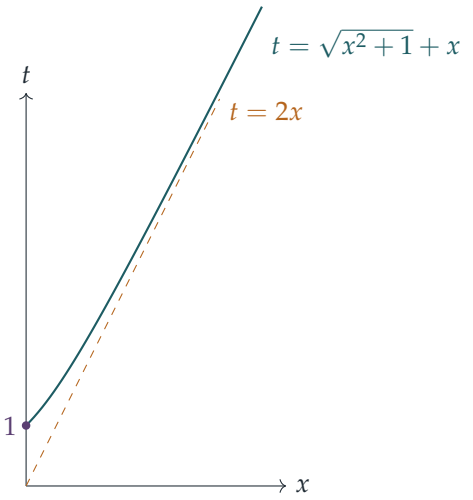
로 양수이다.) 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(1+t^{-2}).$$

이다. 따라서

$$\int_0^\infty \mathrm{f}\big((x^2+1)^{1/2}+x\big)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \mathrm{f}(t)\cdot\frac{1}{2}(1+t^{-2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (1+t^{-2})\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t,$$

이고, 이것이 구하려던 항등식이다.



그림을 보면 t가 1에서부터 꾸준히 증가하므로, 치역의 어느 부분도 두 번 덮이지 않는다.

마지막 소문항

$\mathrm{f}(t) = t^{-3}$으로 놓는다. 그러면 항등식의 좌변이 정확히 구하려는 적분이 되므로

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \big((x^2+1)^{1/2}+x\big)^{-3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \big(t^{-3}+t^{-5}\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2}t^{-2}-\tfrac{1}{4}t^{-4}\Big]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big) = \frac{3}{8},\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. t^{-3}과 t^{-5}는 $[1,\infty)$에서 적분 가능하므로 두 이상적분(improper integral)은 모두 수렴한다.

? 생각해 보기 이 치환을 더 깔끔하게 이해하는 방법이 있을까?

있다. $x = \sinh\theta$로 놓으면 $(x^2+1)^{1/2} = \cosh\theta$이므로 $t = \cosh\theta + \sinh\theta = \mathrm{e}^\theta$이다. 앞에서 얻은 식 $x = \frac{1}{2}(t-t^{-1})$은 사실 $\sinh\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^\theta - \mathrm{e}^{-\theta})$가 모습을 바꾼 것일 뿐이다.

검산

- $x = 0$일 때 $t = 1$이고 $x = \frac{1}{2}(1-1) = 0$이므로 역함수(inverse function) 식이 맞는다. $x = \frac{3}{4}$일 때 $t = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$이고 $\frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$이다.
- x가 클 때 $t \approx 2x$이므로 마지막 소문항의 피적분함수(integrand)는 $(2x)^{-3}$처럼 행동하고, 따라서 적분은 확실히 수렴한다.
- 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하여 수치 계산하면 0.375000이 나와 $\frac{3}{8}$과 일치한다. 첫 번째 소문항의 항등식도 $f(t) = e^{-t}$(양변 모두 0.258187)와 $f(t) = 1/(1+t^4)$(양변 모두 0.188387)에 대해 수치적으로 성립함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 적분 구간을 바꾸는 것을 잊는 실수. 아래끝은 $t = 0$이 아니라 $t = 1$이 된다.
- dt를 x로 나타낸 뒤 x를 소거하느라 애를 먹는 실수. x를 먼저 t로 나타내고 그것을 미분하는 편이 훨씬 쉽다.

STEP 너머

이 항등식은 단조(monotonic) 함수에 의한 변수 변환에 관한 명제이며, 해석학에서는 이상적분의 경우 $[0, X]$에서의 적분의 극한을 취함으로써 이를 정당화한다. 이 치환 자체는 sinh의 역함수와 관련이 있다. 즉 $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{arsinh} x$이고, 이 때문에 t가 $e^{\operatorname{arsinh} x}$가 되는 것이다. 이상적분과 치환을 엄밀하게 다룬 내용은 Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 1998, 문제 3

순수수학 • 참 또는 거짓 증명

> **STEP I 1998, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q3

핵심 아이디어

각 소문항마다 필요한 도구가 다르며, 가장 먼저 할 일은 참인지 거짓인지 판단하는 것이다. "참"이라면 모든 경우를 다루는 증명(proof)이 필요하고, "거짓"이라면 반례(counterexample) 하나, 또는 요구되는 성질을 가진 대상이 존재할 수 없다는 논증만 있으면 된다. (i)은 로그(logarithm)를 취하면 해결되고, (ii)는 잘 고른 θ 값 하나로 해결되며, (iii)은 θ가 클 때 다항식(polynomial)의 거동으로, (iv)는 완전제곱식(perfect square)으로 해결된다.

풀이

소문항 (i): 참

$a > 0$이므로 $a = \mathrm{e}^{\ln a}$로 쓸 수 있다. 그러면

$$a^{\ln b} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a \ln b},$$
$$b^{\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln b}\right)^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b \ln a}.$$

곱셈은 교환법칙(commutativity)이 성립하므로 두 지수(exponent)는 같고, 따라서 모든 $a, b > 0$에 대하여 $a^{\ln b} = b^{\ln a}$이다. (같은 말로, 양변은 모두 양수이고 로그값이 $\ln a \ln b$로 같다.)

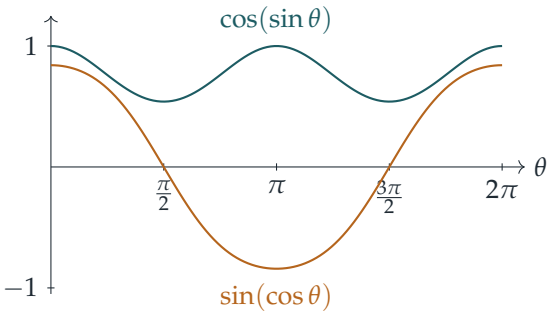
소문항 (ii): 거짓

반례 하나면 충분하다. $\theta = 0$으로 두면

$$\cos(\sin 0) = \cos 0 = 1, \qquad \sin(\cos 0) = \sin 1.$$

$0 < 1 < \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < \sin 1 < 1$이고(실제로 $\sin 1 \approx 0.841$), 따라서 양변은 다르며 주어진 명제는 거짓이다.

사실 양변은 **결코** 같아지지 않는다. 그래프를 보면 $\cos(\sin\theta)$가 항상 $\sin(\cos\theta)$보다 위에 있다.



이를 증명하려면(문제에서 요구하지는 않는다) $\sin(\cos\theta) \leq \sin|\cos\theta| = \cos(\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|)$이고 $\cos(\sin\theta) = \cos|\sin\theta|$임에 주목한다. $|\sin\theta|$와 $\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$는 모두 코사인이 감소하는(decreasing) 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$에 속하며, $|\sin\theta| + |\cos\theta| \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 $|\sin\theta| < \frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$이다. 따라서 모든 θ에 대하여 $\cos(\sin\theta) > \sin(\cos\theta)$이다.

소문항 (iii): 거짓

P를 임의의 다항식이라 하자. 두 경우로 나누어, 어떤 실수 θ에 대하여 $|\mathrm{P}(\theta) - \cos\theta| > 10^{-6}$임을 보인다.

P가 상수인 경우, 즉 $\mathrm{P}(\theta) = c$라 하자. $\cos\theta$가 각각 1과 -1이 되는 $\theta = 0$과 $\theta = \pi$를 이용하면, 삼각부등식(triangle inequality)에 의해

$$|c - 1| + |c + 1| \geq |(c + 1) - (c - 1)| = 2,$$

이므로 $|c - 1|$, $|c + 1|$ 중 적어도 하나는 1 이상이고, 이는 10^{-6}보다 훨씬 크다.

P의 차수(*degree*)**가 $n \geq 1$인 경우**, 즉 $a_n \neq 0$인 $\mathrm{P}(\theta) = a_n\theta^n + \cdots + a_0$이라 하자. $\theta \neq 0$일 때

$$\mathrm{P}(\theta) = a_n\theta^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\theta} + \cdots + \frac{a_0}{a_n\theta^n}\right),$$

이고, $\theta \to \infty$일 때 괄호 안은 1로 수렴하는 반면 $|a_n\theta^n| \to \infty$이다. 따라서 $|\mathrm{P}(\theta)| \to \infty$이고, $|\mathrm{P}(\theta)| > 2$인 θ를 고를 수 있다. 그러한 θ에 대하여 $|\cos\theta| \leq 1$이므로

$$|\mathrm{P}(\theta) - \cos\theta| \geq |\mathrm{P}(\theta)| - |\cos\theta| > 2 - 1 = 1 > 10^{-6}.$$

두 경우 모두 어딘가에서 부등식이 성립하지 않으므로, 그러한 다항식은 존재하지 않는다.

생각해 보기 그런데 $\cos\theta$의 매클로린 급수(Maclaurin series)는 원하는 만큼 가까워지는, 다항식과 비슷한 합이다. 왜 이것을 유한 항에서 끊은 것은 통하지 않을까?

유한 항에서 끊은 매클로린 급수는 항을 충분히 많이 택하면, 고정된 임의의 유계 구간에서 $\cos\theta$와의 차가 10^{-6} 이내가 **된다**. 그러나 주어진 명제는 **모든 실수** θ에 대하여 성립하는 다항식 하나를 요구하며, 상수가 아닌 다항식은 결국 모두 $\pm\infty$로 발산하는 반면 $\cos\theta$는 $[-1,1]$ 안에 갇혀 있다. 명제를 거짓으로 만드는 것은 바로 "모든 실수 θ에 대하여"라는 구절이다.

소문항 (iv): 참

$x>0$일 때

$$x^4+3+x^{-4}-5=x^4-2+x^{-4}=\left(x^2-x^{-2}\right)^2\geq 0,$$

이다. 실수의 제곱은 음이 아니기 때문이다. 따라서 모든 $x>0$에 대하여 $x^4+3+x^{-4}\geq 5$이고, 등호는 정확히 $x^2=x^{-2}$일 때, 즉 $x=1$일 때 성립한다. (또는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해 $x^4+x^{-4}\geq 2\sqrt{x^4\cdot x^{-4}}=2$이다.)

요약: (i) 참, (ii) 거짓, (iii) 거짓, (iv) 참.

검산

- (i): $a=2, b=3$일 때 $2^{\ln 3}$과 $3^{\ln 2}$는 모두 약 2.141이다. 임의의 양수 a, b에 대해서도 상대 오차 약 10^{-15} 이내로 일치했다.
- (ii): 한 주기 전체에서 θ를 표본으로 뽑아 보면, $\cos(\sin\theta)-\sin(\cos\theta)$는 약 0.107 아래로 내려간 적이 없었다.
- (iii): cos의 20차 매클로린 다항식은 $\theta=1$에서는 정확하지만, $\theta=10$에서는 약 7.5만큼, $\theta=30$에서는 약 10^{11}만큼 어긋난다.
- (iv): 촘촘한 격자에서 x^4+3+x^{-4}의 최솟값은 $x=1$에서 5이다.

흔한 실수

- 거짓인 명제를 몇 가지 값을 확인해 보고 "증명"하려 하거나, 참인 명제를 계산 실수로 "반증"하는 것. 답을 쓰기 전에 각 소문항이 참인지 거짓인지 먼저 판단하라.
- (iii)에서 상수 다항식을 빠뜨리는 것. "무한대로 발산한다"는 논증은 차수가 1 이상이어야 한다.

- (iii)에서 테일러 급수(Taylor series)를 모든 곳에서 통하는 다항식으로 인용하는 것. 그렇지 않다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 바이어슈트라스 근사 정리(Weierstrass approximation theorem)와 대비된다. 이 정리에 따르면 임의의 **닫힌 유계** 구간에서 모든 연속함수(continuous function)는 원하는 정확도로 다항식에 의해 균등하게(uniformly) 근사될 수 있다. 실수 전체에서의 균등 근사는 불가능한데, 그 이유는 바로 위의 증가 논증 때문이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 바이어슈트라스 정리와 균등 수렴(uniform convergence)을 다룬다.

풀이

STEP I 1998, 문제 4

순수수학 • 제약 조건이 있는 최적화

> **STEP I 1998, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q4

핵심 아이디어

원에 내접하는(inscribed) 직사각형은 대각선(diagonal)이 지름(diameter)이 되므로, 두 변의 길이 a와 b는 피타고라스(Pythagoras) 정리로 묶인다. 즉 $a^2 + b^2$이 고정된다. 그러면 모든 것은 $a^2 + b^2$을 일정하게 유지할 때 $a + b$, $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$이 어떻게 움직이는가 하는 문제가 된다. 경우 $n = 2$가 경첩 역할을 한다. 그보다 작으면 정사각형이 이기고, 그때는 모두 같으며, 그보다 크면 정사각형이 꼴찌가 된다.

풀이

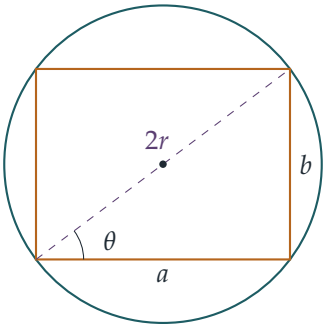
원의 반지름을 r, 직사각형의 두 변의 길이를 $a, b > 0$이라 하자. 직사각형의 각 꼭짓점의 각은 직각이므로 지름에 대한 원주각이다(반원에 대한 원주각). 따라서 각 대각선은 지름이고

$$a^2 + b^2 = (2r)^2 = 4r^2.$$

역으로 $a^2 + b^2 = 4r^2$을 만족하는 임의의 $a, b > 0$은 꼭짓점이 원 위에 놓이도록 원 안에 들어가는 직사각형을 준다. 그러므로 다음과 같이 쓰면 편리하다.

$$a = 2r\cos\theta, \qquad b = 2r\sin\theta, \qquad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2},$$

여기서 θ는 대각선과 길이가 a인 변이 이루는 각이다.



둘레

둘레(perimeter)는 $P = 2(a+b)$이다. $(a-b)^2 \geq 0$이므로 $2ab \leq a^2 + b^2$이고, 따라서

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

이며, 등호는 $a = b$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. $a + b > 0$이므로 $a + b \leq 2\sqrt{2}\,r$을 얻는다. 즉

$$P \leq 4\sqrt{2}\,r,$$

이고, 값 $4\sqrt{2}\,r$은 정확히 $a = b = \sqrt{2}\,r$일 때 얻어진다. 따라서 둘레가 가장 긴 직사각형은 요구한 대로 정사각형이다.

경우 $n = 2$

네 변의 길이의 제곱의 합은 직사각형이 무엇이든

$$2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

이다. 따라서 모든 내접 직사각형이 같은 값을 준다. 어느 것을 고를 이유가 없으며, 특히 정사각형이 다른 어떤 직사각형보다 나을 것도 없다.

경우 $n = 3$

이제 $S = 2(a^3+b^3)$을 살펴보자. 각 변은 지름보다 짧으므로 $0 < a < 2r$이고 $0 < b < 2r$이며, 따라서 $a^3 < 2r\,a^2$이고 $b^3 < 2r\,b^2$이다. 두 식을 더하면

$$S = 2(a^3+b^3) < 2 \cdot 2r(a^2+b^2) = 16r^3.$$

한편 $\theta \to 0$일 때($a \to 2r$, $b \to 0$인 길고 가는 직사각형) $S \to 2(2r)^3 = 16r^3$이다. 따라서 S는 $16r^3$에 원하는 만큼 가깝게 만들 수 있지만 결코 그 값에 도달하지는 않는다. **S가 최대인 직사각형은 존재하지 않는다.** $16r^3$을 얻는 유일한 "모양"은 퇴화된(degenerate) 것, 즉 지름을 두 번 그은 것뿐이며 이는 직사각형이 아니다.

? 생각해 보기 그렇다면 정사각형은 어떻게 된 것인가?

최선에서 최악으로 바뀌었다. $f(\theta) = \cos^3\theta + \sin^3\theta$라 하면 $S = 16r^3 f(\theta)$이고

$$f'(\theta) = -3\cos^2\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta = 3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta - \cos\theta).$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 인수 $\sin\theta\cos\theta$는 양수이고, $\sin\theta - \cos\theta$는 $\theta < \frac{\pi}{4}$일 때 음수, $\theta > \frac{\pi}{4}$일 때 양수이다. 따라서 f는 감소하다가 증가하며, 정사각형($\theta = \frac{\pi}{4}$)이 **최솟값**을 준다.

$$S_{\min} = 16r^3\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 8\sqrt{2}\,r^3.$$

정리하면, $n = 3$일 때 S의 값은 구간 $[8\sqrt{2}\,r^3,\ 16r^3)$을 채운다. 정사각형이 최소가 되고, 최대가 되는 직사각형은 없다.

모든 $n > 2$에 대해서도 같은 일이 일어난다. $\cos\theta$와 $\sin\theta$가 모두 0과 1 사이에 엄격히 놓이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\cos^n\theta + \sin^n\theta < \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이고, 따라서 상한(supremum) $2(2r)^n$에는 직사각형을 납작하게 만들어야만 다가갈 수 있다.

검산

- $r = 1.7$로 두고 θ를 $(0, \frac{\pi}{2})$ 전체에 걸쳐 수치적으로 훑어보았다. 둘레는 $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 최대이며 그 값은 $4\sqrt{2}\,r \approx 9.617$이다. 제곱의 합은 항상 $8r^2 = 23.12$이다. 세제곱의 합은 $16r^3 \approx 78.61$ 근처에서 정사각형일 때의 $8\sqrt{2}\,r^3 \approx 55.58$까지 떨어졌다가 다시 올라가며, 결코 78.61에 도달하지 않는다.
- 간단한 확인: 단위원 안의 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ 정사각형은 둘레가 $4\sqrt{2} \approx 5.66$인 반면, 1.9×0.62 직사각형(거의 지름)은 둘레가 약 5.04이다.

흔한 실수

- $n = 3$일 때 최댓값이 "$\theta = 0$에서" $16r^3$이라고 말하는 것. 그것은 선분이지 직사각형이 아니므로 최댓값은 존재하지 않는다. 반드시 그렇다고 밝히고 엄격한 부등식을 정당화해야 한다.
- $n = 3$일 때 정류점(stationary point) $\theta = \frac{\pi}{4}$를 찾고서 그 성질을 확인하지 않은 채 최댓값이라고 부르는 것.

STEP 너머

경우 $n = 3$은 **상한**과 **최댓값**(maximum)의 차이를 처음 맛보는 예이다. 열린 구간에서 연속인 함수는 그 경계값을 반드시 갖지는 않으며, 바로 이 때문에 최대·최소 정리(extreme

value theorem)는 닫힌 유계 구간을 요구한다. $n = 2$에서 일어나는 전환은 서로 다른 p에 대해 $\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$을 비교하는 거듭제곱 평균 부등식(power-mean inequalities)의 한 예이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 상한과 최대·최소 정리를 꼼꼼히 다룬다.

풀이

STEP I 1998, 문제 5

순수수학 • 복소수와 회전

STEP I 1998, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s1-q5

핵심 아이디어

두 소문항 모두 복소수(complex number)의 대수적 계산이 일을 대신 해 주도록 하는 문제이다. 소문항 (i)에서 정육각형(regular hexagon)의 한 꼭짓점에서 다음 꼭짓점으로 가는 것은 중심을 기준으로 60°만큼 회전(rotation)하는 것이고, 원점을 중심으로 하는 회전은 절댓값(modulus)이 1인 복소수를 곱하는 것과 같으므로 Q를 기준으로 생각한다. 소문항 (ii)에서 어떤 수가 실수인 것은 정확히 그 허수부(imaginary part)가 0일 때이므로, 각 분모를 실수화(realise)하고 허수부를 0으로 놓는다.

풀이

소문항 (i)

중심을 기준으로 생각한다. Q에서 A로 가는 벡터는

$$A - Q = (10 + 2i) - (4 + 6i) = 6 - 4i.$$

이다. 정육각형의 여섯 꼭짓점은 Q를 중심으로 하는 원 위에 같은 간격으로 놓여 있으므로 각 AQB는 $360° / 6 = 60°$이고, QB의 길이는 QA의 길이와 같다. **시계 방향**으로 움직인다는 것은 $-60°$만큼 회전한다는 뜻이며, 이는

$$\mathrm{e}^{-i\pi/3} = \cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

을 곱하는 것이다.

? **생각해 보기** 왜 A 자체가 아니라 $A - Q$에 곱하는가?

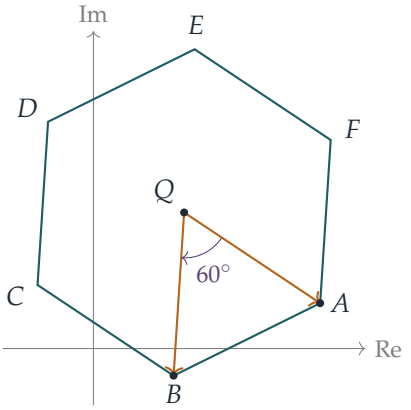
$e^{-i\pi/3}$을 곱하면 **원점**을 중심으로 회전한다. Q를 중심으로 회전하려면 Q를 원점으로 옮기고(Q를 빼고), 회전한 다음, 다시 되돌린다(Q를 더한다). 따라서

$$\begin{aligned} B - Q &= (6-4i)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \\ &= 3 - 3\sqrt{3}\,i - 2i + 2\sqrt{3}\,i^2 \\ &= (3-2\sqrt{3}) - (2+3\sqrt{3})\,i, \end{aligned}$$

이고, 여기에 $Q = 4+6i$를 더하면

$$\boxed{B = (7-2\sqrt{3}) + (4-3\sqrt{3})\,i} \approx 3.536 - 1.196\,i.$$

이다.



그림으로 방향을 확인할 수 있다. Q의 오른쪽 아래에 있는 A에서 시계 방향으로 가면 다음 꼭짓점은 Q의 거의 바로 아래에 있으며, 우리가 구한 B도 그렇다.

소문항 (ii)

$(1+ki)(1-ki) = 1+k^2$를 이용하여, 분자와 분모에 켤레복소수(conjugate)를 곱해 각 분모를 실수화한다.

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}, \qquad \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}, \qquad \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}.$$

a, b, c가 실수이므로 식 전체의 허수부는

$$-\frac{a}{2} - \frac{2b}{5} - \frac{3c}{10} = -\frac{5a+4b+3c}{10}.$$

이다. 식이 실수인 것은 정확히 이 허수부가 0일 때이므로, 조건은

$$\boxed{5a+4b+3c = 0}.$$

이다. ($-5a-4b-3c = 0$처럼 0이 아닌 정수를 곱한 식도 모두 같은 조건이다.) 실제로 허수부를 정확히 구했으므로 이 조건은 충분조건이면서 필요조건이다.

검산

- 소문항 (i)에서 $|A-Q| = |6-4i| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$이다. 우리가 구한 B에 대하여 $|B-Q|^2 = (3-2\sqrt{3})^2 + (2+3\sqrt{3})^2 = 21 - 12\sqrt{3} + 31 + 12\sqrt{3} = 52$이므로 B는 올바른 원 위에 있고, 수치적으로도 $|B-A| \approx 7.211 = |A-Q|$이다. 삼각형 QAB가 정삼각형이므로 당연히 그래야 한다.
- 소문항 (ii)에서 ($5a+4b+3c=0$을 만족하는) $a=3$, $b=0$, $c=-5$를 넣어 보면 $\frac{3(1-i)}{2} - \frac{5(1-3i)}{10} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) i = 1$ 이 되어 실수이다.
- $c = -(5a+4b)/3$인 무작위 순서쌍 10 000개로 수치 검사를 했더니 매번 허수부가 0이었다.

흔한 실수

- 시계 반대 방향으로 회전하면($e^{i\pi/3}$을 곱하면) $(7+2\sqrt{3}) + (4+3\sqrt{3})i$를 얻는데, 이것은 B가 아니라 꼭짓점 F이다.
- A를 Q가 아니라 원점을 중심으로 회전시킨다.
- 소문항 (ii)에서 **실수부**를 0으로 놓거나, 이런 식으로 허수부를 바로 읽어 내려면 a, b, c가 실수여야 한다는 것을 잊는다.

STEP 너머

$e^{i\theta}$를 곱하는 것은 회전이고, 사상 $z \mapsto \alpha z + \beta$는 회전과 확대 다음에 평행이동을 한 것이다. 이것들은 복소해석학(complex analysis) 첫 강의에서 배우는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 가장 간단한 예이다. 원점을 중심으로 하는 정다각형의 꼭짓점이 z_0에 단위근(roots of unity)을 곱한 것이라는 사실은 수많은 대수학과 기하학의 출발점이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP I 1998, 문제 6

순수수학 • 삼각함수 점화식

> **STEP I 1998, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q6

핵심 아이디어

점화식(recurrence)의 각 단계는 어떤 값과 코사인의 평균을 취하는데, 반각 공식(half-angle identity) $\frac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\frac{\theta}{2}$를 쓰면 그 평균이 완전제곱(perfect square)이 된다. 그러면 b_{n+1}의 식에 있는 제곱근이 그 제곱을 다시 없애 준다. 각 항이 바로 앞 항을 인수(factor)로 포함한다는 사실을 알아차리면 일반적인 규칙은 쉽게 추측할 수 있고, 그것을 확인하는 일은 귀납법(induction)의 한 단계이다.

풀이

풀이 전체에서 $0 < x < \frac{\pi}{2}$이므로, $k \geq 1$인 모든 각 $x/2^k$는 $(0, \frac{\pi}{4})$에 있고 그 코사인 값은 양수이다. b_{n+1}의 정의에 있는 제곱근은 양의 제곱근으로 택한다.

a_2와 b_2 구하기

$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$를 이용하면

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(\cos x + 1) = \cos^2\frac{x}{2}, \qquad b_2 = (a_2 b_1)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2},$$

이다. 마지막 단계에서는 $\cos\frac{x}{2} > 0$임을 이용하였다.

a_3와 b_3 구하기

공통인수 $\cos\frac{x}{2}$를 묶어 낸 다음, 이번에는 $\theta = \frac{x}{2}$로 하여 반각 공식을 다시 쓴다.

$$a_3 = \tfrac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}.$$

그러면

$$b_3 = (a_3 b_2)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4},$$

이다. 두 코사인 값이 모두 양수이기 때문이다. 이것이 구하라는 두 식이다.

일반적인 규칙

지금까지 구한 항들을 비교하면

$$b_2 = \cos\frac{x}{2}, \quad b_3 = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}, \qquad a_2 = b_2\cos\frac{x}{2}, \quad a_3 = b_3\cos\frac{x}{4}.$$

각 b에는 각이 절반이 된 코사인이 하나씩 더 붙고, 각 a는 대응하는 b에 그 마지막 코사인을 한 번 더 곱한 것이다. 따라서 $n \geq 2$에 대하여 다음과 같이 추측한다.

$$b_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{x}{2^k},$$

$$a_n = b_n\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cos^2\frac{x}{2^{n-1}}.$$

생각해 보기 추측한 식이 점화식을 만족함을 확인하려면 정확히 무엇을 확인해야 하는가?

두 가지를 확인한다. 하나는 추측한 식이 초깃값과 일치한다는 것이고, 다른 하나는 식이 a_n과 b_n에 대하여 성립하면 점화식으로부터 a_{n+1}과 b_{n+1}에 대한 식이 나온다는 것이다. 이 둘을 합하면 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 2$에 대하여 식이 성립한다.

초깃값. $n = 2$일 때 추측한 식은 $b_2 = \cos\frac{x}{2}$와 $a_2 = \cos^2\frac{x}{2}$를 주며, 이는 위에서 구한 값과 일치한다.

귀납 단계. 어떤 $n \geq 2$에 대하여 식이 성립한다고 하자. $\theta = x/2^{n-1}$로 놓으면 $x/2^n = \theta/2$이다. 그러면

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) = b_n \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos\theta\right) = b_n\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

b_{n+1}에 대한 추측은 $b_n\cos\frac{\theta}{2}$(각이 $x/2^n$인 코사인이 하나 더 붙은 것)이므로, 이 식은 $a_{n+1} = b_{n+1}\cos\frac{x}{2^n}$을 뜻하고, 이것이 바로 a_{n+1}에 대해 추측한 꼴이다. 다음으로

$$b_{n+1} = (a_{n+1}b_n)^{1/2} = \left(b_n^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2} = b_n\cos\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k},$$

이다. 여기서 양의 제곱근을 택하였는데, b_n과 $\cos\frac{x}{2^n}$이 모두 양수이므로 이는 정당하다. 이것이 b_{n+1}에 대해 추측한 꼴이므로, 점화식의 두 식이 모두 만족되고 모든 $n \geq 2$에 대하여 식이 성립한다.

사실 빈 곱(empty product)을 1로 약속하면 이 식들은 $b_1 = 1$과 $a_1 = \cos x$도 주므로, $n = 1$부터 성립한다.

검산

- $x = \frac{\pi}{3}$로 놓자. 점화식을 직접 계산하면 $a_3 \approx 0.808013$, $b_3 \approx 0.836516$이고, $\cos\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{12}$와 $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}$도 같은 값을 준다.
- $(0, \frac{\pi}{2})$에서 무작위로 고른 2000개의 x에 대하여 $n = 24$까지 점화식과 곱 공식을 비교하였더니, 10^{-15} 이내로 일치하였다.
- $x \to 0$일 때 모든 코사인 값은 1에 가까워지고, a_1과 b_1도 마찬가지이다. 따라서 모든 항이 마땅히 그래야 하듯 1에 가까워진다.

흔한 실수

- $\cos\theta > 0$인 이유를 밝히지 않고 $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$라고 쓰는 것. 여기서는 모든 각이 $(0, \frac{\pi}{4})$에 있으므로 성립한다.
- $n = 2$와 3으로부터 규칙을 추측하고 거기서 멈추는 것. 문제는 점화식을 만족함을 확인하라고 요구하므로 귀납 단계가 필요하다.

STEP 너머

b_n에 $\sin\frac{x}{2^{n-1}}$을 곱하고 $2\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$를 반복해서 쓰면 $b_n = \dfrac{\sin x}{2^{n-1}\sin(x/2^{n-1})}$을 얻는다. 이 값은 $n \to \infty$일 때 $\dfrac{\sin x}{x}$로 수렴(converge)한다($x = 1$이면 점화식을 수십 번 계산한 뒤 0.841471을 준다). $x = \frac{\pi}{2}$로 놓으면 $2/\pi$에 대한 비에트(Viète)의 무한곱(infinite product)을 얻는다. 평균을 취한 뒤 기하평균(geometric mean)을 취하는 이 방식은 가우스(Gauss)의 산술-기하 평균(arithmetic–geometric mean)과 가까운 친척이며, 수열이 수렴함을 증명하고 그 극한(limit)을 구하는 좋은 첫 예제가 된다. 수열의 극한을 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 보라.

풀이

STEP I 1998, 문제 7

순수수학 • 등비급수

> **STEP I 1998, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q7

핵심 아이디어

잔액을 해마다 추적하려 하지 말자. 그 대신 각 예금을 따로따로 따라가 본다. £a를 한 번 입금하여 은행에서 k년 동안 이자(interest)를 받으면 £ar^k로 불어나고, 그 합은 등비급수(geometric series)가 된다. 인출에 대해서는 같은 아이디어를 거꾸로 적용한다. 각 인출은 처음 잔액의 일부가 인출될 때까지 이자를 받아 **충당하는** 것이므로, 한 시점에서의 가치를 비교한다.

풀이

거치 기간 후의 금액

$\rho\%$의 이자는 매년 말에 잔액에 $r = 1 + \frac{\rho}{100}$을 곱한다.

예금하는 해에 차례로 $1, 2, \ldots, m$의 번호를 붙이자. k번째 해의 초에 한 예금은 $k, k+1, \ldots, m$번째 해의 말에 이자를 받으므로, 이자를 받는 횟수는 $m - k + 1$이다. 따라서 m번째 해의 말에 그 가치는 ar^{m-k+1}이다. 이를 k에 대해 더하면 m번째 해의 말의 잔액은

$$\begin{aligned} a\left(r^m + r^{m-1} + \cdots + r\right) &= ar\left(1 + r + \cdots + r^{m-1}\right) \\ &= ar\,\frac{r^m - 1}{r - 1}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 등비급수의 합 공식을 사용하였다($\rho > 0$이므로 $r \neq 1$이다).

그다음 l년 동안에는 입금도 인출도 없으므로, 이 금액에 r이 l번 더 곱해진다. 따라서 이 기간이 끝날 때의 총액은

$$£a\,\frac{r^{l+1}(r^m - 1)}{r - 1},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이 금액을 P라 하자.

인출

첫 번째 인출은 거치 기간 바로 다음 해의 초, 즉 잔액이 P인 시점에 이루어진다. k번째 인출 직후의 잔액을 B_k라 하자. 그러면

$$B_1 = P - b, \qquad B_k = rB_{k-1} - b \quad (k = 2, \ldots, n),$$

이다. 인출과 인출 사이에 돈이 1년치 이자를 받기 때문이다. 이 점화식(recurrence relation)을 풀어 쓰면

$$\begin{aligned} B_n &= r^{n-1}P - b\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1\right) \\ &= r^{n-1}P - b\,\frac{r^n - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

생각해 보기 P에 곱해지는 인수가 왜 r^n이 아니라 r^{n-1}일까?

첫 번째 인출과 n번째 인출 사이에는 연말이 $n-1$번밖에 없으므로, 돈은 이자를 $n-1$번 받는다. 마지막 인출 뒤에 붙는 이자는 계좌가 이미 비어 있으므로 상관이 없다. 마찬가지로, j번째 인출(마지막부터 세어 마지막 인출을 $j = 0$으로 한다)은 n번째 인출 전까지 r^j가 곱해진다.

n번째 인출 후 계좌는 비므로 $B_n = 0$이다. 따라서

$$r^{n-1}P = b\,\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

P를 대입하면

$$a\,\frac{r^{l+n}(r^m - 1)}{r - 1} = b\,\frac{r^n - 1}{r - 1},$$

이고, 그러므로

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{r^n - 1}{r^{l+n}\,(r^m - 1)}}$$

이 등식을 보는 동치인 방법은 "현재 가치(present value)"를 생각하는 것이다. 첫 번째 인출 시점에서 측정하면 k번째 인출의 가치는 b/r^{k-1}이고, 이 가치들의 합은 P와 같아야 한다.

$$P = b\left(1 + r^{-1} + \cdots + r^{-(n-1)}\right).$$

검산

- $m = n$이면 답은 $a/b = r^{-(l+n)}$으로 간단해지므로 $b = ar^{l+n}$이다. 이는 타당하다. k번째 예금과 k번째 인출을 짝지어 보자. 둘 사이는 정확히 $m + l = l + n$년 떨어져 있으므로, 각 예금이 정확히 하나의 인출을 충당한다.

- $r \to 1$(이자 없음)일 때 $\dfrac{r^n - 1}{r^m - 1} \to \dfrac{n}{m}$이므로 $a/b \to n/m$, 즉 $ma = nb$이다. 들어간 돈과 나온 돈이 같다.
- $\rho = 5$, $m = n = 10$, $l = 5$, $a = 1000$일 때, 해마다 계산하는 시뮬레이션을 하면 $P \approx 16855.58$이다. 공식에 따르면 $a/b = 1.05^{-15} \approx 0.48102$이므로 $b \approx 2078.93$이고, 이 b로 시뮬레이션하면 계좌는 정확히 0으로 끝난다. 또한 컴퓨터로 r, l, m, n을 무작위로 500번 골라 분수로 정확히 계산하여 두 공식을 모두 확인하였다.

흔한 실수

- 첫 번째 합에서 r^{m+1} 대신 r^m을 얻는 실수. 예금은 매년 **초**에 하므로 마지막 예금도 1년치 이자를 받는다.
- $r^{n-1}P$ 대신 r^nP라고 쓰는 실수. n번째 해의 말에 붙는 이자는 계좌가 비워진 뒤에 붙는다.

STEP 너머

이것은 연금(annuity)의 수학이다. 지급액들을 공통의 날짜로 할인하여 비교하는 것(현재가치)은 보험수리학과 금융수학의 기본 원리이다. 점화식 $B_k = rB_{k-1} - b$는 일계 선형 차분방정식(first-order linear difference equation)이다. 그 해는 특정한 상수에 r^k의 상수배를 더한 꼴로, 일계 선형 미분방정식(differential equation)을 푸는 방법과 정확히 닮아 있으며, 이러한 유사성은 대학 1학년의 차분방정식 및 미분방정식 강의에서 다루어진다. 이런 종류의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP I 1998, 문제 8

순수수학 • 2계 미분방정식

> **STEP I 1998, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q8

핵심 아이디어

유체역학의 옷을 입고 있지만, 이 문제는 순수한 미분방정식(differential equation) 문제이다. 좌변은 도함수의 도함수이므로 두 번 적분하기만 하면 되는데, 그 사이에 r로 나누면 상수가 로그로 바뀐다는 점을 기억해야 한다. 그다음 축 위에서 속도가 유한해야 한다는 물리적 조건이 상수 하나를 결정하고, 벽에서의 점착 조건(no-slip condition)이 나머지 상수를 결정한다.

풀이

일반해

방정식에 r를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -kr.$$

을 얻는다. r에 대하여 한 번 적분하면

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr^2 + A,$$

이고, 여기서 A는 상수이다. 이제 r로 나눈다(축에서 떨어진 관 내부에서는 $r > 0$이므로 문제없다).

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr + \frac{A}{r}.$$

다시 적분하면, $r > 0$이므로 $\ln|r|$ 대신 $\ln r$를 써서

$$\boxed{v = -\tfrac{1}{4}kr^2 + A\ln r + B}$$

를 얻으며, A와 B는 임의의 상수이다. 2계 방정식이므로 상수가 두 개인 것은 예상대로이다.

축 근처에서의 거동

$r \to 0^+$일 때 항 $-\frac{1}{4}kr^2$와 B는 유계로 남지만(각각 0과 B로 수렴한다), $\ln r \to -\infty$이다. 따라서 $A \neq 0$이면 $A\ln r$는 (A의 부호에 따라) $-\infty$ 또는 $+\infty$로 발산하고, 그러므로 $|v| \to \infty$이다. 이를 피하는 유일한 방법은 $A = 0$으로 두는 것이며, 이 경우 $v \to B$로 유한하다.

> **생각해 보기** 왜 $A = 0$이어야 한다고 고집해야 할까?

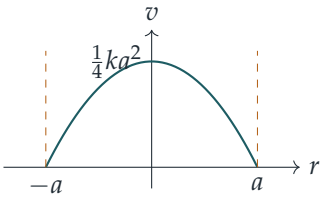
축 $r = 0$은 유체 내부에 있으므로 그곳에서의 속력은 유한해야 한다. 실제 유체는 관의 중심을 따라 무한히 빠르게 흐르지 않는다. $\ln r$ 해는 $r > 0$에서 방정식의 엄연한 해이지만, 여기서는 물리적으로 받아들일 수 없다. (축이 유체의 일부가 아닌, 두 동축 원통 사이의 흐름이라면 이 해도 허용될 것이다.)

속도 분포

$A = 0$이면 $v = B - \frac{1}{4}kr^2$이다. $r = a$에서 $v = 0$이라는 조건으로부터 $B = \frac{1}{4}ka^2$이므로

$$\boxed{v = \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right).}$$

이다. 이 분포는 포물선이다. 속력은 축 위에서 최대 $\frac{1}{4}ka^2$이고 벽에서 0으로 줄어든다.



(그림은 지름을 따라 자른 단면을 나타내며, 벽은 점선으로 표시하였다.)

유량

주어진 공식에 대입하면

$$F = 2\pi\int_0^a r\cdot\tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi k}{2}\int_0^a \left(a^2 r - r^3\right)\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi k}{2}\left[\frac{a^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi k}{2}\cdot\frac{a^4}{4},$$

이므로

$$\boxed{F = \frac{\pi k a^4}{8}.}$$

이다.

검산

- $v = \frac{1}{4}k(a^2 - r^2)$를 다시 대입하면 $r\,v' = -\frac{1}{2}kr^2$이고, 그 도함수는 $-kr$이며, r로 나누면 요구한 대로 $-k$가 된다.
- 평균 속력은 $F/(\pi a^2) = \frac{1}{8}ka^2$로, 최대 속력 $\frac{1}{4}ka^2$의 정확히 절반이다. 이는 포물선 분포의 잘 알려진 성질이다.
- 수치적으로 $k = 2$, $a = 1$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $F \approx 0.785398$로 $\pi/4$와 일치한다.

흔한 실수

- 첫 번째 적분에서 상수를 빠뜨리는 것. 그러면 $A\ln r$ 항이 사라져 "unless" 부분이 무의미해진다.
- $-kr$를 적분하여 $-\frac{1}{2}kr^2$를 얻은 다음, 다시 적분하기 전에 r로 나누는 것을 잊는 것.
- F에 대한 적분 안의 인수 r를 빠뜨리는 것. 반지름이 r인 얇은 고리를 지나는 유량은 상수가 아니라 그 둘레 $2\pi r$에 비례한다.

STEP 너머

연산자 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$는 r만의 함수에 대한 원통좌표계에서의 라플라시안(Laplacian) ∇^2이다. 따라서 이 문제는 사실 푸아송 방정식(Poisson's equation) $\nabla^2 v = -k$이며, $\ln r$ 해는 점전하의 $1/r$ 퍼텐셜의 2차원 판이다. 결과 $F \propto a^4$는 푸아죄유 법칙(Poiseuille's law)이다. 관의 반지름을 절반으로 줄이면 유량은 16분의 1로 줄어드는데, 좁아진 동맥이 그토록 중요한 문제가 되는 이유가 바로 이것이다. 미분방정식 측면에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

풀이

STEP I 1998, 문제 9

역학 • 진자의 충돌

STEP I 1998, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s1-q9

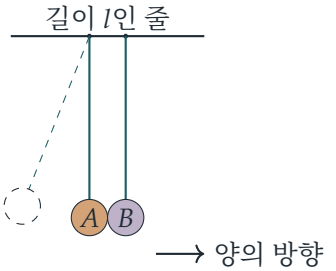
핵심 아이디어

변위가 매우 작으므로 각 구는 단진자(simple pendulum)로서 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 주기 $2\pi\sqrt{l/g}$는 진폭이나 속력에 의존하지 않는다. 두 진자의 길이가 같으므로, 최저점에서 어떤 충돌이 일어나든 그 후 두 구는 반주기 뒤 같은 순간에 속도가 반대로 바뀐 채 최저점으로 돌아온다. 두 번째 충돌이 언제 어디서 일어나는지 알고 나면, 매번 운동량 보존과 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)으로 두 줄이면 끝난다.

풀이

모형

A와 B를 같은 길이 l의 가볍고 늘어나지 않는 줄에 매달린 질량 m인 입자로 보고, 공기 저항은 무시하며, 충돌은 순간적이고 충격량(impulse)은 중심을 잇는 수평선 방향으로 작용한다고 가정한다. 첫 번째 충돌에서 A가 움직이는 방향(A에서 B를 향하는 방향)을 양의 방향으로 잡고, $\omega = \sqrt{g/l}$이라 하자.



모든 충돌이 최저점에서 일어나는 이유

진동이 작을 때 각 구는 진폭과 상관없이 각진동수(angular frequency) ω인 단진동을 한다. 따라서 속력 v로 최저점을 떠난 구의 수평 변위는 $\frac{v}{\omega}\sin\omega t$이고, 시간 π/ω(반주기)가 지나면 속도 $-v$로 움직이며 최저점에 돌아온다. 이는 모든 v에 대해 성립한다.

첫 번째 충돌은 최저점에서 일어난다. B가 그곳에 정지한 채 매달려 있고, A가 속력 u로 그곳에 도달하기 때문이다. 최저점에서 충돌이 일어난 뒤 A와 B의 속도가 $p \le q$라고 하자(충돌 직후 두 구가 서로를 향해 움직일 수는 없다). 최저점을 기준으로 측정하면, 시간 t가 지난 뒤 두 구 사이의 간격은

$$\frac{q}{\omega}\sin\omega t - \frac{p}{\omega}\sin\omega t = \frac{q-p}{\omega}\sin\omega t,$$

이고, 이는 $0 < t < \pi/\omega$에서 양수이며 $t = \pi/\omega$에서 0이다. 따라서 두 구는 그보다 먼저 만날 수 없고, 둘 다 최저점에 돌아오는 바로 그 순간에 다시 만난다. 이것이 문제의 힌트이다. 두 진자의 주기가 같으므로 둘은 항상 함께 최저점으로 돌아온다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 충돌은 최저점에서 일어나고, 연속된 두 충돌 사이의 시간 간격은 반주기이다.

첫 번째 충돌

첫 번째 충돌 직후 A와 B의 속도를 각각 v_A, v_B라 하자. 운동량 보존(최저점에서 줄의 장력은 연직 방향이므로 수평 방향 충격량을 주지 않는다)과 뉴턴의 실험 법칙에 의해

$$mv_A + mv_B = mu,$$
$$v_B - v_A = eu.$$

두 식을 더하고 빼면

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

두 값 모두 ≥ 0이므로 두 구는 모두 B 쪽으로 흔들려 나간다($e = 1$이면 A는 그 자리에 멈추어 최저점에 매달린 채로 있다).

생각해 보기 두 번째 충돌 직전의 속도는 각각 얼마인가?

반주기 뒤 각 구는 속도가 반대로 바뀐 채 최저점에 돌아온다. A의 속도는 $-\frac{1}{2}u(1-e)$이고 B의 속도는 $-\frac{1}{2}u(1+e)$이다. B가 더 빠르므로 B가 뒤에서 A를 따라잡는다. A에 대한 B의 접근 속력은 $\frac{1}{2}u(1+e) - \frac{1}{2}u(1-e) = eu$이다.

두 번째 충돌

두 번째 충돌 직후 A와 B의 속도를 각각 w_A, w_B라 하자. 운동량 보존에 의해

$$mw_A + mw_B = -\tfrac{1}{2}mu(1-e) - \tfrac{1}{2}mu(1+e) = -mu,$$

이고, 뉴턴의 실험 법칙(분리 속력은 접근 속력 eu의 e배이다)에 의해

$$w_B - w_A = e \cdot eu = e^2 u.$$

두 식을 빼고 더하면

$$w_A = -\tfrac{1}{2}u(1+e^2), \qquad w_B = -\tfrac{1}{2}u(1-e^2).$$

따라서 두 번째 충돌 직후 A의 속력은 요구된 대로 $\frac{1}{2}u(1+e^2)$이고 B의 속력은 $\frac{1}{2}u(1-e^2)$이며, 둘 다 A가 처음 놓아졌던 쪽으로 움직인다.

검산

- 완전 탄성 충돌, $e = 1$: A는 결국 속력 u를 갖고 B는 정지한다. 이는 옳다. 첫 번째 충돌 뒤 A는 멈추고 B가 속력 u를 얻으며, B가 속력 u로 돌아와 그것을 모두 A에게 돌려준다.
- $e = 0$: 두 속력 모두 $\frac{1}{2}u$이다. 첫 번째 충돌 뒤 두 구는 사실상 한 덩어리가 되어 속력 $\frac{1}{2}u$로 함께 움직이므로, 이것도 옳다.
- 두 번째 충돌 뒤 운동량은 $-\frac{1}{2}mu(1+e^2) - \frac{1}{2}mu(1-e^2) = -mu$로, 처음 운동량 mu와 방향이 반대이다.
- $l = 1\,\mathrm{m}$, 처음 각도 0.01 rad인 실제(비선형) 진자 두 개를 시뮬레이션해 보았다. 두 번째 충돌은 첫 번째 충돌로부터 반주기의 1.0001배가 지난 뒤, 최저점에서 3×10^{-6} rad 이내인 곳에서 일어났고, $e = 0.7$일 때 충돌 뒤 속력은 $0.745u$와 $0.255u$로 $\frac{1}{2}(1+e^2)$, $\frac{1}{2}(1-e^2)$와 일치했다.

흔한 실수

- 두 번째 충돌 전에 두 속도가 모두 반대로 바뀐다는 것을 잊고, B가 정지한 A에 부딪힌다고 생각하는 것.
- 두 번째 충돌에서 $e \cdot$(접근 속력) 대신 eu를 쓰는 것. 여기서는 접근 속력이 마침 eu이므로 분리 속력은 e^2u이다.
- 충돌이 최저점에서 일어나는 이유를 "구가 거기에 매달려 있기 때문"이라고 말하는 것. 진짜 이유는 주기가 진폭에 의존하지 않기 때문이며, 그래서 처음에 당기는 각도가 작아야 하는 것이다.

STEP 너머

등시성(isochronism, 주기가 진폭에 의존하지 않는 성질)은 진자에서 근사적으로만 성립한다. 진폭이 커지면 주기가 길어지는데, 그 정확한 값은 타원 적분(elliptic integral)으로 주어지며, 충돌 지점도 최저점에서 점점 벗어나게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진자와 충돌을 모두 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1998, 문제 10

역학 • 포물체 운동

> **STEP I 1998, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q10

핵심 아이디어

우리는 발사각을 모르고, 알 필요도 없다. 답은 v, r, t만으로 나타내야 한다. 따라서 각을 소거하는 관계식을 찾아야 한다. 가장 깔끔한 방법은 벡터로 생각하는 것이다. 시간 t가 지난 뒤 입자가 떨어지는 위치는 초기 속도에 t를 곱한 것에, 중력 때문에 생기는 낙하 $\frac{1}{2}gt^2$를 더한 것이다. 이 세 벡터는 직각삼각형을 이루고, 나머지는 피타고라스(Pythagoras) 정리가 해결한다.

풀이

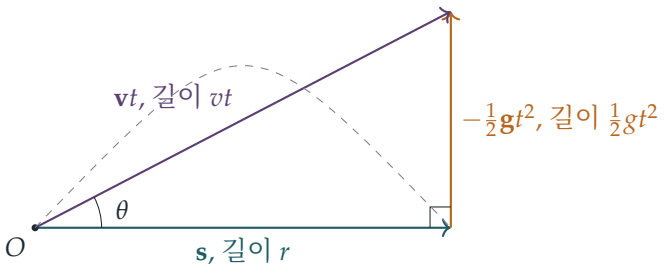
흙의 각 입자를 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 점입자로 모형화하고, 지면 높이에 있는 폭발의 중심 O에서 출발한다고 하자. 똑바로 위로 올라간 입자는 O에 떨어지므로, $r > 0$이라 하고 수평면 위로 잰 발사각(angle of projection) θ는 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$라고 할 수 있다.

착지 시간

일정한 가속도 $\mathbf{g}$(연직 아래 방향)를 받을 때, 시간 t가 지난 뒤의 변위(displacement)는

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2,$$

이다. 여기서 $\mathbf{v}$는 크기가 v인 초기 속도이다. 착지하는 순간 $\mathbf{s}$는 길이가 r인 수평 벡터이다. 식을 정리하면 $\mathbf{v}t = \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$이고, 이것은 길이가 r인 수평 벡터와 길이가 $\frac{1}{2}gt^2$인 연직(위 방향) 벡터의 합이다.



이 두 벡터는 서로 수직이므로, 피타고라스 정리에 의해

$$v^2t^2 = r^2 + \left(\tfrac{1}{2}gt^2\right)^2 = r^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

이다. 양변에 g^2을 곱하고 $u = \frac{1}{2}g^2t^2$이라 두면($u^2 = \frac{1}{4}g^4t^4$이고 $g^2v^2t^2 = 2v^2u$이다), 이 식은

$$u^2 - 2v^2u + g^2r^2 = 0,$$

이 되어 u에 대한 이차방정식(quadratic)이 된다. 그 근은

$$\tfrac{1}{2}g^2t^2 = u = v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

? **생각해 보기** 벡터를 쓰지 않는다면 θ를 어떻게 없앨 수 있을까?

성분을 이용한다. 수평 방향으로는 $r = vt\cos\theta$이고, 연직 방향으로는 지면 높이에 착지한다는 것이 $0 = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$을 뜻하므로 ($t \neq 0$이므로) $vt\sin\theta = \frac{1}{2}gt^2$이다. 두 식을 제곱하여 더하고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 쓰면 다시 정확히 $v^2t^2 = r^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$을 얻는다. 벡터 그림은 바로 이 계산을 삼각형으로 그려 놓은 것일 뿐이다.

두 근이 모두 실수인 것은 $v^4 \geq g^2r^2$, 즉 $r \leq v^2/g$일 때뿐이다. 이것이 잘 알려진 최대 사거리(maximum range)이다. $r < v^2/g$일 때 두 근은 모두 양수이므로(두 근의 곱은 $g^2r^2 > 0$이고 합은 $2v^2 > 0$이다) 착지 시간이 두 개 있으며, 하나는 가파른 발사, 다른 하나는 완만한 발사에 해당한다. $t = 2v\sin\theta/g$는 θ에 대해 증가하므로, $+$ 부호는 더 가파른 궤적 $\theta > \frac{\pi}{4}$에, $-$ 부호는 더 평평한 궤적에 해당한다.

최고 높이

비행은 대칭적이다. 연직 속도 $v\sin\theta - gt'$은 비행의 한가운데인 $t' = \frac{1}{2}t$에서 0이 된다. 꼭대기에서부터 입자는 (연직 방향으로) 정지 상태에서 시간 $\frac{1}{2}t$ 동안 떨어지므로, 최고 높이는

$$H = \tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{1}{2}t\right)^2 = \tfrac{1}{8}gt^2 = \frac{1}{4g}\cdot\tfrac{1}{2}g^2t^2.$$

이다. 앞부분의 결과를 이용하면

$$H = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2 r^2}}{4g},$$

이고, $+$ 부호는 더 가파른 궤적, $-$ 부호는 더 평평한 궤적에 해당한다($r < v^2/g$일 때 둘 다 가능하며, $r = v^2/g$일 때는 $H = v^2/(4g)$에서 서로 일치한다).

검산

- 연직 발사: $r = 0$이면 $\frac{1}{2}g^2t^2 = 2v^2$이므로 $t = 2v/g$이고 $H = v^2/(2g)$이며, 이는 옳다. 다른 근 $t = 0$, $H = 0$은 지면을 스치듯 날아가는 발사에 해당한다.
- 두 높이의 합은 $v^2/(2g)$이다. 당연한 결과이다. 두 궤적은 서로 여각인 θ와 $\frac{\pi}{2} - \theta$를 가지며, $\frac{v^2 \sin^2\theta}{2g} + \frac{v^2 \cos^2\theta}{2g} = \frac{v^2}{2g}$이기 때문이다.
- 수치적으로, $g = 9.8$, $v = 20$, $\theta = 1$ 라디안으로 두고 운동을 단계적으로 계산하면 $t \approx 3.4346$, $H \approx 14.450$을 얻는다. $+$ 부호를 택한 공식도 3.4346과 14.450을 준다. 여각에 대한 결과는 $-$ 부호와 일치한다($t \approx 2.2053$, $H \approx 5.958$).

흔한 실수

- 높이를 하나만 제시하는 것. 속력이 같은 입자는 서로 다른 두 경로로 같은 점에 도달할 수 있으며, $\pm$는 H까지 그대로 이어진다.
- H를 θ로 나타내고 멈추는 것. 문제는 v, r, g만으로 나타내기를 요구하므로, 앞부분과 연결해 주는 관계 $H = \frac{1}{8}gt^2$을 쓰는 것이 효율적인 방법이다.

STEP 너머

t^2에 대한 이차방정식은 "궤적의 포락선(envelope of trajectories)"을 시간 영역에서 나타낸 것이다. $v^4 = g^2r^2$을 만족하는 점들(그리고 지면을 벗어나서는 포물면 $z = \frac{v^2}{2g} - \frac{gr^2}{2v^2}$)은 흙이 도달할 수 있는 영역의 경계를 이루며, 그 내부의 모든 점은 정확히 두 개의 궤적에 의해 맞는다. 곡선족의 포락선은 대학 1학년 과정에서 편미분(partial differentiation)을 멋지게 응용하는 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 벡터 운동학을 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP I 1998, 문제 11

역학 • 도르래에 걸린 연결된 입자

STEP I 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s1-q11

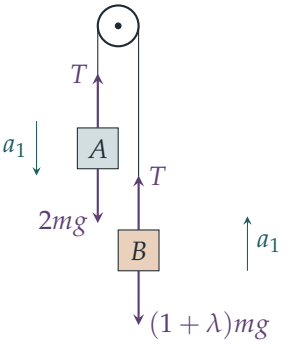
핵심 아이디어

한 번의 왕복은 두 단계로 이루어지고, 각 단계에서 질량이 일정하므로 가속도(acceleration)도 일정하다. 따라서 $s = \frac{1}{2}at^2$를 쓸 수 있다. 내려갈 때는 물이 가득 찬 양동이가 광석과 양동이보다 무거워서, 두 양동이가 하나의 애트우드 기계(Atwood machine)처럼 움직인다. 다시 올라갈 때는 양동이 A가 비어 있고 질량이 없으므로 B를 붙잡아 주는 것이 아무것도 없다. 즉 B는 그냥 자유낙하(free fall)한다. 둘째 부분에서 "아주 오랜 시간 동안 가장 많은 광석"은 "한 주기당 광석을 한 주기당 시간으로 나눈 값이 가장 크다"는 뜻이다.

풀이

한 주기에 걸리는 시간

모형: 양동이와 그 내용물은 입자(particle)이고, 사슬은 가볍고 늘어나지 않으며, 도르래(pulley)는 작고 매끄럽고 가볍다. 따라서 장력(tension) T는 사슬의 양 끝에서 같고, 두 양동이는 같은 속력으로 움직인다. A가 꼭대기에 있을 때 B는 바닥에 있으므로(사슬의 길이는 l이다), 각 단계에서 각 양동이는 거리 l만큼 움직인다.



1단계: A가 내려간다. 양동이 A에는 $2m$의 물이 담겨 있고, 양동이 B의 전체 질량은 $m + \lambda m = (1+\lambda)m$이다. 공통 가속도를 a_1이라 하자(A는 아래로, B는 위로 움직인다). 각 양동이에 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} A\ (\text{아래 방향}): &\quad 2mg - T = 2ma_1, \\ B\ (\text{위 방향}): &\quad T - (1+\lambda)mg = (1+\lambda)ma_1. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 T가 소거된다.

$$(1-\lambda)mg = (3+\lambda)ma_1 \quad\Longrightarrow\quad a_1 = \frac{(1-\lambda)g}{3+\lambda},$$

이 값은 $\lambda < 1$이므로 양수이고, 따라서 A는 실제로 내려간다. 정지 상태에서 출발하여 일정한 가속도로 거리 l을 이동하므로 $l = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$이고, 따라서

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_1}} = \sqrt{\frac{2l}{g}}\sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}.$$

? **생각해 보기** 2단계에서 양동이 A는 질량이 전혀 없다. 사슬의 장력은 얼마인가?

2단계: B가 내려간다. 이제 A는 비어 있어서 질량이 없고, B의 질량은 m이다. 질량이 없는 양동이 A에 대해 뉴턴의 법칙은 $T - 0\cdot g = 0\cdot a$가 되므로 $T = 0$이다. 질량을 가진 것에 연결되어 있지 않은 가벼운 사슬은 아무것도 당길 수 없다. 따라서 B는 정지 상태에서 가속도 g로 거리 l만큼 자유낙하하고, $l = \frac{1}{2}gt_2^2$에서

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

(질량이 0과 m인 경우의 애트우드 공식에서도 같은 답이 나온다: $a = \frac{m-0}{m+0}g = g$.) 이 단계가 끝날 때 A는 처음으로 다시 꼭대기에 돌아온다.

합계. A를 꼭대기에서 놓은 순간부터 처음으로 꼭대기에 돌아올 때까지 걸리는 시간은

$$\boxed{t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}\left(1 + \sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}\right) = \sqrt{\frac{2l}{g}}\,\frac{(1-\lambda)^{1/2} + (3+\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2}}}$$

끌어올리는 광석의 양 최대화하기

주기 시간을 $\tau(\lambda) = t_1 + t_2$라 쓰자. 각 주기마다 질량 λm의 광석이 올라가고, 이 과정은 똑같이 반복된다. 긴 시간 S 동안 완전한 주기는 $\lfloor S/\tau \rfloor$번 있으므로, 끌어올린 광석의 양은 $\lambda m\,(S/\tau - 1)$과 $\lambda m\, S/\tau$ 사이에 있다. S가 τ에 비해 아주 크면 마치지 못한 일부 주기는 무시할 수 있으므로, 끌어올린 광석의 양은 사실상

$$\frac{\lambda m S}{\tau(\lambda)} = mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\frac{\lambda(1-\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2} + (3+\lambda)^{1/2}} = mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\mathrm{f}(\lambda).$$

인자 $mS\sqrt{g/2l}$는 λ에 의존하지 않으므로, $\mathrm{f}(\lambda)$가 가능한 한 커지도록 $\lambda \in (0,1)$를 골라야 한다.

> **생각해 보기** 최적의 λ가 끝점이 아니라 정류점(stationary point)이어야 하는 이유는 무엇인가?

함수 f는 $(0,1)$에서 미분가능(differentiable)하다. 그 구간에서 $1-\lambda > 0$이고 $3+\lambda > 0$이며 분모가 양수이기 때문이다. 이 함수는 $(0,1)$에서 양수이고, 양 끝에서 0으로 수렴(converge)한다. $\lambda \to 0$이면 인자 λ가 사라지고(광석을 전혀 나르지 않는다), $\lambda \to 1$이면 인자 $(1-\lambda)^{1/2}$가 사라진다(두 양동이가 거의 균형을 이루므로 1단계가 아주 오래 걸린다). 따라서 f의 최댓값은 내부의 점에서 나타나고, 미분가능한 함수가 내부의 점에서 최댓값을 가지면 그 점에서 도함수(derivative)는 0이다. 따라서 최적의 λ는 요구된 대로 $\mathrm{f}'(\lambda) = 0$을 만족한다.

검산

- 극한의 경우: $\lambda \to 1$이면 1단계에서 두 양동이의 질량은 $2m$과 $2m$이 되므로 $a_1 \to 0$이고 $t_1 \to \infty$이다. 이는 공식과 일치한다.
- $\lambda \to 0$이면 $a_1 = g/3$을 얻는데, 이는 질량이 $2m$과 m일 때의 통상적인 애트우드 값이다.
- $g = 9.8$로 두고 임의의 λ와 l에 대해 운동을 수치적으로 단계별 계산한 결과가 공식과 일치하였다. 예를 들어 $\lambda = 0.504$, $l = 26.9$이면 한 주기는 8.568 s이다. f를 수치적으로 최대화하면 $\lambda \approx 0.704$를 얻고, 긴 시간 동안의 완전한 주기를 세어 보아도 같은 최적의 λ를 얻는다.

흔한 실수

- 양동이 B 자체의 질량 m을 잊고, 1단계에서 $(1+\lambda)m$ 대신 λm을 쓰는 것.
- 2단계를 장력이 있는 애트우드 기계로 다루는 것: A의 질량이 없으므로 B는 자유낙하한다.

- 단위 시간당 광석 대신 한 주기당 광석 λm을 최대화하는 것. 짐이 클수록 주기가 느려진다.

STEP 너머

비율(한 주기당 산출량을 한 주기당 시간으로 나눈 값)을 최적화한다는 것은 확률론의 **재생 보상 정리**(renewal–reward theorem)의 바탕에 있는 아이디어이다. 이 정리에서는 주기의 길이가 확률적이지만, 장기적인 보상률은 여전히 한 주기당 평균 보상을 평균 주기 길이로 나눈 값이다. 여기서 다룬 역학은 등가속도 운동이며, Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이를 입자계에 대한 완전한 논의로 발전시킨다.

풀이

STEP I 1998, 문제 12

확률과 통계 • 경우의 수와 독립

STEP I 1998, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s1-q12

핵심 아이디어

이 문제는 모두 세기(counting)이다. 해가 모두 몇 개인지, 그리고 그중 X가 주어진 값을 갖는 해가 몇 개인지를 알면, 각 확률은 두 개수의 비가 된다. 독립(independence)인지 확인하는 가장 빠른 방법은 극단적인 경우를 보는 것이다. 즉 결합확률(joint probability)이 주변확률(marginal probability)의 곱과 결코 같을 수 없는 값의 쌍 하나를 찾으면 된다. 마지막 부분에서 "XYZ가 5로 나누어떨어진다"는 것은 "X, Y, Z 중 적어도 하나가 5로 나누어떨어진다"는 뜻이므로, 포함–배제의 원리(inclusion–exclusion)를 쓰면 된다.

풀이

해의 개수 세기

$X = x$를 고정하면($0 \le x \le 20$), Y는 $0, 1, \ldots, 20 - x$ 중 어느 값이든 될 수 있고, 그러면 $Z = 20 - x - Y$는 결정되며 음이 아니다. 따라서 $X = x$인 해는 정확히 $21 - x$개이고, 해의 총 개수는

$$N = \sum_{x=0}^{20} (21 - x) = 21 + 20 + \cdots + 1 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231.$$

이다. (이는 "별과 막대(stars and bars)" 방법으로 센 $\binom{22}{2}$와 같다. 별 20개와 막대 2개를 한 줄로 배열하는 것이다.) 각 해의 확률은 $1/231$이고,

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{21 - x}{231}, \qquad x = 0, 1, \ldots, 20.$$

이다. 대칭성에 의해 Y(그리고 Z)도 같은 분포를 따른다.

X와 Y는 독립인가?

아니다. $X = 20$, $Y = 20$을 생각하자. 각 사건은 따로 보면 일어날 수 있다.

$$\mathrm{P}(X = 20) = \mathrm{P}(Y = 20) = \frac{1}{231} > 0,$$

그러나 $X + Y \leq 20$이므로 두 사건은 동시에 일어날 수 없다. 따라서

$$\mathrm{P}(X = 20,\ Y = 20) = 0 \neq \frac{1}{231^2} = \mathrm{P}(X = 20)\,\mathrm{P}(Y = 20),$$

이므로 X와 Y는 독립이 아니다. 직관적으로 말하면, X가 크면 Y가 가질 수 있는 여지가 줄어든다.

> **생각해 보기** "$X + Y \leq 20$이므로 당연히 종속이다"라고 말하는 것으로 충분하지 않을까?

그런 제약 조건에 주목하는 것은 올바른 직감이지만, 독립은 확률에 관한 정확한 명제이므로, 근거를 대려면 $\mathrm{P}(X = x, Y = y) \neq \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y = y)$인 값의 쌍 하나를 제시해야 한다. 반례(counterexample) 하나면 충분하며, 극단적인 쌍 $(20, 20)$을 택하면 계산이 아주 간단해진다.

X가 5로 나누어떨어지는 경우

범위 안에 있는 5의 배수는 $X = 0, 5, 10, 15, 20$이고, 각각에 해당하는 해의 개수는 $21, 16, 11, 6, 1$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(5 \mid X) = \frac{21 + 16 + 11 + 6 + 1}{231} = \frac{55}{231} = \frac{5}{21},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

XYZ가 5로 나누어떨어지는 경우

5는 소수(prime)이므로, $5 \mid XYZ$일 필요충분조건은 5가 X, Y, Z 중 적어도 하나를 나누는 것이다. (0도 5로 나누어떨어진다는 것을 잊지 말자.) A, B, C를 각각 X, Y, Z가 5로 나누어떨어지는 해들의 집합이라 하자. 앞 부분에서 $|A| = |B| = |C| = 55$이다.

$A \cap B$에 대해서는 $a, b \geq 0$, $a + b \leq 4$인 a, b에 대하여 $X = 5a$, $Y = 5b$로 쓴다. 이러한 쌍의 개수는 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$이다. 이들 모두에서 $Z = 20 - 5a - 5b$ 역시 5의 배수이므로

$$|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = |A \cap B \cap C| = 15.$$

이다. 포함–배제의 원리에 의해

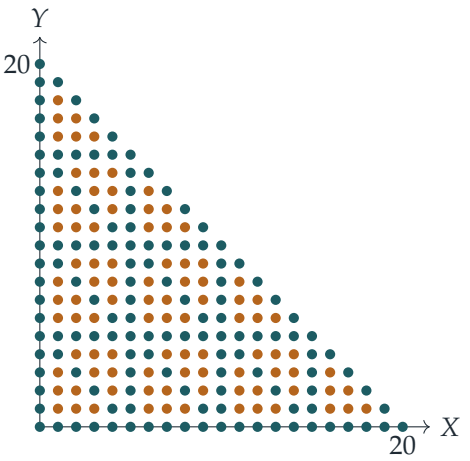
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= 3 \cdot 55 - 3 \cdot 15 + 15 \\ &= 135, \end{aligned}$$

이고, 따라서

$$\mathrm{P}(5 \mid XYZ) = \frac{135}{231} = \frac{45}{77}.$$

이다.

아래 그림은 해들을 $X + Y \leq 20$인 격자점(lattice point) (X, Y)로 나타낸 것이다. 청록색 점은 직선 $X = 5k$, $Y = 5k$, $X + Y = 20 - 5k$(즉 $Z = 5k$) 중 하나 위에 있는 점이고, 호박색 점은 X, Y, Z 중 어느 것도 5의 배수가 아닌 96개의 해이다.



검산

- 여사건에는 X, Y, Z 중 어느 것도 5의 배수가 아닌 해가 $231 - 135 = 96$개 있어야 한다. 그림의 호박색 점들이 바로 그것이다. 컴퓨터로 231개의 해를 모두 나열하고 정확한 분수로 계산하면 96, $|A \cap B| = 15$, $5/21$, $135/231 = 45/77 \approx 0.584$가 확인된다.
- $5/21$에 대한 타당성 점검: X가 5로 나누어떨어질 확률이 $1/5$보다 조금 큰 것은, 작은 X 값일수록 확률이 높고 그중에서도 $X = 0$의 확률이 가장 높기 때문이다.

흔한 실수

- 0이 5로 나누어떨어진다는 것을 잊는 실수. $X = 0$을 빠뜨리면 $5/21$이 아니라 $34/231$이 나온다.
- $3 \times \frac{5}{21}$을 더하는 실수. 이렇게 하면 겹치는 부분을 여러 번 세게 된다. 여기서는 겹치는 부분이 크다. 두 변수가 5의 배수이면 나머지 하나도 반드시 5의 배수이기 때문이다.
- 곱셈 법칙이 성립하지 않는 구체적인 값의 쌍을 제시하지 않고 종속이라고 주장하는 실수.

STEP 너머

해를 균등하게 무작위로 고르는 것은 20을 세 부분으로 나누는 **합성**(*composition*)을 무작위로 고르는 것과 같다. 20을 합계 n으로 바꾸고 n을 키우면, $(X/n, Y/n)$은 삼각형 위의 균등분포(uniform distribution)를 따르게 되는데, 이는 디리클레 분포(Dirichlet distribution)의 가장 간단한 경우이다. 포함–배제의 원리는 "적어도 하나" 사건을 다루는 표준 도구로, 교란순열(derangement)과 오일러(Euler)의 토티언트 함수(totient function)에서도 다시 등장한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)은 세기와 독립성에 관한 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP I 1998, 문제 13

확률과 통계 • 복원추출

STEP I 1998, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s1-q13

핵심 아이디어

이것은 조건부 확률(conditional probability) 문제이다. 조건으로 주어진 사건은 "n번 꺼내는 동안 파스틸(pastille)을 정확히 하나 먹었다"는 것이고, 이 사건을 그 파스틸을 **언제** 먹었는지에 따라 나눈다. 봉지 안의 내용물은 빨간 파스틸을 먹는 순간에만 바뀌므로, 나눈 각 조각은 간단한 확률들의 곱이 된다. 조각들을 더하면 등비급수(geometric series)가 되고, 바로 여기서 두 n제곱의 차가 나온다.

풀이

처음에 들어 있는 파스틸의 개수를 $N = r + b$라 하자. $r \geq 1$이고 $b \geq 1$이라고 가정한다($b = 0$이고 $n \geq 2$이면 파스틸을 정확히 하나만 먹는 것은 불가능하므로 조건으로 삼을 사건이 없다).

매번 꺼낼 때의 봉지. 빨갛지 않은 파스틸은 다시 넣으므로, 봉지는 빨간 파스틸을 먹을 때에만 바뀐다. 빨간 파스틸을 먹기 전에는 봉지에 파스틸이 N개 있고 그중 b개가 빨갛지 않다. 먹은 뒤에는 파스틸이 $N-1$개 있고, 빨갛지 않은 것은 여전히 b개이다. 매번 꺼내기 전에 봉지를 충분히 흔들므로, 각 시행은 그 순간 봉지에 들어 있는 것들 가운데에서 새로 균등하게 하나를 고르는 것이다. 따라서 확률을 한 번 꺼낼 때마다 차례로 곱할 수 있다.

먹은 시점에 따라 나누기. $k = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 E_k를 n번의 시행에서 먹은 유일한 파스틸을 k번째 시행에서 먹은 사건이라 하자. 그러면 $1, \ldots, k-1$번째 시행에서는 가득 찬 봉지에서 빨갛지 않은 것이 나오고, k번째 시행에서는 가득 찬 봉지에서 빨간 것이 나오며,

$k+1, \ldots, n$번째 시행에서는 줄어든 봉지에서 빨갛지 않은 것이 나온다.

$$\mathrm{P}(E_k) = \left(\frac{b}{N}\right)^{k-1} \frac{r}{N} \left(\frac{b}{N-1}\right)^{n-k} = \frac{r\,b^{n-1}}{N^k\,(N-1)^{n-k}}.$$

사건 $E_1, \ldots, E_n$은 서로 배반(disjoint)이고, 이들의 합집합은 파스틸을 정확히 하나 먹은 사건 E이다. 따라서

$$\mathrm{P}(E) = r\,b^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{N^k (N-1)^{n-k}} = \frac{r\,b^{n-1}}{N^n (N-1)^n} \sum_{k=1}^{n} N^{n-k} (N-1)^k,$$

이다. 여기서 각 항의 분자와 분모에 $N^n(N-1)^n$을 곱하였다.

? **생각해 보기** $\sum_{k=1}^{n} N^{n-k}(N-1)^k$를 어떻게 더할까?

이것은 첫째항이 $N^{n-1}(N-1)$이고 공비가 $\frac{N-1}{N}$인 등비급수이다. 더 빠르게는, 잘 알려진 인수분해(factorisation)

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}\right)$$

에 $x = N, y = N-1$을 대입하면 $x - y = 1$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} N^{n-k}(N-1)^k = (N-1) \sum_{j=0}^{n-1} N^{n-1-j}(N-1)^j = (N-1)\left(N^n - (N-1)^n\right).$$

그러므로

$$\mathrm{P}(E) = \frac{r\,b^{n-1}\left(N^n - (N-1)^n\right)}{N^n (N-1)^{n-1}}.$$

조건부 확률. "마지막 시행에서 먹었고, 하나만 먹었다"는 사건은 E_n이며, $\mathrm{P}(E_n) = \frac{r\,b^{n-1}}{N^n}$이다. $E_n \subseteq E$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E_n \mid E) = \frac{\mathrm{P}(E_n)}{\mathrm{P}(E)} &= \frac{r\,b^{n-1}}{N^n} \cdot \frac{N^n (N-1)^{n-1}}{r\,b^{n-1}\left(N^n - (N-1)^n\right)} \\ &= \frac{(N-1)^{n-1}}{N^n - (N-1)^n} = \frac{(r+b-1)^{n-1}}{(r+b)^n - (r+b-1)^n},\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

r와 b는 그 합을 제외하면 완전히 약분되어 사라진다는 점에 주목하자. 사실 위의 계산은 더 많은 것을 보여 준다. E가 주어졌을 때 파스틸을 k번째 시행에서 먹었을 확률은 $\left(\frac{N-1}{N}\right)^k$에 비례하므로, 앞선 시행일수록 더 가능성이 크다. 이는 이치에 맞는다. 일찍 먹으면 봉지에서 빨갛지 않은 것의 비율이 더 커지고, 그러면 남은 시행에서 "더 이상 빨간 것이 나오지 않을" 확률이 커지기 때문이다.

검산

- $n = 1$: 공식은 $\dfrac{1}{N-(N-1)} = 1$을 준다. 유일한 시행이 곧 마지막 시행이므로 옳다.
- $n = 2$: 공식은 $\dfrac{N-1}{2N-1}$을 주는데, 이는 $\frac{1}{2}$보다 조금 작으며 앞선 시행이 약간 더 가능성이 크다는 사실과 들어맞는다.
- $r = 3, b = 5, n = 4$일 때 공식은 $343/1695 \approx 0.2024$를 준다. 네 시행이 모두 똑같이 가능하다면 $\frac{1}{4}$일 것이다. 4×10^5회의 시뮬레이션은 0.2028을 주었고, 봉지의 상태를 추적하며 가능한 모든 시행 순서를 정확히 나열해 보니 $1 \le r, b \le 4, 1 \le n \le 8$인 모든 경우에 공식이 정확히 재현되었다.

흔한 실수

- 빨간 것을 먹은 **뒤의** 빨갛지 않은 시행에도 b/N을 쓰는 것. 이제 봉지에는 파스틸이 $N-1$개 있으며, 이것이 바로 이 문제의 핵심이다. 처음부터 끝까지 b/N을 쓰면 모든 E_k의 확률이 같아져서 답이 $1/n$이 되어 버린다.
- 조건을 거는 것을 잊는 것. 파스틸을 정확히 하나 먹었다는 정보가 주어졌으므로, $\mathrm{P}(E_n) = rb^{n-1}/N^n$ 그 자체는 답이 아니다.

STEP 너머

여기서의 봉지는 간단한 마르코프 연쇄(Markov chain)이다. 그 상태는 남은 빨간 파스틸의 개수이고, 상태가 한 단계 내려갈 확률은 현재 상태에만 의존한다. 이러한 연쇄의 최종 상태를 조건으로 두고 그것이 거쳐 온 경로를 묻는 것이 "은닉 마르코프 모형(hidden Markov model)"과 과거 이력에 대한 베이즈 추론(Bayesian inference)의 바탕이 되는 아이디어이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 조건부 확률과 마르코프 연쇄를 정확히 이 수준에서 다루며, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)에는 같은 정신의 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 1998, 문제 14

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP I 1998, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q14

핵심 아이디어

동전이 어디에 떨어지는지에 관한 모든 정보는 동전의 **중심**이 어디에 떨어지는지에 담겨 있다. 판의 무늬가 규칙적이므로 중심이 하나의 2×2 정사각형 위에서 균등분포(uniformly distributed)를 따른다고 볼 수 있고, 그러면 각 결과는 그 정사각형의 한 영역에 대응한다. "선을 가로지른다"와 "교차점을 덮는다"를 중심에서 선과 꼭짓점까지의 거리에 대한 조건으로 바꾸면 확률(probability)은 넓이가 되고, 이것은 a에 대한 이차식(quadratic)이므로 최댓값을 구할 수 있다.

풀이

세금이 두 배가 될 확률

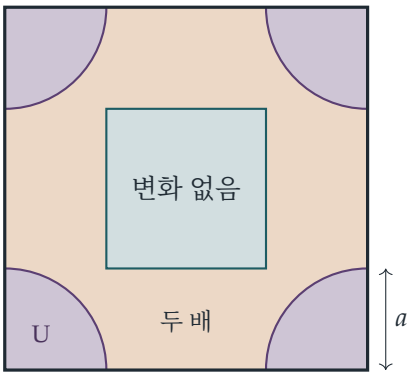
동전의 중심이 격자의 한 정사각형 안에 균등하게 무작위로 떨어진다고 모형화한다. 판이 충분히 크므로 가장자리 효과는 무시할 수 있고, 모든 정사각형은 똑같아 보인다. 이 정사각형이 $[0,2] \times [0,2]$가 되고 격자선이 그 변을 따라 놓이도록 좌표를 잡는다.

중심에서 가장 가까운 세로선까지의 거리를 U, 가장 가까운 가로선까지의 거리를 V라 하자. x좌표가 $[0,2]$에서 균등분포를 따르므로 $U = \min(x, 2-x)$는 $[0,1]$에서 균등분포를 따른다. 마찬가지로 V도 $[0,1]$에서 균등분포를 따르며, x와 y가 독립(independent)이므로 U, V도 독립이다. 따라서 (U,V)는 단위정사각형 $[0,1]^2$에서 균등분포를 따르고, 확률은 그 정사각형 안의 넓이일 뿐이다.

- 동전이 어떤 선도 가로지르지 않는 것은 정확히 $U > a$이고 $V > a$일 때이다. 이 확률은 $(1-a)^2$이다.

▶ 동전이 교차점을 덮는 것은 정확히 정사각형의 가장 가까운 꼭짓점이 중심으로부터 a 이내에 있을 때, 즉 $U^2 + V^2 < a^2$일 때이다. $a < 1$이므로 이 사분원은 $[0,1]^2$ 안에 완전히 들어가고, 따라서 확률은 $\frac{1}{4}\pi a^2$이다.

이 두 사건은 서로 배반(disjoint)이다. 동전이 교차점을 덮으면 그 점을 지나는 선들을 당연히 가로지르기 때문이다. (동전이 선에 딱 닿는 경우 같은 경계의 경우는 확률이 0이므로 $<$와 $\leq$ 중 어느 것을 쓰든 상관없다.)



그림은 한 정사각형 안에서 중심이 놓일 수 있는 위치를 보여 준다. 청록색(어떤 선도 가로지르지 않음)과 자주색(교차점을 덮음, 한 꼭짓점에 U로 표시)은 세금을 그대로 두고, 호박색은 세금을 두 배로 만든다.

따라서 세금이 두 배가 될 확률은

$$\begin{aligned} p(a) &= 1 - (1-a)^2 - \tfrac{1}{4}\pi a^2 \\ &= 2a - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) a^2. \end{aligned}$$

이다.

세금의 최대화

세금을 가장 많이 걷으려면 두 배가 될 가능성이 가능한 한 커야 하므로 $0 < a < 1$에서 $p(a)$를 최대화한다. 이것은 최고차항의 계수가 음수인 이차식이고,

$$p'(a) = 2 - 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) a = 0 \iff a = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^{-1}.$$

이 값은 $\frac{4}{4+\pi} \approx 0.560$으로 실제로 $(0,1)$ 안에 있으며, $p''(a) < 0$이므로 요구한 대로 최댓값을 준다. 이 값을 a^*라 쓰면 $(1 + \frac{\pi}{4})a^{*2} = a^*$이므로 최댓값은

$$p_{\max} = 2a^* - a^* = a^* = \frac{4}{4+\pi}.$$

이다.

n년 후 세금의 기댓값

생각해 보기 매년의 기대 증가 배율이 $2p$가 아니라 $1+p$인 이유는 무엇인가?

세금이 두 배가 되지 않는 해에는 세금이 그대로 유지되므로 0이 아니라 1이 곱해진다. k번째 해의 배율을 M_k라 하자. 확률 p로 $M_k = 2$이고 확률 $1-p$로 $M_k = 1$이다. 그러면

$$\mathrm{E}(M_k) = 2p + (1-p) = 1 + p = 1 + \frac{4}{4+\pi} = \frac{8+\pi}{4+\pi}.$$

이다. 매년의 던지기가 서로 독립이라고 가정하자. (1에서 시작할 때) n년 후의 세금은 야크 한 마리당 $T_n = M_1 M_2 \cdots M_n$ 슬리힝(Slihings)이고, 독립인 확률변수(random variable)들의 곱의 기댓값(expectation)은 각 기댓값의 곱이므로

$$\mathrm{E}(T_n) = \mathrm{E}(M_1)\,\mathrm{E}(M_2)\cdots\mathrm{E}(M_n) = \left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^n,$$

이고, 이것이 요구한 결과이다.

검산

- $a \to 0$이면 동전은 거의 선에 닿지 않고, $a = 1$이면 언제나 선을 가로지르므로 $p(1) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$이며, 이는 꼭짓점의 원판을 피할 확률이다. 두 경우 모두 공식과 일치하고, 최댓값은 그 사이에 있다.
- 무작위 중심 400 000개로 시뮬레이션한 결과 $a = 0.56$에서 $p \approx 0.5620$을 얻었고, 공식의 값은 0.5601이다. a에 대해 촘촘하게 탐색하면 최댓값은 $a \approx 0.5601 = 4/(4+\pi)$에서 나타난다.
- $p = 4/(4+\pi)$로 매년 두 배가 되는 과정을 시뮬레이션하니 3년 후 세금의 평균이 약 3.805였고, $\left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^3 \approx 3.797$과 비교된다.

흔한 실수

- "교차점을 덮는" 넓이를 "선을 가로지르지 않는" 넓이에서 빼거나 두 번 세는 실수. 두 사건은 서로 배반이며, 둘 다 1에서 빼야 한다.
- 각 꼭짓점에서 원판 전체 πa^2을 쓰고, 그중 4분의 1만 정사각형 안에 있다는 것(또는 같은 말로, 각 꼭짓점의 원판을 네 정사각형이 나누어 가진다는 것)을 잊는 실수.
- 세금의 기댓값을 $(2p)^n$으로 쓰는 실수. 두 배가 되지 않는 해에는 세금이 그대로라는 것을 잊은 것이다.

STEP 너머

이 문제는 뷔퐁(Buffon)의 바늘 문제와 사촌 격이다. 무작위로 놓인 물체를 기본 영역 안의 무작위 점으로 환원하면 확률은 넓이가 된다. 이 아이디어는 **기하학적 확률**(geometric probability)과 적분기하학(integral geometry)의 출발점으로, 바늘을 던져 π를 추정하는 것과 같은 놀라운 결과를 준다. 마지막 부분에서는 독립인 확률변수들의 기댓값이 곱해진다는 사실을 사용했는데, 이는 금융과 개체군 생물학에서 쓰이는 곱셈적 성장 모형의 바탕이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 1998, 문제 1

순수수학 • 디오판토스 방정식과 홀짝성

> **STEP II 1998, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q1

핵심 아이디어

세제곱을 전개하면 대부분의 항이 소거되어, 상수항이 작은 n에 대한 삼차식(cubic)만 남는다. 양변의 홀짝성(parity)을 비교하면 n은 짝수일 수밖에 없다. 그다음 삼차식을 n^2(어떤 수) $= 54$ 꼴로 쓰면 문제는 약수(divisor)에 관한 문제로 바뀐다. $(**)$에 대해서는 짝수 치환(substitution) $n = 2m$을 하면 곧바로 $(*)$로 되돌아간다.

풀이

방정식 $(*)$

$a = n$, $b = 3$으로 놓고 $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$을 이용하면

$$(n+3)^3 - (n-3)^3 = 18n^2 + 54,$$

를 얻으므로, $(*)$은 다음과 동치이다.

$$n^3 = 18n^2 + 54, \qquad \text{즉,} \qquad n^2(n-18) = 54. \tag{1}$$

n은 짝수이다. 우변 $18n^2 + 54 = 2(9n^2 + 27)$은 모든 정수 n에 대하여 짝수이다. 만약 n이 홀수라면 n^3도 홀수가 되어 $n^3 = 18n^2 + 54$에 모순이다. 따라서 n은 짝수이다.

n^2은 54를 나눈다. (1)의 두 번째 꼴에서 $n - 18$은 정수이므로, 54는 n^2에 어떤 정수를 곱한 값이다. 따라서 n^2은 54의 약수이다.

> ? **생각해 보기** 이 두 사실을 함께 쓰면 어떻게 모든 정수가 배제되는가?

n이 짝수이므로 $n = 2k$로 쓰자. 그러면 $n^2 = 4k^2$은 4의 배수이다(또한 $n = 0$이면 (1)에서 $0 = 54$가 되므로 $n \neq 0$이다). 그런데 $54 = 2 \times 27$은 4로 나누어떨어지지 않으므로, 0이 아

닌 4의 배수는 어느 것도 54를 나눌 수 없다. 이 모순으로부터 $(*)$을 만족하는 정수 n은 존재하지 않는다.

(다른 방법으로 보면, $54 = 2 \cdot 3^3$을 나누는 제곱수는 1과 9뿐이므로 $n \in \{\pm 1, \pm 3\}$인데, 이들은 모두 홀수이다.)

방정식 $(**)$

이번에는 $b = 6$으로 놓으면

$$(n+6)^3 - (n-6)^3 = 36n^2 + 432,$$

이므로, $(**)$은 다음과 동치이다.

$$n^3 = 36n^2 + 432.$$

우변은 모든 정수 n에 대하여 짝수이므로, 앞에서와 똑같이 n^3은 짝수이다. 홀수의 세제곱은 홀수이므로 n은 짝수이다.

> ? **생각해 보기** 왜 첫 번째 부분의 약수 논증을 그대로 가져다 쓸 수 없는가?

$n^2(n-36) = 432$로 쓸 수는 있지만, $432 = 2^4 \cdot 3^3$은 짝수인 제곱 약수$(4, 16, 36, 144)$를 많이 가지므로 나누어떨어짐만으로는 논증이 끝나지 않는다. 대신 짝수라는 사실을 이용한다. m을 정수로 하여 $n = 2m$으로 놓자. 그러면

$$8m^3 = 36 \cdot 4m^2 + 432 \quad \Longleftrightarrow \quad m^3 = 18m^2 + 54,$$

이고, 이것은 정수 m에 대한 방정식 (1)과 정확히 같다. 다시 말해 m은 $(*)$을 만족한다. 실제로 $n = 2m$일 때의 $(**)$은 $n = m$일 때의 $(*)$의 양변에 8을 곱한 것에 불과하다.

$$(2m-6)^3 + (2m)^3 - (2m+6)^3 = 8\left[(m-3)^3 + m^3 - (m+3)^3\right].$$

$(*)$을 만족하는 정수는 없음을 보였으므로 그러한 m은 존재하지 않는다. 따라서 $(**)$을 만족하는 정수 n은 존재하지 않는다.

검산

- 전개식에 $n = 1$을 대입해 보자: $(4)^3 - (-2)^3 = 64 + 8 = 72 = 18 + 54$. ✓
- 삼차식 $n^3 - 18n^2 - 54$는 실근을 정확히 하나 가지며, 그 값은 약 $n \approx 18.164$로 정수가 아니다. ($|n| < 10^5$ 범위에서 컴퓨터로 직접 탐색해도 두 방정식 모두 해가 나오지 않는다.)
- $(**)$의 실근은 $n \approx 2 \times 18.164 = 36.33$으로, 배율 관계 $n = 2m$과 일치한다.

흔한 실수

- $n = 0$인 경우를 따로 언급해야 한다는 것을 잊는 실수: 0은 짝수이지만 0은 54의 약수가 아니다. 여기서는 (1)이 이 경우를 곧바로 배제한다.
- 세제곱을 모두 전개하다가 계산 실수를 하는 것. 항등식(identity) $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$을 쓰면 일이 절반으로 준다.
- $(**)$에서 $n^2 \mid 432$를 보이려 하면 아무 결론도 얻지 못한다. "n은 짝수이다"의 요점은 치환 $n = 2m$에 있다.

STEP 너머

마지막 단계, 즉 $(**)$의 해로부터 같은 꼴이면서 더 작은 수를 가진 방정식의 해가 만들어지는 부분은 페르마(Fermat)의 **무한 강하법**(*method of descent*)의 간단한 형태이다. 이 방법을 반복 적용하면 $x^3 + y^3 = z^3$이 양의 정수해를 갖지 않음을 보일 수 있는데, 이는 오일러(Euler)가 처음 증명한 페르마의 마지막 정리(Fermat's Last Theorem)의 세제곱 경우이다. 여기서는 세 항이 등차수열(arithmetic progression)을 이루므로 훨씬 쉽다. 사실 $(n-3k)^3 + n^3 = (n+3k)^3$은 $t = n/k$가 $t^3 - 18t^2 - 54$의 근이라는 뜻이고, 유리근 정리(rational root theorem)에 의해 이 삼차식은 유리근을 갖지 않으므로, $k \neq 0$인 어떤 경우에도 정수해는 없다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 나누어떨어짐, 홀짝성 논증, 디오판토스 방정식(Diophantine equations)을 다루는 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP II 1998, 문제 2

순수수학 • 이항급수를 이용한 근사

STEP II 1998, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q2

핵심 아이디어

이항급수(binomial series)는 변수가 작을 때 빠르게 수렴(converge)하므로, $\sqrt{2}$(또는 $\sqrt[3]{2}$)를 간단한 유리수와 $(1+x)^a$의 곱으로 나타내되 x가 아주 작도록 하고 싶다. 제곱근(square root)의 경우, $49/50$은 1에 아주 가까우면서 2를 인수로 가진다. 세제곱근(cube root)의 경우에는 다른 세제곱수에 $2\times$를 한 것과 거의 같은 세제곱수를 찾는데, $128 = 2\times 4^3$이 $125 = 5^3$ 바로 옆에 있다.

풀이

2의 제곱근

먼저 주어진 식을 $\sqrt{2}$와 연결한다. $1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$이므로

$$\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2} = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2}.$$

$(1+x)^{1/2}$의 이항급수는 다음과 같이 시작하며,

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots,$$

$|x| < 1$에서 성립한다. $y = \frac{1}{100}$으로 두고 $x = -\frac{2}{100} = -2y$를 대입한다. 그러면 2의 거듭제곱이 깔끔하게 약분된다.

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{2}{100}\right)^{1/2} &\approx 1 - \tfrac{1}{2}(2y) - \tfrac{1}{8}(2y)^2 - \tfrac{1}{16}(2y)^3 \\ &= 1 - y - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y^3 \\ &= 1 - 0.01 - 0.00005 - 0.0000005 \\ &= 0.9899495.\end{aligned}$$

$1/50$을 $2/100$으로 쓰는 것이 도움이 되는 이유가 바로 이것이다. 모든 항이 10의 거듭제곱에 1 또는 $\frac{1}{2}$을 곱한 꼴이 되므로, 계산이 정확한 소수로 이루어진다.

따라서

$$\sqrt{2} \approx \frac{10 \times 0.9899495}{7} = \frac{9.899495}{7} = 1.41421357\ldots,$$

이고, 소수점 아래 여섯째 자리까지 $\sqrt{2} \approx 1.414214$이다. 이것이 구하려던 결과이다.

2의 세제곱근

? 생각해 보기 N과 a는 무엇일까? 무엇이 $(1 + N/125)^a$를 $\sqrt[3]{2}$와 관련짓는가?

$125 = 5^3$이므로 $(125 + N)/125$의 세제곱근은 $\sqrt[3]{125 + N}/5$이다. 그러므로 N이 작으면서 $125 + N$이 완전세제곱수(perfect cube)의 2배가 되기를 바란다. 2×1^3, 2×2^3, 2×3^3, $2 \times 4^3 = 2, 16, 54, 128$을 보면 128이 125와 겨우 3만큼 차이 난다. 그래서 $N = 3$, $a = \frac{1}{3}$으로 잡는다.

$$\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{128}}{5} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{5}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3}.$$

$(1 + x)^{1/3}$의 이항급수는 다음과 같이 시작한다.

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3 + \cdots = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3 - \cdots.$$

앞에서와 마찬가지로 치환(substitution)을 하면 계산이 깔끔해진다. $y = \frac{1}{125} = 0.008$로 두고 $x = 3y$를 대입하면 $\frac{1}{3}x = y$, $\frac{1}{9}x^2 = y^2$, $\frac{5}{81}x^3 = \frac{5}{3}y^3$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3} &\approx 1 + y - y^2 + \tfrac{5}{3}y^3 \\ &= 1 + 0.008 - 0.000064 + \tfrac{5}{3}(0.000000512) \\ &= 1.007936 + 0.00000085333\ldots \\ &= 1.00793685333\ldots.\end{aligned}$$

여기에 $\frac{5}{4}$를 곱하면

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.25 \times 1.00793685333\ldots = 1.25992106\ldots,$$

이므로 소수점 아래 여섯째 자리까지 $\sqrt[3]{2} \approx 1.259921$이다.

검산

계산기로 구하면 $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$, $\sqrt[3]{2} = 1.25992105\ldots$이므로 두 근삿값 모두 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확하다. 우리가 얻은 값은 1.41421357과 1.25992107이다. 두 급수는 컴퓨터로 정확한 분수를 써서 확인하였다. 생략한 첫 항을 보면 오차의 크기를 가늠할 수 있다. $-\frac{5}{128}x^4$는 $\sqrt{2}$의 추정값에 약 -9×10^{-9}만큼 기여하고, $-\frac{10}{243}x^4$는 $\sqrt[3]{2}$의 추정값에 약 -1.7×10^{-8}만큼 기여한다. 둘 다 소수점 아래 여섯째 자리를 바꿀 수 있는 크기인 5×10^{-7}보다 훨씬 작다.

흔한 실수

- 배율을 되돌리는 것을 잊는 실수. 급수로 얻는 값은 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$과 $\frac{4\sqrt[3]{2}}{5}$이지, $\sqrt{2}$와 $\sqrt[3]{2}$ 자체가 아니다.
- 급수에서 부호를 틀리는 실수. 첫 번째 부분에서는 x가 음수이므로 1 다음의 네 항이 모두 음수이다. 두 번째 부분에서는 부호가 번갈아 바뀐다.
- 너무 일찍 반올림하는 실수. 마지막 나눗셈이나 곱셈을 하기 전까지는 적어도 소수점 아래 여덟째 자리까지 유지한다.

STEP 너머

이 문제의 바탕에는 나머지항(remainder term)이 있는 테일러(Taylor) 정리(Taylor's theorem)가 있다. 이 정리는 "다음 항이 아주 작다"는 말을 오차에 대한 엄밀한 한계로 바꾸어 준다. 또한 공비가 약 0.02인 급수가 항 하나마다 대략 소수 한 자리 반에서 두 자리씩 정확도를 얻는 이유를 설명해 준다. 같은 요령, 즉 p^n/q^n이 목표값의 간단한 배수에 가까운 유리수 p/q를 찾는 방법은 정수론(number theory)의 연분수(continued fractions) 및 유리수 근사(rational approximation)와 이어진다. 이에 관해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 읽기 좋은 책이며, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 테일러 정리의 나머지항을 꼼꼼히 다룬다.

풀이

STEP II 1998, 문제 3

순수수학 • 망원급수

> **STEP II 1998, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q3

핵심 아이디어

분모에 연속한 인수들의 곱이 있는 일반항은 부분분수(partial fractions)로 분해하라고 손짓하는 셈이다. 그렇게 나눈 조각들은 합 전체에 걸쳐 서로 상쇄되고(망원 소거, telescoping), 양 끝의 몇 항만 남는다. 둘째 부분에서는 비 a_n/a_{n-1}이 주어지므로 a_n/a_1은 비들의 곱이 되고, 이 곱 역시 연쇄적으로 상쇄된다. 운이 좋다면 이것이 a_n을 첫째 부분의 급수로 되돌려 줄 텐데, 실제로 그렇다.

풀이

합 S_N

다음과 같이 놓는다.

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

가림법(cover-up rule)을 쓰면, $n=0$에서 $A = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}$이고, $n=-1$에서 $B = \frac{-3}{(-1)(1)} = 3$이며, $n=-2$에서 $C = \frac{-5}{(-2)(-1)} = -\frac{5}{2}$이다. 따라서

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2n} + \frac{3}{n+1} - \frac{5}{2(n+2)}.$$

$A+B+C=0$임에 주목하자. 바로 이 사실 때문에 합이 연쇄적으로 상쇄된다.

$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$이라 하자. 그러면

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = H_N - 1 + \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}.$$

그러므로

$$\begin{aligned} S_N &= -\tfrac{1}{2}H_N + 3\left(H_N - 1 + \frac{1}{N+1}\right) - \tfrac{5}{2}\left(H_N - \tfrac{3}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \left(-\tfrac{1}{2} + 3 - \tfrac{5}{2}\right)H_N + \left(-3 + \tfrac{15}{4}\right) + \left(3 - \tfrac{5}{2}\right)\frac{1}{N+1} - \frac{5}{2(N+2)} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{5}{2(N+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{N+1} - \frac{5}{N+2}\right), \end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. $A + B + C = 0$이므로 H_N의 계수가 사라진다.

$N \to \infty$일 때 $\frac{1}{N+1}$과 $\frac{5}{N+2}$는 모두 0으로 수렴(converge)하므로

$$S_N \to \frac{3}{4}.$$

수열 a_n

$n \geq 2$에 대하여 주어진 비들을 모두 곱한다.

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3}.$$

생각해 보기 이 두 곱은 어떻게 간단히 정리되는가?

직접 써 보자. 둘째 곱은 각 분자가 다음 분모와 약분되므로 곧바로 연쇄적으로 상쇄된다.

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n-3} = 2n - 1.$$

첫째 곱에서 분자는 $1, 2, \ldots, n-1$을, 분모는 $4, 5, \ldots, n+2$를 차례로 지난다. 4부터 $n-1$까지는 모두 약분되므로

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} = \frac{(n-1)!}{(n+2)!/3!} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

이 계승 꼴은 $n < 5$여서 약분할 것이 없을 때에도 모든 $n \geq 2$에 대해 성립한다. 따라서

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

$n = 1$일 때 우변은 $\frac{6}{6} = 1$이므로, 이 공식은 모든 $n \geq 1$에 대해 성립한다. 확인해 보면 $n = 2$일 때 $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$이고, 이는 주어진 비 $\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 1}$과 일치한다.

$a_1 = \frac{2}{9}$이면

$$a_n = \frac{2}{9} \cdot \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}.$$

즉 a_n은 첫째 급수의 제n항의 $\frac{4}{3}$배이다. 그 부분합(partial sum)은 $\frac{4}{3}S_N \to \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

검산

- $N = 1$: 공식은 $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{6}$을 주는데, 이는 첫째 항 $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$이다. $N = 2$이면 $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{4}\right) = \frac{7}{24} = \frac{1}{6}+\frac{1}{8}$이다. 둘 다 옳다.
- 수치로 계산하면 처음 1999개 항의 합은 $0.74900\ldots$이며, 공식이 예측하는 대로($S_N \approx \frac{3}{4}-\frac{2}{N}$) 아래쪽에서 $\frac{3}{4}$에 다가간다.
- $a_1 = \frac{2}{9}$로 두고 점화식(recurrence)으로 a_n을 만들어 보면, 처음 299개 항의 합은 $0.9911\ldots$이다. 나머지 꼬리는 약 $\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{300} \approx 0.009$이므로 전체 합이 1이라는 결과와 부합한다.

흔한 실수

- 연쇄 상쇄되는 합의 양 끝을 잘못 처리하는 것. 위에서처럼 H_N을 써서 나타내면 항을 빠짐없이 정확하게 셈할 수 있다.
- 계승의 곱을 한 자리씩 어긋나게 계산하는 것. 약분하기 전에 처음 몇 개와 마지막 몇 개의 인수를 직접 써 보라.
- a_n/a_1에 대한 공식이 곱이 빈 곱이 되는 $n = 1$에서도 성립하는지 확인하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

망원 소거는 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)의 이산판이다. $\int f' = f(b) - f(a)$인 것과 똑같이 $\sum(f(n+1) - f(n)) = f(N+1) - f(1)$이다. 둘째 부분의 수열은 **초기하**(*hypergeometric*) 수열로, 연속한 두 항의 비가 n의 유리함수(rational function)이다. Gosper 알고리즘은 이러한 합이 닫힌 꼴을 가지는 때가 정확히 언제인지 판정하며, 컴퓨터 대수 시스템은 바로 이 방법으로 급수의 합을 구한다. 부분합의 극한에 대한 해석학적 논의는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

풀이

STEP II 1998, 문제 4

순수수학 • 부분적분

STEP II 1998, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q4

핵심 아이디어

골치 아픈 인수 $\operatorname{cosec}(x/2)$는 직접 적분할 수 없지만, 연속한 두 피적분함수(integrand)의 차는 훨씬 다루기 쉽다. 사인의 차 공식을 쓰면 인수 $\sin(x/2)$가 생기고, 이것이 코시컨트를 정확히 상쇄한다. 남는 것은 다항식과 코사인의 곱이고, 이는 전형적인 부분적분(integration by parts)으로 처리된다. 그다음 차들을 망원 합(telescoping sum)으로 더하면 손으로 계산할 수 있는 시작값까지 줄어든다.

풀이

차 $I_n - I_{n-1}$

$nx + x/2 = (n + \frac{1}{2})x$이므로 두 피적분함수의 차는

$$\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\left[\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x\right]\operatorname{cosec}\tfrac{x}{2}$$

이다. 합차 공식(factor formula) $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$에서 $\frac{A+B}{2} = nx$, $\frac{A-B}{2} = \frac{x}{2}$로 두면

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x = 2\cos nx\,\sin\tfrac{x}{2}$$

이다. $\sin\frac{x}{2}$가 코시컨트를 상쇄하므로

$$I_n - I_{n-1} = 2\int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

? **생각해 보기** $\operatorname{cosec}(x/2)$가 무한대가 되는 $x = 0$에서도 이 상쇄가 정당한가?

그렇다. $\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{x}{2} \to 2n+1$이므로 원래의 각 피적분함수는 $x \to 0$일 때 유한한 극한(limit)을 가지며, 따라서 이 적분들은 전혀 문제없는 보통의 적분이다. $0 < x \le \pi$에서는 상쇄가 정확한 대수 계산이고, 한 점 $x = 0$에서 피적분함수의 값을 바꾸어도 적분값은 변하지 않는다.

이제 $u = \frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos nx$로 두고 부분적분하면 $v = \frac{1}{n}\sin nx$이다($n \ge 1$이므로 가능하다).

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \left[\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{1-\cos n\pi}{n^2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2},\end{aligned}$$

여기서 $\sin 0 = \sin n\pi = 0$이므로 경계항은 사라진다. 그러므로

$$I_n - I_{n-1} = \frac{2\big(1-(-1)^n\big)}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2}, & n\text{이 홀수}, \\ 0, & n\text{이 짝수}. \end{cases}$$

I_n의 계산

망원 합을 쓰려면 시작값이 필요하다. 이 적분은 I_0도 똑같이 정의한다. $n = 0$이면 피적분함수는 $(\frac{\pi}{2} - x)\sin\frac{x}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - x$이므로

$$I_0 = \int_0^\pi \left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{\pi}{2}x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^\pi = 0$$

이고, 위의 차 공식은 $n = 1$일 때도 성립한다(계산에서 $n \ge 1$만 사용했다). $1, 2, \ldots, n$에 대한 차를 모두 더하면

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2\big(1-(-1)^k\big)}{k^2}.$$

홀수인 k만 기여하고 각각 $4/k^2$을 주므로

$$\boxed{I_n = 4\sum_{\substack{k=1 \\ k\text{ 홀수}}}^{n}\frac{1}{k^2} = 4\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right),}$$

이고, 마지막 항은 n이 홀수이면 $1/n^2$, n이 짝수이면 $1/(n-1)^2$이다. 같은 말로, $m = \lceil n/2 \rceil$일 때 $I_n = 4\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{(2r-1)^2}$이다.

$n = 0$을 쓰는 것이 마음에 걸린다면(문제에서는 n이 양수라고 했다) 대신 I_1에서 시작하면 된다. $\sin\frac{3x}{2} = \sin\frac{x}{2}(1 + 2\cos x)$이므로, 위의 부분적분을 $n = 1$로 적용하면 $I_1 = \int_0^\pi(\frac{\pi}{2} - x)(1 + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = 0 + 2\cdot 2 = 4$를 얻는다. 이는 공식과 일치한다.

검산

- $I_1 = I_2 = 4$이고 $I_3 = I_4 = 4 + \frac{4}{9} = \frac{40}{9} \approx 4.4444$이다. 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면($x = 0$에서는 피적분함수의 극한값 $\frac{\pi}{2}(2n+1)$을 사용) I_3에 대해 $4.444444\ldots$를 얻고, 모든 $n \leq 12$에 대해 합과 10^{-8} 이내로 일치한다.
- n에 대한 피적분함수는 $\frac{\pi}{2} - x$와 $1 + 2\cos x + \cdots + 2\cos nx$의 곱이며, $\frac{\pi}{2} - x$는 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 기함수(odd function)이다. 짝수 k에 대해(그리고 상수 1에 대해서도) $\cos kx$는 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 우함수(even function)이므로, 그 곱은 기함수가 되어 $[0, \pi]$에서 적분하면 0이 된다. 이것이 $I_0 = 0$이고 짝수 k가 아무것도 기여하지 않는 이유이다.

흔한 실수

- 사인의 차 공식에서 부호나 인수 2를 틀리는 실수. $x = \pi, n = 1$과 같은 값을 넣어 확인해 보라.
- $(-1)^n$ 대신 $\cos n\pi = 1$로 쓰는 실수. 이렇게 하면 모든 차가 0이 되어 버린다.
- 시작값을 잊거나, 짝수 항이 사라진다는 것을 알아채지 못하고 답을 모든 k에 대한 합으로 쓰는 실수.

STEP 너머

함수 $\sin(n + \frac{1}{2})x / \sin\frac{x}{2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$는 **디리클레 핵**(Dirichlet kernel)으로, 푸리에 급수(Fourier series)가 수렴(converge)함을 증명하는 데 핵심이 되는 대상이다. $n \to \infty$일 때 우리의 합은 $\sum_{\text{홀수}k} 1/k^2 = \pi^2/8$을 이용하면 $4 \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}$로 수렴하는데, 이 식은 오일러(Euler)의 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$과 가까운 친척이다(수치적으로 $I_{200} \approx 4.925$이고 $\pi^2/2 \approx 4.935$이다). 푸리에 급수와 이러한 합은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)에, 수렴의 바탕이 되는 해석학은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)에 잘 설명되어 있다.

풀이

STEP II 1998, 문제 5

순수수학 • 복소수의 삼각부등식

> **STEP II 1998, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q5

핵심 아이디어

$|z_1 - z_2|$는 아르강 도표(Argand diagram)에서 두 점 사이의 거리이므로, $|z_1 + z_2|$에 대한 부등식은 삼각형의 한 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 길지 않다는 사실을 말할 뿐이다. 이것을 n개의 항으로 확장하고 나면, 마지막 부분은 각 항을 그 절댓값으로 위에서 누르고 등비급수(geometric series)를 알아보는 문제가 된다. $|z|$가 작으면 좌변이 너무 작아서 결코 1에 도달할 수 없다.

풀이

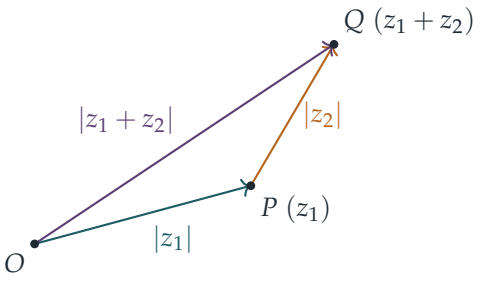
절댓값, 거리, 그리고 삼각부등식

x, y가 실수이고 $z = x + \mathrm{i}y$이면, z의 절댓값(modulus)은

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

즉 원점에서 z를 나타내는 점 (x, y)까지의 거리이다. $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$이면 $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$이고, 이는 z_1과 z_2를 나타내는 두 점 사이의 거리이다.

이제 O, P, Q를 각각 0, z_1, $z_1 + z_2$를 나타내는 점이라 하자.



위의 해석에 따라

$$OP = |z_1 - 0| = |z_1|, \qquad PQ = |(z_1+z_2) - z_1| = |z_2|, \qquad OQ = |z_1+z_2|.$$

선분 OQ는 O에서 Q까지 가는 가장 짧은 경로이므로, 경로 $O \to P \to Q$보다 길지 않다. 즉 $OQ \le OP + PQ$이고, 등호는 P가 선분 OQ 위에 있을 때 (점들이 일치하는 퇴화된 경우도 포함하여) 정확히 성립한다. 따라서

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

n개 항에 대한 부등식

모든 $n \ge 1$과 모든 복소수 $z_1, \dots, z_n$에 대하여

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

이 성립함을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. $n=1$이면 양변이 모두 $|z_1|$이다. 어떤 $n=k\ge 1$에 대하여 결과가 성립한다고 가정하자. $z_1, \dots, z_{k+1}$이 주어졌을 때, 두 복소수 $w = z_1+\cdots+z_k$와 z_{k+1}에 두 항에 대한 부등식을 적용하면

$$\begin{aligned} |z_1+\cdots+z_k+z_{k+1}| = |w+z_{k+1}| &\le |w| + |z_{k+1}| \\ &\le |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|, \end{aligned}$$

이고, 마지막 단계에서는 귀납 가정(inductive hypothesis)을 사용하였다. 따라서 결과는 $n=k+1$일 때도 성립하고, 귀납법에 의해 모든 $n\ge 1$에 대하여 성립한다.

마지막 부분

$|z| \le \frac{1}{4}$라 하고 $r = |z|$로 두면 $0 \le r \le \frac{1}{4}$이다. 각 항은 $|a_k z^k| = |a_k|\,|z|^k \le 3r^k$를 만족하므로, n개 항에 대한 부등식에 의해

$$\begin{aligned} |a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| &\le |a_1|\,r + |a_2|\,r^2 + \cdots + |a_n|\,r^n \\ &\le 3\big(r + r^2 + \cdots + r^n\big). \end{aligned}$$

생각해 보기 $3(r+r^2+\cdots+r^n)$을 어떻게 1과 비교할 수 있는 꼴로 바꿀 수 있을까? 그리고 부등식이 **엄격한** 부등식이 되도록 하려면 어떻게 해야 할까?

이것은 유한 등비급수이고, $r \le \frac{1}{4} < 1$이므로 합 공식을 쓸 수 있다.

$$3\left(r+r^2+\cdots+r^n\right) = \frac{3r(1-r^n)}{1-r}.$$

$r=0$이면 이 값은 0이다. $0 < r \le \frac{1}{4}$이면 $0 < 1-r^n < 1$이므로

$$\frac{3r(1-r^n)}{1-r} < \frac{3r}{1-r} \le \frac{3\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1,$$

이다. 여기서 마지막 단계가 성립하는 것은 $\dfrac{3r}{1-r}$이 $[0,1)$에서 r에 대하여 증가하기 때문이다(분자는 증가하고 양수인 분모는 감소한다). 어느 경우든

$$|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| < 1,$$

이므로 좌변은 1이 될 수 없다. 따라서 이 방정식은 $|z| \le \frac{1}{4}$인 해를 갖지 않는다.

검산

- 이 한계는 최선이다. 모든 $a_k = 3$이고 $z = \frac{1}{4}$이면 좌변은 $3\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right) = 1-4^{-n}$이고, 예를 들어 $n=1,2,3$일 때 0.75, 0.9375, 0.984375이다. 이 값은 1에 원하는 만큼 가까워지지만 결코 1에 도달하지는 않으며, 그래서 엄격한 부등식이 중요하다.
- $n \le 15$, $|a_k| \le 3$인 a_k, $|z| \le \frac{1}{4}$인 z를 200 000번 무작위로 골라 시험해 본 결과, $|a_1 z + \cdots + a_n z^n|$의 최댓값은 약 0.996이었고 언제나 1보다 작았다.

흔한 실수

- 무한합 $3r/(1-r) \le 1$만 사용하면 |좌변| ≤ 1밖에 얻지 못하고, 이것으로는 해가 존재할 가능성을 배제할 수 없다. 유한합(또는 $r>0$일 때 $r^n > 0$이라는 사실)이 엄격한 부등식을 보장해 준다.
- 귀납법 단계에서 두 항에 대한 부등식은 $z_1+\cdots+z_k$를 **하나의** 복소수로 보고 적용해야 한다. 그것이 이 단계의 핵심이다.

STEP 너머

삼각부등식(triangle inequality)은 **거리 함수**(metric)를 정의하는 성질이며, $|z_1 - z_2|$는 $\mathbb{C}$를 거리 공간(metric space)으로 만든다. 해석학의 거의 모든 수렴 논증이 이것에 기대고

있다. 마지막 부분은 다항식과 멱급수(power series)의 영점의 위치를 알아내는 결과들의 아주 간단한 형태이다. 여기서 $f(z) = a_1 z + \cdots + a_n z^n - 1$은 원판 $|z| \leq \frac{1}{4}$ 안에 영점이 없으며, 이는 루셰 정리(Rouché's theorem)와 같은 맥락에 있다. 복소수의 기하학에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 해석학에서의 거리 개념에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 읽어 보라.

풀이

STEP II 1998, 문제 6

순수수학 • 사이클로이드와 법선

> **STEP II 1998, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q6

핵심 아이디어

두 곡선은 모두 사이클로이드(cycloid), 즉 굴러가는 원의 둘레 위 한 점이 그리는 자취이다. 이 곡선들에 관한 모든 계산은 반각 공식(half-angle formulae) $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$, $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 쓰면 간단해진다. 기울기(gradient)는 $\frac{\theta}{2}$의 탄젠트나 코탄젠트 하나로 정리되고, 법선(normal)의 방정식은 깔끔한 직선의 식 하나로 줄어든다. 어떤 직선이 곡선 (2)의 접선(tangent)임을 보이려면, 그 직선 위에 있으면서 곡선의 기울기가 직선의 기울기와 같은 곡선 (2) 위의 점을 찾으면 된다.

(문제의 두 번째 곡선에는 y_2라고 써야 할 자리에 y_1이라고 적혀 있는데, 이는 오타이다.)

풀이

기울기

곡선 (1)에서 $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta} = 1+\cos\theta$이고 $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2},$$

이다. 이 식은 $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$, 즉 $\theta \neq \pi$인 모든 곳에서 성립한다.

곡선 (2)에서 $\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} = 1-\cos\theta$이고 $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\theta} = \sin\theta$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2},$$

이다. 이 식은 $\theta \neq 0, 2\pi$에서 성립한다.

$\theta = \pi/2$일 때 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$이므로, 곡선 (1)의 기울기는 -1이고 곡선 (2)의 기울기는 1이다.

$\theta = 3\pi/2$일 때 $\frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{4}$이고, 여기서 $\tan = -1, \cot = -1$이다. 따라서 곡선 (1)의 기울기는 1이고 곡선 (2)의 기울기는 -1이다.

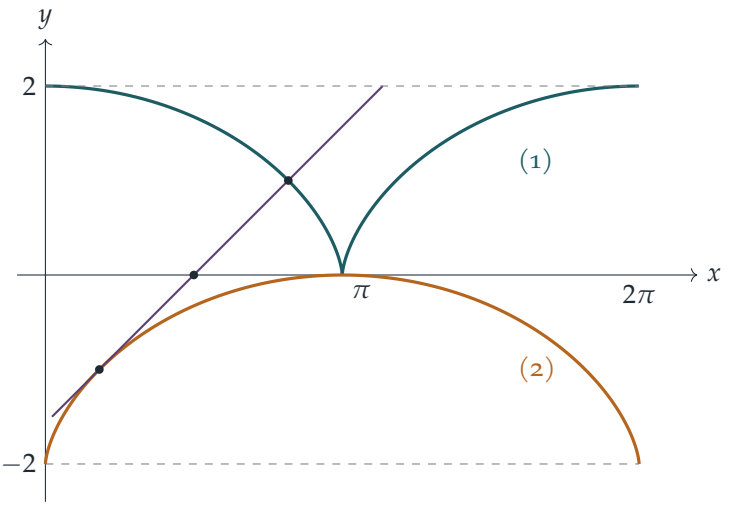
개형 그리기

x_1과 x_2는 모두 θ에 대해 감소하지 않는다(도함수 $1 \pm \cos\theta$가 결코 음수가 아니기 때문이다). 따라서 각 곡선은 $x = 0$에서 $x = 2\pi$까지 왼쪽에서 오른쪽으로 진행한다.

곡선 (1)은 기울기 0으로 $(0, 2)$에서 출발하여 $(\pi, 0)$까지 내려간 뒤, 대칭적으로 $(2\pi, 2)$까지 올라간다. $\theta = \pi$에서는 두 도함수가 모두 0이 되고 $|\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x_1| = |\tan\frac{\theta}{2}| \to \infty$이므로, $(\pi, 0)$에 수직 접선을 갖는 첨점(cusp)이 생긴다. $0 \le y_1 \le 2$이므로 곡선은 $y = 0$과 $y = 2$ 사이에 놓인다.

곡선 (2)는 $(0, -2)$에서 첨점을 가지며($\cot\frac{\theta}{2} \to \infty$이므로 접선이 수직이다), 기울기가 $\cot\frac{\pi}{2} = 0$인 $(\pi, 0)$까지 올라갔다가 첨점 $(2\pi, -2)$까지 내려간다. 이는 직선 $y = -2$ 위에 서 있는 보통의 사이클로이드 아치이다.

두 곡선은 $(\pi, 0)$에서 만난다. 곡선 (1)은 이 점에 수직으로 들어오고, 곡선 (2)는 이 점 위를 수평으로 지나간다. $\theta \mapsto 2\pi - \theta$는 두 곡선 모두에서 $x \mapsto 2\pi - x$로 보내고 y는 그대로 두므로, 그림은 $x = \pi$에 대해 대칭이다. 자주색 직선은 $\theta = \pi/2$에서 곡선 (1)의 법선으로, 아래에서 다시 다룬다.



곡선 (1)의 법선

곡선 (1)의 접선의 기울기는 $-\tan\frac{\theta}{2}$이므로, 법선의 기울기는 $\cot\frac{\theta}{2}$이다($\theta \neq 0, \pi, 2\pi$인 경우이며, 이 값들은 아래에서 따로 다룬다). 점 $(\theta+\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$에서의 법선은

$$y-(1+\cos\theta)=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(x-\theta-\sin\theta\right).$$

이다. 양변에 $\sin\frac{\theta}{2}$를 곱하고 반각 공식을 쓰면

$$y\sin\tfrac{\theta}{2}-2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}=(x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

이다. 양변의 마지막 항은 서로 같아서 소거되고, 법선의 방정식으로

$$\boxed{y\sin\tfrac{\theta}{2}=(x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}}$$

이 남는다.

이 꼴은 예외적인 값들도 포함한다. $\theta=0$일 때 이 식은 $x=0$, 즉 $(0,2)$를 지나는 수직선이 되는데, 그 점에서 접선이 수평이므로 옳다. $\theta=2\pi$일 때도 같은 방식으로 $x=2\pi$가 된다. $\theta=\pi$일 때 이 식은 $y=0$, 즉 첨점을 지나는 수평선이 되며, 이는 첨점에서의 수직 접선과 수직이다.

법선이 언제나 x축 위의 점 $(\theta,0)$을 지난다는 점에 주목하자. 이 점은 굴러가는 원이 그 원이 굴러가는 직선과 맞닿는 점이며, 이는 사이클로이드의 고전적인 성질이다.

법선은 곡선 (2)의 접선이다

생각해 보기 법선은 곡선 (2)의 어느 점에서 접해야 할까?

매개변수(parameter) ϕ에서 곡선 (2)의 접선의 기울기는 $\cot\frac{\phi}{2}$이고, 법선의 기울기는 $\cot\frac{\theta}{2}$이다. $(0,\pi)$에서 cot은 일대일(one-to-one)이므로, $(0,2\pi)$에 속하는 ϕ,θ에 대해 두 기울기는 $\phi=\theta$일 때만 같다. 따라서 가능한 후보는 같은 매개변수 θ를 갖는 곡선 (2) 위의 점뿐이다.

그 점은 $(x_2,y_2)=(\theta-\sin\theta,\ -(1+\cos\theta))$이다. 이를 법선의 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned}\text{좌변}&=y_2\sin\tfrac{\theta}{2}=-2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2},\\ \text{우변}&=(x_2-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}=-\sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}=-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

이다. 두 값이 같으므로, θ에서 곡선 (1)의 법선은 매개변수가 θ인 곡선 (2) 위의 점을 지난다. 그 점에서 곡선 (2)의 기울기는 $\cot\frac{\theta}{2}$로, 법선의 기울기와 같다. 곡선 위의 한 점을 지나면서 그 점에서의 곡선의 기울기를 갖는 직선은 그 점에서의 접선이므로, 곡선 (1)의 법선은 곡선 (2)의 접선이다. 이로써 증명이 끝난다.

특수한 값에서도 성립한다. $\theta = \pi$일 때 법선 $y = 0$은 곡선 (2)의 꼭대기 $(\pi, 0)$에서 접하며, 그 점에서 곡선 (2)의 기울기는 0이다. $\theta = 0$(또는 2π)일 때 법선 $x = 0$(또는 $x = 2\pi$)은 곡선 (2)의 첨점에서의 수직 접선이다.

검산

- $\theta = \pi/2$에서 법선은 $y = x - \frac{\pi}{2}$이다. 이 직선은 곡선 (1) 위의 점 $(\frac{\pi}{2} + 1, 1)$, 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, 그리고 곡선 (2) 위의 점 $(\frac{\pi}{2} - 1, -1)$을 지나며, 이 마지막 점에서 곡선 (2)의 기울기는 첫 부분에서 구한 대로 1이다. 이것이 그림의 자주색 직선이다.
- 유한 차분(finite differences)으로 기울기를 수치적으로 확인한 결과, 소수점 아래 여섯째 자리까지 $-1, 1$과 $1, -1$에 일치했다. 무작위로 고른 θ 값 1000개에서 법선은 두 점을 모두 지났고 곡선 (2)의 접선과 평행했으며, 오차는 10^{-12} 이내였다.

흔한 실수

- 기울기를 $-\sin\theta/(1 + \cos\theta)$ 꼴로 그대로 두고 법선을 구하느라 복잡한 계산을 힘겹게 이어 가는 것. 반각 공식을 쓰면 법선은 두 줄짜리 계산으로 끝난다.
- 법선이 곡선 (2)와 만난다는 것만 보이는 것. 만나는 것만으로는 충분하지 않으며, 만나는 점에서 기울기가 일치한다는 것도 보여야 한다.

STEP 너머

곡선의 곡률 중심(centre of curvature)들이 그리는 곡선을 그 곡선의 **축폐선**(evolute)이라 하며, 이는 곡선의 법선들의 포락선(envelope)이기도 하다. 이 문제는 사이클로이드의 축폐선이 아치의 절반만큼 평행이동한 합동인 사이클로이드임을 보여 준다. 법선을 따라 곡선 (1)에서 곡선 (2)와의 접점까지의 거리는 $4|\cos\frac{\theta}{2}|$인데, 이는 정확히 그 점에서 곡선 (2)의 꼭대기까지의 호의 길이(arc length)와 같다. 따라서 곡선 (1)은 곡선 (2)에서 풀려 나오는 실의 끝이 그리는 자취이다. 하위헌스(Huygens)는 이를 이용하여 주기(period)가 진폭(amplitude)에 의존하지 않는 진자를 만들었다. 곡률, 축폐선, 신개선(involute)에 대해서는 Pressley, *Elementary Differential Geometry*(기초 미분기하학)를 읽어 보자.

풀이

STEP II 1998, 문제 7

순수수학 • 도함수를 이용한 부등식

> **STEP II 1998, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q7

핵심 아이디어

각 부등식은 모두 같은 방법으로 증명한다. 함수가 $x = 0$에서 0이고 그 도함수(derivative)가 양수이므로, 함수는 0에서 출발하여 증가한다. 흥미로운 점은 함수들이 사슬처럼 연결되어 있다는 것이다. g의 도함수에는 f가 나타나고, h의 도함수는 g에 $2x$를 대입한 것이 된다. 따라서 각 소문항이 다음 소문항에 필요한 양의 도함수를 제공한다. 소문항 (iv)에서는 로그(logarithm)를 취하면 몫 F가 합으로 바뀌고, F'/F의 부호는 소문항 (iii)에서 다룬 식의 부호로 결정된다.

풀이

풀이 전체에서 사용하는 도구는 다음과 같다. ϕ가 미분가능(differentiable)하고 $\phi(0) = 0$이며 $0 < x < a$에서 $\phi'(x) > 0$이면, ϕ는 $[0, a)$에서 순증가(strictly increasing)하므로 $0 < x < a$에서 $\phi(x) > \phi(0) = 0$이다. (평균값 정리(mean value theorem)에 의해 어떤 $c \in (0, x)$에 대하여 $\phi(x) = \phi(x) - \phi(0) = x\,\phi'(c)$이고, 이 값은 양수이다.)

소문항 (i)

$\mathrm{f}(0) = \tan 0 - 0 = 0$이고,

$$\mathrm{f}'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\tan x$는 정의되고 양수이므로 $\mathrm{f}'(x) > 0$이다. 따라서 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\mathrm{f}(x) > 0$, 즉 이 구간에서 $\tan x > x$이다.

소문항 (ii)

이번에도 $g(0) = 2 - 2 - 0 = 0$이다. $x \sin x$에 곱의 미분법(product rule)을 적용하여 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\sin x - (\sin x + x\cos x) \\ &= \sin x - x\cos x \\ &= \cos x\,(\tan x - x) = \cos x\, f(x). \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\cos x > 0$이고, 소문항 (i)에 의해 $f(x) > 0$이다. 따라서 $g'(x) > 0$이고, $g(0) = 0$이므로 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $g(x) > 0$이다.

소문항 (iii)

다시 한번 $h(0) = 0$이다. 미분하면

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 + \cos 2x - 2x\sin 2x - 3\cos 2x \\ &= 2 - 2\cos 2x - 2x\sin 2x. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** 이 식을 전에 본 적이 있는가?

이것은 g에서 x를 $2x$로 바꾼 것이다.

$$h'(x) = 2 - 2\cos(2x) - (2x)\sin(2x) = g(2x).$$

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$이면 $0 < 2x < \frac{1}{2}\pi$이므로, 소문항 (ii)에 의해 $g(2x) > 0$이다. 이 때문에 이번에는 범위가 $\frac{1}{2}\pi$가 아니라 $\frac{1}{4}\pi$이다. 따라서 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 $h'(x) > 0$이고, $h(0) = 0$과 합하면 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 $h(x) > 0$이다.

"이를 이용하여(hence)" 부분을 위해 주어진 식을 배각 공식(double angle formula)으로 다시 쓴다. $\sin^2 x + 3\cos^2 x = 1 + 2\cos^2 x = 2 + \cos 2x$이고 $3\sin x\cos x = \frac{3}{2}\sin 2x$이므로

$$\begin{aligned} x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x &= x(2 + \cos 2x) - \tfrac{3}{2}\sin 2x \\ &= 2x + x\cos 2x - \tfrac{3}{2}\sin 2x = h(x). \end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 정확히 $h(x)$이고, 이는 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 양수이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iv)

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 x, $\sin x$, $\cos x$는 모두 양수이므로 $F(x) > 0$이고, 따라서 로그를 취할 수 있다.

$$\ln F(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cos x - \ln\sin x.$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{3\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

생각해 보기 이 식의 부호는 어떻게 알 수 있는가?

이 구간에서 양수인 공통분모 $3x\sin x\cos x$로 통분하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} &= \frac{3\sin x\cos x - x\sin^2 x - 3x\cos^2 x}{3x\sin x\cos x} \\ &= -\frac{x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x}{3x\sin x\cos x} = -\frac{\mathrm{h}(x)}{3x\sin x\cos x}.\end{aligned}$$

소문항 (iii)에 의해 분자 $\mathrm{h}(x)$는 양수이고 분모도 양수이므로 $\mathrm{F}'(x)/\mathrm{F}(x) < 0$이다. $\mathrm{F}(x) > 0$이므로 양변에 곱하면 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 $\mathrm{F}'(x) < 0$이고, 원하는 결과를 얻는다.

검산

- 특정 값 확인: $\mathrm{F}(0.1) \approx 0.999998$, $\mathrm{F}(0.5) \approx 0.99849$, $\mathrm{F}(\frac{1}{4}\pi) \approx 0.98954$이므로 F는 감소하지만 그 속도는 매우 느리다.
- 0 근처에서 이 부등식들은 매우 빠듯하다. 매클로린 급수(Maclaurin series)로 전개하면 $\mathrm{h}(x) = \frac{4}{15}x^5 + \cdots$이고, x, x^3 항은 상쇄된다. 그래서 $\mathrm{h} > 0$임을 단순히 "눈으로 보고" 알 수는 없고, 도함수의 사슬이 필요한 것이다. 수치적으로 $\mathrm{h}(0.01)/0.01^5 \approx 0.26666$이다.
- 네 부등식 모두와 항등식 $\mathrm{g}' = \mathrm{f}\cos x$, $\mathrm{h}'(x) = \mathrm{g}(2x)$, $\mathrm{F}'/\mathrm{F} = -\mathrm{h}/(3x\sin x\cos x)$를 무작위로 고른 20 000개의 점에서 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}'(x) \geq 0$만 보이거나, $\mathrm{f}(0) = 0$을 밝히는 것을 잊는 경우. 출발값이 0이라는 것과 도함수가 엄밀히 양수라는 것, 두 사실이 모두 필요하다.
- 소문항 (iii)에서 $2x$가 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는지 확인하지 않고 소문항 (ii)를 사용하는 경우. 바로 여기에서 $x < \frac{1}{4}\pi$라는 제한이 생긴다.
- $\mathrm{F} > 0$임을 밝히지 않고 $\mathrm{F}'/\mathrm{F} < 0$에서 $\mathrm{F}' < 0$이라고 결론짓는 경우.

STEP 너머

"출발값이 0이고 도함수가 양수이면 함수는 양수이다"라는 원리는 대학 해석학(analysis) 강의에서 처음 만나는 중요한 정리 가운데 하나인 평균값 정리의 결과이다. 여기서처럼 이 원리를 반복해서 적용하는 것은 $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$과 같은 부등식을 증명하는 표준적인 방법이며, 나머지항이 있는 테일러 정리(Taylor's theorem with remainder)와 밀접하게 관련되어 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리와 그 활용을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1998, 문제 8

순수수학 • 벡터 기하

> **STEP II 1998, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q8

핵심 아이디어

여기서 하는 일은 모두 각 직선을 "점 + 매개변수(parameter) × 방향"의 꼴로 쓴 다음 매개변수를 영리하게 고르는 것이다. 식들은 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 대하여 대칭(symmetric)이므로, 어떤 매개변수 값이 세 벡터에 대하여 대칭인 결과를 준다면 같은 점이 세 직선 위에 모두 놓인다. "관찰을 통해(by inspection)"라는 표현이 찾아보라고 권하는 것이 바로 이것이다.

풀이

중선들은 R에서 만난다

BC의 중점(mid-point)의 위치벡터(position vector)는 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$이므로, A에서 이 점까지 가는 직선은 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a}\right) = (1-s)\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

결과가 대칭이 되도록 세 계수가 같기를 원한다. $1-s = \frac{s}{2}$에서 $s = \frac{2}{3}$이고, 이때 점은

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

이다. B와 C에서 나오는 직선은 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$를 순환적으로(cyclically) 바꾸어 얻을 수 있고, 같은 선택 $s = \frac{2}{3}$은 각 직선 위에서 같은 대칭인 점을 준다. 따라서 세 직선은 모두 위치벡터가

$$\mathbf{r}_R = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

인 점 R, 즉 삼각형의 무게중심(centroid)을 지난다. (A, B, C가 실제로 삼각형을 이루므로 이 직선들 중 어느 두 개도 일치하지 않고, 따라서 R은 이들의 유일한 공통점이다.)

세 평행선은 Q에서 만난다

P의 위치벡터를 $\mathbf{p}$라 하자. 세 직선은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\text{중점을 지나는 변}BC\text{, 평행한 직선}PA: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{p}),\\
&\text{중점을 지나는 변}CA\text{, 평행한 직선}PB: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{b}-\mathbf{p}),\\
&\text{중점을 지나는 변}AB\text{, 평행한 직선}PC: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \nu(\mathbf{c}-\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

생각해 보기 λ가 어떤 값일 때 첫 번째 식이 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 대하여 대칭이 되는가?

첫 번째 직선에서 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$의 계수는 각각 $\frac{1}{2}$이고 $\mathbf{a}$의 계수는 λ이다. 이들을 맞추려면 $\lambda = \frac{1}{2}$이어야 한다. 그러면

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

이다. 나머지 두 직선에서 $\mu = \frac{1}{2}, \nu = \frac{1}{2}$로 두면 정확히 같은 벡터를 얻는다. 그러므로 세 직선은 모두

$$\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

인 점 Q를 지난다.

PQ는 평면 ABC와 R에서 만난다

먼저 $Q \neq P$이다. 만약 $\mathbf{q} = \mathbf{p}$이면 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 3\mathbf{p}$이므로 $\mathbf{p} = \mathbf{r}_R$이고, P는 평면 ABC 위에 있는 점 R이 되어 버린다. 따라서 PQ는 실제로 직선이며, 그 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p} + t\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{3}{2}\mathbf{p}\right).$$

$\mathbf{p}$ 항을 없애려면 $1 - \frac{3}{2}t = 0$, 즉 $t = \frac{2}{3}$이어야 하고, 그러면

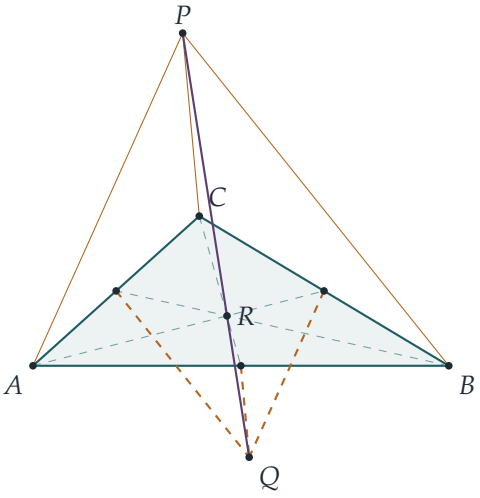
$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{p} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{r}_R.$$

이다. 따라서 R은 직선 PQ 위에 있다. 또한 R은 평면 ABC 위에도 있다(A에서 나오는 중선(median) 위에 있고, 이 중선은 그 평면 안에 있다).

생각해 보기 PQ가 평면과 다른 곳에서도 만날 수 있는가?

그럴 수 없다. 직선은 평면과 만나지 않거나, 정확히 한 점에서 만나거나, 평면 안에 완전히 놓인다. 직선 PQ는 평면 ABC 안에 놓이지 않는다. P가 그 직선 위에 있고 P는 평면 위에 있지 않기 때문이다. 따라서 이 직선은 평면과 많아야 한 점에서 만나며, 그 점이 R이다. 이로써 PQ가 평면 ABC와 R에서 만남이 증명된다.

덤으로, $t = \frac{2}{3}$은 R이 PQ를 $PR : RQ = 2 : 1$의 비로 나눈다는 것을 알려 준다. 이는 $\mathbf{q} - \mathbf{r}_R = -\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{r}_R)$와 같은 말이다.



검산

- 주장한 각 교점은 다시 대입하여 확인할 수 있다. 예를 들어 $\mathbf{q} - \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{p})$이고, 이는 눈에 보이게 PA에 평행하다.
- $A = (0,0,0)$, $B = (3,0,0)$, $C = (0,3,0)$, $P = (0,0,3)$으로 두면 $R = (1,1,0)$, $Q = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$를 얻는다. P에서 Q까지 3분의 2만큼 간 점은 $(1,1,0) = R$이고, 이는 평면 $z = 0$ 위에 있다.
- 또한 A, B, C, P를 무작위로 2000번 골라 정확한 유리수 연산으로 모든 결과를 확인하였다. 직선 PQ는 언제나 매개변수 $t = \frac{2}{3}$에서 평면 ABC와 R에서 만났다.

흔한 실수

- 방정식을 풀어 두 직선 위에 있는 점을 찾고, 그 점이 세 번째 직선 위에도 있는지 확인하는 것을 잊는 것.
- R이 PQ 위에 있음을 보이고도, 왜 그 점이 PQ가 평면과 만나는 **유일한** 점인지 설명하지 않는 것. P가 평면 위에 있지 않다는 조건은 바로 여기서 쓰인다.

STEP 너머

이 결과 뒤에는 깔끔한 기하학적 이유가 있다. 중심이 R이고 배율(scale factor)이 $-\frac{1}{2}$인 확대(enlargement), 즉 사상 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{r}_R - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_R)$는 A, B, C를 각각 BC, CA, AB의 중점으로 보내고, 모든 직선을 그와 평행한 직선으로 보낸다. 따라서 이 사상은 P에서 만나는 직선

PA, PB, PC를 새로운 세 직선으로 옮기며, 그러므로 새로운 세 직선은 P의 상에서 만나야 한다. 그 상이 바로 Q이고, 확대의 중심은 모든 점과 그 상과 한 직선 위에 있으므로 P, R, Q는 한 직선 위에 있다(collinear). 기하를 변환(아핀 사상(affine map)과 그 고정점(fixed point))을 통해 생각하는 것은 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)의 핵심 아이디어이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이 아이디어가 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 1998, 문제 9

역학 • 골조의 정역학

> **STEP II 1998, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q9

핵심 아이디어

골조(framework)는 가벼우므로 골조에 작용하는 외력은 두 개뿐이다. A에서의 지지력과 C에서의 무게이다. 평형(equilibrium)을 이루는 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 작용선 위에 있어야 한다. 이것으로 지지력과 육각형이 매달리는 모양이 모두 정해진다. 그다음은 절점법(method of joints)이다. 막대 두 개만 만나는 절점에서 시작해 힘을 분해하고, 미지의 힘이 많아야 두 개인 절점으로 옮겨 가며 육각형을 한 절점씩 돌아간다.

풀이

지지력

육각형의 변과 세 대각선 막대를 여섯 꼭짓점에서 매끄럽게 핀으로 연결된 가벼운 막대로 모형화하고, $1\,\mathrm{kg}$ 질량의 무게를 W라 하자. 그러면 $W = g \approx 9.8\,\mathrm{N}$이다. 막대가 가벼우므로 골조 전체에 작용하는 외력은 A의 지지대가 주는 힘 $\mathbf{R}$와 C에서 연직 아래로 작용하는 무게 W뿐이다.

> ? **생각해 보기** 골조를 원하는 아무 각도로나 매달 수 있을까?

그렇지 않다. 골조 전체에 대해 힘의 합은 0이어야 하고 모멘트(moment)의 합도 0이어야 한다. A에 대한 모멘트를 취하면 지지력의 모멘트는 0이므로, C에서의 무게도 A에 대한 모멘트가 0이어야 한다. 이는 C가 A의 바로 아래에 있을 때만 가능하다. 따라서 골조는 짧은 대각선 AC가 연직이 되도록 매달리고, 힘을 분해하면

$$\mathbf{R} = W \text{ 연직 위 방향}, \qquad |\mathbf{R}| = g \approx 9.8\,\mathrm{N},$$

이다. 이는 CA를 따라 작용하는 $1\,\mathrm{kg}$의 무게와 같다.

막대에 걸리는 힘

한 변의 길이를 1로 둔다(힘은 이 길이에 의존하지 않는다). AC가 연직이면 B는 AC의 중간 높이에서 그 한쪽에 놓이고, 육각형의 나머지 부분은 반대쪽에 놓인다. F는 A와 같은 높이, E는 B와 같은 높이, D는 C와 같은 높이에 있다. 따라서 AF, BE, CD는 수평이고, 변 AB, BC, DE, EF는 수평과 60°를 이루며, 짧은 대각선 BD, BF는 수평과 30°를 이룬다.

막대 XY의 장력(tension)을 T_{XY}라 하자. 장력은 막대의 양 끝에서 절점을 다른 쪽 끝으로 당긴다. 장력이 음수이면 그 막대가 압축력(thrust)을 받는다는 뜻이다.

생각해 보기 미지의 막대 힘이 아홉 개다. 어디서 시작할까?

막대 두 개만 만나는 절점에서 시작한다. 그러면 두 방정식(수평 방향과 연직 방향)을 곧바로 풀 수 있기 때문이다. 절점 C에는 CB와 CD만 있고, 하중도 이 절점에 걸린다.

절점 C. 막대 CB는 수평보다 60° 위를 향하고, CD는 B 쪽에서 멀어지는 수평 방향이다. 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} &\text{연직 방향:} \quad T_{BC}\sin 60^\circ = W \;\Rightarrow\; T_{BC} = \frac{2W}{\sqrt{3}}, \\ &\text{수평 방향:} \quad T_{CD} = T_{BC}\cos 60^\circ = \frac{W}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

절점 D. 이제 미지수는 DE와 DB뿐이다. D에서 보면 막대 DC는 B 쪽을 향해 수평이고, DE는 B 쪽에서 멀어지며 수평보다 60° 위를 향하고, DB는 B 쪽을 향해 수평보다 30° 위를 향한다. 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} &\text{연직 방향:} \quad T_{DE}\sin 60^\circ + T_{BD}\sin 30^\circ = 0 \;\Rightarrow\; T_{BD} = -\sqrt{3}\,T_{DE}, \\ &\text{수평 방향:} \quad T_{CD} - T_{DE}\cos 60^\circ + T_{BD}\cos 30^\circ = 0 \;\Rightarrow\; T_{CD} - \tfrac{1}{2}T_{DE} - \tfrac{3}{2}T_{DE} = 0, \end{aligned}$$

따라서 $T_{DE} = \frac{1}{2}T_{CD} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$이고 $T_{BD} = -\frac{W}{2}$이다.

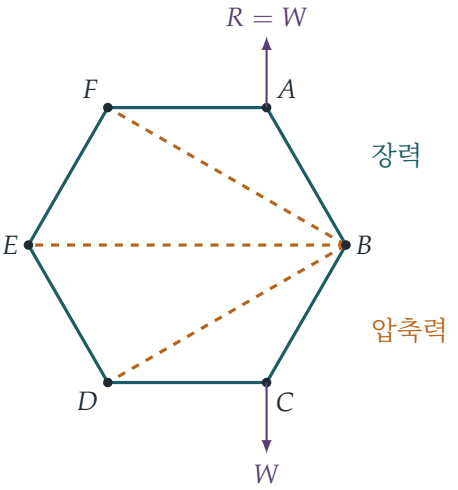
절점 E. 막대 ED는 수평보다 60° 아래를, EF는 수평보다 60° 위를 향하고, EB는 수평이며, 모두 B 쪽을 향한다. 연직 방향으로 분해하면 $T_{EF} = T_{DE} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$이다. 수평 방향으로 분해하면

$$\tfrac{1}{2}T_{DE} + \tfrac{1}{2}T_{EF} + T_{BE} = 0 \;\Rightarrow\; T_{BE} = -\frac{W}{2\sqrt{3}}.$$

절점 F. 이 절점은 직선 BE에 대해 절점 D의 거울상이다. 연직 방향으로 분해하면 $T_{BF} = -\sqrt{3}\,T_{EF} = -\frac{W}{2}$이고, 수평 방향으로 분해하면 $T_{FA} = 2T_{EF} = \frac{W}{\sqrt{3}}$이다.

절점 A. 수평 방향으로 $T_{AB}\cos 60^\circ = T_{FA}$이므로 $T_{AB} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$이다. 연직 방향으로 $R = T_{AB}\sin 60^\circ = W$이고, 이는 첫 번째 부분의 결과와 일치한다.

절점 B에서 방정식이 두 개 더 나오지만, 이들은 저절로 성립한다. 골조 전체가 이미 평형 상태이기 때문이다. 이 방정식들을 확인해 보는 것은 계산을 점검하는 좋은 방법이다.



$W = g$로 두고 정리하면 다음과 같다.

- 여섯 변 모두 장력을 받는다. AB와 BC에는 $\frac{2W}{\sqrt{3}}$, CD와 FA에는 $\frac{W}{\sqrt{3}}$, DE와 EF에는 $\frac{W}{2\sqrt{3}}$가 걸린다.
- 안쪽 막대 세 개 모두 압축력을 받는다. BD와 BF에는 $\frac{W}{2}$, BE에는 $\frac{W}{2\sqrt{3}}$가 걸린다.

따라서 BE에 걸리는 힘은 압축력이고, 그 크기는 다음과 같다.

$$\frac{g}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}g}{6} \approx 2.83\,\mathrm{N}.$$

검산

- 대칭성: 직선 BE에 대해 반사하면 $A \leftrightarrow C$, $F \leftrightarrow D$가 서로 바뀌고, A에서 위로 향하는 힘 W는 C에서 아래로 향하는 힘 W가 된다. 따라서 하중이 대칭이므로 답도 대칭이어야 한다. 즉 $T_{AB} = T_{BC}$, $T_{FA} = T_{CD}$, $T_{EF} = T_{DE}$, $T_{BF} = T_{BD}$이어야 하고, 실제로 그렇다.
- 절점 B: 수평 방향으로 두 변은 한쪽으로 $2 \cdot \frac{2W}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}$를 주고, BD, BF, BE는 반대쪽으로 $2 \cdot \frac{W}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$를 준다. 연직 방향으로는 AB와 BC가 상쇄되고, BD와 BF도 상쇄된다.
- $g = 9.8$로 두고 열두 개의 절점 방정식을 모두 수치적으로 풀었다. 방정식들은 모순 없이 위쪽으로 $R = 9.8\,\mathrm{N}$, 압축력 $|T_{BE}| \approx 2.829\,\mathrm{N}$을 주며, AC가 기울어져 있으면 해가 없다.

흔한 실수

- 육각형을 한 변이나 긴 대각선이 연직이 되도록 그리는 것. 매달린 위치는 정해져 있다. C가 A 아래에 있어야 한다.
- 절점마다 부호 규약을 다르게 쓰는 것. "장력은 절점을 막대의 다른 쪽 끝으로 당긴다"를 한 번 정해 두고, 음수로 나온 답을 보고 어떤 막대가 압축력을 받는지 판단한다.

STEP 너머

절점이 j개인 골조는 막대가 정확히 $2j - 3$개일 때 강성(rigid)을 가지며 정정(statically determinate) 구조이다. 여기서는 $2 \cdot 6 - 3 = 9$이고, 이 때문에 정역학만으로 힘을 구할 수 있다. 막대가 더 많으면 구조는 "부정정(redundant)"이 되어 막대의 탄성까지 고려해야 한다. 이것이 구조역학의 출발점이며, 그래프의 강성에 관한 수학의 출발점이기도 하다. 그 바탕이 되는 벡터 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP II 1998, 문제 10

역학 • 움직이는 쐐기 위의 입자

STEP II 1998, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q10

핵심 아이디어

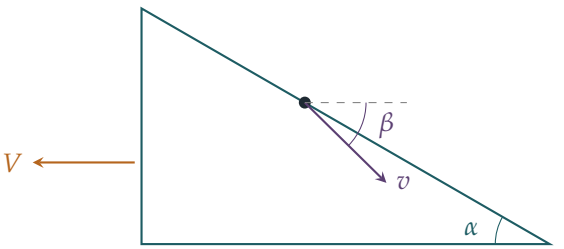
이 문제 전체를 움직이는 사실은 두 가지이다. 입자가 면 위에 계속 머무르므로, **쐐기에 대한** 입자의 속도(상대속도, relative velocity)는 면을 따르는 방향이어야 한다. 그리고 계 밖의 어떤 것도 수평으로 밀지 않고 중력 외에는 아무것도 일을 하지 않으므로, 수평 방향 운동량(momentum)과 에너지(energy)가 모두 보존된다. (i)–(iii)은 각각 이 사실 중 하나를 식으로 쓴 것이다. 이어서 (ii)는 β가 결코 변하지 않음을 보여 주며, 이 덕분에 마지막 부분은 등가속도 운동(motion with constant acceleration)이 된다.

풀이

모형. 입자는 질점(particle)이고, 쐐기는 회전하지 않고 미끄러지는 강체(rigid body)이다. 면과 바닥은 매끄러우며, 입자는 면과 계속 접촉한다. 그림처럼 면이 오른쪽 아래로 기울어져 있다고 하자. 그러면 입자는 오른쪽 아래로 움직이고 쐐기는 왼쪽으로 밀려난다.

수평 성분은 오른쪽을 양, 연직 성분은 위쪽을 양으로 잡으면

$$\text{입자의 속도} = (v\cos\beta,\ -v\sin\beta), \qquad \text{쐐기의 속도} = (-V,\ 0).$$



소문항 (i)

쐐기에 대한 입자의 상대속도는

$$(v\cos\beta,\ -v\sin\beta) - (-V,\ 0) = (v\cos\beta + V,\ -v\sin\beta).$$

입자가 면 위에 있는 동안 이 상대속도는 면을 따르는 방향, 즉 수평 아래로 각 α인 방향(오른쪽 아래를 향함)이다. 따라서

$$\frac{v\sin\beta}{v\cos\beta + V} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

양변을 교차하여 곱하면

$$\begin{aligned} & v\sin\beta\cos\alpha = v\cos\beta\sin\alpha + V\sin\alpha \\ \Longrightarrow\quad & V\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = v\sin(\beta-\alpha), \end{aligned}$$

이므로 원하는 식을 얻는다. 이것은 순수한 운동학(kinematics)이다. 역학 원리는 필요 없고, 입자가 면을 떠나지 않는다는 사실만 쓰였다.

소문항 (ii)

원리: 수평 방향 선운동량 보존(conservation of linear momentum). 입자와 쐐기를 하나의 계로 보자. 바닥이 매끄러우므로 이 계에 작용하는 외력은 두 무게와 바닥의 수직항력(normal reaction)뿐이고, 모두 연직 방향이다. (입자와 면 사이의 항력은 내력이다.) 따라서 전체 수평 운동량은 일정하며, 모든 것이 정지 상태에서 출발하므로 그 값은 처음에 0이다.

$$mv\cos\beta - MV = 0, \qquad \text{따라서} \qquad V = \frac{m}{M}v\cos\beta.$$

이것을 (i)에 대입하고 $\sin(\beta-\alpha)$를 전개하면

$$\frac{m}{M}v\cos\beta\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha).$$

$t > 0$이면 입자가 움직이고 있으므로 $v \neq 0$이다. 또 $\cos\alpha \neq 0$이고 $\cos\beta \neq 0$이다. 만약 β가 90°라면 운동량 식에서 $V = 0$이 되고, 그러면 (i)에서 $\sin(\beta-\alpha) = 0$이 되어 $\beta = \alpha < 90^\circ$이므로 모순이다. $v\cos\alpha\cos\beta$로 나누면

$$\frac{m}{M}\tan\alpha = \tan\beta - \tan\alpha \quad\Longrightarrow\quad \tan\beta = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha.$$

생각해 보기 왜 β는 단순히 α와 같지 않을까?

면 자체가 왼쪽으로 물러나고 있기 때문이다. 쐐기에 대해서는 입자가 각 α로 비탈을 내려가지만, 쐐기가 뒤로 물러나므로 지면에 대해서는 입자가 더 가파르게 떨어진다. (ii)의 우변이 상수라는 점에 주목하자. β는 모든 순간에 같으므로 입자는 직선을 따라 움직인다. $M \to \infty$이면 쐐기는 제자리에 머물고, 마땅히 그래야 하듯이 $\beta \to \alpha$이다.

소문항 (iii)

원리: 에너지 보존(conservation of energy). 모든 접촉면이 매끄러우므로 계 전체에 일을 하는 힘은 무게뿐이다. (입자와 면 사이의 수직항력은 각 물체에 따로따로 일을 하지만, 상대속도가 면을 따르는 방향이어서 항력과 수직이므로 두 일의 양은 상쇄된다. 바닥의 항력은 쐐기의 운동 방향과 수직이다.) 쐐기의 질량중심(centre of mass)은 연직으로 움직이지 않으므로 위치에너지의 감소량은 mgy이다. 정지 상태에서 출발하므로

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2.$$

(ii)에서 얻은 $V = \dfrac{m}{M}v\cos\beta$를 쓰면

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2v^2\cos^2\beta}{2M}.$$

$2/m$을 곱하면

$$2gy = v^2\left(1 + \frac{m\cos^2\beta}{M}\right) = \frac{v^2\left(M + m\cos^2\beta\right)}{M},$$

이므로 원하는 식을 얻는다.

y에 대한 미분방정식

입자가 내려가는 비율은 입자 속도의 아래쪽 성분이다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\sin\beta.$$

(iii)에 $v = \dot{y}/\sin\beta$를 대입한다($\beta > \alpha > 0$이므로 $\sin\beta \neq 0$임에 유의한다). 그러면 다음 미분방정식(differential equation)을 얻는다.

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = k\,y, \qquad \text{여기서} \qquad k = \frac{2gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

핵심은 (ii)에 의해 β가 상수이므로 k가 **상수**라는 점이다.

이를 풀기 위해 t에 대해 미분하면

$$2\dot{y}\,\ddot{y} = k\,\dot{y}.$$

$t > 0$이면 입자가 내려가고 있으므로 $\dot{y} > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다. 그러면 $\ddot{y} = \frac{1}{2}k$이다. 입자의 연직 운동은 다음과 같은 일정한 가속도를 가진다.

$$\ddot{y} = \frac{gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

$t = 0$에서 $y = 0, \dot{y} = 0$(정지 상태에서 출발)이라는 조건으로 두 번 적분하면

$$y = \frac{gMt^2\sin^2\beta}{2\left(M + m\cos^2\beta\right)},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

(다른 방법으로, 양의 제곱근 $\dot{y} = \sqrt{ky}$를 택하고 변수분리(separation of variables)를 할 수도 있다. $\int y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{k}\,t$에서 $2\sqrt{y} = \sqrt{k}\,t$가 되어 같은 답을 얻는다. 먼저 미분하는 방법을 쓰면 해 $y \equiv 0$을 걱정하지 않아도 된다. 이 해도 $y(0) = 0$과 함께 $\dot{y}^2 = ky$를 만족하지만, 여기서의 운동은 아니다.)

검산

- **고정된 쐐기.** $M \to \infty$라 하자. 그러면 $\beta \to \alpha$이고 $y \to \frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha$인데, 이는 옳다. 고정된 매끄러운 비탈에서 비탈 방향의 가속도는 $g\sin\alpha$이고, 그 연직 성분은 $g\sin^2\alpha$이기 때문이다.
- **수치 예.** $M = 2$, $m = 1$, $\alpha = 30°$이면 (ii)에서 $\tan\beta = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sin^2\beta = \frac{3}{7}$, $\cos^2\beta = \frac{4}{7}$이고, 공식은 $y = \frac{1}{6}gt^2$를 준다. $g = 9.8$, $t = 1$이면 $y \approx 1.6333$이다. 쐐기와 입자를 단계별로 직접 시뮬레이션한 결과(접촉 조건에서 수직항력을 구하여 뉴턴(Newton)의 법칙을 적용함)도 같은 값을 주었고, 무작위로 고른 2000개의 경우에서 반올림 오차 범위 안에서 (i)–(iii)을 만족하였다.

흔한 실수

- 입자가 수평과 각 α를 이루며 움직인다고 하는 것. 이것은 쐐기에 대해서만 참이다.
- 비탈 방향이나 연직 방향으로 운동량을 보존시키는 것. 바닥의 항력은 연직 방향의 외력이므로 수평 성분만 보존된다.
- 에너지 방정식에서 쐐기의 운동에너지 $\frac{1}{2}MV^2$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

움직이는 면에 구속된 입자는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 고전적인 시험 사례로, 대학 1학년이나 2학년 때 배우게 된다. 라그랑주 역학에서는 두 좌표(예를 들어 쐐기의 위치와, 면을 따라 내려간 입자의 거리)를 고르면 구속력(constraint force)이 방정식에서 완전히 사라지므로, 일정한 가속도들이 몇 줄 만에 나온다. 구속 조건이 있는 뉴턴 역학과 바로 이런 종류의 많은 문제에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP II 1998, 문제 11

역학 • 포물체 운동

STEP II 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.11 절 **야수는 어떻게 공을 잡는가**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/fielders.html

핵심 아이디어

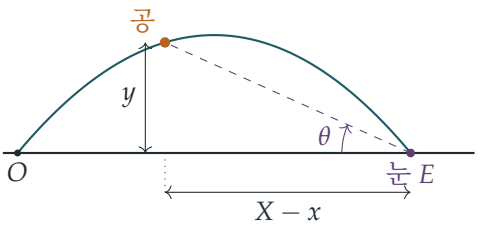
공을 치는 지점을 눈높이에 있는 원점으로 잡고, $\tan\theta$를 "수비수(fielder)의 눈에서 공까지의 수평 거리에 대한 공의 높이"로 나타낸다. 눈높이에서 출발하여 눈높이로 돌아오는 포물체(projectile)의 높이는 $\frac{1}{2}g\,t(T-t)$로 인수분해되며, 여기서 T는 비행 시간(time of flight)이다. 수비수가 결국 올바른 위치에 도달한다면 수평 거리 역시 $T-t$의 상수배가 된다. 따라서 인수 $T-t$가 약분되고, $\tan\theta$는 t에 비례하게 된다.

풀이

공은 중력만 받으며(공기 저항(air resistance)은 없다) 움직이는 질점(particle)으로, 수비수의 눈은 공을 친 지점과 같은 높이에 있는 한 점으로 모형화한다. 공을 친 지점 O에서 수비수 쪽으로 수평 방향을 x축, 연직 위쪽을 y축으로 잡는다. 공의 처음 속도의 수평 성분을 $U>0$, 연직 성분을 $W>0$이라 하자. 그러면 시각 t에서

$$x = Ut, \qquad y = Wt - \tfrac{1}{2}gt^2 = \tfrac{1}{2}g\,t\,(T-t), \qquad \text{여기서} T = \frac{2W}{g}$$

이고, T는 공이 다시 눈높이로 돌아오는 시각이다.



수비수의 눈의 수평 위치가 X라면(공이 날아가는 동안 $X > x$이다), 시선(line of sight)은 수평면 위로 각 θ만큼 올라가 있으며, 이때

$$\tan\theta = \frac{y}{X-x}.$$

서 있는 수비수

"완벽한 위치에 있다"는 것은 공이 수비수의 눈에 도달한다는 뜻이다. 즉 수비수의 눈은 공이 눈높이로 돌아오는 지점 $X = UT$에 있다. 그러면 $0 < t < T$에 대하여

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{UT-Ut} = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}t,$$

이다. 여기서 공이 날아가는 동안 0이 아닌 $T-t$를 약분하였다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2U},$$

이고, 이는 요구한 대로 상수이다. (공을 잡기 직전에는 $\tan\theta \to gT/(2U) = W/U$이다. 즉 수비수는 공이 처음 쳐진 각과 정확히 같은 각으로 날아 들어오는 것을 보게 되며, 이는 포물선의 대칭성에서 예상되는 바이다.)

달리는 수비수

이제 다음 공의 속도 성분을 U, W라 하고(따라서 다시 $T = 2W/g$일 때 $y = \frac{1}{2}gt(T-t)$이다), 공을 치는 순간 수비수가 O로부터 거리 D인 곳에서 출발하여 타자(batsman) 쪽으로 일정한 속력 v로 달린다고 하자. 수비수의 눈은 $X = D - vt$에 있으므로

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D-(U+v)t}. \qquad (*)$$

수비수가 공을 잡는 것은 정확히 시각 T에 공이 눈높이로 돌아오는 지점에 수비수의 눈이 있을 때, 즉

$$D - vT = UT \quad \Longleftrightarrow \quad D = (U+v)T.$$

일 때이다. 이 일이 일어날 필요충분조건이 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$가 상수인 것임을 보이겠다. 그러면 "$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$가 일정하도록 v를 고르라"는 것이 올바른 규칙이 된다.

수비수가 올바른 속력을 골랐다면 $D = (U+v)T$이고, $(*)$는

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}g\,t\,(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}\,t, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2(U+v)},$$

가 되어 상수이다. 이는 첫 번째 부분에서 U를 수비수에 대한 공의 상대 속력 $U+v$로 바꾼 것과 정확히 같다.

> **생각해 보기** 이것은 필요한 것의 절반일 뿐이지 않은가? 다른 v도 일정한 변화율을 줄 수 있지 않을까?

그렇지 않다. 비행하는 동안 내내 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = k$(상수)라고 하자. $t = 0$일 때 공은 눈높이에 있으므로 $\tan\theta = 0$이고, 따라서 $\tan\theta = kt$이다. 이것을 $(*)$에 대입하고 t로 나누면$(0 < t < T$에 대하여)

$$\tfrac{1}{2}g\,(T-t) = k\big(D-(U+v)t\big) \quad \text{모든} t \in (0,T).$$

에 대하여 성립한다. 어떤 구간에서 일치하는 t의 두 일차함수는 계수가 같으므로

$$\tfrac{1}{2}g = k(U+v) \qquad \text{그리고} \qquad \tfrac{1}{2}gT = kD.$$

첫 번째 식에서 $k \neq 0$이고, 두 번째 식을 첫 번째 식으로 나누면 $D = (U+v)T$를 얻는데, 이것이 바로 공을 잡는 조건이다.

따라서 수비수를 공에 데려다주는 속력 $v = D/T - U$가 바로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$를 일정하게 유지하는 속력이다. 실제로는 공이 공중에 있는 동안 $D/T - U$를 계산할 수 없지만, 지켜볼 수는 있다. 공이 시야에서 점점 더 빠르게 올라가는 것처럼 보이면 너무 뒤에 있는 것이므로 더 빨리 달려야 하고, 점점 더 느리게 올라가는 것처럼 보이면 속력을 늦춰야 한다. (수비수는 타자 **쪽으로** 달리므로 공은 수비수의 출발점보다 앞에 떨어지고, $D > UT$이므로 $v > 0$이다.)

검산

- 두 번째 부분에서 $v = 0$으로 두면 첫 번째 부분이 다시 나온다. 즉 $D = UT$이고 변화율은 $g/(2U)$이다.
- 단위: g/U의 단위는 $\mathrm{m\,s^{-2}}/\mathrm{m\,s^{-1}} = \mathrm{s^{-1}}$이며, 이는 단위가 없는 수의 변화율로서 알맞다.
- 수치 예: $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$일 때 공을 45°의 각으로 $20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$로 치면 $T \approx 2.886\ \mathrm{s}$이고 수평 도달 거리는 40.82 m이다. 그 지점에 서 있는 수비수는 $\tan\theta$가 $g/(2U) \approx 0.346\ \mathrm{s^{-1}}$의 비율로 증가하는 것을 본다. 대신 수비수가 49.47 m 떨어진 곳에서 출발하여 $3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$로 달린다면 변화율은 $0.286\ \mathrm{s^{-1}}$이다. 여러 시각에서 $(*)$를 수치적으로 미분해 보면 두 변화율이 모두 일정하고, 잘못된 v에서는 변화율이 변한다는 것을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- θ를 수비수의 눈이 아니라 타자로부터 재는 것. $\tan\theta$의 수평 거리는 x가 아니라 $X - x$이다.
- 일정한 변화율이 올바른 v를 강제한다는 것은 보이지 않고, 올바른 v가 일정한 변화율을 준다는 것만 증명하는 것. 이것을 실제로 쓸 수 있는 규칙으로 만드는 것은 바로 역(converse)이다.

STEP 너머

이것은 공 잡기의 심리학에서 나온 "광학 가속도 상쇄(optical acceleration cancellation)" 개념이다. 수비수는 공이 어디에 떨어질지 전혀 예측하지 않고, 공의 상이 일정한 비율로 올라가도록 달리는 것으로 보인다. 이는 되먹임 제어 법칙(feedback control law)의 한 예로, 궤적을 계산하는 대신 관찰되는 양을 일정하게 유지하는 방식이다. 포물체 운동, 상대 속도(relative velocity), 그리고 이러한 사고방식의 출발점에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 1998, 문제 12

확률과 통계 • 베이즈 정리

STEP II 1998, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.2 절 **기저율 오류**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/base-rate.html

핵심 아이디어

이 문제는 베이즈 정리(Bayes' theorem)를 두 번 쓰는 문제이다. 첫 번째 부분은 고전적인 "희귀병" 역설이다. 병이 드물면 꽤 정확한 검사라 해도 양성 판정의 대부분이 위양성(false positive)일 수 있다. 두 번째 부분의 요령은 STEP을 치르는 사람들이 전체 인구에서 무작위로 뽑은 표본이 아니라는 점을 알아차리는 것이다. 이들은 AL 양성 집단이므로, 첫 번째 부분의 답이 두 번째 검사의 **사전 확률**(prior)이 된다.

풀이

어떤 사람이 수학염(mathematitis)에 걸려 있는 사건을 D, 검사 AL이 양성인 사건을 A, 검사 STEP이 양성인 사건을 B라 하자. 주어진 조건은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{100}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D) = \tfrac{9}{10}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D') = \tfrac{1}{11}.$$

프랭키의 확률

전확률 공식(law of total probability)에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(A \mid D')\,\mathrm{P}(D') \\ &= \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{11}\cdot\frac{99}{100} = \frac{9}{1000} + \frac{9}{100} = \frac{99}{1000}.\end{aligned}$$

이다. 그러면 베이즈 정리에 의해

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{9/1000}{99/1000} = \frac{1}{11}.$$

이다. 따라서 AL 결과가 양성으로 나온 뒤에도 프랭키가 환자일 확률은 $\frac{1}{11}$에 불과하다. 1000명으로 이루어진 집단에서 환자 약 9명이 양성 판정을 받지만, 환자가 아닌 990명 중에서도 약 90명이 양성 판정을 받으므로, 위양성이 진양성을 압도한다.

p 구하기

이제 AL이 양성으로 나온 사람들로 관심을 좁히자. 이 집단 안에서는

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \tfrac{1}{11}, \qquad \mathrm{P}(D' \mid A) = \tfrac{10}{11}.$$

이다. STEP에 관해 주어진 정보는 $\mathrm{P}(B \mid D \cap A) = 0.9$, $\mathrm{P}(B \mid D' \cap A) = p$로 해석한다. 즉 STEP의 결과는 그 사람이 환자인지 아닌지에만 의존하고, AL의 결과에는 의존하지 않는다.

> ? **생각해 보기** 왜 $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{100}$에서 다시 시작하지 않는가?

STEP은 AL 양성인 사람들에게만 시행되고, 그 집단에서 환자의 비율은 더 이상 1%가 아니기 때문이다. 그 비율은 $\frac{1}{11}$이며, 이것이 바로 첫 번째 부분에서 구한 값이다. 첫 번째 검사의 사후 확률(posterior)이 두 번째 검사의 사전 확률이 된다.

AL 양성 집단 안에서

$$\mathrm{P}(D \cap B \mid A) = \frac{1}{11} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{110},$$
$$\mathrm{P}(D' \cap B \mid A) = \frac{10}{11} \cdot p = \frac{10p}{11}.$$

이다. 두 검사에서 모두 양성인 사람들 중 절반이 환자라고 했으므로 $\mathrm{P}(D \mid A \cap B) = \frac{1}{2}$이다. 이는 위의 두 확률이 같다는 뜻이다.

$$\frac{9}{110} = \frac{10p}{11} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{9}{100} = 0.09.$$

검산

- 오즈(odds) 형태: 병에 걸렸을 사전 오즈는 $1 : 99$이다. AL은 이를 $\frac{0.9}{1/11} = 9.9$배 하여 $9.9 : 99 = 1 : 10$을 주며, 이는 $\frac{1}{11}$과 일치한다. 오즈가 $1 : 1$이 되려면 STEP이 10배를 곱해야 하므로 $\frac{0.9}{p} = 10$이고 $p = 0.09$이다.
- 200만 명이 두 검사를 모두 거치는 상황을 ($p = 0.09$로) 시뮬레이션한 결과, AL 양성자 중 환자의 비율은 0.0909, 두 검사 모두 양성인 사람 중 환자의 비율은 0.5003이었다.

흔한 실수

- STEP의 사전 확률로 $\mathrm{P}(D) = 0.01$을 쓰는 것. 그러면 $p = 0.0009$가 되어 백 배나 작은 값이 나온다.
- $\mathrm{P}(A \mid D) = 0.9$와 $\mathrm{P}(D \mid A)$를 혼동하는 것. 첫 번째 부분의 요점 자체가 이 둘이 매우 다르다는 것이다.

STEP 너머

베이즈 정리를 오즈 형태, 즉 사후 오즈가 사전 오즈에 가능도비(likelihood ratio)를 곱한 것과 같다는 형태로 쓰면, 순차적인 검사는 거의 기계적인 계산이 된다. 독립적인 증거 하나하나가 각자의 인수만큼 오즈를 곱해 줄 뿐이다. 이것이 베이즈 추론(Bayesian inference)의 기초이며, 실제로 의료 선별 검사 프로그램이 설계되는 방식의 바탕이기도 하다. 우리가 둔 가정, 즉 질병 여부가 주어졌을 때 두 검사가 조건부 독립(conditionally independent)이라는 가정은 "나이브 베이즈(naive Bayes)" 분류기의 바탕이 되는 가정과 같다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 조건부 확률(conditional probability)과 베이즈 규칙을 이와 같은 예제를 많이 들어 훌륭하게 다룬다.

풀이

STEP II 1998, 문제 13

확률과 통계 • 지수분포

STEP II 1998, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q13

핵심 아이디어

첫 번째 결과는 지수분포(exponential distribution)의 **무기억성**(*memoryless property*)이다. 어떤 서비스가 이미 시간 t 동안 계속되었다면, 남은 시간은 막 새로 시작한 서비스와 같은 분포를 따른다. 이 성질을 얻고 나면 가게 이야기는 거의 계산할 필요가 없다. 서비스를 받는 도중인 손님은 확률의 관점에서 새로 서비스를 시작하는 손님과 다를 바가 없다. 따라서 중요한 모든 순간에, 아직 서비스를 받고 있는 사람들 사이의 경주는 서로 같은 분포를 따르는 독립(independent)인 지수 시간들 사이의 경주이다.

풀이

무기억성

$x \geq 0$에 대하여

$$\mathrm{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda u}\Big]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

$s, t \geq 0$을 택하자. 사건 $\{X > s+t\}$는 $\{X > t\}$에 포함되므로, 두 사건의 교집합(intersection)은 그냥 $\{X > s+t\}$이다. 조건부 확률(conditional probability)의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > s+t \mid X > t) &= \frac{\mathrm{P}(X > s+t \text{ 이고} X > t)}{\mathrm{P}(X > t)} = \frac{\mathrm{P}(X > s+t)}{\mathrm{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathrm{P}(X > s),\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($\mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} > 0$이므로 나눌 수 있었다.)

두 손님이 모두 아직 서비스를 받고 있을 확률

모형: 두 서비스 시간은 독립이고 각각 주어진 지수분포를 따른다. 내가 도착했을 때 서비스를 받고 있는 두 손님을 A와 B라 하자.

> **생각해 보기** 손님 A는 이미 알 수 없는 시간 동안 서비스를 받아 왔다. 그렇다면 앞으로 얼마나 더 걸리는지의 분포가 달라지지 않을까?

달라지지 않으며, 바로 이것이 첫 번째 부분이 말해 주는 내용이다. A의 서비스가 지금까지 u 동안 계속되었다고 하자. 그러면 적어도 t만큼 더 계속될 확률은

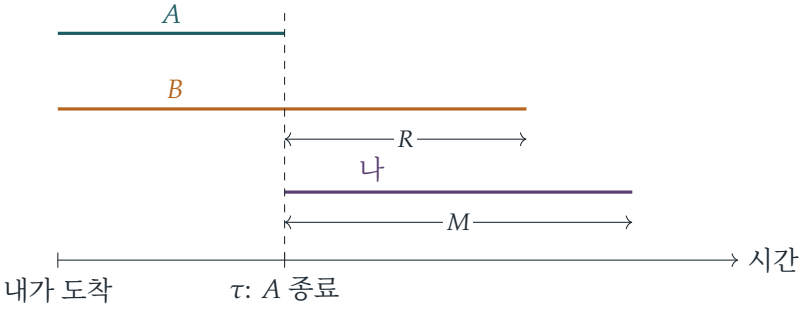
$$\mathrm{P}(X > u + t \mid X > u) = \mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

이고, 이는 u의 값과 관계없다. 따라서 내가 들어온 순간부터 잰 A의 **남은** 서비스 시간은 모수(parameter)가 λ인 같은 지수분포를 따르며, B도 마찬가지이다. 전체 서비스 시간이 독립이므로 두 남은 시간도 독립이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{두 손님 모두 아직 서비스 중, 시각}t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-2\lambda t}.$$

다른 손님이 끝날 때 나는 아직 서비스를 받고 있을까?

A가 내가 도착한 뒤 시간 τ에 먼저 끝나고, 내가 곧바로 A를 맡던 점원에게 간다고 하자.



시각 τ에서 B에게 아직 필요한 시간을 R, 나의 서비스 시간을 M이라 하자.

- 나의 서비스는 τ에서 새로 시작하므로 M은 모수가 λ인 지수분포를 따른다. 서로 다른 손님의 서비스 시간은 독립이므로, M은 그 이전의 모든 것과 독립이다.
- R도 모수가 λ인 지수분포를 따른다. 시각 τ에서 B는 이미 어떤 시간(내가 도착하기 전의 시간에 τ를 더한 것) 동안 서비스를 받았고, 다시 무기억성에 의하여 남은 시간은 원래의 분포를 따른다. 또 R은 M과 독립이다.

B가 끝날 때 내가 아직 서비스를 받고 있는 것은 정확히 $M > R$일 때이다. 그런데 M과 R은 독립이고 **같은** 연속분포를 따르므로, 대칭성(symmetry)에 의하여 $\mathrm{P}(M > R) = \mathrm{P}(R >$

M)이다. 또한 연속확률변수(continuous random variable)에 대해서는 $\mathrm{P}(M = R) = 0$이므로, 이 두 확률의 합은 1이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{다른 손님이 끝날 때 내가 아직 서비스를 받고 있음}) = \tfrac{1}{2}.$$

대칭성 논증보다 계산이 좋다면 R에 대한 조건을 걸면 된다.

$$\mathrm{P}(M > R) = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda r}\, \mathrm{P}(M > r)\, \mathrm{d}r = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-2\lambda r}\, \mathrm{d}r = \tfrac{1}{2}.$$

검산

- $t = 0$일 때 $\mathrm{e}^{-2\lambda t} = 1$이다. 내가 도착했을 때 두 손님은 확실히 서비스를 받고 있다. $t \to \infty$이면 확률은 0으로 수렴하는데, 당연히 그래야 한다.
- 답 $\frac{1}{2}$는 λ에 의존하지 않는다. λ를 바꾸는 것은 시간의 단위를 바꾸는 것일 뿐이므로 예상대로이다.
- $\lambda = 0.7$, $t = 0.9$로 한 시뮬레이션(simulation)에서 두 손님이 모두 아직 서비스를 받고 있는 비율은 0.2831로, $\mathrm{e}^{-1.26} \approx 0.2837$과 비교된다. 두 손님이 이미 무작위 시간 동안 서비스를 받아 온 상황의 시뮬레이션에서는, 시행 가운데 0.5000의 비율로 내가 아직 서비스를 받고 있었다.

흔한 실수

- 이미 서비스를 받고 있는 손님들은 "곧 끝날 때가 되었으므로" 남은 시간이 더 짧다고 생각하는 것. 지수분포에서는 이미 일어난 일이 아무런 차이를 만들지 않는다.
- $\mathrm{P}(X > s + t \text{ and } X > t)$를 $\mathrm{P}(X > s + t)\, \mathrm{P}(X > t)$로 쓰는 것. 이 두 사건은 독립이 아니며, 한 사건이 다른 사건을 포함한다.

STEP 너머

무기억성을 가지는 연속분포는 지수분포뿐이다. 이 사실은 **포아송 과정**(*Poisson process*)과 **대기행렬 이론**(*queueing theory*)의 바탕이 되며, 대기행렬 이론에서 점원이 c명이고 서비스 시간이 지수분포를 따르는 가게는 고전적인 M/M/c 대기행렬이다. 두 손님에 대한 계산은 n명으로 확장된다. 모수가 λ인 독립인 지수확률변수 n개의 최솟값은 모수가 $n\lambda$인 지수분포를 따르며(꼬리 확률(tail probability)을 곱하면 된다), 대칭성에 의하여 각 변수가 가장 작을 가능성은 모두 같다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 수준에서 지수확률변수와 포아송 과정을 다룬다.

풀이

STEP II 1998, 문제 14

확률과 통계 • 이항분포와 푸아송 분포의 기댓값

> **STEP II 1998, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q14

핵심 아이디어

데이터베이스의 분류와 달리 이 문제는 확률 문제이다. 새 제도에서 받을 **기댓값**(*expected value*) 급여가 고정 급여 A보다 크면 둠 박사는 새 제도를 택해야 한다. 낙제하는 학생 수는 이항분포(binomial distribution)를 따르므로 $\mathrm{E}\left[1/(1+X)\right]$를 구해야 한다. 다루기 불편한 인수 $\frac{1}{k+1}$은 항등식 $\frac{1}{k+1}\binom{N}{k} = \frac{1}{N+1}\binom{N+1}{k+1}$로 흡수되고, 이로써 합은 $(p+q)^{N+1}$의 거의 완전한 이항전개가 된다. 같은 기법을 $\frac{\lambda^k}{(k+1)!}$에 적용하면 푸아송(Poisson) 모형도 처리할 수 있다.

풀이

새 제도를 받아들여야 할 때

둠 박사의 학생 가운데 낙제하는 학생 수를 X라 하고, $q = 1 - p$로 둔다. 학생들은 각각 확률 p로 서로 독립적으로 낙제하므로 $X \sim \mathrm{B}(N, p)$이다.

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

둠 박사는 기대 급여로 두 제도를 판단하는 데 만족한다고 가정한다. 새 제도에서 급여는 확률변수(random variable) $S = B/(1+X)$이므로

$$\mathrm{E}(S) = B \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1} \binom{N}{k} p^k q^{N-k}.$$

생각해 보기 합 안에 있는 $\frac{1}{k+1}$을 어떻게 없앨 수 있을까?

계승(factorial)을 이용한다.

$$\frac{1}{k+1}\binom{N}{k} = \frac{N!}{(k+1)!\,(N-k)!} = \frac{1}{N+1}\cdot\frac{(N+1)!}{(k+1)!\,\big((N+1)-(k+1)\big)!}$$
$$= \frac{1}{N+1}\binom{N+1}{k+1}.$$

이를 대입하고, p의 거듭제곱이 새 이항계수와 맞도록 p를 곱하고 나누면

$$\mathrm{E}(S) = \frac{B}{(N+1)p}\sum_{k=0}^{N}\binom{N+1}{k+1}p^{k+1}q^{N-k}$$
$$= \frac{B}{(N+1)p}\sum_{j=1}^{N+1}\binom{N+1}{j}p^{j}q^{N+1-j}$$
$$= \frac{B}{(N+1)p}\Big[(p+q)^{N+1} - q^{N+1}\Big]$$

이다. 여기서 $j = k+1$로 두고 이항정리(binomial theorem)를 썼는데, 이 합은 $(p+q)^{N+1}$의 전개에서 $j=0$인 항 q^{N+1} 하나만 빠진 것이기 때문이다. $p+q=1$이므로

$$\mathrm{E}(S) = \frac{B\big(1-(1-p)^{N+1}\big)}{(N+1)p}.$$

$\mathrm{E}(S) > A$이면 받아들여야 한다. 양변에 양수인 $(N+1)p$를 곱하면(이 공식이 의미를 가지려면 $p>0$이어야 한다. $p=0$이면 단순히 B와 A를 비교하면 된다) 이 조건은

$$A(N+1)p < B\big(1-(1-p)^{N+1}\big),$$

이 되고, 이것이 구하는 조건이다.

푸아송 모형

N이 크고 p가 작으며 Np가 적당한 크기일 때, 이항분포 $\mathrm{B}(N,p)$는 평균이 $\lambda = Np$인 푸아송 분포로 잘 근사된다. 따라서 둠 박사의 학급이 크고, 각 학생이 낙제할 가능성은 낮으며, 낙제가 여전히 독립적으로 일어난다면 낙제자 수를 푸아송 분포로 모형화할 수 있다. (더 일반적으로, 푸아송 모형은 낙제가 하나씩, 독립적으로, 일정한 평균 비율로 일어날 때 알맞다.)

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $\lambda = Np$일 때도 같은 아이디어가 통하는데, 이번에는 $\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$을 쓴다.

$$\mathrm{E}\Big(\frac{B}{1+X}\Big) = B\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = \frac{B\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= \frac{B\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\big(\mathrm{e}^{\lambda}-1\big) = \frac{B\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\big)}{\lambda},$$

마지막 합은 지수함수의 급수(exponential series)에서 첫째 항 1이 빠진 것이기 때문이다. 따라서 이 모형에서 둠 박사의 기대 급여는

$$\frac{B\left(1-\mathrm{e}^{-Np}\right)}{Np} \text{ 파운드.}$$

검산

- $N=1$: 직접 계산하면 $\mathrm{E}(S)=B\left(q+\frac{1}{2}p\right)=B\left(1-\frac{1}{2}p\right)$이고, 공식은 $B\,\frac{1-q^2}{2p}=B\,\frac{1+q}{2}=B\left(1-\frac{1}{2}p\right)$를 준다.
- $p\to 0$: 이항분포로 구한 식은 B로 수렴하고(아무도 낙제하지 않는다), $\lambda\to 0$일 때 푸아송 분포로 구한 식도 마찬가지이다.
- 근사가 잘 맞아야 할 때 두 답은 일치한다. $N=1000$, $p=0.003$이면 $\mathrm{E}(S)/B$는 이항분포 공식으로 0.31655, 푸아송 공식으로 0.31674이다. $N=20$, $p=0.3$일 때 정확한 전수 계산과 모의실험은 모두 $\mathrm{E}(S)/B\approx 0.1586$을 준다.

흔한 실수

- $\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{1}{1+\mathrm{E}(X)}=\frac{1}{1+Np}$로 쓰는 것. 기댓값은 비선형 함수를 그대로 통과하지 않는다. 실제로 $\frac{1}{1+x}$은 볼록함수(convex function)이므로 옌센 부등식(Jensen's inequality)에 의해 참값이 더 크다.
- 첨자를 바꾼 합에서 $j=0$인 항이 빠진다는 것을 잊고 $\mathrm{E}(S)=B/((N+1)p)$를 얻는 것.

STEP 너머

여기서 쓴 기법은 $\frac{1}{1+x}=\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t$를 이용해 $\mathrm{E}\left(1/(1+X)\right)$를 계산하는 방법의 특수한 경우이며, 이를 통해 확률생성함수(probability generating function) $G(t)=\mathrm{E}(t^X)$와 연결된다. 답은 $\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t$이다. $G(t)=(q+pt)^N$과 $G(t)=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$에 대해 직접 확인해 보아라. 생성함수와 이항분포가 푸아송 분포로 수렴하는 현상은 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에 잘 설명되어 있다.

풀이

STEP III 1998, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP III 1998, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q1

핵심 아이디어

모든 것을 $\cos x$로 나타낸다. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 쓰면 함수 f는 $\cos x$에 대한 이차식(quadratic)이 된다. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면 f의 치역(range)을 한눈에 알 수 있고, 바로 이 치역이 마지막 소문항을 좌우한다. g에 대해서는 몫의 미분법(quotient rule)을 쓰면, 도함수(derivative)가 $f'(x)$의 상수배를 어떤 식의 제곱으로 나눈 꼴이 된다.

풀이

$y = f(x)$의 그래프 그리기

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 이용하면

$$f(x) = 2 + 2\cos x - \cos^2 x = 3 - (1 - \cos x)^2.$$

$0 \le 1 - \cos x \le 2$이므로 $-1 \le f(x) \le 3$이다. 값 3은 $\cos x = 1$일 때, 값 -1은 $\cos x = -1$일 때 얻어진다.

미분하면

$$f'(x) = -2(1 - \cos x)\sin x = 2\sin x\,(\cos x - 1).$$

이 값은 $\sin x = 0$ 또는 $\cos x = 1$일 때 0이 되며, 이는 $[0, 2\pi]$에서 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$를 뜻한다. 정류점(stationary point)은

$$(0,\,3), \qquad (\pi,\,-1), \qquad (2\pi,\,3).$$

$(0, \pi)$에서는 $\sin x > 0$이고 $\cos x - 1 < 0$이므로 $f' < 0$이고 f는 감소한다. $(\pi, 2\pi)$에서는

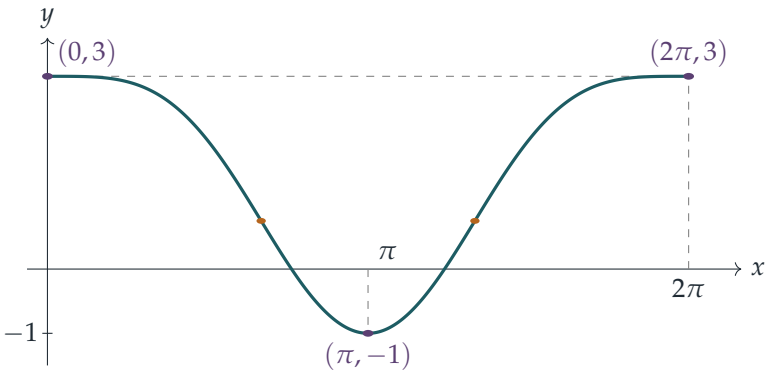
$\sin x < 0$이고 $\cos x - 1$은 여전히 음수이므로 $f' > 0$이고 f는 증가한다. 따라서 $(\pi, -1)$은 극소(minimum)이고, 양 끝점 $(0,3)$과 $(2\pi,3)$은 극대(maximum)이다.

? 생각해 보기 $x = 0$ 근처에서 곡선은 어떤 모양인가? 포물선과 비슷한가?

그렇지 않다. 포물선보다 더 평평하다. $x = 0$ 근처에서 $1 - \cos x \approx \frac{1}{2}x^2$이므로 $f(x) \approx 3 - \frac{1}{4}x^4$이다. 곡선은 꼭대기에서 매우 평평하며, 이는 $f''(0) = 0$과 일치한다. $x = \pi$ 근처에서는 $x = \pi + t$로 놓는다. 그러면 $1 - \cos x = 1 + \cos t \approx 2 - \frac{1}{2}t^2$이므로 $f \approx -1 + 2t^2$이다. 즉 보통의 포물선 모양 극소이다.

그래프를 그리는 데 쓸모 있는 다른 특징은 다음과 같다.

- $\cos(2\pi - x) = \cos x$이므로 곡선은 $x = \pi$에 대하여 대칭이다.
- 곡선은 $(1 - \cos x)^2 = 3$, 즉 $\cos x = 1 - \sqrt{3}$인 곳에서 x축과 만난다. 이로부터 $x = \arccos(1 - \sqrt{3}) \approx 2.39$와 $x = 2\pi - \arccos(1 - \sqrt{3}) \approx 3.89$를 얻는다.
- $f''(x) = 2\cos 2x - 2\cos x = 2(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$이다. 이 값은 $\cos x = -\frac{1}{2}$인 곳에서 부호가 바뀌므로 변곡점(point of inflection)은 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$와 $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$이다.



호박색 점은 변곡점이다.

g의 정류점

몫의 미분법에 의해 $c\,f(x) + d \neq 0$인 모든 곳에서

$$g'(x) = \frac{af'(x)\big(cf(x)+d\big) - cf'(x)\big(af(x)+b\big)}{\big(cf(x)+d\big)^2} = \frac{(ad-bc)\,f'(x)}{\big(cf(x)+d\big)^2}.$$

$ad \neq bc$이므로, g가 정의되는 모든 점에서 $g'(x) = 0$인 것은 정확히 $f'(x) = 0$일 때이다. 따라서 g는 f의 정류점 이외의 정류점을 갖지 않는다.

여전히 g가 $x = 0, \pi, 2\pi$에서 정의되어야 하는데, 나머지 두 조건이 바로 여기서 쓰인다. $x = 0$과 $x = 2\pi$에서 분모는 $3c + d$이고, $d \neq -3c$이므로 0이 아니다. $x = \pi$에서 분모는 $d - c$이고, $d \neq c$이므로 0이 아니다. 따라서 $y = \mathrm{g}(x)$의 정류점은 요구한 대로 정확히 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$에 있으며,

$$\mathrm{g}(0) = \mathrm{g}(2\pi) = \frac{3a + b}{3c + d}, \qquad \mathrm{g}(\pi) = \frac{b - a}{d - c}.$$

|g|가 유계일 때

$d/c < -3$ 또는 $d/c > 1$이라 하자. 특히 $c \neq 0$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$c\,\mathrm{f}(x) + d = c\left(\mathrm{f}(x) + \frac{d}{c}\right).$$

$\mathrm{f}(x)$는 $[-1, 3]$의 값을 가지므로 괄호 안의 값은 $\left[\frac{d}{c} - 1,\ \frac{d}{c} + 3\right]$에 속한다.

- $d/c > 1$이면 괄호 안의 값은 적어도 $\frac{d}{c} - 1 > 0$이다.
- $d/c < -3$이면 괄호 안의 값은 많아야 $\frac{d}{c} + 3 < 0$이다.

어느 경우든 모든 x에 대하여 $\left|c\,\mathrm{f}(x) + d\right| \geq |c|\,k$를 만족하는 상수 $k > 0$이 존재한다. 말로 하면, 분모가 0에서 멀리 떨어져 있다. 분자는 $|a\mathrm{f}(x) + b| \leq 3|a| + |b|$이므로 유계(bounded)이다. 따라서 $[0, 2\pi]$의 모든 x에 대하여

$$|\mathrm{g}(x)| \leq \frac{3|a| + |b|}{|c|\,k}$$

이므로 $|\mathrm{g}(x)|$는 한없이 커질 수 없다.

> **생각해 보기** $-3 < d/c < 1$이면 무엇이 잘못되는가?

그러면 $-d/c$는 -1과 3 사이에 (양 끝을 제외하고) 놓인다. f는 연속(continuous)이고 $[-1, 3]$의 모든 값을 가지므로 $\mathrm{f}(x) = -d/c$인 x가 존재하고, 그 점에서 분모가 0이 된다. 분자는 같은 점에서 0이 되지 않는다. 만약 둘 다 0이 된다면 $a(-d/c) + b = 0$, 즉 $ad = bc$가 되기 때문이다. 따라서 g는 수직 점근선(vertical asymptote)을 가지며 |g|는 유계가 아니다. 이로써 마지막 소문항의 조건이 꼭 들어맞는 조건임을 알 수 있다.

검산

- 수치적으로, $[0, 2\pi]$의 촘촘한 격자에서 f의 최솟값은 -1, 최댓값은 3이다. 또한 $3 - \mathrm{f}(0.1) \approx 2.496 \times 10^{-5}$이고, 이는 $\frac{1}{4}(0.1)^4 = 2.5 \times 10^{-5}$와 비슷하므로 $x = 0$에서 사차식처럼 평평하다는 것이 확인된다.
- 특수한 경우: $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$이면 $\mathrm{g} = \mathrm{f}$이고, 공식은 마땅히 그래야 하듯 $\mathrm{g}(0) = 3$과 $\mathrm{g}(\pi) = -1$을 준다.

- 임의의 a, b, c, d에 대하여, g의 유한 차분(finite difference) 도함수는 $(ad - bc)\mathrm{f}'/(c\mathrm{f} + d)^2$와 일치한다.

흔한 실수

- 양 끝점 $x = 0$과 $x = 2\pi$를 정류점으로 보지 못하는 것. 그곳에서 f′은 실제로 0이다.
- g가 f의 정류점에서 정의되는지 확인하는 것을 잊는 것. 조건 $d \neq -3c$와 $d \neq c$는 바로 이것을 위한 것이다.
- $x = 0$에서 꼭대기를 뾰족한 포물선 모양으로 그리는 것. 곡선은 그곳에서 훨씬 더 평평하다.

STEP 너머

$ad \neq bc$인 사상 $t \mapsto \dfrac{at + b}{ct + d}$를 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformation*)이라 한다. 이 사상은 가역(invertible)이고 도함수 $(ad - bc)/(ct + d)^2$는 결코 0이 되지 않는다. 그래서 이 사상과 합성(composition)해도 정류점이 새로 생기거나 사라지지 않는다. 뫼비우스 사상은 복소해석학(complex analysis)과 기하학에서 핵심적인 역할을 하며, 합성에 대하여 군(group)을 이룬다. 그림을 중심으로 한 아름다운 설명은 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

풀이

STEP III 1998, 문제 2

순수수학 • 베타 적분의 점화식

> **STEP III 1998, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q2

핵심 아이디어

이 적분은 모습을 바꾼 베타 함수(beta function)이다. 각 소문항마다 표준적인 기법이 하나씩 필요하다. 소문항 (i)에서는 t와 $1-t$의 역할을 맞바꾸는 반사(reflection) $t \mapsto 1-t$를 이용한다. 소문항 (ii)에서는 피적분함수(integrand)에 $1 = t + (1-t)$를 곱한다. 소문항 (iii)에서는 부분적분(integration by parts)을 하여 $(1-t)$의 거듭제곱 하나를 t 쪽으로 옮긴다. $(1-t)$의 지수가 없어질 때까지 소문항 (iii)을 되풀이하면 곧바로 계산할 수 있는 적분이 남는다.

풀이

소문항 (i)

$u = 1-t$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 끝 $t = 0, 1$은 $u = 1, 0$이 된다.

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_1^0 (1-u)^a u^b \,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^b (1-u)^a \,\mathrm{d}u = \mathrm{I}(b,a).$$

$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$에서 나온 음의 부호는 적분 구간의 끝을 다시 0과 1 순서로 바꾸는 데 쓰인다.

소문항 (ii)

$t + (1-t) = 1$이므로 피적분함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$t^a(1-t)^b = t^a(1-t)^b\big(t + (1-t)\big) = t^{a+1}(1-t)^b + t^a(1-t)^{b+1}.$$

각 항을 $[0,1]$에서 적분하면 $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(a+1,b) + \mathrm{I}(a,b+1)$을 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (iii)

$(1-t)^b$를 미분하고 t^a를 적분하는 방식으로 $\mathrm{I}(a,b)$를 부분적분한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{a+1}\cdot\left(-b(1-t)^{b-1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 t^{a+1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

> **생각해 보기** 경계항(boundary term)은 왜 사라지며, a와 b가 양수라는 조건은 어디에서 필요한가?

$t=1$에서는 $b>0$이므로 인수 $(1-t)^b$가 0이다. $t=0$에서는 $a+1>0$이므로 인수 t^{a+1}이 0이다. 따라서 괄호 부분은 영이 되고, 양변에 $a+1$을 곱하면

$$(a+1)\,\mathrm{I}(a,b) = b\,\mathrm{I}(a+1,b-1),$$

을 얻으며, 이것이 구하는 결과이다. ($0<b<1$이면 마지막 적분에는 $(1-t)$의 음의 거듭제곱이 나타난다. 그래도 $b-1>-1$이므로 이 적분은 수렴(converge)한다. 아래의 정수인 경우에는 어차피 항상 $b-1\geq 0$이다.)

정수 a,b에 대한 $\mathrm{I}(a,b)$의 계산. 결과를 $\mathrm{I}(a,b)=\dfrac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1)$로 쓰고 이를 거듭 적용한다. 한 단계마다 첫째 인자는 1만큼 커지고 둘째 인자는 1만큼 작아진다. 둘째 인자가 0에 이르면 멈춘다.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1) = \frac{b}{a+1}\cdot\frac{b-1}{a+2}\mathrm{I}(a+2,b-2) = \cdots \\ &= \frac{b(b-1)\cdots 1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}\mathrm{I}(a+b,0).\end{aligned}$$

공식을 쓸 때마다 둘째 인자가 양의 정수이므로 모든 단계가 정당하다. 이제 $\mathrm{I}(a+b,0)=\int_0^1 t^{a+b}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a+b+1}$이다. 또 $(a+1)(a+2)\cdots(a+b)=\dfrac{(a+b)!}{a!}$이므로

$$\boxed{\mathrm{I}(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}$$

이다. 소문항 (i)에서 요구하는 대로 이 공식은 a와 b에 대하여 대칭이다. 또한 a 또는 b가 0일 때에도 성립한다.

검산

▶ $\mathrm{I}(1,1)=\int_0^1(t-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이고, 공식으로 구하면 $\frac{1!\,1!}{3!}=\frac{1}{6}$이다.

- 공식은 소문항 (ii)를 만족한다. $\frac{(a+1)!\,b!}{(a+b+2)!} + \frac{a!\,(b+1)!}{(a+b+2)!} = \frac{a!\,b!\,(a+b+2)}{(a+b+2)!} = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구하면 $\mathrm{I}(2,3) \approx 0.0166667$이고, 이는 $\frac{2!\,3!}{6!} = \frac{1}{60}$과 일치한다. 또한 정수가 아닌 임의의 a, b에 대하여 수치 적분(quadrature)으로 소문항 (i)–(iii)을 확인하였으며, 약 10^{-11} 이내에서 일치하였다.

흔한 실수

- 부분적분을 반대 방향으로 하는 것. t^a를 미분하면 $(1-t)$의 지수가 올라가므로 잘못된 방향이다.
- 경계항이 사라지는 이유를 밝히지 않는 것. 경계항은 $a+1 > 0$이고 $b > 0$이기 때문에만 사라진다.
- 점화(recursion)를 한 단계 일찍 멈추거나, $\mathrm{I}(a+b, 0)$에서 나오는 마지막 인수 $\frac{1}{a+b+1}$을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

$\mathrm{I}(a,b)$는 베타 함수 $B(a+1, b+1)$이다. 모든 양의 실수 인자에 대하여 이 함수는 $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$에 의해 감마 함수(gamma function)와 연결된다. 우리가 얻은 답은 $\Gamma(n+1) = n!$인 특수한 경우이다. 확률론에서 $t^a(1-t)^b/\mathrm{I}(a,b)$는 베타 분포(beta distribution)의 확률밀도함수(density)이며, 베타 분포는 베이즈 통계학(Bayesian statistics)에서 핵심적인 역할을 한다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 답이 왜 $a!\,b!/(a+b+1)!$인지 설명하는 세기 논증을 비롯하여 이 주제가 매력적으로 다루어져 있다.

풀이

STEP III 1998, 문제 3

순수수학 • 선형 점화식

STEP III 1998, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q3

핵심 아이디어

이 문제는 상수항이 있는 1계 선형 점화식(first-order linear recurrence)으로, 미분방정식 $y' = cy - d$의 이산적인 사촌이다. 요령은 상미분방정식(ODE)의 경우와 같다. 먼저 상수("평형(equilibrium)") 해를 찾고, 그 해로부터의 편차가 매일 같은 인수만큼 곱해질 뿐임을 알아차리는 것이다. 극한에서 실제로 해야 할 일은 $c \to 0$일 때 $\big((1+c)^N - 1\big)/c$가 어떻게 되는지 이해하는 것뿐이며, 이는 이항정리(binomial theorem)로 해결된다.

풀이

$c > 0$일 때 풀기

모든 T에 대하여 $V_T = Ak^T + B$ 꼴을 시도한다. 이를 점화식에 대입하면

$$Ak^{N+1} + B = (1+c)\big(Ak^N + B\big) - d \quad \Longleftrightarrow \quad Ak^N\big(k - (1+c)\big) = cB - d.$$

우변은 N에 의존하지 않지만, 좌변은 0이 되지 않는 한 N에 의존한다($A \neq 0$이고 $k \neq 0$이어야 하며, 그렇지 않으면 이 꼴은 단지 상수일 뿐이다). 따라서 모든 N에 대하여 양변이 모두 0이어야 한다.

$$k = 1 + c, \qquad B = \frac{d}{c},$$

여기서 $c > 0$이므로 c로 나누어도 문제없다. 이 값들을 쓰면 임의의 상수 A에 대하여 $V_T = A(1+c)^T + d/c$가 점화식을 만족한다. $T = 0$을 대입하면 $V_0 = A + d/c$이므로 $A = V_0 - d/c$이고

$$\boxed{V_N = \left(V_0 - \frac{d}{c}\right)(1+c)^N + \frac{d}{c}}$$

생각해 보기 꼴을 추측했더니 맞아떨어졌다. 다른 해가 없다는 것은 어떻게 알 수 있을까?

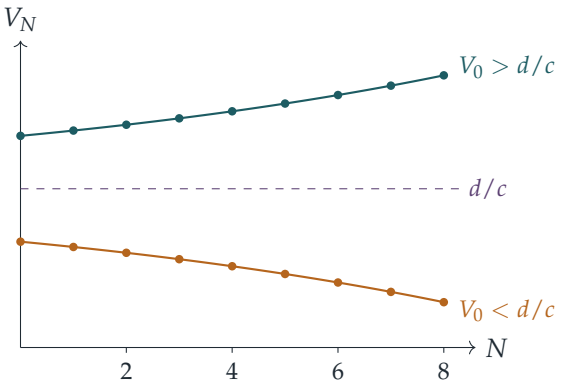
점화식은 V_0으로부터 V_1을, 다시 V_1로부터 V_2를 결정하는 식으로 계속되므로, 주어진 V_0을 갖는 수열은 정확히 하나뿐이다. 우리가 구한 식은 점화식을 만족하고 올바른 V_0을 가지므로 바로 그 수열이다. (직접적인 논증을 원한다면 $U_N = V_N - d/c$로 놓아 보자. 그러면 점화식은 $U_{N+1} = (1+c)U_N$이 되어 $U_N = (1+c)^N U_0$이고, 이는 같은 답이다.)

답을 다음과 같이 정리해 두면 유용하다.

$$V_N = V_0(1+c)^N - d\,\frac{(1+c)^N - 1}{c}. \qquad (*)$$

이 식은 깔끔하게 해석된다. 첫째 항은 하루에 비율 c로 증가하는 V_0이고, 둘째 항은 $d\big(1 + (1+c) + \cdots + (1+c)^{N-1}\big)$로, 매일의 공제액이 각각 남은 날 동안 불어난 것을 등비급수(geometric series)로 합한 것이다.

상수 d/c는 평형값이다. $V_0 > d/c$이면 채권은 한없이 커지고, $V_0 = d/c$이면 그대로 머물며, $V_0 < d/c$이면 점점 더 빠르게 떨어진다.



(그림은 $c = 0.1$, $d/c = 5$이고 $V_0 = 6$, $V_0 = 4$인 경우이다.)

$c = 0$인 경우

이제 점화식은 $V_{N+1} = V_N - d$이다. 값이 매일 d씩 줄어드는 등차수열(arithmetic progression)이다. 따라서

$$\boxed{V_N = V_0 - Nd}$$

d/c 때문에 $c > 0$일 때의 식에 단순히 $c = 0$을 대입할 수는 없다는 점에 주목하자. 바로 이 때문에 문제에서 극한을 묻는 것이다.

$c \to 0$일 때의 극한

N을 고정하고 $(*)$를 이용한다. 고정된 N에 대하여 $(1+c)^N \to 1$이므로 첫째 항은 V_0으로 수렴(converge)한다. 둘째 항은 이항정리로 전개한다.

$$(1+c)^N - 1 = Nc + \binom{N}{2}c^2 + \cdots + c^N,$$

$$\text{따라서} \quad \frac{(1+c)^N - 1}{c} = N + \binom{N}{2}c + \cdots + c^{N-1}.$$

N이 고정되어 있으므로 이것은 유한개의 항을 갖는 c에 대한 다항식이고, 첫째 항 이후의 모든 항은 c의 양의 거듭제곱을 포함한다. 그러므로 $c \to 0$일 때 이 식은 N으로 수렴하고

$$\lim_{c\to 0} V_N = V_0 - Nd,$$

이는 요구한 대로 $c = 0$일 때의 해이다. (같은 말로, $\big((1+c)^N - 1\big)/c$는 $x = 1$에서 x^N의 차분몫(difference quotient)이므로, 그 극한은 미분계수 N이다.)

"고정된 N에 대하여"라는 말이 중요하다. c가 작더라도 N이 크면 $\binom{N}{2}c$ 같은 항이 작다는 보장이 없고, 결국에는 지수적 증가가 선형적인 행동을 이긴다.

검산

- $N = 1$: 식에서 $(V_0 - d/c)(1+c) + d/c = (1+c)V_0 - d$를 얻으며, 이는 점화식 그 자체이다.
- $V_0 = d/c$이면 모든 N에 대하여 $V_N = d/c$, 즉 평형이다.
- 수치적으로 $V_0 = 7, d = 2, N = 12$일 때, 식은 $c = 0.01$에서 $V_{12} \approx -17.48$, $c = 10^{-4}$에서 -17.005를 주어 $V_0 - 12d = -17$에 가까워진다. 또한 닫힌 형태의 식은 여러 무작위 유리수 경우에 직접 반복 계산한 결과와 정확히 일치한다.

흔한 실수

- $B = -d/c$로 잡는 실수: 부호는 $cB - d = 0$에서 나오므로 $B = +d/c$이다.
- $A = V_0 - d/c$ 대신 $A = V_0$을 쓰는 실수: 상수 B도 $T = 0$에서 기여한다.
- $c > 0$일 때의 식에 $c = 0$을 직접 대입하려는 실수: 정의되지 않으므로 극한이 필요하다.

STEP 너머

이와 같은 점화식은 **선형 차분방정식**(*linear difference equation*)이며, 그 이론은 선형 상미분방정식과 나란히 전개된다. 일반해는 특수해(여기서는 상수해)에 동차방정식

$U_{N+1} = (1+c)U_N$의 일반해를 더한 것이다. 금융에서 이것은 고정 상환액을 갖는 대출이나 연금의 공식이며, $c \to 0$ 극한은 복리에서 단리로의 이행에 해당한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 상미분방정식 이론과 함께 1계 차분방정식을 다루는 절이 있다.

풀이

STEP III 1998, 문제 4

순수수학 • 장미 곡선

> **STEP III 1998, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q4

핵심 아이디어

극곡선(polar curve)은 방정식이 단순할 때는 직교좌표(Cartesian) 형태로 바꾸어 보면 가장 쉽게 이해할 수 있고, 그렇지 않을 때는 r의 부호를 추적하면 된다. 문제 전체는 $r < 0$인 점을 **반대** 방향, 즉 $\theta + \pi$ 방향으로 거리 $|r|$만큼 떨어진 곳에 찍는다는 규약에 달려 있다. $r = \cos k\theta$에서는 이 규약에 따라 음의 고리가 새로운 자리에 놓여 새 꽃잎을 만드는지, 아니면 이미 그려진 꽃잎 위에 겹쳐지는지가 결정된다.

풀이

원 $r = \cos\theta$

양변에 r를 곱하고 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$을 이용하면

$$\begin{aligned} r^2 = r\cos\theta \quad &\Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = x \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

따라서 곡선 위의 모든 점은 중심이 $(\frac{1}{2}, 0)$이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원 위에 있다.

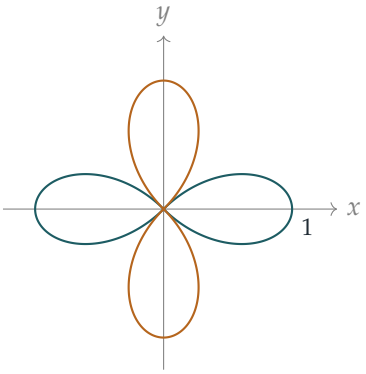
역으로, 이 원 위의 원점이 아닌 임의의 점 (x, y)를 잡자. $x = x^2 + y^2 > 0$이므로 이 점의 편각은 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$를 만족하고, $r^2 = x = r\cos\theta$를 $r > 0$으로 나누면 $r = \cos\theta$를 얻는다. 원점 자체는 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 지나게 된다. 그러므로 곡선은 정확히 이 원이며, θ가 $-\frac{1}{2}\pi$에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 한 번 그려진다. 이 범위에서는 항상 $r = \cos\theta \geq 0$이므로 부호 규약이 필요 없다.

곡선 $r = \cos 2\theta$

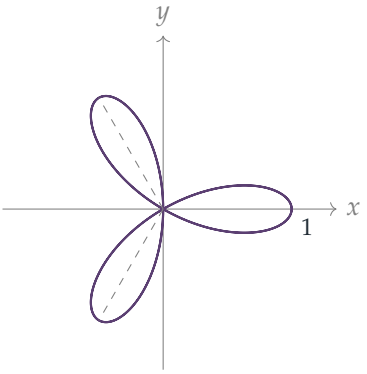
이제는 r의 부호가 바뀌므로, $r < 0$인 (r, θ)는 $\theta + \pi$ 방향으로 거리 $|r|$인 곳에 찍는다.

- $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$이면 $r > 0$이고, r는 0에서 시작해 $\theta = 0$에서 1까지 커졌다가 다시 0으로 돌아온다. 이것이 양의 x축 방향의 꽃잎이다.
- $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi$이면 $r < 0$이므로 이 점들은 $\frac{5}{4}\pi$에서 $\frac{7}{4}\pi$까지의 방향에 그려진다. 이것이 음의 y축 방향의 꽃잎이다.
- 마찬가지로 $\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$ $(r > 0)$에서는 음의 x축 방향의 꽃잎이, $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$ $(r < 0)$에서는 양의 y축 방향의 꽃잎이 생긴다.

그 결과는 네 잎 장미 곡선으로, 각 꽃잎의 길이는 1이고, 두 축에 대해 대칭이며, 꽃잎끼리는 원점에서만 만난다. 그림에서 청록색 꽃잎은 $r > 0$에서, 호박색 꽃잎은 $r < 0$에서 나온 것이다.



$r = \cos 2\theta$



$r = \cos 3\theta$

곡선 $r = \cos 2n\theta$

$\cos(-2n\theta) = \cos 2n\theta$이므로 n과 $-n$은 같은 곡선을 준다. 따라서 $n \geq 1$로 두자($n = 0$인 경우는 아래에서 다시 다룬다).

> **생각해 보기** $r < 0$일 때 고리는 이미 그려진 고리 위에 겹쳐질까, 아니면 새로운 곳에 놓일까?

$k = 0, 1, \ldots, 2n - 1$에 대하여 $\theta = k\pi/n = 2k \cdot \frac{\pi}{2n}$을 중심으로 하는 길이 $\pi/(2n)$인 구간에서 $r > 0$이다. 각 구간은 $2k \cdot \frac{\pi}{2n}$ 방향, 즉 $\frac{\pi}{2n}$의 **짝수** 배 방향을 향하는 꽃잎을 하나씩 만든다.

$\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$을 중심으로 하는 구간에서는 $r < 0$이고, 이 점들은 $\theta + \pi$ 방향에 찍히므로

꽃잎은

$$(2k+1)\frac{\pi}{2n} + \pi = (2k+1+2n)\frac{\pi}{2n},$$

즉 $\frac{\pi}{2n}$의 **홀수** 배 방향을 향한다. 따라서 음의 고리는 양의 꽃잎들 사이의 빈틈, 곧 새로운 곳에 놓인다.

그러므로 $r = \cos 2n\theta$는 합동인 꽃잎 $4n$개를 가진 장미 곡선이다. 각 꽃잎의 길이는 1이고, $m = 0, 1, \ldots, 4n-1$에 대하여 $m\pi/(2n)$ 방향을 향하며, 각 꽃잎은 각 $\pi/(2n)$을 차지하고, 이웃한 꽃잎은 원점에서만 만난다($n = 1$이면 위의 네 잎 장미 곡선이다). 꽃잎들이 차지하는 각의 합은 $4n \cdot \frac{\pi}{2n} = 2\pi$이므로, 꽃잎들은 겹치지 않고 한 바퀴 전체를 채운다.

퇴화된 경우인 $n = 0$에서는 곡선이 $r = 1$, 즉 단위원이 된다.

넓이는 n에 무관하다

꽃잎들이 겹치지 않으므로, θ가 0에서 2π까지 변할 때 둘러싸인 영역의 각 부분은 정확히 한 번씩 쓸린다. 넓이 공식 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$(이 공식에는 r^2만 들어가므로 r의 부호는 상관없다)를 쓰면, $n \geq 1$에 대하여

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 2n\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos 4n\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\sin 4n\theta}{4n}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin 8n\pi = 0$을 이용하였다. 요구한 대로 이 값은 n에 의존하지 않는다. 꽃잎이 많아지는 만큼 각 꽃잎이 정확히 그만큼 가늘어지는 것이다. (제외된 경우인 $n = 0$, 곧 단위원의 넓이는 π이다. 공식의 $\sin 4n\theta/(4n)$ 항이 바로 $n \neq 0$이 쓰이는 곳이다.)

곡선 $r = \cos 3\theta$

? **생각해 보기** 이 곡선의 꽃잎은 왜 여섯 개가 아니라 세 개일까?

이제 $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$를 중심으로 하는 구간에서 $r > 0$이고, 이 방향들로 꽃잎이 생긴다. 음의 고리는 $\theta = \frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi$를 중심으로 하며, $\frac{4}{3}\pi, 2\pi, \frac{8}{3}\pi \equiv \frac{2}{3}\pi$ 방향에 그려진다. 이것은 정확히 양의 꽃잎들의 방향이다. 실제로 θ를 $\theta + \pi$로 바꾸면 반대 방향으로

$$r = \cos(3\theta + 3\pi) = -\cos 3\theta$$

가 되므로 같은 점이다. 따라서 $r = \cos 3\theta$는 세 잎 장미 곡선으로, 길이 1인 꽃잎이 $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 방향에 있고, 각 꽃잎은 각 $\frac{1}{3}\pi$를 차지하며, θ가 0에서 2π까지 변할 때 곡선 전체가 **두 번** 그려진다($0 \leq \theta \leq \pi$에서 한 번). 위의 오른쪽 그림이 이 곡선이다.

같은 논법으로, 홀수 k에 대하여 $r = \cos k\theta$는 두 번 그려지는 k잎 장미 곡선이고, 짝수 k에 대해서는 한 번 그려지는 $2k$잎 장미 곡선임을 알 수 있다.

검산

- $r = \cos\theta$에 $\theta = 0$을 대입하면 점 $(1, 0)$은 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 위에 있고, 원점($\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서)도 그렇다.
- 원 $r = \cos\theta$의 넓이는 $\pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\pi$이고, $\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$와 일치한다. 마찬가지로 세 잎 장미 곡선에 대해 $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 3\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$이다. 여기서 0부터 2π까지 적분하면 두 번 세게 되어 $\frac{1}{2}\pi$가 나온다.
- 수치 검산: $n = 1, \ldots, 5$에 대하여 $r = \cos 2n\theta$를 그려 보면 꽃잎 끝이 $4n$개 나타나고, 몬테카를로(Monte Carlo) 방법으로 둘러싸인 영역의 넓이를 추정하면 매번 $1.57 \approx \pi/2 = 1.5708$이 나왔다.

흔한 실수

- 음의 r를 무시하고 $r = \cos 2\theta$의 꽃잎을 두 개만 그리는 것.
- r의 고리가 여섯 개라는 이유로 $r = \cos 3\theta$의 꽃잎이 여섯 개라고 말하는 것. 음의 고리는 양의 고리 위에 겹쳐진다.
- 두 번 그려지는 곡선($r = \cos 3\theta$ 등)에 $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\theta$를 사용하여 넓이를 두 배로 계산하는 것.

STEP 너머

이 곡선들을 **로도니아**(*rhodonea*) 곡선 또는 장미 곡선(rose curve)이라고 한다. 점을 복소수 $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로 나타내면, 장미 곡선 $r = \cos k\theta$는 $z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\theta}\right)$, 즉 서로 반대 방향으로 도는 두 원운동의 합이다. 이 관점은 장미 곡선을 주전원(epicycle) 및 푸리에 급수(Fourier series)와 연결해 주며, 넓이 공식 $\frac{1}{2}\int r^2 \, \mathrm{d}\theta$는 벡터 해석학의 그린 정리(Green's theorem)의 특수한 경우이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수를 이렇게 기하학적으로 바라보는 방법을 아름답게 펼쳐 보인다.

풀이

STEP III 1998, 문제 5

순수수학 • 행렬 지수함수

> **STEP III 1998, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q5

핵심 아이디어

행렬의 무한급수(infinite series)는 처음 보면 무시무시하지만, 여기 나오는 두 행렬은 모두 거듭제곱(power)이 아주 단순한 규칙으로 반복된다. $\mathbf{M}$의 거듭제곱은 i의 거듭제곱처럼 순환하고, $\mathbf{N}$의 거듭제곱은 제곱부터 모두 영행렬이 된다. 모든 거듭제곱을 알고 나면 급수는 익숙한 스칼라 급수들로 나뉘거나(아니면 아예 유한 개의 항에서 끝나고), 그로부터 각 변환(transformation)이 무엇인지 바로 읽어 낼 수 있다. 마지막 소문항은 직접적인 행렬 계산이고, 그 기하학적 의미는 각 변환이 어떤 직선을 그대로 두는지를 물어봄으로써 드러난다.

풀이

행렬 $\mathbf{M}$

곱을 전개하면

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I},$$

이므로 요구한 결과가 나온다. 따라서 모든 정수 $k \geq 0$에 대하여

$$\mathbf{M}^{2k} = (\mathbf{M}^2)^k = (-1)^k\mathbf{I}, \qquad \mathbf{M}^{2k+1} = (-1)^k\mathbf{M}.$$

이다. 급수를 $\theta\mathbf{M}$의 짝수 거듭제곱과 홀수 거듭제곱으로 나누면

$$\begin{aligned}\exp(\theta\mathbf{M}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}\mathbf{M}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{M}^{2k+1}\\ &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}\Big)\mathbf{I} + \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)\mathbf{M}\\ &= \cos\theta\,\mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{M} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

이다. (이렇게 나누어도 되는 이유는, 행렬 급수의 각 성분이 실수의 급수이고 그 항의 크기가 $|\theta|^r/r!$ 이하로 유계이므로 절대수렴(converge absolutely)하여 항의 순서를 바꾸어 묶을 수 있기 때문이다.)

? **생각해 보기** $\cos\theta\,\mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{M}$을 전에 어디에서 본 적이 있는가?

$\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$이므로 행렬 $\mathbf{M}$은 i와 똑같이 행동하고, 위의 계산은 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$의 행렬 버전이다. 기하학적으로 $\exp(\theta\mathbf{M})$은 $(1,0)$을 $(\cos\theta, \sin\theta)$로, $(0,1)$을 $(-\sin\theta, \cos\theta)$로 보낸다. 즉 이것은 **원점을 중심으로 평면을 각 θ만큼 시계 반대 방향으로 돌리는 회전(rotation)**이다. (실제로 i를 곱하는 것과 마찬가지로 $\mathbf{M}$ 자체는 $\frac{\pi}{2}$만큼의 회전이다.)

행렬 N

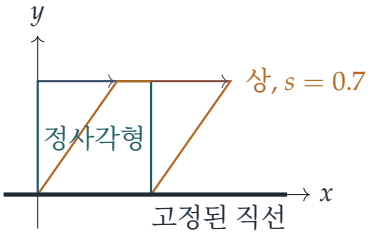
이번에는

$$\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

이므로 모든 $r \geq 2$에 대하여 $\mathbf{N}^r = \mathbf{0}$이고, 급수는 두 항에서 끝난다.

$$\exp(s\mathbf{N}) = \mathbf{I} + s\mathbf{N} = \begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

이 행렬은 (x,y)를 $(x+sy,\, y)$로 보낸다. 모든 점은 x축에 평행하게, 그 높이 y에 비례하는 거리만큼 움직이고, x축 위의 점은 전혀 움직이지 않는다. 따라서 $\exp(s\mathbf{N})$은 x축을 고정점(fixed point)들의 직선으로 갖는 **x축에 평행한 층밀림(shear)**이며, 단위정사각형을 넓이가 같은 평행사변형(parallelogram)으로 보낸다(행렬식(determinant)이 1이다).



언제 교환 가능한가?

$c = \cos\theta$, $\sigma = \sin\theta$라 하자. 그러면

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -\sigma \\ \sigma & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+s\sigma & -\sigma+sc \\ \sigma & c \end{pmatrix},$$
$$\exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} c & -\sigma \\ \sigma & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & sc-\sigma \\ \sigma & s\sigma+c \end{pmatrix}.$$

이다. 둘을 빼면

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) - \exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = s\sin\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

이다. 이것이 모든 s에 대하여 영행렬일 필요충분조건은 $\sin\theta = 0$이다($\sin\theta \neq 0$이면 $s = 1$로 잡으면 된다). 따라서 두 행렬이 모든 s에 대하여 교환 가능(commute)할 필요충분조건은

$$\theta = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

이다. 이 값들에 대하여 $\exp(\theta\mathbf{M}) = (-1)^n\mathbf{I}$이고, 이는 항등행렬(identity)이거나 $-\mathbf{I}$이다.

> **생각해 보기** 이 층밀림과 교환 가능한 회전은 왜 반바퀴 회전이거나 아무것도 하지 않는 회전이어야 하는가?

R를 회전, S를 층밀림($s \neq 0$)이라 하고 $SR = RS$라고 가정하자. x축 위의 임의의 점 P를 잡으면 $S(P) = P$이다. 그러면

$$S\big(R(P)\big) = R\big(S(P)\big) = R(P),$$

이므로 $R(P)$ 역시 층밀림의 고정점이다. 그런데 층밀림이 고정하는 점은 x축 위의 점뿐이다. 따라서 회전은 x축을 자기 자신으로 보내야 하고, 이런 성질을 가진 원점 중심의 회전은 0만큼의 회전(항등변환)이나 π만큼의 회전(반바퀴 회전(half-turn) $(x, y) \mapsto (-x, -y)$)뿐이다. 역으로 이 두 변환은 $\pm\mathbf{I}$이므로 **모든** 선형사상(linear map)과 교환 가능하다. 평면을 반바퀴 돌리는 것과 층밀림을 하는 것은 어느 순서로 하든 같은 결과를 준다. 그 밖의 회전은 층밀림의 고정된 직선을 기울어지게 하므로, 회전하기 전에 층밀림을 하느냐 회전한 뒤에 층밀림을 하느냐에 따라 결과가 달라진다.

검산

- 급수에서 요구하는 대로 $\theta = 0$일 때 회전행렬은 $\mathbf{I}$이고, $s = 0$일 때 층밀림은 $\mathbf{I}$이다.
- 두 행렬식은 모두 1이다($\cos^2\theta + \sin^2\theta$와 $1 \cdot 1$). 넓이를 보존하는 회전과 층밀림이라면 당연히 그래야 한다.

- 수치적으로, $\theta = 1$일 때 급수의 80개 항을 더하면 성분이 $\cos 1 \approx 0.5403$, $\sin 1 \approx 0.8415$와 일치한다. $\theta = 1, s = 1$일 때 교환자(commutator)의 대각성분은 $\pm \sin 1 \approx \pm 0.8415$이며, 이는 $s \sin\theta \, \mathrm{diag}(1, -1)$과 일치한다.

흔한 실수

- 행렬에 대해서도 $\exp(\mathbf{A}) \exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B})$가 성립한다고 가정하는 것. 이 법칙에는 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$가 필요한데, 여기서는 $\sin\theta = 0$이 아니면 바로 이 조건이 성립하지 않는다.
- π의 모든 정수배가 아니라 $\theta = 0$만(또는 $\theta = 0, \pi$만) 답하는 것.
- $\exp(s\mathbf{N})$을 늘림(stretch)이나 확대(enlargement)라고 부르는 것. 이 변환은 넓이를 보존하고 x축의 각 점을 고정하며, 바로 그 점 때문에 층밀림이다.

STEP 너머

행렬지수함수(matrix exponential)는 **리 대수**(*Lie algebra*)와 **리 군**(*Lie group*)을 잇는 다리이다. $\mathbf{M}$은 회전들의 군을, $\mathbf{N}$은 층밀림들의 군을 생성하며, $\exp(t\mathbf{A})$는 선형 미분방정식(linear differential equation) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$의 해가 된다. 교환 가능하지 않은 행렬에 대해 $\exp(\mathbf{A}) \exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B})$가 성립하지 않는 정도는 교환자 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$로 측정되는데, 이는 마지막 소문항에서 만난 아이디어이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 행렬지수함수와 그것을 미분방정식에 활용하는 방법을 다룬다.

풀이

STEP III 1998, 문제 6

순수수학 • 다면체의 부피

> **STEP III 1998, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q6

핵심 아이디어

정육면체를 좌표축 위에 놓아, 꼭짓점(vertex)이 모든 좌표가 0 또는 a인 점들이 되게 한다. 그러면 거리는 3차원 피타고라스(Pythagoras) 정리로 구할 수 있고, 다루기 까다로운 입체는 정육면체에서 간단한 조각을 잘라 내어 부피를 잴 수 있다. 정사면체(regular tetrahedron)는 정육면체에서 네 모서리 부분을 잘라 내고 남은 것이고, 정팔면체(regular octahedron)는 밑면이 정사각형인 사각뿔(square-based pyramid) 두 개를 밑면끼리 맞붙인 것이다.

풀이

소문항 (i)

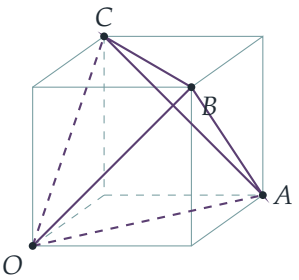
정육면체 $[0,a]^3$을 생각한다. 꼭짓점은 각 좌표가 0 또는 a인 여덟 개의 점 (x,y,z)이고, 두 꼭짓점은 정확히 한 좌표만 다를 때 인접(adjacent)한다(모서리로 연결된다).

어떤 네 꼭짓점을 고를 수 있는가? 좌표 가운데 a와 같은 것의 개수에 따라 꼭짓점을 **짝수** 꼭짓점 또는 **홀수** 꼭짓점이라 부르자. 모서리를 따라 움직이면 한 좌표가 바뀌므로 짝수와 홀수가 항상 서로 바뀐다. 고른 네 꼭짓점에 짝수 꼭짓점 P와 홀수 꼭짓점 Q가 함께 들어 있다고 하자. 둘은 인접하지 않으므로 세 좌표가 모두 다르다. 즉 Q는 P의 맞은편 꼭짓점이다. 나머지 꼭짓점은 모두 P나 Q에 인접하므로(홀수 꼭짓점 셋은 P에, 짝수 꼭짓점 셋은 Q에), 세 번째 꼭짓점을 더할 수 없다. 따라서 네 꼭짓점은 모두 짝수인

$$O=(0,0,0),\quad A=(a,a,0),\quad B=(a,0,a),\quad C=(0,a,a),$$

이거나 모두 홀수이다(이 집합을 평면 $x=\frac{1}{2}a$에 대하여 대칭이동한 것으로, 합동(congruent)인 입체를 준다).

정다면체임. O, A, B, C 가운데 어느 두 점이든 정확히 두 좌표가 각각 a만큼 다르므로, 여섯 개의 거리는 모두 $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}\,a$이다. 따라서 네 면은 모두 한 변의 길이가 $\sqrt{2}\,a$인 정삼각형(equilateral triangle)이고, $OABC$는 정사면체이다. 각 모서리는 정육면체의 한 면의 대각선이다.



부피. 정육면체에서 정사면체를 빼면 네 개의 모서리 조각이 남는데, 홀수 꼭짓점마다 하나씩이다. 예를 들어 $(a,0,0)$에 있는 모서리 조각은 그 꼭짓점과 이웃한 세 꼭짓점 O, A, B로 이루어진 사면체이다. $(a,0,0)$에서 만나는 세 모서리는 서로 수직이고 길이가 a이므로, 이 조각은 넓이가 $\frac{1}{2}a^2$인 직각삼각형을 밑면으로 하고 높이가 a인 각뿔(pyramid)이며, 부피는 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a = \frac{1}{6}a^3$이다. 따라서

$$V_{\text{사면체}} = a^3 - 4\cdot\tfrac{1}{6}a^3 = \tfrac{1}{3}a^3.$$

모서리의 길이가 1이려면 $\sqrt{2}\,a = 1$, 즉 $a = 1/\sqrt{2}$이고 $a^3 = 1/(2\sqrt{2})$이어야 한다. 따라서 모서리의 길이가 1인 정사면체의 부피는

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

생각해 보기 네 개의 모서리 조각과 정사면체가 겹치는 부분 없이 정육면체를 정확히 채우는 까닭은 무엇인가?

OAB와 같은 정사면체의 각 면은 정육면체의 꼭짓점을 정확히 하나, 여기서는 $(a,0,0)$을 잘라 낸다. O, A, B를 지나는 평면 $x-y-z=0$에 대하여 $(a,0,0)$은 엄밀히 한쪽에 있고, 나머지 일곱 꼭짓점은 반대쪽에 있거나 평면 위에 있다. 따라서 정육면체는 각 면 너머에 하나씩 있는 네 모서리 조각과 가운데의 정사면체로 나뉜다.

소문항 (ii)

모서리의 길이가 1인 정팔면체는 여섯 꼭짓점이

$$(\pm h,0,0),\quad (0,\pm h,0),\quad (0,0,\pm h),\qquad h = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

에 오도록 놓을 수 있고, 각 꼭짓점은 맞은편에 있지 않은 네 꼭짓점과 연결된다. 이렇게 연결된 두 꼭짓점, 예를 들어 $(h,0,0)$과 $(0,h,0)$ 사이의 거리는 $\sqrt{2}h = 1$이다. 따라서 열두 모서리의 길이는 모두 1이고, 팔분공간(octant)마다 하나씩 있는 여덟 면은 정삼각형이다. 평면 $z=0$ 위의 네 꼭짓점은 한 변의 길이가 1인 정사각형을 이룬다. 정팔면체는 이 정사각형 위에 꼭대기가 $(0,0,\pm h)$이고 높이가 각각 h인 사각뿔 두 개를 놓은 것이다. 따라서

$$V_{\text{팔면체}} = 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

더 일반적으로, 길이를 e배 하면 부피는 e^3배가 되므로, 모서리의 길이가 e인 정팔면체의 부피는 $\frac{\sqrt{2}}{3}e^3$이다.

소문항 (iii)

이번에는 한 변의 길이가 a인 정육면체의 중심을 원점에 두어 $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]^3$으로 놓는 편이 깔끔하다. 각 면의 중심은

$$(\pm\tfrac{1}{2}a, 0, 0), \quad (0, \pm\tfrac{1}{2}a, 0), \quad (0, 0, \pm\tfrac{1}{2}a).$$

이다. 이것은 정확히 소문항 (ii)의 배치에서 $h = \frac{1}{2}a$인 경우이다. 마주 보는 두 면의 중심 사이의 거리는 a이다. 이웃한 두 면의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = a/\sqrt{2}$이다. 이 여섯 점을 꼭짓점으로 하는 볼록(convex) 입체는 팔분공간마다 하나씩 여덟 개의 면을 가진다. 예를 들어 $x, y, z \geq 0$인 팔분공간에 있는 면은 꼭짓점이 $(\frac{1}{2}a, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}a, 0)$, $(0, 0, \frac{1}{2}a)$인 삼각형이다. 각 면은 한 변의 길이가 $a/\sqrt{2}$인 정삼각형이므로, 면의 중심들은 모서리의 길이가 $e = a/\sqrt{2}$인 정팔면체를 이룬다.

소문항 (ii)에 의하여 그 부피는

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6}.$$

이다. 같은 정육면체의 꼭짓점 네 개를 꼭짓점으로 하는 소문항 (i)의 정사면체는 부피가 $\frac{1}{3}a^3$이다. $\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a^3$이므로, 요구한 대로 정팔면체의 부피는 정사면체의 부피의 절반이다.

검산

- 밑넓이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 높이 $\sqrt{2/3}$으로 밑넓이와 높이를 이용한 공식을 쓰면 모서리의 길이가 1인 정사면체의 부피는 $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0.11785$이고, 소문항 (i)과 일치한다.
- 모서리의 길이가 같으면 $\frac{\sqrt{2}}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$이므로 $V_{\text{팔면체}} = 4V_{\text{사면체}}$이다. 이는 모서리의 길이가 2인 정사면체를 모서리의 길이가 1인 정사면체 네 개(꼭짓점 쪽)와 모서리의 길이

가 1인 정팔면체 하나(가운데)로 나누는 고전적인 분할(dissection)과 맞아떨어진다. 단위 정사면체를 단위로 재면 $8 = 4 + 4$이다.

- 수치적으로, 서로 인접하지 않은 정육면체의 네 꼭짓점을 고르는 모든 경우에 대해 행렬식(determinant)으로 계산하면 단위 정육면체에서 부피 $\frac{1}{3}$을 얻었고, 영역 $|x| + |y| + |z| \leq 1/\sqrt{2}$에 대한 몬테카를로(Monte Carlo) 추정값은 0.4715로, $\sqrt{2}/3 \approx 0.47140$과 비교된다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 정육면체의 한 변을 1로 잡는 것: 그러면 정사면체의 모서리는 1이 아니라 $\sqrt{2}$이고, 부피를 $(1/\sqrt{2})^3$배로 다시 조정해야 한다.
- 엉뚱한 모서리 조각을 빼는 것: 모서리 조각은 여덟 개가 아니라 네 개(쓰지 않은 꼭짓점마다 하나씩)이고, 각각의 부피는 $\frac{1}{6}a^3$이다.
- 소문항 (iii)에서 정육면체의 한 변을 정팔면체의 모서리로 쓰는 것. 이웃한 면의 중심 사이의 거리는 $a/\sqrt{2}$이다.

STEP 너머

정육면체 안에 들어 있는 두 정사면체, 그리고 면의 중심으로 만든 정팔면체는 플라톤 다면체(Platonic solids)와 그 대칭군(symmetry group) 이야기의 출발점이다. 내접한 정사면체 하나를 보존하는 정육면체의 회전들은 위수(order) 12인 군(group)을 이루며, 이는 정육면체의 회전 24개 전체의 절반이다. 정육면체와 정팔면체는 서로 **쌍대**(dual)이고(한 쪽의 면의 중심이 다른 쪽의 꼭짓점이 된다), 이런 입체의 부피는 선형사상(linear map)이 부피를 몇 배로 바꾸는지를 재는 행렬식으로 깔끔하게 구해진다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 행렬식을 부피로 다루고, Armstrong의 *Groups and Symmetry*(군과 대칭)는 이 입체들의 대칭군을 연구한다.

풀이

STEP III 1998, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기와 적분

STEP III 1998, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q7

핵심 아이디어

첫 번째 함수는 아무렇게나 고른 준비 운동이 아니다. $\mathrm{b}(x)$를 미분(differentiate)하여 도함수(derivative)를 0으로 놓으면, 나타나는 방정식이 정확히 $\mathrm{f}(x/T)=0$이다. 따라서 f에 대해 알아낸 모든 것(양의 근이 하나뿐이고, 그 근이 2와 3 사이에 있다는 사실)이 b가 어디서 꺾이는지 알려 준다. B가 T에 의존하는 방식은 자연스러운 치환(substitution) $x=Tu$에서 나오는데, 이 치환은 피적분함수(integrand)에서 T를 없애 준다.

풀이

f의 개형 그리기와 m 구하기

$\mathrm{f}(0)=1\cdot(-3)+3=0$이고

$$\mathrm{f}'(s)=\mathrm{e}^{s}(s-3)+\mathrm{e}^{s}=\mathrm{e}^{s}(s-2).$$

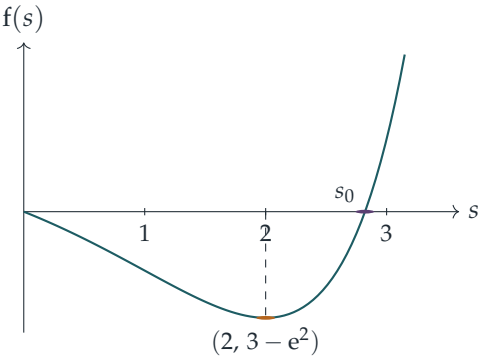
이다. $\mathrm{e}^{s}>0$이므로 f는 $[0,2]$에서 감소하고 $[2,\infty)$에서 증가하며, 최솟값은 $\mathrm{f}(2)=3-\mathrm{e}^{2}\approx 3-7.29=-4.29$이다. $s\to\infty$일 때 $\mathrm{e}^{s}(s-3)\to\infty$이므로 $\mathrm{f}(s)\to\infty$이다.

$\mathrm{f}(0)=0$이고 f가 $[0,2]$에서 순감소(strictly decreasing)하므로, $0<s\le 2$에서 $\mathrm{f}(s)<0$이다. $[2,\infty)$에서는 음수에서 $+\infty$까지 순증가하므로, 이 구간에서 어떤 $s_0>2$에서 정확히 한 번 0을 지난다. 따라서 s_0은 f의 **유일한** 양의 근이다.

$\mathrm{e}\approx 2.7$을 쓰면

$$\mathrm{f}(1)=3-2\mathrm{e}\approx -2.4,\qquad \mathrm{f}(2)\approx -4.29,\qquad \mathrm{f}(3)=0+3=3.$$

이다. 그러므로 $\mathrm{f}(m)>0$을 만족하는 가장 작은 양의 정수는 $m=3$이고, $2<s_0<3$이다(실제로 $s_0\approx 2.82$이다).



b의 유일한 극점

$u = x/T$라 하자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\mathrm{b}'(x) = \frac{3x^2(\mathrm{e}^{x/T}-1) - x^3\cdot\frac{1}{T}\mathrm{e}^{x/T}}{(\mathrm{e}^{x/T}-1)^2} = \frac{x^2\left(3\mathrm{e}^{u}-3-u\,\mathrm{e}^{u}\right)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2} = -\frac{x^2\,\mathrm{f}(u)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2}.$$

이다. $x > 0$이면 $x^2 > 0$이고 $(\mathrm{e}^u-1)^2 > 0$이므로, $\mathrm{b}'(x) = 0$인 것은 정확히 $\mathrm{f}(x/T) = 0$일 때이다. 앞 문항에 의해 이는 $x/T = s_0$일 때만 일어나므로, b는 $0 < x < \infty$에서 극점(turning point)을 단 하나 가지며 그 위치는

$$x = s_0 T \approx 2.82\,T.$$

이다. 또한 $0 < u < s_0$에서 $\mathrm{f}(u) < 0$이고 $u > s_0$에서 $\mathrm{f}(u) > 0$이므로, 이 점 앞에서는 $\mathrm{b}' > 0$이고 뒤에서는 $\mathrm{b}' < 0$이다. 즉 이 점은 극대점이다.

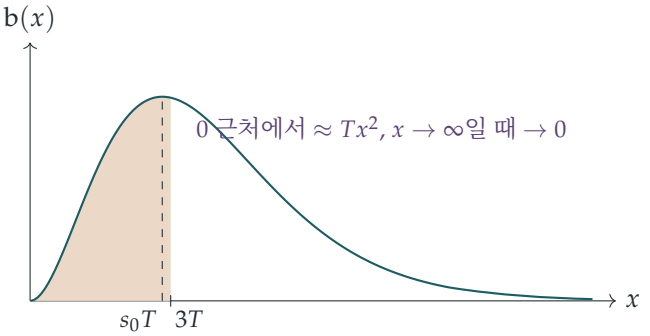
? **생각해 보기** 분자와 분모가 모두 0이 되는 $x = 0$ 근처에서 b는 어떤 모양일까?

x가 작을 때 $\mathrm{e}^{x/T} - 1 \approx x/T$이므로

$$\mathrm{b}(x) \approx \frac{x^3}{x/T} = Tx^2,$$

이고, 그래프는 기울기 0으로 포물선처럼 원점에서 출발한다. (따라서 $\mathrm{b}(0) = 0$으로 두는 것이 자연스럽다.) x가 크면 지수함수가 어떤 거듭제곱보다도 빠르게 커지므로 $\mathrm{b}(x) \approx x^3\mathrm{e}^{-x/T} \to 0$이고, x축이 점근선(asymptote)이 된다. 모든 $x > 0$에 대해 $\mathrm{b}(x) > 0$이므로, 그래프는 원점에서 올라가 $x = s_0T$에서 봉우리 하나를 이룬 뒤 축을 향해 감소한다.

앞 문항을 이용하면 봉우리의 높이는 $\mathrm{b}(s_0T) = T^3s_0^3/(\mathrm{e}^{s_0}-1) \approx 1.42\,T^3$이고, $\mathrm{b}(3T) = 27T^3/(\mathrm{e}^3-1)$은 이보다 아주 약간 작을 뿐이다.



(그림은 $T = 1$로 그렸으며, 색칠한 영역은 마지막 문항에서 사용한다.)

B의 꼴

$x = Tu$로 치환하면 $\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$이고, $T > 0$이므로 적분 구간의 끝 $0, \infty$는 바뀌지 않는다.

$$B = \int_0^\infty \frac{T^3u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,T\,\mathrm{d}u = T^4\int_0^\infty \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.$$

마지막 적분에는 T가 없으므로 이는 상수 K이다(유한하다고 가정해도 된다). 따라서 $B = KT^4$이고 $n = 4$이다.

K 어림하기

같은 치환과 $m = 3$을 쓰면

$$KT^4 = B \approx 2\int_0^{3T} \mathrm{b}(x)\,\mathrm{d}x = 2T^4\int_0^3 \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u, \qquad \text{따라서} \qquad K \approx 2\int_0^3 \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.$$

이다. 이것은 ($T = 1$인) 그림에서 색칠한 넓이의 두 배이다. $\mathrm{e} \approx 2.7$을 써서 그래프의 높이를 읽으면

$$\mathrm{b}(0) = 0, \quad \mathrm{b}(1) \approx \frac{1}{1.7} \approx 0.59, \quad \mathrm{b}(2) \approx \frac{8}{6.29} \approx 1.27, \quad \mathrm{b}(3) \approx \frac{27}{18.7} \approx 1.45.$$

이다. 폭이 1인 띠로 사다리꼴 공식(trapezium rule)을 적용하면

$$\int_0^3 \approx \tfrac{1}{2}(0) + 0.59 + 1.27 + \tfrac{1}{2}(1.45) \approx 2.58,$$

이므로

$$K \approx 5.$$

이다. 더 거친 어림으로, 색칠한 영역을 밑변이 3이고 높이가 약 1.45인 삼각형으로 보면 넓이는 약 2.2이고 $K \approx 4.3$이다. 어느 쪽이든 K는 대략 4에서 5 사이이다. (곡선이 원점과 $(3, \mathrm{b}(3))$을 잇는 직선보다 위에 있으므로, 삼각형 어림은 분명히 실제보다 작다.)

검산

- 수치적 이분법(bisection)으로 구하면 f의 근은 $s_0 \approx 2.8214$이고, $T = 1.7$일 때 b′을 수치적으로 훑어보면 부호가 정확히 한 번, $x \approx 4.797 \approx 1.7 s_0$에서 바뀐다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $T = 0.5, 1, 2.3$에 대해 $B/T^4 \approx 6.4939$로 매번 같은 값이 나오므로 $n = 4$가 확인된다. 이는 알려진 정확한 값 $K = \pi^4/15 \approx 6.494$와 일치한다.
- 적분값은 $\int_0^3 u^3/(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u \approx 2.552$이므로, 문제에서 허용한 근사로는 $K \approx 5.10$이다. 우리가 얻은 어림 5는 거의 맞다. 6.49와의 차이는 문제의 근사 $B \approx 2\int_0^{3T}$에서 오는 오차이지, 우리 계산의 오류가 아니다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}(0) = 0$임을 잊는 것. $s = 0$은 f의 근이지만 $x = 0$에 해당하며, 이는 $0 < x < \infty$ 밖에 있으므로 극점은 여전히 하나뿐이다.
- B에서 변수를 바꾸면서 $\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$에서 나오는 인수 T를 빠뜨려 $n = 3$을 얻는 것.

STEP 너머

함수 b는 흑체 복사(black-body radiation)에 대한 플랑크(Planck) 법칙이며, x는 진동수, T는 온도의 역할을 한다. 봉우리의 위치 $x = s_0 T$는 빈(Wien)의 변위 법칙이고, $B \propto T^4$는 슈테판–볼츠만(Stefan–Boltzmann) 법칙이다. 정확한 값 $K = \pi^4/15$는 $1/(\mathrm{e}^u - 1) = \sum_{k\geq 1} \mathrm{e}^{-ku}$로 전개하여 얻으며, 그러면 $K = 6\sum_{k\geq 1} 1/k^4 = 6\zeta(4)$이다. 이렇게 합과 적분의 순서를 바꾸는 것을 정당화하는 일은 대학 1학년 해석학(analysis)의 전형적인 문제이다. Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

풀이

STEP III 1998, 문제 8

순수수학 • 구의 벡터 기하

STEP III 1998, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q8

핵심 아이디어

여기서는 모든 것이 같은 한 가지 방법으로 귀결된다. "점 $\mathbf{r}$이 구(sphere) 위에 있다"는 조건을 스칼라 방정식 $|\mathbf{r}-\mathbf{c}|^2 = a^2$으로 쓰고, 이를 내적(dot product)으로 전개한 다음 필요한 것을 읽어 내는 것이다. (i)의 직선에 대해서는 이것이 λ에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되고, 교점의 개수는 그 판별식(discriminant)으로 결정된다. (ii)에서는 중심에서 평면까지의 거리가 필요하고, (iii)에서는 두 구의 방정식을 서로 빼면 "수직"이라는 조건이 묻는 바로 그 내적이 나온다.

풀이

소문항 (i)

점 $\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}$이 구 위에 있을 필요충분조건은 $(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m})\cdot(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}) = a^2$이다. 이를 전개하고, $\mathbf{m}$이 단위벡터(unit vector)이므로 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}=1$임을 이용하면

$$\lambda^2 + 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\lambda + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2 = 0.$$

각 실근 λ는 교점 하나를 주고, 서로 다른 λ 값은 서로 다른 점을 준다($\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$이므로). 따라서 교점이 두 개일 필요충분조건은 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 것, 즉 판별식이 양수인 것이다.

$$4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2 - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2) > 0 \iff a^2 > \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2,$$

이것이 구하는 조건이다.

교점이 정확히 하나인 경우는 판별식이 0일 때이다.

$$a^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2.$$

이때 중근은 $\lambda = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{m}$($\lambda$의 계수의 절반에 음의 부호를 붙인 것)이므로, 그 점은

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{m}, \qquad \text{이고} \qquad \mathbf{m}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{m} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}) = 0,$$

이며, 여기서도 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$을 이용하였다. 따라서 접선(tangent line)은 접점으로 향하는 반지름과 수직이며, 이는 당연히 그래야 하는 결과이다.

소문항 (ii)

$\mathbf{n}$에 수직인 평면의 방정식은 상수 k에 대하여 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = k$이고, $\mathbf{n}$이 단위벡터이므로 원점에서 이 평면까지의 거리는 $|k|$이다. $k \geq 0$이 되도록 $\mathbf{n}$의 부호를 정하면(즉 $\mathbf{n}$이 원점에서 평면 쪽을 향하도록 하면) 평면은

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = l.$$

생각해 보기 중심 $\mathbf{d}$는 이 평면에서 얼마나 떨어져 있는가?

$\mathbf{d}$에서 법선(normal) 방향으로 나아가 보자. 점 $\mathbf{d} + \mu\mathbf{n}$이 평면 위에 있을 조건은 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + \mu = l$이므로 $\mu = l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}$이다. 이 점이 $\mathbf{d}$에서 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)이므로, 중심에서 평면까지의 거리는 $|\mu| = |l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}|$이다.

평면이 구에 접할 필요충분조건은 이 거리가 반지름과 같은 것이다(거리가 더 작으면 평면은 구를 원 모양으로 자르고, 더 크면 둘은 만나지 않는다). 따라서 조건은

$$|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l| = a, \qquad \text{즉} \qquad (\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l)^2 = a^2,$$

다시 말해 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = l \pm a$이다. (만약 $\mathbf{n}$이 평면에서 멀어지는 쪽을 향한다면, 평면의 방정식은 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = -l$이고 조건은 $|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + l| = a$가 된다.)

소문항 (iii)

첫 번째 구는 중심이 O이고 두 번째 구는 중심이 D(위치벡터 $\mathbf{d}$)이며, 둘 다 반지름이 a이다. 점 $\mathbf{r}$이 두 구 위에 모두 있을 조건은

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2 \qquad \text{그리고} \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{d})\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = a^2.$$

두 번째 식을 전개하여 첫 번째 식을 빼면 $-2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 0$이므로, 모든 교점은

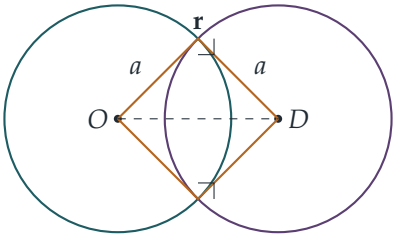
$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}.$$

을 만족한다. 점 $\mathbf{r}$로 향하는 두 반지름은 벡터 $\mathbf{r}$(O에서)와 $\mathbf{r} - \mathbf{d}$(D에서)이다. 두 벡터가 수직일 조건은

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = a^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$$

가 o인 것이다. 우변은 어느 교점을 택했는지에 관계없으므로, $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}=2a^2$이면 모든 교점에서 두 반지름이 수직이며, 이것이 보여야 할 내용이었다. (이 논증은 거꾸로도 성립한다. 공통점 단 하나에서라도 반지름들이 수직이면 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}=2a^2$이다.)

이 경우 두 구는 실제로 만난다. $|\mathbf{d}|=\sqrt{2}\,a$는 0과 $2a$ 사이에 엄격하게 놓이므로, 두 구는 원을 따라 교차한다. O와 D를 지나는 단면을 보면 직각이 드러난다.



평면에서 반지름이 a인 두 원이 공통점에서 수직인 반지름을 가지면 OD는 직각이등변삼각형의 빗변이 되므로 $OD^2=a^2+a^2=2a^2$이다. 피타고라스(Pythagoras) 정리로도 같은 답을 얻는다.

검산

- (i)에서 $\mathbf{b}=\mathbf{0}$으로 두자. 그러면 직선은 중심을 지나고 조건은 $a^2>0$이 되는데, 실제로 그러한 직선은 항상 구와 두 번 만난다.
- (ii)에서 구의 중심이 원점이면($\mathbf{d}=\mathbf{0}$) 조건은 $l=a$가 된다. 즉 평면이 중심에서 거리 a만큼 떨어져 있을 때 구에 접한다.
- 수치적으로, $a=1$이고 $|\mathbf{d}|=1.2$($\sqrt{2}$가 아님)일 때 교점 하나는 $(0.6,0.8,0)$이고 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{d})=1-0.72=0.28\neq 0$이며, 이는 $a^2-\frac{1}{2}\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$와 일치한다. 세 소문항 모두에 대한 무작위 시험에서 결과가 10^{-13} 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}=1$임을 잊어서 λ^2 앞에 불필요한 계수를 계속 달고 다니는 것.
- (ii)의 접할 조건을 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}-l=a$로만 쓰는 것. 중심은 평면의 어느 쪽에나 있을 수 있다.

STEP 너머

값 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2$은 $|\mathbf{b}\times\mathbf{m}|^2$, 즉 원점에서 직선까지 거리의 제곱이고, $\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\mathbf{m}$은 $\mathbf{b}$에서 $\mathbf{m}$ 방향 성분을 제거한 정사영(orthogonal projection)으로, 선형대수학의 핵심에

있는 개념이다. 직각으로 만나는 구들을 서로 직교한다(orthogonal)고 하며, 이들은 반전기하학(inversive geometry)과 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 모형에서 중심적인 역할을 한다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 사영을 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 직교하는 원들이 실제로 활약하는 모습을 보여 준다.

풀이

STEP III 1998, 문제 9

역학 • 관성 모멘트

STEP III 1998, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q9

핵심 아이디어

속이 찬 원뿔(solid cone)은 꼭짓점에서의 거리에 비례하여 반지름이 커지는 얇은 원판들을 쌓아 놓은 것이다. 얇은 원판의 관성 모멘트(moment of inertia)를 (원판의 축에 대해서, 그리고 지름에 대해서) 알고 있다면, 단 하나의 적분으로 조각들을 모두 더할 수 있다. 두 번째 축에 대해서는 수직축 정리(perpendicular axis theorem)(원판의 축에 대한 관성 모멘트를 지름에 대한 관성 모멘트로 바꾸기 위해)와 평행축 정리(parallel axis theorem)(그 축을 꼭짓점까지 옮기기 위해)가 필요하다. 그러면 진동은 복합 진자(compound pendulum)의 운동이 되고, 그 주기를 구하는 데 필요한 것이 바로 꼭짓점에 대한 관성 모멘트이다.

풀이

조각 나누기

꼭짓점을 원점에 두고 원뿔의 축을 z축 방향으로 잡아, 밑면이 평면 $z = h$가 되도록 한다. ρ를 (일정한) 밀도라 하자. 닮은 삼각형에 의해 높이 z에서의 단면은 반지름이

$$r = \frac{az}{h},$$

인 원판이다. 두께가 δz인 조각은 질량이 $\delta m = \rho\pi r^2\,\delta z = \rho\pi\dfrac{a^2z^2}{h^2}\,\delta z$인 얇은 원판이다. 적분하면

$$m = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h, \qquad \text{따라서} \qquad \rho\pi = \frac{3m}{a^2h}.$$

축에 대한 관성 모멘트

질량이 M이고 반지름이 r인 균일한 원판의 축에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{2}Mr^2$이다. (원판을 반지름이 s이고 질량이 $\frac{2Ms}{r^2}\,\delta s$인 고리들로 나누면, 각 고리는 자신의 질량에 s^2을 곱한 만큼 기여하고, $\int_0^r \frac{2M}{r^2}s^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}Mr^2$이다.)

원뿔의 모든 조각은 중심이 축 위에 있으므로, 조각들의 기여를 그냥 더하면 된다.

$$\begin{aligned} I_{\text{axis}} &= \int_0^h \tfrac{1}{2}r^2\,\rho\pi r^2\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\int_0^h z^4\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{3m}{a^2h}\cdot a^4h = \frac{3}{10}ma^2, \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

꼭짓점을 지나는 축에 대한 관성 모멘트

두 정리를 사용한다.

- **수직축 정리.** 한 평면 위에 놓인 얇은 판(lamina)에 대하여, 평면에 수직인 축에 대한 관성 모멘트는 그 축과 같은 점에서 만나고 평면 위에 놓인 서로 수직인 임의의 두 축에 대한 관성 모멘트의 합과 같다.
- **평행축 정리.** 질량이 M인 물체의 질량 중심(centre of mass) G를 지나는 축에 대한 관성 모멘트가 I_G이면, 그 축과 평행하고 거리 d만큼 떨어진 축에 대한 관성 모멘트는 $I_G + Md^2$이다.

얇은 원판에서는 대칭성에 의해 두 지름이 동등하므로, 수직축 정리에 의해 $2I_{\text{diam}} = \frac{1}{2}Mr^2$, 즉 $I_{\text{diam}} = \frac{1}{4}Mr^2$이다.

꼭짓점을 지나고 밑면에 평행한 축 ℓ을 (예를 들어 x축 방향으로) 잡는다. 높이 z에 있는 조각의 질량 중심은 z축 위에 있어 ℓ로부터 거리 z만큼 떨어져 있고, ℓ에 평행한 그 조각의 지름은 이 중심을 지난다. 평행축 정리에 의해 이 조각의 기여는 $\left(\frac{1}{4}r^2 + z^2\right)\delta m$이다. 따라서

$$\begin{aligned} I_{\text{apex}} &= \int_0^h \left(\frac{a^2z^2}{4h^2} + z^2\right)\rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2}+1\right)\frac{h^5}{5} \\ &= \frac{3m}{a^2h}\cdot\frac{a^2h^3}{5}\cdot\frac{a^2+4h^2}{4h^2} = \frac{3m}{20}\left(a^2+4h^2\right). \end{aligned}$$

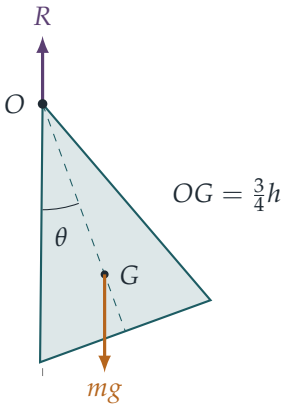
> ? **생각해 보기** 왜 원뿔 전체에 대해 질량 중심에서 옮기는 방식으로 평행축 정리를 한 번에 적용할 수 없을까?

적용할 수는 있지만, 아직 G를 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트를 모른다. 바로 그것을 계산해야 하는 것이다. 조각으로 나누면 이 문제를 피할 수 있는데, 각 원판의 자기 지름에

대한 관성 모멘트는 알려져 있고, 각 원판의 중심은 축 위에서 ℓ로부터 알려진 거리 z에 있기 때문이다. (덤으로 $I_G = I_{\text{apex}} - m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3m}{80}(4a^2 + h^2)$도 얻는다.)

꼭짓점을 중심으로 한 미소 진동

원뿔을 꼭짓점을 지나고 운동 평면에 수직인 매끄러운 수평축을 중심으로 자유롭게 회전할 수 있는 강체(rigid body)로 모형화한다. 이러한 축은 밑면에 평행하므로, 이 축에 대한 관성 모멘트는 I_{apex}이다. θ를 원뿔의 축과 연직 아래 방향 사이의 각이라 하자.



축에서의 반력은 O에 대한 모멘트가 없으므로, 유일한 토크(torque)는 O로부터 거리 $\frac{3}{4}h$인 G에 작용하는 무게에 의한 것이다. 이 힘의 O에 대한 모멘트는 $mg \cdot \frac{3}{4}h\sin\theta$이고, θ를 줄이는 방향으로 작용한다. 축에 대한 모멘트를 취하면

$$I_{\text{apex}}\,\ddot{\theta} = -\tfrac{3}{4}mgh\sin\theta.$$

미소 진동에서는 $\sin\theta \approx \theta$이므로

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{\frac{3}{4}mgh}{\frac{3m}{20}(a^2 + 4h^2)} = \frac{5gh}{4h^2 + a^2}.$$

이것은 주기가

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4h^2 + a^2}{5gh}},$$

인 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이므로 요구된 결과를 얻는다.

검산

- 단위: $\frac{4h^2+a^2}{gh}$의 단위는 $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot \mathrm{m}) = \mathrm{s}^2$으로, 주기의 제곱이 가져야 할 단위와 같다.

- 가는 원뿔 ($a \to 0$): 모든 질량이 축을 따라 놓이고 $\int z^2 \,\mathrm{d}m = \frac{3}{5}mh^2$이므로, $I_{\text{apex}} \to \frac{3}{5}mh^2$과 일치한다. 주기는 $2\pi\sqrt{4h/(5g)}$가 되어 길이가 $\frac{4}{5}h$인 단진자(simple pendulum)의 주기와 같다. 이 길이는 $\frac{3}{4}h$보다 긴데, 질량이 길이 방향으로 퍼져 있는 물체라면 마땅히 그래야 한다.
- 수치적으로, $m = 1$, $a = 0.7$, $h = 2.3$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 조각을 나누어 계산한 결과와 원뿔 안의 점들을 몬테카를로(Monte Carlo) 표본으로 추출하여 계산한 결과가 모두 $I_{\text{axis}} = 0.147$과 $I_{\text{apex}} \approx 3.2475$를 주어 공식과 일치했다. 또 $g = 9.81$로 두고 작은 진폭에서 출발하여 $I\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}mgh\sin\theta$를 단계적으로 수치 계산하면 주기가 2.7525 s로, 공식이 예측한 값과 같았다.

흔한 실수

- 두 번째 부분에서 각 조각에 대해 $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$을 사용하는 것: 밑면에 평행한 축에 대해서는 원판이 자신의 지름을 중심으로 회전하므로, 기여는 $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$이 아니라 $\frac{1}{4}r^2\,\delta m$이다.
- 질량 중심이 아닌 꼭짓점을 기준으로 평행축 정리를 적용하는 것: 이 정리는 두 축 중 하나가 질량 중심을 지날 때에만 성립한다.
- 원뿔을 길이가 $\frac{3}{4}h$인 단진자로 취급하는 것: 주기를 결정하는 것은 G의 위치만이 아니라 관성 모멘트이다.

STEP 너머

한 점을 지나는 임의의 축에 대한 관성 모멘트는 하나의 3×3 대칭 행렬, 즉 관성 텐서(inertia tensor)에 담겨 있다. 수직축 정리와 평행축 정리는 이 텐서가 회전과 평행이동에 따라 어떻게 변하는지를 보여 주는 특수한 경우이다. 이 텐서의 고유벡터(eigenvector)인 주축(principal axes)은 회전하는 물체가 어떤 축에 대해서는 안정적으로 돌고 다른 축에 대해서는 흔들리는 이유를 설명해 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 수준에서 강체의 회전과 복합 진자를 다룬다.

풀이

STEP III 1998, 문제 10

역학 • 비스듬한 충돌

STEP III 1998, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q10

핵심 아이디어

두 질량이 같으면 두 보존 법칙(conservation laws) 모두에서 질량이 소거되어, 깔끔한 벡터 명제 두 개가 남는다. 속도의 **합**이 변하지 않고, **속력의 제곱의 합**이 변하지 않는다는 것이다. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$을 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$과 비교하면 스칼라곱(scalar product) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$만 따로 떼어 낼 수 있고, 이 하나의 양이 문제의 모든 부분을 이끌어 간다. 마지막 부분에서는 두 번째 공의 속도를 알면 운동량(momentum)이 첫 번째 공의 속도를 결정하므로, 에너지 방정식은 미지의 속력 하나에 대한 이차방정식(quadratic)이 되고, 실근을 갖는 이차방정식의 판별식(discriminant)은 음이 아니다.

풀이

두 공을 매끄러운 탁자 위에서 움직이는, 질량이 m으로 같은 매끄러운 구로 모형화한다. 그러면 충돌하는 동안 작용하는 수평 방향의 힘은 두 공이 서로에게 가하는 힘뿐이다.

보존 법칙과 상대 속력

운동량과 운동 에너지(kinetic energy)로부터

$$m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2=m\mathbf{v}_1'+m\mathbf{v}_2',$$
$$\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2=\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1'|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2'|^2,$$

즉

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2' \quad (1), \qquad |\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2 \quad (2).$$

를 얻는다. (1)의 각 변을 자기 자신과 스칼라곱하면

$$|\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2+2\,\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2+2\,\mathbf{v}_1'\cdot\mathbf{v}_2'.$$

이다. 여기서 (2)를 빼면

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'. \qquad (3)$$

이 남는다. 이제 상대 속력(relative speed)의 제곱은

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 - 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,$$

이고, (2)와 (3)에 의해 우변의 각 항은 충돌 후에도 충돌 전과 같다. 따라서 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|^2$이고, 속력은 음이 아니므로 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|$이다. 즉 상대 속력은 보존된다.

처음에 한 공이 정지해 있는 경우

$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$이라 하자. 그러면 (3)에서

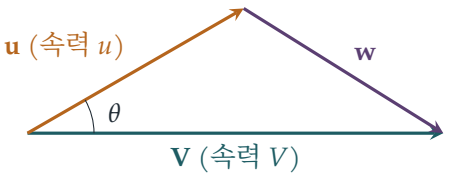
$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} = 0.$$

을 얻는다. 충돌 후 두 공이 모두 움직이므로 $\mathbf{v}_1' \neq \mathbf{0}$이고 $\mathbf{v}_2' \neq \mathbf{0}$이다. 따라서 스칼라곱이 0이라는 것은 두 나중 속도가 서로 수직이라는 뜻이다. (이 조건이 없으면 한 속도가 영벡터라서 스칼라곱이 0이 될 수도 있다. 정면충돌에서 두 공이 단순히 속도를 맞바꾸는 경우가 그렇다.)

에너지를 잃는 충돌

이제 (1)은 여전히 성립하지만 (2)는 성립하지 않는다. 정지해 있는 공을 A, 움직이는 공을 B라 하자. B는 속도 $\mathbf{V}$ ($|\mathbf{V}| = V$)로 출발하여, $\mathbf{V}$와 각 θ를 이루는 속력 u의 속도 $\mathbf{u}$로 끝난다고 하자. A의 나중 속도를 $\mathbf{w}$라 하자.

운동량으로부터 $\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$이므로, 세 속도는 삼각형을 이룬다.



따라서 $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$이고, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{u} = Vu\cos\theta$이므로

$$|\mathbf{w}|^2 = V^2 - 2Vu\cos\theta + u^2$$

이다(삼각형에서의 코사인 법칙(cosine rule)). 나중 운동 에너지는 처음 운동 에너지의 $1-k$배이다. $\frac{1}{2}m$을 소거하면

$$u^2 + |\mathbf{w}|^2 = (1-k)V^2 \quad \Longrightarrow \quad 2u^2 - 2Vu\cos\theta + V^2 = (1-k)V^2,$$

이므로, 두 번째 공의 나중 속력 u는

$$\boxed{2u^2 - 2Vu\cos\theta + kV^2 = 0.}$$

을 만족한다.

> **생각해 보기** 문제는 $k \le \frac{1}{2}$임을 보이라고만 한다. 가진 것이 등식뿐일 때, 부등식(inequality)은 어디서 나오는가?

속력 u는 실제로 나타나는 실수이므로, u에 대한 이 이차방정식은 실근을 **갖는다**. 따라서 판별식은 음이 아니어야 한다.

$$4V^2\cos^2\theta - 8kV^2 \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad k \le \tfrac{1}{2}\cos^2\theta \le \tfrac{1}{2},$$

여기서 $8V^2 > 0$으로 나누었고(두 번째 공은 움직이고 있다), $\cos^2\theta \le 1$을 이용했다. 따라서 요구한 대로 $k \le \frac{1}{2}$이다.

등호가 성립하려면 $\cos^2\theta = 1$이고 중근 $u = \frac{1}{2}V\cos\theta$를 가져야 한다. $u \ge 0$이므로 이는 $\theta = 0$이고 $u = \frac{1}{2}V$라는 뜻이며, 이때 $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{V}$이기도 하다. 즉 두 공이 절반의 속력으로 함께 움직여 나가는데, 이것이 완전 비탄성(perfectly inelastic) 정면충돌이다. 잃을 수 있는 운동 에너지는 최대 절반이다.

검산

- $k = 0$이면 $2u^2 = 2Vu\cos\theta$이므로 $u = V\cos\theta$ (또는 $u = 0$)이다. 그러면 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{V}-\mathbf{u}) = Vu\cos\theta - u^2 = 0$이므로 $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$는 $\mathbf{u}$에 수직이다. 이는 두 번째 부분의 결과와 일치한다.
- 반발 계수(coefficient of restitution)가 e인 정면충돌에서는 $k = \frac{1}{2}(1-e^2)$이고, 이 값은 0과 $\frac{1}{2}$ 사이에 있다. $e = 0.3$이면 $k = 0.455$이다.
- 수치적으로, 질량이 같은 매끄러운 구의 무작위 탄성 충돌(elastic collision)을 10^5번 시뮬레이션하였다. 운동량, 운동 에너지, $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$, 상대 속력이 모두 10^{-13} 이내에서 일치하였다. 에너지를 잃는 무작위 결과 2×10^5개에서 이차방정식은 10^{-14} 이내에서 성립하였고, 찾은 가장 큰 k는 0.49999였다.

흔한 실수

- "상대 속력"을 $\big||\mathbf{v}_1| - |\mathbf{v}_2|\big|$로 생각하는 것. 상대 속력은 상대 **속도**의 크기 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$이다.
- 두 번째 부분에서 두 공이 모두 움직인다는 사실을 쓰는 것을 잊는 것. 스칼라곱이 0이라는 것은 어느 벡터도 영벡터가 아닐 때에만 수직을 뜻한다.

- 마지막 부분에서 (2)나 (3)을 다시 쓰는 것. 이 식들은 운동 에너지 보존에서 나왔는데, 이제는 운동 에너지가 보존되지 않는다. 남는 것은 운동량 보존뿐이다.

STEP 너머

스칼라곱을 이용한 논증은 표준적인 기법을 좌표계에 의존하지 않게 바꾼 것이다. 영운동량 좌표계(zero-momentum frame)에서 탄성 충돌은 두 속도의 크기를 유지한 채 단순히 회전시킬 뿐이다. 최대 손실 $\frac{1}{2}$은 질량중심(centre of mass)에 대한 상대적인 운동 에너지만 잃을 수 있다는 일반적인 사실에서 나오며, 여기서는 그 값이 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mV^2$이다. 이러한 생각은 산란 이론(scattering theory)과 특수 상대성 이론(special relativity)에서의 충돌로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심 좌표계에서의 충돌을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1998, 문제 11

역학 • 큰 진폭의 진자

> **STEP III 1998, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.3 절 **실제 진자**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/real-pendulum.html

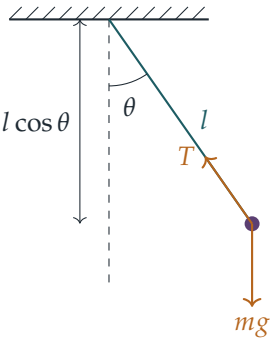
핵심 아이디어

에너지 보존(energy conservation)을 이용하면 모든 각도에서의 각속도(angular speed)를 구할 수 있고, 주기(period)는 4분의 1 진동에 걸리는 시간의 네 배, 곧 $\int \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\theta/\dot{\theta}$의 네 배이다. 반각 공식(half-angle identity) $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$를 쓰면 에너지 방정식이 피적분함수(integrand)의 꼴로 바뀐다. 제시된 치환(substitution)은 $\theta = \gamma$에서 생기는 성가신 무한대를 없애고, x가 작은 $(1-x)^{-1/2}$ 꼴의 피적분함수를 남긴다. 이것이 바로 이항 전개(binomial expansion)가 쓰이는 상황이다.

풀이

에너지 방정식

진자(pendulum)를 길이가 l이고 가벼우며 늘어나지 않는 줄에 매달린 질량 m인 입자로 모형화하고, 공기 저항 없이 연직 평면에서 흔들린다고 하자. θ는 연직 아래 방향으로부터 잰다.



추는 매달린 점보다 $l\cos\theta$만큼 아래에 있다. 장력(tension)은 줄을 따라 작용하여 추의 속도(호를 따르는 방향)에 수직이므로 일을 하지 않는다. 일을 하는 것은 중력뿐이므로 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다. 추의 속력은 $l\dot{\theta}$이다.

가장 큰 각도 $\theta = \gamma$에서 추는 순간적으로 정지한다. 그 지점에서 일반적인 각도 θ까지 추는 높이 $l\cos\theta - l\cos\gamma$만큼 내려오므로

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = mgl(\cos\theta - \cos\gamma) \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g(\cos\theta - \cos\gamma),$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다.

주기

두 코사인에 모두 $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$를 적용하면

$$\cos\theta - \cos\gamma = 2\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big),$$

이므로 에너지 방정식은

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{4g}{l}\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big).$$

이 된다. 대칭성(운동은 가역적이고, 에너지 방정식은 $\theta \mapsto -\theta$에 대해 변하지 않는다)에 의해 네 번의 4분의 1 진동 $0 \to \gamma \to 0 \to -\gamma \to 0$에 걸리는 시간은 모두 같다. $\theta = 0$에서 $\theta = \gamma$까지의 4분의 1 진동 동안 θ는 증가하므로 양의 제곱근을 택한다.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big)^{-1/2}.$$

0부터 γ까지 적분하고 4를 곱하면

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big)^{-1/2}\,\mathrm{d}\theta,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (피적분함수는 추가 정지해 있는 $\theta = \gamma$에서 무한대로 발산하지만 적분은 수렴(converge)한다. 아래의 치환이 이를 명시적으로 보여 준다.)

작은 진폭 근사

$k = \sin(\gamma/2)$라 하고, $0 < \gamma < \pi$이므로 $0 < k < 1$이다. 이제 $\sin(\theta/2) = k\sin\phi$로 놓자. θ가 0부터 γ까지 변할 때 $\sin\phi$는 0부터 1까지 변하므로 ϕ는 0부터 $\pi/2$까지 변한다. 미분하면

$$\tfrac{1}{2}\cos(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi.$$

$0 \le \theta/2 < \pi/2$이고 $0 \le \phi \le \pi/2$이므로 두 코사인 모두 음이 아니다. 따라서

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}, \qquad \left(k^2 - k^2\sin^2\phi\right)^{1/2} = k\cos\phi.$$

> **생각해 보기** 이 치환을 하면 골칫거리인 인수 $(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2))^{-1/2}$는 어떻게 되는가?

이 인수는 $1/(k\cos\phi)$가 되고, $\mathrm{d}\theta$에 들어 있는 $k\cos\phi$가 이를 정확히 상쇄한다.

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(k^2 - \sin^2(\theta/2)\right)^{1/2}} = \frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} = \frac{2\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}.$$

따라서

$$P = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1 - k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\mathrm{d}\phi,$$

이며, 이 적분의 피적분함수는 전혀 문제가 없다. (여기까지는 정확한 식이다.)

γ가 작을 때 $x = k^2\sin^2\phi$는 $0 \le x \le k^2$를 만족하여 작으므로, 이항 전개 $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$에 의해

$$\left(1 - k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}k^2\sin^2\phi,$$

이고, 오차는 k^4 차수이다. $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{4}$이므로

$$P \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right).$$

마지막으로, γ가 작을 때 $k = \sin(\gamma/2) \approx \gamma/2$(오차는 γ^3 차수)이므로 γ^4 차수의 항을 무시하면 $k^2 \approx \gamma^2/4$이고,

$$P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\gamma^2}{16}\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 주된 항은 익숙한 작은 진동의 주기이고, 보정항은 크게 흔들릴수록 시간이 조금 더 걸린다는 것을 말해 준다.

검산

- $\gamma \to 0$이면 선형화(linearised)된 방정식 $\ddot{\theta} = -(g/l)\theta$에서 얻는 주기 $2\pi\sqrt{l/g}$를 다시 얻는다.
- 차원(dimensions): $\sqrt{l/g}$는 시간이고, γ는 차원이 없다.
- 수치적으로, $l/g = 1.7/9.81$이고 $\gamma = 0.5$일 때 방정식 $\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta$를 정밀한 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 풀면 $P = 2.65705$를 얻는데, 이는 정확한 ϕ-적분과 표시된 모든 자릿수까지 일치한다. 근사식은 2.65646을 주며, 상대 오차는 약 2×10^{-4}이다. 이 오차는 γ^4에 비례하므로(약 $0.0036\gamma^4$), γ^2 항이 옳다는 것이 확인된다.

흔한 실수

- 인수 4를 빠뜨리는 것: 0부터 γ까지의 적분은 주기의 4분의 1일 뿐이다.
- 전개하기 전에 치환 과정에서 $\cos(\theta/2) \approx 1$을 쓰는 것. 이렇게 하면 구하려는 보정항과 같은 차수인 $k^2\sin^2\phi$ 항이 버려진다. 이항 전개 단계까지 $\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}$를 정확히 유지해야 한다.
- $k = \sin(\gamma/2)$를 $\gamma/2$로 바꾸지 않고 $1 + k^2/4$에서 멈추는 것.

STEP 너머

정확한 적분 $\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\phi$는 **제1종 완전 타원 적분**(*complete elliptic integral of the first kind*) $K(k)$이므로, 정확한 주기는 $4\sqrt{l/g}\,K(\sin(\gamma/2))$이다. 이항 급수를 계속 전개하면 $1 + \frac{1}{16}\gamma^2 + \frac{11}{3072}\gamma^4 + \cdots$를 얻으며, 가우스(Gauss)는 산술–기하 평균(arithmetic–geometric mean)을 이용하면 K를 놀라울 만큼 빠르게 계산할 수 있음을 발견했다. 주기가 진폭(amplitude)에 따라 달라진다는 사실은 비선형 진동(nonlinear oscillation)의 가장 간단한 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진자와 진동을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 1998, 문제 12

확률과 통계 • 네트워크 신뢰도

> **STEP III 1998, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q12

핵심 아이디어

도로는 여섯 개뿐이므로 열린 도로와 막힌 도로의 패턴은 $2^6 = 64$가지뿐이다. 가장 깔끔한 방법은 **나쁜** 패턴, 즉 마을들이 서로 오갈 수 없는 무리로 나뉘는 패턴을 세는 것이다. 나쁜 패턴을 열려 있는 도로의 개수에 따라 분류하면 계산이 매우 짧아진다. 마을 네 개에 열린 도로가 네 개 이상인 연결망은 결코 끊어질 수 없기 때문이다.

시작하기 전에 주의할 점이 있다. 시험지에 인쇄된 공식에는 괄호 앞에 p^2이 있지만, 올바른 인수는 p^3이다. 인쇄된 식이 옳을 수 없다는 것은 검산에서 보인다. 여기서는 다음과 같이 고친 결과를 증명(proof)한다.

$$P = 1 - p^3(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4).$$

풀이

주어진 도로가 열려 있을 확률(probability)을 $q = 1 - p$라 하자. 도로들은 서로 독립(independent)이므로, k개의 도로가 열리고 $6 - k$개가 막힌 특정한 패턴 하나의 확률은 $q^k p^{6-k}$이다. 연결망이 **끊어진**(disconnected) 사건, 즉 어떤 마을에서 다른 어떤 마을로 갈 수 없는 사건을 D라 하자. 그러면 $P = 1 - \mathbb{P}(D)$이고, $\mathbb{P}(D)$는 끊어진 모든 패턴에 대한 $q^k p^{6-k}$의 합이다. 이 패턴들을 열린 도로의 개수 k에 따라 센다.

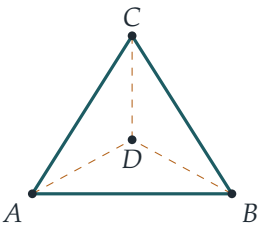
열린 도로가 네 개 이상: 결코 끊어지지 않는다. 연결망이 끊어져 있으면 마을들은 적어도 두 무리로 나뉘고, 서로 다른 무리 사이에는 열린 도로가 없다. 가능한 분할은 $1 + 3$(외딴 마을 하나와 나머지 세 마을)과 $2 + 2$뿐이다. 열린 도로는 모두 무리 안에 있다. $1 + 3$ 분할에서 세 마을 무리 안의 도로는 3개뿐이고, $2 + 2$ 분할에서는 각 쌍 안에 도로가 1개씩이므로 모두 2개뿐이다. 어느 경우든 열린 도로는 많아야 3개이다. 따라서 열린 도로가 $k \geq 4$개인

패턴은 모두 연결되어 있다.

열린 도로가 정확히 세 개.

생각해 보기 열린 도로가 세 개일 때, 어떤 패턴이 네 마을을 모두 연결하지 못하는가?

위의 논증에 따르면, 열린 도로가 세 개인 끊어진 패턴은 세 마을 무리 사이의 도로 세 개가 모두 열린 $1+3$ 분할이어야 한다. 즉 **삼각형**(triangle)이 이루어지고 네 번째 마을은 고립된다. 고립되는 마을을 고르는 방법이 4가지이므로 이러한 패턴은 4개이다. (나머지 $\binom{6}{3}-4=16$개의 패턴은 사면체의 생성나무(spanning tree)이며, 모두 연결되어 있다.)



열린 도로 AB, BC, CA (실선);
D로 가는 막힌 도로 (점선):
D가 고립된다

열린 도로가 두 개 이하: 항상 끊어진다. 네 마을을 잇려면 도로가 적어도 세 개 필요하다(도로 하나는 A에서 이미 갈 수 있는 무리에 새 마을을 많아야 하나 붙일 수 있다). 따라서 열린 도로가 두 개인 $\binom{6}{2}=15$개의 패턴, 한 개인 6개의 패턴, 하나도 없는 1개의 패턴은 모두 끊어져 있다.

모두 더하기. 따라서

$$\mathbb{P}(D)=4p^3q^3+15p^4q^2+6p^5q+p^6=p^3\left(4q^3+15pq^2+6p^2q+p^3\right).$$

이제 $q=1-p$를 대입하여 괄호를 전개한다.

$$\begin{aligned}4(1-p)^3&=4-12p+12p^2-4p^3,\\15p(1-p)^2&=15p-30p^2+15p^3,\\6p^2(1-p)&=6p^2-6p^3,\\p^3&=p^3.\end{aligned}$$

더하면 상수항은 4이고, p항은 $-12p+15p=3p$, p^2항은 $12-30+6=-12$, p^3항은 $-4+15-6+1=6$이다. 따라서

$$\mathbb{P}(D)=p^3\left(6p^3-12p^2+3p+4\right),\qquad \text{그러므로}\qquad P=1-p^3\left(6p^3-12p^2+3p+4\right).$$

검산

- $p = 0$(어떤 도로도 막히지 않음)이면 $P = 1$이고, $p = 1$이면 $P = 1 - (6 - 12 + 3 + 4) = 0$이다. 둘 다 맞지만, p^2 식에서도 둘 다 성립하므로 이것만으로는 두 식을 구별할 수 없다.
- 작은 p로 두 식을 구별할 수 있다. 연결망이 끊어지려면 막힌 도로가 적어도 세 개(예를 들어 한 마을에 닿는 세 도로) 필요하므로, p가 작을 때 $\mathbb{P}(D)$는 약 $4p^3$이어야 한다. 우리 공식은 $\mathbb{P}(D) \approx 4p^3$을 주지만, 인쇄된 공식은 $4p^2$을 주게 되므로 불가능하다.
- $p = \frac{1}{3}$일 때 우리 공식은 $P = 1 - \frac{1}{27} \cdot \frac{105}{27} = \frac{208}{243} \approx 0.856$을 준다. p의 값 21개에서 64개 패턴을 모두 컴퓨터로 열거한 결과는 p^3 공식과 정확히 일치하며, $p = 0.4$에서 눈 내림을 200 000번 모의실험(simulation)한 결과는 공식의 값 0.7655에 대해 0.767이었다.

흔한 실수

- 고립된 마을이 있는 경우만 세고 $2 + 2$ 분할을 확인하지 않는 것. 여기서는 $2 + 2$ 분할이 새로운 것을 더하지 않는다. $2 + 2$ 분할에서는 열린 도로가 많아야 두 개이므로 그러한 패턴은 이미 "두 개 이하" 경우에 포함되어 있다. 그래도 이 사실은 밝혀야 한다.
- "A가 고립된다"와 "B가 고립된다"처럼 겹치는 사건들의 확률을 겹치는 부분을 보정하지 않고 더하는 것. 패턴 전체를 세면 중복해서 세는 일을 피할 수 있다.
- 인쇄된 p^2을 믿고 계산을 억지로 끼워 맞추는 것. 정직하게 계산한 결과가 "보여라" 문제와 맞지 않으면 특수한 경우를 시험해 보라.

STEP 너머

이것은 **연결망 신뢰도**(network reliability)의 작은 예이다. 그래프(graph)의 각 변이 독립적으로 끊어질 때, 남은 그래프가 연결되어 있을 확률을 구하는 것이다. 답은 항상 p에 대한 다항식이며, 그 계수는 연결된 생성 부분그래프(connected spanning subgraph)의 개수를 센다(여기서는 열린 도로가 6, 5, 4, 3개일 때 1, 6, 15, 16). 큰 그래프에서는 이를 구하는 것이 계산적으로 어렵고, 터트 다항식(Tutte polynomial) 및 스며들기 이론(percolation theory)과 밀접하게 관련되어 있다. 확률 쪽의 기초를 다지려면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 좋고, Bollobás의 *Modern Graph Theory*(현대 그래프 이론)는 무작위 그래프와 터트 다항식을 다룬다.

풀이

STEP III 1998, 문제 13

확률과 통계 • 최대가능도 추정

STEP III 1998, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q13

핵심 아이디어

여기서 미지수는 n이고, n은 정수이므로 미적분(calculus)은 쓸모가 없다. n에 대해 미분할 수 없기 때문이다. 수열(sequence)을 최대로 만드는 표준적인 도구는 이웃한 두 항의 비(*ratio*)를 살펴보는 것이다. 비가 1보다 큰 동안 수열은 증가하고, 비가 1보다 작아지면 감소한다. 그리고 동률(두 개의 최대가능도 추정량(maximum likelihood estimate, MLE))은 어떤 지점에서 비가 정확히 1과 같을 때에만 생긴다.

풀이

공정한 동전을 n번 던질 때 나오는 앞면의 개수는 이항분포(binomial distribution)를 따르므로

$$\mathrm{P}(k\text{회 앞면}, n\text{회 던짐}) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}, \qquad n \geq k,$$

이고, $n < k$이면 확률은 0이다. 앞으로 계속 $k \geq 1$이라 하자(친구는 앞면을 적어도 한 번 보았다). 따라서 후보는 $n \geq k$뿐이다.

공정한 동전에 대한 일반적인 계산

$n \geq k$에 대하여 $L(n) = \binom{n}{k}2^{-n}$이라 쓰고, 이를 k를 고정한 n의 함수로 생각한다. $n \geq k$일 때

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{1}{2},$$

이다. 여기서 $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}$를 이용하였다. $n+1-k > 0$이므로 부등호 방향을 바꾸지 않고 분모를 없앨 수 있다.

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \geq 1 \iff n+1 \geq 2(n+1-k) \iff n \leq 2k-1,$$

그리고 등호는 정확히 $n = 2k-1$일 때 성립한다. 따라서

$$L(k) < L(k+1) < \cdots < L(2k-1) = L(2k) > L(2k+1) > L(2k+2) > \cdots.$$

생각해 보기 비를 보면 최댓값이 어디에 있는지 어떻게 알 수 있는가?

$n < 2k-1$이면 비가 1보다 크므로 각 항이 바로 앞의 항보다 크다. 즉 수열은 $n = 2k-1$까지 순증가한다. $n = 2k-1$에서 비는 정확히 1이므로 $L(2k) = L(2k-1)$이다. $n > 2k-1$이면 비가 1보다 작으므로 그 이후로 수열은 순감소한다. 그러므로 최댓값은 정확히 두 개의 n 값에서 얻어진다.

앞면이 한 번

$k = 1$이면 두 MLE는 $n = 2k-1 = 1$과 $n = 2k = 2$이다. 직접 계산하면

$$L(1) = \tfrac{1}{2}, \quad L(2) = 2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}, \quad L(3) = 3 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8},$$

이고, 위의 논증은 $n = 2$ 이후로 $L(n)$이 계속 감소함을 보여 준다. 따라서 요구한 대로 MLE는 1과 2, 두 개이다.

앞면이 k번

일반적인 계산에 의해, 던진 횟수의 두 MLE는

$$n = 2k-1 \quad 과 \quad n = 2k.$$

이다.

편향된 동전

이제 $0 < p < 1, q = 1-p$라 하면

$$L(n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad n \geq k.$$

이다. $n \geq k$일 때 인수 p^k는 약분되고 인수 q가 하나 더 생긴다.

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{(n+1)q}{n+1-k}.$$

이번에도 $n+1-k>0$이므로

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \gtreqless 1 \iff (n+1)(1-p) \gtreqless n+1-k \iff k \gtreqless (n+1)p \iff n+1 \lesseqgtr \frac{k}{p}.$$

이다. 따라서 L은 $n+1<k/p$인 동안 증가하고, $n+1=k/p$일 때 같은 값을 유지하며, $n+1>k/p$가 되면 감소한다. $p<1$이므로 $k/p>k$이고, 따라서 전환점은 범위 $n\geq k$ 안에 있다는 점에 주목하자.

- k/p가 정수가 **아니면** $m=\lfloor k/p\rfloor$라 하자. 그러면 $n+1<k/p$는 정확히 $n+1\leq m$일 때 성립하므로 $L(k)<\cdots<L(m)$이고, $L(m+1)<L(m)$이며 그 뒤로도 계속 감소한다. MLE는 하나뿐이며
$$n=\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor.$$
이다.
- $k/p=N$이 정수이면 L은 $L(N-1)$까지 증가하고, $L(N)=L(N-1)$이며, 그 뒤로 감소한다. MLE는 두 개이며
$$n=\frac{k}{p}-1 \quad \text{과} \quad n=\frac{k}{p}.$$
이다. 둘 다 k 이상이다. N은 $N>k$인 정수이므로 $N-1\geq k$이기 때문이다.

따라서 MLE가 유일할 **필요충분조건은 k/p가 정수가 아닌 것이다**. 공정한 동전에서는 $k/p=2k$가 항상 정수이므로, 앞의 소문항들에서 언제나 두 MLE $2k-1$과 $2k$가 나온 것이다.

검산

- 답이 타당하다. 앞면이 k번 나왔고 앞면이 나올 확률이 p라면 대략 k/p번 던졌으리라 예상할 수 있는데, MLE는 k/p를 내림한 값이다(정수일 때는 양옆의 동률).
- $p=\frac{1}{3}, k=1$이라 하면 $k/p=3$이다. 이때 $L(2)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$이고 $L(3)=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$로 동률이며, $L(4)=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}=\frac{32}{81}<\frac{4}{9}$이다.
- 컴퓨터로 분수를 이용해 $L(n)$을 정확히 계산하여, 공정한 동전에 대해 $k=1,\ldots,39$인 경우(항상 $\{2k-1,2k\}$)와, p가 분모 12 이하인 분수이고 $k\leq 14$인 924개의 쌍 (p,k)에 대해 최대가 되는 값을 구하였다. 모든 경우가 위의 규칙과 일치하였다.

흔한 실수

- n에 대해 미분하는 것. 여기서 n은 정수이고, 추가적인 도구 없이는 $\binom{n}{k}$가 다른 n 값에 대해 정의되지 않는다. 비를 살펴보는 방법이 올바른 도구이다.

- 부등식의 방향을 거꾸로 잡거나, 비가 1과 같아지는 경우가 두 번째 MLE를 만든다는 사실을 잊는 것.
- 모든 경우에 $\lfloor k/p \rfloor$라고 답하여, k/p가 정수일 때의 동률을 놓치는 것.

STEP 너머

최대가능도(maximum likelihood)는 통계학에서 추정(estimation)의 핵심 방법이다. 관측된 자료가 나올 확률을 가장 크게 만드는 모수(parameter) 값을 고르는 것이다. 보통 모수는 연속적이며, 로그가능도(log-likelihood)를 미적분으로 최대화한다. n과 같은 정수를 추정하는 문제("시행 횟수" 문제)는 이 방법이 통하지 않는 고전적인 예이며, 이 문제는 MLE가 유일하지조차 않을 수 있음을 보여 준다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 이항분포를 잘 다루고 있으며, Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률: 입문)은 배경이 되는 확률론을 다룬다.

풀이

STEP III 1998, 문제 14

확률과 통계 • 불편추정량

> **STEP III 1998, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q14

이 문제는 *Beyond STEP*의 13.3 절 **독일 전차 문제**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch13/german-tanks.html

핵심 아이디어

Z_2는 독립(independent)인 조각들의 합이므로, 그 평균(mean)과 분산(variance)은 균등(uniform) 확률변수 하나의 평균과 분산에서 곧바로 나온다. Z_1은 최댓값(maximum)에 의존하는데, 최댓값을 다루는 자연스러운 방법은 분포함수(distribution function)를 이용하는 것이다. X_i 가운데 가장 큰 값이 m 이하인 것은 **모든** X_i가 m 이하일 때와 정확히 같다. 이것은 확률의 곱으로 바뀌고, 이를 미분하면 밀도(density)를 얻는다.

풀이

Z_2의 평균

각 X_i는 $[0, N]$에서 밀도 $1/N$을 가지므로

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{N}{2}, \qquad \mathrm{E}(X_i^2) = \frac{1}{N}\int_0^N x^2\,\mathrm{d}x = \frac{N^2}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X_i) = \frac{N^2}{3} - \frac{N^2}{4} = \frac{N^2}{12}.$$

기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해

$$\mathrm{E}(Z_2) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{N}{2} = N.$$

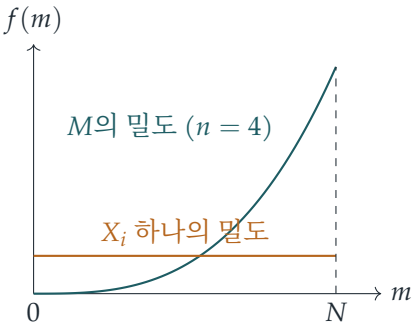
최댓값의 분포

$M = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$이라 하자. $0 \le m \le N$일 때, 사건 $M \le m$은 모든 i에 대하여 $X_i \le m$일 때 정확히 일어나고, X_i들은 독립이므로

$$\mathrm{P}(M \le m) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \le m) = \left(\frac{m}{N}\right)^n.$$

이를 미분하면 M의 밀도는

$$f(m) = \frac{n\,m^{n-1}}{N^n}, \qquad 0 \le m \le N.$$



최댓값은 N 근처에 몰려 있으며, 그래서 불편(unbiased) 추정량이 되는 데 작은 보정 인수만 있으면 된다. 그 적률(moment)은 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(M) = \int_0^N m \cdot \frac{n\,m^{n-1}}{N^n}\,\mathrm{d}m = \frac{n}{N^n} \cdot \frac{N^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}N,$$
$$\mathrm{E}(M^2) = \int_0^N m^2 \cdot \frac{n\,m^{n-1}}{N^n}\,\mathrm{d}m = \frac{n}{n+2}N^2.$$

Z_1의 평균

$$\mathrm{E}(Z_1) = \frac{n+1}{n}\,\mathrm{E}(M) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}N = N.$$

따라서 요구한 대로 두 추정량(estimator)의 평균은 모두 N이다.

분산

Z_1에 대해서는 먼저

$$\mathrm{Var}(M) = \frac{n}{n+2}N^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}N^2 = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+2)(n+1)^2}N^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}N^2,$$

인데, $(n+1)^2 - n(n+2) = 1$이기 때문이다. 여기에 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$을 곱하면

$$\boxed{\mathrm{Var}(Z_1) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}N^2 = \frac{N^2}{n(n+2)}.}$$

Z_2에 대해서는 X_i들이 독립이므로 분산이 더해진다.

$$\boxed{\operatorname{Var}(Z_2) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(X_i) = \frac{4}{n^2}\cdot n\cdot\frac{N^2}{12} = \frac{N^2}{3n}.}$$

? **생각해 보기** 어느 쪽이 더 작은가? 그리고 항상 같은 쪽이 더 작은가?

두 분산의 비는

$$\frac{\operatorname{Var}(Z_1)}{\operatorname{Var}(Z_2)} = \frac{3n}{n(n+2)} = \frac{3}{n+2}.$$

이 값은 $n = 1$일 때 1이고(이때 $Z_1 = Z_2 = 2X_1$이므로 두 추정량은 실제로 같다), $n \geq 2$인 모든 경우에 1보다 작다.

어느 쪽을 택할 것인가

둘 다 불편추정량이므로 퍼진 정도를 비교한다. 우리는 Z_1을 택한다.

- $n \geq 2$이면 Z_1의 분산이 순(strictly) 더 작고, 그 이점은 n이 커질수록 커진다. $\operatorname{Var}(Z_1)$은 $1/n^2$처럼 줄어들지만 $\operatorname{Var}(Z_2)$는 $1/n$처럼만 줄어든다. 예를 들어 $n = 10$이면 Z_1의 표준편차(standard deviation)는 약 $0.09N$인 반면 Z_2의 표준편차는 약 $0.18N$이다.
- Z_1은 항상 관측된 가장 큰 식별 번호 이상인데, N 역시 반드시 그래야 한다. 반면 Z_2는 실제로 관측한 번호보다 작게 나올 수 있어서(예를 들어 관측값이 $1, 2, 30$이면 $Z_2 = 22$이다), 불가능하다고 이미 알고 있는 추정값을 줄 수 있다.

검산

- $n = 1$일 때 두 공식은 모두 $N^2/3$을 준다. $Z_1 = Z_2 = 2X_1$이고 $\operatorname{Var}(2X_1) = 4\cdot N^2/12$이므로 당연히 그래야 한다.
- $N = 10$으로 200 000번 시행한 모의실험(simulation)에서 두 추정량 모두 표본평균이 10과 0.01 이내로 차이 났고, $n = 4$일 때 표본분산은 4.16과 8.33으로, 이론값 $\frac{100}{24} \approx 4.17$과 $\frac{100}{12} \approx 8.33$과 일치했다.

흔한 실수

- 최댓값의 밀도를 직접 다루려고 하는 것. 먼저 $\mathrm{P}(M \leq m)$을 거쳐야 한다. 독립성 덕분에 이것은 간단한 곱이 된다.
- 상수를 제곱하는 것을 잊는 것. $\operatorname{Var}(cY) = c^2\operatorname{Var}(Y)$이므로 곱하는 인수는 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$과 $\frac{4}{n^2}$이다.

STEP 너머

이것은 고전적인 "독일 전차 문제(German tank problem)"로, 제2차 세계대전 때 연합군의 통계학자들이 일련번호로부터 독일 전차 생산량을 추정하는 데 사용했으며, 그 정확도는 놀라울 정도였다. 여기서 최댓값은 **충분통계량**(*sufficient statistic*)이다. 즉 최댓값을 알고 나면 표본의 나머지는 N에 대해 더 이상 아무것도 알려 주지 않는다. 그러면 레만–셰페 정리(Lehmann–Scheffé theorem)에 의해 Z_1이 모든 불편추정량 가운데 분산이 가장 작다는 것이 밝혀진다. 충분성과 효율적인 추정량은 대학 1학년 통계학에서 다룬다. 순서통계량(order statistics)을 공부하기 시작하기에는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)가 좋다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1998년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

