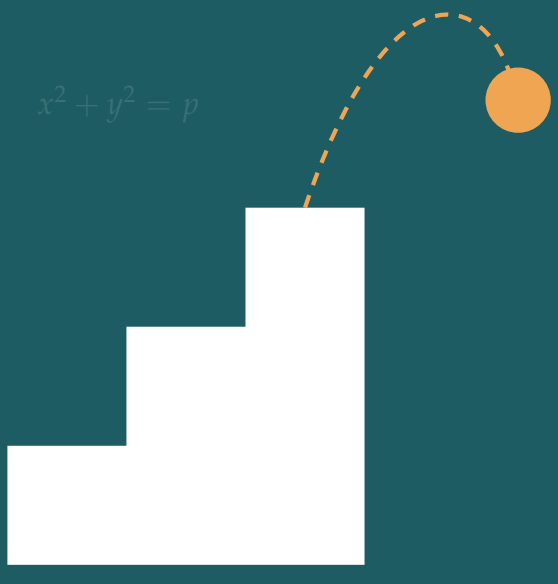
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1997년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1997년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1997년 풀이

1997년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 동전 조합의 개수 세기 순수수학 3

Q2 역삼각함수의 도함수 순수수학 6

Q3 거듭제곱과 일의 자리 숫자 순수수학 10

Q4 절댓값 방정식 순수수학 13

Q5 기하에서의 벡터 순수수학 16

Q6 적분을 이용한 원주율의 범위 순수수학 20

Q7 가우스 구적법 순수수학 24

Q8 지수방정식의 근 순수수학 27

Q9 상대 속도 역학 31

Q10 원운동 역학 35

Q11 저항을 받는 운동 역학 39

Q12 중심극한정리 확률과 통계 43

Q13 조건부 확률 확률과 통계 47

Q14 기대 비용의 최소화 확률과 통계 50

STEP II

Q1 자릿수의 합과 경우의 수 순수수학 54

Q2 점화식 순수수학 57

Q3 부분분수를 이용한 적분 순수수학 60

Q4 나머지 정리 순수수학 63

Q5 복소 지수 사상 순수수학 66

Q6 삼각방정식 순수수학 70

Q7 곡선 그리기 순수수학 74

Q8 적분을 이용한 부등식 순수수학 78

Q9 마찰과 강체 평형 역학 82
Q10 폭발과 탄성 충돌 역학 86
Q11 포물체 운동 역학 90
Q12 이항분포의 홀짝 확률 확률과 통계 94
Q13 뷔퐁의 바늘 확률과 통계 98
Q14 푸아송 과정 확률과 통계 102

STEP III

Q1 지수함수의 거듭제곱급수 순수수학 106
Q2 곡선 그리기 순수수학 110
Q3 1의 거듭제곱근 순수수학 115
Q4 산술-기하 평균 부등식 순수수학 119
Q5 사이클로이드의 호의 길이 순수수학 123
Q6 체비쇼프 미분방정식 순수수학 126
Q7 e의 무리성 순수수학 130
Q8 이차形식의 대각화 순수수학 133
Q9 탄성 용수철이 있는 정역학 역학 138
Q10 미끄러지며 구르기 역학 142
Q11 강체의 회전 역학 146
Q12 쿠폰 수집가 문제 확률과 통계 150
Q13 정규분포의 적률생성함수 확률과 통계 154
Q14 확률변수의 곱 확률과 통계 157

풀이

STEP I 1997, 문제 1

순수수학 • 동전 조합의 개수 세기

> **STEP I 1997, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q1

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.5 절 **거스름돈 만들기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/making-change.html

핵심 아이디어

"방법의 수"를 세는 일은 모든 조합을 정확히 한 번씩 나열하는 체계가 있을 때에만 제대로 된다. 자연스러운 체계는 가장 큰 동전의 개수를 먼저 정하고, 그다음 큰 동전의 개수를 정하는 식으로 나아가는 것이다. 2p와 1p 동전만 남으면 개수는 바로 나온다. 2p 동전의 개수가 모든 것을 결정하기 때문이다. 이렇게 하면 10p에 대한 답이 곧바로 20p에 대한 답에 쓰인다는 장점도 있다.

풀이

순서는 상관없다. 하나의 "방법"은 각 동전을 몇 개씩 쓸지를 정하는 것이다. 따라서 음이 아닌 정수해(non-negative integer solution)의 개수를 센다.

기본 단위: 2p와 1p 동전

2p와 1p 동전으로 r펜스를 만들려면 2p 동전의 개수 b를 정하면 되는데, 이는 0부터 $\lfloor r/2 \rfloor$까지 어느 값이든 될 수 있다. 그러면 나머지 $r - 2b \geq 0$펜스는 1p 동전으로 정확히 한 가지 방법으로 채워진다. 따라서 방법의 수는

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1.$$

이다.

10펜스 만들기

- *10p* 동전을 쓰는 경우. 이 동전 하나로 전체 금액이 만들어진다. 1가지 방법이다.
- *10p* 동전을 쓰지 않는 경우. 5p 동전의 개수 0, 1, 2에 따라 나눈다.

5p 동전	2p와 1p로 채울 금액	방법의 수 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$
2	0	1
1	5	3
0	10	6

따라서 $1 + 3 + 6 = 10$가지 방법이다.

모든 조합은 10p 동전과 5p 동전의 개수가 확정되어 있으므로, 각 조합은 꼭 한 번만 세어진다. 전체는 요구된 대로 $1 + 10 = 11$가지이다.

20펜스 만들기

5p, 2p, 1p 동전으로 n펜스를 만드는 방법의 수를 $F(n)$이라 하자. 방금 $F(10) = 10$임을 보았고, 분명히 $F(0) = 1$이다(동전을 하나도 쓰지 않는다). $F(20)$은 5p 동전의 개수 0부터 4까지에 따라 나눈다.

5p 동전	2p와 1p로 채울 금액	방법의 수
4	0	1
3	5	3
2	10	6
1	15	8
0	20	11

따라서 $F(20) = 1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29$이다.

> ? **생각해 보기** 20p와 10p 동전은 중복해서 세지 않으면서 어떻게 끼워 넣을 수 있을까?

다시 큰 동전으로 나눈다. 20p 동전을 쓰는 경우에는 그 동전이 유일한 동전이어야 하므로 1가지 방법이다. 쓰지 않는 경우에는 10p 동전의 개수에 따라 나눈다.

- 10p 동전 두 개: 남는 금액이 없으므로 $F(0) = 1$가지;
- 10p 동전 한 개: 10p가 남으므로 $F(10) = 10$가지;
- 10p 동전 없음: 20p가 남으므로 $F(20) = 29$가지.

이 경우들은 서로 겹치지 않고 모든 경우를 빠짐없이 덮으므로, 20펜스를 만드는 방법의 수는

$$1 + 1 + 10 + 29 = 41.$$

이다.

검산

- 10p의 경우를 손으로 나열해 보자. 10; 5+5; 5+2+2+1, 5+2+1+1+1, 5+1 × 5; 그리고 2 × 5, 2 × 4+1 × 2, ..., 1 × 10 (이런 것이 여섯 가지). 모두 11가지이다.
- 각 동전의 개수에 대해 반복문을 도는 짧은 컴퓨터 프로그램으로 세어 보면 11과 41이 나온다. 중간값 $F(10) = 10$과 $F(20) = 29$, 그리고 20p 동전을 쓰지 않으면 40가지라는 것도 확인된다.
- 작은 경우는 손으로 쉽게 확인할 수 있다. 5p, 2p, 1p 동전으로 5p를 만드는 방법은 $F(5) = 4$가지이고, 이는 $1 + 3$과 일치한다.

흔한 실수

- 순서까지 세어서 5+2+2+1과 2+5+1+2를 서로 다른 "방법"으로 보는 것. 이 둘은 같은 동전 모음이다.
- 동전 하나만 쓰는 방법, 즉 10p 동전 하나와 20p 동전 하나를 빠뜨리는 것.
- 눈에 보이는 체계 없이 합계만 제시하는 것. 문제에서 설명 없는 답에는 점수를 주지 않는다고 경고하므로, 경우를 나누는 과정 자체가 핵심이다.

STEP 너머

이것은 n을 정해진 집합의 수들로 나누는 **분할**(partition)이다. 이를 다루는 깔끔한 방법은 생성함수(generating function)이다. 방법의 수는

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})},$$

에서 x^n의 계수(coefficient)이며, 우리가 한 경우 나누기는 이 인수들을 하나씩 전개하여 곱하는 것에 지나지 않는다. 생성함수는 세기 문제를 대수 문제로 바꾸어 주며, 분할에 관한 오일러(Euler)와 라마누잔(Ramanujan)의 연구로 이어진다. 이를 탐구하기 좋은 책은 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*이고, 정수론 쪽으로는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 좋다.

풀이

STEP I 1997, 문제 2

순수수학 • 역삼각함수의 도함수

> **STEP I 1997, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q2

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 f의 도함수(derivative)가 0이 되어 버리므로 f는 상수이다. 다만 이는 정의된 각 구간 위에서만 성립한다. 점 $x = -1$이 실수 전체를 둘로 나누고, 양쪽에서 상수가 서로 다르다. 소문항 (ii)에서는 x를 y에 대해 미분한 다음 그 결과를 뒤집는(역수를 취하는) 편이 더 쉽다. 핵심 작업은 $\sin y^2$와 $\cos y^2$를 x와 y로 다시 쓰는 것이며, 바로 여기서 y의 범위가 중요해진다.

풀이

소문항 (i)

이 함수는 모든 $x \neq -1$에서 정의된다. $u = \dfrac{1-x}{1+x}$로 놓자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}, \qquad 1+u^2 = \frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$(연쇄법칙(chain rule))를 이용하면

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad (x \neq -1). \end{aligned}$$

생각해 보기 $\mathrm{f}'(x) = 0$이라는 것은 f가 모든 곳에서 같은 상수라는 뜻인가?

그렇지 않다. 도함수가 0이면 함수는 **구간**(interval) 위에서만 상수가 된다(이는 평균값 정리(mean value theorem)에서 나온다). f의 정의역(domain)은 $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$로 두 개의 구간이므로, f는 각 조각에서 상수이고 두 상수는 서로 다를 수 있다. 각 상수는 편리한 점에서 값을 계산하거나 극한을 취해서 구한다.

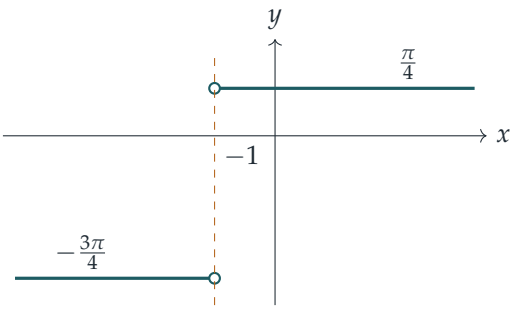
$x>-1$일 때: $x=0$을 대입한다. 그러면 $\mathrm{f}(0)=\tan^{-1}0+\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$이다.

$x<-1$일 때: $x\to-\infty$로 보낸다. 그러면 $\tan^{-1}x\to-\frac{\pi}{2}$이고, $\dfrac{1-x}{1+x}\to-1$이므로 $\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\to-\frac{\pi}{4}$이다. f는 이 구간에서 상수이므로, 그 상수는 극한값 $-\frac{3\pi}{4}$와 같다. (또는 $x=-\sqrt{3}$을 대입하면 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-(2+\sqrt{3})=-\tan\frac{5\pi}{12}$이므로 $\mathrm{f}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=-\frac{3\pi}{4}$이다.)

따라서

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & x>-1,\\[2mm] -\dfrac{3\pi}{4}, & x<-1.\end{cases}$$

$x=-1$에서 π만큼 값이 뛰는 것은 그곳에서 $\dfrac{1-x}{1+x}$가 $-\infty$에서 $+\infty$로 급격히 바뀌어, 그 역탄젠트(inverse tangent)가 $-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$로 뛰어오르기 때문이다.



소문항 (ii)

곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙을 이용하여 $x=y\sin y^2$를 y에 대해 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\sin y^2+2y^2\cos y^2.$$

이제 두 삼각함수 항을 모두 x와 y로 나타낸다.

▶ $y>0$이므로 y로 나눌 수 있다: $\sin y^2=\dfrac{x}{y}$.

- $0 < y^2 < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos y^2 > 0$이고, 따라서 양의 제곱근을 택한다:

$$\cos y^2 = \sqrt{1 - \sin^2 y^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y},$$

  여기서 마지막 단계에서는 $\sqrt{y^2} = y$를 이용하였는데, 이는 $y > 0$이므로 성립한다.

따라서

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + 2y\sqrt{y^2 - x^2} = \frac{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}}{y}.$$

$x > 0, y > 0$이고 제곱근은 음이 아니므로 이 값은 엄밀히 양수이다. 따라서 역수를 취할 수 있다(역함수의 미분법(inverse function rule) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$는 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \neq 0$인 곳에서 성립한다):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

? 생각해 보기 문제에서 왜 $0 < y < (\pi/2)^{1/2}$라는 조건을 고집하는가?

이 조건이 없으면 $\cos y^2$가 음수일 수 있고, 그러면 올바른 공식에서는 제곱근 앞에 마이너스 부호가 붙어야 한다. 또한 이 제한 덕분에 이 범위에서 $y \sin y^2$는 순증가(strictly increasing)한다(위에서 구한 도함수가 양수이다). 그 값은 0에서 $(\pi/2)^{1/2}$까지 증가하므로, $0 < x < (\pi/2)^{1/2}$인 각 x에 정확히 하나의 y가 대응하고, y는 실제로 x의 함수가 된다.

검산

- 소문항 (i): $\mathrm{f}(1) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$이고 $\mathrm{f}(-3) = \tan^{-1}(-3) + \tan^{-1}(-2) \approx -1.2490 - 1.1071 = -2.3562 \approx -\frac{3\pi}{4}$이다. 두 상수를 무작위로 고른 10,000개의 점에서 확인하였다.
- 소문항 (ii): $x = 0.5$일 때 $y \sin y^2 = 0.5$를 수치적으로 풀면 $y \approx 0.81355$이고, 공식은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx 0.60284$를 준다. 이는 수치적으로 구한 역함수를 유한 차분(finite difference)으로 미분한 값과 일치한다.
- $x = 0$ 근처에서 $y \sin y^2 \approx y^3$이므로 $y \approx x^{1/3}$이고 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{1}{3y^2}$이다. 공식은 $y/(y^3 + 2y^3) = \frac{1}{3y^2}$를 주므로 서로 일치한다.

흔한 실수

- 모든 x에 대해 $\mathrm{f}(x) = \frac{\pi}{4}$라고 결론짓고, $x = -1$이 정의역을 나눈다는 사실을 잊는 것.
- $\cos y^2 = \pm\sqrt{\cdots}$라고 쓰고 왜 양의 제곱근이 옳은지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

$f' = 0$이면 정의역의 연결된(connected) 조각 위에서만 상수가 된다는 사실은 평균값 정리의 결과이며, 평균값 정리는 대학 해석학(analysis) 과정에서 처음 만나는 중요한 결과 중 하나이다. 소문항 (ii)는 역함수 정리(inverse function theorem)의 아주 간단한 경우이다. 도함수가 0이 아닌 함수는 국소적으로(locally) 역함수를 가지며, 역함수의 도함수는 원래 도함수의 역수이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 두 가지를 꼼꼼히 다룬다.

풀이

STEP I 1997, 문제 3

순수수학 • 거듭제곱과 일의 자리 숫자

STEP I 1997, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q3

핵심 아이디어

무엇보다 먼저 a_7을 3의 거듭제곱 하나로 나타낸다. 3의 거듭제곱을 세제곱하면 지수가 세 배가 될 뿐이다. 그다음부터 각 소문항은 하나의 엄청나게 큰 수에 대해 서로 다른 질문을 던진다. 3의 거듭제곱의 일의 자리 숫자(units digit)는 주기(period) 4로 반복되므로, 일의 자리 숫자는 지수를 4로 나눈 나머지(modulo)에만 의존한다. 크기에 대한 부등식은 10의 거듭제곱과의 거친 비교만으로 충분하다. 마지막 소문항은 이 크기 부등식에 기댄다. a_7이 매우 크므로 $1/a_7$은 무시할 수 있을 만큼 작다.

풀이

먼저 닫힌 형태(closed form)를 구한다. $a_n = 3^k$이면 $a_{n+1} = (3^k)^3 = 3^{3k}$이므로, 한 단계마다 지수에 3이 곱해진다. $a_1 = 3^1$에서 시작하면 수학적 귀납법(induction)에 의해

$$a_n = 3^{3^{n-1}}, \qquad \text{따라서} \qquad a_7 = 3^{3^6} = 3^{729}.$$

소문항 (i)

곱의 일의 자리 숫자는 각 인수의 일의 자리 숫자에만 의존한다. 따라서 직전의 일의 자리 숫자에 3을 곱하고 그 결과의 일의 자리 숫자만 남기는 방식으로 3^k의 일의 자리 숫자를 추적할 수 있다.

k	1	2	3	4	5	$\cdots$
일의 자리 숫자: 3^k	3	9	7	1	3	$\cdots$

$k = 4$에서 다시 1이 되면, 그 뒤로는 $3, 9, 7, 1$이라는 패턴이 주기 4로 반복된다. (달리 말하면 $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$이므로 $3^{4m+r} \equiv 3^r \pmod{10}$이다.)

생각해 보기 긴 나눗셈을 하지 않고 729를 4로 나눈 나머지를 어떻게 구할 수 있을까?

$3 \equiv -1 \pmod 4$이므로 $3^6 \equiv (-1)^6 = 1 \pmod 4$이다. (직접 계산하면 $729 = 4 \times 182 + 1$이다.) 따라서 $3^{729} = 3^{4\cdot 182+1}$의 일의 자리 숫자는 3^1의 일의 자리 숫자와 같고,

정리하면a_7의 일의 자리 숫자는3.

소문항 (ii)

지수를 셋씩 묶는다. $729 = 3 \times 243$이므로

$$a_7 = 3^{729} = \left(3^3\right)^{243} = 27^{243} > 10^{243} \geq 10^{100},$$

이다. 여기서 $27 > 10$이라는 사실(그리고 양수들을 같은 양의 지수로 거듭제곱해도 대소관계가 유지된다는 사실)을 이용했다. 따라서 요구한 대로 $a_7 \geq 10^{100}$이다. 이 부등식은 전혀 빠듯하지 않다. 실제로 a_7은 348자리 수이다.

소문항 (iii)

분수를 나눈다.

$$\frac{a_7+1}{2a_7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_7}.$$

$a_7 > 0$이므로 둘째 항은 양수이다. 소문항 (ii)에 의해 이 항은 또한 아주 작다.

$$0 < \frac{1}{2a_7} \leq \frac{1}{2 \times 10^{100}} < 10^{-100}.$$

그러므로

$$0.5 < \frac{a_7+1}{2a_7} < 0.5 + 10^{-100} < 0.505.$$

0.5보다 크고 0.505보다 작은 모든 수는 소수점 아래 둘째 자리까지 반올림하면 0.50이 된다. 소수점 아래 셋째 자리가 0이어서, 올림이 일어나는 5에 한참 못 미치기 때문이다. 따라서

$$\frac{a_7+1}{2a_7} = 0.50 \quad \text{(소수점 아래 둘째 자리까지 반올림)}$$

이다. 실제로 이 수의 소수 전개는 $0.5000\ldots$로 시작하며, 5 뒤에 적어도 100개의 0이 이어진다.

검산

컴퓨터는 3^{729}를 정확하게 다룰 수 있다. 3을 여섯 번 세제곱하여 계산해 보면 $a_7 = 3^{729}$가 일의 자리 숫자가 3인 348자리 수임을, 그리고 $27^{243} = 3^{729} > 10^{243}$임을 확인할 수 있다. 정확

한 분수 계산을 이용하면 $\frac{a_7+1}{2a_7}$이 $\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{2}+10^{-100}$ 사이에 (양 끝을 포함하지 않고) 놓임을 확인할 수 있다. 더 작은 규모에서 소문항 (i)의 방법을 시험해 볼 수도 있다. $a_2 = 3^3 = 27$의 지수는 $3 \equiv 3 \pmod 4$이므로 일의 자리 숫자가 7이라고 예측되는데, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- a_7을 3^{3^6}이 아니라 $3^{3\cdot 7}$이나 3^{18}로 읽는 것. 각 단계에서 지수에 3을 더하는 것이 아니라 3을 곱한다.
- 지수를 4가 아니라 10으로 나눈 나머지로 줄이는 것. 일의 자리 숫자는 주기 4로 순환하므로, 중요한 것은 지수를 4로 나눈 나머지이다.
- 소문항 (iii)에서 아무 근거 없이 "0.5"라고 쓰는 것. "소수점 아래 둘째 자리까지 정확하게"는 0.50을 뜻하며, 그 값이 0.505에 이를 수 없음을 보이는 부등식이 필요하다.

STEP 너머

소문항 (i)은 모듈러 산술(modular arithmetic)과 오일러(Euler) 정리(Euler's theorem)를 처음 맛보는 경험이다. $\varphi(10) = 4$이기 때문에 $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$이 성립한다. 정수론 학자들은 이러한 축소를 탑의 층마다 반복해서 적용하여 $3^{3^{3^3}}$와 같은 거대한 거듭제곱 탑(power tower)의 마지막 자릿수들을 구한다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruence)과 원소의 위수(order)를 처음부터 차근차근 전개한다.

풀이

STEP I 1997, 문제 4

순수수학 • 절댓값 방정식

> **STEP I 1997, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q4

핵심 아이디어

각 절댓값(modulus) 항은 그 안의 식이 0이 되는 곳에서만 식의 꼴이 바뀌므로, 네 개의 "임계점(critical points)" $x = -1, 0, 1, 2$가 실수 전체를 다섯 개의 구간(interval)으로 나눈다. 각 구간에서는 모든 절댓값을 부호가 정해진 보통의 괄호로 바꿀 수 있고, 좌변은 일차함수(linear function)가 되며, 방정식은 쉽게 풀린다. 단 하나 주의할 점은, 일차방정식의 근(root)은 지금 다루고 있는 구간 안에 있을 때에만 해로 인정된다는 것이다.

풀이

$L(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2|$라 하자. $t \geq 0$일 때 $|t| = t$이고 $t < 0$일 때 $|t| = -t$임을 기억하자. 구간을 오른쪽에서 왼쪽으로 차례로 살펴본다.

$x \geq 2$. 네 절댓값 안의 식이 모두 음이 아니므로

$$\begin{aligned} L(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) \\ &= x + 1 - x + 3x - 3 - 2x + 4 = x + 2. \end{aligned}$$

방정식은 $x + 2 = x + 2$가 되고, 이는 **모든** $x \geq 2$에 대하여 참이다. 따라서 구간 $x \geq 2$ 전체가 해이다.

> ? **생각해 보기** 방정식이 항등식(identity)이 되어 버렸다. 계산 실수를 한 것일까?

그렇지 않다. $x \to \infty$일 때 절댓값 안의 x의 계수(coefficient)를 더하면 $1 - 1 + 3 - 2 = 1$이고 상수항을 더하면 $1 - 0 - 3 + 4 = 2$인데, 이는 우변 $x + 2$와 정확히 일치한다. 절댓값을 포함한 방정식은 얼마든지 구간 전체를 해로 가질 수 있으며, 문제의 "모든 해를 구

하라"라는 말은 이런 일이 일어날 수 있다는 힌트이다. 간단히 확인해 보면, $x = 3$에서 $L(3) = 4 - 3 + 6 - 2 = 5 = 3 + 2$이다.

$1 \le x < 2$. 이제 $x - 2 < 0$이므로 $|x - 2| = -(x - 2)$이고

$$L(x) = (x + 1) - x + 3(x - 1) + 2(x - 2) = 5x - 6.$$

그러면 $5x - 6 = x + 2$에서 $x = 2$인데, 이는 $[1, 2)$에 속하지 않는다. (이것은 해이지만 이미 앞에서 세었다.) 새로운 해는 없다.

$0 \le x < 1$. 이제 $x - 1 < 0$이기도 하므로

$$L(x) = (x + 1) - x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = -x.$$

그러면 $-x = x + 2$에서 $x = -1$인데, 이는 $[0, 1)$에 속하지 않는다. 해가 없다.

$-1 \le x < 0$. 이제 $|x| = -x$이기도 하므로

$$L(x) = (x + 1) + x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = x.$$

방정식 $x = x + 2$는 해가 전혀 없다.

$x < -1$. 네 절댓값 안의 식이 모두 음수이므로

$$L(x) = -(x + 1) + x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = -x - 2.$$

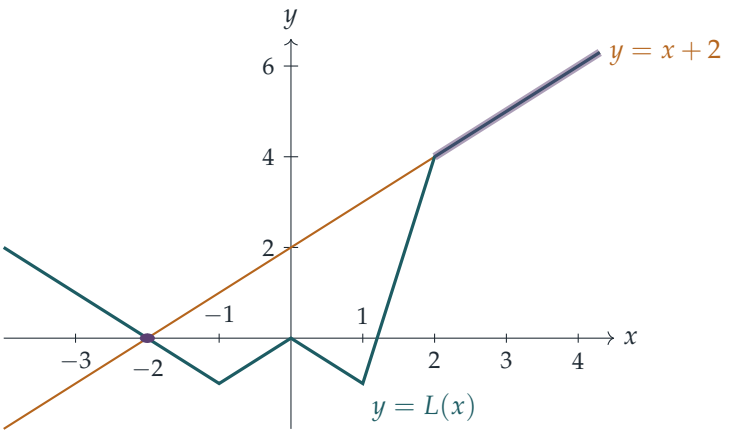
그러면 $-x - 2 = x + 2$에서 $x = -2$이고, $-2 < -1$이므로 이것은 진짜 해이다. 확인: $L(-2) = 1 - 2 + 9 - 8 = 0 = -2 + 2$.

결론. 해는

$$x = -2 \qquad \text{그리고 모든} x \ge 2.$$

이다.

그래프를 보면 그 이유를 알 수 있다. $y = L(x)$(청록색)는 선분들이 이어진 지그재그 모양으로, 직선 $y = x + 2$(호박색)와 $x = -2$에서 한 번 만나고, $x = 2$부터는 그 직선과 겹쳐 놓인다.



검산

몇 가지 값을 대입해 보자. $L(-2) = 0 = -2 + 2$, $L(5) = 6 - 5 + 12 - 6 = 7 = 5 + 2$이고, 한편 $x = 0$에서는 $L(0) = 1 + 3 - 4 = 0 \neq 2$이다. 정확한 분수로 계산하는 컴퓨터로 100,000개의 무작위 점에서 L의 다섯 가지 일차식을 확인하였고, $[-20, 20]$ 위의 간격 0.01인 격자점에서 방정식이 $x = -2$와 $x \geq 2$인 모든 격자점에서 정확히 성립하며 그 밖의 곳에서는 성립하지 않음을 확인하였다.

흔한 실수

- $x \geq 2$에서 $x + 2 = x + 2$를 얻고 나서, 구간 전체가 해라는 것을 알아차리지 못하고 "해 없음"이라고 쓰거나 "해가 무수히 많으니 뭔가 잘못되었다"고 생각하는 것.
- ($0 \leq x < 1$에서 나온) $x = -1$처럼 지금 다루는 구간 밖에 있는 근을 해로 받아들이는 것.
- 고립된 해 $x = -2$가 있는 바깥 영역 $x < -1$을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

L과 같은 함수를 **조각별 선형**(*piecewise linear*) 함수라 한다. 즉 연속(continuous)이고, 유한 개의 "꺾이는 점" 사이에서는 일차함수이다. 이런 함수는 선형계획법(linear programming)과 최적화(optimisation)에서 핵심적인 역할을 하는데, 여기서 절댓값의 합 $\sum |x - a_i|$를 최소화하면 평균(mean)이 아니라 중앙값(median)이 나온다. 또한 이 함수들은 연속이지만 고립된 점에서 미분가능(differentiable)하지 않은 함수의 첫 번째 예이기도 하며, 이 주제는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP I 1997, 문제 5

순수수학 • 기하에서의 벡터

STEP I 1997, 5번 문제

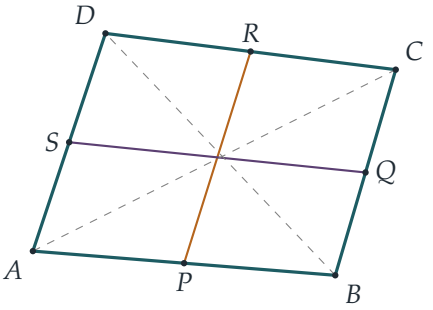
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q5

핵심 아이디어

길이의 제곱은 내적(dot product)이고 중점(mid-point)은 평균이므로, 위치 벡터(position vector)를 쓰면 항등식 전체가 대수 계산으로 바뀐다. 유용한 요령은 양변 모두에 사실은 대각선(diagonal) AC와 BD가 숨어 있다는 것을 알아차리는 것이다. 각 차를 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$로 나타내고 나면 항등식은 저절로 나온다. 그다음의 추론에는 네 막대의 길이가 결코 변하지 않는다는 사실만 있으면 된다.

풀이



임의의 원점에 대한 A, B, C, D의 위치 벡터를 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$라 하고, $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$로 쓰자. 중점은 다음과 같다.

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}).$$

네 변

각각을 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$로 전개하면, 제곱항 $|\mathbf{a}|^2, \ldots, |\mathbf{d}|^2$는 양쪽에 한 번씩 나타나 소거되고, 다음이 남는다.

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 &= -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ &= 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}).\end{aligned}$$

($(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b})$를 전개하여 이 인수분해(factorisation)를 확인해 보라.) 말로 하면, 이것은 $-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$이다.

중점을 잇는 두 선분

다음과 같이

$$\overrightarrow{PR} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{u}, \qquad \overrightarrow{QS} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{v},$$

라 두자.

> **생각해 보기** 네 항짜리 제곱 두 개를 전개하지 않고 $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$를 어떻게 구할 수 있을까?

벡터에 대한 제곱의 차 공식 $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})$를 쓴다. 이 식은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$이기 때문에 성립한다. 여기서

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = 2(\mathbf{d}-\mathbf{b}), \qquad \mathbf{u}-\mathbf{v} = 2(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

이므로

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{4}\left(|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right) = (\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

함께 합치기

변에 대한 결과에 중점에 대한 결과의 두 배를 더하면

$$\begin{aligned}&|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 + 2\left(|PR|^2 - |QS|^2\right) \\ &\quad = 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) + 2(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = 0,\end{aligned}$$

이고, 이를 정리하면

$$|AB|^2 + |CD|^2 + 2|PR|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|QS|^2,$$

이므로 증명이 끝난다. 볼록성(convexity)은 물론이고 점들이 한 평면 위에 있다는 사실조차 쓰지 않았으므로, 이 항등식은 임의의 네 점에 대해 성립한다. 접혀서 두 막대가 서로 교차하는 사각형도 마찬가지이다.

추론

항등식을 정리하면

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{2}\left(|AD|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 - |CD|^2\right).$$

막대는 단단하므로, 이음매가 어떻게 움직이든 우변의 네 길이는 변하지 않는다. 따라서 $|PR|^2 - |QS|^2$는 움직이는 동안 내내 일정하다. 같은 말로, 대각선 자체는 길이와 방향이 바뀌더라도 대각선의 스칼라곱(scalar product) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$는 고정된 채로 남는다.

검산

- 변의 길이가 a와 b인 직사각형에서는 $|AB| = |CD| = a$이고 $|AD| = |BC| = b$이며, PR과 QS는 마주 보는 변의 중점을 이으므로 $|PR| = b$, $|QS| = a$이다. 항등식의 양변은 모두 $2a^2 + 2b^2$이다.
- 마름모(rhombus)에서는 네 변이 모두 같으므로, 추론에 따르면 모든 위치에서 $|PR| = |QS|$이다. 실제로 마름모의 대각선은 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$이다.
- 수치적으로, 무작위 사각형 10^5개에 대해 항등식은 10^{-12} 이내의 오차로 성립한다. $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 5$, $|DA| = 6$인 연결 장치(linkage)를 약 200개의 위치로 움직여 보았을 때, $|PR|^2 - |QS|^2$는 내내 $\frac{1}{2}(36 + 16 - 9 - 25) = 9$로 유지되었다.

흔한 실수

- 어떤 변이 어떤 선분과 짝을 이루는지 혼동하는 것. PR은 AB와 CD의 중점을 잇고, 항등식에서 PR과 같은 쪽에 놓이는 것은 바로 이 두 변이다.
- A를 원점에, B를 축 위에 두는 식으로 좌표를 설정한 뒤, 일반적인 사각형이 되려면 나머지 모든 점이 자유로워야 한다는 것을 잊는 것. 벡터를 쓰면 이런 번거로운 관리를 피할 수 있다.

STEP 너머

점 P, Q, R, S는 항상 평행사변형을 이루며(바리뇽(Varignon)의 정리), PR, QS는 그 평행사변형의 대각선이다. 여기서의 항등식은 평행사변형 법칙(parallelogram law) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$의 사촌 격인데, 대학 1학년 선형대수학 강의에서 이 법칙은 내적(inner product)에서 나오는 노름(norm)을 정확히 특징짓는 성질로 다루어진다. 기계장치가 움직이는 동안에도 고정되어 있는 양, 곧 불변량(invariant)이라는 아이디어는 수학 전반에 걸쳐 거듭 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학

입문)는 점곱과 내적이 제대로 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1997, 문제 6

순수수학 • 적분을 이용한 원주율의 범위

STEP I 1997, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.3 절 22/7은 π보다 크다에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/twenty-two-sevenths.html

핵심 아이디어

피적분함수(integrand)는 분자의 차수가 분모의 차수보다 높은 유리함수(rational function)이므로, 먼저 x^2+1로 다항식 나눗셈(polynomial division)을 한다. 그러면 쉽게 적분되는 다항식 몫(quotient)과 $1+x^2$ 위에 놓인 상수 나머지(remainder)가 남는데, 이 나머지 항을 적분하면 아크탄젠트(arctangent)가 된다. π는 바로 이 아크탄젠트에서 나온다. 마지막 부등식(inequality)은 $[0,1]$에서 $1 \leq 1+x^2$임을 이용해 피적분함수를 $x^4(1-x)^4$ 자체와 비교하면 된다.

풀이

나눗셈

이항정리(binomial theorem)로 전개하면

$$x^4(1-x)^4 = x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) = x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4.$$

이제 x^2+1로 나누는데, 매번 최고차항을 떼어 낸다.

$$\begin{aligned} x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4 &= x^6(x^2+1)+\left(-4x^7+5x^6-4x^5+x^4\right)\\ -4x^7+5x^6-4x^5+x^4 &= -4x^5(x^2+1)+\left(5x^6+x^4\right)\\ 5x^6+x^4 &= 5x^4(x^2+1)+\left(-4x^4\right)\\ -4x^4 &= -4x^2(x^2+1)+4x^2\\ 4x^2 &= 4(x^2+1)-4. \end{aligned}$$

x^2+1의 배수들을 모으면

$$x^4(1-x)^4=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)(x^2+1)-4,$$

이므로

$$a_6=1,\quad a_5=-4,\quad a_4=5,\quad a_3=0,\quad a_2=-4,\quad a_1=0,\quad a_0=4,\quad b=-4.$$

간단히 검산해 보자. $x=0$일 때 우변은 $4\cdot1-4=0$이고, $x=1$일 때 우변은 $(1-4+5-4+4)\cdot2-4=0$이므로 두 경우 모두 좌변과 일치한다.

$\frac{22}{7}-\pi$와 같은 적분

항등식의 양변을 $1+x^2$(결코 0이 아니다)로 나누면

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}.$$

$[0,1]$에서 항별로 적분하고 $\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x$를 이용하면

$$\begin{aligned} \int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\tfrac17x^7-\tfrac23x^6+x^5-\tfrac43x^3+4x\right]_0^1-4\Big[\arctan x\Big]_0^1\\ &= \tfrac17-\tfrac23+1-\tfrac43+4\ -\ 4\cdot\tfrac{\pi}{4}\\ &= \tfrac17+3-\pi\\ &= \frac{22}{7}-\pi, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $-\frac23-\frac43=-2$이고 $\arctan1=\frac{\pi}{4}$이다. 이것이 구하는 결과이다.

$x^4(1-x)^4$의 적분

처음에 구한 전개식을 이용하면

$$\int_0^1x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x=\tfrac15-\tfrac46+\tfrac67-\tfrac48+\tfrac19.$$

공통분모 $2520=5\cdot7\cdot8\cdot9$로 통분하면

$$\frac{504-1680+2160-1260+280}{2520}=\frac{4}{2520}=\frac{1}{630}.$$

π의 상계와 하계

$f(x) = x^4(1-x)^4$라 하자. 그러면 $0 < x < 1$에서 $f(x) > 0$이다.

상계(*upper bound*). $(0,1)$에서 피적분함수 $f(x)/(1+x^2)$는 연속이고 엄격히 양수이므로, $[0,1]$에서의 적분도 엄격히 양수이다. 따라서 $\frac{22}{7} - \pi > 0$, 즉 $\pi < \frac{22}{7}$이다.

하계(*lower bound*). $0 < x < 1$이면 $1 + x^2 > 1$이고, $f(x) > 0$이므로

$$\frac{f(x)}{1+x^2} < f(x).$$

? **생각해 보기** 두 적분 사이의 부등식이 왜 단순히 $\leq$가 아니라 엄격한 부등식일까?

차 $f(x) - \dfrac{f(x)}{1+x^2} = \dfrac{x^2 f(x)}{1+x^2}$는 열린구간 $(0,1)$ 전체에서 연속이고 엄격히 양수이므로, $[0,1]$에서의 적분은 엄격히 양수이다. (음이 아니고 어딘가에서 양수인 연속함수의 적분은 양수이다.) 따라서

$$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630},$$

이고, 이를 정리하면 $\pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$이다. 두 경계를 합치면

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630},$$

이므로 증명이 끝난다.

검산

- 수치적으로 $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.0012645$이고, 첫 번째 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열두 자리까지 같은 값이 나온다.
- $\frac{1}{630} \approx 0.0015873$은 0.0012645보다 넉넉히 크다. 경계에 따르면 $3.141270 < \pi < 3.142857$이고, 실제로 $\pi \approx 3.141593$이다.
- 값 $\frac{1}{630}$은 베타 적분(beta integral) 공식 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$로부터도 얻을 수 있으며, 이 공식은 $\dfrac{4!\,4!}{9!} = \dfrac{576}{362880} = \dfrac{1}{630}$을 준다.

흔한 실수

- 다항식 나눗셈에서 두 개의 0인 계수 a_3과 a_1을 빠뜨리는 실수. 모든 거듭제곱 자리를 지켜 두지 않으면 나머지가 틀리게 나온다.

- $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\ln 2$라고 쓰는 실수($\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$와 혼동한 것이다). 올바른 값은 $4\arctan 1 = \pi$이다.
- 마지막 단계에서 $\leq$만 증명하는 실수. 문제는 엄격한 부등식을 요구하므로, 두 적분이 왜 같을 수 없는지 밝혀야 한다.

STEP 너머

20세기에 발견된 이 아름다운 적분은 교과서에 나오는 근삿값 $\frac{22}{7}$이 π보다 크다는 사실을 단번에 보여 준다. $x^n(1-x)^n$에 간단한 함수를 곱해 적분한 뒤 그 결과가 작지만 양수임을 보이는 같은 아이디어가 π와 e가 무리수(irrational)라는 고전적인 증명의 원동력이다. 0과 1 사이에는 정수가 존재할 수 없기 때문이다. $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$와 같은 적분은 베타 함수(beta function)의 값으로, 대학 1학년 해석학(analysis)과 확률에서 만나게 된다. 적분 사이의 엄격한 부등식을 꼼꼼히 다루는 방법은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP I 1997, 문제 7

순수수학 • 가우스 구적법

STEP I 1997, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q7

핵심 아이디어

양변은 모두 P에 대하여 선형(*linear*)으로 의존하므로, 네 개의 기본 삼차식(cubic) 1, t, t^2, t^3에 대하여 공식이 성립하기만 하면 모든 삼차식에 대하여 성립한다. 이렇게 하면 문제는 미지수 네 개에 대한 방정식 네 개로 바뀐다. 이 방정식들은 비선형(nonlinear)이지만, 홀수 차수와 짝수 차수가 깔끔하게 분리되고, 나머지는 $t = 0$에 대한 대칭(symmetry)이 해결해 준다.

풀이

$\mathrm{P}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$이라 하자. 그러면

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = c_0 \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t + c_1 \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + c_2 \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t + c_3 \int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t$$

이고, $a_1\mathrm{P}(u_1) + a_2\mathrm{P}(u_2)$도 정확히 같은 방식으로 나뉜다. 따라서 공식이 모든 삼차식에 대하여 성립할 필요충분조건은 $\mathrm{P}(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2, 3$에 대하여 성립하는 것이다. ("필요조건(only if)" 방향은 각 t^k 자체가 넓은 의미에서 삼차다항식이기 때문이고, "충분조건(if)" 방향은 더하면 되기 때문이다.) $k = 0, 1, 2, 3$일 때 $\int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t$의 값은 2, 0, $\frac{2}{3}$, 0이므로, 다음이 필요하다.

$$a_1 + a_2 = 2, \tag{A}$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0, \tag{B}$$

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 = \tfrac{2}{3}, \tag{C}$$

$$a_1 u_1^3 + a_2 u_2^3 = 0. \tag{D}$$

생각해 보기 이 방정식들은 비선형이다. 이들을 조합하여 인수분해(factorise)되는 식을 만들 수 있을까?

(D)에서 (B)의 u_2^2배를 빼면 a_2가 들어 있는 항이 소거되어

$$a_1u_1^3 - a_1u_1u_2^2 = a_1u_1(u_1-u_2)(u_1+u_2) = 0.$$

을 얻는다. 처음 세 인수가 0이 될 가능성을 차례로 배제하자.

- $a_1 = 0$이면: (A)에서 $a_2 = 2$, (B)에서 $u_2 = 0$이 되고, (C)는 $0 = \frac{2}{3}$이 된다. 불가능하다.
- $u_1 = 0$이면: (B)에서 $a_2u_2 = 0$이므로 $a_2u_2^2 = 0$이고, 이번에도 (C)는 $0 = \frac{2}{3}$이 된다. 불가능하다.
- $u_1 = u_2$이면: 두 점이 일치하고, (B)는 $(a_1+a_2)u_1 = 2u_1 = 0$이 되므로 $u_1 = u_2 = 0$이며, 역시 (C)가 성립하지 않는다.

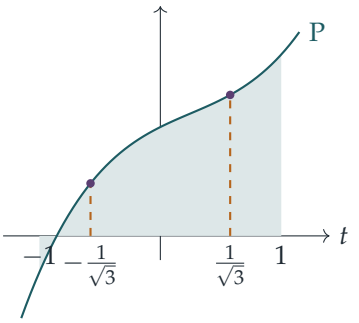
따라서 $u_1 \neq 0$이고 $u_2 = -u_1$이다. 이제 (B)는 $(a_1-a_2)u_1 = 0$이 되므로 $a_1 = a_2$이고, (A)에서 $a_1 = a_2 = 1$이다. 마지막으로 (C)에서 $2u_1^2 = \frac{2}{3}$이므로 $u_1^2 = \frac{1}{3}$이며, 이때 (D)는 자동으로 성립한다. 그러므로

$$\boxed{a_1 = a_2 = 1, \qquad u_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

(또는 u_1과 u_2를 바꾼 것)이다. 즉

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{P}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{P}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{임의의 삼차식P.}$$

이 논증은 또한 이름을 바꾸는 것을 제외하면 이것이 **유일한** 선택임을 보여 준다.



어떤 삼차식을 그리든, 색칠한 넓이는 두 점선의 높이의 합과 같다.

검산

- $\mathrm{P}(t) = t^2$: 적분값은 $\frac{2}{3}$이고, 공식은 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$을 준다.

- $\mathrm{P}(t) = 1 + t + t^2 + t^3$: 적분값은 $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$이고, 홀수 차수 항이 소거되므로 공식은 $2 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$을 준다.
- 이 공식은 t^4에 대해서는 정확하지 **않다**. 공식은 $2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$를 주지만 적분값은 $\frac{2}{5}$이다. 따라서 삼차식이 정말로 한계이다.
- 수치적으로, 무작위 삼차식 10^4개에 대하여 양변이 10^{-14} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- 처음부터 대칭($u_2 = -u_1, a_1 = a_2$)을 가정하는 것. 그렇게 하면 정답을 빨리 얻지만, 다른 선택이 불가능하다는 것은 보여 주지 못한다. 위의 인수분해는 그것을 보여 준다.
- 양변을 나눌 때 $a_1 = 0$ 또는 $u_1 = u_2$인 경우를 잊는 것.
- $\mathrm{P}(t) = 1$과 t^2만 확인하는 것. 대칭을 강제하는 것은 홀수 차수 조건 (B)와 (D)이다.

STEP 너머

이것은 두 점 **가우스 구적법**(*Gaussian quadrature*)이다. 잘 고른 점 n개와 가중치를 사용하면 차수가 $2n - 1$ 이하인 모든 다항식을 정확히 적분할 수 있는데, 이는 같은 간격으로 놓인 점 n개로 가능한 차수의 두 배이다. 가장 좋은 점은 르장드르 다항식(Legendre polynomials)의 영점이며(여기서는 $\frac{1}{2}(3t^2 - 1)$이고, 그 영점은 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이다), 이 다항식들은 $[-1, 1]$에서 직교(orthogonal)한다. 직교다항식은 대학 1학년 수치해석(numerical analysis)과 미분방정식(differential equations)의 풀이에 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서는 급수해(series solutions) 단원에서 르장드르 방정식을 다룬다.

풀이

STEP I 1997, 문제 8

순수수학 • 지수방정식의 근

> **STEP I 1997, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q8

핵심 아이디어

$a^x > 0$이므로 $x = a^x$의 근(root)은 반드시 양수이다. 따라서 양변에 로그(logarithm)를 취할 수 있고, 문제는 $x > 0$에서 $f(x) = \ln x - x\ln a$의 영점(zero)에 관한 문제로 바뀐다. $a > 1$이면 이 함수는 증가하다가 감소하므로, 최댓값이 0 이상일 때에만 영점을 가진다. $0 < a < 1$이면 이 함수는 강한 증가(strictly increasing) 함수이므로 영점을 많아야 한 번 지나며, 문제는 실제로 영점을 지나는지 여부이다.

풀이

$f(x) = 0$으로 바꾸기

풀이 전체에서 $a > 0$이므로, $a^x = e^{x\ln a}$는 모든 실수 x에 대해 정의되며 양수이다. $x \le 0$이면 $a^x > 0 \ge x$이므로 $x \le 0$인 근은 없다. $x > 0$이면 양변이 모두 양수이고, ln은 강한 증가 함수이므로

$$x = a^x \iff \ln x = x\ln a \iff f(x) = 0, \qquad \text{여기서} f(x) = \ln x - x\ln a.$$

따라서 $x = a^x$의 실근은 정확히 $(0,\infty)$에서 f의 영점이다.

$a > e^{1/e}$일 때 근이 없음

이 경우 $a > e^{1/e} > 1$이므로 $\ln a > 0$이다. 미분하면

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a,$$

이고, 이는 $0 < x < 1/\ln a$에서 양수, $x > 1/\ln a$에서 음수이다. 따라서 f는 증가하다가 감소하며, $(0,\infty)$에서의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) - 1 = -\ln(\ln a) - 1.$$

이다. 이제 $a > e^{1/e}$에서 $\ln a > 1/e$를 얻고, 다시 로그를 취하면(양변이 모두 양수이므로) $\ln(\ln a) > \ln(1/e) = -1$이다. 그러므로

$$f(x) \le -\ln(\ln a) - 1 < 0 \quad \text{모든} x > 0.$$

따라서 f는 결코 0이 되지 않으며, 방정식 $x = a^x$는 실근을 갖지 않는다. 이로써 증명이 끝난다.

생각해 보기 정확히 $a = e^{1/e}$일 때와 $1 < a < e^{1/e}$일 때는 어떻게 되는가?

$a = e^{1/e}$이면 최댓값은 정확히 0이고 $x = 1/\ln a = e$에서 얻어지므로, 근은 하나의 (중복된) 근 $x = e$, 즉 중근(repeated root)이다. 이때 직선 $y = x$는 점 (e,e)에서 $y = a^x$에 접한다(tangent). $1 < a < e^{1/e}$이면 최댓값이 양수이고 양 끝에서 $f \to -\infty$이므로 근이 두 개이다. ($a = 1$이면 유일한 근은 $x = 1$이다.) 문제에서 이 경우들을 묻지는 않지만, 이를 통해 $e^{1/e}$가 정확한 경계값임을 알 수 있다.

$0 < a < 1$일 때 근이 정확히 하나

이제 $\ln a < 0$이므로

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a = \frac{1}{x} + |\ln a| > 0 \quad \text{모든} x > 0,$$

이고, f는 $(0,\infty)$에서 강한 증가 함수이다. 따라서 f의 영점은 **많아야 하나**이다.

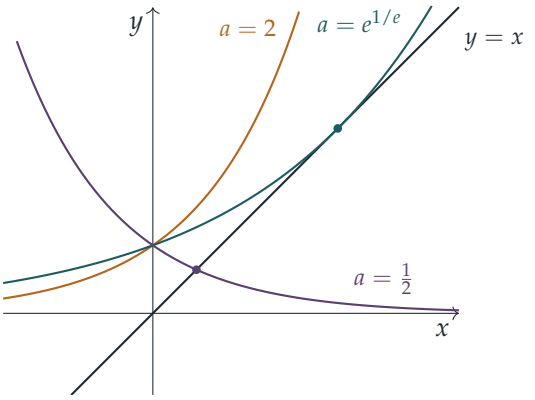
영점이 실제로 하나 존재함을 보이기 위해, f가 $(0,\infty)$에서 연속(continuous)이고

$$f(1) = -\ln a > 0, \qquad f(a) = \ln a - a\ln a = (1-a)\ln a < 0,$$

임에 주목하자. 두 부등식 모두 $0 < a < 1$을 이용했다. 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 f는 a와 1 사이에 영점을 가진다.

따라서 $0 < a < 1$이면 방정식 $x = a^x$는 **정확히 하나**의 실근을 가지며, 그 근은 구간 $(a,1)$에 있다.

그림을 보면 이 사실이 분명해진다. $y = a^x$는 감소하는 양의 함수이고 $y = x$는 증가하므로, 두 그래프는 정확히 한 번 만난다. (같은 말로, $g(x) = a^x - x$는 강한 감소 함수이고 $g(0) = 1 > 0, g(1) = a - 1 < 0$이다.)



검산

- 경계에서 $(e^{1/e})^e = e$이므로, $a = e^{1/e} \approx 1.4447$일 때 $x = e$는 실제로 근이며, 이는 접한다는 사실과 일치한다.
- $a = \frac{1}{2}$일 때 이분법(bisection)으로 구한 유일한 근은 $x \approx 0.6412$이고, 예상대로 $(\frac{1}{2}, 1)$에 있다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 200개의 $a > e^{1/e}$에 대해 함수 $a^x - x$는 $[-20, 20]$ 위의 촘촘한 격자에서 항상 양수였다. 또 $\ln x - x \ln a$의 최댓값은 $-1 - \ln \ln a$와 일치했고, $e^{1/e}$보다 조금 작은 a에 대해서는 근이 두 개였으며, 무작위로 고른 500개의 $a \in (0, 1)$에 대해서는 부호 변화가 정확히 한 번 있었다.

흔한 실수

- 모든 근이 $x > 0$을 만족한다는 점을 먼저 짚지 않고 로그를 취하는 것. 그렇지 않으면 $\ln x$가 정의되지 않으므로, $x \leq 0$인 경우는 (한 줄짜리) 별도의 논증이 필요하다.
- $0 < a < 1$일 때 f가 증가함수라는 것만 보이는 것. 이는 근이 **많아야** 하나임을 증명할 뿐이며, 근이 실제로 존재함을 보이려면 부호 변화도 필요하다.
- $\ln a > 1/e$의 양변에 ln을 취할 때 부등호 방향을 거꾸로 쓰는 것. ln은 증가함수이고 양변이 모두 양수이므로 부등호 방향은 그대로 유지된다.

STEP 너머

$0 < a < 1$일 때의 근은 사상 $x \mapsto a^x$의 부동점(fixed point)이며, $x_{n+1} = a^{x_n}$을 반복(iteration)하면 "무한 거듭제곱 탑(infinite power tower)" $a^{a^{a^{\cdots}}}$에 이르게 된다. 오일

러(Euler)는 이 탑이 정확히 $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$일 때 수렴(converge)함을 보였는데, 여기서도 같은 경계값 $e^{1/e}$가 다시 나타난다. 반복이 언제 수렴하는지를 연구하다 보면 대학 1학년 해석학(analysis)에서 배우는 축소 사상 정리(contraction mapping theorem)에 이르게 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 중간값 정리와 이에 필요한 배경 지식을 다룬다.

풀이

STEP I 1997, 문제 9

역학 • 상대 속도

> **STEP I 1997, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q9

핵심 아이디어

길가에서 보면 모든 것이 움직이지만, 자동차 안에서 보면 모든 것이 멈춰 있다. 자동차들은 길이 c의 틈을 사이에 두고 고정된 블록의 행렬이 되고, 닭은 **상대** 속도(relative velocity)로 직선을 따라 길을 건넌다. 닭이 무사히 통과하려면, 폭 a인 차로 안에 있는 동안 (자동차에 대해) 옆으로 밀려나는 거리가 틈의 길이 c를 넘지 않아야 한다. 이 하나의 조건에서 부등식이 나오고, 최소 속력은 $c\sin\theta + a\cos\theta$를 최대화하는 데서 얻어진다. 이는 전형적인 $R\cos(\theta - \alpha)$ 문제이다.

풀이

닭을 입자로, 자동차들을 속력 V로 움직이는 직사각형으로 모형화하고, 각 자동차는 도로를 가로지르는 폭 a의 같은 띠를 차지한다고 하자. 차량 진행 방향으로 도로를 따라 x축을, 도로를 가로질러 y축을 잡으면, 닭의 속도는 $0 < \theta < \pi$에 대하여 $(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$이다. 자동차가 있는 띠만 중요하다. 도로의 나머지 부분에서는 닭이 위험에 처하는 일이 없다.

부등식

자동차에 대한 닭의 상대 속도는

$$\mathbf{w} = (u\cos\theta - V,\ u\sin\theta).$$

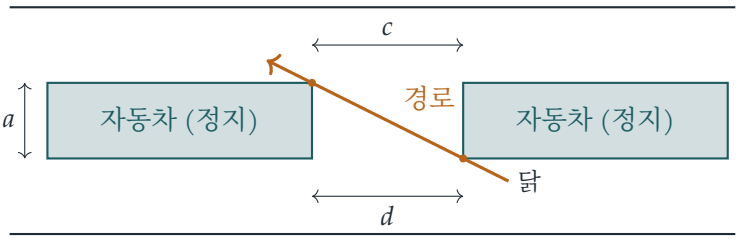
이다. 자동차의 기준틀(frame)에서는 자동차들이 정지해 있고, 닭은 일정한 속도 $\mathbf{w}$로 직선 운동을 한다. 닭이 폭 a인 띠를 건너는 데 걸리는 시간은

$$\tau = \frac{a}{u\sin\theta}$$

이고, 그동안 닭은 (자동차에 대해, 차량 진행 반대 방향으로) 뒤로

$$d = (V - u\cos\theta)\,\tau = \frac{a(V - u\cos\theta)}{u\sin\theta}.$$

만큼 밀려난다.



그림은 극단적인 경우인 $d = c$를 나타내며, 이때 경로는 정확히 틈의 대각선을 따라간다.

? 생각해 보기 밀려나는 거리 d가 왜 c 이하여야 하는가?

자동차의 기준틀에서 띠를 지나는 닭의 경로는 도로 방향으로 길이 $|d|$인 구간을 덮고, 그 구간의 모든 점은 차로 안의 어떤 높이에서 지나가게 된다. 정지한 자동차들은 길이 c인 틈만을 비워 두므로, 그 구간 전체가 하나의 틈 안에 들어가야 한다. 즉 $|d| \le c$이다. (역으로 $|d| \le c$이면, 닭은 출발 시각을 조절하여 그 구간이 틈 안에 놓이게 할 수 있으므로 안전하게 건널 수 있다.)

특히 $d \le c$, 즉

$$a(V - u\cos\theta) \le c\,u\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad Va \le u\,(c\sin\theta + a\cos\theta).$$

이다. 좌변이 양수이므로 안전하게 건너는 모든 경우에 $c\sin\theta + a\cos\theta > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta},$$

이로써 요구된 결과를 얻는다. (조건의 나머지 절반인 $d \ge -c$는 빠른 닭이 틈을 앞질러 앞 차에 부딪히는 것을 막아 준다. 이 조건은 아래의 최솟값에서는 아무 역할도 하지 않는다.)

최소 속력과 건너는 시간

$c\sin\theta + a\cos\theta = \sqrt{a^2 + c^2}\,\cos(\theta - \alpha)$로 쓰자. 여기서 α는

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \tan\alpha = \frac{c}{a}.$$

을 만족하는 예각이다. 따라서 $c\sin\theta + a\cos\theta \le \sqrt{a^2 + c^2}$이고, 등호는 $\theta = \alpha$일 때만 성립한다. 그러므로 모든 방향에 대하여

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta} \ge \frac{Va}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

이고, $\theta = \alpha$이고 $u = Va/\sqrt{a^2+c^2}$일 때 두 부등식 모두 등호가 성립한다. 이 선택은 실제로 안전하다. 이때 정확히 $d = c$가 되고(그림의 경로처럼 모서리에서 모서리로), $-c \le d \le c$가 성립한다. 따라서 가능한 최소 등속력은 각 $\alpha = \arctan(c/a)$에서 $Va/\sqrt{a^2+c^2}$이다.

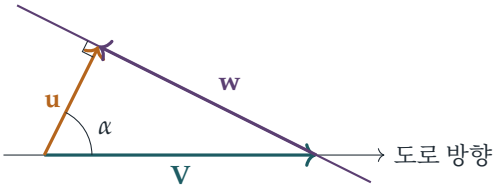
닭은 도로를 가로지르는 속도 성분 $u\sin\alpha$로 전체 폭 b를 건너므로, 걸리는 시간은

$$\frac{b}{u\sin\alpha} = b\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{Va}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \frac{b\,(a^2+c^2)}{Vac} = \frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

? 생각해 보기 최소 속력은 왜 $\tan\theta = c/a$일 때 나오는가?

속도들을 살펴보자. 닭의 속도는 $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{w}$이고, 가장 좋은 경우 상대 속도 $\mathbf{w}$는 틈의 대각선 방향, 즉 $(-c, a)$ 방향을 향한다. 따라서 $\mathbf{u}$의 끝점은 $\mathbf{V}$의 끝점을 지나고 그 방향을 갖는 직선 위에 있으며, 가장 짧은 $\mathbf{u}$는 원점에서 그 직선에 내린 수선이다. 그 방향 (a, c)는 도로와 각 $\arctan(c/a)$를 이루고, 그 길이는 $V\sin(\text{대각선의 각}) = Va/\sqrt{a^2+c^2}$이다.



검산

- 단위: $Va/\sqrt{a^2+c^2}$는 속력이고, $\frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$는 길이를 속력으로 나눈 것, 즉 시간이다.
- 극한: $\theta = \frac{\pi}{2}$(곧장 가로지름)이면 한계는 $u \ge Va/c$이다. 닭은 틈 하나가 지나가는 시간 c/V 안에 폭 a를 건너야 한다. 이는 분명히 옳다.
- 수치: $a = 1, c = 2, V = 2, b = 5$이면 최소 속력은 $\tan\theta = 2$에서 $2/\sqrt{5} \approx 0.894$이고, 건너는 시간은 $\frac{5}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right) = 6.25$이다. 도로의 기준틀에서 자동차와 닭을 직접 시뮬레이션해도 결과가 일치한다. 이 속력의 1.01배에서는 안전한 출발 시각이 존재하고, 0.99배에서는 존재하지 않는다.

흔한 실수

- 안전 조건에 도로 전체를 건너는 시간 $b/(u\sin\theta)$를 사용하는 것. 중요한 것은 폭 a인 차로 안에서 보내는 시간뿐이다.
- 상대 속도의 부호를 잘못 잡는 것. 자동차에 대해 닭은 도로 방향으로 $u\cos\theta + V$가 아니라 $u\cos\theta - V$로 움직인다.

STEP 너머

장애물이 정지해 있는 기준틀로 바꾸는 것은 갈릴레이 변환(Galilean transformation)이며, 문제가 정적으로 보이는 기준틀을 고르는 것은 역학에서 가장 유용한 습관 중 하나이다. 최소화 과정 또한 작은 최적화 문제이다. 한 점에서 직선까지의 가장 짧은 벡터는 수선이며, 이는 나중에 선형대수학(linear algebra)에서 정사영(orthogonal projection)으로 다시 만나게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 이런 정신의 상대 운동 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 1997, 문제 10

역학 • 원운동

STEP I 1997, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q10

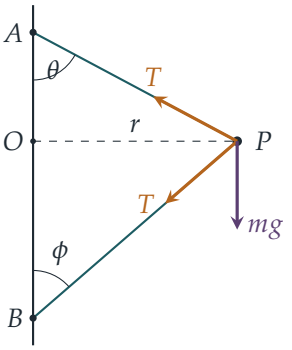
핵심 아이디어

고리가 매끄러우므로(smooth) 줄은 고리를 자유롭게 통과하고, 따라서 장력(tension)은 P의 양쪽에서 **같다**. 연직 방향(연직 가속도는 없다)과 수평 방향(축을 향하는 가속도 $r\omega^2$)으로 힘을 분해(resolve)한 다음, 한 식을 다른 식으로 나누어 T와 m을 소거한다. 그러면 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formulae)에 의해 그 비가 반각(half-angle)의 탄젠트 하나로 바뀐다.

풀이

모형과 힘

P를 가볍고 늘어나지 않는 줄(light inextensible string)에 꿰어진 입자로 본다. 고리가 매끄러우므로 장력 T는 PA와 PB에서 같다. 원의 중심을 O라 하자. O는 직선 AB 위에 있고 $OP = r$이다. P에 작용하는 힘은 무게 mg, PA 방향의 장력 T, PB 방향의 장력 T이다.



줄 PA는 연직선과 각 θ를 이룬다(A에서 AB와 AP 사이의 각). 따라서 이 줄이 P를 당기는 힘은 위쪽으로 $T\cos\theta$, 축을 향해 $T\sin\theta$의 성분을 가진다. 마찬가지로 PB는 B에서 연직선과 각 ϕ를 이루며, 이 줄이 P를 당기는 힘은 **아래쪽으로** $T\cos\phi$, 축을 향해 $T\sin\phi$의 성분을 가진다.

운동 방정식

P는 수평인 원 위를 일정한 속력으로 움직이므로 연직 가속도는 없고, O를 향하는 가속도 $r\omega^2$를 가진다. 힘을 분해하면 운동 방정식(equations of motion)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{연직 방향:} \quad & T\cos\theta - T\cos\phi = mg, \\ \text{수평 방향:} \quad & T\sin\theta + T\sin\phi = mr\omega^2. \end{aligned}$$

이 식들은 삼각형의 모양과 관계없이 성립한다(예를 들어 P가 A보다 위에 있다면 $\cos\theta$가 음수가 될 뿐이다). $mg > 0$이므로 첫 번째 식에서 $\cos\theta > \cos\phi$, 즉 $\phi > \theta$이다. 그림에서 보듯이 아래쪽 줄이 축에 대해 더 가파르게 기울어져 있다.

결과 보이기

연직 방향의 식을 수평 방향의 식으로 나누면

$$\frac{\cos\theta - \cos\phi}{\sin\theta + \sin\phi} = \frac{g}{r\omega^2}.$$

합을 곱으로 바꾸는 공식에 의해

$$\begin{aligned} \cos\theta - \cos\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\ \sin\tfrac{1}{2}(\phi-\theta), \\ \sin\theta + \sin\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\ \cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta). \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$이고 $0 < \phi < \pi$이므로(이들은 실제 삼각형 APB의 각이다) $0 < \frac{1}{2}(\theta+\phi) < \pi$이다. 따라서 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$이고, 이를 약분하면

$$\tan\frac{\phi-\theta}{2} = \frac{g}{r\omega^2},$$

이 되어 증명이 끝난다.

장력

> **생각해 보기** 답에는 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$가 들어가도 되지만 $\phi-\theta$는 들어가면 안 된다. $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)$를 어떻게 없앨 수 있을까?

수평 방향의 식과 두 번째 합을 곱으로 바꾸는 공식으로부터

$$2T\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta) = mr\omega^2.$$

우리는 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi - \theta)$의 **탄젠트**를 알고 있으므로, 대변이 g이고 이웃변이 $r\omega^2$인 직각삼각형으로부터 코사인을 구할 수 있다. $0 < \phi - \theta < \pi$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고 $\cos\alpha > 0$이다.

$$\cos\tfrac{1}{2}(\phi - \theta) = \frac{r\omega^2}{\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}.$$

이를 대입하고 $r\omega^2$을 약분하면

$$T = \frac{m\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}{2\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)}.$$

이 결과를 멋지게 이해하는 방법이 있다. $\sqrt{(mg)^2 + (mr\omega^2)^2}$은 두 장력의 합력(resultant)의 크기이고, 서로 각 $\pi - (\theta + \phi)$(각 APB)를 이루는 크기가 같은 두 힘 T의 합력의 크기는 $2T\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)$이다.

검산

- $\omega \to \infty$이면 우변은 0으로 가므로 $\phi \to \theta$이다. 고리는 바깥으로 튕겨 나가 AB의 중점과 같은 높이에 놓이게 되는데, 이는 중력을 무시할 수 있을 때 예상되는 결과이다.
- $\omega \to 0$이면 $\tan\frac{1}{2}(\phi - \theta) \to \infty$이므로 $\phi - \theta \to \pi$이다. 즉 줄이 곧게 아래로 늘어지는데, 회전이 없을 때 가능한 경우는 이것뿐이다.
- 수치적으로는 A, B, P를 무작위로 배치하고, 벡터 운동 방정식으로부터 T와 ω^2을 직접 구한 뒤, 좌표로부터 θ와 ϕ를 측정하여 두 결과와 비교하였다. 약 8000개의 경우에서 가장 큰 상대 오차는 3×10^{-12}였다.

흔한 실수

- 서로 다른 두 장력 T_1, T_2를 사용하는 것. 고리가 매끄러우면 줄은 하나이고 장력도 하나이다. 장력이 서로 다르다면 문제가 결정되지 않는다.
- PB의 장력의 연직 성분의 부호를 틀리는 것. 이 줄은 P를 B 쪽으로 **아래로** 당긴다.
- $\cos\frac{1}{2}(\phi - \theta)$에 대해 음의 제곱근을 택하는 것. 그러면 장력이 음수가 된다.

STEP 너머

줄의 길이가 주어지면 고리는 A와 B를 초점(foci)으로 하는 타원(ellipse) 위에 놓이고, 줄은 P에서의 접선과 같은 각을 이룬다. 이것이 타원의 반사 성질(reflection property)이다. 따라서 장력의 합력은 타원의 법선(normal) 방향을 향하는데, 이는 그 모양으로 구부린 매끄러운 철사의 수직항력(reaction)과 똑같다. 구속 조건(constraints)을 곡면에 수직인

힘으로 생각하는 것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 이런 종류의 회전계에 관한 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 1997, 문제 11

역학 • 저항을 받는 운동

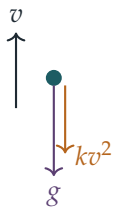
> **STEP I 1997, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q11

핵심 아이디어

저항력(resistance)은 속도에 따라 달라지는데, 우리가 원하는 것은 시간이 아니라 **거리**의 함수로서의 속도이다. 그래서 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$로 쓴다. $w = v^2$을 미지함수로 잡으면 운동 방정식은 **선형** 1계 미분방정식(linear first-order equation)이 되고, 적분인자(integrating factor)를 쓰면 곧바로 풀린다. 마지막 소문항은 하나의 물리적 사실에 달려 있다. 저항력은 언제나 운동을 방해하므로, 입자가 방향을 바꾸면 저항력의 방향도 바뀐다.

풀이

입자를 연직선 위에서 움직이는 단위 질량의 점으로 모형화하고, 이 입자에 무게 g(아래 방향)와 속도의 반대 방향으로 크기 kv^2인 저항력이 작용한다고 하자. s는 발사한 지점에서 위쪽으로 잰다.



올라갈 때



내려올 때

위로 올라가는 운동

입자가 올라가는 동안 속도 v는 위쪽을 향하므로, 저항력 kv^2은 무게와 함께 아래쪽으로 작용한다. 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(질량 1)에 의해

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g - kv^2,$$

이다. 여기서 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$를 이용하였다. $w = v^2$으로 두면 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} + 2kw = -2g.$$

이 식은 w에 대하여 선형이다. 적분인자 e^{2ks}를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(w\,\mathrm{e}^{2ks}\right) = -2g\,\mathrm{e}^{2ks} \quad\Longrightarrow\quad w\,\mathrm{e}^{2ks} = -\frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{2ks} + C.$$

$s = 0$일 때 $w = u^2$이므로 $C = u^2 + \frac{g}{k}$이다. 따라서

$$v^2 = \left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2ks} - \frac{g}{k} = u^2\mathrm{e}^{-2ks} + \frac{g}{k}\left(\mathrm{e}^{-2ks} - 1\right),$$

이고, 이것이 구하려던 $(*)$이다. $(v\,\mathrm{d}v/(g + kv^2) = -\mathrm{d}s$로 변수분리(separation of variables)하여 로그를 얻는 방법도 똑같이 잘 된다.)

최고 높이

입자는 $v = 0$일 때 상승을 멈춘다. $(*)$의 우변은 s에 대하여 순감소하므로 이런 일은 정확히 한 번, 최고 높이 H에서 일어난다. $(*)$에 $v = 0$을 대입하면

$$\left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2kH} = \frac{g}{k} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{2kH} = 1 + \frac{ku^2}{g},$$

이므로

$$H = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{ku^2}{g}\right).$$

내려오는 경로

생각해 보기 $(*)$를 유도할 때 운동 방향은 한 번도 언급되지 않았다. 그렇다면 왜 이 식이 계속 성립하면 안 되는가?

사실 유도 과정에서는 저항력의 부호를 통해 방향을 사용하였다. 내려올 때는 속도가 아래쪽을 향하므로, 저항력 kv^2은 이제 무게와 반대인 **위쪽**으로 작용한다. s는 여전히 위쪽으로 재고 v는 위 방향 속도로 두면, 방정식은

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g + kv^2, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - 2kw = -2g,$$

가 되어 다른 미분방정식이 된다. 그러므로 내려오는 경로에서는 $(*)$가 성립하지 않는다.

이를 구체적으로 확인하기 위해 $s = H$에서 $w = 0$이라는 조건으로 새 방정식을 풀어 보자. 적분인자 e^{-2ks}를 쓰면 $w = \frac{g}{k} + D\mathrm{e}^{2ks}$를 얻고, $w(H) = 0$이므로 $D = -\frac{g}{k}\mathrm{e}^{-2kH}$이어야 한다.

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2k(H-s)}\right) \qquad (0 \le s \le H).$$

$u^2 + \frac{g}{k} = \frac{g}{k}\mathrm{e}^{2kH}$를 이용하면 식 $(*)$는 $v^2 = \frac{g}{k}\left(\mathrm{e}^{2k(H-s)} - 1\right)$로 쓸 수 있다. $x = 2k(H-s) \ge 0$으로 두면 두 식은 각각 $\frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-x})$와 $\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{x} - 1)$이고,

$$(\mathrm{e}^{x} - 1) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2 = \left(\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}\right)^2 > 0 \quad \text{단, } x > 0.$$

따라서 $(*)$는 꼭대기보다 아래의 모든 점에서 틀린 속력을 준다(두 식은 둘 다 0이 되는 $s = H$에서만 일치한다). 즉 $(*)$는 내려올 때의 속력을 실제보다 크게 어림한다.

빠른 물리적 논증도 있다. 식 $(*)$는 v^2을 높이만의 함수로 주므로, 만약 이 식이 내려올 때도 성립한다면 입자는 각 높이를 올라갈 때와 같은 속력으로 지나고, 출발점에 속력 u로 돌아올 것이다. 그러나 저항력은 운동 내내 음의 일을 하므로 입자는 에너지를 잃었고, 따라서 더 느리게 돌아와야 한다. 실제로 $s = 0$에서 올바른 공식은

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \frac{1}{1 + ku^2/g}\right) = \frac{u^2}{1 + ku^2/g} < u^2.$$

을 준다.

검산

- $k \to 0$일 때 $\ln(1 + ku^2/g) \approx ku^2/g$이므로 $H \to u^2/(2g)$가 되어 익숙한 저항이 없을 때의 높이가 나온다. 또 $(*)$는 $v^2 = u^2 - 2gs$로 수렴한다($\mathrm{e}^{-2ks} \approx 1 - 2ks$로 전개하면 된다).
- 수치적으로 $u = 10$, $k = 0.05$, $g = 9.8$로 두고 운동 방정식을 단계별로 계산하면 $H \approx 4.1224$를 얻는데, 이는 $\frac{1}{0.1}\ln(1 + \frac{5}{9.8}) = 4.12245$와 일치한다. 입자는 $v^2 \approx 66.22$로 돌아오며, 이는 $u^2 = 100$이 아니라 $u^2/(1 + ku^2/g)$와 일치한다. 절반쯤 내려왔을 때 $v^2 \approx 36.51$인 반면 $(*)$는 44.87을 준다.

흔한 실수

- 운동 전체에 대한 하나의 방정식에서 저항력을 $-kv^2$으로 쓰는 것: $v^2 \ge 0$이므로 이 항은 언제나 같은 방향을 가리키며, 바로 이 때문에 하나의 공식으로 두 구간을 모두 다룰 수 없다. (하나의 방정식으로 쓰려면 $-kv|v|$가 필요하다.)

▶ $\frac{dv}{dt}$를 써서 v를 t에 대한 식으로 푼 다음, t를 소거하느라 고생하는 것: $v\,\frac{dv}{ds}$를 쓰면 곧장 답에 이른다.

STEP 너머

속도의 제곱에 비례하는 항력(quadratic drag)은 공기 중을 빠르게 움직이는 공에 대한 좋은 모형이며, 내려오는 운동의 방정식은 **종단 속도**(terminal velocity)를 보여 준다. 낙하가 길어질수록 $v^2 \to g/k$가 된다. 항력을 $-kv|v|$로 쓰면 운동 전체에 대한 하나의 비선형 방정식을 얻는데, 대학 1학년 역학의 많은 부분이 이처럼 힘이 속도에 따라 달라지고 에너지가 보존되지 않는 방정식을 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘과 종단 속도를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1997, 문제 12

확률과 통계 • 중심극한정리

> **STEP I 1997, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q12

핵심 아이디어

이차방정식(quadratic equation)을 직접 풀어서 X를 T의 간단한 함수로 나타낸다. 그러면 X에 관한 모든 질문은 분포를 완전히 알고 있는 T에 관한 질문으로 바뀐다. 깔끔하게 단순화할 수 있는 점은 $1-T$ 역시 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다는 것이다. 마지막 부분은 서로 독립(independent)인 여러 복사본의 합에 관한 것이므로, 중심극한정리(central limit theorem)를 사용하라는 신호이다.

풀이

X의 분포

근의 공식(quadratic formula)에 의해 $x^2+2x+T=0$의 근은 $x=-1\pm\sqrt{1-T}$이다. $0\le T\le 1$이므로 이 근들은 실수이고, 더 큰 근은 플러스 부호를 택한 것이다.

$$X=-1+\sqrt{1-T}.$$

T가 $[0,1]$ 전체를 움직이면 X는 $[-1,0]$ 전체를 움직인다.

$U=1-T$라 하자. T가 $[0,1]$에서 균등분포를 따르므로 U도 그렇다. 구간을 중점에 대해 뒤집어도 균등한 밀도는 바뀌지 않기 때문이다. 따라서 $U\sim \mathrm{U}[0,1]$에 대하여 $X=\sqrt{U}-1$이다.

$X>-\frac{1}{3}$일 확률

$X+1=\sqrt{U}$이고 양변이 모두 음이 아니므로

$$X>-\tfrac{1}{3} \iff \sqrt{U}>\tfrac{2}{3} \iff U>\tfrac{4}{9}.$$

양변이 모두 음이 아니므로 제곱해도 부등식(inequality)의 방향은 유지된다. 따라서

$$\mathrm{P}\left(X > -\tfrac{1}{3}\right) = \mathrm{P}\left(U > \tfrac{4}{9}\right) = 1 - \tfrac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

(같은 말로, $T < \frac{5}{9}$이다.)

평균과 분산

$U \sim \mathrm{U}[0,1]$의 밀도는 $[0,1]$에서 1이므로

$$\mathrm{E}(\sqrt{U}) = \int_0^1 u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}, \qquad \mathrm{E}((\sqrt{U})^2) = \mathrm{E}(U) = \frac{1}{2}.$$

그러므로 평균(mean)은

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(\sqrt{U}) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

상수를 빼도 분산(variance)은 바뀌지 않으므로

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(\sqrt{U}) = \mathrm{E}(U) - \left(\mathrm{E}\sqrt{U}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

> **생각해 보기** 이 적률(moment)들을 구하는 데 X의 확률밀도함수(probability density function)가 필요한가?

필요하지 않다. 임의의 함수 g에 대하여 $\mathrm{E}(g(U)) = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u$이므로 U를 가지고 직접 계산할 수 있다. 그래도 밀도를 구하고 싶다면, $-1 \le x \le 0$일 때 $\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}(U \le (x+1)^2) = (x+1)^2$이므로 X는 $[-1,0]$에서 밀도 $2(x+1)$을 가진다. 이 구간에서 $x \cdot 2(x+1)$을 적분해도 $-\frac{1}{3}$을 얻는다.

800개 근의 합

각 시행이 독립이므로 X_i들도 독립이고, 각각의 평균은 $-\frac{1}{3}$, 분산은 $\frac{1}{18}$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(Y) = 800 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) = -\frac{800}{3}, \qquad \mathrm{Var}(Y) = 800 \cdot \frac{1}{18} = \frac{400}{9},$$

이며, 여기서 분산을 더하는 단계에 독립성이 쓰인다. Y의 표준편차(standard deviation)는 $\frac{20}{3}$이다.

800은 충분히 크므로, 중심극한정리에 의해 Y는 근사적으로 $\mathrm{N}\left(-\frac{800}{3}, \frac{400}{9}\right)$을 따른다. 구하려는 것은

$$\mathrm{P}(Y \le K) \approx \Phi\left(\frac{K + \frac{800}{3}}{20/3}\right) = 0.08.$$

표에서 $\Phi(1.405) \approx 0.92$이므로, 대칭성에 의해 $\Phi(-1.405) \approx 0.08$이다. 따라서

$$\frac{K + \frac{800}{3}}{20/3} \approx -1.405,$$
$$K \approx -\frac{800}{3} - 1.405 \times \frac{20}{3} \approx -266.67 - 9.37 \approx -276.$$

? 생각해 보기 연속성 수정이 필요하지 않은가?

필요하지 않다. 각 X_i가 연속확률변수(continuous random variable)이므로 Y도 연속확률변수이고, 따라서 연속성 수정(continuity correction)은 필요 없다. 연속성 수정은 이항분포(binomial distribution)와 같은 이산분포를 정규분포로 근사할 때에만 쓴다.

검산

- 근이 맞는지 확인한다. $T = 0$일 때 방정식은 $x(x+2) = 0$이고, 더 큰 근은 $0 = -1 + \sqrt{1}$이다.
- $\mathrm{E}(X) = -\frac{1}{3}$은 $[-1, 0]$ 안에 있고, 밀도 $2(x+1)$은 0 쪽으로 기울어져 있으므로 평균이 중점 $-\frac{1}{2}$보다 큰 것이 타당하다.
- T의 값 400 000개로 시뮬레이션한 결과 $\mathrm{P}(X > -\frac{1}{3}) \approx 0.555$, 평균 ≈ -0.3337, 분산 ≈ 0.0556을 얻었다. Y를 직접 4000번 시뮬레이션한 결과 $\mathrm{P}(Y \leq -276.03) \approx 0.083$을 얻었으며, 이는 0.08과 잘 맞는다.

흔한 실수

- 근의 공식에서 마이너스 부호를 택하는 것. 그러면 더 작은 근이 나온다.
- $\mathrm{Var}(Y) = 800^2 \mathrm{Var}(X)$라고 쓰는 것. 이것은 서로 독립인 800개 복사본의 합의 분산이 아니라 $800X_1$의 분산이다.
- -1.405 대신 $+1.405$를 쓰는 것. 확률 0.08은 아래쪽 꼬리에 해당하므로 K는 평균보다 작아야 한다.

STEP 너머

균등분포를 따르는 U에 대하여 $X = g(U)$로 쓰는 기법은 거꾸로도 작동한다. F가 임의의 연속인 분포함수(distribution function)이면 $F^{-1}(U)$의 분포함수는 F이다. 이 **역변환법**(inverse transform method)은 컴퓨터가 균등 난수로부터 확률변수를 시뮬레이션하는 방법이다. 여기서 블랙박스처럼 사용한 중심극한정리는 대학의 첫 확률론 강의에서 적률생

성함수(moment generating function)나 특성함수(characteristic function)를 이용해 증명한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)이 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP I 1997, 문제 13

확률과 통계 • 조건부 확률

> **STEP I 1997, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q13

핵심 아이디어

Blond 씨가 전등을 켜야 하는지는 어떤 종류의 함정이 기다리고 있는지에만 달려 있다. 따라서 문제 전체는 하나의 조건부확률(conditional probability)로 귀결된다. 바로 카나리아가 없다는 조건 아래에서 함정이 폭탄이 아니라 아나콘다일 확률이다. 암살자가 누구인지는 어떤 무기가 쓰이는지에 영향을 주기 때문에만 의미가 있다. 그러므로 두 단계(암살자, 그다음 무기)를 전확률 법칙(law of total probability)으로 결합하고, "카나리아 없음"을 조건으로 둔 다음, 두 가지 사망 위험을 비교한다.

풀이

설정하기

$i = 1, 2, 3, 4$에 대하여 M_i를 Mr i가 함정을 설치한 사건이라 하고, A, B, C를 각각 함정이 아나콘다, 폭탄, 카나리아인 사건이라 하자. 주어진 조건은 다음과 같다.

$$P(M_i) = \frac{i}{10}, \qquad P(A \mid M_i) = \frac{i+1}{10}, \quad P(B \mid M_i) = \frac{i}{10}, \quad P(C \mid M_i) = \frac{9-2i}{10}.$$

이 값들은 서로 모순이 없다. $\frac{1+2+3+4}{10} = 1$이고, 각 i에 대하여 세 무기의 확률은 음이 아니며 그 합은 $\frac{(i+1)+i+(9-2i)}{10} = 1$이다. 암살자도 정확히 한 명, 무기도 정확히 하나이므로 사건 $M_i \cap A$, $M_i \cap B$, $M_i \cap C$는 모든 경우를 분할(partition)한다.

침묵이 알려 주는 것

전확률 법칙에 의하여

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(A \mid M_i) = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5}{100} = \frac{40}{100},$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(B \mid M_i) = \frac{1 + 4 + 9 + 16}{100} = \frac{30}{100}.$$

따라서 $P(C') = P(A) + P(B) = \frac{70}{100}$이다. (검산하면 $P(C) = \frac{7+10+9+4}{100} = \frac{30}{100}$이다.)

생각해 보기 지금 어느 암살자일 가능성이 가장 큰지 계산해야 할까?

그렇지 않다. 노랫소리가 들리지 않았다는 사실은 각 암살자에 대한 확률을 바꾸기는 하지만, 사망 위험은 무기에만 달려 있다. $A \subseteq C'$이고 $B \subseteq C'$이므로, C'을 조건으로 두는 것은 두 확률의 크기를 같은 비율로 조정하는 것일 뿐이다.

$$P(A \mid C') = \frac{P(A)}{P(C')} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}, \qquad P(B \mid C') = \frac{P(B)}{P(C')} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

암살자에 대한 정보는 이미 이 두 수 안에 반영되어 있다.

두 선택 비교하기

K를 Blond 씨가 죽는 사건이라 하자. C'을 조건으로 두면 함정은 아나콘다이거나 폭탄이고, 그의 운명은 함정과 그의 선택에만 달려 있다.

전등을 켤 때. 폭탄은 확률 $\frac{1}{2}$로 그를 죽이고, 아나콘다는 확률 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$으로 그를 죽인다. 따라서

$$P(K \mid C',\ 켬) = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{42} + \frac{8}{42} = \frac{17}{42}.$$

전등을 끌 때. 폭탄은 절대 그를 죽이지 않고, 아나콘다는 확률 $\frac{1}{2}$로 그를 죽인다. 따라서

$$P(K \mid C',\ 끔) = \frac{3}{7}\cdot 0 + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{7} = \frac{12}{42}.$$

$\frac{12}{42} < \frac{17}{42}$이므로 **Blond 씨는 전등을 켜지 않고 아파트에 들어가야 한다.** 이때 그가 살아남을 확률은 $\frac{5}{7}$(약 71%)이며, 전등을 켜면 $\frac{25}{42}$(약 60%)이다.

그 이유는 아나콘다가 더 가능성이 큰 함정이지만, 전등이 실제로 상황을 악화시키는 것은 폭탄 쪽이기 때문이다. 전등을 켜면 아나콘다의 위험은 $\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{3}$으로 줄어들지만 폭탄의 위험은 0에서 $\frac{1}{2}$로 늘어난다. 아나콘다일 확률이 $\frac{4}{7}$이므로 전등은 $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{42}$만큼 이득을 주고, 폭탄일 확률이 $\frac{3}{7}$이므로 $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{42}$만큼 손해를 준다. 손해가 더 크다.

검산

- 그가 귀를 기울이기 전이라면, 위험은 전등을 켤 때 $\frac{30}{100}\cdot\frac{1}{2}+\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{3}$, 끌 때 $\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{2}$이다. 이는 위의 답에 $\frac{7}{10}$을 곱한 것으로, 카나리아는 어느 쪽 비교에도 기여하지 않으므로 마땅히 그래야 한다.
- 전등을 끄는 전략은 $p=P(A\mid C')$가 $\frac{1}{2}p<\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{3}p$를 만족할 때, 즉 $p<\frac{3}{4}$일 때 언제나 더 낫다. 여기서 $p=\frac{4}{7}$이므로 이 기준보다 넉넉히 작다.
- 10^6번의 저녁을 시뮬레이션(simulation)하면 사망률이 전등을 켤 때 약 0.404, 끌 때 약 0.286으로 나오며, 이는 $\frac{17}{42}\approx 0.405$, $\frac{2}{7}\approx 0.286$과 일치한다.

흔한 실수

- "카나리아 없음"을 조건으로 두는 것을 잊고, $P(A)=0.4$와 $P(B)=0.3$을 그것이 전부인 것처럼 사용하는 것. 결론은 같게 나오지만 사망 확률은 틀린다.
- 생존과 사망을 혼동하는 것. 전등을 켰을 때 아나콘다에 대한 수치는 **생존** 확률 $\frac{2}{3}$이므로, 사망 확률은 $\frac{1}{3}$이다.
- 암살자들이 같은 확률을 가진다고 보거나, 암살자 단계를 무시하고 무기 확률들의 평균을 내는 것.

STEP 너머

이것은 **결정 이론**(decision theory)의 작은 문제이다. 사후 분포(posterior distribution) 아래에서 기대 손실(expected loss)을 최소화하는 행동을 고르는 것이며, 여기서 "손실"은 그저 사망 확률이다. $P(A\mid C')$만이 중요하다는 관찰, 그리고 최선의 행동이 바뀌는 문턱값 $p<\frac{3}{4}$는 이러한 결정을 분석하는 전형적인 방식을 보여 준다. 즉 자료는 사후 분포를 바꾸고, 사후 분포는 행동을 결정한다. 조건부확률과 베이즈 갱신(Bayesian updating)에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 1997, 문제 14

확률과 통계 • 기대 비용의 최소화

STEP I 1997, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q14

핵심 아이디어

비용 T는 확률변수(random variable) X의 함수이므로, 그 기댓값(expectation)은 이 함수에 확률밀도함수(density)를 곱해 적분한 것이다. 적분을 $x = y$에서 나누면 $\mathrm{E}(T)$는 y에 대한 평범한 함수가 되고, 이를 최소화하는 것은 대학 1학년 수준의 미적분 연습이다. 미분하여 0으로 놓고, 그 정류점(stationary point)이 실제로 최솟값(minimum)인지 확인하면 된다.

풀이

대비의 양이 음수인 것은 의미가 없으므로 $y \geq 0$이라 하자. $T = g(X)$로 쓰고, 여기서

$$g(x) = \begin{cases} y & x \leq y, \\ y + r + s(x - y) & x > y. \end{cases}$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(T) &= \int_0^\infty g(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty y\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_y^\infty \big(r + s(x-y)\big)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

이다. 여기서 어떤 경우에도 지불하는 비용 y를 따로 떼어 냈다. 확률밀도함수를 적분하면 1이므로 첫 번째 적분은 y이다.

두 번째 적분에서는 $u = x - y$로 치환한다. 그러면 $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-u}$이고 u는 0부터 ∞까지 변

한다.

$$\begin{aligned}\int_y^\infty (r+s(x-y))\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^{-y}\int_0^\infty (r+su)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{-y}\left(r\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u + s\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\right) \\ &= \mathrm{e}^{-y}(r+s),\end{aligned}$$

이때 $\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$ (부분적분(integration by parts))을 이용하였다. 따라서

$$C(y) = \mathrm{E}(T) = y + (r+s)\,\mathrm{e}^{-y}.$$

생각해 보기 적분하지 않고 인수 $\mathrm{e}^{-y}(r+s)$를 알아볼 방법이 있을까?

있다. 홍수 피해는 확률 $\mathrm{P}(X > y) = \mathrm{e}^{-y}$로 일어난다. 피해가 일어났다는 조건 아래에서 초과량 $X - y$는 다시 평균이 1인 지수분포를 따르므로(지수분포(exponential distribution)는 **무기억성**(*memoryless*)을 가진다), 기대 피해액은 $r + s\cdot 1$이다. 둘을 곱하면 $(r+s)\mathrm{e}^{-y}$를 얻는다.

이제 최소화하자. 미분하면

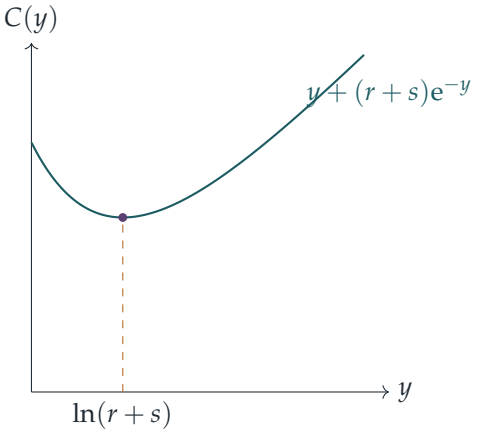
$$C'(y) = 1 - (r+s)\mathrm{e}^{-y}, \qquad C''(y) = (r+s)\mathrm{e}^{-y} > 0.$$

이다. 따라서 $C'(y) = 0$인 것은 정확히 $\mathrm{e}^y = r+s$, 즉 $y = \ln(r+s)$일 때이다. 모든 y에 대해 $C'' > 0$이므로 C는 볼록(convex)하고 C'은 증가한다. 따라서 C는 $y < \ln(r+s)$에서 감소하고 $y > \ln(r+s)$에서 증가한다. 그러므로 이 정류점은 전역 최솟값(global minimum)이고, 기대 총비용은

$$y = \ln(r+s),$$

로 택할 때 최소가 되어 원하는 결과를 얻는다. 최소 기대 비용은 $C\big(\ln(r+s)\big) = \ln(r+s) + 1$이다.

이를 위해서는 $\ln(r+s) \geq 0$, 즉 $r+s \geq 1$이어야 하며, 이는 암묵적으로 가정되어 있다. 만약 $r+s < 1$이면 모든 $y \geq 0$에 대해 $C'(y) > 0$이므로 최선의 선택은 $y = 0$이다. 피해가 너무 싸서 대비할 가치가 전혀 없는 것이다.



($r+s=3$으로 그린 개형이다.)

검산

- $y=0$이면 항상 피해를 입으며, $\mathrm{E}(T)=r+s\,\mathrm{E}(X)=r+s$이므로 $C(0)$과 일치한다.
- $r=2$, $s=3$이면 공식은 $y=\ln 5\approx 1.609$와 최소 비용 $1+\ln 5\approx 2.609$를 준다. $C(y)$를 촘촘한 격자 탐색(grid search)으로 조사해도 같은 최소점을 얻으며, $y=1$에서 4×10^5년을 모의실험(simulation)한 결과 평균 비용은 2.844로, 공식의 값 $1+5\mathrm{e}^{-1}\approx 2.839$와 비슷하였다.
- $r+s$가 커지면 y도 커진다. 상식대로, 홍수 피해가 클수록 더 많이 대비할 만하다.

흔한 실수

- 대비 비용 y를 $X\le y$일 때만이 아니라 **매년** 지불한다는 사실을 잊는 것.
- $sx\,\mathrm{e}^{-x}$는 적분하면서 $-sy\,\mathrm{e}^{-x}$ 항을 빠뜨려, $\mathrm{e}^{-y}(r+s)$ 대신 $\mathrm{e}^{-y}(r+s+sy)$를 얻는 것.
- 정류점을 찾고 나서 그것이 최솟값임을 보이지 않는 것.

STEP 너머

이것은 불확실성 아래에서의 의사결정(decision-making under uncertainty)의 작은 예로, 기대 손실(expected loss)을 최소화하는 행동을 고르는 문제이다. 확실한 비용과 기대 벌칙 사이의 균형을 잡는 같은 구조가 운용과학(operations research)의 "신문팔이 문제(newsvendor problem)"와 통계학의 베이즈 결정(Bayes decisions)이라는 개념의 바

탕에 있다. 위에서 사용한 무기억성은 연속분포 가운데 지수분포를 특징짓는 성질이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 성질과 함께 확률변수의 함수의 기댓값을 다룬다.

풀이

STEP II 1997, 문제 1

순수수학 • 자릿수의 합과 경우의 수

> **STEP II 1997, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q1

핵심 아이디어

수를 하나하나 나열하지 말고, 먼저 개수를 센 다음 각 자릿값(place value)의 기여를 따로 따로 더한다. 허용된 각 숫자는 끝의 세 자리 각각에 똑같은 횟수만큼 나타나므로, 합은 거의 저절로 계산된다. 더 좋은 방법도 있다. 대칭(symmetry)을 이용하는 것이다. 각 숫자 d를 $7-d$로 바꾸면 $0 \leftrightarrow 7, 2 \leftrightarrow 5$가 서로 맞바뀌므로, 수들이 합이 일정한 쌍으로 짝지어지고 인수분해(factorisation)가 곧바로 나온다.

풀이

어떤 수가 조건을 만족하는가?

1000과 6000 사이에서 조건을 만족하는 수는 네 자리 수이고, 천의 자리 숫자는 $0, 2, 5, 7$ 중 하나여야 한다. 0일 수는 없고(그러면 네 자리보다 적어진다), 7일 수도 없다(그러면 7000보다 큰 수가 된다). 따라서 천의 자리 숫자는 2 또는 5이고, 이렇게 만든 2000부터 5777까지의 모든 수는 범위 안에 있다. 양 끝값 1000과 6000 자체는 숫자 1과 6을 포함하므로, "사이"가 양 끝을 포함하는지는 상관없다.

나머지 세 자리의 숫자는 각각 허용된 네 숫자 중 어느 것이든 독립적으로 될 수 있다. 따라서 이러한 수는

$$2 \times 4 \times 4 \times 4 = 128$$

개이다.

자릿값별로 더하기

천의 자리. 128개의 수 중 절반인 64개는 2로 시작하고, 나머지 64개는 5로 시작한다. 천의 자리 숫자들의 기여는

$$64 \times (2+5) \times 1000 = 448\,000.$$

이다.

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리. 이 중 한 자리를 고정하자. 그 자리에 어떤 숫자가 오든 나머지 자리의 숫자를 고르는 방법의 수는 같으므로, 네 숫자 각각은 그 자리에 정확히 $128/4 = 32$개의 수에서 나타난다. 따라서 그 자리의 숫자 합은 $32 \times (0+2+5+7) = 32 \times 14 = 448$이다. 세 자리의 가중치는 각각 100, 10, 1이므로, 이들의 기여를 모두 합하면

$$448 \times (100+10+1) = 448 \times 111 = 49\,728.$$

이다.

이를 더하면 구하는 합은

$$S = 448 \times 1000 + 448 \times 111 = 448 \times 1111 = 497\,728.$$

이다.

소수의 곱으로 나타내기

$448 = 64 \times 7 = 2^6 \times 7$이고 $1111 = 11 \times 101$이며, 여기서 101은 소수(prime)이다(2, 3, 5, 7로 나누어떨어지지 않고, $11^2 > 101$이다). 따라서

$$S = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101.$$

> ? **생각해 보기** 자릿값별 계산 없이 답을 알아내는 방법이 있을까?

있다. n이 조건을 만족하면 $7777 - n$도 조건을 만족한다. 7777에서 자리별로 빼면 받아내림이 전혀 생기지 않고, 각 숫자 d가 $7-d$로 바뀌는데, 이 대응은 $\{0,2,5,7\}$을 자기 자신으로 보내며 맨 앞자리 숫자 2와 5를 맞바꾼다. 따라서 128개의 수는 합이 각각 7777인 64개의 쌍으로 나뉜다(7777은 홀수이므로 자기 자신과 짝지어지는 수는 없다). 그러므로

$$S = 64 \times 7777 = 2^6 \times 7 \times 1111 = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101,$$

이고, 이는 위의 계산 결과와 일치한다.

검산

1000부터 6000까지를 컴퓨터로 간단히 탐색하면 조건을 만족하는 수가 정확히 128개이고 그 합이 497 728임을 확인할 수 있으며, $2^6 \times 7 \times 11 \times 101 = 64 \times 7777 = 497\,728$이다. 크

기가 타당한지 확인해 보면, 조건을 만족하는 수의 평균은 $7777/2 = 3888.5$로, 범위 2000부터 5777까지의 한가운데에 잘 자리 잡고 있다.

흔한 실수

- 맨 앞자리 숫자로 7을 허용하거나(6000보다 큰 수가 생긴다), 0이 맨 앞에 올 수 없다는 것을 잊는다.
- 천의 자리에서도 각 숫자가 $128/4$번씩 나타난다고 말한다. 천의 자리에는 2와 5만 각각 64번씩 나타난다.
- 1111을 11×101로 분해하지 않고 497 728이나 448×1111에서 멈춘다.

STEP 너머

각 숫자가 각 자리에 몇 번 나타나는지 세는 것은 **이중 셈**(double counting) 논법의 가장 간단한 예이다. $7777 - n$ 짝짓기는 가우스(Gauss)의 공식 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$을 얻을 때와 같은 종류의 대칭 논법이다. 각 자리 숫자가 정해진 집합에서 나오는 수와 그 합은 초등 정수론(number theory)과 조합론(combinatorics)의 단골 주제이며, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 다음 단계로 읽기에 훌륭한 책이다.

풀이

STEP II 1997, 문제 2

순수수학 • 점화식

> **STEP II 1997, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q2

핵심 아이디어

이 연쇄 등식은 사실 점화식(recurrence)이 모습을 바꾼 것이다. 각 고리는 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$이라는 뜻이므로, 각 항이 다음 항을 결정한다. 처음 몇 항을 분수로 계산하고 분자와 분모를 유심히 살펴보자. 곧 2의 거듭제곱이 나타나고, 일단 추측을 세우면 점화식이 수학적 귀납법(induction)에 필요한 단계를 정확히 제공한다.

풀이

규칙 찾기

연쇄 등식을 한 번에 하나씩 읽으면

$$\frac{2}{x_1} = 3 \qquad \text{그리고} \qquad x_n + \frac{2}{x_{n+1}} = 3 \quad (n \geq 1),$$

이므로

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}.$$

이다. (이 점화식은 $x_n \neq 3$일 때만 의미가 있다. 모든 x_n이 0과 1 사이에 있음을 곧 보게 된다.) 처음 몇 항을 계산하면 다음과 같다.

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{7}, \qquad x_3 = \frac{2}{3 - \frac{6}{7}} = \frac{14}{15}, \qquad x_4 = \frac{2}{3 - \frac{14}{15}} = \frac{30}{31}.$$

분모 $3, 7, 15, 31$은 각각 2의 거듭제곱보다 1 작은 수, 즉 $2^{n+1} - 1$이고, 각 분자는 분모보다 1 작다. 따라서 다음과 같이 추측한다.

$$x_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

귀납법에 의한 증명

$P(n)$을 명제 $x_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$이라 하자.

기저 단계(base case). $n = 1$일 때 공식은 $\frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3} = x_1$을 주므로 $P(1)$은 참이다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $P(k)$가 참이라고 가정하자. 계산을 깔끔하게 하기 위해 $N = 2^{k+1}$로 두면 $x_k = \dfrac{N-2}{N-1}$이다. 그러면

$$3 - x_k = \frac{3(N-1)-(N-2)}{N-1} = \frac{2N-1}{N-1},$$

이고, 이 값은 0이 아니다(실제로 $x_k < 1$이므로 2보다 크다). 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$x_{k+1} = \frac{2}{3-x_k} = \frac{2(N-1)}{2N-1} = \frac{2N-2}{2N-1}.$$

> **생각해 보기** 왜 이것이 $n = k+1$일 때의 공식인가?

$2N = 2^{k+2} = 2^{(k+1)+1}$이기 때문이다. 따라서

$$x_{k+1} = \frac{2^{(k+1)+1}-2}{2^{(k+1)+1}-1},$$

이고, 이것은 정확히 $P(k+1)$이다.

$P(1)$이 참이고 모든 $k \geq 1$에 대하여 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$이므로, 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$은 참이다. 이로써 모든 n에 대하여 $0 < x_n < 1$임도 확인되므로, 분모 $3 - x_n$은 결코 0이 되지 않는다.

"다른 방법": 선형화

추측한 공식을 직접 **유도**할 수도 있다. $x_{n+1} = 2/(3-x_n)$ 꼴의 점화식은 0이 아닌 항으로 이루어진 새로운 수열 (a_n)에 대하여 $x_n = 2a_n/a_{n+1}$로 놓으면 선형(linear)이 된다. 대입하면

$$\frac{2a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{2}{3-\frac{2a_n}{a_{n+1}}} = \frac{2a_{n+1}}{3a_{n+1}-2a_n}, \qquad \text{따라서} \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

특성방정식(auxiliary equation) $t^2 - 3t + 2 = 0$의 근은 1과 2이므로 $a_n = A + B \cdot 2^n$이다. $a_1 = 1$(a의 배율은 자유롭게 정할 수 있다)과 $a_2 = 3$($x_1 = 2a_1/a_2 = \frac{2}{3}$이 되도록)으로 잡으면 $a_n = 2^n - 1$이고, 따라서 $x_n = \dfrac{2(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$으로 같은 공식을 얻는다.

검산

- 공식에 $n = 0$을 넣으면 $x_0 = 0$이 되는데, 실제로 첫 번째 등식 $3 = 2/x_1$은 일반적인 고리 $x_0 + 2/x_1 = 3$에서 $x_0 = 0$인 경우이다. 깔끔한 일관성 검사이다.
- $n \to \infty$일 때 $x_n \to 1$이다. 점화식의 극한 L은 $L = 2/(3 - L)$, 즉 $L^2 - 3L + 2 = 0$을 만족해야 하므로 $L = 1$ 또는 $L = 2$이고, 우리 수열이 아래에서 다가가는 것은 1이다.
- $x_1 = \frac{2}{3}$에서 시작하여 $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$을 정확한 분수로 반복 계산하면 40 이하의 모든 n에 대하여 공식과 일치한다. 예를 들어 $x_5 = \frac{62}{63}$이다.

흔한 실수

- 연쇄 등식을 잘못 읽는 것: 등식은 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$이지 $x_{n+1} + 2/x_n = 3$이 아니다. 이를 틀리면 다른 수열이 나온다.
- "규칙이 계속된다"에서 멈추는 것. 문제는 증명을 요구하며, 몇 개의 항은 단지 증거일 뿐이다.
- 귀납 단계에서 $2 \cdot 2^{k+1}$을 $2^{(k+1)+1}$로 고쳐 쓰는 것을 잊어, 결론이 명제 $P(k+1)$임이 눈에 보이지 않게 되는 것.

STEP 너머

$x_{n+1} = (ax_n + b)/(cx_n + d)$ 꼴의 점화식은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 반복이며, "다른 방법"에서처럼 언제나 선형화할 수 있다. 이와 동치로, 2×2 행렬(matrix) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 거듭제곱을 추적할 수도 있는데, 이 행렬의 고윳값(eigenvalue, 여기서는 1과 2)이 장기적인 거동을 결정한다. 고정점(fixed point) 1과 2는 각각 끌어당기는 점과 밀어내는 점이며, 이 때문에 수열이 1에 안착한다. 행렬의 관점에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를, 수열의 수렴(convergence) 일반에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP II 1997, 문제 3

순수수학 • 부분분수를 이용한 적분

STEP II 1997, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s2-q3

핵심 아이디어

분모에 있는 두 이차식(quadratic)을 곱하면 x^4+4가 된다. 이것은 전형적인 "변장한 제곱의 차(difference of two squares)"로, $x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$이다. 일단 부분분수(partial fractions)로 분해하고 나면 각 조각은 표준적인 적분이 된다. 각 분자를 그 분모의 도함수(derivative)의 상수배와 상수의 합으로 나눈다. 앞부분은 적분하면 로그가 되고, 뒷부분은 완전제곱식으로 고치면(completing the square) 아크탄젠트(arctangent)가 된다.

풀이

부분분수

먼저

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=(x^2+2)^2-(2x)^2=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4.$$

임에 주목한다. 따라서 구하는 항등식의 양변에 x^4+4를 곱하면, 다음이 성립해야 한다.

$$(ax+b)(x^2-2x+2)+(cx+d)(x^2+2x+2)=1 \quad \text{모든} x.$$

좌변을 전개하면

$$(a+c)x^3+(b-2a+d+2c)x^2+(2a-2b+2c+2d)x+(2b+2d).$$

이다. 상수 다항식 1과 계수를 비교(comparing coefficients)하면

$$\begin{aligned} x^3: &\quad a+c=0,\\ x^2: &\quad b+d-2a+2c=0,\\ x^1: &\quad 2(a+c)+2(d-b)=0,\\ x^0: &\quad 2(b+d)=1. \end{aligned}$$

첫째 식과 셋째 식에서 $c=-a, d=b$를 얻는다. 그러면 넷째 식에서 $b=d=\frac{1}{4}$이다. 마지막으로 둘째 식은 $\frac{1}{2}-4a=0$이 되므로 $a=\frac{1}{8}$이다. 따라서

$$a=\tfrac{1}{8}, \qquad b=\tfrac{1}{4}, \qquad c=-\tfrac{1}{8}, \qquad d=\tfrac{1}{4},$$

즉

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{8}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2-x}{x^2-2x+2}\right).$$

이다. ($c=-a$와 $d=b$는 아무 계산 없이도 예측할 수 있었다. x를 $-x$로 바꾸면 $\frac{1}{x^4+4}$는 변하지 않고 두 분모는 서로 바뀌기 때문이다.)

적분

생각해 보기 $\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$는 어떻게 적분하는가?

분모의 도함수는 $2x+2$이다. 그래서 분자를 $2x+2$의 상수배와 나머지의 합으로 쓴다.

$$x+2=\tfrac{1}{2}(2x+2)+1, \qquad 2-x=-\tfrac{1}{2}(2x-2)+1.$$

완전제곱식으로 고치면 $x^2\pm 2x+2=(x\pm 1)^2+1$이다. 따라서

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}.$$

두 이차식 모두 모든 실수 x에 대하여 양수이므로, 모든 항은 $[0,1]$에서 연속이다. 앞의 두 항은 $f>0$인 f'/f 꼴이므로 적분하면 $\ln f$가 된다. 뒤의 두 항은 적분하면 아크탄젠트가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} &= \frac{1}{16}\Big[\ln(x^2+2x+2)-\ln(x^2-2x+2)\Big]_0^1+\frac{1}{8}\Big[\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{16}\big[(\ln 5-\ln 1)-(\ln 2-\ln 2)\big]\\ &\quad +\frac{1}{8}\big[(\tan^{-1}2+\tan^{-1}0)-(\tan^{-1}1+\tan^{-1}(-1))\big]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\big[\tan^{-1}2-\big(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4}\big)\big]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\tan^{-1}2, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. $\ln 2$ 항들과 $\frac{\pi}{4}$ 항들이 둘씩 상쇄되는데, 이는 앞에서 발견한 대칭성에서 비롯된 기분 좋은 결과이다.

검산

- $x = 0$에서 부분분수는 $\frac{1}{8}\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{0+4}$를 준다. $x = 1$에서는 $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{5}$를 주는데, 이 역시 맞다.
- 피적분함수는 $[0, 1]$에서 $\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{5}$로 감소하므로, 적분값은 0.2와 0.25 사이에 있어야 한다. 수치로 계산하면 $\frac{1}{16}\ln 5 + \frac{1}{8}\tan^{-1} 2 \approx 0.100589 + 0.138394 = 0.238983$이다. 이 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.2389834593을 얻으며, 유효숫자 약 16자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 실근을 찾아서 $x^4 + 4$를 실수 범위에서 인수분해하려는 것. 실근이 없으므로 인수는 이차식이어야 한다. $4x^2$을 더하고 빼서 완전제곱식을 만드는 것이 요령이다.
- 아크탄젠트 항의 아래끝을 빠뜨리는 것. $\tan^{-1}(0+1) = \frac{\pi}{4}$와 $\tan^{-1}(0-1) = -\frac{\pi}{4}$는 둘 다 포함했을 때에만 상쇄된다.

STEP 너머

인수분해 $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$는 소피 제르맹(Sophie Germain)의 항등식 $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$이다. 예를 들어 이 항등식으로부터 $n^4 + 4$는 $n = 1$일 때에만 소수(prime)임을 알 수 있다. 더 일반적으로, 복소근은 켤레(conjugate) 쌍으로 나타나므로 모든 실계수 다항식은 실계수 일차식과 이차식의 곱으로 인수분해된다. 따라서 부분분수, 그리고 이를 통한 로그와 아크탄젠트만으로 모든 유리함수(rational function)를 적분할 수 있다. 경로적분(contour integration)을 이용하면 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} = \frac{\pi}{4}$를 거의 계산 없이 구할 수 있다. 그 이유는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 설명되어 있다.

풀이

STEP II 1997, 문제 4

순수수학 • 나머지 정리

> **STEP II 1997, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q4

핵심 아이디어

차수(degree)가 d인 다항식으로 나누면 나머지(remainder)의 차수는 d보다 작고, 항등식(identity) 피제수 $=$ 제수 $\times$ 몫 $+$ 나머지는 **모든** x에 대해 성립한다. 따라서 제수를 0으로 만드는 x의 값을 대입하면 몫(quotient)이 사라지고 나머지만 남는다. 이 문제의 모든 내용은 이 한 가지 요령을 세 번 쓰는 것이다.

풀이

나머지 정리

$\mathrm{p}(x)$를 일차 다항식 $x-a$로 나누면 몫 $\mathrm{s}(x)$와 차수가 1보다 작은 나머지 R가 생기므로, R는 상수이다.

$$\mathrm{p}(x) = (x-a)\,\mathrm{s}(x) + R \qquad \text{모든} x.$$

이것은 x에 대한 항등식이므로 $x=a$를 대입할 수 있다. 우변의 첫째 항은 $0\cdot \mathrm{s}(a)=0$이 되어 $\mathrm{p}(a)=R$만 남는다. 따라서 나머지는 $\mathrm{p}(a)$이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (i)

나머지 정리(remainder theorem)에 의해 주어진 나머지들은 다음을 뜻한다.

$$\mathrm{p}(1)=3, \qquad \mathrm{p}(2)=1, \qquad \mathrm{p}(3)=5.$$

$\mathrm{p}(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{q}(x)+\mathrm{r}(x)$에 $x=1,2,3$을 대입하면 매번 첫째 항이 없어지므로

$$\mathrm{r}(1)=3, \qquad \mathrm{r}(2)=1, \qquad \mathrm{r}(3)=5.$$

? **생각해 보기** 우리는 $\mathrm{q}(x)$에 대해 아무것도 모른다. 이것이 문제가 될까?

그렇지 않다. $x = 1, 2, 3$에서 인수 $(x-1)(x-2)(x-3)$이 0이므로 q가 무엇이든 아무런 기여도 하지 않는다. r는 계수가 많아야 세 개이므로 세 개의 값으로 완전히 결정된다.

차수가 2 이하인 다항식을 다음과 같이 쓰면 편리하다.

$$\mathrm{r}(x) = A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C,$$

이렇게 쓰면 대입할 때마다 항이 하나씩 사라지기 때문이다.

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad C = 3, \\ x = 2: &\quad B + C = 1 \;\Rightarrow\; B = -2, \\ x = 3: &\quad 2A + 2B + C = 5 \;\Rightarrow\; 2A - 4 + 3 = 5 \;\Rightarrow\; A = 3. \end{aligned}$$

따라서

$$\mathrm{r}(x) = 3(x-1)(x-2) - 2(x-1) + 3 = 3x^2 - 11x + 11.$$

확인하면 $\mathrm{r}(1) = 3 - 11 + 11 = 3$, $\mathrm{r}(2) = 12 - 22 + 11 = 1$, $\mathrm{r}(3) = 27 - 33 + 11 = 5$이다.

소문항 (ii)

(문제에서 한 곳에 $\mathrm{P}_n(x)$라고 쓰여 있는데, 이는 같은 다항식 $\mathrm{P}(x)$를 뜻한다.) 나머지 정리에 의해 다음이 필요하다.

$$\mathrm{P}(a) = a \qquad \text{단, } a = 0, 1, \ldots, n.$$

다항식 x는 이미 이 조건을 만족하지만 차수가 맞지 않는다. 그래서 대신 $\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$를 살펴보자. $a = 0, 1, \ldots, n$에 대해 $\mathrm{D}(a) = 0$이어야 하므로, 인수 정리(factor theorem, 나머지가 0인 경우의 나머지 정리)에 의해 $x, x-1, \ldots, x-n$ 각각이 $\mathrm{D}(x)$를 나누어떨어지게 한다. 이 $n+1$개의 일차 인수는 서로 다르므로 그 곱이 $\mathrm{D}(x)$를 나누고, 그 곱의 차수는 $n+1$이다.

? **생각해 보기** 어떻게 하면 $\mathrm{P}(x)$의 차수가 정확히 $n+1$이 되게 할 수 있을까?

$\mathrm{D}(x)$를 바로 그 곱으로 잡으면 된다(원한다면 0이 아닌 상수를 곱해도 된다). $n+1 \geq 2$이므로 x를 더해도 최고차항(leading term) x^{n+1}이 상쇄되지 않는다. 따라서

$$\mathrm{P}(x) = x + x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

은 차수가 $n+1$이고, $0 \leq a \leq n$인 각 정수 a에 대해 $\mathrm{P}(a) = a + 0 = a$이다. 이것이 요구된 종류의 다항식이다.

사실 이 논증으로 그러한 다항식을 모두 찾을 수 있다. P의 차수가 $n+1$이고 주어진 나머지를 가진다면, $\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$는 차수가 $n+1$ 이하이고 차수 $n+1$인 곱으로 나누어떨어지므로 어떤 상수 k에 대해 $\mathrm{D}(x) = k\,x(x-1)\cdots(x-n)$이며, 차수가 $n+1$이 되려면 $k \neq 0$이어야 한다. 일반적인 답은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(x) = x + k\,x(x-1)(x-2)\cdots(x-n), \qquad k \neq 0.$$

검산

- $n = 1$이면 $\mathrm{P}(x) = x + x(x-1) = x^2$이다. x로 나누면 나머지가 0이고 $x-1$로 나누면 나머지가 1이므로 조건에 맞는다.
- (i)에서 아무 q, 예컨대 $\mathrm{q}(x) = x$를 잡아 p를 만들고 조립제법(synthetic division)으로 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누면 나머지가 $3, 1, 5$로 나온다.
- 컴퓨터로 무작위 다항식 1000개에 대해 나머지 정리를, 무작위로 고른 q 100개에 대해 소문항 (i)을, $k = 1, -3, 7$일 때 $n = 1, \ldots, 11$에 대해 소문항 (ii)를 확인했으며, 모든 나머지가 정확히 일치했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 다항식 $\mathrm{P}(x) = x$ 자체도 조건을 만족하지만 차수가 $n+1$이 아니라 1이라는 점을 잊는 것. 차수를 맞춰 주는 것은 곱으로 된 항이다.
- $ax^2 + bx + c$의 계수에 대한 세 개의 연립방정식(simultaneous equations)을 푸는 것도 괜찮지만 더 느리다. 중첩된 형태 $A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C$를 쓰면 소거 과정을 피할 수 있다.

STEP 너머

소문항 (i)은 다항식 보간(polynomial interpolation)의 한 예이다. x값이 서로 다른 임의의 m개의 점을 지나는, 차수가 m보다 작은 다항식은 정확히 하나 존재하며, 우리가 사용한 중첩된 형태는 그 다항식의 뉴턴(Newton) 형식이다. 같은 논리를 환(ring)의 언어로 표현하면 다항식에 대한 중국인의 나머지 정리(Chinese remainder theorem)가 된다. 즉 $x-1$, $x-2$, $x-3$을 법으로 하는 다항식을 아는 것은 이들의 곱을 법으로 하는 다항식을 아는 것과 같다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 다항식환과 이 정리를 다룬다.

풀이

STEP II 1997, 문제 5

순수수학 • 복소 지수 사상

STEP II 1997, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s2-q5

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.7 절 **사상으로서의 복소 지수함수**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/complex-exponential.html

핵심 아이디어

주어진 관계식은 $z = \mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{w}$를 절댓값–편각 꼴(modulus–argument form)로 쓴 것에 지나지 않는다. 즉 u는 z의 절댓값을, v는 z의 편각을 결정한다. 이 점을 알아차리면 모든 소문항이 극좌표(polar coordinates)에 관한 문제가 된다. 유일하게 미묘한 점은 편각이 2π의 정수배 차이를 무시해야만 정의된다는 것이다. 그래서 이 사상은 다대일(many-to-one)이고, 일대일 대응(one-to-one correspondence)을 얻으려면 u–v 평면을 알맞은 높이의 가로띠로 잘라 내야 하며, 이때 어느 경계를 포함할지 주의해야 한다.

풀이

$z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$일 때 w 구하기

$\mathrm{e}^{u} > 0$이고 $|\cos v + \mathrm{i}\sin v| = 1$이므로, 관계식은 다음을 뜻한다.

$$|z| = \mathrm{e}^{u}, \qquad \arg z = v \pmod{2\pi}.$$

$z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$이면 $|z| = \mathrm{e}$이고 $\arg z = \frac{\pi}{2}$이다. 따라서 $\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}$에서 $u = 1$이고(실수 지수함수는 일대일이다), $\cos v + \mathrm{i}\sin v = \mathrm{i}$에서 $\cos v = 0$, $\sin v = 1$이므로 $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$이다. 그러므로

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

이러한 w는 무수히 많으며, 세로 직선 $u = 1$ 위에 2π 간격으로 놓여 있다.

직선 $u =$ 상수의 상

직선 $u = c$ 위에서 점 z의 절댓값은 e^c, 편각은 v이다. v가 모든 실수를 지나는 동안 $\cos v + \mathrm{i}\sin v$는 단위원을 (무한히 여러 번) 돌므로, z가 그리는 자취는 다음과 같다.

$$\text{원} x^2 + y^2 = \mathrm{e}^{2c}, \quad \text{중심} O, \text{ 반지름} \mathrm{e}^c.$$

c가 클수록 원이 커진다. $c = 0$이면 단위원이다. $c \to -\infty$이면 원은 O를 향해 줄어들지만, $\mathrm{e}^c > 0$이므로 결코 O에 이르지 않는다.

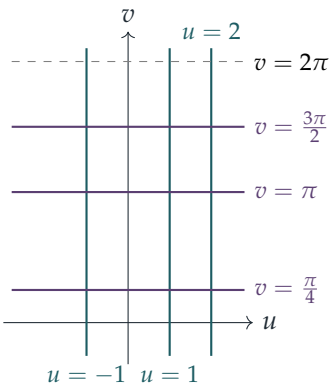
직선 $v =$ 상수의 상

직선 $v = c$ 위에서는 $z = \mathrm{e}^u(\cos c + \mathrm{i}\sin c)$이고, 이는 고정된 단위벡터 $(\cos c, \sin c)$의 양수 배이다. u가 $\mathbb{R}$ 전체를 지나는 동안 배수 e^u는 $(0, \infty)$의 모든 값을 정확히 한 번씩 취한다. 따라서 상은 다음과 같은 반직선(half-line)이다.

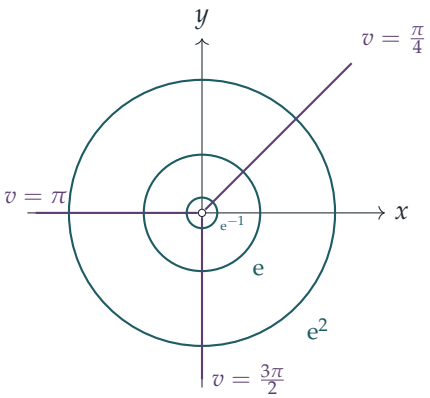
점 O에서 출발하여 각 c를 이루는 반직선(각은 양의 x축에서 잰다), 단 O 자체는 제외한다.

직선 $v = c$와 $v = c + 2k\pi$는 같은 반직선을 준다. 예를 들어 직교좌표로 쓰면, $v = \frac{\pi}{4}$는 $x > 0$인 $y = x$를 주고, $v = \pi$는 음의 x축을 준다.

아래 그림은 u–v 평면의 격자선과 그 상을 보여 준다. 세로 직선은 원이 되고, 가로 직선은 반직선이 된다.



u–v 평면



x–y 평면

(원은 실제 비율대로 그리지 않았다. 반지름 e^{-1}, e, e^2은 매우 빠르게 커진다. 속이 빈 원은 결코 도달하지 않는 점 O를 나타낸다.)

제1사분면과 일대일 대응인 부분집합

점 z가 열린 제1사분면(first quadrant)에 속할 필요충분조건은 $z \neq 0$이고 z의 편각 가운데 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이(양 끝 제외)에 있는 것이 존재하는 것이다. 다음과 같이 잡자.

$$W_1 = \left\{(u,v) : u \in \mathbb{R},\ 0 < v < \tfrac{\pi}{2}\right\}, \qquad W_2 = \left\{(u,v) : u \in \mathbb{R},\ 2\pi < v < \tfrac{5\pi}{2}\right\}.$$

W_1에서는 $e^u \cos v > 0$이고 $e^u \sin v > 0$이므로, W_1의 모든 점은 제1사분면으로 옮겨진다. 역으로, 제1사분면의 점 z에 대해 $z = e^u(\cos v + i \sin v)$가 성립할 필요충분조건은 $u = \ln|z|$이고 $v = \theta + 2k\pi$인 것이다. 여기서 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$는 z의 주편각(principal argument)이다. 이 값들 가운데 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하는 것은 $k = 0$인 경우 하나뿐이므로, z는 W_1에 정확히 하나의 원상(preimage)을 가진다. 따라서 W_1은 제1사분면과 일대일 대응이다. W_1을 위로 2π만큼 평행이동한 W_2에 대해서도 $k = 1$로 같은 논증이 성립한다.

(임의의 띠 $\{2k\pi < v < 2k\pi + \frac{\pi}{2}\}$를 택해도 똑같이 된다.)

$0 < |z| < 1$과 일대일 대응인 부분집합

이번에는 $|z| = e^u < 1$, 즉 $u < 0$이어야 하고, 모든 편각이 정확히 한 번씩 나타나야 하므로 v는 길이가 정확히 2π인 구간을 지나야 한다.

> **생각해 보기** 띠는 위쪽 경계를 포함해야 할까, 아래쪽 경계를 포함해야 할까? 둘 다일까, 둘 다 아닐까?

정확히 하나만 포함해야 한다. 둘 다 포함하여 예컨대 $0 \le v \le 2\pi$로 잡으면, $(u,0)$과 $(u,2\pi)$가 모두 양의 실수축 위의 같은 점 e^u로 옮겨지므로 대응이 일대일이 되지 못한다. 둘 다 포함하지 않으면 양의 실수축에는 전혀 도달하지 못한다. 한쪽 경계만 포함하면 모든 편각이 정확히 한 번씩 나타난다. 따라서 다음과 같이 잡는다.

$$W_3 = \{(u,v) : u < 0,\ 0 \le v < 2\pi\}, \qquad W_4 = \{(u,v) : u < 0,\ -\pi < v \le \pi\}.$$

W_3의 경우: $0 < |z| < 1$이면 $u = \ln|z| < 0$으로 정해지고, z의 편각 $\theta + 2k\pi$ 가운데 $[0, 2\pi)$에 속하는 것은 정확히 하나이다. 이 구간은 길이가 2π이고 두 끝점 중 하나만 포함하기 때문이다. 따라서 이러한 z는 각각 W_3에 정확히 하나의 원상을 가지며, W_3의 각 점은 $0 < e^u < 1$인 z로 옮겨진다. W_4의 경우에는 주편각에 해당하는 구간 $(-\pi, \pi]$로 같은 논증이 성립한다. 두 집합 모두 반평면 $u < 0$을 높이 2π인 반열린 띠로 잘라 낸 것이다.

검산

- $u = 1, v = \frac{\pi}{2} + 2\pi$를 대입하면 $z = e(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = ie$로, 요구한 대로이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 수천 개의 (u,v)에 대해 $|z| = e^u$이고 $\arg z \equiv v$임을 10^{-9} 이내의 오차로 확인했다. 각 목표 집합에서 무작위로 고른 점들에 대해, $W_1, \ldots, W_4$

각각에 원상이 정확히 하나씩 있음을 확인했다. 또 점 $(-1,0)$과 $(-1,2\pi)$는 모두 $z = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$를 주므로, 닫힌 띠를 쓰면 중복으로 세게 됨을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $w = 1 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$만 답하고 $+2k\pi$를 빠뜨리는 것.
- 상에 원점을 포함하는 것: e^u는 결코 0이 아니므로, 원은 한 점으로 줄어들지 않고 반직선은 제외된 점에서 시작한다.
- W_3으로 닫힌 띠 $0 \le v \le 2\pi$(또는 열린 띠 $0 < v < 2\pi$)를 쓰는 것: 앞의 것은 양의 실수축을 중복으로 세고, 뒤의 것은 양의 실수축을 놓친다.

STEP 너머

여기서 다룬 사상은 복소 지수함수(complex exponential) $w \mapsto \mathrm{e}^w$이다. 이 함수는 직교좌표의 격자선을 극좌표의 격자선으로 옮기며, 주기가 $2\pi\mathrm{i}$인 주기함수(periodic function)이다. 이 함수가 일대일이 되는 띠를 고르는 것은 곧 그 역함수인 **복소 로그의 분지**(*branch of the complex logarithm*)를 고르는 것과 같다. 빼놓은 경계가 바로 **분지 절단**(*branch cut*)이며, 이것이 $\log z$를 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 전체에서 연속으로 정의할 수 없는 이유를 설명해 준다. Tristan Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 이 사상과 등각 사상(conformal map) 일반에 관한 아름다운 그림들이 실려 있다.

풀이

STEP II 1997, 문제 6

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 1997, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q6

핵심 아이디어

모든 것을 $t = \tan\theta$로 나타낸다. 삼배각 공식(triple-angle formula)을 쓰면 주어진 방정식은 t에 대한 삼차방정식(cubic equation)이 되고, 쉬운 근 하나를 찾아내면 남는 이차식(quadratic)이 바로 첫 부분에 나온 식이다. 따라서 그 근들은 $\tan^{-1}(1 \pm \sqrt{2})$의 값을 직접 구하는 대신 배각(double-angle) 조건으로 처리할 수 있다. 코탄젠트(cotangent) 방정식은 같은 방정식이 모습만 바꾼 것이다. 치환(substitution) $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$를 하면 cot이 tan으로 바뀐다.

풀이

첫 번째 결과

$t^2 = 2t + 1$을 만족하는 $t = \tan\phi$를 생각하자. 그러면 $1 - t^2 = -2t$이다. 또한 $t = 0$은 $t^2 = 2t + 1$을 만족하지 않으므로 $t \neq 0$이고, $t^2 \neq 1$이다(그렇지 않으면 $2t = 0$이 된다). 따라서 $\tan 2\phi$가 정의되고

$$\tan 2\phi = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2t}{-2t} = -1,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

역(converse)도 성립하며, 뒤에서 이것이 필요하다. $\tan 2\phi = -1$이면 $2t = -(1 - t^2)$, 즉 $t^2 = 2t + 1$이다. 따라서

$$\tan^2\phi = 2\tan\phi + 1 \iff \tan 2\phi = -1.$$

방정식 $\tan\theta = 2 + \tan 3\theta$

해가 되려면 $\tan\theta$와 $\tan 3\theta$가 모두 정의되어야 한다. $t = \tan\theta$라 하자. 그러면

$$\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

이고, $\tan 3\theta$가 정의되므로 $1 - 3t^2 \neq 0$이다. 따라서

$$\tan\theta - \tan 3\theta = \frac{t(1-3t^2) - (3t - t^3)}{1 - 3t^2} = \frac{-2t - 2t^3}{1 - 3t^2}.$$

이것을 2와 같다고 놓고 양변에 (0이 아닌) $1 - 3t^2$를 곱하면

$$-t - t^3 = 1 - 3t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0.$$

계수의 합이 0이므로 $t = 1$이 근이고,

$$t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t-1)(t^2 - 2t - 1).$$

$t = 1$과 $t = 1 \pm \sqrt{2}$는 모두 $3t^2 = 1$을 만족하지 않으므로, 모든 근이 실제 해를 준다.

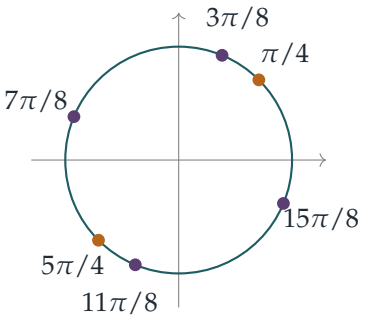
생각해 보기 $\tan\theta = 1 \pm \sqrt{2}$를 어떻게 π의 유리수배(rational multiple)로 바꿀 수 있을까?

첫 부분을 이용한다. $t^2 - 2t - 1 = 0$의 근은 정확히 $t^2 = 2t + 1$을 만족하는 $\tan\theta$의 값들이고, 위의 동치 관계에 의해 이것은 정확히 $\tan 2\theta = -1$을 만족하는 θ들이다.

- $\tan\theta = 1$: $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$이다. $(0, 2\pi)$에서 이것은 $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$를 준다.
- $\tan 2\theta = -1$: $2\theta = \frac{3\pi}{4} + n\pi$이므로 $\theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$이다. 여기서 2θ는 $(0, 4\pi)$ 전체를 움직이므로 $n = 0, 1, 2, 3$이고 $\theta = \frac{3\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$, $\frac{15\pi}{8}$이다.

(예를 들어 $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$이고 $\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$이다.) 따라서 $0 < \theta < 2\pi$에서의 해는

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$$



호박색 점은 $\tan\theta = 1$에서 나오고, 서로 사분의 일 바퀴씩 떨어진 자주색 점은 $\tan 2\theta = -1$에서 나온다.

방정식 $\cot\theta = 2 + \cot 3\theta$

> ? **생각해 보기** cot으로 계산 전체를 다시 해야 할까?

그렇지 않다. $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$로 놓자. 그러면 $\cot\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \tan\psi$이다. 또한 cot의 주기(period)가 π라는 사실을 이용하면

$$\cot 3\theta = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - 3\psi\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 3\psi\right) = \tan 3\psi,$$

이다. 각 변은 대응하는 tan이 정의될 때 정확히 정의된다. 따라서 방정식은

$$\tan\psi = 2 + \tan 3\psi,$$

가 되고, 이것은 앞의 방정식이다. 범위 $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$는 $0 < \psi < 2\pi$가 되는데, 이는 정확히 앞의 범위이다. 따라서 ψ는 위에서 구한 여섯 값을 가지며, $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$로부터

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{8}, -\frac{11\pi}{8}.$$

검산

- $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때: $\tan 3\theta = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$이고, $2 + (-1) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$이다. $\theta = \frac{3\pi}{8}$일 때: $\tan\frac{9\pi}{8} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$이고, $2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{3\pi}{8}$이다.
- t에 대한 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이고 tan의 주기는 π이므로, 길이가 2π인 구간에서 해는 많아야 $3 \times 2 = 6$개일 것으로 예상된다. 실제로 여섯 개를 찾았다.
- 수치적으로 $(0, 2\pi)$에서 촘촘한 격자 위로 $\tan x - \tan 3x - 2$를 훑어보면, (극(pole)에서 떨어진 곳에서) 부호가 바뀌는 곳은 $x = \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$뿐이다. 코탄젠트 방정식에 대해 같은 방법으로 훑어보면 정확히 위에 나열한 여섯 값이 나온다.

흔한 실수

- $\tan 2\theta = -1$에서 $n = 0, 1$만 쓰고 멈추는 것. θ가 $(0, 2\pi)$를 움직이므로 2θ는 $(0, 4\pi)$를 움직이고, 따라서 해는 두 개가 아니라 네 개이다.
- 확인하지 않고 어떤 식으로 나누어서 근 $t = 1$을 잃어버리거나, $\frac{5\pi}{4}$를 빠뜨리는 것.
- 마지막 부분을 처음부터 다시 풀다가 범위를 잘못 잡는 것. 치환은 주어진 구간을 정확히 $(0, 2\pi)$로 옮기며, 이는 우연이 아니다.

STEP 너머

항등식 $\tan 3\theta = (3t - t^3)/(1 - 3t^2)$는 $(1 + \mathrm{i}t)^3$의 실수부와 허수부에서 나오며, 일반적으로 $\tan n\theta$는 $(1 + \mathrm{i}t)^n$에서 읽어 낼 수 있는 $\tan\theta$에 대한 다항식들의 비이다. 이 다항식들의 근은 π의 유리수배의 탄젠트 값이고, 그래서 여기의 $t^2 - 2t - 1$처럼 그 인수분해(factorisation)가 그렇게 깔끔한 것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 배각 공식들이 복소수 곱셈의 기하에서 어떻게 자연스럽게 나오는지 보여준다.

풀이

STEP II 1997, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기

STEP II 1997, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s2-q7

핵심 아이디어

우변은 x^2을 통해서만 x에 의존하므로, 이를 $u = x^2$에 대한 이차식으로 보고 완전제곱식(completing the square)으로 고친다. 그러면 미적분 없이 단 한 줄로 y^2의 최댓값을 얻는다. 개형을 그릴 때는 $x \to -x$나 $y \to -y$로 바꾸어도 방정식이 변하지 않으므로, 제1사분면(first quadrant)만 이해한 뒤 대칭이동하면 된다. 확실히 짚어 둘 곳은 곡선이 축과 만나는 점, 원점에서의 기울기, 그리고 원점이 아닌 곳에서 곡선이 x축과 만나는 점에서의 기울기이다.

풀이

최댓값과 최솟값

$a = 0$이면 방정식은 $y^2 = -x^4$이 되고, 이로부터 $x = y = 0$이어야 한다. 즉 "곡선"은 한 점 $(0,0)$뿐이고, y가 가질 수 있는 값은 0뿐이다. 이제부터는 $a \neq 0$이라 하자. 식에는 a^2만 나타나므로 $a > 0$으로 생각하고 마지막에 $|a|$로 쓰면 된다.

$y^2 \geq 0$이므로 $x^2(a^2 - x^2) \geq 0$, 즉 $x = 0$ 또는 $x^2 \leq a^2$이어야 한다. 따라서 곡선은 띠 영역 $-|a| \leq x \leq |a|$ 안에 놓인다. x^2에 대하여 완전제곱식으로 고치면

$$y^2 = a^2x^2 - x^4 = \frac{a^4}{4} - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4}{4},$$

이고, 등호는 정확히 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$일 때 성립한다. 그러므로 곡선 위 모든 점에서 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$이고, $y = \frac{1}{2}a^2$과 $y = -\frac{1}{2}a^2$은 모두 $x = \pm|a|/\sqrt{2}$에서 실제로 얻어진다. 따라서

$$\boxed{y_{\max} = \frac{a^2}{2}, \qquad y_{\min} = -\frac{a^2}{2}, \qquad \text{위치: } x = \pm\frac{|a|}{\sqrt{2}}.}$$

생각해 보기 이 결과는 미분으로 구한 것과 어떻게 맞아떨어지는가? $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$인 곳은 어디인가?

음함수 미분(implicit differentiation)을 하면 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2)$이다. $y \neq 0$인 곳에서 기울기가 0이 되는 것은 정확히 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$일 때이며(근 $x = 0$에서는 $y = 0$이다), 이것이 바로 위에서 찾은 네 점이다. $y = 0$인 점에서는 y로 나눌 수 없으므로 따로 살펴야 하며, 이는 다음에 다룬다. 두 방법의 결과는 일치하지만, 완전제곱식을 쓰면 정상값(stationary value)이 곧 전체의 최댓값과 최솟값임이 바로 증명된다.

곡선의 모양

$a > 0$이라 하자. y에 대해 풀면 두 갈래

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{그리고} \qquad y = -x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a,$$

를 얻으며, 이 둘은 서로 x축에 대하여 대칭이다. 첫째 갈래에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- **원점에서** 기울기는 a이고, 다른 갈래에서는 $-a$이다. 따라서 곡선은 원점을 두 번 지나며 그곳에서 자기 자신과 교차하고, 접선(tangent)은 $y = \pm ax$이다.
- **$x = \pm a$에서** $y = 0$이고, $x \to a^-$일 때 기울기는 $-\infty$로 발산한다. 따라서 곡선은 $(\pm a, 0)$에서 **수직** 접선을 가지며 x축과 만난다. 그곳에서 곡선은 뾰족하지 않고 매끄럽게 둥글다.
- **그 사이에서** 첫째 갈래는 $(0,0)$에서 올라가 $x = a/\sqrt{2}$에서 최댓값 $\frac{1}{2}a^2$에 이른 뒤 다시 $(a,0)$으로 내려온다. 나머지 사분면은 두 축에 대한 대칭으로부터 얻어진다.

결과는 옆으로 누운 8자 모양(figure of eight)으로, $x \geq 0$과 $x \leq 0$에 고리가 하나씩 있고, 너비는 $2|a|$, 전체 높이는 a^2이다.

곡선 전체를 한눈에 보는 깔끔한 방법은 $x = a\sin t$로 놓는 것이다. 그러면 $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$이므로 $y^2 = a^4\sin^2 t\cos^2 t$이고, 곡선은

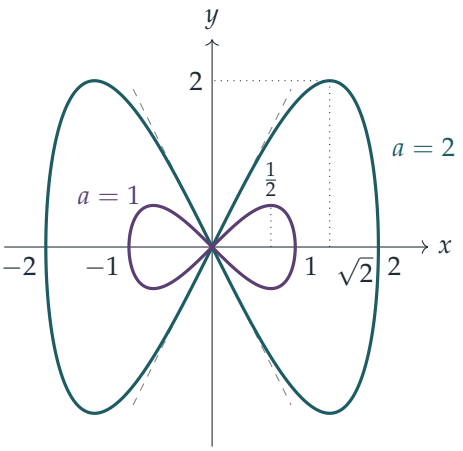
$$x = a\sin t, \qquad y = \tfrac{1}{2}a^2\sin 2t, \qquad 0 \leq t < 2\pi,$$

로 그려진다. 이것으로도 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$임을 다시 알 수 있다.

$a = 1$과 $a = 2$인 경우

	x축과 만나는 점	O에서의 접선	최대·최소 점
$a = 1$	$x = 0,\ \pm 1$	$y = \pm x$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right)$
$a = 2$	$x = 0,\ \pm 2$	$y = \pm 2x$	$\left(\pm\sqrt{2}, \pm 2\right)$

두 곡선의 상대적인 위치를 알아보자. $0 < |x| \leq 1$이면 $x^2(1-x^2) < x^2(4-x^2)$이므로, $a = 1$인 곡선은 $a = 2$인 곡선의 엄격히 안쪽에 놓이고, 두 곡선의 공통점은 원점뿐이다. 예를 들어 $x = 1$에서 $a = 1$인 곡선은 $y = 0$에 있지만 $a = 2$인 곡선은 $y = \pm\sqrt{3}$에 있다.



점선은 $a = 2$일 때의 접선 $y = \pm 2x$이다. $a = 1$일 때 원점에서의 접선은 45° 기울어진 $y = \pm x$이다.

검산

- 무작위로 고른 50개의 a 값에 대해 $|x| \leq |a|$ 범위에서 격자 탐색을 해 보니, 모든 경우에 $|y|$의 최댓값은 $|x| = |a|/\sqrt{2} \approx 0.7071|a|$에서 $\frac{1}{2}a^2$이었다. $a = 2$이면 $|x| \approx 1.41421$에서 $y_{\max} = 2.000000$을 얻는다.
- 최댓값은 당연히 a^2에 비례한다. (x, y)를 (ax, a^2y)로 바꾸면 $a = 1$인 곡선이 일반적인 곡선으로 바뀌기 때문이다. 따라서 $a = 2$인 곡선은 $a = 1$인 곡선을 가로로 2배, 세로로 4배 늘인 것이고, 그래서 훨씬 더 높다.

흔한 실수

- $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$만 그리는 것. 방정식이 정하는 것은 y^2이므로 y의 두 부호가 모두 그래프에 속하며, 따라서 S자 모양이 아니라 고리 두 개가 생긴다.
- $(\pm a, 0)$에 뾰족한 모서리를 그리는 것. 그곳의 기울기는 무한대이므로 곡선은 x축을 수직으로, 매끄럽게 지난다.
- 곡선이 원점에서 기울기 $\pm a$로 자기 자신과 교차한다는 사실을 잊는 것. 이 기울기가 O 근처에서 두 곡선을 구별해 준다.

STEP 너머

여기서 원점은 **마디점**(node), 즉 대수 곡선(algebraic curve)이 자기 자신과 교차하는 점이다. O 근처에서 방정식은 $y^2 \approx a^2x^2$, 곧 두 직선 $y = \pm ax$처럼 보인다. 이처럼 특이점(singular point)을 최저차 항으로 분류하는 것이 대수 곡선 연구의 첫걸음이다. $x = a\sin t$라는 기법은 이 곡선을 삼각함수로 매개변수화(parametrise)할 수 있음을 보여 준다. 이런 종류의 곡선을 리사주 도형(Lissajous figure)이라 한다(여기서는 진동수의 비가 1 : 2이다). 이와 같은 곡선의 개형 그리기와 STEP식 사고 전반을 더 연습하려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 읽어 보라.

풀이

STEP II 1997, 문제 8

순수수학 • 적분을 이용한 부등식

STEP II 1997, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s2-q8

핵심 아이디어

$(x^p - 1)/p$ 꼴의 식은 모두 모습을 바꾼 적분(integral)이다. 즉 이 식은 $\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t$와 같다. 따라서 이런 두 식을 비교하는 문제는 피적분함수(integrand) t^{p-1}과 t^{q-1}을 비교하는 문제로 바뀌고, 이 비교는 $t = 1$에서 대소가 뒤바뀐다는 점만 알아차리면 쉽다. 마지막 부등식은 한 번 더 적분하면 얻어지는데, 이번에는 방금 증명한 부등식 자체를 적분한다.

풀이

부등식의 적분

$[a, b]$에서 $\mathrm{f}(t) \geq \mathrm{g}(t)$이면 그 구간에서 $\mathrm{f} - \mathrm{g} \geq 0$이다. 따라서 $\mathrm{f} - \mathrm{g}$의 그래프와 t축 사이의 영역은 축 위 또는 축보다 위쪽에 있고, 그 부호 있는 넓이(signed area)는 음이 아니다.

$$\int_a^b \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(\mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t)\big)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

여기에는 $a \leq b$라는 조건이 필요하다는 점에 주의한다. 적분 구간의 위끝과 아래끝이 뒤바뀌어 있으면 두 적분 사이의 부등호 방향도 반대가 된다.

$x \geq 1$인 경우

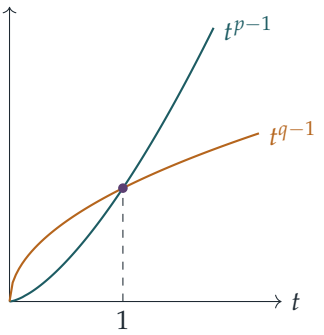
$t \geq 1$이고 $p > q$이면 $t^{p-1} = t^{q-1}\,t^{p-q} \geq t^{q-1}$이다. $t \geq 1$이고 $p - q > 0$일 때 $t^{p-q} \geq 1$이기 때문이다. $x \geq 1$이므로 구간 $[1, x]$의 끝점은 올바른 순서로 놓여 있고, 따라서 앞부분의 결과에 의해

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

$p, q > 0$이므로 두 적분은 바로 계산할 수 있다.

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^p}{p}\right]_1^x = \frac{x^p - 1}{p}, \qquad \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^q - 1}{q}.$$

따라서 $x \geq 1$일 때 $\dfrac{x^p - 1}{p} \geq \dfrac{x^q - 1}{q}$이고, 이것이 증명하려던 것이다.



위 그림($p = 2.5, q = 1.5$로 그렸다)이 요점을 보여 준다. 지수가 더 큰 쪽이 $t > 1$에서는 더 크고 $0 < t < 1$에서는 더 작다.

$0 \leq x \leq 1$인 경우

> **생각해 보기** $0 < t < 1$에서는 t^{p-1}과 t^{q-1} 사이의 부등호 방향이 반대가 된다. 그런데 왜 결론의 부등호 방향은 바뀌지 않을까?

두 번의 뒤바뀜이 서로 상쇄된다. $0 < t \leq 1$이면 $t^{p-q} \leq 1$이므로 $t^{p-1} \leq t^{q-1}$이다. 그런데 이제 $x \leq 1$이므로 올바른 순서의 구간은 $[1, x]$가 아니라 $[x, 1]$이다.

먼저 $0 < x \leq 1$인 경우를 보자. $t^{q-1} \geq t^{p-1}$을 $[x, 1]$에서 적분하면($x > 0$이므로 두 함수는 이 구간에서 연속(continuous)이다)

$$\int_x^1 t^{q-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_x^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{1 - x^q}{q} \;\geq\; \frac{1 - x^p}{p}.$$

양변에 -1을 곱하면 부등호 방향이 바뀌어 $\dfrac{x^p - 1}{p} \geq \dfrac{x^q - 1}{q}$를 얻는다.

$x = 0$인 경우는 직접 확인한다. 이때 부등식은 $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$가 되는데, $p > q > 0$이면 $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$이므로 참이다. ($x = 0$을 따로 다루는 까닭은 $q < 1$이면 t^{q-1}이 0 근처에서 유계가 아니기(unbounded) 때문이다.) 따라서 부등식은 모든 $0 \leq x \leq 1$에서 성립하고, 앞의 경우와 합치면 모든 $x \geq 0$에서 성립한다.

마지막 부등식

$\phi_p(t) = \dfrac{t^p - 1}{p}$로 놓자. 지금까지 $p > q > 0$이면 모든 $t \geq 0$에 대하여 $\phi_p(t) \geq \phi_q(t)$임을 보였다. 두 함수는 모두 $[0, \infty)$에서 연속이므로, $x > 0$에 대하여 이 부등식을 $[0, x]$에서 적분할 수 있다.

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_0^x \frac{t^q - 1}{q}\,\mathrm{d}t.$$

그런데

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\Big(\frac{x^{p+1}}{p+1} - x\Big) = \frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big),$$

이고 q에 대해서도 마찬가지이다. 따라서

$$\frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{x}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big),$$

이고, $x > 0$으로 나누면(부등호 방향은 그대로이다)

$$\frac{1}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{1}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big).$$

$x = 0$에서 이 부등식은 $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$가 되며, 이것이 참임은 이미 보았다. 이로써 모든 $x \geq 0$에 대한 증명이 끝난다.

검산

- $x = 1$에서 가운데 부등식은 $0 \geq 0$이다. 두 곡선이 그 점에서 만나므로 등호가 성립하는 것과 들어맞는다.
- 마지막 부등식에 $p = 2$, $q = 1$, $x = 3$을 대입하면 좌변은 $\frac{1}{2}(3 - 1) = 1$, 우변은 $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$이므로 $1 \geq \frac{1}{2}$이다.
- $0 < q < p$, $x \geq 0$인 세 수 (p, q, x)를 200,000개 무작위로 골라($x = 0$, $x = 1$, 아주 작은 x 포함) 시험해 보았는데, 두 부등식 어느 쪽에도 반례(counterexample)는 없었다.

흔한 실수

- $x < 1$인데 $[1, x]$에서 적분하면서 부등호 방향을 그대로 두는 것. 부등식을 적분하기 전에 적분 구간의 끝점이 증가하는 순서로 놓여 있어야 한다.
- 끝점 $x = 0$을 빠뜨리는 것. 이 점에서는 t^{q-1}이 정의조차 되지 않을 수 있다.
- 방금 얻은 부등식을 적분하지 않고, 마지막 부분을 미분을 이용해 처음부터 다시 증명하려 하는 것.

STEP 너머

$q \to 0$일 때 $(x^q - 1)/q \to \ln x$이므로, 이 결과는 p가 0으로 감소할 때 $(x^p - 1)/p$가 $\ln x$로 감소함을 보여 준다. 이는 로그(logarithm)에 대한 깔끔한 한계 부등식의 모임이며, 통계학의 Box–Cox 변환(Box–Cox transformation)의 바탕이기도 하다. 적분이 부등식을 보존한다는 원리(적분의 단조성(monotonicity))는 해석학(analysis) 강의에서 리만(Riemann) 적분에 관해 가장 먼저 증명하는 정리 가운데 하나이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP II 1997, 문제 9

역학 • 마찰과 강체 평형

STEP II 1997, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

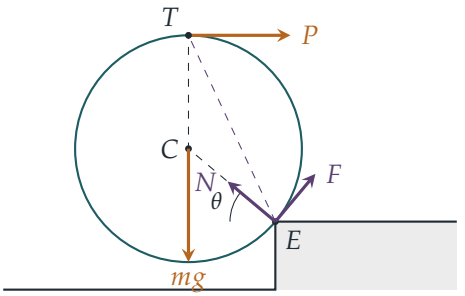
step.maths.org/questions/97-s2-q9

핵심 아이디어

구를 천천히 끌어올리므로 구는 매 순간 평형 상태에 있고, 따라서 각 위치에서 정역학(statics) 문제를 풀면 된다. 구가 바닥에서 떨어지고 나면 구에 작용하는 힘은 무게, 꼭대기에서 당기는 힘, 계단 모서리에서의 반력, 이렇게 세 가지뿐이다. 모서리에 대한 모멘트(moment)를 취하면 미지의 반력이 사라지고 당기는 힘이 구해진다. 그다음 세 힘의 법칙(세 작용선이 한 점에서 만나야 한다)이 반력의 방향을 정확히 알려 주고, 이로부터 마찰 조건이 거의 저절로 얻어진다.

풀이

반지름을 $r = \frac{1}{2}d$라 하면 계단의 높이는 $\frac{1}{4}d = \frac{1}{2}r$이다. 구를 모서리 E에서만 계단과 닿는 균일한 강체(rigid body)로 모형화한다(모서리는 수평선이지만, 중심을 지나는 연직 단면에서는 한 점이다). 중심을 C, 가장 높은 점을 T라 하자. 이 점에서 수평 힘 P가 계단 쪽으로 작용한다. EC가 수평선과 이루는 각을 θ라 하자.



기하

E를 원점으로 하면, C는 E보다 $r\sin\theta$만큼 높고 수평 거리로 $r\cos\theta$만큼 떨어져 있으며, T는 C보다 다시 r만큼 위에 있다. 처음 구가 바닥에 놓여 있을 때 C는 바닥에서 r만큼 높으므로 E보다 $\frac{1}{2}r$만큼 높다. 따라서 $\sin\theta = \frac{1}{2}$이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$이다. C가 E의 바로 위에 올 때, 즉 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 구는 완전히 계단 위에 올라간다. 따라서 이 운동은 θ가 $\frac{\pi}{6}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 증가하는 것에 해당한다.

최대 힘

구가 아직 바닥에 닿아 있는 동안에는 바닥이 무게의 일부를 떠받치며, 바닥은 위로만 밀 수 있다. P가 바닥의 반력이 0으로 떨어질 만큼 커지는 순간 구가 떠오르기 시작한다. 그 뒤로 작용하는 힘은 T에서의 P, C에서의 무게 mg, 그리고 E에서의 모서리의 반력이며, 이 반력은 EC 방향의 수직 성분(normal component) N과 EC에 수직인 마찰력(friction) F로 이루어진다.

E에 대한 모멘트를 취하면(반력은 이 점에 대해 모멘트가 없다), P의 팔의 길이는 E에 대한 T의 높이인 $r(1+\sin\theta)$이고, 무게의 팔의 길이는 $r\cos\theta$이다. 평형 조건에서

$$P\,r(1+\sin\theta) = mg\,r\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 분자는 감소하고 분모는 증가하므로 P는 θ에 대해 감소한다. (떠오르기 전에는 P가 이 값까지 커질 뿐이다.) 따라서 최댓값은 바닥을 떠나는 순간인 $\theta = \frac{\pi}{6}$에서 나타난다:

$$P_{\max} = \frac{mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

마찰 조건

> **생각해 보기** 모서리에서의 반력은 어느 방향을 향하는가?

평형 상태에 있는 서로 평행하지 않은 세 힘의 작용선은 한 점에서 만난다(concurrent). P의 작용선은 T를 지나는 수평선이고, 무게의 작용선은 C를 지나는 연직선으로 이 역시 T를 지난다. 따라서 두 선은 T에서 만나고, E에서의 전체 반력은 ET를 따라 작용해야 한다.

이제 $CE = CT = r$이므로 삼각형 CET는 이등변삼각형이다. C에서 CT(연직 위쪽)와 CE(수평선 아래로 각 θ만큼 내려가는 방향) 사이의 각은 $\frac{\pi}{2}+\theta$이므로, 각 밑각은

$$\angle CET = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\theta}{2}.$$

이는 전체 반력과 법선 EC 사이의 각이므로

$$\frac{F}{N} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

힘을 분해하여 이를 확인할 수 있다. 반력은 P와 무게를 상쇄하므로 $(-P,\ mg)$이다. 단위 법선 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 방향과 단위 접선 $(\sin\theta, \cos\theta)$ 방향의 성분은

$$N = P\cos\theta + mg\sin\theta = mg\,\frac{\cos^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta}{1+\sin\theta} = mg,$$
$$F = mg\cos\theta - P\sin\theta = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta},$$

이다. 따라서 $F/N = \cos\theta/(1+\sin\theta)$이고, 이는 반각 공식(half-angle formulae)에 의해 $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$와 같다. F와 N은 전 구간에서 양수이므로, 모서리는 실제로 구를 밀고 있고 마찰력은 그림처럼 접선을 따라 위쪽으로 작용한다.

E에서 미끄러지지 않으려면 모든 위치에서 $F \le \mu N$이어야 한다. 즉

$$\mu \ge \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{단, } \tfrac{\pi}{6} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}.$$

우변은 θ가 증가할수록 감소하므로, 가장 까다로운 위치는 이번에도 $\theta = \frac{\pi}{6}$이며, 이때 우변의 값은 $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 그 순간 마찰력은 수직항력의 $1/\sqrt{3}$배 이상이어야 한다. 정확히 $\mu = 1/\sqrt{3}$이면 마찰이 한계 상태(limiting)가 되어 구가 막 미끄러지려 하므로, 미끄러지지 않고 안전하게 끌어올리려면 요구된 대로 $\mu > 1/\sqrt{3}$이어야 한다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 중심은 모서리 바로 위에 있다. 이때 당연히 $P = 0$이고 $F = 0$이다.
- 전 구간에서 $N = mg$이며, 이는 타당하다. 반력은 $(-P, mg)$이고, 그 법선 방향 성분이 정확히 mg로 계산된다.
- 수치적으로, 모멘트와 분해를 따로 계산하면서 θ를 $\frac{\pi}{6}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 조금씩 늘려 보면, P/mg와 F/N의 최댓값은 둘 다 처음에 나타나는 $0.57735\ldots = 1/\sqrt{3}$이다.

흔한 실수

- E에 대한 P의 모멘트 팔을 $r(1+\sin\theta)$(T의 높이) 대신 $r\sin\theta$(C의 높이)로 잡는 것.
- 모서리에서의 반력이 순전히 법선 방향이라고 가정하는 것. 그럴 수는 없다. 법선은 C를 지나므로, 그렇다면 세 힘이 한 점에서 만나지 않게 된다.

STEP 너머

세 힘 논증은 더 일반적인 사실의 특수한 경우이다. 강체는 전체 힘과 임의의 한 점에 대한 전체 모멘트가 모두 0일 때, 그리고 그때에만 평형 상태에 있으며, 세 힘의 경우 이 조건

때문에 작용선이 한 점에서 만날 수밖에 없다. 반력과 법선 사이의 각, 여기서는 $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$는 "마찰각(angle of friction)" 개념으로, 마찰 문제를 기하 문제로 바꾸어 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 원리로부터 강체의 정역학과 동역학을 전개한다.

풀이

STEP II 1997, 문제 10

역학 • 폭발과 탄성 충돌

> **STEP II 1997, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q10

핵심 아이디어

모든 속도를 축을 따르는 성분과 축을 가로지르는 성분으로 나눈다. 원통은 매끄러우므로(smooth) 반지름 방향으로만 밀 수 있다. 따라서 원통은 축 방향(axial) 속도를 결코 바꾸지 않으며, 탄성(elastic) 반발은 횡방향(transverse) 속도의 방향을 뒤집을 뿐이다. 그러면 폭발에서의 운동량 보존(conservation of momentum) 때문에 두 파편은 하나의 지름을 따라 서로 반대 방향으로 날아갈 수밖에 없고, 문제 전체는 두 벽 사이의 일차원 운동이 된다. 축 방향 운동은 그저 함께 따라갈 뿐이다.

풀이

설정하기

파편은 (작으므로) 입자로, 원통은 매끄럽고 고정된 것으로 모형화하고, 지시대로 중력은 무시한다. 원통의 축을 따라 z축을 잡고, 폭발은 시각 $t = 0$에 원점에서 일어난다고 하자.

폭발 직후 질량 qM인 파편의 속도를 축 방향 성분 w_1과 (축에 수직인) 횡방향 성분 $\mathbf{u}_1$의 합으로 쓰고, 질량 $(1-q)M$인 파편에 대해서도 마찬가지로 w_2, $\mathbf{u}_2$라 쓴다. 폭발하는 동안 외력이 작용하지 않으므로 운동량이 보존된다.

$$qMw_1 + (1-q)Mw_2 = Mv, \qquad qM\mathbf{u}_1 + (1-q)M\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

두 번째 식은 두 횡방향 속도가 서로 반대 방향을 향함을 말해 준다. 따라서 두 파편은 같은 지름을 따라 서로 반대쪽으로 축에서 멀어진다. 이 지름 방향을 x방향이라 하고, 파편 1(질량 qM)은 속력 u_1로 $x = +L$을 향해, 파편 2는 속력 u_2로 $x = -L$을 향해 움직인다고 하자. 여기서

$$qu_1 = (1-q)u_2. \tag{1}$$

$q \le \frac{1}{2}$이므로 $u_1 \ge u_2$이다. 즉 가벼운 파편이 더 빠르다.

각 파편은 (반지름을 따라 움직이므로) 벽에 정면으로 부딪히고, 따라서 매끄러운 벽이 주는 충격량(impulse)은 그 반지름 방향이다. 이 충격량은 (반발이 완전 탄성이므로) 횡방향 속도를 뒤집고 축 방향 속도는 그대로 둔다. 그러므로 각 파편은 계속 같은 지름을 따라 움직이고, 축 방향 속도는 내내 일정하다.

$q = \frac{3}{8}$임을 보이기

축 방향 운동. 축 방향 위치는 $z_1 = w_1 t$, $z_2 = w_2 t$이다. 두 파편은 어떤 시각 $t > 0$에 만나므로 $w_1 = w_2$이고, 그러면 운동량 식에서 $w_1 = w_2 = v$를 얻는다. 두 파편 모두 원래 물체가 있었을 위치와 보조를 맞추어 나아간다.

횡방향 운동. 파편 1은 $t = L/u_1$에 $x = L$에 도달한 뒤 되돌아오므로, 반발 후에는

$$x_1 = L - u_1\left(t - \frac{L}{u_1}\right) = 2L - u_1 t.$$

같은 방법으로, 반발 후 파편 2의 위치는 $x_2 = -2L + u_2 t$이다. 두 파편은 둘 다 반발한 뒤에 충돌하므로 $x_1 = x_2$에서

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2}, \qquad x = 2L - \frac{4Lu_1}{u_1 + u_2} = 2L\,\frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2}.$$

(1)에서 $u_2 = \frac{q}{1-q}u_1$이므로 $u_1 + u_2 = \frac{u_1}{1-q}$, $u_2 - u_1 = \frac{(2q-1)u_1}{1-q}$이다. 따라서 충돌 지점은

$$x = 2L(2q - 1).$$

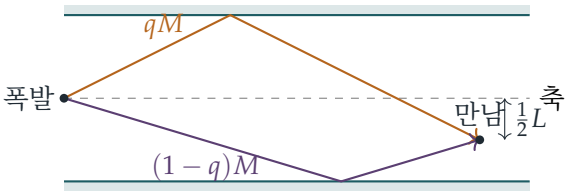
$|x| = \frac{1}{2}L$이어야 하므로 $2q - 1 = \pm\frac{1}{4}$이고, $q = \frac{5}{8}$ 또는 $q = \frac{3}{8}$이다. $q \le \frac{1}{2}$이므로

$$q = \frac{3}{8},$$

이 되어 증명이 끝난다. 충돌은 $x = -\frac{1}{2}L$, 즉 축을 기준으로 무거운 파편 쪽에서 일어난다.

? 생각해 보기 이것이 정말로 각각 정확히 한 번씩 반발한 뒤의 첫 만남인가?

$q = \frac{3}{8}$이면 (1)에서 $u_2 = \frac{3}{5}u_1$이다. 파편 1은 $t = L/u_1$에, 파편 2는 $t = \frac{5}{3}L/u_1$에 반발하고, 충돌 시각은 $4L/(u_1 + u_2) = \frac{5}{2}L/u_1$이므로 두 반발 시각보다 모두 늦다. 더 일찍 만날 수는 없을까? 파편 1이 반발하기 전에는 두 파편이 서로 멀어지고 있고, 되돌아오는 파편 1이 파편 2를 따라잡으려면 $t = 2L/(u_1 - u_2) = 5L/u_1$이 되어야 하는데, 이는 파편 2가 방향을 바꾸고 한참 지난 뒤이다. 그러므로 앞에서 구한 만남이 첫 만남이고, 각 파편은 정확히 한 번씩 반발한다.



그림은 축과 공통 지름을 포함하는 평면을 나타낸다(축 방향은 가로 방향이다). $q = \frac{3}{8}$과 아래에서 구하는 속력에 맞추어 축척대로 그렸다.

폭발로 주어진 에너지

충돌 시각은

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2} = \frac{4L(1-q)}{u_1} = \frac{5L}{2u_1}.$$

이를 $5L/v$와 같게 놓으면 $u_1 = \frac{1}{2}v$이고, 따라서 $u_2 = \frac{3}{5}u_1 = \frac{3}{10}v$이다.

축 방향 속도는 v로 변하지 않으므로, 폭발에서 얻은 운동 에너지(kinetic energy)는 순전히 횡방향 운동 에너지이다.

$$\begin{aligned}\Delta E &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{8}M\left(\tfrac{1}{2}v\right)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{8}M\left(\tfrac{3}{10}v\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Mv^2\left(\tfrac{3}{32} + \tfrac{9}{160}\right) = \tfrac{1}{2}Mv^2\cdot\tfrac{3}{20} = \frac{3Mv^2}{40}.\end{aligned}$$

합체 후의 속도

충돌 직전, 각 파편의 횡방향 속도는 반발로 뒤집혀 있다. 파편 1의 횡방향 운동량은 $-qMu_1$, 파편 2의 횡방향 운동량은 $+(1-q)Mu_2$이다. (1)에 의해 이 둘의 합은 0이다. 축 방향 운동량은 $qMv + (1-q)Mv = Mv$이다. 합체(coalescence)에서 운동량이 보존되므로, 합쳐진 질량 M인 물체의 속도는

$$v \text{ (축 방향)},$$

으로 원래 물체와 같다. 다만 이 물체는 축에서 거리 $\frac{1}{2}L$만큼 떨어진, 축에 평행한 직선 위를 움직인다. 폭발에서 생긴 에너지 $\frac{3}{40}Mv^2$은 합체 과정에서 모두 잃는다.

검산

- $q = \frac{1}{2}$이면 $x = 0$이다. 같은 두 파편은 서로 거울상이므로 축 위에서 만나야 하고, 실제로 그렇다.
- $L = v = 1$, $u_1 = 0.5$, $u_2 = 0.3$이라 하면, $t = 5$일 때 파편 1은 $2 - 0.5\times 5 = -0.5$에, 파편 2는 $-2 + 0.3\times 5 = -0.5$에 있다. $x = \pm 1$에서 반사하도록 한 시간 단계 시뮬레이션에서도 각각 한 번씩 반발한 뒤 $t = 5.000$, $x = -0.500$에서 만나는 결과가 재현되었다.

- 최종 횡방향 운동량은 $-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{10}=0$이므로 최종 속도는 순전히 축 방향이다.

흔한 실수

- 벽이 축 방향 속도를 바꾸도록 하는 것. 매끄러운 벽은 수직(반지름 방향) 힘만 작용한다.
- 반발이 횡방향 운동량을 뒤집는다는 사실을 잊는 것. 전체 횡방향 운동량은 **두** 파편이 모두 반발한 뒤에야 다시 0이 된다.
- $q=\frac{5}{8}$을 남겨 두는 것. 이는 파편의 이름표만 바꾼 같은 상황이며, $q\le\frac{1}{2}$ 조건으로 배제된다.

STEP 너머

운동을 대칭 방향을 따르는 성분과 가로지르는 성분으로 나누는 것은 큰 아이디어의 출발점이다. 바로 계의 대칭이 보존량을 준다는 것이다. 여기서 원통은 길이 방향 어디에서나 똑같아 보이므로, 벽이 있어도 축 방향 운동량이 보존된다(뇌터(Noether) 정리가 이를 엄밀하게 만든다). 이 문제는 또한 폭발 뒤에 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이 이어지면, 축 방향 운동은 아무 상관 없이 계속되는 동안 에너지가 열로 되돌려질 수 있음을 보여 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 방식으로 운동량과 질량중심(centre of mass)의 운동을 전개한다.

풀이

STEP II 1997, 문제 11

역학 • 포물체 운동

STEP II 1997, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

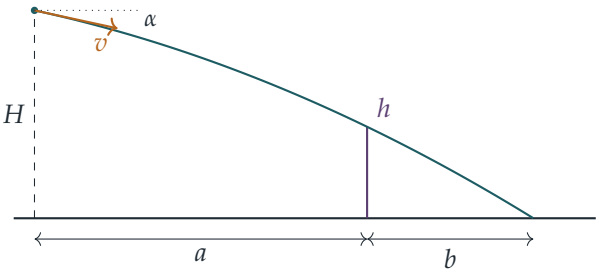
step.maths.org/questions/97-s2-q11

핵심 아이디어

공의 궤적(trajectory)을 수평으로 이동한 거리에 대하여 서브하는 사람의 높이에서 아래로 떨어진 정도를 나타내는 식으로 쓴다. 그러면 주어진 두 사실(공이 a만큼 갔을 때 높이가 h이고, $a+b$만큼 갔을 때 높이가 0이다)은 두 미지수 v와 α에 대한 두 방정식이 된다. 부등식으로 주어지는 범위는 이 방정식들의 해가 언제 실제로 물리적인 의미를 갖는지 따져 보면 얻어진다.

풀이

공을 공기 저항(air resistance)이나 회전 없이 중력만 받으며 움직이는 질점(particle)으로 모형화한다. 원점을 공을 치는 지점 바로 아래의 지면에 잡고, x축은 네트를 향하는 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡는다.



v^2에 대한 식

처음 속도는 $(v\cos\alpha, -v\sin\alpha)$이다. 시간 t가 지난 뒤

$$x = vt\cos\alpha, \qquad y = H - vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(v\cos\alpha)$를 대입하여 t를 소거하고 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 이용하면

$$y = H - x\tan\alpha - \frac{gx^2(1+\tan^2\alpha)}{2v^2}. \tag{$*$}$$

편의상 $T = \tan\alpha$, $k = \dfrac{g(1+T^2)}{2v^2}$로 두면 $y = H - xT - kx^2$이다.
공은 $x = a + b$에 떨어지므로, 그 지점에서 $y = 0$을 대입하면

$$0 = H - (a+b)T - k(a+b)^2 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{H-(a+b)T}{(a+b)^2}. \tag{1}$$

k를 원래 정의로 되돌리고 v^2에 대하여 정리하면

$$v^2 = \frac{g(a+b)^2(1+\tan^2\alpha)}{2[H-(a+b)\tan\alpha]},$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다.

$\tan\alpha$에 대한 식

공은 네트를 아슬아슬하게 넘어가므로 $x = a$에서 $y = h$이다. $(*)$에서

$$H - h = aT + ka^2.$$

(1)의 k를 대입하고 양변에 $(a+b)^2$을 곱하면

$$\begin{aligned}(H-h)(a+b)^2 &= aT(a+b)^2 + a^2\big[H-(a+b)T\big]\\ &= aT(a+b)\big[(a+b)-a\big] + a^2H\\ &= abT(a+b) + a^2H.\end{aligned}$$

H가 있는 항을 모으고 $(a+b)^2 - a^2 = b(2a+b)$를 이용하면

$$ab(a+b)T = b(2a+b)H - (a+b)^2h.$$

양수인 $ab(a+b)$로 나누면

$$\tan\alpha = \frac{2a+b}{a(a+b)}\,H - \frac{a+b}{ab}\,h,$$

이므로 원하는 식을 얻는다.

H의 범위

a, b, h, H가 주어지면 두 번째 식이 $\tan\alpha$를 정하고, 이어서 첫 번째 식이 v^2을 정한다. 이러한 서브가 존재할 필요충분조건은 이 값들이 허용 가능한 것, 즉 $\tan\alpha > 0$(공을 **아래쪽으로** 치므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)이고 $v^2 > 0$인 것이다.

> **생각해 보기** v^2의 분자는 분명히 양수이다. 그렇다면 $v^2 > 0$은 실제로 무엇을 요구하는가?

분모가 양수일 것, 즉 $H - (a+b)\tan\alpha > 0$을 요구한다. $\tan\alpha$에 대한 식을 대입하면

$$\begin{aligned} H - (a+b)\tan\alpha &= H - \frac{2a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h \\ &= -\frac{a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h = \frac{a+b}{a}\left[\frac{(a+b)h}{b} - H\right]. \end{aligned}$$

$(a+b)/a > 0$이므로 이 값이 양수일 필요충분조건은

$$H < \frac{(a+b)h}{b}.$$

$\tan\alpha > 0$이려면

$$\frac{2a+b}{a(a+b)}H > \frac{a+b}{ab}h \quad\Longleftrightarrow\quad H > \frac{(a+b)^2 h}{b(2a+b)},$$

이어야 한다. 여기서 양수 $a(a+b)/(2a+b)$를 곱하였다.

두 조건을 합치면

$$\boxed{\frac{(a+b)^2}{b(2a+b)}h \;<\; H \;<\; \frac{a+b}{b}h}$$

이고, 역으로 이 범위 안의 모든 H에 대하여 적절한 α와 v가 존재한다. $\dfrac{a+b}{2a+b} < 1$이므로 이 구간은 공집합이 아니다.

두 경계 모두 뜻이 분명하다. 위쪽 경계는 착지점에서 네트 꼭대기를 지나는 직선이 서브하는 사람이 서 있는 연직선과 만나는 높이이다. 중력은 경로를 아래로 휘게 하므로 공은 그 직선보다 아래에서 출발해야 한다($H = (a+b)h/b$이면 속력이 무한대여야 한다). 아래쪽 경계는 $\alpha = 0$, 즉 수평으로 서브하는 경우이다. 이보다 낮은 곳에서 서브하면 네트를 넘기면서도 주어진 지점에 떨어지게 하려면 공을 위쪽으로 쳐야 한다.

검산

- $a = 12\,\text{m}$, $b = 6\,\text{m}$, $h = 1\,\text{m}$이면 범위는 $1.8\,\text{m} < H < 3\,\text{m}$이다. $H = 1.8$일 때 식에서 $\tan\alpha = \frac{30}{216}(1.8) - \frac{18}{72} = 0$이 나오며, 이는 아래쪽 경계에서 기대한 대로이다.

- 범위 안에서 a, b, h, H를 임의로 잡아 두 식으로 α와 v를 계산하고 운동을 수치적으로 단계별 계산해 보았더니, 공은 매번 네트 꼭대기를 지나 $x = a + b$에 떨어졌다(정확한 경로에 대한 상대 오차는 10^{-14} 미만).
- 차원(dimension): $\tan\alpha$의 각 항은 길이를 길이로 나눈 것이고, v^2의 차원은 $g\times$ 길이이므로 마땅히 그래야 하는 대로이다.

흔한 실수

- 아래쪽을 향하는 각도 때문에 생기는 부호 실수: 처음 연직 방향 속도는 $-v\sin\alpha$이고, $(*)$에서 $x\tan\alpha$ 항은 빼야 한다.
- "$v^2 > 0$"에서 멈추고, 이것이 분모에 대한 조건이며 $\tan\alpha$를 대입한 뒤에야 비로소 H에 대한 조건이 된다는 점을 알아차리지 못하는 것.

STEP 너머

이 문제에서는 발사 조건이 경계 조건을 정하는 것이 아니라, 거꾸로 두 경계 조건(네트와 착지점)이 발사 조건을 정한다. 이는 간단한 **경계값 문제**(*boundary-value problem*)이며, 미분방정식(differential equation)을 수치적으로 푸는 "사격법(shooting method)"의 바탕이 되는 아이디어이다. 공기 저항과 회전이 있으면 방정식은 더 이상 닫힌 형태의 해(closed-form solution)를 갖지 않으며, 바로 이런 방식으로 풀어 나가게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 저항이 있는 포물체 운동을 비롯하여 훨씬 많은 내용을 다룬다.

풀이

STEP II 1997, 문제 12

확률과 통계 • 이항분포의 홀짝 확률

> **STEP II 1997, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q12

핵심 아이디어

메시지가 지금 **맞는지** **틀린지**만 추적한다. 한 번 잘못 들을 때마다 이 상태가 뒤집히므로, Albert에게 돌아오는 메시지는 잘못 전달된 귓속말의 횟수가 짝수일 때, 그리고 그 때에만 맞다. 이항 전개(binomial expansion)에서 짝수 번째 항만 골라내는 것이 바로 $(a+b)^n + (a-b)^n$이 하는 일이다. 홀수 번째 항은 서로 상쇄되기 때문이다. 변형된 게임에서는, 한 번 실패한 뒤 Albert가 **틀린** 메시지를 전달한다는 점에 주목한다. 따라서 그 뒤의 각 회차에서는 잘못 듣는 횟수가 **홀수**여야 한다.

풀이

세 명의 참가자

참가자가 n명이면 귓속말은 n번 전달된다. Albert가 Bertha에게, Bertha가 다음 참가자에게, 이런 식으로 원을 따라 Zebedee까지 전달되고, 마지막으로 Zebedee가 다시 Albert에게 전달한다. 각 귓속말은 확률 p로 올바르게 들리며, 서로 독립(independent)이다. Albert가 참인 결과를 듣는지는 잘못 들린 귓속말의 횟수에만 달려 있고, 동전이 어느 면을 보였는지와는 무관하다.

참가자가 세 명이면 귓속말은 세 번이고, 각각 확률 $\frac{2}{3}$으로 올바르게 들린다. Albert에게 도달하는 메시지는 잘못 들린 귓속말이 하나도 없거나, 정확히 두 번일 때(두 번째 오류가 첫 번째 오류를 되돌린다) 맞다. 따라서

$$\Pr(\text{승리}) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} + \frac{6}{27} = \frac{14}{27}.$$

n명의 참가자

$q = 1 - p$라 하자. 잘못 들린 귓속말의 횟수는 $\mathrm{B}(n, q)$ 분포(distribution)를 따르고, 이 횟수가 짝수일 때 게임에서 이긴다.

$$P = \sum_{k\text{ 짝수}} \binom{n}{k} q^k p^{n-k}.$$

이제

$$(p+q)^n + (p-q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k \left(1 + (-1)^k\right) = 2 \sum_{k\text{ 짝수}} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k,$$

이다. k가 홀수인 항은 상쇄되고 k가 짝수인 항은 두 번씩 나타나기 때문이다. $p + q = 1$이고 $p - q = 2p - 1$이므로

$$\boxed{P = \tfrac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n\right).}$$

$n = 3$, $p = \frac{2}{3}$이면 이 식은 $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{14}{27}$이 되어 앞의 결과와 일치한다.

변형된 게임

Albert가 Bertha에게 귓속말하는 횟수를 N이라 하자. 메시지가 원을 한 바퀴 완전히 도는 것을 한 **회차**라 부르면, 모든 회차는 Albert의 귓속말로 시작한다.

> **생각해 보기** 한 회차가 실패한 뒤, 다음 회차는 단지 첫 회차를 새로 반복하는 것일까?

아니다. 첫 회차에서 Albert는 올바른 결과를 보낸다. 만약 Zebedee에게서 그것을 잘못 듣는다면, Albert는 자신이 **들은** 것, 즉 틀린 메시지를 전달한다. 틀린 메시지에서 출발하면, 그 회차는 잘못 들린 귓속말의 횟수가 **홀수**일 때, 그리고 그때에만 Albert가 참인 결과를 듣는 것으로 끝난다. 그 확률은 $1 - P$이다. 그 회차가 또 실패하면 Albert는 다시 틀린 메시지를 듣고(그리고 전달하고), 따라서 그 뒤의 모든 회차는 이 회차와 같다. 각 회차는 서로 독립인데, 각각의 듣기가 독립이기 때문이다.

따라서 첫 회차는 확률 P로 성공하고, 그 뒤의 각 회차는 확률 $1 - P$로 성공하고 확률 P로 실패한다. 그러므로 $\Pr(N = 1) = P$이고, $k \geq 2$에 대하여

$$\Pr(N = k) = \underbrace{(1-P)}_{\text{제1회차 실패}} \underbrace{P^{k-2}}_{\text{제2,…,}k-1\text{회차 실패}} \underbrace{(1-P)}_{\text{제}k\text{회차 성공}} = (1-P)^2 P^{k-2}.$$

$0 < p < 1$이라 가정하면 $0 < P < 1$이다. 이때 주어진 합에 $x = P$를 대입하면

$$\sum_{k=2}^{\infty} kP^{k-2} = \frac{1}{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} kP^{k-1} - 1\right) = \frac{1}{P}\left(\frac{1}{(1-P)^2} - 1\right),$$

이고, 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= P + (1-P)^2 \cdot \frac{1}{P}\left(\frac{1}{(1-P)^2} - 1\right)\\ &= P + \frac{1-(1-P)^2}{P}\\ &= P + (2-P) = 2.\end{aligned}$$

Albert가 Bertha에게 귓속말하는 횟수의 기댓값(expected value)은 참가자의 수와 p의 값에 관계없이 2이다.

이를 더 빨리 확인하는 방법이 있다. 첫 회차가 실패했다는 조건 아래에서, 추가로 필요한 회차의 수는 성공 확률이 $1-P$인 기하분포(geometric distribution)를 따르므로 그 평균은 $1/(1-P)$이다. 그러므로 $\mathrm{E}(N) = 1 + (1-P)\cdot\frac{1}{1-P} = 2$이다.

(경계의 경우: $p = 1$이거나, $p = 0$이고 n이 짝수이면 $P = 1$이고 Albert는 한 번만 귓속말한다. $p = 0$이고 n이 홀수이면 $P = 0$이고 두 번째 회차는 반드시 성공하므로 $N = 2$이다.)

검산

- 맞게 듣거나 틀리게 듣는 2^n가지 경우를 모두 나열하여 정확한 분수로 계산하면, $n \le 8$과 여러 p값에 대하여 $\frac{1}{2}(1 + (2p-1)^n)$이 그대로 나온다. 세 명일 때의 $\Pr(\text{승리}) = \frac{14}{27}$도 포함된다.
- $p = \frac{1}{2}$이면 $P = \frac{1}{2}$이다. 메시지가 순전한 잡음이 되므로 당연한 결과이다.
- $(n, p) = (3, \frac{2}{3}), (5, 0.9), (4, 0.3)$에 대하여 변형된 게임을 2×10^5번 시뮬레이션했더니, 평균 귓속말 횟수는 각각 2.001, 1.996, 1.994였다.

흔한 실수

- 귓속말을 n번이 아니라 $n-1$번으로 세는 것. Zebedee가 다시 Albert에게 하는 마지막 귓속말도 세어야 한다.
- 변형된 게임의 모든 회차가 확률 P로 성공한다고 보는 것. 그러면 $1/P$가 나오는데, 이는 틀리다. 실패한 뒤에는 Albert가 틀린 메시지를 전달하기 때문이다.

STEP 너머

메시지의 맞음/틀림 상태는 두 상태를 갖는 마르코프 연쇄(Markov chain)이고, $2p-1$은 그 전이 행렬(transition matrix)의 두 번째 고윳값(eigenvalue)이다. 이것이 $(2p-1)^n$이 메시지가 동전의 결과를 얼마나 빨리 잊는지를 결정하는 이유이다. 이와 같은 모형인

이진 대칭 통신로(binary symmetric channel)는 정보 이론(information theory)과 오류 정정 부호(error-correcting codes)의 출발점이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 수준에서 생성함수(generating function)와 마르코프 연쇄를 다룬다.

풀이

STEP II 1997, 문제 13

확률과 통계 • 뷔퐁의 바늘

STEP II 1997, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

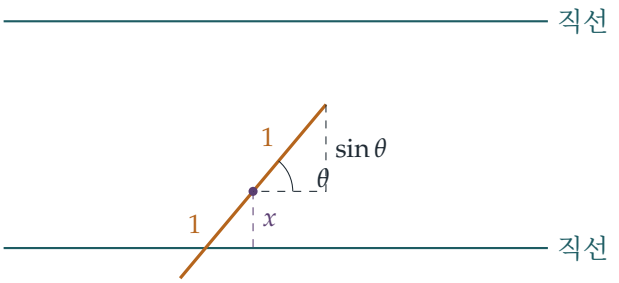
step.maths.org/questions/97-s2-q13

핵심 아이디어

이것은 뷔퐁(Buffon)의 바늘(Buffon's needle) 문제이다. 바늘의 위치를 서로 독립(independent)인 두 확률적인 양으로 나타낸다. 하나는 바늘의 중심에서 가장 가까운 직선까지의 거리이고, 다른 하나는 바늘이 직선들과 이루는 예각이다. 중심을 고정하고 나면, 모든 것은 바늘이 직선에 수직인 방향으로 얼마나 멀리 뻗는지에 달려 있다. 그 길이는 바늘 길이의 절반에 그 각의 사인을 곱한 값이다. 그러면 각 소문항은 균등분포(uniform distribution)를 따르는 각에 관한 문제가 된다.

풀이

"무작위로 떨어뜨린다"를 보통의 방식으로 모형화한다. 중심에서 가장 가까운 직선까지의 거리 X는 $[0,1]$에서 균등분포를 따르고(직선 사이의 간격이 2 cm이므로 가장 가까운 직선은 많아야 1 cm 떨어져 있다), 바늘과 직선이 이루는 예각 θ는 X와 독립으로 $[0,\frac{\pi}{2}]$에서 균등분포를 따른다. (각을 $[0,\pi)$에서 균등하게 잡아도 같은 답이 나온다. 어느 쪽이든 $\sin\theta$의 분포가 같기 때문이다.)



바늘의 각 절반은 길이가 1이므로, 양 끝은 중심의 위와 아래로 수직 거리 $\sin\theta$만큼 떨어져 있다.

소문항 (i)

중심이 가장 가까운 직선에서 x만큼 떨어져 있을 때, 바늘이 그 직선과 만나는 것은 한쪽 끝이 그 직선을 넘어설 때, 곧

$$\sin\theta > x \iff \theta > \arcsin x,$$

일 때와 정확히 같다. $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 sin이 증가하기 때문이다. θ가 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 균등분포를 따르므로

$$\mathrm{P}(\text{가장 가까운 직선과 만남} \mid X = x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin x = \frac{2}{\pi}\arccos x.$$

소문항 (ii)

바늘이 가장 가까운 직선과 만난다고 하자. 즉 $\theta > \arcsin x$이다. 바늘을 따라 재면, 교점은 중심에서 $x/\sin\theta$만큼 떨어져 있다(θ의 대변이 x인 직각삼각형의 빗변이다). 따라서 두 조각의 길이는 $1 + x/\sin\theta$와 $1 - x/\sin\theta$이고, 짧은 쪽은

$$S = 1 - \frac{x}{\sin\theta}.$$

이다. θ가 $\arcsin x$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 움직이면 S는 0에서 $1 - x$까지 증가하므로, S는 $[0, 1 - x]$의 값을 가진다.

만난다는 조건(conditioning) 아래에서 θ는 길이가 $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$인 구간 $(\arcsin x, \frac{\pi}{2}]$에서 균등분포를 따른다. $0 \le s \le 1 - x$에 대하여

$$S \le s \iff \frac{x}{\sin\theta} \ge 1 - s \iff \sin\theta \le \frac{x}{1-s} \iff \theta \le \arcsin\frac{x}{1-s},$$

이다. 여기서 $1 - s > 0$과 $x/(1-s) \le 1$($s \le 1 - x$이므로)을 사용했으므로 아크사인이 정의된다. 따라서 짧은 조각의 누적분포함수(cumulative distribution function)는

$$F(s) = \mathrm{P}(S \le s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ \dfrac{\arcsin\left(\frac{x}{1-s}\right) - \arcsin x}{\arccos x}, & 0 \le s \le 1 - x, \\ 1, & s > 1 - x. \end{cases}$$

이다. 확인해 보면, 가운데 식은 $s = 0$에서 0이고 $s = 1 - x$에서 $(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)/\arccos x = 1$이므로 F는 연속이다.

생각해 보기 바늘이 직선과 만난다는 사실을 알고 나서도 θ가 여전히 균등분포를 따르는 이유는 무엇인가?

균등분포를 따르는 확률변수에 부분구간에 놓인다는 조건을 주면, 그 부분구간에서 여전히 균등분포를 따른다. $\arcsin x \le a \le \frac{\pi}{2}$에 대하여 $\mathrm{P}(\theta \le a \mid \theta > \arcsin x) = (a - \arcsin x)/(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$이고, 이는 a에 대한 일차식이다. 이것이 바로 위에서 사용한 사실이다.

소문항 (iii)

가장 가까운 직선은 거리 $X \le 1$에 있고, 다른 모든 직선은 적어도 거리 $2 - X \ge 1$에 있다. 바늘은 중심에서 많아야 $\sin\theta \le 1$만큼 뻗으므로, 가장 가까운 직선이 아닌 다른 직선과 만나려면 정확히 $X = 1$이고 $\theta = \frac{\pi}{2}$이어야 하며, 그 확률은 0이다. 따라서 바늘이 모든 직선과 만나지 않는 것은 가장 가까운 직선과 만나지 않는 것과 정확히 같고, 소문항 (i)에 의하여

$$\mathrm{P}(\text{만나지 않음} \mid X = x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x.$$

이다. X는 $[0,1]$에서 균등분포를 따르므로(확률밀도 1), x에 대하여 평균을 낸다.

$$\mathrm{P}(\text{만나지 않음}) = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\arcsin x \,\mathrm{d}x.$$

$u = \arcsin x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \Big[x\arcsin x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{바늘이 모든 직선과 만나지 않음}) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.363.$$

검산

- 소문항 (i)의 결과는 양 끝에서 타당하게 행동한다. $x = 0$이면 중심이 직선 위에 있고 확률은 1이다. $x \to 1$이면 수직으로 놓인 바늘만 직선에 닿으므로 확률은 0으로 다가간다.
- 만날 확률은 $2/\pi \approx 0.637$이고, 이는 뷔퐁의 고전적인 답 $2\ell/(\pi d)$에 $\ell = d = 2$를 넣은 값이다.
- 무작위 투하 10^6번을 시뮬레이션한 결과 만나지 않는 비율은 0.3626으로, $1 - 2/\pi = 0.3634$와 비교된다. $x = 0.2, 0.5, 0.7$일 때 시뮬레이션으로 얻은 $F(s)$의 값은 공식과 약 0.002 이내로 일치했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 조건을 거는 것을 잊는 실수. $\arccos x$ 대신 $\frac{\pi}{2}$로 나누면 결코 1에 도달하지 않는 "분포함수"가 나온다.
- 짧은 조각을 $1 - x\sin\theta$나 $1 - x/\cos\theta$로 잡는 실수. 삼각형의 어느 변이 x이고 어느 각이 θ인지 확인하라.
- 소문항 (iii)에서 만나는 조건을 조정하지 않은 채 $\frac{1}{2}$을 곱하거나 X가 $[0,2]$에서 균등분포를 따른다고 두는 실수. 가장 가까운 직선까지의 거리는 $[0,1]$에서 균등분포를 따른다.

STEP 너머

뷔퐁의 바늘(1777)은 기하학적 확률(geometric probability)의 최초의 문제 가운데 하나이며, π가 나타난다는 것은 바늘을 떨어뜨려서 π의 (느린) 몬테카를로(Monte Carlo) 추정값을 얻을 수 있다는 뜻이다. 가장 깔끔한 현대적 접근은 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용한다. 교점 개수의 기댓값은 바늘의 길이에 비례하며, 이는 구부러진 바늘("뷔퐁의 국수(Buffon's noodle)")에 대해서도 성립한다. 이 사실은 적분기하학(integral geometry)과 크로프톤 공식(Crofton formula)으로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 결합분포(joint distribution)와 이런 종류의 기하학적 확률 문제를 다룬다.

풀이

STEP II 1997, 문제 14

확률과 통계 • 푸아송 과정

STEP II 1997, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s2-q14

핵심 아이디어

역학처럼 보이는 상황이지만, 이 문제는 사실 푸아송 과정(Poisson process) 문제이다. 운동학(kinematics)은 어떤 차량을 세어야 하는지만 알려 준다. 더 빠른 차량이 터널 안에서 나를 따라잡으려면, 내가 들어간 뒤 일정한 시간이 지나기 전에 진입해야 한다. 이 경계 시간만 알면 나머지는 모두 푸아송 개수에 관한 문제가 된다. 후반부에서는 각 차량에 빠름 또는 느림이라는 표지를 무작위로 붙이면 하나의 푸아송 흐름이 서로 독립인(independent) 두 푸아송 흐름으로 나뉜다는 사실을 이용한다. 또한 느린 차량 한 대가 그 뒤의 모든 빠른 차량으로부터 나를 막아 준다는 점도 알아차려야 한다.

풀이

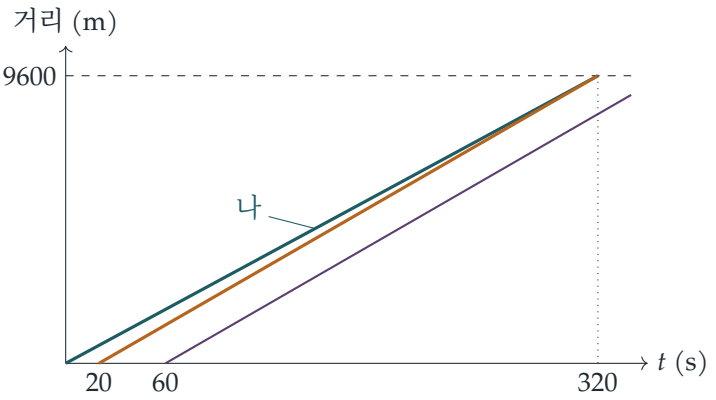
풀이 전체에서 차량을 입자로 모형화한다(차량의 길이는 무시한다). 따라서 앞차를 따라잡은 차량은 그때부터 그냥 앞차의 속력으로 달린다. 시간 t는 내가 진입한 순간부터 초 단위로 잰다. 차량은 분당 6대, 즉 초당 0.1대의 비율로 진입하므로, 길이가 τ초인 임의의 구간에 진입하는 차량의 수는 $\mathrm{Po}(0.1\tau)$를 따르고, 서로 겹치지 않는 구간의 개수들은 독립이다.

첫 번째 부분: 누가 나를 따라잡을 수 있는가?

나는 터널을 통과하는 데 $9600/30 = 320\,\mathrm{s}$가 걸린다. 시각 $t > 0$에 진입하는 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$의 차량을 생각하자. 이 차량이 나를 따라잡기 전까지, 시각 s에서 내가 들어간 거리는 $30s$이고 그 차량이 들어간 거리는 $32(s-t)$이다. 두 값은 $2s = 32t$, 즉 $s = 16t$일 때 같아지며, 이때의 위치는 터널 안으로 $480t$미터 들어간 지점이다. 따라서 그 차량이 내가 터널을 빠져나가기 전에 나를 따라잡을 필요충분조건은

$$480t \le 9600 \iff t \le 20.$$

이다. (같은 말로, 그 차량은 터널을 통과하는 데 $9600/32 = 300\,\mathrm{s}$가 필요하므로, 나보다 늦지 않게 출구에 도달할 필요충분조건은 $t + 300 \leq 320$이다.)



위의 거리–시간 그래프는 나(청록색), $t = 20$에 진입한 빠른 차량(호박색), $t = 60$에 진입한 빠른 차량(자주색)을 보여 준다. 호박색 차량은 우리 둘이 출구에 도달하는 바로 그 순간 나와 만난다. 자주색 차량처럼 그보다 늦게 진입한 빠른 차량은 내가 터널을 나설 때 여전히 내 뒤에 있다.

다른 모든 차량은 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 달리므로, $(0, 20]$에 진입한 차량이 나에게 도달하기 전에 그 차량을 가로막을 것은 없다. 그 차량 앞에 있는 차량은 나를 제외하면 모두 역시 나에게 도달할 때까지 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 달리기 때문이다. 나보다 먼저 진입한 차량은 내 앞에 있으므로 상관이 없다. 따라서 내가 터널을 나설 때 내 뒤의 대기열은 정확히 $(0, 20]$에 진입한 차량들로 이루어지고, 그 수는 $\mathrm{Po}(0.1 \times 20) = \mathrm{Po}(2)$를 따른다. 내 뒤 대기열에 있는 차량 수의 기댓값은

$$\boxed{2}.$$

이다.

두 번째 부분: 정확히 두 대가 진입하여 나를 따라잡는 경우

이제 다른 각 차량은 다른 모든 것과 독립적으로 확률 $\frac{1}{2}$로 빠르거나$(32\,\mathrm{m\,s^{-1}})$ 느리다$(30\,\mathrm{m\,s^{-1}})$.

? **생각해 보기** 20초 안에 진입한 빠른 차량은 여전히 모두 나를 따라잡는가?

그렇지 않다. 시각 $t' > 0$에 진입한 느린 차량은 내 뒤로 $30t'$미터의 일정한 간격을 유지하므로 결코 나를 따라잡지 못한다. 그 뒤에 진입한 빠른 차량은 그 느린 차량을 따라잡거나(또는 그 뒤의 무언가에 막히거나) 그때부터 $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$에 묶이므로, 역시 결코 나에게 도달하지 못한다. 따라서 $(0, 20]$에 진입한 차량이 나를 따라잡을 필요충분조건은 그 차량이 빠르고,

동시에 나와 그 차량 사이에 진입한 모든 차량이 빠른 것이다. $t = 20$ 이후에 진입한 빠른 차량은 앞을 가로막는 것이 없더라도 나를 따라잡을 수 없다.

$(0, 20]$에 진입하는 차량의 수를 $K \sim \mathrm{Po}(2)$라 하자. 이 부분의 사건은 그 구간에 정확히 두 대가 진입하고 두 대 모두 나를 따라잡는 것이다. 이를 위해서는 $K = 2$이고 두 차량이 모두 빨라야 한다.

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(K = 2) \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{2^2 \mathrm{e}^{-2}}{2!} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}} \approx 0.0677.$$

마지막 부분: 정확히 두 대가 내 뒤에 줄 서는 경우

이제 처음 20초 동안 몇 대의 차량이든 진입할 수 있다. $(0, 20]$에 진입한 K대의 차량을 진입 순서대로 나열하자. 앞의 논증에 따르면, 출구에서 내 뒤의 대기열은 이 목록의 맨 앞에서부터 끊기지 않고 이어지는 빠른 차량들이다. ($t = 20$ 이후에 진입한 차량은 결코 나를 따라잡을 수 없으므로 대기열에 합류할 수 없다.) 따라서 대기열에 정확히 두 대가 있을 필요충분조건은 다음 중 하나이다.

- $K = 2$이고 두 대 모두 빠르다. $K = 2$일 때 이 확률은 $\frac{1}{4}$이다.
- $K \geq 3$이고 처음 두 대는 빠르며 세 번째 차량은 느리다. $K = k \geq 3$일 때 이 확률은 $\frac{1}{8}$이다.

그러므로

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{두 대의 대기열}) &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}(K = 2) + \tfrac{1}{8}\,\mathrm{P}(K \geq 3) \\
&= \tfrac{1}{4} \cdot 2\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2} \\
&= \boxed{\tfrac{1}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)} \approx 0.108.
\end{aligned}$$

이 값은 앞의 답보다 크며, 당연히 그래야 한다. 앞의 사건은 두 대의 대기열이 생기는 여러 방법 가운데 하나이기 때문이다.

> 깔끔한 다른 방법: 흐름을 빠른 차량과 느린 차량으로 나누면, 각각 비율 $0.05\,\mathrm{s}^{-1}$인 독립인 두 푸아송 과정이 된다. 정확히 두 대의 대기열이란 처음 20초 동안 처음 두 번의 도착이 빠른 차량이고 그다음 도착이 (있다면) 느린 차량이라는 뜻이다. 표지가 붙은 사건을 다루는 푸아송 문제에서는 이렇게 두 흐름으로 생각하는 것이 가장 빠른 길인 경우가 많다.

검산

- 극한의 경우: 모든 차량이 느리다면 아무도 나를 따라잡을 수 없고, 실제로 빠를 확률이 0일 때 대기열 공식은 0을 준다.
- 빠를 확률을 $\frac{1}{2}$ 대신 p로 두면, 같은 논증으로 $p^2\mathrm{P}(K=2)+p^2(1-p)\mathrm{P}(K\geq 3)$를 얻는다. $p=1$이면 이 값은 $\mathrm{P}(K=2)=2\mathrm{e}^{-2}$이고, 이는 대기열의 길이가 정확히 $\mathrm{Po}(2)$를 따르는 첫 번째 부분과 일치한다.
- 추월이 없는 교통 상황을 4×10^5번 시뮬레이션하였다. 그 결과 첫 번째 부분의 평균 대기열은 2.003이었고, 두 번째 부분의 확률은 0.0674와 0.1076으로, 정확한 값 0.0677과 0.1081에 가까웠다.

흔한 실수

- 느린 차량 한 대가 그 뒤의 모든 빠른 차량으로부터 나를 막아 준다는 점을 잊고, 마지막 부분의 답을 $\mathrm{P}(\text{정확히 두 대가 빠름, 20 s 동안})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$로 쓰는 것.
- 시간은 초 단위인데 비율은 분당 6대를 그대로 쓰는 것: 20초 동안의 평균은 120이 아니라 2이다.
- 아무 때나 진입한 차량으로 대기열이 늘어난다고 가정하는 것: 처음 20초 안에 진입한 차량만 나에게 도달할 수 있다.

STEP 너머

두 번째 부분은 **솎아내기**(thinning)를 이용한다. 비율 λ인 푸아송 과정의 각 사건을 독립적으로 확률 p로 남기면, 남긴 사건과 버린 사건은 각각 비율 $p\lambda$와 $(1-p)\lambda$인 독립인 푸아송 과정을 이룬다. 추월할 수 없는 차량들의 대기열은 교통류 이론(traffic flow theory)의 고전적인 모형이며, 그 이론에서 느린 차량은 여기서 본 것과 같은 "차량군(platoon)"을 만들어 낸다. 푸아송 과정과 솎아내기에 대해서는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 참고하라.

풀이

STEP III 1997, 문제 1

순수수학 • 지수함수의 거듭제곱급수

STEP III 1997, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q1

핵심 아이디어

$\mathrm{e}^x = \sum x^n/n!$에 다항식을 곱하면 급수가 옆으로 밀린다. 그러면 x^n의 계수는 $1/n!$, $1/(n-1)!$, $1/(n-2)!$, ...의 일차결합이 되고, 공통분모 $n!$로 통분하면 분자는 n에 대한 다항식이 된다. $x = 1$을 대입하면 거듭제곱급수(power series)의 항등식이 수치 급수(series)의 항등식으로 바뀐다. 따라서 이 문제 전체는 원하는 분자를 만들어 내는 다항식을 고르는 문제이다. 하강 계승(*falling factorial*) n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$가 자연스러운 기본 단위가 되는데, 그 까닭은 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n! = 1/(n-k)!$이기 때문이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$은 모든 실수 x에 대하여 절대수렴(absolute convergence)한다. 여기에 다항식을 곱하면 이런 급수들의 유한한 합이 되므로, 급수들을 항별로 더한 다음 $x = 1$을 대입해도 된다. 음의 정수 m에 대하여 $1/m! = 0$으로 약속한다. 이렇게 하면 아래의 모든 합을 $n = 0$부터 시작할 수 있다.

소문항 (i)

다음이 성립한다.

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+2}}{n!} + 5\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n!} + 4\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

x^n의 계수를 모으기 위해 앞의 두 합의 첨자를 다시 매긴다. 계수는

$$\frac{1}{(n-2)!}+\frac{5}{(n-1)!}+\frac{4}{n!}=\frac{n(n-1)+5n+4}{n!}$$
$$=\frac{n^2+4n+4}{n!}=\frac{(n+2)^2}{n!}.$$

이다. 이 식은 $n=0$과 $n=1$을 포함한 모든 $n\geq 0$에 대하여 성립하는데, 이때 빠진 항들은 $1/m!=0$이라는 약속으로 처리된다. ($n=0$일 때 계수는 $4=2^2/0!$이고, $n=1$일 때는 $5+4=9=3^2/1!$이다.) 따라서

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)^2}{n!}\,x^n,$$

이고, $x=1$을 대입하면

$$10\,\mathrm{e}=\frac{2^2}{0!}+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\cdots=4+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\cdots,$$

을 얻어 원하는 결과가 나온다.

소문항 (ii)

이번에는 일반항이 $(n+1)^2/n!$이므로, 그 급수의 계수가

$$\frac{n(n-1)+bn+c}{n!}=\frac{(n+1)^2}{n!}.$$

이 되는 이차식 x^2+bx+c를 찾으면 된다.

? **생각해 보기** 어림짐작 없이 b와 c를 어떻게 구할 수 있을까?

목표 분자를 하강 계승으로 나타낸다: $n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$. 계수를 비교하면 $b=3$, $c=1$이다. 따라서 소문항 (i)과 똑같은 논증으로

$$(x^2+3x+1)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}\,x^n,$$

이고, $x=1$을 대입하면

$$(1+3+1)\,\mathrm{e}=5\,\mathrm{e}=1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots.$$

이다.

소문항 (iii)

일반항이 $(n+1)^3/n!$이므로 이제 삼차식이 필요하다. $(ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^x$에서 x^n의 계수는

$$\frac{a}{(n-3)!}+\frac{b}{(n-2)!}+\frac{c}{(n-1)!}+\frac{d}{n!}=\frac{a\,n(n-1)(n-2)+b\,n(n-1)+c\,n+d}{n!}.$$

이다. 목표 분자를 하강 계승으로 전개한다. $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$이고 $n^2 = n(n-1) + n$이므로

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= \big[n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n\big] + 3\big[n(n-1) + n\big] + 3n + 1 \\ &= n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1.\end{aligned}$$

이다. (간단히 검산해 보자. $n = 1$일 때 양변은 모두 8이다. $n = 2$일 때는 $27 = 0 + 12 + 14 + 1$이다.) 따라서 $a = 1, b = 6, c = 7, d = 1$이고

$$(x^3 + 6x^2 + 7x + 1)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^3}{n!}\, x^n.$$

이다. $x = 1$을 대입하면

$$1 + \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \cdots = (1 + 6 + 7 + 1)\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}.$$

? 생각해 보기 왜 급수를 항별로 그냥 제곱하거나 세제곱하면 안 될까?

$\sum (n+1)^3/n!$은 $\sum (n+1)/n!$로부터 간단한 방법으로 만들어지지 않기 때문이다. 합은 분자에 대하여 선형이므로, 우리가 할 수 있는 것은 분자를 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 꼴의 조각들로 쪼개는 것이다. 각 조각은 $n!$과 약분되어 e의 급수를 밀어 놓은 사본이 된다. 이런 조각 하나하나는 $x = 1$에서 정확히 e만큼 기여한다. 따라서 답은 e에 하강 계승 계수들의 합 $1 + 6 + 7 + 1 = 15$를 곱한 것이다.

검산

- $n = 60$까지의 부분합은 $27.1828\ldots$, $13.5914\ldots$, $40.7742\ldots$이며, 기계 정밀도 범위에서 10e, 5e, 15e와 일치한다.
- 세 분자 항등식의 계수는 $n = 0, \ldots, 39$에 대하여 정확히 확인하였다.
- 일관성: 소문항 (ii)의 급수는 $\sum (n+1)^2/n!$이고 소문항 (i)의 급수는 $\sum (n+2)^2/n!$이다. 그 차 $\sum (2n+3)/n! = 2\sum n/n! + 3\sum 1/n! = 2\mathrm{e} + 3\mathrm{e} = 5\mathrm{e}$는 실제로 10e − 5e와 같다.

흔한 실수

- 합의 첨자를 다시 매길 때 처음 두 항($n = 0, 1$)을 따로 살펴야 한다는 점을 잊는 것. $m < 0$에 대하여 $1/m! = 0$이라는 약속이 이 항들을 처리해 주지만, 직접 확인해 보아야 한다.

- $(n+1)^3$을 하강 계승이 아니라 거듭제곱 n^3, n^2, n과 비교하여 엉뚱한 삼차식을 고르는 것.

STEP 너머

합 $\sum_{n\geq 0} n^k/n!$은 $B_k\,\mathrm{e}$이다. 여기서 B_k는 k번째 벨 수(Bell number), 곧 k개의 대상으로 이루어진 집합을 분할(partition)하는 방법의 수이다: $B_0, \ldots, B_4 = 1, 1, 2, 5, 15$. 이것이 도빈스키(Dobiński)의 공식이다. 실제로 $m = n+1$로 두면 소문항 (iii)은 $\sum_{m\geq 1} m^4/m! = B_4\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}$이고, 계수 $1, 6, 7, 1$은 제2종 스털링 수(Stirling numbers of the second kind) $1, 7, 6, 1$을 거꾸로 늘어놓은 것이다. 거듭제곱급수를 항별로 재배열하고 결합해도 되는 근거는 절대수렴이며, 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. 이론은 Abbott의 *Understanding Analysis*를, 이런 종류의 문제를 더 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP III 1997, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP III 1997, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q2

핵심 아이디어

로그(logarithm)를 취하면 $x^y = y^x$는 $y \ln x = x \ln y$가 되고, 양변을 xy로 나누면 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$를 얻는다. 따라서 뒷부분은 사실 앞부분에 관한 문제이다. f의 각 함숫값을 주는 입력이 몇 개인지 알면, 각 x에 짝이 되는 y가 몇 개인지 알 수 있다. 이 방정식은 항상 자명한 해 $y = x$를 가진다. 관심의 대상은 나머지 해이다.

풀이

f의 그래프

몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하면

$$\mathrm{f}'(t) = \frac{t \cdot \frac{1}{t} - \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}, \qquad \mathrm{f}''(t) = \frac{2 \ln t - 3}{t^3}.$$

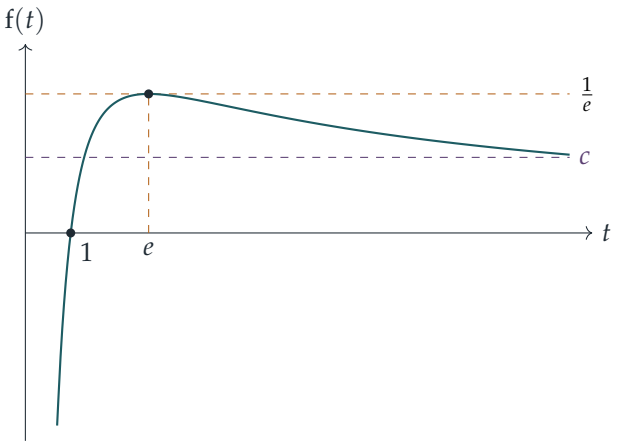
따라서 $0 < t < e$에서 $\mathrm{f}'(t) > 0$이고 $t > e$에서 $\mathrm{f}'(t) < 0$이다. 즉 f는 $(0, e]$에서 순증가(strictly increasing)하고 $[e, \infty)$에서 순감소한다. 최댓값은

$$\mathrm{f}(e) = \frac{1}{e}.$$

개형을 그리는 데 필요한 다른 특징은 다음과 같다.

- $0 < t < 1$에서 $\mathrm{f}(t) < 0$, $\mathrm{f}(1) = 0$, $t > 1$에서 $\mathrm{f}(t) > 0$이다.
- $t \to 0^+$일 때 $\ln t \to -\infty$이고 $1/t \to +\infty$이므로 $\mathrm{f}(t) \to -\infty$이다. 즉 y축이 점근선(asymptote)이다.
- $\ln t$는 t보다 느리게 증가하므로 $t \to \infty$일 때 $\mathrm{f}(t) \to 0^+$이다. 따라서 t축도 점근선이다.

- $t = e^{3/2}$에서 변곡점(point of inflection)이 있고, 그곳에서 $\mathrm{f} = \frac{3}{2}e^{-3/2} \approx 0.33$이다. 개수를 세는 데는 필요 없지만, 개형을 정직하게 그리는 데 도움이 된다.



값 c를 주는 t는 몇 개인가?

f는 $(0, e]$와 $[e, \infty)$ 각각에서 연속이고 순단조(strictly monotonic)이므로, 각 부분은 자신이 도달하는 모든 값을 정확히 한 번씩 취한다. $(0, e]$에서 f는 $-\infty$에서 $\frac{1}{e}$까지 증가하고, $[e, \infty)$에서는 $\frac{1}{e}$에서 0을 향해 감소하지만 그 값에 도달하지는 않는다. 따라서 주어진 값 c에 대하여 다음이 성립한다.

- $c > \frac{1}{e}$: t의 값이 **없다**;
- $c = \frac{1}{e}$: 값이 **하나**, $t = e$;
- $0 < c < \frac{1}{e}$: 값이 **둘**이며, 하나는 $(1, e)$에, 다른 하나는 (e, ∞)에 있다(그림의 수평선 c);
- $c \leq 0$: 값이 **하나**이며 $(0, 1]$에 있다. 감소하는 가지는 항상 양수이기 때문이다.

$x^y = y^x$의 해의 개수 세기

$x, y > 0$이면 양변이 모두 양수이므로 로그를 취할 수 있다. ln은 일대일(one-to-one)이므로 이 과정에서 해가 늘거나 줄지 않는다.

$$x^y = y^x \iff y \ln x = x \ln y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \iff \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(x),$$

여기서 $xy > 0$으로 나누었다. 따라서 x를 고정하면, 양수 y의 개수는 $c = \mathrm{f}(x)$일 때 $\mathrm{f}(t) = c$를 만족하는 t의 개수와 같다. 그중 하나는 항상 $y = x$이다.

생각해 보기 $c = \mathrm{f}(x)$는 위의 네 경우 중 실제로 어느 경우에 해당할 수 있을까?

c는 f의 함숫값이므로 $c > \frac{1}{e}$인 경우는 일어날 수 없다. 나머지 경우를 x에 대한 조건으로 바꾸어 쓰면 다음과 같다.

- $0 < x \leq 1$: 이때 $c = f(x) \leq 0$이므로 y는 정확히 **하나**이고, 바로 $y = x$이다.
- $x = e$: 이때 $c = \frac{1}{e}$이므로 y는 정확히 **하나**이고, 바로 $y = e$이다.
- $1 < x < e$ 또는 $x > e$: 이때 $0 < c < \frac{1}{e}$이므로 y의 값은 정확히 **둘**이다. 하나는 $y = x$이고 다른 하나가 더 있다. $1 < x < e$이면 다른 하나는 (e, ∞)에 있고, $x > e$이면 $(1, e)$에 있다.

예를 들어 $2^4 = 4^2 = 16$이므로 $x = 2$의 짝은 $y = 4$이다.

해집합의 개형 그리기

해집합은 직선 $y = x$(모든 $x > 0$에 대하여)와, "다른" 해들로 이루어진 두 번째 곡선으로 구성된다. 이 곡선은 전부 $x > 1, y > 1$인 영역에 놓인다. 그 모양은 다음과 같다.

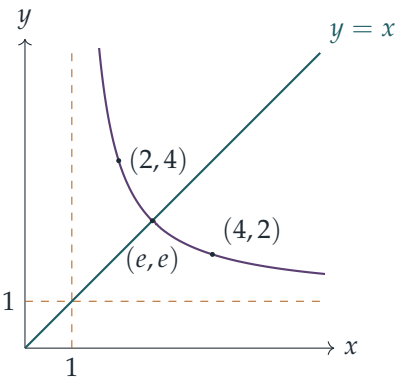
- **대칭성**. x와 y를 서로 바꾸어도 방정식이 변하지 않으므로, 곡선은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.
- **감소**. x가 $(1, e)$에서 증가하면 $f(x)$가 증가하므로, 짝 $y > e$는 f의 값이 더 큰 곳으로 움직여야 한다. 즉 y는 감소한다. $x > e$일 때도 마찬가지이다. 따라서 이 가지에서 y는 x의 감소함수이다.
- **점근선**. $x \to 1^+$일 때 $f(x) \to 0^+$이므로 짝 $y \to \infty$이다. 즉 직선 $x = 1$이 점근선이다. 대칭성에 의해 $x \to \infty$일 때 $y \to 1^+$이고, $y = 1$이 점근선이다.
- **직선 $y = x$와의 교차**. $x \to e$이면 짝도 e로 수렴하므로, 곡선은 (e, e)를 지나고 그곳에서 직선과 교차한다. $t = e$ 근처에서 $f'(e) = 0$과 $f''(e) = -e^{-3}$을 테일러 정리(Taylor's theorem)에 적용하면 $f(t) \approx \frac{1}{e} - \frac{(t-e)^2}{2e^3}$이다. 따라서 $f(x) = f(y)$이면 반드시 $(y-e)^2 \approx (x-e)^2$, 즉 $y - e \approx \pm(x-e)$이다. 양의 부호는 직선 $y = x$에 해당한다. 음의 부호는 우리의 곡선에 해당하며, 따라서 이 곡선은 기울기(gradient) -1로 직선과 수직으로 교차한다.

> **?** **생각해 보기** 이 곡선을 명시적으로 나타낼 수 있을까?

비율로 매개변수화(parametrise)하면 가능하다. $t > 0, t \neq 1$에 대하여 $y = tx$로 두자. 그러면 $x^{tx} = (tx)^x$이고, 양변의 x제곱근을 취하면 $x^t = tx$이므로 $x^{t-1} = t$이며,

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

$t = 2$이면 $(2, 4)$를 얻고, $t = \frac{1}{2}$이면 $(4, 2)$를 얻는다. $t^{1/(t-1)} \to e$이므로 $t \to 1$일 때 두 좌표는 모두 e로 수렴한다. 아래 곡선은 이 방법으로 그린 것이다.



검산

- $2^4 = 4^2$은 유명한 정수 예이며, 예측한 대로 $1 < x < e$와 $x > e$ 부분에서 곡선 위에 놓인다.
- 수치적으로 촘촘한 격자 탐색을 하면 f의 최댓값은 $t \approx 2.718$에서 나타나며 그 값은 $0.367879 \approx 1/e$이다. 이분법(bisection)으로 구하면 $x = 1.01$의 짝은 $y \approx 659$이고, $x = 100$의 짝은 $y \approx 1.050$이다. 이는 점근선 $x = 1, y = 1$과 일치한다.
- $x = e$에서 중심차분(central difference)을 계산하면 두 번째 가지의 기울기는 -1.0000이다.

흔한 실수

- $x \neq e$인 모든 x가 짝을 두 개 가진다고 말하는 것. $0 < x \leq 1$이면 $f(x)$의 값이 양수가 아니므로, $y = x$만 성립한다.
- 최종 개형에서 직선 $y = x$를 빠뜨리거나, 다른 가지가 (e, e)에서 직선과 교차하지 않고 접하도록 그리는 것.
- xy가 아니라 $\ln x$나 $\ln y$(0이 될 수 있다)로 나누는 것.

STEP 너머

두 번째 곡선은 $f(x) - f(y)$의 등위집합(level set)이고, (e, e)는 이 함수의 기울기 벡터가 0이 되는 점이다. 그래서 하나의 매끄러운 곡선이 지나가는 대신 두 가지가 그곳에서 교차한다. 대학 1학년 해석학에서 배우는 음함수 정리(implicit function theorem)는 등위집합이 언제 국소적으로 그래프가 되는지, 그렇지 않을 때 어떤 일이 일어나는지 설명해 준다. Abbott의

Understanding Analysis(해석학 입문서)는 기초를 다지기에 친절한 책이다. 방정식 $x^y = y^x$ 자체에도 오랜 역사가 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 1997, 문제 3

순수수학 • 1의 거듭제곱근

> **STEP III 1997, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q3

핵심 아이디어

n제곱근 단위근(roots of unity) $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$은 정확히 $z^n - 1$의 근이므로, 이 다항식(polynomial)은 완전히 인수분해된다. 여기서 인수 $z-1$을 나누어 없애면 첫 번째 항등식을 얻는다. 정다각형을 O가 원점에 오도록 복소평면(complex plane) 위에 놓으면, 꼭짓점은 단위근에 $re^{i\theta}$를 곱한 것이 된다. 그러면 벡터의 합은 등비급수(geometric series)가 되고, 현의 길이의 제곱은 내적(dot product)을 이용하여 $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2$을 전개하면 얻어진다.

풀이

곱 항등식

$k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $(\omega^k)^n = e^{2\pi i k} = 1$이므로, 각 ω^k는 $z^n - 1 = 0$의 근이다. 이 n개의 수는 서로 다르다. 그 편각(argument) $2\pi k/n$이 서로 다르고 모두 $[0, 2\pi)$에 속하기 때문이다. 최고차항의 계수(leading coefficient)가 1이고 서로 다른 근을 n개 가지는 n차 다항식은 그에 대응하는 일차인수(linear factor)들의 곱이므로

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

한편 등비급수의 합을 구하면(또는 그냥 전개해 보면)

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}).$$

모든 $z \neq 1$에 대하여 두 식을 $z-1$로 나눌 수 있으므로

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \qquad (z \neq 1).$$

생각해 보기 문제는 "임의의 복소수 z"라고 말한다. 나눌 수 없는 $z = 1$일 때는 어떻게 되는가?

양변은 모두 $n-1$차 다항식이고, 무한히 많은 점 $z \neq 1$에서 값이 같다. 그러면 두 다항식의 차는 근을 무한히 많이 가지는 다항식이므로 영다항식이다. (또는 양변이 모두 z에 대하여 연속이므로 $z \to 1$로 보내도 된다.) 따라서 요구한 대로 이 항등식은 $z = 1$을 포함한 모든 복소수 z에 대하여 성립한다.

벡터의 합

원이 놓인 평면을 O가 원점인 복소평면으로 잡고, A_k를 나타내는 복소수를 a_k라 하자. $a_1 = re^{i\theta}$이면, 꼭짓점에 시계 반대 방향으로 차례로 이름을 붙일 때(이웃한 꼭짓점이 O에서 이루는 각은 $2\pi/n$이다)

$$a_k = re^{i\theta}\,\omega^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

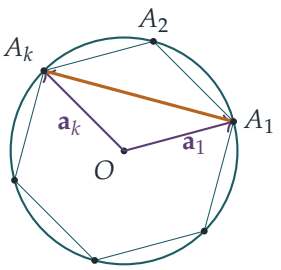
(시계 방향으로 이름을 붙이면 ω가 $\bar{\omega} = \omega^{n-1}$로 바뀔 뿐인데, 이것도 같은 단위근의 집합을 모두 지난다. 게다가 합은 꼭짓점의 순서와 관계가 없다.)

벡터 $\overrightarrow{OA_k}$는 복소수 a_k에 대응하고, 벡터의 덧셈은 복소수의 덧셈에 대응한다. 따라서 다음을 구하면 된다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = re^{i\theta}\left(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}\right).$$

괄호 안의 식은 항등식에 $z = \omega$를 대입했을 때의 우변이다. ($n \geq 2$일 때) ω는 좌변의 인수들 가운데 나타나므로 좌변은 인수 $\omega - \omega = 0$을 가지고, 따라서 괄호 안의 값은 0이다. (마찬가지로, 이것은 공비가 $\omega \neq 1$인 등비급수이므로 $(\omega^n - 1)/(\omega - 1) = 0$과 같다.) 그러므로

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}.$$



거리의 제곱의 합

이제 $\mathbf{a}_k = \overrightarrow{OA_k}$를 벡터로 쓰면, 모든 k에 대하여 $|\mathbf{a}_k| = r$이고 $\overrightarrow{A_1A_k} = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$이다. 내적을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned} |A_1A_k|^2 &= (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1) \\ &= |\mathbf{a}_k|^2 + |\mathbf{a}_1|^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k \\ &= 2r^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

이 식은 양변이 모두 0이 되는 $k = 1$일 때에도 성립한다. $k = 1, \dots, n$에 대하여 더하고, 내적이 덧셈에 대하여 분배법칙을 만족한다는 사실을 이용하면, 앞 부분의 결과에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |A_1A_k|^2 &= 2r^2n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k\right) \\ &= 2r^2n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{0} = 2r^2n, \end{aligned}$$

이다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $n = 2$: 항등식은 $z - (-1) = 1 + z$가 된다. 두 점은 지름의 양 끝점이므로 합은 $0 + (2r)^2 = 4r^2 = 2r^2\cdot 2$이다.
- $n = 4$, $r = 1$: 정사각형의 한 꼭짓점에서 잰 거리의 제곱은 $0, 2, 4, 2$이고, 그 합은 $8 = 2\cdot 1^2\cdot 4$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 $n \le 20$, 반지름, 회전 2000가지에 대하여 벡터의 합은 0이 되었고 현의 길이의 제곱의 합은 10^{-14} 이내의 오차로 $2r^2n$과 일치했다. 곱 항등식도 무작위로 고른 z에서 (그리고 $z = 1$에서) 같은 정확도로 확인했다.

흔한 실수

- $z - 1$로 나누고 나서, 그러면 항등식이 $z \neq 1$일 때에만 증명된다는 사실을 잊는 것.
- $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2 = |\mathbf{a}_k|^2 - |\mathbf{a}_1|^2$이라고 쓰는 것: 교차항 $-2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k$가 바로 핵심이다.

STEP 너머

곱 항등식에 $z = 1$을 대입하고 절댓값(modulus)을 취하면 $|1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n$을 얻는다. 즉 단위원에 내접하는 정$n$각형의 한 꼭짓점에서 그은 현(chord)의 길

이의 곱은 정확히 n이며, 이는 여기서 다룬 제곱의 합과 짝을 이루는 깔끔한 결과이다. 단위근을 이용하여 $z^n - 1$을 인수분해하는 것은 원분다항식(cyclotomic polynomials)과 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)의 출발점이며, 둘 다 대학 과정 초반에 만나게 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이런 종류의 기하를 복소수로 다루는 모습을 볼 수 있는 아름다운 책이다.

풀이

STEP III 1997, 문제 4

순수수학 • 산술-기하 평균 부등식

STEP III 1997, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q4

핵심 아이디어

인쇄된 문제에는 오식이 있다. 근이 네 개인 다항식은 4차식이어야 하고, 계수의 패턴 $1, 4, 6, 4, 1$을 보면 의도한 다항식이

$$\mathrm{f}(x) = x^4 - 4ax^3 + 6b^2x^2 - 4c^3x + d^4.$$

임을 알 수 있다. 계수는 a, b^2, c^3, d^4가 각각 **평균**이 되도록 정해져 있다. 즉 차례대로 근들의 평균, 두 근끼리의 곱들의 평균, 세 근끼리의 곱들의 평균, 네 근 모두의 곱의 평균이다. 그러면 각 부등식은 f, f′ 또는 f″의 근에 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 적용하여 얻어지고, 롤의 정리(Rolle's theorem)는 그 근들이 여전히 서로 다른 양수임을 보장해 준다.

풀이

$\mathrm{f}(x) = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$로 쓰자. 계수를 비교하면

$$p+q+r+s = 4a, \qquad pq+pr+ps+qr+qs+rs = 6b^2,$$
$$pqr+qrs+rsp+spq = 4c^3, \qquad pqrs = d^4.$$

소문항 (i)

$P = pqrs = d^4$라 하자. 어떤 근도 0이 아니므로

$$pqr = \frac{P}{s}, \quad qrs = \frac{P}{p}, \quad rsp = \frac{P}{q}, \quad spq = \frac{P}{r}.$$

사상 $t \mapsto P/t$는 양의 실수에서 일대일(one-to-one)이고 p, q, r, s는 서로 다르므로, 네 곱은 서로 다르다.

소문항 (ii)

세 근끼리의 곱 네 개는 서로 다른 양수이므로, 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$c^3 = \frac{pqr + qrs + rsp + spq}{4} > \left(pqr \cdot qrs \cdot rsp \cdot spq\right)^{1/4} = \left((pqrs)^3\right)^{1/4} = (d^4)^{3/4} = d^3.$$

각 근은 네 곱 가운데 정확히 세 개에 나타나므로, 그 곱이 $(pqrs)^3$이 된다. $c, d > 0$이고 $t \mapsto t^3$은 증가함수이므로, $c^3 > d^3$에서 $c > d$를 얻는다.

소문항 (iii)

$0 < p < q < r < s$가 되도록 근에 이름을 붙이자. 다항식 f는 미분가능하고 p와 q에서 값이 0이므로, 롤의 정리에 의해 f′는 $p < \alpha < q$인 근 α를 가진다. 마찬가지로 근 $\beta \in (q, r)$와 $\gamma \in (r, s)$가 존재한다. 이 열린구간들은 겹치지 않으므로 $\alpha < \beta < \gamma$는 서로 다르다. f′는 3차식이므로 다른 근은 없다. 또한 $\alpha > p > 0$이므로 세 근은 모두 양수임에 유의하자.

소문항 (iv)

미분하면

$$\mathrm{f}'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 12b^2x - 4c^3 = 4\left(x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3\right),$$

이므로 α, β, γ는 $x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3$의 근이고,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3a, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b^2, \qquad \alpha\beta\gamma = c^3.$$

이것은 차수가 하나 낮아진 같은 패턴이므로, 소문항 (i)과 (ii)를 그대로 따라 하면 된다. 두 근끼리의 곱은 $\alpha\beta = c^3/\gamma$, $\beta\gamma = c^3/\alpha$, $\gamma\alpha = c^3/\beta$이고, α, β, γ가 서로 다른 양수이므로 이들은 서로 다르다. 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$b^2 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{3} > \left((\alpha\beta\gamma)^2\right)^{1/3} = c^2,$$

이고, $b, c > 0$이므로 $b > c$를 얻는다.

생각해 보기 f′에 산술-기하 평균 부등식을 쓰기 전에 왜 소문항 (iii)이 필요할까?

산술-기하 평균 부등식은 양의 실수에만 적용되고, 여기서는 등호가 없는 엄격한 형태가 필요하다. 3차식이 반드시 세 실근을 가지는 것도 아니다. α, β, γ가 서로 다른 양의 실수이고, 따라서 두 근끼리의 곱들도 그렇다는 것을 보장해 주는 것이 바로 롤의 정리이다.

소문항 (v)

같은 논증을 한 번 더 적용한다. f′는 서로 다른 근 $\alpha < \beta < \gamma$를 가지므로, 롤의 정리에 의해

$$\mathrm{f}''(x) = 12x^2 - 24ax + 12b^2 = 12\left(x^2 - 2ax + b^2\right),$$

의 근 $\mu \in (\alpha, \beta)$와 $\nu \in (\beta, \gamma)$가 존재하고, 이들은 서로 다른 양수이다. 따라서 $\mu + \nu = 2a$, $\mu\nu = b^2$이고, 두 수에 대한 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$a = \frac{\mu + \nu}{2} > \sqrt{\mu\nu} = b.$$

(같은 말로, $x^2 - 2ax + b^2$는 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식(discriminant) $4a^2 - 4b^2$이 양수이고, 두 수가 모두 양수이므로 $a > b$이다.) 이로써 모두 합쳐

$$a > b > c > d.$$

임을 보였다.

검산

- 근이 $1, 2, 3, 4$인 경우: $4a = 10$, $6b^2 = 35$, $4c^3 = 50$, $d^4 = 24$이므로 $a = 2.5$, $b \approx 2.415$, $c \approx 2.321$, $d \approx 2.213$이 되어 순서가 맞다.
- 네 근이 모두 k로 같다면 $\mathrm{f}(x) = (x - k)^4$이고 $a = b = c = d = k$이다. 엄격한 부등식을 얻으려면 근이 서로 달라야 하는 이유가 이것이다.
- 거의 일치하는 경우를 포함하여 서로 다른 양의 근 네 개로 이루어진 무작위 집합 20 000개를 시험해 보았고, 매번 $a > b > c > d$가 성립하였다.

흔한 실수

- f의 근에 산술-기하 평균 부등식을 바로 적용하는 것. 그러면 $a > d$는 얻지만 가운데 항들은 구분할 수 없다.
- 산술-기하 평균 부등식에 넣는 수들이 서로 다른 양수인지 확인하는 것을 잊는 것. 바로 이것이 소문항 (i)과 (iii)의 핵심이다.
- 모든 문자가 양수라는 점을 언급하지 않고 $c^3 > d^3$ 또는 $b^2 > c^2$에서 $c > d$ 또는 $b > c$로 넘어가는 것.

STEP 너머

양 a, b, c, d는 근들의 **대칭 평균**(symmetric means)이고, 부등식 사슬 $a > b > c > d$는 **매클로린 부등식**(Maclaurin's inequality)의 특수한 경우이다. 즉 양의 실수에 대하여, k개씩의 곱들의 평균의 k제곱근은 k가 커질수록 감소한다. 평균은 그대로 두면서 미분으로 차수를 낮추는 기법은 뉴턴 부등식(Newton's inequalities)으로 가는 표준적인 경로이기도 하다. 더 많은 내용은 Steele의 *The Cauchy–Schwarz Master Class*(코시-슈바르츠 부등식 마스

터 클래스)나, 하디(Hardy), 리틀우드(Littlewood), 포여(Pólya)의 고전 *Inequalities*(부등식)를 보라.

풀이

STEP III 1997, 문제 5

순수수학 • 사이클로이드의 호의 길이

> **STEP III 1997, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q5

핵심 아이디어

굴러가는 바퀴의 테두리 위의 한 점은 **사이클로이드**(*cycloid*)를 그린다. 바퀴가 돌아간 각으로 그 점의 위치를 나타내기만 하면, 이 문제는 단순한 호의 길이(arc length) 적분이 된다. 바퀴 중심의 운동과 회전각을 이어 주는 것은 미끄러지지 않고 구른다는 조건이며, 반각 공식(half-angle identity)을 쓰면 호의 길이 공식에 있는 제곱근이 깔끔하게 정리된다.

풀이

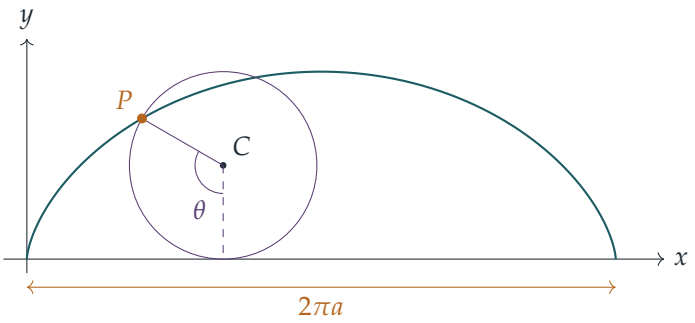
경로 세우기

반지름이 a인 바퀴가 x축을 따라 미끄러지지 않고 구른다고 하자. 표시한 점 P가 원점에서 지면에 닿아 있는 상태에서 출발하고, 바퀴가 돌아간 각(라디안 단위)을 θ라 하자.

미끄러짐이 없으므로 바퀴가 지나간 지면의 길이는 지면에 닿았던 테두리의 길이와 같다. 따라서 중심 C는 거리 $a\theta$만큼 이동하여 $(a\theta,\, a)$에 있다. C를 기준으로 보면, 점 P는 처음에 C의 바로 아래에 있었고 θ만큼 (바퀴가 오른쪽으로 구르므로 시계 방향으로) 돌았다. 따라서 P는 $C + (-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$에 있다. 그러므로 한 바퀴 회전에 대하여

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

이다. 그동안 바퀴는 거리 $2\pi a$만큼 앞으로 나아간다.



호의 길이

미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = a(1-\cos\theta), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = a\sin\theta,$$

이므로

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\ &= 2a^2(1-\cos\theta)\\ &= 4a^2\sin^2\tfrac{\theta}{2},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$를 이용하였다.

> **생각해 보기** 제곱근을 취하면 $2a\sin\frac{\theta}{2}$인가, 아니면 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$인가? 그리고 여기서 그 차이가 중요한가?

제곱근은 항상 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$이다. $0 \le \theta \le 2\pi$이면 $0 \le \frac{\theta}{2} \le \pi$이고, 이 범위에서 $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$이므로 정확히 한 바퀴 회전하는 동안에는 절댓값(modulus)을 없앨 수 있다. (더 긴 범위라면 적분을 나누어야 한다.)

따라서 P가 이동한 거리는

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[-4a\cos\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -4a(-1) + 4a = 8a.$$

이다.

비

바퀴가 $2\pi a$만큼 움직이는 동안 테두리 위의 점은 $8a$를 이동하므로, 구하는 비는

$$\frac{2\pi a}{8a} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

이다. 이 값은 바퀴의 크기에 의존하지 않는데, 당연히 그래야 한다. 바퀴의 크기를 바꾸면 두 거리가 같은 배율로 바뀌기 때문이다.

검산

- 점은 바퀴보다 더 먼 거리를 이동한다($8a > 2\pi a \approx 6.28a$). 이는 타당하다. 점은 앞으로 나아가면서 **동시에** 위아래로 각각 $2a$씩 움직이기 때문이다. 사실 $8a$는 정확히 지름의 네 배이다.
- 대략적인 한계를 구해 보자. 경로는 $(0,0)$에서 $(\pi a, 2a)$까지 올라갔다가 $(2\pi a, 0)$까지 내려오므로, 그 길이는 적어도 $2\sqrt{\pi^2 a^2 + 4a^2} \approx 7.45a$이고 많아야 $2\pi a + 4a \approx 10.28a$이다. 값 $8a$는 그 사이에 넉넉히 들어간다.
- 수치적으로, 바퀴가 구르는 동안 테두리 위의 점을 200 000개의 위치에서 추적하여 직선 구간들의 길이를 더하면 $a = 1$일 때 7.99999999992를 얻는다. 따라서 비는 $0.78539816\ldots = \pi/4$이다.

흔한 실수

- 매개변수 표현(parametrisation)에서 부호를 잘못 쓰는 경우(예를 들어 $x = a(\theta + \sin\theta)$). 이렇게 하면 바퀴에 대하여 뒤로 움직이는 경로가 나온다. $\theta = \pi$에서 확인해 보라. P는 꼭대기인 $(\pi a, 2a)$에 있어야 한다.
- 피적분함수를 $a\sqrt{2 - 2\cos\theta}$인 채로 두고 직접 적분하려는 경우. 반각 공식이 바로 적분을 쉽게 만들어 주는 단계이다.
- 비를 거꾸로 쓰는 경우. 문제는 점의 이동 거리에 대한 바퀴의 이동 거리의 비를 묻고 있으므로 답은 $4/\pi$가 아니라 $\pi/4$이다.

STEP 너머

사이클로이드는 수학에서 가장 유명한 곡선 가운데 하나이다. 이 곡선은 중력 아래에서 두 점 사이를 가장 빠르게 내려가는 곡선인 **최속강하선**(*brachistochrone*)이며, 구슬이 어디에서 출발하든 같은 시간에 바닥에 도달하는 곡선인 **등시곡선**(*tautochrone*)이기도 하다. 두 사실은 모두 변분법(calculus of variations)으로 증명하는데, 이는 대학 1학년이나 2학년의 역학 또는 수리방법론 강의에서 배운다. 이 문제의 호의 길이 계산은 두 증명 모두의 첫 단계이다. 이런 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP III 1997, 문제 6

순수수학 • 체비쇼프 미분방정식

STEP III 1997, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q6

핵심 아이디어

$x = \cos\theta$ 옆에 있는 인수 $1 - x^2$는 한 가지를 떠올리게 한다. 바로 $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$이다. 연쇄법칙(chain rule)을 써서 변수를 신중하게 바꾸면, x에 대한 다루기 힘든 방정식이 θ에 대한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)의 방정식이 된다. 이 방정식을 풀고 두 부가 조건을 이용하여 상수를 결정한다. 그러면 점화식(recurrence relation)은 모습을 바꾼 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)일 뿐이다. 전체에 걸쳐 n은 음이 아닌 정수이다. 조건 $y_n(x) = (-1)^n y_n(-x)$는 이 경우에만 의미가 있다.

풀이

변수 바꾸기

$0 < \theta < \pi$인 $x = \cos\theta$로 놓으면 $\sin\theta > 0$이고 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta = -\sin\theta \neq 0$이다. 기호를 간단히 하기 위해 y_n 대신 y라고 쓴다. 연쇄법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.$$

x에 대해 한 번 더 미분하려면, θ에 대해 미분한 다음 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -1/\sin\theta$를 곱한다.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

이제 $1-x^2=\sin^2\theta$와 $x=\cos\theta$를 이용하여 대입한다.

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n^2y &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+n^2y\\ &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y.\end{aligned}$$

두 일계도함수 항이 정확히 소거된다. 따라서 주어진 방정식은 $\dfrac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y_n=0$과 동치이며, 이것이 보이려던 것이다.

? **생각해 보기** 왜 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$는 단순히 $\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}$가 아닐까?

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 $-1/\sin\theta$와 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$의 곱이기 때문이다. 두 인수가 모두 θ에 의존하므로 곱의 미분법(product rule)에 의해 항이 두 개 생긴다. 이 추가 항이 바로 $-x\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 항을 소거하며, 그래서 문제에 그 항이 들어 있는 것이다.

y_n 구하기

$n\geq 1$일 때 $y''+n^2y=0$의 일반해(general solution)는

$$y_n=A\cos n\theta+B\sin n\theta.$$

$n=0$일 때 방정식은 $y''=0$이므로 $y_0=A+B\theta$이다.

$x=1$에서의 조건. $x=1$은 $\theta=0$에 대응하고, $y_n(1)=1$로부터 두 경우 모두 $A=1$이다.

대칭 조건. $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로 x를 $-x$로 바꾸는 것은 θ를 $\pi-\theta$로 바꾸는 것과 같고, $\pi-\theta$ 역시 $[0,\pi]$에 속한다. 정수 $n\geq 1$에 대하여

$$\cos n(\pi-\theta)=(-1)^n\cos n\theta,\qquad \sin n(\pi-\theta)=-(-1)^n\sin n\theta.$$

따라서 $(-1)^n y_n(-x)=(-1)^n\left[A(-1)^n\cos n\theta-B(-1)^n\sin n\theta\right]=A\cos n\theta-B\sin n\theta$이다. 이것이 모든 θ에 대해 $y_n(x)=A\cos n\theta+B\sin n\theta$와 같다고 놓으면 $2B\sin n\theta=0$이므로 $B=0$이다. $n=0$일 때 조건은 모든 θ에 대해 $1+B\theta=1+B(\pi-\theta)$가 되고, 이 역시 $B=0$을 강제한다.

그러므로 모든 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$\boxed{y_n=\cos n\theta},\qquad \text{즉,}\quad y_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad(|x|\leq 1).$$

관계식 $\theta=\arccos x$는 $[-1,1]$을 $[0,\pi]$ 위로 보내며, 그래서 이 결과가 $|x|\leq 1$에서 성립한다. 끝점 $x=\pm1$ ($\theta=0,\pi$)은 연속성에 의해 포함된다.

결론 이끌어내기

$n = 0$과 $n = 1$을 대입하면 $y_0 = \cos 0 = 1$이고 $y_1 = \cos\theta = x$이다.

점화식을 얻기 위해 덧셈정리

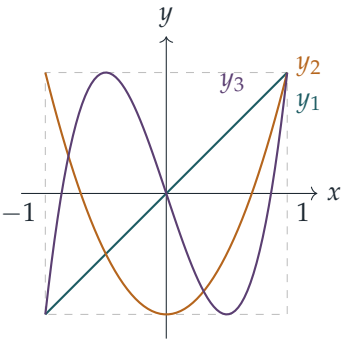
$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta, \qquad \cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta.$$

를 더한다. 사인 항이 소거되어 $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$가 남는다. 이를 x로 나타내면

$$y_{n+1} - 2xy_n + y_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1,\ |x| \leq 1),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$y_0 = 1$과 $y_1 = x$에서 출발하면 점화식은 다항식을 만들어 낸다. $y_2 = 2x^2 - 1$, $y_3 = 4x^3 - 3x$, $y_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ 등이다.



각 y_n은 코사인이므로 당연히 $[-1, 1]$에서 -1과 1 사이에 머문다.

검산

- $y_2 = 2x^2 - 1$: 이때 $(1 - x^2)\cdot 4 - x\cdot 4x + 4(2x^2 - 1) = 0$이다. 즉 $n = 2$일 때의 방정식을 만족하고, $y_2(1) = 1$이며, 짝함수이다.
- y_n의 홀짝성(parity)은 $(-1)^n$과 일치한다. 예를 들어 $y_3 = 4x^3 - 3x$는 홀함수이다.
- 수치적으로 $x = 0.3$일 때 $\cos(2\arccos 0.3) = -0.82 = 2(0.3)^2 - 1$이다. $y_n = \cos(n\arccos x)$, $0 \leq n \leq 8$에 대해 원래 방정식을 유한 차분(finite difference)으로 확인한 결과 잔차가 10^{-5} 미만이었다.

흔한 실수

- 이계도함수를 구할 때 곱의 미분법을 잊어서 일계도함수 항들이 소거되지 않는 경우.

- $\sin n\theta$ 해를 남겨 두는 경우. 이 해는 미분방정식과 $y_n(1) = 1$ ($\sin 0 = 0$이므로)을 만족하지만, 대칭 조건은 만족하지 않는다. 그 조건은 바로 이 해를 없애기 위해 있는 것이다.
- $n = 0$인 경우를 따로 다루는 것을 잊는 경우. 이때 일반해는 코사인과 사인의 쌍이 아니라 $A + B\theta$이다.

STEP 너머

다항식 y_n은 **체비쇼프 다항식**(*Chebyshev polynomials*) $T_n(x)$이다. 주어진 방정식은 체비쇼프(Chebyshev) 방정식이다. 우리가 버린 두 번째 해 $\sin(n \arccos x)$는 $\sqrt{1 - x^2}$에 다항식을 곱한 것이다. 체비쇼프 다항식은 근사 이론(approximation theory)의 핵심이다. 최고차항의 계수가 1인(monic) n차 다항식 가운데 $2^{1-n}T_n$이 $[-1, 1]$에서 최댓값의 크기가 가장 작으며, 그래서 T_n의 근이 많은 수치 해법에서 가장 좋은 보간(interpolation) 점이 된다. 이와 같은 방정식의 급수해(series solution)와 거기서 나오는 특수함수에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

풀이

STEP III 1997, 문제 7

순수수학 • e의 무리성

STEP III 1997, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q7

핵심 아이디어

급수(series) a_n은 $n!\,\mathrm{e}$에서 정수 부분(whole-number part)을 떼어 내고 남은 것과 정확히 같다. 급수 $\mathrm{e} = \sum 1/k!$에 $n!$을 곱하면 $k = n$까지의 모든 항은 정수가 되고, 나머지 꼬리(tail)는 a_n이 된다. 등비급수(geometric series) b_n은 a_n을 항별로 쉽게 위에서 누르는 상계(upper bound) 역할을 한다. 꼬리가 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다는 것을 알고 나면, e가 유리수(rational)라고 할 때 어떤 $n!\,\mathrm{e}$는 정수이면서 0이 아닌 소수 부분(fractional part)을 가져야 하는데, 이는 모순이다.

풀이

소문항 (i)

급수 b_n은 첫째항이 $\frac{1}{n+1}$이고 공비(common ratio)가 $r = \frac{1}{n+1}$인 등비급수이다. $n \geq 1$이므로 $0 < r \leq \frac{1}{2} < 1$이고, 따라서 이 급수는 수렴(converge)하며

$$b_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

소문항 (ii)

두 급수의 제k항을 각각

$$u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad v_k = \frac{1}{(n+1)^k}.$$

로 쓰자. u_k의 분모에 있는 k개의 인수 $n+1, n+2, \ldots, n+k$는 각각 $n+1$ 이상이므로 $(n+1)(n+2)\cdots(n+k) \geq (n+1)^k$이고, 따라서

$$0 < u_k \leq v_k \quad \text{모든} k \geq 1.$$

에 대하여 성립한다. 등호는 $k = 1$일 때만 성립한다. $k \geq 2$이면 인수 $n+2$가 $n+1$보다 엄격하게 크므로 $u_k < v_k$이다.

모든 항이 양수이고 수렴하는 급수 b_n의 항으로 위에서 눌리므로, (비교 판정법에 의해) a_n은 수렴하고 $a_n \geq u_1 > 0$이다. 상계에 대해서는

$$b_n - a_n = \sum_{k\geq 1}(v_k - u_k) \;\geq\; v_2 - u_2 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

이다. 각 항 $v_k - u_k$가 음이 아니기 때문이다. 그러므로 $a_n < b_n = \frac{1}{n}$이고, 둘을 합하면

$$0 < a_n < \frac{1}{n},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

> **생각해 보기** "a_n의 각 항이 b_n의 대응하는 항 이하이다"라는 사실만으로는 왜 엄격한 부등식(strict inequality)을 얻을 수 없을까?

항별로 $\leq$가 성립하면 극한에서 $a_n \leq b_n$만 얻을 수 있다. 무한히 많은 항을 더하면 엄격한 부등식이 등식으로 바뀔 수 있기 때문이다. 그래서 차이가 확실한 양수인 항 하나, 즉 $k = 2$를 골라 내고, 나머지 차이는 모두 ≥ 0임을 지적하는 것이다.

소문항 (iii)

급수 $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$에 $n!$을 곱하고 $k = n$에서 나누면

$$n!\,\mathrm{e} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{N} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}.$$

$k \leq n$이면 $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n$은 정수이므로 N은 양의 정수이다. $j \geq 1$에 대하여 $k = n + j$이면

$$\frac{n!}{(n+j)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)} = u_j,$$

이므로 꼬리는 정확히 a_n이다. 따라서 소문항 (ii)와 $n \geq 1$을 이용하면

$$n!\,\mathrm{e} = N + a_n, \qquad N \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a_n < \tfrac{1}{n} \leq 1,$$

이다. (정수) + ($[0,1)$에 속하는 수) 꼴의 수는 그 정수를 정수 부분으로 가지므로 $[n!\,\mathrm{e}] = N$이고, 따라서

$$a_n = n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}].$$

소문항 (iv)

귀류법(proof by contradiction)으로, p, q가 양의 정수일 때 $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$라고 가정하자. $n = q$로 잡으면

$$n!\,\mathrm{e} = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)!\,p$$

는 정수이므로 자기 자신의 정수 부분과 같고, 소문항 (iii)에서 $a_q = 0$을 얻는다. 그런데 소문항 (ii)에 따르면 $a_q > 0$이다. 이 모순은 e가 무리수(irrational)임을 보여 준다.

(q가 $n!$을 나누므로 $n \geq q$인 어떤 n을 잡아도 똑같이 된다. 요점은 단지 어떤 $n!\,\mathrm{e}$가 정수가 되어야 한다는 것이다.)

검산

$n = 1$일 때 $1!\,\mathrm{e} = 2.71828\ldots$이므로 소수 부분은 $0.71828\ldots$이고, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$를 더해도 $0.71828\ldots$이 되어 $b_1 = 1$보다 넉넉히 작다. $n = 5$일 때 $a_5 \approx 0.19382$로 $\frac{1}{5}$보다 조금 작다. a_n과 b_n의 첫째항이 같기 때문에, n이 커질수록 이 상계는 상대적으로 더 정밀해진다. 정확한 분수로 컴퓨터 검산을 해 보면 1부터 29까지의 모든 n에 대하여 $0 < a_n < \frac{1}{n}$이고 $[n!\,\mathrm{e}] = N$인 $n!\,\mathrm{e} = N + a_n$이 성립함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 모든 k에 대하여 $u_k \leq v_k$라는 이유만으로 $a_n < b_n$이라고 주장하는 것. 부등식이 엄격하게 유지되려면 엄격하게 작은 항이 하나(여기서는 $k = 2$) 필요하다.
- $\sum_{k \leq n} n!/k!$이 왜 정수인지 잊는 것. $k \leq n$이면 $k!$이 $n!$을 나누기 때문이다.
- 소문항 (iv)에서 $0 < a_n$만 쓰거나 $a_n < 1$만 쓰는 것. 두 부분이 모두 중요하다. (소문항 (ii)에서 얻은) $a_n < 1$은 a_n이 소수 부분임을 알려 주고, $a_n > 0$은 모순을 만들어 낸다.

STEP 너머

이것은 e가 무리수임을 보이는 푸리에(Fourier)의 증명이며, 그 틀(정수여야 하는 양이 0과 1 사이에 엄격하게 놓임을 보이는 것)은 π나 0이 아닌 유리수 $r \neq 0$에 대한 e^r의 무리성 증명을 포함한 많은 무리성 증명의 본보기가 된다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강좌에서는 비교 판정법(comparison test)과 e의 급수를 엄밀하게 정당화하고, 이 논증이 성립하는 이유가 $\sum 1/k!$이 수렴하는 속도에 있다는 것을 보게 된다. 즉 e는 어떤 유리수도 가질 수 없을 만큼 분수로 훨씬 잘 근사된다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 급수 쪽을 다루고, Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 유리수 근사에 대한 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP III 1997, 문제 8

순수수학 • 이차形식의 대각화

> **STEP III 1997, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q8

핵심 아이디어

대칭행렬(symmetric matrix)은 이차형식(quadratic form) $ax^2 + 2bxy + cy^2$를 나타내고, 켤레 변환한 행렬(conjugated matrix) $R_{-\alpha} A R_{\alpha}$는 α만큼 회전한 축에서 같은 이차형식을 나타낸다. 이 행렬을 대각행렬(diagonal matrix)로 만들면 xy항이 사라지므로, 새 축에서 타원(ellipse)은 표준 위치에 놓이고 그 반축(semi-axis)을 바로 읽어 낼 수 있다. 회전(rotation)은 원점으로부터의 거리를 보존하므로, 이 반축이 바로 우리가 구하려는 최대 거리와 최소 거리이다.

풀이

이 풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha^{\mathsf{T}}.$$

소문항 (i)

$C = \cos\alpha$, $S = \sin\alpha$라 하자. 먼저

$$A R_\alpha = \begin{pmatrix} aC + bS & -aS + bC \\ bC + cS & -bS + cC \end{pmatrix},$$

이고, 여기에 왼쪽에서 $R_{-\alpha}$를 곱하면 오른쪽 위 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C(-aS + bC) + S(-bS + cC) &= b(C^2 - S^2) - (a - c)SC \\ &= b\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}(a - c)\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

A가 대칭이므로 $R_{-\alpha}AR_\alpha = R_\alpha^{\mathsf{T}}AR_\alpha$도 대칭이다(전치(transpose)가 자기 자신이다). 따라서 왼쪽 아래 성분도 같고, 조건 하나로 두 성분이 모두 해결된다. 이 행렬이 대각행렬일 필요충분조건은

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c} \quad (a \neq c), \qquad \text{이므로} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{2b}{a-c}.$$

로 잡을 수 있다. $a = c$이면 조건은 $b\cos 2\alpha = 0$이 되고, $\alpha = \frac{1}{4}\pi$가 이를 만족한다(또한 $b = 0$이면 A가 이미 대각행렬이므로 어떤 α든 된다).

소문항 (ii)

타원의 방정식을 전개하면

$$x^2 + y^2 + 4xy\cot 2\theta + 4x^2\cot^2 2\theta = 1,$$

이고, 한편 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$이다. 계수를 비교하면

$$a = 1 + 4\cot^2 2\theta, \qquad b = 2\cot 2\theta, \qquad c = 1.$$

이다. 그러면 $a - c = 4\cot^2 2\theta \neq 0$이고($0 < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$이므로),

$$\frac{2b}{a-c} = \frac{4\cot 2\theta}{4\cot^2 2\theta} = \tan 2\theta,$$

이므로 $\alpha = \theta$는 소문항 (i)의 조건을 만족한다. 즉 $R_{-\theta}AR_\theta$는 대각행렬이다.

대각성분은 소문항 (i)과 같은 곱셈으로 다음과 같이 얻어진다.

$$\text{왼쪽 위 성분} = aC^2 + 2bSC + cS^2, \qquad \text{오른쪽 아래 성분} = aS^2 - 2bSC + cC^2,$$

이번에는 $C = \cos\theta$, $S = \sin\theta$이다. $k = \cot 2\theta$, $\mu = \cos 2\theta$로 놓고 $2SC = \sin 2\theta$, $k\sin 2\theta = \mu$, $C^2 = \frac{1}{2}(1+\mu)$, $S^2 = \frac{1}{2}(1-\mu)$, $k^2 = \mu^2/(1-\mu^2)$을 이용한다. 오른쪽 아래 성분은

$$\begin{aligned}(1+4k^2)S^2 - 2k\sin 2\theta + C^2 &= 1 + 4k^2S^2 - 2\mu \\ &= 1 - 2\mu + \frac{2\mu^2(1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)+2\mu^2}{1+\mu} \\ &= \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta} = \tan^2\theta.\end{aligned}$$

이다. 완전히 같은 방법으로 왼쪽 위 성분은 $1 + 2\mu + \dfrac{2\mu^2}{1-\mu} = \dfrac{1+\mu}{1-\mu} = \cot^2\theta$이다. 따라서

$$R_{-\theta}AR_\theta = \begin{pmatrix} \cot^2\theta & 0 \\ 0 & \tan^2\theta \end{pmatrix}.$$

생각해 보기 계산을 다시 하지 않고 이 두 성분을 빠르게 확인하는 방법이 있을까?

있다. 켤레 변환은 대각합(trace)과 행렬식(determinant)을 바꾸지 않는다. 여기서 $\det A = ac - b^2 = 1 + 4k^2 - 4k^2 = 1$이고, 실제로 $\cot^2\theta \tan^2\theta = 1$이다. 또 $\operatorname{tr} A = 2 + 4\cot^2 2\theta$이고, $\cot\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2\cot 2\theta$이므로

$$\cot^2\theta + \tan^2\theta = (\cot\theta - \tan\theta)^2 + 2 = 4\cot^2 2\theta + 2.$$

이다.

소문항 (iii)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$로 새 좌표를 도입하면, X축과 Y축은 원래 축을 θ만큼 회전한 것이다. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_\theta^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta}$이므로 타원의 방정식은

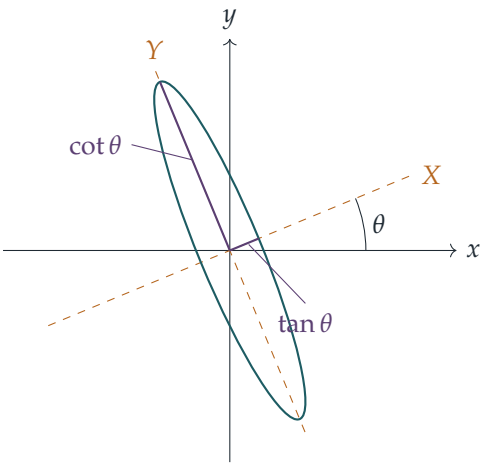
$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta} A R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1, \qquad \text{즉} \qquad X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1.$$

이 된다. 이 식은 $(X, Y) \mapsto (-X, -Y)$에 대해 대칭이므로 중심은 원점이다. 회전은 길이를 보존하므로, 중심에서 한 점까지의 거리는 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$이다.

$0 < \theta < \frac{1}{4}\pi$이므로 $0 < \tan\theta < 1 < \cot\theta$이고, 따라서 $\tan^2\theta < \cot^2\theta$이다. 타원 위의 임의의 점에 대해

$$\tan^2\theta\,(X^2 + Y^2) \;\le\; X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1 \;\le\; \cot^2\theta\,(X^2 + Y^2),$$

이므로 $\tan^2\theta \le r^2 \le \cot^2\theta$, 즉 $\tan\theta \le r \le \cot\theta$이다. 왼쪽 부등식은 $X = 0$일 때, 곧 $(X, Y) = (0, \pm\cot\theta)$에서 등호가 성립하고, 오른쪽 부등식은 $Y = 0$일 때, 곧 $(X, Y) = (\pm\tan\theta, 0)$에서 등호가 성립한다. 두 경계가 모두 실제로 달성되므로, 중심에서 타원까지의 최소 거리와 최대 거리는 각각 $\tan\theta$와 $\cot\theta$이다. 이로써 요구된 결과가 증명된다.



그림은 $\theta = \frac{1}{8}\pi$인 경우이며, 회전한 축은 점선으로 나타냈다.

검산

- $(0, \pm 1)$은 타원 위의 점이고, $\tan\theta < 1 < \cot\theta$이므로 경계와 모순되지 않는다.
- $\theta = \frac{1}{8}\pi$일 때 원래 좌표에서 장축(major axis)의 끝점은 $\cot\theta\,(-\sin\theta, \cos\theta) = (-\cos\theta, \cos^2\theta/\sin\theta) \approx (-0.924,\ 2.230)$이다. 이때 $\cot 2\theta = 1$이고, $0.924^2 + (2.230 - 1.848)^2 \approx 0.854 + 0.146 = 1$이 되어 마땅히 그래야 하는 결과가 나온다.
- 수치적으로, 여러 θ 값에 대해 타원을 따라 200 000개의 방향을 조사해 보았더니, $\theta = 0.3$일 때 최소 거리는 0.309336, 최대 거리는 3.232728로 $\tan 0.3$, $\cot 0.3$과 일치했다.

흔한 실수

- xy의 계수를 $2b$가 아니라 b와 비교하는 실수: 이차형식은 $ax^2 + 2bxy + cy^2$이다.
- 어느 회전이 어디에 들어가는지 혼동하는 실수: $\mathbf{x} = R_\theta \mathbf{X}$이면 행벡터는 $\mathbf{X}^\mathsf{T} R_{-\theta}$이고, 이 때문에 $R_{-\theta} A R_\theta$가 나타난다.
- 계수가 큰 쪽의 축이 더 길다고 생각하는 실수: $\cot^2\theta X^2$의 계수가 더 크므로, 타원은 X 방향으로 **짧다**.

STEP 너머

이것은 스펙트럼 정리(spectral theorem)의 2차원 경우이다. 모든 실대칭행렬은 회전으로 대각화할 수 있고, 그 고윳값(eigenvalue)이 대각성분이 된다. 이차형식의 고윳값으로 원뿔

곡선(conic)과 이차곡면(quadric surface)을 분류할 수 있으며, 같은 아이디어가 역학에서는 관성 주축(principal axes of inertia)을, 통계학에서는 주성분(principal components)을 준다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 대칭행렬과 이차형식을 매우 읽기 쉽게 다룬다.

풀이

STEP III 1997, 문제 9

역학 • 탄성 용수철이 있는 정역학

STEP III 1997, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q9

핵심 아이디어

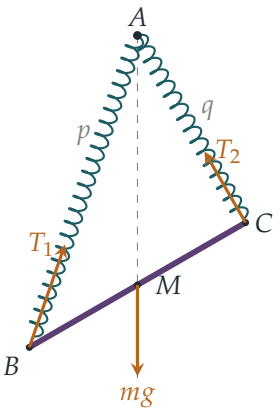
막대에 작용하는 힘은 두 용수철의 장력과 막대의 무게, 이렇게 세 개뿐이다. 평행하지 않은 세 힘을 받아 평형(equilibrium)을 이루는 물체에서는 세 힘의 작용선(line of action)이 반드시 한 점에서 만나야 한다. 두 장력은 모두 A를 지나는 직선을 따라 작용하므로 무게의 작용선도 A를 지나야 하고, 따라서 막대의 중점은 A의 바로 아래에 놓인다. 그다음에는 수평 방향으로 힘을 분해하면 거의 끝난다.

풀이

막대는 질량이 m이고 중점이 M인 균일한 강체로 모형화한다. 용수철은 가볍고, 같은 상수 κ로 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르며, 둘 다 늘어나 있다. 용수철 AB와 AC의 자연 길이(natural length)를 각각 a와 b, 늘어난 길이를 각각 p와 q라 하면 장력은

$$T_1 = \kappa(p - a), \qquad T_2 = \kappa(q - b),$$

이고, 용수철이 늘어나 있으므로 둘 다 양수이다.



1단계: M은 A의 바로 아래에 있다

막대에 대해 A를 중심으로 모멘트(moment)를 계산한다. 장력 T_1은 BA를 따라, T_2는 CA를 따라 작용하므로 두 작용선 모두 A를 지나고, 어느 쪽도 A에 대한 모멘트가 없다. 따라서 M을 지나 연직 방향으로 작용하는 무게도 A에 대한 모멘트가 0이어야 하므로, M을 지나는 연직선은 A를 지난다. 그러므로 M은 A의 바로 아래에 있다. A로부터 M까지의 깊이를 $h > 0$이라 하자.

2단계: 수평 방향으로 분해하기

A를 원점으로 하고, x축은 (막대를 포함하는 연직 평면 안에서) 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 좌표축을 잡는다. 그러면 $M = (0, -h)$이고, M이 BC의 중점이므로 어떤 d, e에 대하여

$$B = (-d, -h-e), \qquad C = (d, -h+e)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 d는 막대의 수평 방향 반폭이며, 막대가 연직이 아니라는 것이 바로 $d \neq 0$이라는 뜻이다.

AB의 장력은 B에서 막대에 B로부터 A를 향하는 방향, 즉 길이가 p인 벡터 $\overrightarrow{BA} = (d, h+e)$의 방향으로 작용한다. 따라서 이 힘은 $\dfrac{T_1}{p}(d, h+e)$이다. 마찬가지로 C에서의 장력은 $\dfrac{T_2}{q}(-d, h-e)$이다.

수평 방향으로 분해하면

$$\frac{T_1}{p}\,d - \frac{T_2}{q}\,d = 0,$$

이고, $d \neq 0$이므로

$$\frac{T_1}{p} = \frac{T_2}{q}.$$

생각해 보기 막대가 연직이 아니라는 사실을 정확히 어디에서 사용했는가?

d를 약분할 때뿐이다. 막대가 연직으로 매달려 있다면 두 용수철은 같은 연직선 위에 놓이고, 수평 방향의 분해는 $0 = 0$이 되며, 장력은 연직 방향의 힘의 평형만 만족하면 어떤 비율이든 될 수 있다. 이런 연직 평형은 실제로 존재하며, 이 경우에는 일반적으로 결과가 성립하지 않는다.

3단계: 훅의 법칙 적용하기

장력을 대입하면

$$\frac{\kappa(p-a)}{p} = \frac{\kappa(q-b)}{q} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{p} = \frac{b}{q},$$

이므로

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

늘어난 길이의 비는 자연 길이의 비와 같고, 이것이 보이려던 것이다. ■

덧붙이자면, 연직 방향으로 분해하면 $\frac{T_1}{p}(h+e) + \frac{T_2}{q}(h-e) = mg$, 즉 $2h\,\frac{T_1}{p} = mg$를 얻는다. 이 식은 필요하지 않지만, T/길이의 공통값을 결정해 준다.

검산

- **해석.** $p/q = a/b$이므로 두 용수철은 같은 배율로 늘어난다. 즉 어떤 $\lambda > 1$에 대하여 $p = \lambda a, q = \lambda b$이다. 따라서 두 용수철은 하나의 균일한 용수철을 비례적으로 늘인 것처럼 행동하며, 이는 답을 기억하는 깔끔한 방법이다.
- **수치 검증.** 임의의 m, κ, a, b와 막대 길이에 대하여 퍼텐셜 에너지(potential energy) $mgy_M + \frac{1}{2}\kappa(p-a)^2 + \frac{1}{2}\kappa(q-b)^2$를 수치적으로 최소화하여 평형을 구하였다. 예를 들어 $a/b = 0.709972$일 때 기울어진 평형에서 $p/q = 0.709972$를 얻었고, M은 10^{-7} 이내의 오차로 A의 바로 아래에 있었다. 같은 탐색에서 $p/q \neq a/b$인 연직 평형도 발견되었는데(예를 들어 $a/b = 1.526$이지만 $p/q = 1.192$), 이는 가정이 꼭 필요하다는 것을 확인해 준다.

흔한 실수

- 장력이 같다거나 두 용수철이 연직선과 같은 각을 이룬다고 가정하는 것. 둘 다 일반적으로는 성립하지 않는다. 같아지는 것은 장력을 길이로 나눈 값이다.
- M을 중심으로 모멘트를 계산하다가 각도 계산에 얽히는 것. 두 장력이 모두 A를 지나므로 A를 중심으로 한 모멘트가 훨씬 깔끔하다.

- 막대가 연직이 아니라는 조건을 한 번도 사용하지 않는 것. 완전한 답안이라면 그 조건이 어디에서 필요한지 밝혀야 한다.

STEP 너머

우리가 사용한 벡터 $\frac{T}{p}\overrightarrow{BA}$는 용수철의 힘을 나타내는 자연스러운 방법이다. 자연 길이가 0인 용수철은 변위 벡터에 정확히 비례하는 힘을 작용하며, 이러한 "이상적인" 용수철을 쓰면 많은 평형 문제가 선형대수(linear algebra) 문제로 바뀐다. 더 일반적으로, 평형은 퍼텐셜 에너지의 정류점(stationary point)이며, 이것이 우리의 수치 검증의 바탕이 된 아이디어이자 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 정역학과 에너지 관점을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 1997, 문제 10

역학 • 미끄러지며 구르기

STEP III 1997, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q10

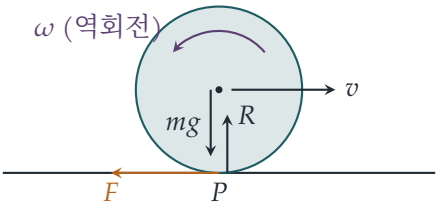
이 문제는 *Beyond STEP*의 11.6 절 **백스핀**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/backspin.html

핵심 아이디어

중요한 것은 구슬의 밑부분이 탁자 위에서 미끄러지고 있는지 여부이다. 미끄러지는 동안에는 마찰력(friction)의 크기와 방향이 일정하므로, 병진 운동과 회전 운동 모두 등감속 운동이 되어 정확히 식으로 나타낼 수 있다. 미끄러짐은 접촉점이 탁자에 대해 정지하는 순간 끝나며, 그 뒤로 구슬은 마찰력 없이 구른다(rolling). 따라서 이 문제의 핵심은 $v = 0$, $\omega = 0$, 그리고 미끄럼 속도(slip velocity)가 0이 되는 것 가운데 무엇이 먼저 일어나는가이다.

풀이

모형. 구슬은 질량 m, 반지름 a인 균일한 속이 찬 구이므로, 지름에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $I = \frac{2}{5}ma^2$이다. v를 중심의 속도(v_0의 방향을 양으로 한다)로, ω를 **뒤로 도는** 방향의 각속도(angular velocity)(역회전(backspin)을 양으로 한다)로 잡으면 $v(0) = v_0 > 0$이고 $\omega(0) = \omega_0 > 0$이다. 손가락은 운동을 시작시킬 뿐이고, 그 뒤에 작용하는 힘은 무게 mg, 수직항력(normal reaction) $R = mg$, 그리고 접촉점 P에서의 마찰력 F이다.



역회전이 있으면 구슬의 밑부분은 중심에 대해 속력 $a\omega$로 앞쪽으로 움직이므로, 접촉점의 속도는

$$s = v + a\omega.$$

이다. 처음에는 $s = v_0 + a\omega_0 > 0$이다. 즉 구슬은 탁자 위에서 앞쪽으로 미끄러지므로, 마찰력은 크기가 일정한 F로 **뒤쪽으로** 작용한다. $F = mk$로 놓는다.

미끄러지는 동안의 운동 방정식. 수평 방향으로 분해하면 $m\dot{v} = -F$이다. 중심에 대한 모멘트를 생각하면, 밑부분에 뒤쪽으로 작용하는 마찰력은 구슬을 앞으로 구르는 방향으로 돌리므로 역회전을 줄인다.

$$\tfrac{2}{5}ma^2\,\dot{\omega} = -Fa \quad\Longrightarrow\quad \dot{\omega} = -\frac{5k}{2a}.$$

두 값 모두 상수이므로, 구슬이 앞쪽으로 계속 미끄러지는 동안

$$v = v_0 - kt, \qquad a\omega = a\omega_0 - \tfrac{5}{2}kt, \qquad s = v_0 + a\omega_0 - \tfrac{7}{2}kt.$$

이다. 따라서 미끄럼 속도는

$$t_1 = \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7k},$$

에서 0이 되고, 그때까지 마찰력의 방향은 바뀌지 않으므로, 도중에 v나 ω의 부호가 바뀌더라도 이 식들은 구간 $0 \le t \le t_1$ 전체에서 성립한다.

생각해 보기 $t = t_1$에서 무슨 일이 일어나는가? 그리고 왜 구슬은 그 뒤에 반대 방향으로 미끄러지기 시작하지 않는가?

t_1에서 접촉점은 정지해 있으므로 $v = -a\omega$이다. 즉 구슬은 구르고 있다. 구슬이 일정한 속력으로 계속 구른다면 아무것도 구슬을 밀 필요가 없으므로, 마찰력(미끄러짐이 없을 때에는 필요한 만큼만 크면 된다)은 0이 되고, 일정한 속도로 구르는 운동은 모든 방정식과 모순되지 않는다. 따라서 t_1부터 구슬은 속도

$$V = v(t_1) = v_0 - \tfrac{2}{7}(v_0 + a\omega_0) = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

로 등속으로 구른다.

소문항 (i)

구슬이 결국 완전히 멈추려면 최종 구름 속도가 0이어야 한다. 즉 $V = 0$이므로 $5v_0 = 2a\omega_0$, 다시 말해

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}.$$

이다. 이 상황이 말이 되는지 확인해 보자. 이 비율에서는 $t = v_0/k$일 때 $v = 0$이 되고, $t = 2a\omega_0/(5k) = v_0/k$일 때 $\omega = 0$이 되어 같은 순간이며, 이는 t_1이기도 하다. 따라서 구슬이 아직 미끄러지는 동안 병진 운동과 회전 운동이 함께 사라지고, 그 뒤로 구슬은 정지한 채로 있다(미끄러짐도 마찰력도 없다).

소문항 (ii)

이번에는 구슬이 결국 속력 $v_0/7$로 뒤쪽으로 굴러가야 하므로 $V = -v_0/7$이다.

$$\frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7} = -\frac{v_0}{7} \quad \Longrightarrow \quad 6v_0 = 2a\omega_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}.$$

이 비율에서 v는 $t = v_0/k$에서 0이 되는데, 이는 $t_1 = 2(v_0 + 3v_0)/(7k) = 8v_0/(7k)$보다 앞선다. 그 순간 구슬은 잠시 멈추지만 여전히 역회전 $\omega = \omega_0 - \frac{5v_0}{2a} = \frac{v_0}{2a} > 0$을 가지므로, 밑부분은 여전히 앞쪽으로 미끄러지고 마찰력은 계속 구슬을 뒤로 끌어당긴다. t_1에서 $v = -v_0/7$, $a\omega = v_0/7$이 되므로, 구슬은 요구한 대로 속력 $v_0/7$로 출발점을 향해 되굴러 온다.

? 생각해 보기 t_1을 구하지 않고 V를 더 빨리 얻는 방법이 있는가?

있다. 운동하는 직선 위, 탁자 표면의 고정점 O에 대한 각운동량(angular momentum)을 생각하자. 마찰력은 탁자 표면을 따라 작용하므로 O에 대한 모멘트가 없고, R과 mg의 모멘트는 서로 상쇄된다. 앞으로 구르는 방향을 기준으로 O에 대한 각운동량은 mva(중심의 높이가 a이다)에서 회전 부분 $\frac{2}{5}ma^2\omega$를 뺀 것이므로, 다음이 보존된다.

$$mv_0a - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0 = maV + \tfrac{2}{5}ma^2 \cdot \frac{V}{a} = \tfrac{7}{5}maV,$$

따라서 다시 $V = (5v_0 - 2a\omega_0)/7$을 얻는다.

검산

- 회전이 없으면($\omega_0 = 0$) 공식은 $V = \frac{5}{7}v_0$을 주는데, 이는 회전 없이 미끄러지며 출발한 공에 대한 잘 알려진 결과이다.
- $v_0 = 0$이고 역회전만 있으면 $V = -\frac{2}{7}a\omega_0 < 0$이다. 역회전을 걸어 구슬을 튕겨 본 사람이라면 누구나 알듯이, 구슬은 뒤쪽으로 움직인다.

- 방정식을 수치적으로 단계별로 계산하면(미끄럼 속도가 0이 되면 마찰력을 끈다) $v_0 = 1, a\omega_0 = 3$일 때 최종 속도 $-0.142857\ldots = -\frac{1}{7}$을, $v_0 = 2, a\omega_0 = 5$일 때 완전한 정지를 얻는다.

흔한 실수

- $v = 0$에서 시간을 멈추는 것. 구슬은 $v + a\omega = 0$일 때에야 미끄러짐을 멈춘다. 소문항 (ii)에서처럼 $v = 0$일 때에도 여전히 회전이 남아 있을 수 있다.
- 토크(torque)의 부호를 틀리는 것. 밑부분에 뒤쪽으로 작용하는 마찰력은 역회전을 줄인다.
- 구르기 시작한 뒤에도 마찰력을 계속 작용시키는 것. 미끄러짐이 없으면 등속 운동에는 마찰력이 필요 없으므로, 마찰력은 0으로 떨어진다.

STEP 너머

여기서의 마찰력은 쿨롱(Coulomb)의 미끄럼 마찰 모형이다. 두 면이 미끄러지는 동안에는 크기가 일정하고, 미끄러지지 않을 때에는 (한계까지) 필요한 만큼의 크기를 가진다. 각운동량을 이용한 지름길은 강체 동역학(rigid-body dynamics)의 일반 원리, 즉 다루기 곤란한 미지의 힘이 모멘트를 갖지 않도록 기준점을 고르라는 원리의 한 예이다. 스누커와 당구 선수들은 끌어치기(screw-back) 샷에서 바로 이 물리를 활용한다. Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 미끄러지며 구르는 운동을 이러한 관점에서 다룬다.

풀이

STEP III 1997, 문제 11

역학 • 강체의 회전

STEP III 1997, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q11

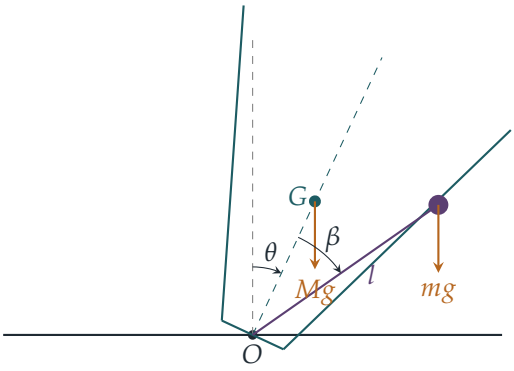
핵심 아이디어

종과 추가 맞닿아 있는 동안, 둘은 같은 점 O를 중심으로 같은 각속도(angular velocity)로 회전하므로, 둘을 떼어 놓을 수 있는 것은 각**가속도**(angular acceleration)의 차이뿐이다. 각각이 홀로 움직인다면 얼마나 빠르게 가속할지를 물어보자. 자유롭게 흔들리는 종이 자유로운 추와 꼭 같은 빠르기로 가속하게 되는 순간에 추와 종이 분리된다. 이때 접촉력은 정확히 0이 되며, 각속도는 전혀 관여하지 않는다.

풀이

모형. 종은 O를 지나는 수평축을 중심으로 자유롭게 회전하는 강체(rigid body)이며, 이 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 Mk^2이다. 추(clapper)는 길이 l인 가볍고 단단한 막대 끝에 달린 질량 m인 입자이며, 이 막대 역시 O에 축으로 고정되어 있다. 회전축에는 마찰이 없고 공기 저항도 없다. 모든 각은 **위쪽** 연직 방향에서 재며, 축에서 보아 추가 놓인 쪽을 양의 방향으로 한다. 종의 축 OG가 이루는 각을 θ라 하자. 둘이 맞닿아 있는 동안 추의 막대는 종의 축과 각 β를 유지하므로, 막대가 이루는 각은 $\theta + \beta$이다.

종 안에서 추의 공은 자신이 떨어지려는 쪽의 안쪽 벽에 기대어 있다. 따라서 벽은 공을 뒤쪽(각이 작아지는 쪽)으로 밀고, 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 따라 공은 종을 앞쪽으로 민다. 이 접촉력(마찰력이 있다면 그것까지 포함)의 O에 대한 모멘트를 $\Gamma \geq 0$이라 하자. 이 모멘트는 추에는 $-\Gamma$로, 종에는 $+\Gamma$로 작용한다.



접촉 상태의 운동 방정식. 각 물체에 대해 따로 O에 대한 모멘트를 취하면(회전축에서의 반력과 막대의 장력은 O에 대한 모멘트가 없다) 다음을 얻는다.

$$\text{추:}\quad ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta+\beta) - \Gamma,$$
$$\text{종:}\quad Mk^2\ddot{\theta} = Mgh\sin\theta + \Gamma.$$

무게 mg는 O로부터 거리 l인 곳에, 연직 방향과 각 $\theta+\beta$를 이루는 직선을 따라 작용하므로 그 모멘트는 $mgl\sin(\theta+\beta)$이다. G에 작용하는 Mg도 마찬가지이다. 두 물체는 함께 움직이므로 같은 $\ddot{\theta}$를 가진다.

두 방정식을 더하면 Γ가 소거된다.

$$\ddot{\theta} = \frac{g\big(ml\sin(\theta+\beta) + Mh\sin\theta\big)}{ml^2 + Mk^2}.$$

이를 추의 방정식에 다시 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\Gamma = \frac{mMgl}{ml^2+Mk^2}\Big(k^2\sin(\theta+\beta) - hl\sin\theta\Big).$$

놓는 순간에는 $\theta = 0$이고 $\Gamma = \dfrac{mMglk^2\sin\beta}{ml^2+Mk^2} > 0$이므로, 처음에는 당연히 추가 종을 누르고 있다.

? 생각해 보기 각속도가 얼마이든, 왜 분리는 정확히 Γ가 0에 이를 때 일어나는가?

접촉은 밀기만 할 수 있으므로 $\Gamma \geq 0$이어야 한다. $\Gamma > 0$인 동안에는 자유로운 추가 종보다 더 빠르게 가속하려 하므로 벽에 눌린 채 둘이 함께 움직인다. 둘은 같은 점 O를 중심으로 같은 각속도로 회전하므로, 공과 벽 사이의 틈은 각가속도의 차이를 통해서만 벌어질 수 있다. Γ가 음수가 되려는 순간, 종 자신의 가속도 $gh\sin\theta/k^2$가 추의 가속도 $g\sin(\theta+\beta)/l$보다 커지고, 벽이 공에서 멀어진다. 따라서 분리는 $\Gamma = 0$이 되는 첫 번째 θ에서 일어난다. (괄호 안의 식은 $\theta = 0$에서 $k^2\sin\beta > 0$이고 $\theta = \pi$에서 $-k^2\sin\beta < 0$이므로, 이러한 θ는 $\theta = \pi$ 이전에 반드시 존재한다.)

분리 각. 분리될 때 추의 막대가 위쪽 연직 방향과 이루는 각을 $\alpha = \theta + \beta$라 하자. 그러면 $\Gamma = 0$으로부터 다음을 얻는다.

$$k^2 \sin\alpha = hl\sin(\alpha - \beta) = hl(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta).$$

여기서 $0 < \alpha < \pi$이므로 $\sin\alpha \neq 0$이고, $\sin\beta \neq 0$이다. $hl\sin\alpha\sin\beta$로 나누면

$$\frac{k^2}{hl\sin\beta} = \cot\beta - \cot\alpha,$$

즉

$$\cot\alpha = \cot\beta - \frac{k^2}{hl}\operatorname{cosec}\beta,$$

이므로 증명하려던 식을 얻는다. 어느 질량도 나타나지 않는다는 점에 주목하자.

검산

- **짧은 추.** $l \to 0$이면 보정 항이 한없이 커지므로 $\cot\alpha \to -\infty$이고 $\alpha \to \pi$이다. 이는 타당하다. 짧은 진자는 자유 각가속도 $g\sin\alpha/l$가 크므로, 아주 짧은 막대에 달린 추는 $\sin\alpha$가 거의 0이 될 때까지, 즉 둘이 거의 거꾸로 설 때까지 종을 계속 민다.
- **동치인 형태.** 이 조건은 단지 $\dfrac{g\sin\alpha}{l} = \dfrac{gh\sin(\alpha-\beta)}{k^2}$, 즉 자유로운 추와 자유로운 종의 각가속도가 같다는 것이다.
- **수치 확인.** $k = 1$, $h = 0.6$, $l = 0.8$, $\beta = 30°$로 두면 공식에서 $\cot\alpha = \sqrt{3} - 25/6 \approx -2.43$이므로 $\alpha \approx 157.7°$이다. 놓는 순간부터 결합된 운동을 단계별로 수치 적분하다가 Γ가 처음 0이 될 때 멈추면, $M/m = 5$일 때와 $M/m = 500$일 때 모두 소수점 아래 여러 자리까지 같은 각을 얻는다.

흔한 실수

- 에너지 보존을 이용해 $\dot\theta$를 구한 뒤 원운동으로부터 "수직 항력"을 구하려 하는 것. 각속도는 두 물체에 공통이며, 둘이 분리되는지 여부에는 아무 역할도 하지 않는다.
- α를 위쪽 연직 방향이 아니라 종의 축에서 재는 것. 접촉하는 동안 막대는 내내 축과 각 β를 이루므로 $\alpha = \theta + \beta$이다.
- Mk^2가 G가 아니라 O에 대한 관성 모멘트라는 사실을 잊는 것. 여기서는 평행축 정리(parallel-axis theorem)에 의한 보정이 필요하지 않다.

STEP 너머

이 문제는 구속 조건(constraint)이 깨지는 시점을 찾는 일반 원리의 깔끔한 예이다. 구속된 운동을 풀고, 구속력을 계산한 다음, 그 부호가 바뀌는 곳을 찾는 것이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)를 이용해 이 과정을 체계화하는데, 이 승수가 바로 구속력임이 밝혀진다. 같은 아이디어로 구의 표면을 떠나는 입자라는 고전적인 문제도 풀 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축에 대한 강체의 회전을 다루며, 훌륭한 준비 자료이다.

풀이

STEP III 1997, 문제 12

확률과 통계 • 쿠폰 수집가 문제

STEP III 1997, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q12

핵심 아이디어

소문항 (i)은 기하분포(geometric distribution)이고, 그 확률생성함수(probability generating function)를 미분하면 평균과 분산(variance)을 얻는다: $\mathrm{E}(K) = G'(1)$이고 $\mathrm{E}\big(K(K-1)\big) = G''(1)$이다. 소문항 (ii)에서 핵심 요령은 카드 한 벌을 모두 모을 때까지의 긴 기다림을 52개의 짧은 기다림으로 나누는 것이다. 각 기다림은 **새로운** 카드 한 장을 얻을 때까지의 기다림이다. 짧은 기다림 하나하나가 "첫 앞면이 나올 때까지 던지기" 실험이므로, 소문항 (i)이 모든 일을 해 준다.

풀이

소문항 (i)

첫 앞면이 k번째 던지기에서 나오는 것은 처음 $k-1$번이 모두 뒷면이고 k번째가 앞면일 때, 그리고 그때에만이다. 각 던지기는 독립(independent)이므로

$$\mathrm{P}(K=k) = q^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

이다. 따라서

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}s^k = ps\sum_{j=0}^{\infty}(qs)^j = \frac{ps}{1-qs},$$

이다. 여기서 등비급수(geometric series)를 합했는데, 이 급수는 $|qs| < 1$일 때 수렴한다(특히 $p > 0$이면 1 근처의 s에 대해 수렴한다). 이것이 구하려던 결과이다.

미분하면

$$\mathrm{G}'(s) = \frac{p(1-qs)+psq}{(1-qs)^2} = \frac{p}{(1-qs)^2},$$
$$\mathrm{G}''(s) = \frac{2pq}{(1-qs)^3}.$$

이다. $\mathrm{G}'(s) = \sum k\,\mathrm{P}(K=k)s^{k-1}$이고 $\mathrm{G}''(s) = \sum k(k-1)\mathrm{P}(K=k)s^{k-2}$이므로, $s=1$을 대입하고 $1-q=p$를 이용하면

$$\mathrm{E}(K) = \mathrm{G}'(1) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{E}\big(K(K-1)\big) = \mathrm{G}''(1) = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

을 얻는다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(K) &= \mathrm{E}\big(K(K-1)\big) + \mathrm{E}(K) - \big(\mathrm{E}(K)\big)^2 \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.\end{aligned}$$

이다. 즉 $\mathrm{E}(K) = \dfrac{1}{p}$이고 $\mathrm{Var}(K) = \dfrac{q}{p^2}$이다.

소문항 (ii)

서로 다른 카드를 정확히 $i-1$장 본 뒤부터, i번째 새로운 카드가 나오는 뽑기까지(그 뽑기를 포함하여) 뽑은 횟수를 N_i라 하자. 그러면 $N_1 = 1$이고(첫 카드는 언제나 새로운 카드이다),

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_{52}.$$

이다.

생각해 보기 왜 각 N_i는 K와 같은 "첫 앞면" 확률변수인가?

서로 다른 카드를 $i-1$장 보았다면, 52장 가운데 $53-i$장은 아직 보지 못한 카드이다. 복원추출(drawing with replacement)을 하므로 각 뽑기는 과거와 독립이고, 언제나 같은 확률

$$p_i = \frac{53-i}{52}.$$

로 아직 보지 못한 카드가 나온다. 이런 뽑기를 "앞면"이라 부르자. 그러면 N_i는 첫 앞면이 나올 때까지(그 뽑기를 포함하여) 뽑은 횟수이며, 이는 정확히 $p = p_i$인 소문항 (i)의 확률변수 K이다. 따라서

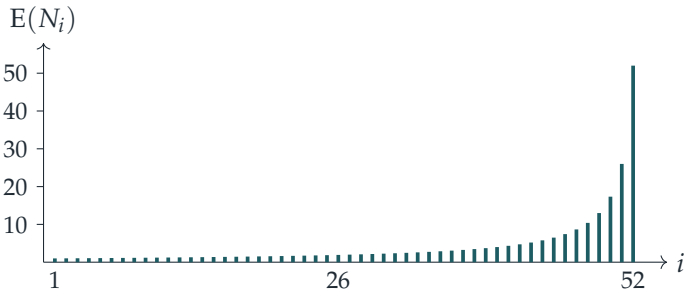
$$\mathrm{E}(N_i) = \frac{1}{p_i} = \frac{52}{53-i}.$$

이다.

기댓값(expectation)은 선형적이므로(이를 위해 N_i들이 독립일 필요는 없다)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \sum_{i=1}^{52} \frac{52}{53-i} = 52\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{51}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\\ &= 52\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{52}\right).\end{aligned}$$

이다. 초반의 기다림은 짧고 마지막 몇 번의 기다림이 대부분을 차지한다. 마지막 카드 한 장만 해도 평균 52번을 뽑아야 한다.



어림하기 위해 $n = 52$로 두고 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \approx 0.5+\ln n$을 이용한다. $\ln 52$에 대해서는 $2.7^2 = 7.29$이고 $7.29^2 \approx 53.1$이므로 $\mathrm{e}^4 \approx 53 \approx 52$이고, 따라서 $\ln 52 \approx 4$이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(N) \approx 52\,(0.5+4) = 52 \times 4.5 = 234.$$

이다. 즉 모든 카드를 보려면 평균적으로 대략 234번, 카드 한 벌 크기의 약 네 배 반을 뽑아야 한다.

검산

- (i)에서 $\mathrm{G}(1) = p/(1-q) = 1$인데, 모든 확률생성함수는 마땅히 그래야 한다. 공정한 동전($p = \frac{1}{2}$)이면 $\mathrm{E}(K) = 2$이고 $\mathrm{Var}(K) = 2$이다. 또 $p \to 1$이면 분산 $q/p^2 \to 0$인데, 첫 던지기가 거의 확실히 앞면일 때 당연히 그래야 한다.
- 정확한 값은 $52H_{52} \approx 235.98$이고, 카드 한 벌 모으기를 10^5번 모의실험한 결과 평균은 235.7이었다. 우리의 어림값 234는 이에 가깝다. 약간 모자란 것은 근사 $0.5+\ln n$(더 정밀한 근사는 $\ln n + 0.577$이다) 때문이고, 또 $\ln 52 \approx 3.95$를 4로 올림했기 때문이다.

흔한 실수

- N_i의 성공 확률을 거꾸로 잡는 실수: **새로운** 카드가 나올 확률은 $(53-i)/52$이며, 모은 카드가 늘어날수록 줄어든다.

- $+\mathrm{G}'(1)$ 항을 잊고 $\mathrm{Var}(K) = \mathrm{G}''(1) - \mathrm{G}'(1)^2$로 쓰는 실수: $\mathrm{G}''(1)$은 $\mathrm{E}(K^2)$가 아니라 $\mathrm{E}(K(K-1))$이다.
- 기댓값을 더하기 전에 N_i들이 독립이어야 한다고 생각하는 실수: 기댓값의 선형성(linearity of expectation)은 독립 여부와 관계없이 성립한다(다만 여기서는 실제로 독립이기도 하다).

STEP 너머

이것은 **쿠폰 수집가 문제**(coupon collector's problem)이다. 똑같이 나올 법한 종류가 n가지 있을 때, 모든 종류를 모으는 데 걸리는 시간의 기댓값은 $nH_n \approx n\ln n$이다. 대학 학부 과정에서는 더 나아가 이 시간이 $n\ln n$ 근처에 날카롭게 집중되어 있으며 그 요동은 n 정도의 크기임을 보이고, 확률생성함수는 이와 같은 독립 확률변수들의 합을 다루는 표준 도구가 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 기하분포를 꼼꼼히 다루고, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 쿠폰 수집가 문제를 여러 변형과 함께 논의한다.

풀이

STEP III 1997, 문제 13

확률과 통계 • 정규분포의 적률생성함수

STEP III 1997, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q13

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 적분에 달려 있다. 바로 표준정규분포(standard normal)의 적률생성함수(moment generating function, mgf)이며, 지수에서 완전제곱식을 만들어(completing the square) 구한다. 그다음에는 독립성(independence) 덕분에 합의 적률생성함수가 곱으로 바뀌고, 적률생성함수의 유일성(uniqueness)을 이용해 분포를 읽어 낼 수 있다. 마지막 소문항은 같은 계산이 모습만 바꾼 것이다. $Z = \mathrm{e}^{\mu+\sigma X}$의 거듭제곱은 X의 상수배를 지수로 갖는 지수함수일 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

$M(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$라 하자. 그러면

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-2\theta x)}\,\mathrm{d}x.$$

완전제곱식을 만들면 $x^2 - 2\theta x = (x-\theta)^2 - \theta^2$이므로

$$M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u,$$

이다. 여기서 $u = x - \theta$로 치환하였다. 마지막 적분은 표준정규분포의 확률밀도함수(density)를 전체 구간에서 적분한 것이므로 1이다. 따라서 모든 실수 θ에 대하여

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}.}$$

소문항 (ii)

X와 Y가 독립이므로 $e^{\theta aX}$와 $e^{\theta bY}$도 독립이고, 서로 독립인 확률변수들의 곱의 기댓값(expectation)은 각 기댓값의 곱이다. 소문항 (i)에서 θ를 각각 $a\theta$와 $b\theta$로 바꾸어 쓰면(Y가 X와 같은 분포를 따른다는 사실도 이용한다)

$$\mathrm{E}\big(e^{\theta(aX+bY)}\big) = \mathrm{E}(e^{a\theta X})\,\mathrm{E}(e^{b\theta Y}) = e^{\frac{1}{2}a^2\theta^2}\,e^{\frac{1}{2}b^2\theta^2} = e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2}.$$

? **생각해 보기** 적률생성함수가 일치하면 왜 분포에 관한 질문이 해결되는가?

0 근처의 모든 θ에서 존재하는 적률생성함수는 분포를 유일하게 결정한다. 따라서 $aX+bY$가 X와 같은 분포를 따르는 것은 그 적률생성함수가 모든 θ에 대하여 $e^{\frac{1}{2}\theta^2}$와 같을 때, 곧

$$e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2} = e^{\frac{1}{2}\theta^2} \quad \text{모든} \theta.$$

일 때와 정확히 같다. 양변에 로그를 취하고 $\theta \neq 0$인 아무 값을 택하면, 이는 다음과 필요충분조건이다.

$$\boxed{a^2+b^2=1.}$$

("필요조건" 방향은 유일성 없이도 분명하다. $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2+b^2$가 $\mathrm{Var}(X)=1$과 같아야 하기 때문이다.) 일반적으로 $aX+bY$는 평균이 0이고 분산(variance)이 a^2+b^2인 정규분포를 따른다. 예를 들어 $(X+Y)/\sqrt{2}$는 다시 표준정규분포를 따른다.

소문항 (iii)

임의의 실수 θ에 대하여

$$Z^\theta = \big(e^{\mu+\sigma X}\big)^\theta = e^{\mu\theta}\,e^{(\sigma\theta)X},$$

이고 $e^{\mu\theta}$는 상수이므로, 소문항 (i)에서 θ를 $\sigma\theta$로 바꾸면

$$\mathrm{E}(Z^\theta) = e^{\mu\theta}\,\mathrm{E}\big(e^{(\sigma\theta)X}\big) = e^{\mu\theta}\,e^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

$\theta = 1$로 두면 평균을 얻는다.

$$\boxed{\mathrm{E}(Z) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}.}$$

$\theta = 2$로 두면 $\mathrm{E}(Z^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - \big(\mathrm{E}(Z)\big)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\ &= e^{2\mu+\sigma^2}\big(e^{\sigma^2}-1\big).\end{aligned}$$

검산

- $M(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta^2}$를 미분하면 $M'(0) = 0$, $M''(0) = 1$이다. 즉 평균은 0, 분산은 1로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- $\sigma = 0$이면 $Z = e^{\mu}$는 상수이다. 우리가 얻은 공식도 평균 e^{μ}, 분산 0을 준다.
- 수치적으로, $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.5$일 때 정규분포의 확률밀도함수에 대해 적분하면 $E(Z) \approx 1.5296$, $\mathrm{Var}(Z) \approx 0.6645$를 얻으며, 이는 $e^{0.425}$ 및 $e^{0.85}(e^{0.25} - 1)$과 일치한다. $0.6X + 0.8Y$를 모의실험한 결과 표본분산은 1.000이었다.

흔한 실수

- "X의 평균을 대입하여" $E(Z) = e^{\mu}$라고 쓰는 것. 일반적으로 $E(g(X)) \neq g(E(X))$이며, 여기서는 지수함수의 볼록성(convexity) 때문에 평균이 $e^{\frac{1}{2}\sigma^2}$배만큼 커진다.
- 조건을 $a + b = 1$로 제시하는 것. 더해지는 것은 계수가 아니라 분산이다.

STEP 너머

확률변수 Z는 **로그정규**(log-normal) 분포를 따른다. 이는 블랙-숄즈(Black–Scholes) 모형의 주가처럼, 작은 무작위 인자들이 여러 번 곱해지며 성장하는 양에 대한 표준적인 모형이다. 소문항 (ii)는 놀라운 사실 하나를 엿보게 해 준다. 분산이 유한한 분포 가운데 적절히 척도를 맞춘 합이 같은 분포족에 머무르는 것은 본질적으로 정규분포뿐이며, 이는 중심극한정리(central limit theorem)와 깊이 얽혀 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 적률생성함수, 정규분포, 중심극한정리를 바로 이 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 1997, 문제 14

확률과 통계 • 확률변수의 곱

> **STEP III 1997, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q14

핵심 아이디어

둘레는 가로 길이와 세로 길이의 선형함수(linear function)이므로, 그 평균(mean)과 분산(variance)은 독립(independent)인 확률변수의 합에 대한 규칙에서 바로 나온다. 넓이는 곱이다. 독립인 확률변수에 대해서는 곱의 기댓값(expectation)이 기댓값의 곱과 같으므로, 이를 LB와 L^2B^2에 적용하면 평균과 분산을 구할 수 있다. 종속(dependence)임을 보이는 가장 깔끔한 방법은 0이 아닌 공분산(covariance)을 찾는 것이다. 독립인 확률변수의 공분산은 항상 0이기 때문이다.

풀이

임의로 고른 판의 가로 길이와 세로 길이를 각각 L, B라 하자. 그러면 L과 B는 독립이고

$$\mathrm{E}(L) = \mu_1, \quad \mathrm{Var}(L) = \sigma_1^2, \qquad \mathrm{E}(B) = \mu_2, \quad \mathrm{Var}(B) = \sigma_2^2.$$

이다. 둘레를 $P = 2(L + B)$, 넓이를 $A = LB$라 하자. 앞으로 $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2$을 반복해서 사용한다. 따라서 $\mathrm{E}(L^2) = \mu_1^2 + \sigma_1^2$이고 $\mathrm{E}(B^2) = \mu_2^2 + \sigma_2^2$이다.

둘레

기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2).$$

L과 B는 독립이므로 합의 분산은 분산의 합과 같다. 따라서

$$\mathrm{Var}(P) = 2^2\big(\mathrm{Var}(L) + \mathrm{Var}(B)\big) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{표준편차}(P) = 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

넓이

L과 B는 독립이므로 $\mathrm{E}(LB) = \mathrm{E}(L)\,\mathrm{E}(B)$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

분산을 구하려면 $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(L^2B^2)$가 필요하다.

? **생각해 보기** $\mathrm{E}(L^2B^2)$도 여전히 곱으로 나눌 수 있을까?

그렇다. 독립인 확률변수의 함수들은 서로 독립이므로 L^2과 B^2은 독립이고, $\mathrm{E}(L^2B^2) = \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2)$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A) &= \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= (\mu_1^2+\sigma_1^2)(\mu_2^2+\sigma_2^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,\end{aligned}$$

이고

$$\text{표준편차}(A) = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

이다. 곱의 분산이 단순히 $\sigma_1^2\sigma_2^2$이 아니라는 점에 주목하자. 각 방향의 퍼짐이 다른 방향의 전형적인 크기만큼 확대된다.

둘레와 넓이는 독립이 아니다

P와 A가 독립이라면 $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$, 즉 $\mathrm{Cov}(P, A) = 0$이어야 한다. 공분산을 계산해 보자. 먼저

$$\mathrm{E}(PA) = 2\,\mathrm{E}(L^2B) + 2\,\mathrm{E}(LB^2).$$

다시 독립성을 이용하면(이번에는 L^2과 B의 독립성, L과 B^2의 독립성)

$$\mathrm{E}(L^2B) = (\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2, \qquad \mathrm{E}(LB^2) = \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2).$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(P, A) &= \mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)\\ &= 2\left[(\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2 + \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2)\right] - 2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2\\ &= 2\left(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2\right).\end{aligned}$$

가로 길이와 세로 길이는 양수이므로 $\mu_1 > 0$이고 $\mu_2 > 0$이다. 또 표준편차(standard deviation)가 0이 아니라고 주어졌으므로 $\sigma_1^2 > 0$이고 $\sigma_2^2 > 0$이다. 그러므로 $\mathrm{Cov}(P, A) > 0$이다.

독립인 확률변수의 공분산은 0이므로 P와 A는 독립일 수 없다. 이는 직관과도 맞는다. 어느 방향으로든 평균보다 큰 판은 둘레도 크고 넓이도 큰 경향이 있다.

? 생각해 보기 공분산이 0으로 나왔다면, 그것으로 P와 A가 독립임을 보인 것일까?

아니다. 이 함의는 한 방향으로만 성립한다. 독립이면 공분산은 반드시 0이지만, 공분산이 0이라고 해서 반드시 독립인 것은 아니다. 따라서 0이 아닌 공분산은 종속임을 증명하며, 바로 이것이 우리가 얻은 결과이다. 공분산이 0이었다면 아무것도 알려 주지 못했을 것이다.

검산

- L과 B가 독립이고 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 1 또는 3의 값을 갖는다고 하자. 그러면 $\mu_i = 2, \sigma_i^2 = 1$이고 공식은 $\mathrm{Cov}(P, A) = 2(2+2) = 8$을 주는데, 이는 똑같이 가능한 네 가지 판을 직접 나열하여 계산한 값과 일치한다. 종속성도 직접 확인할 수 있다. $\mathrm{P}(P = 4) = \mathrm{P}(A = 1) = \frac{1}{4}$이지만, 두 사건 모두 $L = B = 1$을 뜻하므로 $\mathrm{P}(P = 4 \text{ 이고} A = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16}$이다.
- $\mu_1 = 5, \mu_2 = 3, \sigma_1 = 0.7, \sigma_2 = 0.4$로 시뮬레이션한 결과, 표준편차$(A) \approx 2.919$로 공식의 값 2.913과 가까웠고, $\mathrm{Cov}(P, A) \approx 4.56$으로 공식의 값 4.54와 가까웠다.
- $\sigma_2 \to 0$이면(세로 길이가 μ_2로 고정되면) 표준편차$(A) \to \mu_2\sigma_1$이다. $A = \mu_2 L$이므로 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- $\mathrm{Var}(LB) = \sigma_1^2\sigma_2^2$이라고 쓰거나, 항을 빠뜨린 채 $\mathrm{Var}(LB) = \mathrm{Var}(L)\mathrm{Var}(B) + \ldots$라고 쓰는 것. 항상 $\mathrm{E}(L^2B^2)$을 거쳐서 계산하라.
- $\mathrm{Var}(2(L+B))$에서 인수 2를 제곱하는 것을 잊는 것.
- P와 A가 종속인 이유를 "둘 다 L과 B에 의존하기 때문"이라고 주장하는 것. 이는 직관일 뿐 증명이 아니다. 문제를 해결하는 것은 공분산 계산(또는 확률이 같지 않음을 보이는 구체적인 예)이다.

STEP 너머

상관관계가 없는(uncorrelated) 확률변수와 독립인 확률변수의 구별은 대학 1학년 확률론의 핵심 내용이다. 독립이란 결합분포(joint distribution)가 인수분해된다는 뜻으로, 이는 하나의 적률(moment) 조건보다 훨씬 강한 조건이다. $\mathrm{Var}(LB)$에 대한 계산은 실험 과학 전반에서 쓰이는 "오차 전파(propagation of errors)" 공식의 출발점이기도 하다. Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 독립성, 공분산, 확률변수의 곱을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1997년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

