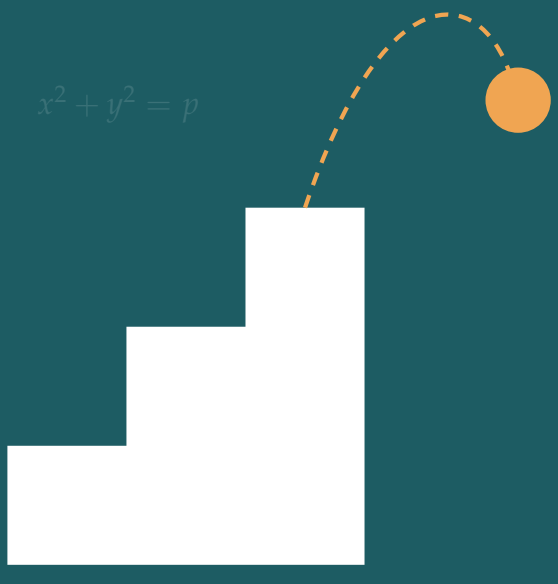
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1996년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1996년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1996년 풀이

1996년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 원기둥의 최적화 순수수학 . . . 3

Q2 베타 적분 순수수학 . . . 7

Q3 정수의 나누어떨어짐 순수수학 . . . 10

Q4 완전제곱식을 이용한 적분 순수수학 . . . 13

Q5 복소수의 제곱근 순수수학 . . . 16

Q6 삼각함수의 합과 적분 순수수학 . . . 20

Q7 일계 미분방정식 순수수학 . . . 24

Q8 순환소수 순수수학 . . . 28

Q9 탄성 끈과 에너지 역학 . . . 32

Q10 운동량 보존 역학 . . . 36

Q11 포물체 운동 역학 . . . 39

Q12 확률표본의 최댓값 확률과 통계 . . . 42

Q13 이산확률분포와 기댓값 확률과 통계 . . . 45

Q14 연속된 결과와 조건부확률 확률과 통계 . . . 48

STEP II

Q1 이항급수의 계수 순수수학 . . . 52

Q2 비선형 연립방정식 순수수학 . . . 55

Q3 수학적 귀납법을 이용한 피보나치 항등식 순수수학 . . . 58

Q4 치환적분 순수수학 . . . 62

Q5 1의 거듭제곱근 순수수학 . . . 65

Q6 약수의 개수 세기 순수수학 . . . 69

Q7 좌표기하에서의 자취 순수수학 . . . 73

Q8 2계 미분방정식 순수수학 . . . 76

Q9 안정성과 질량중심 역학 79
Q10 회전하는 바퀴에서 발사된 포물체 역학 84
Q11 단순 조화 운동 역학 88
Q12 최댓값과 최솟값의 분포 확률과 통계 92
Q13 격자 위의 무작위 행보 확률과 통계 95
Q14 적률과 중심극한정리 확률과 통계 99

STEP III

Q1 쌍곡선함수의 거듭제곱 순수수학 103
Q2 연립일차방정식 순수수학 107
Q3 반각 치환 순수수학 111
Q4 곱을 최대로 하는 분할 순수수학 115
Q5 배각 공식 순수수학 119
Q6 행렬의 군 순수수학 123
Q7 근의 대칭함수 순수수학 127
Q8 뫼비우스 변환 순수수학 131
Q9 원운동 역학 137
Q10 마찰이 있는 평형 역학 141
Q11 미소 진동 역학 146
Q12 마르코프 연쇄 확률과 통계 150
Q13 체비쇼프 부등식 확률과 통계 154
Q14 두 상태 마르코프 과정 확률과 통계 158

풀이

STEP I 1996, 문제 1

순수수학 • 원기둥의 최적화

> **STEP I 1996, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q1

핵심 아이디어

깡통은 두 양, 즉 반지름 r와 높이 h로 정해진다. 부피 제약 조건(constraint)을 이용하면 둘 중 하나를 없앨 수 있으므로 S는 r만의 함수가 되고, 보통의 미분(differentiation)으로 최소화할 수 있다. 최적의 깡통은 매우 깔끔한 모양을 가진다는 것이 밝혀진다. 그 모양을 알고 나면, 구에 관한 두 질문은 모두 축을 지나는 단면(cross-section) 하나만 살펴보는 문제로 귀결된다.

풀이

겉넓이 최소화하기

깡통의 반지름을 $r > 0$, 높이를 $h > 0$이라 하자. 그러면

$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

이다. 여기서 $2\pi r^2$은 두 밑면에서, $2\pi rh$는 곡면인 옆면에서 나온다. V가 고정되어 있으면 $h = V/(\pi r^2)$이므로 $2\pi rh = 2V/r$이고

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \qquad r > 0.$$

이다. 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

이다. 이 값은 $r^3 < V/(2\pi)$일 때 음수이고 $r^3 > V/(2\pi)$일 때 양수이다. 따라서 S는 감소하다가 증가하며, $r > 0$에서의 최솟값은

$$r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

일 때 나타난다. 이것은 단지 극소(local minimum)가 아니라 전역 최솟값(global minimum)이다. 이 점이 유일한 정류점(stationary point)이고, 그곳에서 도함수(derivative)의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌기 때문이다. (식으로부터도 알 수 있다. $r \to 0^+$일 때와 $r \to \infty$일 때 모두 $S \to \infty$이다.)

이 반지름에서 $V = 2\pi r^3$이므로

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r.$$

이다. 가장 좋은 깡통은 높이와 폭이 정확히 같다. 이때 $2V/r = 4\pi r^2$이므로

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2 = 6\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot (2\pi)^{-2/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi)^{1/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi V^2)^{1/3}, \end{aligned}$$

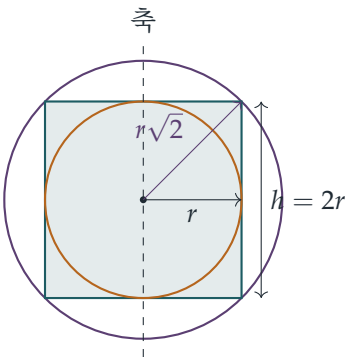
이고, 이것이 구하는 최솟값이다.

? **생각해 보기** 왜 h가 아니라 r를 변수로 삼을까?

어느 변수를 써도 된다. 하지만 h를 소거하는 편이 더 쉽다. h는 두 공식 모두에 일차로만 나타나므로, $h = V/(\pi r^2)$을 대입하면 r에 관한 간단한 함수가 된다. r를 소거하면 $\sqrt{V/(\pi h)}$가 등장하여 계산이 더 복잡해진다.

깡통 안에 들어가는 가장 큰 구

이제부터 깡통은 $h = 2r$이다. 축을 지나는 평면으로 깡통을 자르면 단면은 $2r \times 2r$ 정사각형이다.



깡통 안에 들어가는 구는 모두 반지름이 $\rho \le r$이다. 이를 확인하려면 구를 밑면의 평면에 정사영(projection)해 보자. 그러면 반지름 r인 밑면 원판 안에 놓인 반지름 ρ인 원판이 생긴다. 또한 $2\rho \le h = 2r$이므로 같은 상계를 얻는다. 깡통의 중심을 중심으로 하는 반지름 r인 구(단면에서 호박색 원)는 두 밑면과 옆면에 모두 접하므로 깡통 안에 들어간다.

$r^3 = V/(2\pi)$를 이용하면, 가장 큰 구의 부피는

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \tfrac{2}{3}V,$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

깡통을 담는 가장 작은 구

윗면 테두리 위의 한 점과, 아랫면 테두리 위에서 그와 지름 방향으로 반대편에 있는 점을 잡자. 이 두 점은 정사각형 단면의 마주 보는 꼭짓점이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(2r)^2 + h^2} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}\,r.$$

이다. 깡통을 담는 구는 이 두 점을 모두 포함하므로, 그 지름은 적어도 $2\sqrt{2}\,r$이고 반지름은 적어도 $\sqrt{2}\,r$이다.

? **생각해 보기** 반지름 $\sqrt{2}\,r$인 구가 실제로 충분히 크다는 것은 어떻게 알 수 있을까?

구의 중심을 깡통의 중심 O에 두자. 깡통의 임의의 점은 축으로부터 거리 $\rho \le r$에 있고, O보다 높이 z만큼 위 또는 아래에 있으며 $|z| \le r$이다. 따라서 O로부터의 거리는 $\sqrt{\rho^2 + z^2} \le \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\,r$이다. 그러므로 깡통 전체가 이 구 안에 놓인다(자주색 원은 정사각형의 네 꼭짓점을 모두 지난다).

따라서 깡통이 들어가는 가장 작은 구의 반지름은 $\sqrt{2}\,r$이고, 부피는

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\,r\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}\,r^3 = \tfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}V.$$

이다.

검산

- $V = 1$일 때 촘촘한 r 격자 위에서 $2\pi r^2 + 2/r$을 직접 최소화하면 $S \approx 5.5358$을 얻으며, 이는 $3(2\pi)^{1/3} \approx 5.5358$과 일치한다.
- 두 구의 부피의 비는 반지름의 비의 세제곱인 $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$여야 한다. 실제로 $\frac{4\sqrt{2}}{3}V / \frac{2}{3}V = 2\sqrt{2}$이다.
- 크기 순서도 타당하다. $\frac{2}{3}V < V < \frac{4\sqrt{2}}{3}V \approx 1.886\,V$이므로 안쪽 구는 깡통보다 작고 바깥쪽 구는 깡통보다 크다.

흔한 실수

- 밑면 하나 또는 둘을 모두 빠뜨려 $S = \pi r^2 + 2\pi rh$나 $S = 2\pi rh$로 쓰는 것. 그러면 다른 최적 모양이 나온다.

- $\mathrm{d}S/\mathrm{d}r = 0$임을 보이고, 그 정류점이 왜 최솟값인지는 말하지 않는 것.
- 바깥쪽 구의 반지름을 깡통의 공간 대각선(space diagonal)의 절반이 아니라 r나 h로 잡는 것.

STEP 너머

이것은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 즉 $V(r,h)$가 고정되어 있다는 조건 아래에서 $S(r,h)$를 최소화하는 것이다. 대학에서는 변수를 소거하지 않고 이런 문제를 다루는 라그랑주(Lagrange) 승수법(Lagrange multipliers)을 배우게 된다. 조건 $\nabla S = \lambda \nabla V$로부터 거의 곧바로 $h = 2r$을 얻는다. 또한 두 구는 볼록체(convex body)의 "내접구(inscribed ball)"와 "외접구(circumscribed ball)"를 보여 주는 예인데, 이들은 볼록 기하학(convex geometry)에서 핵심적인 개념이다. 이런 성격의 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 1996, 문제 2

순수수학 • 베타 적분

> **STEP I 1996, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q2

핵심 아이디어

(i)과 (ii)의 피적분함수(integrand)는 같은 함수를 두 가지 방식으로 쓴 것이다: $\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$. 따라서 하나의 적분을 두 가지 방법으로 계산하면 α에 대한 같은 다항식(polynomial)을 두 가지로 기술하게 된다. 소문항 (i)은 닫힌 형태(closed form)를 주고, 소문항 (ii)는 계수(coefficient)를 적분으로 나타내며, 나머지는 계수 비교가 해결한다. 부분적분(integration by parts)은 전혀 필요하지 않다.

풀이

소문항 (i)

$u = 1 + (\alpha - 1)x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = (\alpha - 1)\,\mathrm{d}x$이다. $x = 0$일 때 $u = 1$이고, $x = 1$일 때 $u = \alpha$이다. $\alpha \neq 1$이므로 $\alpha - 1$로 나눌 수 있다:

$$\int_0^1 \big(1 + (\alpha-1)x\big)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha-1)},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. ($\alpha < 1$이거나 $\alpha < 0$이어도 이 치환은 문제없다. 치환이 일차식이고, $\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u$라는 식은 적분 구간의 끝이 어느 순서로 놓여 있든 성립하기 때문이다. 같은 이야기를 다르게 하면, 그냥 $\big(1 + (\alpha-1)x\big)^{n+1}/\big((n+1)(\alpha-1)\big)$을 미분해 보면 된다.)

소문항 (ii)

αx와 $1 - x$를 두 항으로 보고 이항정리(binomial theorem)로 피적분함수를 전개한다:

$$\big(\alpha x + (1-x)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha x)^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

이것은 유한합이므로 항별로 적분할 수 있다. x에 대한 적분에서 α는 상수이다:

$$\int_0^1 (\alpha x + (1-x))^n \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \left[\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \, \mathrm{d}x \right].$$

각 대괄호 안의 값은 α에 의존하지 않는 수이므로, 이것은 차수가 n 이하인 α에 대한 다항식이고, $0 \le k \le n$일 때 α^k의 계수는 $\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \, \mathrm{d}x$이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

(ii)의 다항식을 $P(\alpha)$라 하자. $\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$이므로, 소문항 (i)에 의해 $\alpha \neq 1$인 모든 α에 대하여

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n\right),$$

이다. 여기서 등비급수(geometric series)의 인수분해 $\alpha^{n+1} - 1 = (\alpha - 1)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n)$을 이용하였다.

> **생각해 보기** 우리가 아는 것은 두 다항식이 $\alpha \neq 1$에서 일치한다는 것뿐이다. 그런데도 왜 계수를 비교해도 되는가?

양변의 차는 차수가 n 이하인 다항식이고 $\alpha \neq 1$인 모든 α에서 0이 되므로, 근(root)을 무수히 많이 가진다. 차수가 n 이하인 영이 아닌 다항식은 근을 많아야 n개 가지므로, 그 차는 영다항식이다. 즉 모든 계수가 일치한다. (다른 방법으로, 양변이 모두 연속(continuous)이므로 $\alpha = 1$에서도 일치한다.)

우변에서 $0 \le k \le n$인 α^k의 계수는 모두 $\frac{1}{n+1}$이다. 이를 (ii)와 비교하면

$$\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

이고, 따라서

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)\,n!} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!},$$

이다. 이것이 요구된 결과이다.

검산

- $k = 0$: $\int_0^1 (1-x)^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$이고, 공식은 $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$을 준다.
- $n = 2, k = 1$: $\int_0^1 (x - x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1!\,1!}{3!}$.

- 수치적으로 $\int_0^1 x^2(1-x)^3\,\mathrm{d}x \approx 0.016667 = \frac{1}{60} = \frac{2!3!}{6!}$이다. 무작위로 고른 α와 n에 대해 (i)을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 확인하였고, $0 \le k \le n \le 12$인 모든 경우에 대해 (iii)을 정확히 확인하였다.
- 흥미로운 결과: P의 계수가 모두 같으므로 $\int_0^1 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$는 k에 의존하지 않는다.

흔한 실수

- (i)이 $\alpha \neq 1$인 경우에만 증명되었다는 점을 언급하지 않고 계수를 비교하는 것. 다항식(또는 연속성)에 관한 한 문장이면 이 빈틈을 메울 수 있다.
- (ii)에서 $(1+(\alpha-1)x)^n$을 $(\alpha-1)$의 거듭제곱으로 전개하는 것. 그렇게 하면 올바른 다항식을 얻기는 하지만 α의 거듭제곱으로 나타나지 않는다. 대신 $\big(\alpha x + (1-x)\big)^n$을 전개하라.

STEP 너머

적분 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$는 오일러(Euler)의 **베타 함수**(beta function) $B(a,b)$이고, 여기서 얻은 결과는 $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$의 정수인 경우이다. 확률로 말하면, p를 $[0,1]$에서 균등하게(uniformly) 고른 다음 앞면이 나올 확률이 p인 동전 n개를 던지면, 앞면의 개수가 0부터 n까지 각각 확률 $\frac{1}{n+1}$로 똑같이 나타난다는 뜻이다(이것이 바로 "모든 계수가 같다"는 말의 의미이다). 이는 베이즈(Bayes)의 유명한 논문의 출발점이기도 하다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 뒤에 있는 베타 분포와 감마 분포를 전개한다.

풀이

STEP I 1996, 문제 3

순수수학 • 정수의 나누어떨어짐

> **STEP I 1996, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q3

핵심 아이디어

24와 같은 합성수(composite number)로 나누어떨어짐을 다룰 때는 소수의 거듭제곱 하나씩 따로 보는 것이 가장 쉽다. $24 = 3 \times 8$이고 3과 8은 서로소(coprime)이므로, 3으로 나누어떨어짐과 8로 나누어떨어짐을 따로 보이면 된다. 인수분해(factorisation)를 하면 연속한 정수들의 곱이 나오는데, 연속한 정수 k개 중에는 반드시 k의 배수가 하나 있다. 나머지 두 소문항도 같은 습관으로 해결된다. 인수분해를 하거나, n을 그 나머지가 드러나는 꼴로 쓰는 것이다.

풀이

소문항 (i)

공통인수를 묶어 내고 제곱의 차 공식을 쓰면

$$n^5 - n^3 = n^3(n^2 - 1) = n^3(n-1)(n+1) = n^2\,(n-1)\,n\,(n+1).$$

3으로 나누어떨어짐. $n-1$, n, $n+1$은 연속한 세 정수이므로 이 중 정확히 하나가 3의 배수이다. 따라서 $3 \mid (n-1)n(n+1)$이고, 그러므로 $3 \mid n^5 - n^3$이다.

8로 나누어떨어짐. n의 홀짝성(parity)에 따라 경우를 나눈다.

- n이 짝수이면, $n = 2m$이라 할 때 $n^3 = 8m^3$이므로 8의 배수이다.
- n이 홀수이면, $n-1$과 $n+1$은 연속한 두 짝수이다. 연속한 두 짝수 중 하나는 4의 배수이고 다른 하나는 2의 배수이므로 $8 \mid (n-1)(n+1)$이다.

어느 경우든 $8 \mid n^3(n-1)(n+1) = n^5 - n^3$이다.

생각해 보기 $3 \mid N$과 $8 \mid N$을 알면 왜 $24 \mid N$이 되는가? $4 \mid N$과 $6 \mid N$으로도 같은 결론을 얻을 수 있는가?

3과 8은 공통인수가 없으므로, $8 \mid N$이면 $N = 8a$이고, 이때 $3 \mid 8a$이면 반드시 $3 \mid a$이다(3은 소수이고 8을 나누지 않기 때문이다). 따라서 $N = 24b$이다. 이 논증은 공통인수 2를 가지는 4와 6에 대해서는 성립하지 않는다. 12는 둘 다로 나누어떨어지지만 24로는 나누어떨어지지 않는다.

그러므로 모든 양의 정수 n에 대하여 $n^5 - n^3$은 24로 나누어떨어진다.

소문항 (ii)

$2^{2n} = 4^n$으로 쓴다. 인수분해 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$에 $x = 4$를 대입하면

$$2^{2n} - 1 = 4^n - 1 = (4-1)\left(4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4 + 1\right) = 3\left(4^{n-1} + \cdots + 1\right).$$

괄호 안은 정수이므로 $2^{2n} - 1$은 3으로 나누어떨어진다.

같은 내용을 합동식(modular arithmetic)으로 쓰면 다음과 같다. $4 \equiv 1 \pmod 3$이므로 $4^n \equiv 1^n = 1 \pmod 3$이다. 수학적 귀납법(induction)으로 증명할 수도 있다. $4^k - 1 = 3a$이면 $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3 = 3(4a + 1)$이다.

소문항 (iii)

$3 \mid n - 1$이므로 어떤 정수 $k \geq 0$에 대하여 $n = 3k + 1$로 쓴다. 다음과 같이 인수분해한다.

$$n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1).$$

첫째 인수는 $n - 1 = 3k$이다. 둘째 인수는

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (9k^2 + 6k + 1) + (3k + 1) + 1 \\ &= 9k^2 + 9k + 3 \\ &= 3(3k^2 + 3k + 1). \end{aligned}$$

따라서 각 인수가 3을 하나씩 내놓는다.

$$n^3 - 1 = 3k \cdot 3(3k^2 + 3k + 1) = 9k(3k^2 + 3k + 1),$$

이는 9로 나누어떨어진다. ($n = 1$일 때는 $k = 0$이고 $n^3 - 1 = 0$이며, 이 역시 9로 나누어떨어진다.)

핵심은 $n - 1$이 3을 하나만 내놓는다는 것이다. 두 번째 3은 $n^2 + n + 1$에서 나온다. 이 두 번째 인수를 깔끔하게 보는 방법은 $n^2 + n + 1 = (n-1)^2 + 3n$으로 쓰는 것인데, $3 \mid n - 1$이면 이는 3의 배수 두 개의 합이다.

검산

- 소문항 (i): $n = 2$이면 $32 - 8 = 24$이고, $n = 3$이면 $243 - 27 = 216 = 9 \times 24$이다. $n = 2$일 때 정확히 24가 나오므로, 모든 $n^5 - n^3$을 나누는 수 중 24보다 큰 것은 없다. 즉 24가 가장 좋은 값이다.
- 소문항 (ii): $n = 1, 2, 3$이면 각각 3, 15, 63이다.
- 소문항 (iii): $n = 4$이면 $63 = 7 \times 9$이고, $n = 7$이면 $342 = 38 \times 9$이며, 이는 $k = 1$, $k = 2$일 때의 $9k(3k^2 + 3k + 1)$과 일치한다.

세 결과 모두 5000 미만의 모든 n에 대하여(소문항 (ii)는 $n < 2000$에 대하여) 컴퓨터로 확인하였고, $n^5 - n^3$ 값들의 최대공약수가 정확히 24임도 확인하였다.

흔한 실수

- "$(n-1)n(n+1)$은 6으로 나누어떨어지고, n^2은 ..."라고 논증하다가 인수 8이 어디서 나오는지 놓치는 것. 짝수인 경우에는 n만이 아니라 n^3이 필요하다.
- 4로 나누어떨어지고 6으로 나누어떨어진다는 것에서 24로 나누어떨어진다고 결론짓는 것. 인수들은 서로소여야 한다.
- 소문항 (iii)에서 "$n - 1$이 3으로 나누어떨어지므로 $n^3 - 1 = (n-1)(\dots)$은 3으로 나누어떨어진다"에서 멈추는 것. 이렇게 하면 3을 하나만 얻는다.

STEP 너머

세 소문항은 모두 사실 합동식에 관한 명제이다. m을 법으로 하는 정수들은 환(ring)을 이루며, 소문항 (iii)은 $n \equiv 1 \pmod 3$이면 $n^3 \equiv 1 \pmod 9$라는 뜻이다. 이는 **지수 올리기**(*lifting the exponent*)라 불리는 일반적인 현상의 첫 단계이다. $p \mid n - 1$이면 $p^{j+1} \mid n^{p^j} - 1$이다. 페르마(Fermat)의 소정리(little theorem)($n^p \equiv n \pmod p$)로 소문항 (i)도 설명할 수 있는데, 이 정리에서 곧바로 $3 \mid n^3 - n$을 얻기 때문이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 이러한 아이디어에 대한 아름다운 입문서이다.

풀이

STEP I 1996, 문제 4

순수수학 • 완전제곱식을 이용한 적분

> **STEP I 1996, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q4

핵심 아이디어

분모에 이차식이 있으면 완전제곱식(completing the square)으로 고친다: $x^2+2ax+1=(x+a)^2+(1-a^2)$. 모든 것은 $1-a^2$의 부호가 결정한다. 이 값이 양수이면 "제곱의 합"이 되어 역탄젠트(inverse tangent)가 나오고, 음수이면 제곱의 차가 되어 부분분수(partial fractions)로 분해되고 로그가 나온다. 실제로 손이 많이 가는 부분은 그다음에 답을 주어진 꼴로 정리하는 일이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $[0,1]$에서의 적분을 I로 쓴다. 완전제곱식으로 고치면

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2+1-a^2.$$

$|a|<1$인 경우

$b=\sqrt{1-a^2}>0$이라 하자. $u=x+a$로 두고 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{u}{b}$를 이용하면

$$I=\frac{1}{b}\left[\tan^{-1}\frac{x+a}{b}\right]_0^1=\frac{1}{b}(\alpha-\beta),\qquad \text{여기서 } \alpha=\tan^{-1}\frac{1+a}{b},\quad \beta=\tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

(분모는 항상 $b^2>0$ 이상이므로 $[0,1]$에서 0이 되지 않고, 따라서 적분에는 아무 문제가 없다.) 하나의 역탄젠트로 나타내야 하므로 $\alpha-\beta$의 탄젠트를 구한다:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{1+a}{b}-\dfrac{a}{b}}{1+\dfrac{(1+a)a}{b^2}}=\frac{b}{b^2+a+a^2}=\frac{b}{1+a},$$

여기서 $b^2 + a^2 = 1$을 이용하였다. 끝으로

$$\frac{b}{1+a} = \frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{1+a} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

이고, $1 + a > 0$이므로 이 식은 성립한다.

? 생각해 보기 $\tan(\alpha - \beta) = t$이면 정말로 $\alpha - \beta = \tan^{-1} t$인가?

$\alpha - \beta$가 $\tan^{-1}$의 치역인 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속할 때에만 그렇다. 따라서 이를 확인해야 한다. $(1+a)/b > 0$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$이다. 또한 $\tan^{-1}$은 증가함수이고 $(1+a)/b > a/b$이므로 $\alpha > \beta$이다. 그러므로 $0 < \alpha - \beta < \pi$이다. 이 구간에서 tan이 양수인 곳은 $(0, \frac{\pi}{2})$뿐이고, 앞에서 $\tan(\alpha - \beta) > 0$임을 보였다. 따라서 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$이고

$$I = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \qquad (|a| < 1),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

(더 깔끔한 관점: $a = \cos\varphi, 0 < \varphi < \pi$로 두면 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$이므로 $\alpha - \beta = \frac{\varphi}{2}$이고, 실제로 $\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)} = \tan\frac{\varphi}{2}$이다.)

$|a| > 1$인 경우

$c = \sqrt{a^2 - 1} > 0$이라 하자. 이제 분모는 두 제곱의 차이다:

$$x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 - c^2 = (x + a - c)(x + a + c),$$

그리고 부분분수로 분해하면

$$\frac{1}{(x+a-c)(x+a+c)} = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x+a-c} - \frac{1}{x+a+c}\right).$$

이차식의 두 근은 $-a \pm c$이다. 두 근의 곱은 1이고 합은 $-2a$이다.

먼저 $a > 1$이라 하자. 그러면 ($a^2 > a^2 - 1$이므로) $a > c$이고, 따라서 $x \geq 0$에서 $x + a - c$와 $x + a + c$는 모두 양수이다. 그러므로

$$I = \frac{1}{2c}\left[\ln\frac{x+a-c}{x+a+c}\right]_0^1 = \frac{1}{2c}\left(\ln\frac{1+a-c}{1+a+c} - \ln\frac{a-c}{a+c}\right).$$

$(a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = 1$을 이용하면 두 분수 모두 간단해진다:

- $(1+a-c)(a+c) = (a+c) + (a-c)(a+c) = 1 + a + c$이므로 $\dfrac{1+a-c}{1+a+c} = \dfrac{1}{a+c}$;
- $a - c = \dfrac{1}{a+c}$이므로 $\dfrac{a-c}{a+c} = \dfrac{1}{(a+c)^2}$.

따라서

$$I = \frac{1}{2c}\big(-\ln(a+c) + 2\ln(a+c)\big) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\big(a+\sqrt{a^2-1}\big),$$

이다. 이 경우 $a+\sqrt{a^2-1} > 0$이므로 그 절댓값과 같고, 이것이 주어진 결과이다.

$a < -1$이면 어떻게 될까? 이때 두 근 $-a \pm c = |a| \pm c$는 모두 양수이고 곱이 1이므로, 작은 근 $|a| - \sqrt{a^2-1}$은 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다. 피적분함수(integrand)는 $[0,1]$ 안에 단순극(simple pole)을 가지며, 근 r 근처에서 상수 곱하기 $1/(x-r)$처럼 행동한다. 따라서 적분은 수렴(converge)하지 않고, 엄밀히 말하면 공식은 $a > 1$일 때에만 성립한다. ($\ln|\cdot|$를 써서 같은 부분분수 계산을 하면, 공식이 **코시 주요값**(*Cauchy principal value*), 즉 r 주위의 작은 대칭 구간을 빼고 적분한 값의 극한을 준다는 것을 알 수 있다. 문제에 절댓값 기호가 있는 이유가 바로 이것이다.)

검산

- $a = 0$: 적분은 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$이고, 공식은 $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$를 준다.
- $a = 2$: 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 0.380173이 나오고, 이는 $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$과 일치한다.
- $a \to 1$일 때 두 경우 모두 $\frac{1}{2} = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,dx$로 수렴한다. 두 번째 경우는 c가 작을 때 $\ln(a+c) \approx c$이기 때문이고, 첫 번째 경우는 $\tan^{-1}t \approx t$이고 $\sqrt{(1-a)/(1+a)}/\sqrt{1-a^2} = 1/(1+a)$이기 때문이다.

흔한 실수

- 차가 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속하는지 확인하지 않고 $\tan^{-1}A - \tan^{-1}B = \tan^{-1}\frac{A-B}{1+AB}$라고 쓰는 것.
- $a < -1$이면 분모가 $[0,1]$ 안에서 0이 된다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

두 답은 사실 a에 대한 하나의 함수이다. 첫 번째 답에 $a = \cos\varphi$, 두 번째 답에 $a = \cosh t$를 대입하면 각각 $\varphi/(2\sin\varphi)$와 $t/(2\sinh t)$가 되고, 복소수를 이용하면($\cosh t = \cos(it)$) 한 쪽이 다른 쪽의 해석적 연속(analytic continuation)이다. $a < -1$일 때의 발산과 주요값을 통한 구제는 적분 경로 위에 있는 극(pole)을 복소해석학(complex analysis)이 어떻게 다루는지 처음 맛보는 경험이다. 이를 살펴보기에 좋은 책으로 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 있다.

풀이

STEP I 1996, 문제 5

순수수학 • 복소수의 제곱근

> **STEP I 1996, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q5

핵심 아이디어

각 소문항은 다음 소문항으로 이어진다. 소문항 (i)은 유리수 부분과 무리수 부분을 비교하는 문제이며, 이를 통해 $4-2\sqrt{3}$이 완전제곱수(perfect square)임을 알 수 있다. 소문항 (ii)는 복소수의 제곱근(complex square root)을 구하는 문제인데, 늘 하듯이 "실수부와 허수부를 비교하는" 단계를 거치고 나면 소문항 (i)로 귀착된다. 소문항 (iii)은 이차방정식이며, 그 판별식(discriminant)은 소문항 (ii)의 수의 네 배가 되므로, 필요한 제곱근은 이미 구해 놓은 셈이다.

풀이

소문항 (i)

전개하면

$$(r+s\sqrt{3})^2 = (r^2+3s^2)+2rs\sqrt{3}.$$

이것이 $4-2\sqrt{3}$과 같아야 한다. r와 s가 유리수이므로 r^2+3s^2과 $2rs$도 유리수이다. a,b,c,d가 유리수이고 $b\neq d$일 때 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$이라면 $\sqrt{3}=(a-c)/(d-b)$가 유리수가 되는데, 이는 사실이 아니다. 따라서 유리수 부분과 $\sqrt{3}$의 계수를 각각 비교할 수 있다.

$$r^2+3s^2=4, \qquad rs=-1.$$

그러면 $r\neq 0$이므로 $s=-1/r$이고, 첫 번째 식은 다음과 같이 된다.

$$r^2+\frac{3}{r^2}=4 \iff r^4-4r^2+3=0 \iff (r^2-1)(r^2-3)=0.$$

$r^2 = 3$이면 $r = \pm\sqrt{3}$인데, 이는 유리수가 아니다. 따라서 $r^2 = 1$이고, 해는

$$r = 1,\ s = -1 \qquad \text{그리고} \qquad r = -1,\ s = 1,$$

즉 $r + s\sqrt{3} = \pm(1 - \sqrt{3})$이다. 실제로 $(1 - \sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$이다.

소문항 (ii)

전개하면 $(p + q\mathrm{i})^2 = (p^2 - q^2) + 2pq\,\mathrm{i}$이다. p와 q가 실수이므로 실수부와 허수부를 비교할 수 있다.

$$p^2 - q^2 = 3 - 2\sqrt{3}, \qquad pq = 1 - \sqrt{3}.$$

두 번째 식에서 $p \neq 0$이므로 $q = (1 - \sqrt{3})/p$이고 $q^2 = (1 - \sqrt{3})^2/p^2 = (4 - 2\sqrt{3})/p^2$이다. 이를 첫 번째 식에 대입하고 양변에 p^2을 곱하면

$$p^4 - (3 - 2\sqrt{3})\,p^2 - (4 - 2\sqrt{3}) = 0.$$

> **생각해 보기** 이것은 p^2에 대한 이차식인데 계수가 복잡해 보인다. 빠르게 인수분해할 방법이 있을까?

p^2에 대한 두 근의 합은 $3 - 2\sqrt{3}$, 곱은 $-(4 - 2\sqrt{3})$이어야 한다. -1을 넣어 보자. 그러면 다른 근은 $4 - 2\sqrt{3}$이 되고, 실제로 $-1 + (4 - 2\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3}$이다. 따라서

$$\left(p^2 + 1\right)\left(p^2 - (4 - 2\sqrt{3})\right) = 0.$$

p는 실수이므로 $p^2 \neq -1$이고, 소문항 (i)에 의해 $p^2 = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$이다. 그러므로 $p = \pm(\sqrt{3} - 1)$이고 $q = (1 - \sqrt{3})/p = \mp 1$이다. 해는

$$p = \sqrt{3} - 1,\ q = -1 \qquad \text{그리고} \qquad p = 1 - \sqrt{3},\ q = 1.$$

다시 말해 $(3 - 2\sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3})\mathrm{i}$의 제곱근은 $\pm\big((\sqrt{3} - 1) - \mathrm{i}\big)$이다. 확인해 보면 $\big((\sqrt{3} - 1) - \mathrm{i}\big)^2 = (4 - 2\sqrt{3}) - 1 - 2(\sqrt{3} - 1)\mathrm{i}$이며, 이는 구하려던 수이다.

소문항 (iii)

근의 공식(quadratic formula)에 의해(완전제곱식 만들기가 $\mathbb{C}$에서도 똑같이 성립하므로 근의 공식은 복소수 계수에서도 성립한다)

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \mathrm{i})(2\sqrt{3} - 2)}}{2(1 + \mathrm{i})} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1 + \mathrm{i})(2\sqrt{3} - 2)}}{1 + \mathrm{i}},$$

이고, 여기서 $\pm\sqrt{\ }$는 두 복소수 제곱근을 나타낸다. 근호 안의 값은

$$1 - (2\sqrt{3} - 2) - (2\sqrt{3} - 2)\mathrm{i} = (3 - 2\sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3})\mathrm{i},$$

로, 정확히 소문항 (ii)의 수이다. 그 제곱근은 $\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)$이므로

$$z=\frac{1\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)}{1+\mathrm{i}},\quad \text{따라서}\quad z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\qquad z_2=\frac{(2-\sqrt{3})+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

분자와 분모에 $1-\mathrm{i}$를 곱하면(분모가 2가 된다)

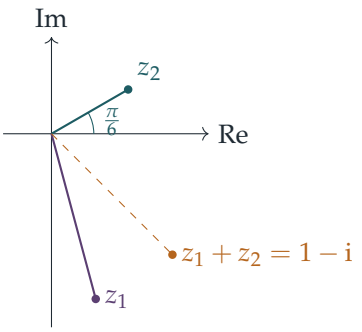
$$z_1=\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}}{2},$$
$$z_2=\frac{\big((2-\sqrt{3})+\mathrm{i}\big)(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}}{2}.$$

생각해 보기 이것이 "가능한 한 간단한 꼴"일까? 어느 한 근이라도 더 정리할 수 있을까?

두 번째 근은 $(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})$로 인수분해되고, $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$이다. 첫 번째 근은 $|z_1|^2=\frac{1}{4}\big((4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})\big)=2$이고, $z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$는 $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$을 $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$로 나눈 몫이다. 따라서 해는

$$z_1=\tfrac{1}{2}\big((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}\big)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/12},$$
$$z_2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})=(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}.$$

어느 꼴(직교 형식(Cartesian form)이든 극형식(modulus–argument form)이든)로 답해도 충분히 좋은 최종 답이다.



검산

- 근과 계수의 관계: $az^2+bz+c=0$에서 $z_1+z_2=-b/a=2/(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$이고 $z_1z_2=c/a=(2\sqrt{3}-2)/(1+\mathrm{i})=(\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$이어야 한다. 직교 형식으로부터 $z_1+z_2=\frac{1}{2}(2-2\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$이고, 극형식으로부터 $z_1z_2=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}=(\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$이다. 둘 다 일치한다.
- 수치적으로 $z_1\approx 0.366-1.366\mathrm{i}$, $z_2\approx 0.634+0.366\mathrm{i}$이며, 어느 쪽을 $(1+\mathrm{i})z^2-2z+2\sqrt{3}-2$에 대입해도 기계 정밀도 범위에서 0이 된다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $\sqrt{3}$의 계수를 비교해도 되는 **이유**를 밝히지 않는 것. 이는 r, s가 유리수이고 $\sqrt{3}$이 무리수라는 사실에 근거한다. 이 조건이 없으면 실수해가 무수히 많다.
- 소문항 (ii)에서 $p^2 = -1$을 버리지 않거나, p와 q의 부호를 잘못 짝짓는 것. $pq = 1 - \sqrt{3} < 0$이므로 두 부호는 반대여야 한다.
- 소문항 (iii)에서 공식 전체를 2로 잘못 나누거나, 분모를 실수화하지 않고 $1 + \mathrm{i}$를 분모에 그대로 남겨 두는 것.

STEP 너머

소문항 (i)이 성립하는 것은 1과 $\sqrt{3}$이 $\mathbb{Q}$ 위에서 일차독립(linearly independent)이어서 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{r + s\sqrt{3}\}$이 유리수 위의 2차원 공간처럼 행동하기 때문이다. 소문항 (ii)는 같은 아이디어를 $\mathbb{R}$ 위의 1과 i에 적용한 것이다. 이것이 체의 확대(field extension)의 출발점이며, 대학 1학년 대수학 강의에서는 이를 갈루아(Galois) 이론으로 발전시켜 나간다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 이 내용을 다루며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 제곱근에 대한 아름다운 기하학적 관점을 보여 준다.

풀이

STEP I 1996, 문제 6

순수수학 • 삼각함수의 합과 적분

> **STEP I 1996, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q6

핵심 아이디어

주어진 항등식은 망원(telescoping) 꼴로 상쇄되도록 만들어져 있다. 합 $\sum \cos kx$에 $2\sin\frac{1}{2}x$를 곱하면 각 항이 두 사인의 차가 되고, 이웃한 차들이 서로 상쇄된다. f를 코사인의 합으로 나타내고 나면, (ii)의 까다로워 보이는 적분들은 코사인 하나하나의 적분이 되며, 그 대부분은 $[0,\pi]$에서 0이 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 n은 양의 정수이다.

소문항 (i)

$S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$라 하자. 여기에 $2\sin\frac{1}{2}x$를 곱하고 주어진 공식을 각 항에 적용하면

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\,S &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\Big)\\ &= \big(\sin\tfrac{3}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x\big)+\big(\sin\tfrac{5}{2}x-\sin\tfrac{3}{2}x\big)+\cdots+\big(\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin(n-\tfrac{1}{2})x\big)\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x,\end{aligned}$$

이다. 중간의 모든 항이 양의 부호와 음의 부호로 한 번씩 나타나 상쇄되기 때문이다. 따라서

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x=\sin\tfrac{1}{2}x+2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

$0 < x \le \pi$이면 $0 < \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\pi$이므로 $\sin\frac{1}{2}x > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

이것으로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

> **생각해 보기** f는 $x = 0$에서 정의되지 않는다. 그렇다면 $\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$가 애초에 의미 있는 적분일까?

그렇다. 소문항 (i)에 의해 $0 < x \le \pi$에서 함수 f는 코사인 다항식 $1 + 2\sum\cos kx$와 일치하며, 이 다항식은 $[0, \pi]$ 전체에서 연속(continuous)이다(0에서의 값은 $2n+1$). 한 점에서의 함숫값을 바꾸거나 정의하지 않은 채로 두어도 적분값은 달라지지 않으므로, 대신 코사인 합을 적분하면 된다.

첫 번째 적분. $k \ge 1$인 각 정수 k에 대하여

$$\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = 0,$$

이다. $\sin k\pi = 0$이기 때문이다. 따라서 상수항만 남는다.

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \pi.$$

두 번째 적분. 이제

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x.$$

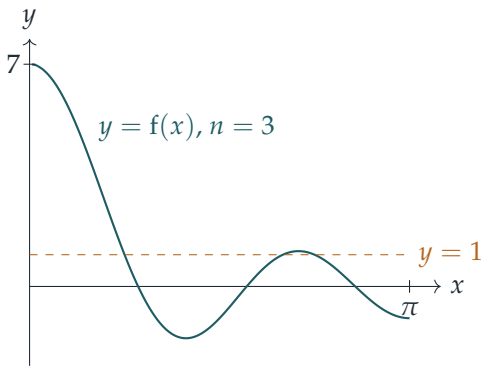
첫 번째 적분은 $[\sin x]_0^\pi = 0$이다. 나머지 적분에는 $2\cos kx\cos x = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$를 이용한다.

$$2\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(k+1)x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(k-1)x\,\mathrm{d}x.$$

여기서 $k+1 \ge 2$이므로 첫 번째 적분은 앞에서와 같이 0이다. 두 번째 적분도 $k-1 = 0$인 경우를 제외하면 0이며, 그 경우에는 피적분함수가 1이므로 적분값은 π이다. 따라서 $k = 1$인 항만 기여하고,

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

(n이 0일 수 있다면 $\mathrm{f} \equiv 1$이고 이 적분은 0이 된다. $n \ge 1$인 모든 경우에는 π이다.)



이 그림은 첫 번째 답이 n에 의존하지 않는 이유를 보여 준다. 0 근처의 높은 봉우리(높이 $2n+1$)가 진동하는 부분과 균형을 이루어, 전체 넓이는 항상 상수항의 넓이인 π가 된다.

검산

- $x \to 0$일 때 $\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{1}{2}x \to (2n+1)$이고, $x = 0$에서 코사인 합의 값은 $1+2n$이다. 두 값이 일치한다.
- $x = \pi$에서: $f(\pi) = \sin(n+\frac{1}{2})\pi = (-1)^n$이고, $1 + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^n$ 역시 성립한다.
- $n = 1, \ldots, 7$에 대하여 원래의 분수식을 중점법(midpoint rule)으로 수치적분하면 두 적분 모두 3.14159265…가 나와 π와 일치한다.

흔한 실수

- $\sin\frac{1}{2}x$로 나누는 것을 정당화하지 않는 실수: 이 값이 0이 아닌 것은 바로 $0 < x \leq \pi$이기 때문이다.
- 모든 k에 대하여 $\int_0^\pi \cos kx \cos x \, dx = 0$이라고 써서 두 번째 적분을 0으로 얻는 실수: $k = 1$인 항은 $\int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\pi$를 준다.

STEP 너머

함수 f는 **디리클레 핵**(Dirichlet kernel)으로, 푸리에 급수(Fourier series) 이론의 중심 대상이다. (ii)의 계산은 직교성(orthogonality)의 예이다. $\cos kx$와 $\cos mx$를 곱하여 $[0, \pi]$에서 적분하면 $k = m$인 경우를 제외하고 0이 된다. 바로 이렇게 푸리에 계수를 뽑아내며, 함수에 디리클레 핵을 곱하여 적분하면 그 함수의 푸리에 급수의 n번째 부분합이 얻어진다. 이러한

부분합이 언제 수렴하는지에 대한 엄밀한 논의는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP I 1996, 문제 7

순수수학 • 일계 미분방정식

STEP I 1996, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s1-q7

핵심 아이디어

"양에 비례하는 속도로 흘러나간다"는 말은 곧바로 일계(first-order) 미분방정식(differential equation) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$ (단, $k > 0$)로 옮겨지며, 그 해는 지수함수(exponential function)이다. e^{-k}를 하나의 수 b로 쓰면 지수함수가 b^t 꼴이 되고, 같은 치환 $k = -\ln b$로 소문항 (ii)의 방정식도 다시 쓸 수 있다. 그 방정식은 선형(linear)이므로 적분인자(integrating factor)를 쓰면 풀이가 끝난다.

풀이

소문항 (i)

물이 흘러나가므로 y는 y에 비례하는 속도로 감소한다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \qquad \text{단, 상수} k > 0.$$

탱크에 물이 있는 동안은 $y > 0$이므로 변수분리(separation of variables)를 할 수 있다.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int k\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln y = -kt + c.$$

$t = 0$일 때 $y = 1$이므로 $c = \ln 1 = 0$이다. 따라서

$$y = \mathrm{e}^{-kt} = \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^t = b^t, \qquad \text{단, } b = \mathrm{e}^{-k}.$$

$k > 0$이므로 $0 < b < 1$이고, 특히 요구한 대로 $b < 1$이다. 나중을 위해 다음을 적어 둔다.

$$\ln b = -k, \qquad \text{따라서} \qquad k = -\ln b > 0.$$

소문항 (ii)

흘러나가는 양은 앞에서와 똑같이 같은 상수 k에 대해 속도 ky이고, 여기에 더해 물이 속도 a로 들어온다. 따라서 알짜 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a - ky.$$

생각해 보기 이 방정식에는 k만 나오는데, $\ln b$는 어디에서 나오는가?

상수 b는 소문항 (i)에서 $b = \mathrm{e}^{-k}$로 정의되었으므로, 오직 유출만을 나타내며 여기서도 여전히 같은 수이다. $k = -\ln b$를 대입하면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a + y\ln b$, 즉

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\ln b = a,$$

를 얻으며, 이것이 구하는 방정식이다.

이 방정식은 y에 대해 선형이고 계수가 상수이다. 적분인자는

$$\exp\left(-\int \ln b \,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-t\ln b} = b^{-t}.$$

양변에 b^{-t}를 곱하면, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b^{-t} = -b^{-t}\ln b$이므로 좌변은 완전미분(exact derivative)이 된다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y\,b^{-t}\right) = a\,b^{-t}.$$

$\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{b^{-t}}{\ln b}$ ($\ln b \neq 0$이므로 성립한다)를 이용해 적분하면

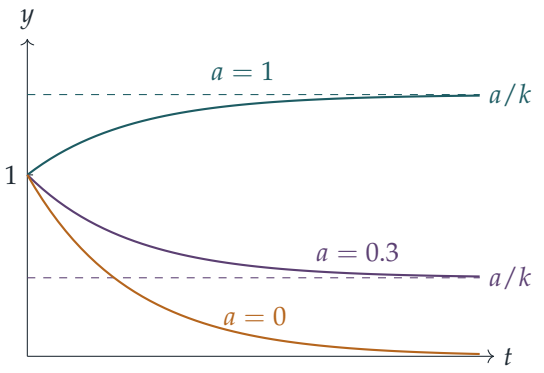
$$y\,b^{-t} = -\frac{a}{\ln b}\,b^{-t} + C.$$

$t = 0$일 때 $y = 1$이므로 $1 = -\dfrac{a}{\ln b} + C$이고, $C = 1 + \dfrac{a}{\ln b}$이다. 양변에 b^t를 곱하면

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{\ln b} + \left(1 + \frac{a}{\ln b}\right) b^t \\ &= b^t + \frac{a\,(1 - b^t)}{-\ln b}. \end{aligned}$$

두 형태 모두 괜찮다. $-\ln b = \ln(1/b) > 0$이므로 두 번째 형태가 읽기 더 쉽다. 이는 소문항 (i)의 해 b^t에 유입에서 생기는 양의 항을 더한 것이다.

$t \to \infty$일 때 ($0 < b < 1$이므로) $b^t \to 0$이고, 따라서 $y \to \dfrac{a}{-\ln b} = \dfrac{a}{k}$이다. 이것이 평형(equilibrium) 수위로, 이 수위에서 유출 ky가 유입 a와 정확히 균형을 이룬다. $a > k$이면 탱크는 이 수위를 향해 차오르고, $a < k$이면 이 수위를 향해 빠진다.



그림은 $b = \frac{1}{2}$ (즉 $k = \ln 2 \approx 0.693$)일 때 $a = 1$, $a = 0.3$인 경우와, 비교를 위해 소문항 (i)의 곡선 $a = 0$을 나타낸 것이다.

검산

- $a = 0$을 대입하면 답은 소문항 (i)의 결과인 $y = b^t$가 된다.
- $t = 0$일 때: $y = 1 + \frac{a(1-1)}{-\ln b} = 1$.
- $y = b^t + \frac{a}{\ln b}(b^t - 1)$을 미분하면 $y' = b^t \ln b + ab^t$를 얻고, 한편 $y \ln b + a = b^t \ln b + a(b^t - 1) + a = b^t \ln b + ab^t$이므로 일치한다.
- 수치적으로 $b = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $t = 2$일 때 공식은 $y \approx 1.3320$을 준다. 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 미분방정식을 단계별로 계산해도 같은 값이 나오며, 임의의 a, b, t에 대해서도 대체로 약 10^{-13} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$로 쓰고 나서 유출이므로 k가 음수여야 한다는 점을 잊는 것. 바로 이 부호 때문에 $b < 1$이 된다.
- 소문항 (ii)에서 b를 새로운 미지수로 취급하는 것. b는 유출만으로 정해지므로 $\ln b = -k$가 그대로 이어진다.
- $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -b^{-t}/\ln b$에서 부호를 틀리는 것. 미분해서 확인하라.

STEP 너머

이것은 가장 단순한 구획 모형(compartment model)으로, 일정한 유입과 비례하는 유출이 있는 탱크 하나로 이루어진다. 같은 방정식이 일정한 속도로 혈류에 주입되고 신장에 의해

제거되는 약물이나, 저항을 통해 충전되는 축전기도 기술한다. 모든 해는 평형값 a/k로 지수적으로 다가가는데, 이는 안정 고정점(stable fixed point)의 한 예이며, 이 개념은 연립 미분방정식을 배울 때 핵심이 된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계 선형 방정식과 이와 같은 여러 혼합 문제를 다룬다.

풀이

STEP I 1996, 문제 8

순수수학 • 순환소수

> **STEP I 1996, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q8

핵심 아이디어

되풀이되는 숫자 묶음은 사실 등비급수(geometric series)가 모습을 바꾼 것이다. 묶음이 한 번 반복될 때마다 앞의 묶음을 오른쪽으로 k자리 옮긴 것이 되므로, 그 값에 10^{-k}가 곱해진다. 소문항 (i)은 가장 간단한 경우이다. 소문항 (ii)에서는 소수 전개를 반복이 시작되기 전의 부분(유한소수)과 되풀이되는 꼬리 부분(등비급수)으로 나누는데, 두 부분 모두 정수를 10의 거듭제곱이나 $10^k - 1$로 나눈 꼴임이 드러난다.

풀이

소문항 (i)

묶음 38이 두 자리마다 반복되므로

$$\begin{aligned} 0.383838\ldots &= \frac{38}{100} + \frac{38}{100^2} + \frac{38}{100^3} + \cdots \\ &= \frac{38/100}{1 - 1/100} = \frac{38}{99}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수의 합을 구했는데, $\left|\frac{1}{100}\right| < 1$이므로 이렇게 해도 된다. $38 = 2 \times 19$와 $99 = 3^2 \times 11$은 공통인 소인수가 없으므로, 이것은 기약분수(lowest terms)이다.

$$0.383838\ldots = \frac{38}{99}.$$

소문항 (ii)

(문제에 인쇄된 전개 $0 \cdot a_1a_2a_2 \cdots$는 $0 \cdot a_1a_2a_3 \cdots$의 오식이다.) 각 a_n은 0부터 9까지의 숫자이고

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

이다. 이 합을 $n = N$에서 나눈다.

처음 N개의 숫자. b를 십진법 숫자가 $a_1a_2 \ldots a_N$인 정수(맨 앞에 0이 와도 된다)라 하자. 즉

$$b = \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n}.$$

이다. 그러면

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} = \frac{1}{10^N} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n} = \frac{b}{10^N}.$$

이다.

꼬리 부분. 모든 $n > N$에 대하여 성립하는 조건 $a_{n+k} = a_n$을 거듭 적용하면, 모든 $m \geq 0$과 $1 \leq j \leq k$에 대하여 $a_{N+mk+j} = a_{N+j}$를 얻는다(m에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. 첨자 $N + (m-1)k + j$는 N보다 크므로 여기에 k를 더할 수 있다). 따라서 N번째 자리 이후의 전개는 묶음 $a_{N+1}a_{N+2} \ldots a_{N+k}$가 끝없이 반복된 것이다. 이 숫자들로 이루어진 정수를 c라 하자.

$$c = \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j}.$$

꼬리 부분을 k개 항씩 묶는다. 모든 항이 음이 아니고 급수가 수렴(converge)하므로 이렇게 묶어도 된다. 주어진 $m \geq 0$에 대한 묶음은

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{N+mk+j}}{10^{N+mk+j}} = \frac{1}{10^{N+(m+1)k}} \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j} = \frac{c}{10^N} \left(\frac{1}{10^k} \right)^{m+1}.$$

이다.

? **생각해 보기** 각 묶음이 바로 앞 묶음의 정확히 10^{-k}배인 이유는 무엇인가?

묶음 m에서 묶음 $m+1$로 넘어가도 (주기성에 의해) 같은 숫자들이 쓰이지만, 각 숫자가 k자리 더 오른쪽에 놓인다. 그러면 각 항이 10^k로 나누어진다. 이것이 바로 순환소수(recurring decimal) 속에 숨어 있는 등비급수이다.

공비가 $10^{-k} < 1$인 등비급수의 합을 구하면

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{c}{10^N} \cdot \frac{10^{-k}}{1 - 10^{-k}} = \frac{c}{10^N(10^k - 1)}.$$

이다.

두 부분 합치기. 두 부분을 더하면

$$x = \frac{b}{10^N} + \frac{c}{10^N(10^k - 1)},$$

이다. 여기서 b는 처음 N개의 숫자 $a_1 \dots a_N$으로 이루어진 정수이고, c는 한 주기 $a_{N+1} \dots a_{N+k}$로 이루어진 정수이다. 이것이 구하는 꼴이다.

유리수임. 통분하면

$$x = \frac{b(10^k - 1) + c}{10^N(10^k - 1)}.$$

이다. 분자는 정수이고, $k \geq 1$이면 $10^k - 1 \geq 9$이므로 분모는 양의 정수이다. 따라서 x는 정수의 비이고, 이는 x가 유리수(rational number)라는 뜻이다.

검산

- 소문항 (i)은 순환 전 부분이 없고 $k = 2$, $c = 38$인 경우이다. 공식에 넣으면 $38/(10^2 - 1) = 38/99$를 얻는다. ($N = 1$로 잡으면 $b = 3$, $c = 83$이고, $\frac{3}{10} + \frac{83}{990} = \frac{380}{990} = \frac{38}{99}$이므로 일치한다.)
- $0.12345345\dots$를 $N = 2$, $k = 3$, $b = 12$, $c = 345$로 잡으면 $\frac{12}{100} + \frac{345}{100 \times 999} = \frac{4111}{33300} = 0.1234534534\dots$
- 또한 순환 전 부분과 반복 묶음을 무작위로 500가지 골라, 공식의 값과 전개를 합한 값을 정확한 산술로 비교해 보았다. 모두 일치하였다.

흔한 실수

- 꼬리 부분에 인수 10^{-N}을 빠뜨리는 실수: 반복 묶음은 $N + 1$번째 자리에서 시작하며, 1번째 자리에서 시작하는 것이 아니다.
- 분모에 $10^k - 1$ 대신 10^k를 쓰는 실수: 등비급수의 첫째항은 $c\,10^{-N-k}$이지 $c\,10^{-N}$이 아니다.
- (i)에서 기약분수인지 확인하지 않는 실수: $\gcd(38, 99) = 1$인 이유를 밝혀야 한다.

STEP 너머

역(converse)도 성립한다. 즉 모든 유리수는 결국 순환하는 소수 전개를 가진다. q로 긴 나눗셈을 하면 가능한 나머지가 q가지뿐이므로 어떤 나머지는 반드시 다시 나오기 때문이다. 따라서 무리수(irrational number)는 정확히 소수 전개가 끝내 순환에 접어들지 않는 실수들이다. $1/q$의 주기의 길이는 q를 법으로 하는 10의 위수(order)와 관련이 있는데, 이는 정수론(number theory)에서 군론(group theory)을 처음 맛보는 경험이다. 데이븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruence)과 주기에 관한 이러한 아이디어를 아름답게 전개한다.

풀이

STEP I 1996, 문제 9

역학 • 탄성 끈과 에너지

STEP I 1996, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s1-q9

핵심 아이디어

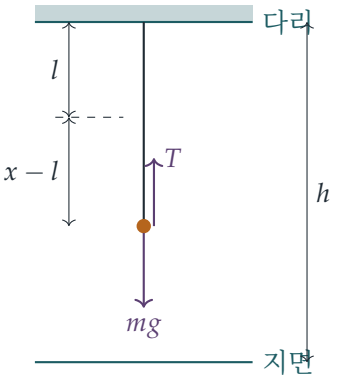
이 문제는 처음부터 끝까지 에너지 문제이다. 일을 하는 힘은 중력과 줄의 장력(tension)뿐이고 둘 다 보존력(conservative force)이므로, 운동 방정식(equation of motion)을 완전히 세울 필요가 전혀 없다. "지면에 겨우 닿지 않는다"는 것은 지면에 도달하는 바로 그 순간 속력이 0이라는 뜻이다. 최대 속력은 가속도의 부호가 바뀌는 곳, 즉 장력이 무게와 평형을 이루는 곳에서 나타난다.

풀이

뛰어내리는 사람을 다리에서 정지 상태로 출발하는 입자로, 줄을 질량이 없고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 모형화하며, 공기 저항은 무시한다. 떨어진 거리를 x라 하자. $x \leq l$일 때는 줄이 느슨하므로 자유 낙하(free fall) 상태이다. $x > l$일 때는 늘어난 길이가 $x - l$이고, 훅의 법칙에 의해 장력은

$$T = \frac{mg}{k} \cdot \frac{x - l}{l},$$

이며, 줄에 저장된 탄성 에너지(elastic energy)는 $\frac{mg}{k} \cdot \frac{(x-l)^2}{2l}$이다.



다리의 높이

가장 낮은 지점에서는 순간적으로 정지한다. 지면에 겨우 닿지 않으므로 이 가장 낮은 지점이 바로 지면이고, 이는 $x = h$이다. 분명히 $h > l$이다. 줄이 한 번도 팽팽해지지 않는다면 자유 낙하하여 상당한 속력으로 지면에 부딪힐 것이기 때문이다. 다리를 떠날 때부터 가장 낮은 지점까지 운동 에너지는 O에서 시작하여 O으로 끝나므로, 잃은 중력 퍼텐셜 에너지는 모두 줄에 저장된다.

$$mgh = \frac{mg}{k} \cdot \frac{(h-l)^2}{2l}.$$

양변에 $2kl/(mg)$를 곱하면 $2klh = (h-l)^2 = h^2 - 2hl + l^2$이므로

$$h^2 - 2hl(k+1) + l^2 = 0,$$

이 되어 원하는 식을 얻는다. 근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$h = l(k+1) \pm l\sqrt{(k+1)^2 - 1} = l\left(k+1 \pm \sqrt{k^2+2k}\right).$$

? **생각해 보기** 어느 근이 우리가 원하는 근인가? 그리고 다른 근은 애초에 왜 나타나는가?

$k > 0$이므로 $\sqrt{k^2+2k} > \sqrt{k^2} = k$이고, 따라서 음의 부호를 택하면 $h < l(k+1-k) = l$이 된다. 그런데 에너지 방정식은 줄이 $h-l$만큼 늘어났다고 가정한 것이므로 $h > l$일 때만 의미가 있다. 부적절한 근은 제곱 때문에 생긴다. 줄이 실제로는 만들어 낼 수 없는 "압축"에 대해서도 같은 $(h-l)^2$ 값을 주기 때문이다. (두 근의 곱은 l^2이므로 하나는 l보다 크고 다른 하나는 l보다 작다.) 따라서

$$h = l\left(k+1+\sqrt{k^2+2k}\right).$$

최대 속력

줄이 느슨한 동안에는 아래쪽으로 g의 가속도로 가속한다. 줄이 팽팽해지고 나면, 아래쪽을 양의 방향으로 하여 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg}{k} \cdot \frac{x-l}{l}.$$

이 값은 $x - l < kl$인 동안에는 양수이고 그 이후에는 음수이다. 따라서 늘어난 길이가 kl이 될 때까지, 즉 장력이 무게와 같아지는 지점까지는 빨라지고, 그 이후로는 느려진다. 그러므로 최대 속력은 $x = l + kl$에서 나타난다. 다리에서 이 지점까지 에너지 보존(conservation of energy)을 적용하면

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= mg(l+kl) - \frac{mg}{k} \cdot \frac{(kl)^2}{2l} \\ &= mgl(1+k) - \tfrac{1}{2}mgkl.\end{aligned}$$

양변에 2를 곱하고 m으로 나누면

$$v^2 = 2gl + 2kgl - kgl = (k+2)gl,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

- $k \to 0$이면 줄이 매우 뻣뻣해진다. 이때 $h \to l$이고(줄이 거의 늘어나지 않는다), $v^2 \to 2gl$인데, 이는 l만큼 떨어진 뒤의 자유 낙하 속력이다. 줄이 거의 즉시 사람을 멈추게 하므로 이는 옳다.
- 임의의 k와 l에 대해 운동 방정식을 수치적으로 한 단계씩 계산하면, 가장 낮은 지점과 최대 속력이 소수점 아래 다섯째 자리까지 공식과 일치한다. 예를 들어 $k = 1.5$, $l = 10\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이면 $h = 10(2.5 + \sqrt{5.25}) \approx 47.9\,\mathrm{m}$이고 $v^2 = 343$이므로 $v \approx 18.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$이다.

흔한 실수

- 줄이 팽팽해지는 순간에 최대 속력이 된다고 생각하는 것. 그 순간에는 장력이 0이므로 여전히 가속하고 있다.
- 탄성 에너지에 늘어난 길이 $x - l$ 대신 전체 낙하 거리 x를 쓰는 것.
- $h > l$인지 확인하지 않고 h의 두 근을 모두 남겨 두는 것.

STEP 너머

줄이 팽팽해지고 나면 운동은 평형 상태의 늘어난 길이 kl을 중심으로 하는 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이므로, 낙하의 후반부는 각진동수(angular frequency)가 $\sqrt{g/(kl)}$인 사인 곡선의 일부이다. 이처럼 자유 낙하와 진동자 사이를 오가는 구간별 시스템은 에너지 방법과 위상 평면(phase plane) 그림이 매끄럽지 않은 힘을 어떻게 다루는지 보여 주는 좋은 입문 사례이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 수준에서 에너지 보존과 진동을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 1996, 문제 10

역학 • 운동량 보존

> **STEP I 1996, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q10

핵심 아이디어

사용할 보존 법칙은 두 가지이다. 운동량(momentum)이 보존되고(폭발 전에는 0이었다), 폭발 후의 운동 에너지(kinetic energy)는 E이다. 질량이 어떻게 나뉘는지만 알면 이 두 조건이 두 속력을 모두 결정하므로, 상대 속력(relative speed)은 질량을 나누는 방식의 함수가 된다. 그러면 이를 최소화하는 일은 하나의 부등식으로 귀결되고, $m_1 + m_2$가 고정되어 있으므로 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이 자연스러운 도구이다.

풀이

두 조각을 입자로 모형화하고, 폭발 중에 잃는 질량이 없어서 $m_1 + m_2 = M$이라 가정하며, 폭발하는 동안 외력이 작용하지 않는다고 가정한다.



운동량. 우주선은 정지 상태에서 출발하므로 폭발 전의 전체 운동량은 0이고, 따라서 폭발 후에도 0이다. 두 운동량 $m_1\mathbf{v}_1$과 $m_2\mathbf{v}_2$는 서로 상쇄되어야 하므로, 두 조각은 한 직선을 따라 정확히 반대 방향으로 움직이고,

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = p,$$

라 하자. 여기서 $p > 0$는 공통인 운동량의 크기이다. 두 조각이 반대 방향으로 움직이므로 상대 속력은 실제로 $v_1 + v_2$이다.

에너지. 폭발 후의 운동 에너지는 모두 폭발에서 나오므로

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} = \frac{p^2M}{2m_1m_2}.$$

따라서 $p^2 = \dfrac{2Em_1m_2}{M}$이다.

상대 속력. $v_1 = p/m_1$과 $v_2 = p/m_2$를 이용하면

$$v_1 + v_2 = p\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{pM}{m_1m_2},$$

이므로

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{p^2M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2Em_1m_2}{M}\cdot\frac{M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2EM}{m_1m_2}.$$

생각해 보기 E와 M은 고정되어 있다. 우리가 자유롭게 바꿀 수 있는 것으로 남은 유일한 것은 무엇이고, 그것을 어느 쪽으로 바꾸고 싶은가?

바꿀 수 있는 것은 질량을 나누는 방식뿐이고, v_1+v_2를 가능한 한 작게 하려면 $m_1+m_2 = M$이라는 조건 아래에서 곱 m_1m_2를 가능한 한 크게 해야 한다. 산술-기하 평균 부등식에 의하여(두 질량은 모두 양수이다)

$$m_1m_2 \le \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{4},$$

이고, 등호는 정확히 $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}M$일 때 성립한다. (같은 말로, $m_1m_2 = \frac{1}{4}M^2 - \frac{1}{4}(m_1 - m_2)^2$이다.) 그러므로

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{2EM}{m_1m_2} \ge \frac{2EM}{M^2/4} = \frac{8E}{M},$$

이고, 속력은 음이 아니므로 양변에 제곱근을 취할 수 있다.

$$v_1 + v_2 \ge \left(\frac{8E}{M}\right)^{1/2}.$$

이 하한은 우주선이 똑같은 두 반쪽으로 나뉠 때 도달되며, 이때 각 조각은 속력 $\sqrt{2E/M}$으로 움직인다. 따라서 가능한 상대 속력의 최솟값은 요구한 대로 $(8E/M)^{1/2}$이다.

검산

- 똑같은 두 반쪽: 각 조각의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Mv^2$이므로 $v = \sqrt{2E/M}$이고 $2v = \sqrt{8E/M}$이 되어 하한과 일치한다.

- 극단적인 분할: $m_1 \to 0$이면 $m_1 m_2 \to 0$이고 상대 속력은 한없이 커진다. 에너지의 일부를 나누어 가진 아주 작은 조각은 매우 빠르게 움직여야 하므로 이는 타당하다.
- 단위: E/M의 단위는 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$이므로 그 제곱근은 속력이다.
- 수치적으로, $M = 7$, $E = 3$으로 두고 m_1을 $(0, 7)$ 위에서 훑어 보면 $m_1 = 3.5$에서 상대 속력의 최솟값 $1.85164\ldots$를 얻고, 이는 $\sqrt{24/7} = 1.85164\ldots$와 일치한다.

흔한 실수

- 두 조각이 왜 반대 방향으로 움직이는지 말하지 않는 것. 바로 그 사실 때문에 상대 속력이 $|v_1 - v_2|$가 아니라 $v_1 + v_2$가 된다.
- $m_1 + m_2 = M$을 이용하지 않고 m_1에 대하여 최소화하는 것. 이 제약 조건이 문제를 일차원 문제로 만들어 준다.
- $(8E/M)^{1/2}$이 하한이라는 것만 보이고, 그 값이 실제로 ($m_1 = m_2$일 때) 도달된다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

이것은 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 다루는 가장 간단한 예이다. 그 좌표계에서 두 물체로의 분열은 언제나 크기가 같고 방향이 반대인 운동량을 만들어 내며, 운동에너지는 $p^2/(2\mu)$이다. 여기서 $\mu = m_1 m_2/M$은 **환산 질량**(*reduced mass*)이다. 이 문제에서는 $(v_1 + v_2)^2 = 2E/\mu$이고, 환산 질량은 두 질량이 같을 때 가장 크다. 같은 아이디어가 원자핵 붕괴와 이체 궤도의 바탕에 깔려 있으며, Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 이를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 1996, 문제 11

역학 • 포물체 운동

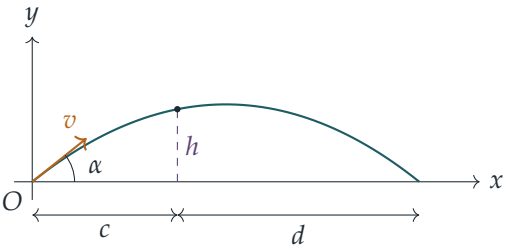
> **STEP I 1996, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q11

핵심 아이디어

포사체(projectile)의 경로는 포물선(parabola)이고, 우리는 이 경로가 지면과 만나는 두 점 $x = 0$과 $x = c + d$를 모두 알고 있다. 이차식(quadratic)은 상수배 하나를 제외하면 근(root)에 의해 완전히 결정되므로, 궤적(trajectory)은 어떤 k에 대하여 $y = kx(c + d - x)$ 꼴이어야 한다. 점 (c, h)가 k를 결정하고, 이것을 표준 궤적 방정식과 비교하면 k가 $\tan\alpha$로, 다시 v^2으로 바뀐다.

풀이

입자를 중력만 받으며(공기 저항(air resistance)은 없음) 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화하고, O를 원점으로, x축을 운동 방향의 수평 방향으로, y축을 연직 위쪽으로 잡는다. 수평 도달 거리(range)를 $R = c + d$, 그리고 $T = \tan\alpha$로 둔다.



발사각

처음 속도의 성분이 $v\cos\alpha$와 $v\sin\alpha$이므로, 시간 t 후의 위치는 $x = vt\cos\alpha$, $y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이다. $t = x/(v\cos\alpha)$를 대입하여 t를 소거하면 궤적은

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

이다. 입자는 $x = R$에서 착지하므로 그곳에서 $y = 0$이다. $R \neq 0$이므로 R로 나눌 수 있고,

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{R}. \qquad (*)$$

을 얻는다. 이것을 궤적의 식에 다시 대입하면

$$y = Tx - \frac{Tx^2}{R} = \frac{Tx(R-x)}{R}.$$

이다.

> **생각해 보기** 점 (c,h)를 사용하기 전에 $g/(2v^2\cos^2\alpha)$를 바꾸어 놓는 것이 왜 유리할까?

$(*)$를 쓰면 v가 완전히 사라지고, 미지수가 T 하나뿐인 방정식이 남기 때문이다. 기하적으로 보면, 포물선을 두 근 0과 R이 드러나도록 인수분해된 꼴로 쓴 것이다. 이제 점 (c,h)가 경로 위에 있고 $R - c = d$이므로

$$h = \frac{Tcd}{c+d}, \qquad \text{즉,} \qquad \tan\alpha = \frac{h(c+d)}{cd},$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

발사 속력

$(*)$를 정리하고 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 이용하면

$$v^2 = \frac{gR}{2T\cos^2\alpha} = \frac{gR(1+T^2)}{2T} = \frac{g}{2}\left(\frac{R}{T} + RT\right).$$

이다. 첫 번째 결과로부터 $\frac{R}{T} = \frac{cd}{h}$이고 $RT = \frac{(c+d)^2h}{cd}$이다. 따라서

$$v^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{cd}{h} + \frac{(c+d)^2h}{cd}\right),$$

이고, 이로써 문제가 해결된다.

검산

- 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해 $\frac{R}{T} + RT \geq 2R$이므로 $v^2 \geq gR$이고, 등호는 정확히 $T = 1$일 때 성립한다. 이는 주어진 속력에서 최대 도달 거리가 v^2/g이고 45°에서 얻어진다는 잘 알려진 사실과 일치한다.
- 점 (c, h)가 비행의 최고점이면 $c = d$이고 $\tan\alpha = 2h/c$이다. 이는 최고 높이가 도달 거리의 4분의 1에 $\tan\alpha$를 곱한 값이라는 표준 결과와 일치한다.
- 수치적으로 $g = 9.81$, $c = 3$, $d = 5$, $h = 2$로 두면 공식에서 $\tan\alpha = \frac{16}{15}$와 $v^2 \approx 78.64$를 얻는다. 작은 시간 간격으로 운동을 단계별로 진행시켜 보면, 입자는 $x = 3$에서 높이 2.000을 지나고 $x = 8.000$에서 착지한다.

흔한 실수

- 궤적 방정식에서 $\cos^2\alpha$를 빠뜨리거나, $\sec^2\alpha$를 $1 + \tan^2\alpha$ 대신 $1 + \tan\alpha$로 바꾸는 실수.
- "$x = c$에서 높이 h"와 "$x = c + d$에서 높이 0"이라는 두 방정식을 v와 α에 대하여 직접 풀려는 것. 이 방법도 통하지만, $(*)$를 이용해 먼저 v를 소거하는 것보다 계산이 훨씬 무겁다.

STEP 너머

이차식을 근을 이용해 쓰는 기법은 큰 아이디어의 작은 사례이다. 다항식(polynomial)은 상수배를 제외하면 영점에 의해 결정되며, 이는 보간(interpolation)과 복소수 위에서의 인수정리(factor theorem)로 이어진다. 역학에서는 v를 고정하고 α를 변화시키면 포물선들의 족이 생기는데, 그 포락선(envelope)이 포사체가 도달할 수 있는 모든 점의 경계인 "안전 포물선(parabola of safety)"이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포사체 운동과 그 확장(공기 저항 포함)을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

풀이

STEP I 1996, 문제 12

확률과 통계 • 확률표본의 최댓값

> **STEP I 1996, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q12

핵심 아이디어

채점자의 선택은 결국 $\{1, 2, \ldots, m\}$에서 서로 다른 점수 n개로 이루어진 **집합**(set)을 고르는 것이고, 이런 집합은 모두 같은 확률로 나온다. 따라서 확률(probability)은 집합의 개수를 $\binom{m}{n}$으로 나눈 값이다. 가장 큰 점수가 k라고 하면 점수 하나가 정해지고, 나머지 $n-1$개는 그보다 작은 점수 중에서 고르게 된다. 확률의 합이 1이므로 항등식(identity)은 저절로 따라 나온다. 기댓값(expectation)을 구할 때의 요령은 $k\binom{k-1}{n-1}$을 다시 하나의 이항계수(binomial coefficient)로 바꾸어 같은 항등식을 한 번 더 쓰는 것이다.

풀이

K의 분포

채점자는 서로 다른 점수 n개를 주며, 대칭성에 의해 $\{1, \ldots, m\}$의 크기가 n인 부분집합은 모두 같은 확률로 사용된 점수의 집합이 된다. (어느 답안지가 어느 점수를 받는지는 K에 아무 영향을 주지 않는다.) 이런 부분집합은 $\binom{m}{n}$개 있다.

사건 $K = k$는 집합이 k를 포함하고 나머지 $n-1$개의 점수가 모두 $\{1, \ldots, k-1\}$에 속할 때, 그리고 그때에만 일어난다. 그 $n-1$개의 점수를 고르는 방법은 $\binom{k-1}{n-1}$가지이다. 이를 위해서는 $k - 1 \geq n - 1$, 즉 $k \geq n$이어야 한다. 서로 다른 양의 정수 n개 중 가장 큰 수는 적어도 n이기 때문이다. 물론 $k \leq m$이기도 하다.



(그림은 $m = 10, n = 4, k = 7$인 경우이다.) 따라서

$$\mathrm{P}(K = k) = \binom{k-1}{n-1} \Big/ \binom{m}{n}, \qquad n \le k \le m.$$

항등식

K는 $n, n+1, \ldots, m$ 중 정확히 하나의 값을 가져야 하므로, 이 확률들의 합은 1이다.

$$\sum_{k=n}^{m} \binom{k-1}{n-1} \Big/ \binom{m}{n} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=n}^{m} \binom{k-1}{n-1} = \binom{m}{n}.$$

이 식은 $1 \le n \le m$인 **모든** 정수에 대하여 성립하며, 다음 단계에서 이 사실이 필요하다.

기댓값

정의에 의해

$$\mathrm{E}(K) = \frac{1}{\binom{m}{n}} \sum_{k=n}^{m} k \binom{k-1}{n-1}.$$

> ? **생각해 보기** 항등식을 다시 적용할 수 있도록 인수 k를 없애려면 어떻게 해야 할까?

k를 이항계수 안으로 흡수시킨다.

$$k\binom{k-1}{n-1} = \frac{k\,(k-1)!}{(n-1)!\,(k-n)!} = n \cdot \frac{k!}{n!\,(k-n)!} = n\binom{k}{n}.$$

이제 $\binom{k}{n} = \binom{(k+1)-1}{(n+1)-1}$이다. k가 n부터 m까지 변할 때 $j = k+1$은 $n+1$부터 $m+1$까지 변한다. 따라서 n과 m 대신 $n+1$과 $m+1$을 넣어 항등식을 쓰면($1 \le n+1 \le m+1$이므로 가능하다)

$$\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \sum_{j=n+1}^{m+1} \binom{j-1}{(n+1)-1} = \binom{m+1}{n+1}.$$

그러므로

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(K) &= \frac{n\binom{m+1}{n+1}}{\binom{m}{n}} = n \cdot \frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m-n)!} \cdot \frac{n!\,(m-n)!}{m!} \\ &= \frac{n(m+1)}{n+1}. \end{aligned}$$

검산

▶ $n = m$: 모든 점수가 사용되므로 확실히 $K = m$이고, 실제로 $\frac{m(m+1)}{m+1} = m$이다.

- $n = 1$: K는 점수 하나로서 $\{1, \ldots, m\}$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따르고 평균은 $\frac{m+1}{2}$이므로 일치한다.
- $m = 6, n = 2$: $\{1, \ldots, 6\}$에서 나오는 15개의 쌍을 모두 나열하면 $\mathrm{E}(K) = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$이고, 공식으로는 $\frac{2 \cdot 7}{3} = \frac{14}{3}$이다. 우리는 $1 \leq n \leq m \leq 9$인 모든 경우에 대해 부분집합을 모두 나열하여 분포, 항등식, 평균을 확인하였다.
- 답을 보는 멋진 방법이 있다. 선택된 n개의 점수는 나머지 $m - n$개의 점수를 $n + 1$개의 틈으로 나누며, 각 틈의 크기의 기댓값은 $\frac{m-n}{n+1}$로 모두 같다. 그러면 $\mathrm{E}(K) = m - \frac{m-n}{n+1} = \frac{n(m+1)}{n+1}$이다.

흔한 실수

- 분자에서는 답안지에 점수를 배정하는 순서 있는 경우를 세고, 분모에서는 순서 없는 집합을 세는 것(또는 그 반대). 일관되게만 세면 어느 쪽이든 괜찮은데, 인수 $n!$이 약분되기 때문이다.
- $\binom{k-1}{n-1}$ 대신 $\binom{k}{n}$을 쓰는 것. 이것은 가장 큰 점수가 k와 **같은** 집합이 아니라 모든 점수가 k **이하**인 집합의 개수를 센다.

STEP 너머

이 항등식은 파스칼(Pascal)의 삼각형에 나오는 "하키 스틱(hockey-stick)" 항등식이며, 여기서는 같은 대상을 두 가지 방법으로 세는 표준적인 조합론적 기법으로 증명하였다. K는 비복원추출(sampling without replacement)로 얻은 무작위 표본의 최댓값으로, **순서통계량**(order statistic)이다. "독일 전차 문제(German tank problem)"는 이 문제를 거꾸로 뒤집어, 관측된 K로부터 m을 추정한다. $\mathrm{E}(K) = \frac{n(m+1)}{n+1}$을 m에 대해 풀면 불편추정량(unbiased estimator) $\frac{n+1}{n}K - 1$을 얻는다. 순서통계량과 세기 논법에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 보라.

풀이

STEP I 1996, 문제 13

확률과 통계 • 이산확률분포와 기댓값

STEP I 1996, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s1-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.11 절 **우표, 컵, 그리고 e**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/stamps-and-e.html

핵심 아이디어

게임은 처음으로 틀리게 추측하는 순간 끝나므로, $N = k$는 "컵이 $2, 3, \ldots, k-1$개일 때는 맞히고, 컵이 k개일 때 틀린다"는 뜻이다. 이 확률들을 곱하면 분모에 계승(factorial)이 나타나고, 합 속에 계승이 보이면 지수급수(exponential series) $e^x = \sum x^n/n!$가 곧 등장하리라는 강한 신호이다. 기댓값(expectation)을 구하는 요령은 k를 $k!$와 약분하여 각 합이 $\sum 1/n!$의 첨자를 평행이동한 꼴이 되도록 만드는 것이다.

풀이

N의 확률분포

컵 c개가 뒤섞여 있으면 짐은 사실상 무작위로 추측하는 셈이므로, 확률 $1/c$로 맞히고 확률 $1 - 1/c$로 틀린다. 매 회마다 새로 섞으므로 각 회는 서로 독립(independent)이다.

컵은 항상 적어도 두 개 있으므로 $N \geq 2$이다. $k \geq 2$일 때, 사건 $N = k$는 짐이 컵이 $2, 3, \ldots, k-1$개일 때 올바르게 추측하고 컵이 k개일 때 실패하는 경우에 정확히 일어난다. 독립성에 의하여

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N = k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{k-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{k-1}{k} \\ &= \frac{k-1}{k!}, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

이다. ($k=2$일 때는 올바른 추측들의 곱이 빈 곱이 되어, 마땅히 그래야 하듯 $\frac{1}{2}$을 얻는다.)

이와 동치인 깔끔한 꼴도 눈여겨볼 만하다. $N>k$는 짐이 컵이 $2,\dots,k$개일 때 모두 맞혔다는 뜻이므로

$$\mathrm{P}(N>k)=\frac{1}{k!}\qquad(k\geq 1).$$

이다. 실제로 $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}=\frac{k-1}{k!}$이므로 위의 식과 일치한다. $k\to\infty$일 때 이 값은 0으로 수렴하므로, 게임은 확률 1로 끝나고 확률들의 합은 1이다.

기댓값

k를 $k!$와 약분하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N)&=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot\frac{k-1}{k!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)}{k!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}=\mathrm{e},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $j=k-2$로 놓고 $x=1$에서 $\mathrm{e}^x=\sum_{j\geq 0}x^j/j!$를 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

분산

> **생각해 보기** 여기서는 어느 이차 적률(second moment)을 합하기가 가장 쉬운가? $\mathrm{E}(N^2)$인가, $\mathrm{E}\big(N(N-1)\big)$인가?

어느 쪽이든 된다. $k^2\,\mathrm{P}(N=k)=k\cdot\dfrac{k(k-1)}{k!}$에서 인수 $k(k-1)$이 이미 깔끔하게 약분되기 때문이다. 계산하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N^2)&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2(k-1)}{k!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{(k-2)!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j+2}{j!}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!}+2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}=\mathrm{e}+2\mathrm{e}=3\mathrm{e},\end{aligned}$$

이다. 가운데 단계에서 $\sum j/j!$의 $j=0$인 항은 0이고, $j\geq 1$일 때 $j/j!=1/(j-1)!$이다. 따라서 분산(variance)은

$$\mathrm{Var}(N)=\mathrm{E}(N^2)-\big(\mathrm{E}(N)\big)^2=3\mathrm{e}-\mathrm{e}^2=\mathrm{e}(3-\mathrm{e})\approx 0.766.$$

이다.

검산

- 꼬리 꼴 $\mathrm{P}(N > k) = 1/k!$가 보여 주듯이, 확률 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{30}, \ldots$의 합은 1이다.
- 꼬리 공식을 이용하면 $\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \mathrm{e}$이므로, 독립적인 다른 경로로 같은 답을 얻는다.
- $\mathrm{e} < 3$이므로 분산은 마땅히 그래야 하듯 양수이다. 정확한 합으로 계산하면 $\mathrm{E}(N) = 2.71828\ldots$, $\mathrm{Var}(N) = 0.76579\ldots$이고, 게임 400 000회를 모의실험한 결과 평균은 2.720, 분산은 0.767이었다.

흔한 실수

- 확률분포를 $k = 1$부터 시작하는 것: 처음부터 컵이 두 개 있으므로 $N \geq 2$이다.
- 실패한 추측에 해당하는 마지막 인수 $1 - \frac{1}{k}$를 빠뜨려 $1/(k-1)!$을 얻는 것. 이 "확률"들의 합은 1이 아니라 $\mathrm{e} - 1$이다.
- $\big(\mathrm{E}(N)\big)^2$을 빼는 대신 $\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)$이라고 쓰는 것.

STEP 너머

꼬리합 공식(tail-sum formula) $\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k)$는 $\{0, 1, 2, \ldots\}$에서 값을 갖는 모든 확률변수(random variable)에 대하여 성립하며, 대학 1학년에서 쓰는 표준적인 도구이다. 이 문제에서처럼 복잡한 기댓값 계산을 한 줄짜리 계산으로 바꾸어 주는 경우가 많다. 모든 적률을 더 깔끔하게 한데 묶는 방법은 확률생성함수(probability generating function) $G(s) = \mathrm{E}(s^N)$이다. 여기서는 $G(s) = 1 + (s-1)\mathrm{e}^s$이 되고, $G'(1) = \mathrm{e}$와 $G''(1) = 2\mathrm{e}$로부터 평균과 분산을 곧바로 얻는다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 바로 이러한 관점에서 생성함수를 전개한다.

풀이

STEP I 1996, 문제 14

확률과 통계 • 연속된 결과와 조건부확률

STEP I 1996, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s1-q14

핵심 아이디어

현재의 연속(run)이 어떻게 끝나는지에 따라 조건화(conditioning)한다. 동전의 면이 바뀌는 순간, 그 이전에 일어난 일은 모두 무관해진다. 이전의 연속은 끊어지고, 새 연속의 길이는 1이 된다. 따라서 앞면이 나온 뒤에는 뒷면이 나오는 순간 게임이 "다시 시작"되며, 그 상태는 맨 처음 던진 결과가 뒷면이었을 때와 정확히 같다. 그 반대도 마찬가지이다. 이로부터 미지수 두 개에 대한 일차방정식(linear equation) 두 개를 얻는다.

풀이

$x = \mathrm{P}(A \mid H)$, $y = \mathrm{P}(A \mid T)$라 하자. 모든 던지기는 서로 독립(independent)이다. $r, s \geq 1$이라 한다.

$\mathrm{P}(A \mid H)$에 대한 방정식

첫 번째 던지기에서 앞면이 나왔다고 하자. 이제 앞면 하나로 이루어진 연속이 있고, 뒷면의 연속은 아직 시작되지 않았다. 그다음 $r-1$번의 던지기(즉 2번째부터 r번째까지)를 살펴보자.

- 이들이 모두 앞면이면(확률 p^{r-1}), r번째 던지기에서 앞면 r개의 연속이 완성된다. 뒷면은 한 번도 나오지 않았으므로 뒷면 s개의 연속이 먼저 나왔을 리 없고, A가 일어난다.
- 그렇지 않으면(확률 $1-p^{r-1}$), 앞면의 연속이 길이 r에 이르기 전에 $2, \ldots, r$번째 던지기 중에 뒷면이 나온다. 그러한 첫 뒷면에서 앞면의 연속은 r에 이르지 못한 채 끊어지고, 그 이전에는 뒷면이 나온 적이 없으므로 뒷면 s개의 연속도 아직 일어나지 않았다. 이제 정확히 뒷면 하나로 이루어진 연속을 가지고 있으며, 그 이전의 어떤 것도 앞으로의 연속에

영향을 줄 수 없다.

생각해 보기 그 뒷면 이후로 A가 일어날 확률이 정확히 $\mathrm{P}(A \mid T)$인 이유는 무엇인가?

첫 번째 던지기에서 뒷면이 나온 뒤의 상황은 다음과 같다. 뒷면 하나로 이루어진 연속이 있고, 진행 중인 앞면의 연속은 없으며, 앞으로의 던지기는 과거와 독립이다. 이는 위의 두 번째 경우에서 첫 뒷면이 나온 시점의 상황과 정확히 같다. 이후의 던지기는 이전의 던지기와 독립이고, 두 연속 중 어느 것이 먼저 나오는지는 현재의 연속과 앞으로의 던지기에만 의존하므로, 그 시점부터 A가 일어날 조건부 확률은 y이다. 따라서 전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$\mathrm{P}(A \mid H) = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\mathrm{P}(A \mid T),$$

이므로 $\alpha = r - 1$이다.

$\mathrm{P}(A \mid T)$에 대한 방정식

첫 번째 던지기에서 뒷면이 나왔다고 하자. 2번째부터 s번째까지의 던지기를 살펴보자.

- 모두 뒷면이면(확률 q^{s-1}), 앞면이 나오기 전에 뒷면 s개의 연속이 완성되므로 A는 일어나지 않는다.
- 그렇지 않으면(확률 $1 - q^{s-1}$), 뒷면이 연달아 s개에 이르기 전에 앞면이 나온다. 그 앞면에서 앞면 하나로 이루어진 연속이 있고 진행 중인 뒷면의 연속은 없는데, 이는 첫 번째 던지기에서 앞면이 나온 뒤의 상황과 정확히 같다. 따라서 그 시점부터 A는 확률 x로 일어난다.

그러므로

$$\mathrm{P}(A \mid T) = \left(1 - q^{s-1}\right)\mathrm{P}(A \mid H),$$

이고 $\beta = s - 1$이다.

(극단적인 경우도 잘 들어맞는다. $r = 1$이면 첫 번째 방정식은 $x = 1$이 되는데, 앞면 하나가 이미 길이 r인 연속이므로 옳다. $s = 1$이면 두 번째 방정식은 $y = 0$이 된다.)

방정식 풀기

두 번째 방정식을 첫 번째 방정식에 대입하면

$$x = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right)x.$$

이제

$$1 - \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right) = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1},$$

이고, 이 값은 양수이다($q^{s-1}(1-p^{r-1}) \geq 0$이므로 $0 < p < 1$일 때 이 값은 $p^{r-1} > 0$ 이상이다). 따라서 이 값으로 나눌 수 있다. $D = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}$이라 쓰면

$$\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{p^{r-1}}{D}, \qquad \mathrm{P}(A \mid T) = \frac{p^{r-1}\left(1-q^{s-1}\right)}{D}.$$

마지막으로 $\mathrm{P}(H) = p, \mathrm{P}(T) = q$와 전확률 법칙에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= p\,\mathrm{P}(A \mid H) + q\,\mathrm{P}(A \mid T)\\ &= \frac{p^{r-1}\left(p+q-q^{s}\right)}{D}\\ &= \frac{p^{r-1}\left(1-q^{s}\right)}{p^{r-1}+q^{s-1}-p^{r-1}q^{s-1}},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $p + q = 1$을 이용하였다.

검산

- 대칭성: $r = s$인 공정한 동전이라면 답은 $\frac{1}{2}$이어야 한다. $p = q = \frac{1}{2}, r = s = n$이면 분자는 $2^{1-n}(1-2^{-n})$이고 분모는 $2^{2-n} - 2^{2-2n} = 2 \cdot 2^{1-n}(1-2^{-n})$이므로 $\frac{1}{2}$을 얻는다.
- 작은 경우: $r = 1$이면 $\mathrm{P}(A) = 1 - q^s$인데, 이는 처음 s번의 던지기가 모두 뒷면은 아닐 확률이므로 옳다.
- $p = \frac{1}{2}, r = 3, s = 2$일 때 공식은 $\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{2}{5}, \mathrm{P}(A \mid T) = \frac{1}{5}, \mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$을 준다. 전체 마르코프 연쇄(Markov chain)를 정확히 풀어 이를 확인하였고, 200 000번의 게임을 시뮬레이션한 결과는 0.298이었다.

흔한 실수

- p^{r-1} 대신 p^r을 쓰는 실수: 첫 앞면은 이미 주어졌으므로 앞면이 $r-1$개만 더 필요하다.
- $\mathrm{P}(A)$를 구하려면 마지막에 p와 q로 가중해야 한다는 것을 잊는 실수. 조건부 확률만으로는 답이 되지 않는다.

STEP 너머

이 논증은 마르코프 연쇄의 **첫 단계 분석**(*first-step analysis*)이다. 상태는 "현재의 면과 연속의 길이"이고, 다시 시작되는 성질이 바로 마르코프 성질(Markov property)이다. 같은 방법으로 앞면과 뒷면으로 이루어진 임의의 패턴에 대한 흡수 확률(absorption probability)과 기대 대기 시간(expected waiting time)을 구할 수 있으며, 이는 어떤 패턴이 놀랍게도 다른

패턴을 이기는 페니 게임(Penney's game)으로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 마르코프 연쇄와 첫 단계 분석을 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP II 1996, 문제 1

순수수학 • 이항급수의 계수

STEP II 1996, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s2-q1

핵심 아이디어

세 괄호의 곱에서 어떤 항의 계수(coefficient)는 각 괄호에서 항을 하나씩 골라 지수의 합이 목표가 되도록 하는 모든 방법에 대한 합이다. (i)에서는 이것이 유한한 경우를 꼼꼼하게 정리하여 세는 일이 된다. (ii)에서는 계수 $1, -2, 3, -4, \ldots$가 $(1+x)^{-2}$의 계수임을 알아볼 수 있고, 괄호에 추가된 항들은 정확히 x^6에서 잘라 낸 부분이 드러나지 않도록 하는 데 필요한 항들이다.

풀이

소문항 (i)

괄호를 $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$로 쓰자. 여기서

$$a_k = (-1)^k(k+1), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

세 인수에서 각각 $a_p x^p$, $a_q x^q$, $a_r x^r$를 고르면, 이 선택은 정확히 $p+q+r = 6$일 때 x^6에 기여한다. 따라서 구하는 계수는

$$\sum_{\substack{p+q+r=6 \\ 0\le p,q,r\le 4}} a_p a_q a_r.$$

이다. 모든 항의 부호는 $(-1)^{p+q+r} = (-1)^6 = +1$이므로 부호는 무시하고 곱 $(p+1)(q+1)(r+1)$을 모두 더하면 된다.

생각해 보기 지수를 고르는 방법을 하나도 빠뜨리거나 두 번 세지 않으려면 어떻게 해야 할까?

합이 6이고 각 원소가 4 이하인 순서 없는 세 쌍 $\{p, q, r\}$을 나열한 다음, 각각을 (서로 구별되는) 세 괄호에서 가져오는 순서의 수를 곱한다. 원소가 모두 다르면 순서는 6가지, 정확히 두 개가 같으면 3가지, 세 개가 모두 같으면 1가지이다.

지수	곱 $(p+1)(q+1)(r+1)$	순서의 수	기여
$4,2,0$	$5\cdot 3\cdot 1 = 15$	6	90
$4,1,1$	$5\cdot 2\cdot 2 = 20$	3	60
$3,3,0$	$4\cdot 4\cdot 1 = 16$	3	48
$3,2,1$	$4\cdot 3\cdot 2 = 24$	6	144
$2,2,2$	$3\cdot 3\cdot 3 = 27$	1	27

가능한 경우는 이것이 전부이다. 가장 큰 원소는 4, 3, 2 중 하나이고($3\times 1 < 6$이므로 이보다 작을 수 없고, 4를 넘을 수도 없다), 가장 큰 원소 각각에 대해 나머지를 더 작은 두 부분으로 나누는 모든 방법을 나열하였다. 더하면

$$90 + 60 + 48 + 144 + 27 = 369,$$

이므로 x^6의 계수는 $\boxed{369}$이다.

소문항 (ii)

이제 괄호는 $Q(x) = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k(k+1)x^k$이다. $|x| < 1$에서 성립하는 이항전개(binomial expansion)에 의해

$$(1+x)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k,$$

이다. $\binom{-2}{k} = \frac{(-2)(-3)\cdots(-k-1)}{k!} = (-1)^k(k+1)$이기 때문이다. 따라서 $Q(x)$는 $(1+x)^{-2}$의 전개를 x^6항 다음에서 잘라 낸 것이다. 즉 어떤 멱급수(power series) $R(x)$에 대해

$$(1+x)^{-2} = Q(x) + x^7R(x)$$

이다.

> **생각해 보기** 빠진 꼬리 부분 $x^7R(x)$가 세제곱에서 x^6의 계수에 영향을 주지 않는 까닭은 무엇일까?

세제곱하면

$$(1+x)^{-6} = Q(x)^3 + 3Q(x)^2\,x^7R(x) + 3Q(x)\,x^{14}R(x)^2 + x^{21}R(x)^3.$$

첫째 항을 제외한 모든 항은 x^7에 멱급수를 곱한 꼴이므로 x^7보다 낮은 차수의 x를 포함하지 않는다. 따라서 $Q(x)^3$에서 x^6의 계수는 $(1+x)^{-6}$에서 x^6의 계수와 같다. (달리 말하면, 지수의 합이 6이 되는 곱은 어느 인수에서도 차수가 7 이상인 항을 쓸 수 없다.)

다시 이항전개에 의해

$$\binom{-6}{6} = \frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{6!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{720} = \binom{11}{5} = 462.$$

따라서 $Q(x)^3$에서 x^6의 계수는 $\boxed{462}$이다.

검산

소문항 (ii)는 소문항 (i)을 독립적으로 검산할 수단이 된다. 두 괄호는 $-6x^5$와 $7x^6$항에서만 다르므로, $462 - 369$는 이 두 항 중 하나를 사용하는 모든 기여의 합이어야 한다. $7x^6$을 사용하는 항은 나머지 두 괄호에서 1을 골라야 한다. 위치가 3가지이고 각각 7을 주므로 합은 21이다. $-6x^5$를 사용하는 항은 나머지 두 괄호에서 $-2x$와 1을 골라야 한다. 배열은 $3 \times 2 = 6$가지이고 각각 $(-6)(-2)(1) = 12$를 주므로 합은 72이다. 실제로 $21 + 72 = 93 = 462 - 369$이다. 컴퓨터로 세제곱을 전개하면 곧바로 369와 462를 얻는다.

흔한 실수

- 순서의 수를 세는 것을 잊는 실수: 지수 $4, 2, 0$은 세 괄호에서 1가지가 아니라 6가지 방법으로 나올 수 있다.
- 괄호가 x^4에서 끝나는 소문항 (i)에서 원소 5나 6을 포함한 세 쌍을 넣는 실수.
- 항마다 부호를 걱정하는 것: 지수의 합은 항상 6이므로 모든 기여는 양수이다.

STEP 너머

(ii)의 논증은 **형식적 멱급수**(*formal power series*) 이론의 출발점이다. 급수는 수렴(convergence)을 전혀 생각하지 않고 계수끼리 곱할 수 있으며, 곱에서 x^n의 계수는 각 인수의 x^n까지의 항에만 의존한다. 이렇게 수열을 생성함수(generating function)를 통해 다루는 것은 강력한 세기 도구이다. 예를 들어 $(1-x)^{-m}$에서 x^n의 계수는 n을 음이 아닌 정수 m개의 순서 있는 합으로 나타내는 방법의 수이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이런 종류의 전개를 다루는 STEP 형식의 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 1996, 문제 2

순수수학 • 비선형 연립방정식

> **STEP II 1996, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q2

핵심 아이디어

주어진 방정식들은 x, y, z에 대해 선형(linear)이 아니지만, 모든 항은 yz, zx, xy라는 단 세 가지 곱 중 하나이다. 이 세 곱을 미지수로 보면 연립방정식은 세 개의 **선형** 방정식이 되고, 소거법(elimination)으로 풀 수 있다. 세 곱을 모두 곱하면 $(xyz)^2$을 얻고, xyz를 각 곱으로 차례로 나누면 각각의 변수를 되찾을 수 있다.

풀이

선형 연립방정식의 변장

다음과 같이 놓는다.

$$a = yz, \qquad b = zx, \qquad c = xy.$$

그러면 세 방정식은 다음과 같다.

$$2a + b - 5c = 2, \tag{1}$$

$$a - b + 2c = 1, \tag{2}$$

$$a - 2b + 6c = 3. \tag{3}$$

(2)에서 $a = 1 + b - 2c$이다. 이를 (1)에 대입하면

$$2(1 + b - 2c) + b - 5c = 2 \quad \Longrightarrow \quad 3b - 9c = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3c.$$

(3)에 대입하면

$$(1 + b - 2c) - 2b + 6c = 3 \quad \Longrightarrow \quad -b + 4c = 2.$$

$b = 3c$를 이용하면 $c = 2$이므로 $b = 6$이고 $a = 1 + 6 - 4 = 3$이다. 계수 행렬(coefficient matrix)의 행렬식(determinant)이 $-3 \neq 0$이므로, 이것이 선형 연립방정식의 **유일한** 해이다.

$$yz = 3, \qquad zx = 6, \qquad xy = 2.$$

$xyz = \pm 6$임을 보이기

세 곱을 모두 곱하면

$$(yz)(zx)(xy) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2 = 3 \times 6 \times 2 = 36,$$

이므로 요구한 대로 $xyz = 6$ 또는 $xyz = -6$이다.

> **생각해 보기** 이제 xyz와 yz, zx, xy를 각각 알고 있다. x 하나만 따로 구하려면 어떻게 해야 할까?

어느 곱도 0이 아니므로 x, y, z 중 어느 것도 0이 아니고, 따라서 나눗셈을 할 수 있다.

$$x = \frac{xyz}{yz}, \qquad y = \frac{xyz}{zx}, \qquad z = \frac{xyz}{xy}.$$

가능한 값

$xyz = 6$이면 $x = 6/3 = 2$, $y = 6/6 = 1$, $z = 6/2 = 3$이다.

$xyz = -6$이면 $x = -2$, $y = -1$, $z = -3$이다.

위의 각 단계는 모두 필연적이었으므로 이들이 유일한 후보이며, 둘 다 원래 방정식을 만족한다(방정식에는 두 변수의 곱만 나타나므로 세 변수의 부호를 모두 바꾸어도 방정식은 변하지 않는다). 따라서

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) \quad \text{또는} \quad (x, y, z) = (-2, -1, -3).$$

검산

$(2, 1, 3)$을 대입하면 $yz = 3$, $zx = 6$, $xy = 2$이므로 좌변은 각각 $6 + 6 - 10 = 2$, $3 - 6 + 4 = 1$, $3 - 12 + 12 = 3$이다. 세 식 모두 일치한다. $|p| \leq 12$, $1 \leq q \leq 4$인 분수 p/q로 이루어진 모든 세 쌍을 컴퓨터로 탐색한 결과 정확히 위의 두 해만 찾아졌고, 정확한 산술 계산으로 선형 연립방정식의 유일한 해가 $(a, b, c) = (3, 6, 2)$임을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $(xyz)^2 = 36$의 제곱근을 각 변수마다 따로 취하여, 예를 들어 $x = \pm 2, y = \pm 1, z = \pm 3$을 서로 독립적으로 쓰는 것. 그러면 여덟 개의 세 쌍이 나오지만 실제로 성립하는 것은 두 개뿐이다. xyz의 부호는 하나로 정해지므로 부호들이 서로 연결되어 있기 때문이다.
- 음의 제곱근을 잊고 $(2, 1, 3)$만 답으로 제시하는 것.

STEP 너머

다루기 까다로운 식에 새 이름을 붙여 비선형(nonlinear) 문제를 선형 문제로 바꾸는 기법은 로그를 취하여 $y = Ae^{kx}$ 같은 곡선을 맞추는 일부터 치환으로 미분방정식(differential equation)을 푸는 일까지 어디에서나 쓰인다. 일단 연립방정식이 선형이 되면 행렬과 행렬식이 해가 유일한지를 곧바로 알려 주는데, 이것이 선형대수학(linear algebra) 첫 강좌의 출발점이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 바로 이런 정신으로 소거법과 행렬식을 전개한다.

풀이

STEP II 1996, 문제 3

순수수학 • 수학적 귀납법을 이용한 피보나치 항등식

STEP II 1996, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것이 점화식(recurrence)에서 나오므로 귀납법(induction)이 자연스러운 도구이다. 곱 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$에 대해서는 연속한 값을 비교하는 것이 요령이다. 점화식을 한 번 쓰면 각 값이 바로 앞 값에 마이너스를 붙인 것이 된다. 덧셈 공식(addition formula)에 대해서는 k에 대한 귀납법을 쓰되, 귀납 가정(inductive hypothesis)이 모든 n에 대하여 한꺼번에 성립하도록 하는 것이 깔끔한 방법이다. 그러면 n 대신 $n+1$을 넣어 가정을 적용할 수 있다.

풀이

처음 몇 개의 값

$n = 1, 2, 3$일 때 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$을 쓰면

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \qquad F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \qquad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$

이므로 요구된 대로이다. 계속하면

$$F_5 = 3 + 2 = 5, \qquad F_6 = 5 + 3 = 8, \qquad F_7 = 8 + 5 = 13.$$

곱 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

$n \geq 1$에 대하여 $C_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$이라 하자. 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6
$F_{n+1}F_{n-1}$	$1 \cdot 0$	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 1$	$5 \cdot 2$	$8 \cdot 3$	$13 \cdot 5$
F_n^2	1	1	4	9	25	64
C_n	-1	1	-1	1	-1	1

값의 부호가 번갈아 바뀌므로 다음과 같이 추측한다.

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{모든 정수} n \geq 1.$$

생각해 보기 점화식만 써서 C_n에서 C_{n+1}로 어떻게 넘어갈 수 있을까?

C_{n+1}에서 첨자가 큰 쪽을 전개한다. $n \geq 1$일 때

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 && \text{(점화식: } F_{n+2}\text{)} \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} && \text{(이유: } F_{n+1} - F_n = F_{n-1}\text{, 단} n \geq 1\text{)} \\ &= -C_n. \end{aligned}$$

이제 귀납법은 바로 끝난다. 기저 단계(base case)는 $C_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$이다. 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $C_n = (-1)^n$이면 $C_{n+1} = -C_n = (-1)^{n+1}$이다. 따라서 귀납법에 의하여

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{모든 정수} n \geq 1.$$

덧셈 공식

각 양의 정수 k에 대하여 $P(k)$를 다음 명제라 하자.

$$F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{모든 양의 정수} n.$$

기저 단계 $k = 1$. 우변은 $F_1F_{n+1} + F_0F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 0 = F_{n+1}$이고, 이는 좌변과 같다. 따라서 $P(1)$이 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하고, n을 임의의 양의 정수라 하자.

생각해 보기 가정은 F_{n+k}에 관한 것인데, 우리에게 필요한 것은 F_{n+k+1}이다. 가정에 어떤 n을 넣어야 할까?

$P(k)$는 모든 양의 정수에 대하여 성립하므로, n 대신 $n+1$을 넣어 적용할 수 있다. $(n+1)+k = n+(k+1)$이기 때문이다.

$$\begin{aligned} F_{n+(k+1)} = F_{(n+1)+k} &= F_kF_{n+2} + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(적용: } P(k)\text{, 대입: } n+1\text{)} \\ &= F_k(F_{n+1} + F_n) + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(점화식: } F_{n+2}\text{)} \\ &= (F_k + F_{k-1})F_{n+1} + F_kF_n \\ &= F_{k+1}F_{n+1} + F_kF_n && \text{(점화식, } k \geq 1\text{)}. \end{aligned}$$

이것이 바로 이 n에 대한 $P(k+1)$이고, n은 임의였다. 따라서 귀납법에 의하여 $P(k)$는 모든 양의 정수 k에 대하여 성립한다. 즉,

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \qquad \text{모든 양의 정수} n, k,$$

이므로 요구된 대로이다.

(다른 방법으로, n을 고정하고 k에 대한 2단계 귀납법을 쓸 수도 있다. $k = 1$과 $k = 2$를 확인한 다음, $k-1$과 k에 대한 식을 더하면 된다. 두 방법 모두 괜찮지만, 위의 방법은 기저 단계가 하나만 필요하다.)

검산

- $n = 6$일 때 카시니(Cassini) 항등식: $F_7 F_5 - F_6^2 = 13 \cdot 5 - 64 = 1 = (-1)^6$.
- $n = 3, k = 4$일 때 덧셈 공식: $F_7 = 13$이고 $F_4 F_4 + F_3 F_3 = 9 + 4 = 13$.
- $k = n$으로 놓으면 $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$이다. $n = 3$이면 $F_6 = 2 \cdot (3+1) = 8$이다.

컴퓨터로 곱 공식은 $1 \le n < 150$에 대하여, 덧셈 공식은 모든 $1 \le n, k < 90$에 대하여 확인하였다.

흔한 실수

- 부호를 거꾸로 쓰는 것: $C_1 = -1$이므로 답은 $(-1)^{n+1}$이 아니라 $(-1)^n$이다.
- 덧셈 공식에서 n을 고정한 채 k에 대한 귀납법을 쓰고는 가정을 $n+1$에서 사용하는 것: 이는 가정이 모든 n에 대하여 진술되어 있을 때에만 정당하다.
- $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$을 쓰면서 이것이 $n \ge 1$을 필요로 한다는 점을 밝히지 않는 것.

STEP 너머

두 항등식은 모두 하나의 행렬(matrix) 사실이 드리운 그림자이다. 바로 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$이다. 행렬식(determinant)을 취하면 곱 공식(카시니 항등식(Cassini's identity))이 곧바로 나오고, $M^{n+k} = M^k M^n$으로 쓰면 덧셈 공식이 나온다. 카시니 항등식은 연속한 피보나치 수(Fibonacci numbers)가 서로소(coprime)임도 보여 주며, 덧셈 공식과 함께 쓰면 $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$이라는 놀라운 결과를 증명할 수 있다. 이런 종류의 정수론을 탐구하기에는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 좋은 출발점이며,

Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 고윳값(eigenvalue)을 통해 피보나치 수를 다룬다.

풀이

STEP II 1996, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 1996, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q4

핵심 아이디어

제곱근 $\sqrt{1+x}$와 $\sqrt{1-x}$를 보면 $x = \cos t$로 치환(substitution)하고 싶어진다. 반각 공식(half-angle formulae)이 $1 \pm \cos t$를 완전제곱식으로 바꿔 주기 때문이다. 제곱근이 사라지고 나면 합 $\cos\theta + \sin\theta$는 하나의 코사인으로 합쳐지고, 분모 전체가 $1 + \cos$(어떤 각)의 꼴이 되는데, 이것 역시 완전제곱식이다. 마지막 치환은 적분 구간을 원점 중심으로 옮겨서 분자가 $\cos 4u$가 되도록 하는데, 바로 이 때문에 항등식(identity)을 먼저 증명하는 것이다.

풀이

항등식

$c = \cos u$로 두고 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$을 두 번 쓰면

$$\begin{aligned}\cos 4u &= 2\cos^2 2u - 1 = 2\left(2c^2 - 1\right)^2 - 1 \\ &= 2\left(4c^4 - 4c^2 + 1\right) - 1 = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,\end{aligned}$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

첫 번째 치환

$x = \cos t$로 두면 $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$이다. x가 -1에서 1까지 변할 때 t는 π에서 0까지 감소한다. 음의 부호가 적분 구간의 위끝과 아래끝을 다시 뒤집으므로

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t} + \sqrt{1-\cos t} + 2}\,\mathrm{d}t.$$

를 얻는다. 이제 $1 + \cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$이고 $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$이다.

생각해 보기 $\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}$는 정말 $\sqrt{2}\,|\cos\frac{t}{2}|$가 아니라 $\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$인가?

일반적으로는 절댓값이 되어야 하지만, 여기서는 $0 \le t \le \pi$이므로 $0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$이고, $\cos\frac{t}{2}$와 $\sin\frac{t}{2}$가 모두 음이 아니다. 바로 이 때문에 (예컨대 $[-\pi, 0]$이 아니라) $t \in [0, \pi]$를 택하는 것이 중요하다. 따라서

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t} &= \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{t}{2}+\sin\tfrac{t}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

이다. $v = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$로 두면 $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = 2v$이므로 분모는

$$2 + 2\cos 2v = 2(1+\cos 2v) = 4\cos^2 v = 4\cos^2\left(\tfrac{t}{4}-\tfrac{\pi}{8}\right),$$

이고, 따라서

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4\cos^2\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

가 되어 원하는 식을 얻는다.

두 번째 치환

$u = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$로 두면 $t = 4u + \frac{\pi}{2}$이고 $\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$이다. 적분 구간의 끝 $t = 0$과 $t = \pi$는 각각 $u = -\frac{\pi}{8}$과 $u = \frac{\pi}{8}$이 된다. 분자는

$$\sin t = \sin\left(4u + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos 4u,$$

이고, 여기서 처음의 항등식이 쓰인다. 그러므로

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cos 4u}{4\cos^2 u}\cdot 4\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left(8\cos^2 u - 8 + \sec^2 u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

이다. 이 구간에서 $\cos u \ge \cos\frac{\pi}{8} > 0$이므로 $\cos^2 u$로 나누어도 문제가 없다. $8\cos^2 u = 4 + 4\cos 2u$를 이용하면 피적분함수(integrand)는 $4\cos 2u - 4 + \sec^2 u$이므로

$$I = \Big[\,2\sin 2u - 4u + \tan u\,\Big]_{-\pi/8}^{\pi/8}.$$

이다. 괄호 안의 식은 u에 대한 기함수(odd function)이므로, 그 값은 $\frac{\pi}{8}$에서의 값의 두 배이다.

$$\begin{aligned}I &= 2\left(2\sin\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2} + \tan\tfrac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 1\right)\\ &= 4\sqrt{2} - \pi - 2,\end{aligned}$$

여기서 $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$와 주어진 $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 수치로 계산하면 $4\sqrt{2} - \pi - 2 \approx 0.51526$이다. 심프슨 공식(Simpson's rule)을 x에 대한 원래 적분, t에 대한 적분, u에 대한 적분에 각각 적용하면 모두 0.515262를 얻는다.
- 크기 확인: $[-1, 1]$에서 합 $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$는 ($x = \pm 1$에서의) $\sqrt{2}$와 ($x = 0$에서의) 2 사이에 있으므로, 피적분함수는 $\frac{1}{4}$와 $\frac{1}{2+\sqrt{2}} \approx 0.293$ 사이에 있다. 따라서 $0.5 \leq I \leq 0.586$이고, 0.515는 이 범위에 들어맞는다.
- $t = 0$에서 분모 $4\cos^2(-\frac{\pi}{8})$는 $\sqrt{2} + 0 + 2$와 같아야 한다. 실제로 $4\cos^2\frac{\pi}{8} = 2(1 + \cos\frac{\pi}{4}) = 2 + \sqrt{2}$이다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$의 음의 부호를 빠뜨리거나 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸는 것을 잊어서 $-I$를 얻는 것.
- $[0, \pi]$에서 $\cos\frac{t}{2} \geq 0$임을 언급하지 않고 $\sqrt{1+\cos t} = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$라고 쓰는 것.
- $\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$의 인수 4를 빠뜨리는 것. 이 4는 분모의 4와 정확히 약분된다.

STEP 너머

제곱근을 "유리화"하는 $x = \cos t$ 같은 치환은 더 일반적인 사실의 특수한 경우이다. x와 $\sqrt{1-x^2}$(또는 이와 비슷한 이차 무리식)의 유리함수(rational function)인 피적분함수는 삼각함수 치환이나 $t = \tan\frac{\theta}{2}$ 치환으로 언제나 유리함수로 바꿀 수 있고, 그러면 초등함수(elementary function)로 적분할 수 있다. 대학에서는 이것의 체계적인 형태와 함께 그 한계도 배운다. 삼차나 사차 무리식이 나오면 타원적분(elliptic integral)이 생기는데, 이것은 초등함수로 나타낼 수 없다. 이런 유형의 문제를 더 많이 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP II 1996, 문제 5

순수수학 • 1의 거듭제곱근

> **STEP II 1996, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q5

핵심 아이디어

이 4차식(quartic)은 **회문 다항식**(*palindromic polynomial*)이다. 즉 계수를 앞에서 읽으나 뒤에서 읽으나 같다. z^2으로 나누면 항들이 z^2+z^{-2}와 $z+z^{-1}$로 묶이고, 둘 다 $u=z+z^{-1}$로 나타낼 수 있으므로 z에 대한 4차식이 u에 대한 2차식(quadratic)으로 줄어든다. 후반부에서는 이 4차식이 z^5-1에서 $z-1$을 인수로 빼낸 뒤 남는 인수임을 알아차린다. 따라서 그 근은 1의 5제곱근(fifth roots of unity)이다. 같은 네 수에 대한 두 가지 표현을 비교하면 삼각함수(trigonometric functions)의 정확한 값을 얻는다.

풀이

u의 값

$z=0$은 $(*)$를 만족하지 않으므로 z^2으로 나눌 수 있다.

$$z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0.$$

이제 $u^2=(z+z^{-1})^2=z^2+2+z^{-2}$이므로 $z^2+z^{-2}=u^2-2$이다. 방정식은

$$u^2-2+u+1=0, \qquad \text{즉} \qquad u^2+u-1=0,$$

이 되고, 따라서

$$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{또는} \quad u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

z의 값

$z + z^{-1} = u$로부터 $z^2 - uz + 1 = 0$을 얻으므로

$$z = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2}.$$

$u^2 = 1 - u$를 이용하면 판별식(discriminant)은 $u^2 - 4 = -3 - u$이고, 이는 두 u 값 모두에 대해 음수이다(각 경우 $|u| < 2$이므로). 따라서 근은 실수가 아니다.

$$z = \frac{u \pm i\sqrt{3 + u}}{2}.$$

$u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$이면 $3 + u = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$이고, $u = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$이면 $3 + u = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$이다. $\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$로 쓰면 $(*)$의 네 해는

$$z = \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{그리고} \qquad z = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

각 u 값은 두 개의 z 값(한 쌍 z, z^{-1}로, 여기서는 서로 켤레복소수(complex conjugates)이다)을 주고, 4차식의 근은 정확히 네 개이므로 이것이 모든 근이다.

$z^5 = 1$과의 연결

전개하면

$$(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1,$$

인데, 가운데 항들이 연쇄적으로 소거(telescope)되기 때문이다. 따라서 z가 $(*)$를 만족하면 둘째 인수가 0이 되어 $z^5 - 1 = 0$이다.

$z^5 = 1$의 해는 $k = 0, 1, 2, 3, 4$에 대하여 $z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$이다. $k = 0$이면 $z = 1$인데, 이는 $(*)$를 만족하지 **않는다**(좌변이 5이다). 나머지 네 개는 서로 다르며 모두 $(*)$를 만족한다. 이들에 대해서는 $z - 1 \neq 0$이므로 인수 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$이 0이 되어야 하기 때문이다. 따라서 $(*)$의 해는

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad r = 1, \quad \theta = \pm\frac{2\pi}{5}, \pm\frac{4\pi}{5}.$$

결론 끌어내기

이제 같은 네 수에 대한 두 가지 표현이 있으므로, 이들을 서로 짝지어야 한다.

생각해 보기 네 개의 무리식(surd) 표현 가운데 어느 것이 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$인가?

부호를 살펴보자. $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$이므로 수 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$는 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)가 모두 양수이다. 무리식 표현들의 실수부는 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$과 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} <$

0이므로, 그중 정확히 하나만 제1사분면(first quadrant)에 있다.

$$\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

($(0,\pi)$에 있는 다른 각인 $\frac{4\pi}{5}$는 코사인이 음수이므로, 허수부가 양수인 다른 근과 짝지어진다.) 실수부와 허수부를 각각 비교하면

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\qquad\text{그리고}\qquad\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

를 얻어 증명이 끝난다. 덤으로 $\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, $\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$도 얻는다.

검산

- $\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ\approx 0.30902$이고 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\approx 0.30902$이다. $\sin 72^\circ\approx 0.95106$이고 $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\approx 0.95106$이다.
- 네 근의 합은 -1(z^3의 계수에 마이너스를 붙인 값)이어야 한다. 실수부를 더하면 $\frac{2(-1+\sqrt{5})+2(-1-\sqrt{5})}{4}=-1$이다. 같은 말이지만, 두 u 값의 합이 -1이다.
- 각 근의 절댓값(modulus)은 1이어야 한다. 예를 들어 $\frac{(-1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})}{16}=\frac{16}{16}=1$이다.

네 무리식 표현이 모두 $(*)$와 $z^5=1$을 만족하고 $e^{\pm 2\pi i/5}$, $e^{\pm 4\pi i/5}$와 일치함을 수치로 확인하였다.

흔한 실수

- $z=1$을 제외하는 것을 잊는 실수. $z=1$은 $z^5=1$은 만족하지만 $(*)$는 만족하지 않으므로, $(*)$의 근은 다섯 개가 아니라 네 개이다.
- 근거 없이 무리식과 각을 짝짓는 실수. 어느 근이 $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$인지를 결정하는 것은 실수부의 부호이다.
- $z^2+z^{-2}=u^2$으로 써서 -2를 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

치환 $u=z+z^{-1}$은 모든 회문 다항식의 차수를 절반으로 줄인다. $\cos\frac{2\pi}{5}$를 2차방정식만 풀어서 얻을 수 있다는 것은 우연이 아니다. 가우스(Gauss)는 정n각형(regular n-gon)을 자와 컴퍼스(ruler and compass)로 작도할 수 있을 때, 그리고 그때에만 $\cos\frac{2\pi}{n}$을 제곱근만

으로 나타낼 수 있음을 보였다. 이 문제는 정오각형 작도의 바탕에 있는 대수이다. 전체 이야기는 대학 2학년 대수학 과정에서 배우는 갈루아 이론(Galois theory)이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 1의 거듭제곱근(roots of unity)을 아름다운 기하학적 관점에서 보여 준다.

풀이

STEP II 1996, 문제 6

순수수학 • 약수의 개수 세기

> **STEP II 1996, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q6

핵심 아이디어

N의 모든 약수(factor)는 각 소수(prime) p_i마다 몇 번 곱할지를 0부터 m_i까지 중에서 독립적으로 골라서 만들어진다. 이 선택의 가짓수를 세면 모든 약수의 개수가 나오고, 그다음 1과 N을 버린다. 그러고 나면 두 탐색 문제는 모두 지수(exponent)에 관한 문제가 된다. 어떤 지수 패턴이 올바른 개수를 주는지, 그리고 그 지수들을 소수에 어떻게 배치해야 N이 가장 작아지는지를 따지면 된다.

풀이

첫 예시

12의 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 12$이다. 1과 12를 빼면 $2, 3, 4, 6$이 남으므로 진약수(proper factor)는 4개이다. 16의 약수는 $1, 2, 4, 8, 16$이다. 1과 16을 빼면 $2, 4, 8$이 남으므로 진약수는 3개이다.

일반적인 개수 공식

M이 N을 나눈다고 하자. 그러면 M의 모든 소인수(prime factor)는 N의 소인수이고, 그 소인수는 M에 N보다 더 많이 나타날 수 없다. 따라서

$$M = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \qquad 0 \le a_i \le m_i.$$

역으로, 이런 꼴의 곱은 모두 N을 나눈다. 소인수분해의 유일성(uniqueness of prime factorisation)에 의해 $(a_1, \ldots, a_r)$을 다르게 고르면 서로 다른 정수 M이 나온다. 따라서 N의 약수는 이 선택들과 정확히 일대일로 대응한다. 각 a_i마다 $m_i + 1$가지 선택이 있고 이

를 독립적으로 고르므로, N의 약수는 모두

$$d(N) = (m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1)$$

개이다. $r \geq 1$이므로 $N > 1$이고, 따라서 1과 N은 **서로 다른** 두 약수이다. 이 둘을 빼면 진약수의 개수는 다음과 같다.

$$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1) - 2.$$

확인: $12 = 2^2 \cdot 3$이면 $3 \cdot 2 - 2 = 4$이고, $16 = 2^4$이면 $5 - 2 = 3$이다.

N을 작게 만드는 원리

두 소문항 모두에서 지수를 고정하고, 그 지수로 만들 수 있는 가장 작은 N을 묻는다. 두 가지 관찰로 이 문제가 해결된다.

- 가장 작은 소수들을 쓴다. 어떤 소수 q는 쓰면서 그보다 작은 소수 p는 쓰지 않았다면, q를 p로 바꾸어도 모든 지수가 그대로이므로 개수는 변하지 않고 N은 더 작아진다. 따라서 소수는 빠짐없이 $2, 3, 5, \ldots$ 이어야 한다.
- 가장 큰 지수를 가장 작은 소수에 준다. $p < q$이고 p의 지수가 a, q의 지수가 b이며 $a < b$라고 하자. 두 지수를 맞바꾸면 N에 $p^{b-a}/q^{b-a} < 1$이 곱해지고, 개수는 변하지 않는다.

따라서 지수 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$에 대하여 가장 작은 N은 $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3}\cdots$이다.

소문항 (i)

진약수가 정확히 12개여야 하므로 $d(N) = 14$이다. 각 인수 $m_i + 1$은 적어도 2이고, $14 = 2 \cdot 7$이며 7은 소수이다. 따라서 14를 각각 2 이상인 인수들의 곱으로 나타내는 방법은 두 가지뿐이다.

- 14 자체: $N = p^{13}$이고, 가장 작은 값은 $2^{13} = 8192$이다.
- 7×2: $N = p^6 q$이고, 가장 작은 값은 $2^6 \cdot 3 = 192$이다.

따라서 진약수가 정확히 12개인 가장 작은 양의 정수는 다음과 같다.

$$\boxed{192 = 2^6 \cdot 3}.$$

이 수의 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192$이고, 모두 14개이다.

소문항 (ii)

이제는 $d(N) \geq 14$이면 된다. $d(N)$이 더 이상 고정되어 있지 않으므로, 서로 다른 소수의 개수 r에 따라 경우를 나눈다. 지수를 내림차순으로 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots$와 같이 쓴다.

? **생각해 보기** 왜 (i)을 그대로 이용해 $d(N) = 14$인 경우만 보면 안 될까?

약수가 **더 많다고** 해서 N이 반드시 더 커야 하는 것은 아니기 때문이다. 지수를 여러 작은 소수에 나누어 주면 적은 비용으로 많은 약수를 얻을 수 있다. 예를 들어 $2^3 \cdot 3 \cdot 5$는 약수가 $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$개이면서 192보다 훨씬 작다. 따라서 $d(N) \geq 14$인 모든 값을 살펴보아야 한다.

- $r \geq 4$: 이때 $N \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$이다.
- $r = 3$: 이때 $d(N) = (e_1+1)(e_2+1)(e_3+1) \geq 14$이다. $e_2 = e_3 = 1$이면 $4(e_1+1) \geq 14$이어야 하므로 $e_1 \geq 3$이고 $N \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$이다. 그렇지 않으면 $e_2 \geq 2$이므로 $e_1 \geq 2$이기도 하고, $N \geq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$이다.
- $r = 2$: 이때 $e_1 \geq e_2$이고 $(e_1+1)(e_2+1) \geq 14$이다. $e_2 = 1$이면 $e_1 \geq 6$이고 $N \geq 2^6 \cdot 3 = 192$이다. $e_2 = 2$이면 $3(e_1+1) \geq 14$에서 $e_1 \geq 4$이므로 $N \geq 2^4 \cdot 3^2 = 144$이다. $e_2 \geq 3$이면 $e_1 \geq 3$이고 $N \geq 2^3 \cdot 3^3 = 216$이다.
- $r = 1$: $e_1 + 1 \geq 14$이므로 $N \geq 2^{13} = 8192$이다.

모든 경우에 $N \geq 120$이고, 실제로 $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$가 조건을 만족한다. 이 수의 진약수는 $4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 14$개이기 때문이다. 따라서 진약수가 적어도 12개인 가장 작은 양의 정수는

$$\boxed{120},$$

이고, 이 수는 실제로 진약수가 14개이다.

검산

2부터 9000까지의 모든 N에 대해 진약수의 개수를 일일이 세어 보면(brute-force) 공식 $d(N) - 2$와 일치한다. 또한 진약수가 정확히 12개인 첫 번째 N이 192이고, 진약수가 적어도 12개인 첫 번째 수가 120이라는 것(진약수는 14개이다)도 확인된다. 손으로 빠르게 확인하려면 120 바로 아래에서 약수가 많은 수들을 보면 된다. 즉 $60, 72, 84, 90, 96$과 108은 모두 약수가 12개이므로 진약수는 10개뿐이다.

흔한 실수

- 14가 아니라 $d(N) = 12$로 놓는 실수. 1과 N은 제외된다는 것을 기억하자.
- 소문항 (ii)에서도 192라고 답하는 실수. 진약수가 적어도 12개인 가장 작은 N의 진약수가 정확히 12개일 필요는 없다.
- 큰 지수를 큰 소수에 주는 실수: $2 \cdot 3^6$은 $2^6 \cdot 3$과 개수는 같지만 훨씬 크다.

STEP 너머

약수 함수(divisor function) $d(N)$은 **곱셈적**(*multiplicative*)이다. 즉 a와 b가 서로소(coprime)이면 언제나 $d(ab) = d(a)d(b)$이다. 곱 공식이 표현하는 것이 바로 이것이다. 자신보다 작은 모든 수보다 약수가 많은 수를 **고도 합성수**(*highly composite number*)라고 하며, 라마누잔(Ramanujan)이 이를 깊이 연구했다. 120도 그중 하나이며, 여기서 쓴 지수 배열 논증이 그의 분석의 출발점이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*은 약수 함수와 유일 인수분해를 다루는 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP II 1996, 문제 7

순수수학 • 좌표기하에서의 자취

> **STEP II 1996, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q7

핵심 아이디어

정사각형이 두 좌표축 모두에 대하여 대칭(symmetric)이 되도록 좌표(coordinates)를 잡는다. 그러면 각 거리는 일차식의 절댓값(modulus)이 되고, 두 곱 pr와 qs는 각각 $|y^2 - a^2|$와 $|x^2 - a^2|$가 된다. $|U| = |V|$ 꼴의 방정식은 $U = V$ 또는 $U = -V$로 나뉜다. 한 경우에서는 두 직선이, 다른 경우에서는 원이 나온다.

풀이

정사각형의 한 변의 길이를 $2a$ $(a > 0)$라 하고, 중심이 원점에 있으며 변들이 좌표축에 평행하도록 놓는다.

$$A = (-a, -a), \quad B = (a, -a), \quad C = (a, a), \quad D = (-a, a).$$

그러면 AB는 직선 $y = -a$ 위에, BC는 $x = a$ 위에, CD는 $y = a$ 위에, DA는 $x = -a$ 위에 있다. 점 $P = (x, y)$에서 수평선 $y = c$까지의 수직 거리(perpendicular distance)는 $|y - c|$이고, 수직선 $x = c$까지의 거리는 $|x - c|$이다. 따라서

$$p = |y + a|, \qquad q = |x - a|, \qquad r = |y - a|, \qquad s = |x + a|.$$

이 식들은 정사각형의 안쪽이든 바깥쪽이든 평면 위의 모든 점 P에 대하여 성립한다. 거리가 음이 아니게 만드는 것은 바로 절댓값이므로, 절댓값을 함부로 없애서는 안 된다.

두 개씩 짝지어 곱하고 $|u|\,|v| = |uv|$를 이용하면

$$pr = |(y + a)(y - a)| = |y^2 - a^2|, \qquad qs = |(x - a)(x + a)| = |x^2 - a^2|.$$

생각해 보기 여러 영역으로 나누지 않고 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$에서 절댓값을 어떻게 없앨 수 있을까?

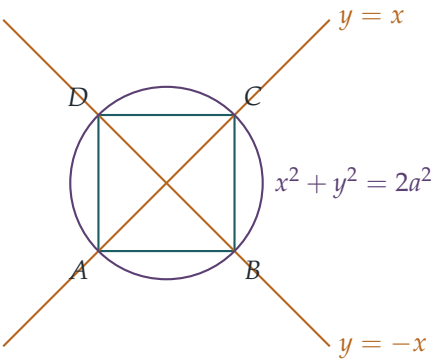
실수에 대하여 $|U| = |V|$가 성립할 필요충분조건(if and only if)은 $U = V$ 또는 $U = -V$인 것이다. 양변이 모두 음이 아니므로 $|U| = |V| \iff U^2 = V^2 \iff (U - V)(U + V) = 0$이기 때문이다. 필요충분인 단계만 사용하므로 필요조건과 충분조건을 동시에 얻는다. 따라서 $pr = qs$가 성립할 필요충분조건은

$$y^2 - a^2 = x^2 - a^2 \qquad \text{또는} \qquad y^2 - a^2 = -(x^2 - a^2).$$

첫째 경우. $y^2 = x^2$, 즉 $(y - x)(y + x) = 0$이므로 $y = x$ 또는 $y = -x$이다. 이것은 정사각형의 중심을 지나고 대각선 AC와 BD를 포함하는 두 (무한) 직선이다.

둘째 경우. $x^2 + y^2 = 2a^2$. 이것은 정사각형의 중심을 중심으로 하고 반지름이 대각선 길이의 절반인 $\sqrt{2}a$인 원이다. 따라서 이 원은 A, B, C, D를 지나는 정사각형의 외접원(circumcircle)이다.

그러므로 $pr = qs$이면 P는 두 대각선 직선 AC, BD (한없이 연장한 것) 중 하나 위에 있거나 $ABCD$의 외접원 위에 있어야 한다. 역으로(conversely), 위의 모든 단계는 거꾸로 되짚을 수 있다. P가 두 직선 중 하나 위에 있으면 $x^2 = y^2$이므로 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$이다. P가 원 위에 있으면 $y^2 - a^2 = a^2 - x^2$이고, 이 역시 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$를 준다. 어느 경우든 $pr = qs$이므로, 두 직선과 원 위의 모든 점은 P가 놓일 수 있는 위치이다. 이로써 증명이 끝난다.



생각해 보기 정사각형 바깥의 점도 정말 허용되는가? 그리고 직선은 꼭짓점에서 끝나는가?

문제는 평면 위의 어떤 점이든 허용하며, 우리의 거리 공식은 모든 곳에서 성립한다. 따라서 자취(locus)는 선분으로서의 대각선만이 아니라 각 직선 전체이다. 예를 들어 $P = (3a, 3a)$에서는 $p = 4a$, $r = 2a$, $q = 2a$, $s = 4a$이므로 $pr = qs = 8a^2$이다.

검산

- 중심 $(0,0)$은 두 직선 위에 모두 있다. $p = q = r = s = a$이므로 $pr = qs$이다.
- AB의 중점 바로 아래에 있는 원 위의 점, 즉 $(0, -\sqrt{2}\,a)$를 잡는다. 그러면 $p = (\sqrt{2}-1)a$, $r = (\sqrt{2}+1)a$이므로 $pr = a^2$이고, $q = s = a$이므로 $qs = a^2$이다.
- $(\frac{1}{2}a, 0)$처럼 자취 위에 있지 않은 점은 $pr = a^2$이지만 $qs = \frac{3}{4}a^2$이므로 조건을 만족하지 않는다.
- 수치적으로 ($a = 1.7$로 두고) 세 곡선 위의 무작위 점 30 000개에서 $pr = qs$가 10^{-9} 이내로 성립했다. $[-5,5]^2$ 위의 600×600 격자에서 $pr - qs$의 부호 변화를 조사한 결과, 두 직선과 원을 벗어난 곳에서는 영점이 발견되지 않았다.

흔한 실수

- 절댓값을 빼고 $pr = a^2 - y^2$, $qs = a^2 - x^2$로 쓰는 것. 이는 정사각형 안쪽에서만 맞고 원을 놓치게 되어 $y = \pm x$만 얻는다.
- P가 곡선 위에 있어야 한다는 것만 증명하는 것. 문제는 역도 묻고 있으므로, 직선과 원 위의 모든 점이 왜 조건을 만족하는지 밝혀야 한다.
- 직선을 대각선 **선분** AC와 BD로 서술하는 것. 이들은 직선 전체이다.

STEP 너머

이 자취는 다항식(polynomial) $(y^2 - a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2$의 영점 집합(zero set)이며, 이 다항식은 $(y - x)(y + x)(x^2 + y^2 - 2a^2)$로 인수분해(factorisation)된다. 이처럼 다항식 방정식으로 주어진 곡선이 더 단순한 조각들로 나뉘는 것은 가약(reducible) **대수 곡선**(algebraic curve)의 첫 번째 예이다. 도형의 대칭에 맞추어 좌표를 고르는 습관이 이런 인수분해를 눈에 보이게 해 준다. 이런 방식의 기하를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를, 곡선의 대수학에 대해서는 Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*를 참고하라.

풀이

STEP II 1996, 문제 8

순수수학 • 2계 미분방정식

STEP II 1996, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s2-q8

핵심 아이디어

이 방정식에는 $f(x)$와 $f(-x)$가 섞여 있으므로, 애초에 f에 대한 보통의 상미분방정식(ordinary differential equation)이 아니다. 요령은 방정식을 두 번, 즉 x에서 한 번, $-x$에서 한 번 적은 다음 더하고 빼는 것이다. 합 g와 차 h는 각각 제대로 된 상수계수 방정식을 만족하므로 여함수(complementary function)와 특수해(particular integral)로 풀 수 있고, f는 $\frac{1}{2}(g+h)$로 되찾는다.

풀이

$g(0)$과 $g'(0)$의 값

$g(x) = f(x) + f(-x)$에 $x = 0$을 대입하면 $g(0) = 2f(0) = 2$이다.

미분하면, 연쇄법칙(chain rule)에 의해 둘째 항에 음의 부호가 붙어

$$g'(x) = f'(x) - f'(-x),$$

이므로 요구한 대로 $g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$이다. ($f'(0)$의 값은 필요하지 않았다는 점에 주목하자. g는 우함수(even function)이므로 그 도함수는 기함수(odd function)이고, 따라서 0에서 값이 0이 된다.)

g에 대한 방정식

한 번 더 미분하면 연쇄법칙에서 나온 두 음의 부호가 상쇄된다.

$$g''(x) = f''(x) + f''(-x).$$

생각해 보기 $\mathrm{f}''(-x)$는 무엇인가? 주어진 방정식은 $\mathrm{f}''(x)$에 대해서만 알려 준다.

주어진 방정식은 모든 x에 대해 성립하므로 x를 모두 $-x$로 바꾸어도 된다. cos는 우함수이므로 다음을 얻는다.

$$\mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(x) = -x + 3\cos 2x.$$

이것을 원래 방정식에 더하면

$$\mathrm{f}''(x) + \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) + \mathrm{f}(x) = 6\cos 2x, \qquad \text{즉,} \qquad \mathrm{g}''(x) + \mathrm{g}(x) = 6\cos 2x,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

g 구하기

특성방정식(auxiliary equation) $m^2 + 1 = 0$의 근은 $\pm\mathrm{i}$이므로 여함수는 $A\cos x + B\sin x$이다. 특수해로 $\mathrm{g} = k\cos 2x$를 시도하면 $\mathrm{g}'' + \mathrm{g} = -4k\cos 2x + k\cos 2x = -3k\cos 2x$이므로 $k = -2$이다. 따라서

$$\mathrm{g}(x) = A\cos x + B\sin x - 2\cos 2x.$$

이제 $\mathrm{g}(0) = A - 2 = 2$에서 $A = 4$이고, $\mathrm{g}'(0) = B = 0$이다. 그러므로

$$\mathrm{g}(x) = 4\cos x - 2\cos 2x.$$

h 구하기

$\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)$에 대해

$$\mathrm{h}(0) = 0, \qquad \mathrm{h}'(x) = \mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}'(-x), \quad \text{따라서} \quad \mathrm{h}'(0) = 2\mathrm{f}'(0) = -2,$$

이고 $\mathrm{h}''(x) = \mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x)$이다. 이번에는 x에서의 방정식에서 $-x$에서의 방정식을 뺀다.

$$\mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x) = 2x, \qquad \text{즉,} \qquad \mathrm{h}''(x) - \mathrm{h}(x) = 2x.$$

생각해 보기 h 앞의 부호가 왜 $+$에서 $-$로 바뀌었는가?

뺄셈에서 f 항들은 $\mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x)$의 꼴로 나타나는데, 이는 $+\mathrm{h}(x)$가 아니라 $-\mathrm{h}(x)$이다. 그래서 이번에는 해가 삼각함수가 아니라 지수함수가 된다. 특성방정식 $m^2 - 1 = 0$에서 여함수 $C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x}$를 얻는다. 특수해로 $\mathrm{h} = px + q$를 시도하면 $-(px + q) = 2x$이므로 $p = -2, q = 0$이다. 따라서

$$\mathrm{h}(x) = C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x} - 2x.$$

조건에서 $\mathrm{h}(0) = C + D = 0$이고 $\mathrm{h}'(0) = C - D - 2 = -2$이므로 $C = D = 0$이고

$$\mathrm{h}(x) = -2x.$$

f 되찾기

g와 h의 정의를 더하면 $g + h = 2f$이므로

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(g(x) + h(x)\big) = \tfrac{1}{2}\big(4\cos x - 2\cos 2x - 2x\big) = 2\cos x - \cos 2x - x,$$

이고, 이것이 요구한 결과이다.

검산

- $f(0) = 2 - 1 - 0 = 1$이고 $f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x - 1$이므로 $f'(0) = -1$이다.
- 다시 대입하기: $f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$이고 $f(-x) = 2\cos x - \cos 2x + x$이며, 둘을 더하면 $x + 3\cos 2x$가 된다.
- 홀짝성이 맞다: 마땅히 그래야 하듯이 g는 우함수, h는 기함수로 나왔다.
- $f(x), f(-x)$ 쌍을 $x = 0$에서 $x = 3$까지 수치적으로 단계별 계산하면 $f(3) \approx -5.940155$를 얻으며, 이는 $2\cos 3 - \cos 6 - 3$과 일치한다.

흔한 실수

- 연쇄법칙의 부호를 잊는 것: $\frac{d}{dx}f(-x) = -f'(-x)$이지만 $\frac{d^2}{dx^2}f(-x) = +f''(-x)$이다.
- 방정식의 한쪽 변에서만 x를 $-x$로 바꾸는 것: 우변의 x도 $-x$가 된다.
- $h'' + h = 2x$를 얻어서 h에 삼각함수 항이 생기는 것.

STEP 너머

이것은 함수 미분방정식(functional differential equation)으로, 미지의 함수를 두 개 이상의 점에서 계산한 값이 등장한다. 우함수 부분과 기함수 부분으로 나누는 방법이 통하는 까닭은 반사 $x \mapsto -x$가 제곱하면 항등 사상이 되는 선형 사상(linear map)이기 때문이다. 따라서 그 고윳값(eigenvalue)은 ± 1이고, 모든 함수는 우함수 부분(고윳값 1)과 기함수 부분(고윳값 -1)으로 유일하게 분해된다. 각 부분에서 방정식은 보통의 상미분방정식이 된다. 대칭성에 따라 분해한다는 이 생각은 선형대수학과 푸리에 해석(Fourier analysis) 전반에 걸쳐 나타난다. 상수계수 방정식 자체에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를, 선형대수학의 관점에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 1996, 문제 9

역학 • 안정성과 질량중심

> **STEP II 1996, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q9

핵심 아이디어

모든 것은 장난감의 무게중심(centre of mass) G가 대칭축(axis of symmetry) 위의 어디에 있느냐에 달려 있다. 반구로 놓여 있을 때 탁자는 항상 반구의 평평한 면의 중심 O 바로 아래에서 장난감과 닿으므로, G가 O보다 아래에 있는지 위에 있는지에 따라 "다시 일어서는지" "넘어지는지"가 결정된다. 원뿔로 놓여 있을 때 장난감은 모선(generator) 하나 전체를 따라 탁자에 닿으며, G를 지나는 연직선이 그 접촉선과 만나기만 하면 그대로 머물러 있다.

풀이

장난감을 축에 대하여 대칭이고 밀도가 ρ인 균일한 강체(rigid body)로 모형화한다. 공통 원형 면의 중심을 O라 하고, 축을 따라 O로부터의 거리를 재되 원뿔의 꼭짓점 V 쪽을 양의 방향으로 한다.

무게중심

원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi a^2(\lambda a) = \frac{1}{3}\lambda\pi a^3$이고 그 무게중심은 $+\frac{1}{4}\lambda a$에 있다. 반구의 부피는 $\frac{2}{3}\pi a^3$이고 그 무게중심은 $-\frac{3}{8}a$에 있다. 따라서 G의 위치는

$$h = \frac{\frac{1}{3}\lambda\cdot\frac{1}{4}\lambda a - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}a}{\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{12}\lambda^2 a - \frac{1}{4}a}{\frac{1}{3}(\lambda+2)} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}.$$

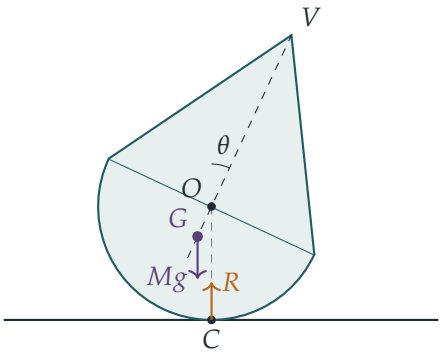
이다. 그러므로 $\lambda < \sqrt{3}$이면 G는 O보다 아래에, $\lambda = \sqrt{3}$이면 O에, $\lambda > \sqrt{3}$이면 O보다 위에 있다.

반구로 놓여 있을 때

축이 위쪽 연직 방향과 각 θ $(0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi)$를 이루도록 기울어져 있어서 반구의 곡면이 탁자 위에 있다고 하자.

? **생각해 보기** 반구는 정확히 어디에서 탁자와 닿는가?

탁자는 반구를 일부로 하는 구에 접하고, 접평면(tangent plane)은 접점에서 반지름과 수직이다. 따라서 접점 C는 θ가 무엇이든 항상 O의 **바로 아래**에 있고, O는 항상 높이 a에 있다.



(그림은 G가 O보다 아래에 있는 경우, 즉 $\lambda < \sqrt{3}$인 경우를 나타낸다.)

C에 대한 모멘트(moment)를 생각한다. 수직항력과 마찰력은 모두 C에 작용하므로, 모멘트를 갖는 것은 G에 작용하는 무게 Mg뿐이다. C로부터(즉 O를 지나는 연직선으로부터) G까지의 수평 변위는 $h\sin\theta$이며, 꼭짓점이 기울어진 쪽을 양으로 잰다.

- $\lambda < \sqrt{3}$이면 $h < 0$이다. $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$인 모든 θ에 대하여 G는 C를 지나는 연직선에 대해 꼭짓점과 반대쪽에 있다. 따라서 무게는 장난감을 $\theta = 0$ 쪽으로 되돌린다. 같은 말이지만, G의 높이는 $a + h\cos\theta = a - |h|\cos\theta$이고 이는 $\theta = 0$일 때 최소이므로, 똑바로 선 자세가 위치 에너지(potential energy)가 가장 작은 자세이다. 어느 쪽으로 보든, 반구 위의 어디에 놓더라도 장난감은 똑바로 선 자세로 움직인다(그 자세를 중심으로 흔들리다가 마찰과 공기 저항 때문에 결국 그 자세에 멈춘다).
- $\lambda > \sqrt{3}$이면 $h > 0$이다. 기울기 $\theta > 0$이 얼마이든 G는 꼭짓점과 같은 쪽에 있고, 무게는 장난감을 똑바로 선 자세에서 **더** 멀어지게 한다. 이제 G의 높이 $a + h\cos\theta$는 $\theta = 0$에서 최대이므로, 똑바로 선 자세는 불안정한 평형(unstable equilibrium)이다. 아주 조금만 기울어져도 기울기가 커져서 가장자리가 탁자에 닿고 장난감은 원뿔면 쪽으로 넘어진다. 즉 균형을 잃고 쓰러진다.

($\lambda = \sqrt{3}$일 때는 $G = O$이므로 장난감은 어떤 기울기에서도 중립 평형(neutral equilibrium)에 있다.) 이것이 증명하려던 결과이다.

원뿔로 놓여 있을 때

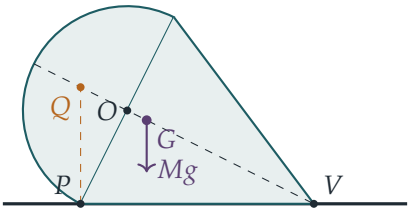
이제 장난감이 원뿔의 모선 VP를 탁자에 대고 누워 있다고 하자. 여기서 P는 가장자리 위의 점이다. 축과 VP를 지나는 평면에서 생각한다. 이 평면에 O를 원점으로 하고 $V=(0,\lambda a)$, $P=(a,0)$이 되도록 좌표축을 잡으면, 반구는 $y<0$인 쪽에 있다. VP를 따라 원뿔에 접하는 접평면은 이 평면과 수직이고, 그 자취는 직선

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}=1.$$

이다.

> **생각해 보기** 혹시 반구가 탁자를 뚫고 나와서, 원뿔이 모선을 따라 평평하게 놓일 수 없는 것은 아닐까?

그렇지 않다. 장난감의 모든 점은 이 평면에 정사영하면 원뿔의 삼각형 단면 또는 반원판 $x^2+y^2\le a^2, y\le 0$의 점으로 간다. 삼각형 위에서는 $\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le 1$이다. 반원판 위에서는 $x\le a$이고 $y\le 0$이므로 $\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le \frac{x}{a}\le 1$이며, 등호는 P에서만 성립한다. 따라서 장난감 전체는 평면의 한쪽에 있고, 선분 VP를 따라서만 평면과 닿고 다른 곳에서는 닿지 않는다.



(그림은 $\lambda=2$인 경우이다. P에서 VP에 그은 수선은 점선으로 나타냈다.)

반력은 모두 VP를 따라 작용하며 탁자에 수직이다. 따라서 장난감이 탁자 위에서 평형을 이루어 P나 V를 중심으로 넘어가지 않을 필요충분조건은 G를 지나는 연직선이 선분 VP와 만나는 것, 즉 G에서 VP에 내린 수선의 발이 V와 P 사이에 있는 것이다.

V에서 VP에 그은 수선은 축과 V에서만 만난다. P에서 VP에 그은 수선이 축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 VPQ에서 P의 각은 직각이고 PO는 빗변 VQ에 내린 높이이므로 $OP^2=OV\cdot OQ$이고, 따라서

$$OQ=\frac{a^2}{\lambda a}=\frac{a}{\lambda}.$$

이다. 즉 Q는 O보다 a/λ만큼 아래에 있다. 축 위의 점이 선분 VP 위로 정사영될 필요충분조건은 그 점이 Q와 V 사이에 있는 것이다. 따라서

$$-\frac{a}{\lambda}<h<\lambda a.$$

이어야 한다. 오른쪽 부등식은 G가 장난감 내부, V보다 아래에 있으므로 성립한다. 왼쪽 부등식은 양변에 $4\lambda(\lambda+2)/a > 0$을 곱하면

$$\frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)} > -\frac{a}{\lambda} \iff \lambda^3 - 3\lambda + 4\lambda + 8 > 0 \iff \lambda^3 + \lambda + 8 > 0,$$

이 되고, 이는 모든 $\lambda > 0$에 대하여 참이다. 따라서 G를 지나는 연직선은 항상 접촉선과 만나고, 장난감은 그 자리에 머문다. 회전 대칭성에 의해 어느 모선이 닿아 있는지도 상관없다. 그러므로 λ의 값이 무엇이든 장난감은 원뿔면으로 놓인 채 그대로 있으며, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $\lambda = \sqrt{3}$에서 공식은 $h = 0$을 준다. 원뿔의 모멘트 $\frac{1}{12}\lambda^2 a$가 반구의 모멘트 $\frac{1}{4}a$와 정확히 균형을 이룬다. 장난감을 얇은 원판으로 잘라 수치적으로 합하면 여러 λ에 대하여 h가 $10^{-5}a$ 이내로 재현된다.
- $\lambda = 1$일 때: $h = -\frac{1}{6}a$, $OQ = a$이고, G에서 내린 수선의 발은 V에서 P까지의 0.583 지점에 있다. $\lambda = 10$일 때는 0.790 지점에 있다. $(0, 50)$에서 λ의 무작위 값 20,000개를 시험했을 때, 수선의 발은 언제나 VP의 내부에 있었다.
- 극한의 경우: $\lambda \to 0$이면 장난감은 거의 반구이며$(h \to -\frac{3}{8}a)$, 반구는 잘 알려진 대로 스스로 다시 일어선다. $\lambda \to \infty$이면 긴 원뿔이 되고, G는 원뿔 자체의 무게중심을 따라 축 위로 올라간다.

흔한 실수

- 실제 접점이 아니라 **똑바로 선** 장난감의 가장 낮은 점에 대한 모멘트를 구하는 것. 실제 접점은 장난감이 구르면서 움직이지만 항상 O의 바로 아래에 있다.
- 마지막 부분에서 반구도 탁자에 닿는다고 가정하는 것. 반원판은 $y \le 0$인 쪽에 있으므로 닿지 않는다.

STEP 너머

이 흔들리는 장난감은 평형의 안정성(stability of equilibrium)을 처음으로 엿보게 해 준다. 일반적으로 평면 위를 구르는 물체는 그 무게중심이 접점에서의 표면의 곡률 중심(centre of curvature)(여기서는 O)보다 아래에 있을 때 안정하다. 같은 생각이 물에 뜬 배의 경심(metacentre)을 지배한다. 대학 1학년 과정에서 이것은 위치 에너지의 극소와 그 주위의 미소 진동(small oscillations)에 대한 공부로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An*

Introduction to Mechanics(역학 입문)는 이러한 관점에서 무게중심과 강체의 평형을 다룬다.

풀이

STEP II 1996, 문제 10

역학 • 회전하는 바퀴에서 발사된 포물체

> **STEP II 1996, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q10

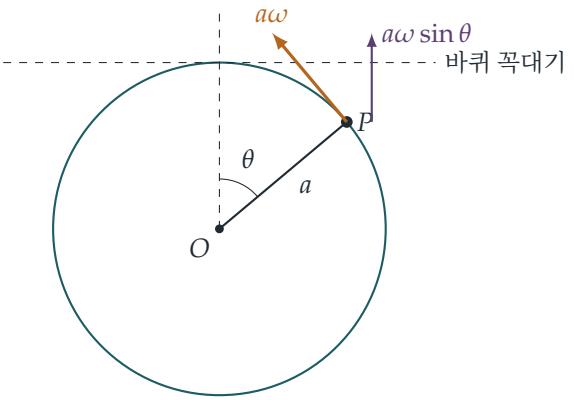
핵심 아이디어

손을 놓는 순간 주인공은 포물체(projectile)가 되며, 그 처음 위치와 속도는 바퀴 위 어디에 있었는지에 따라 정해진다. 높이에는 연직 방향 운동만 중요하므로, 최고 높이는 손을 놓은 지점의 높이에 속도의 연직 성분(vertical component)이 더해 주는 추가 높이를 합한 것이다. 이렇게 하면 높이가 손을 놓는 각 하나의 함수로 표현되고, 문제는 다음과 같이 바뀐다. 이 함수가 언제 바퀴 꼭대기보다 커질 수 있으며, 그 최댓값은 얼마인가?

풀이

문제 설정

주인공을 바퀴 테두리와 함께 움직이는 입자로 모형화하고, 공기 저항은 무시한다. O를 바퀴의 중심이라 하고, 주인공이 OP가 위쪽 연직 방향과 각 θ를 이루는 점 P에서 손을 놓는다고 하자. 단, $0 \leq \theta \leq \pi$이다. 테두리 위에서 주인공의 속력은 $a\omega$이고, 방향은 P에서의 접선(tangent) 방향이다.



P에서의 접선은 OP에 수직이므로 수평 방향과 각 θ를 이룬다. 손을 놓을 때 주인공이 바퀴 꼭대기 쪽으로 움직이고 있다면, 속도의 위쪽 성분은 $a\omega\sin\theta$이다(자주색으로 표시). 꼭대기에서 멀어지는 쪽으로 움직이고 있다면 연직 속도는 아래쪽이거나 0이므로, 손을 놓은 지점보다 높이 올라가지 못하고, 그 지점은 꼭대기보다 높지 않다. 따라서 이런 경우는 무시해도 된다.

손을 놓는 순간 O로부터의 높이는 $a\cos\theta$이다. 중력만 작용하므로 연직 속도는 $a\omega\sin\theta$에서 0으로 줄어들고, $v^2 = u^2 - 2gs$에 의해 $(a\omega\sin\theta)^2/(2g)$만큼 더 올라간다. 따라서 바퀴 꼭대기 위로 올라가는 최고 높이는

$$H(\theta) = a\cos\theta + \frac{a^2\omega^2\sin^2\theta}{2g} - a.$$

이다. $c = \cos\theta \in [-1,1]$, $k = \dfrac{a\omega^2}{2g}$라 하자. 그러면 $\sin^2\theta = 1 - c^2$이고

$$\begin{aligned}\frac{H}{a} &= c - 1 + k(1-c^2)\\ &= (1-c)\big[k(1+c) - 1\big].\end{aligned}$$

이다.

ω_0 구하기

$c = 1$일 때(꼭대기에서 손을 놓을 때) 예상대로 $H = 0$이다. $c < 1$이면 인수 $1-c$가 양수이므로, $H > 0$일 필요충분조건은 $k(1+c) > 1$이다.

> **생각해 보기** 허용되는 c의 값에 대하여 $k(1+c)$는 얼마나 커질 수 있는가?

$c < 1$이므로 $k(1+c)$는 $[0, 2k)$의 모든 값을 갖지만 $2k$에는 도달하지 못한다. 따라서

- $2k > 1$이면 $c < 1$을 1에 충분히 가깝게 잡아 $k(1+c) > 1$이 되게 할 수 있고, 주인공은 꼭대기보다 높이 올라간다.

- $2k \le 1$이면 모든 $c < 1$에 대하여 $k(1+c) < 2k \le 1$이므로, 모든 손 놓는 지점에서 $H \le 0$이고 주인공은 결코 꼭대기보다 높이 올라갈 수 없다.

조건 $2k \le 1$은 $a\omega^2 \le g$와 같다. 경계인 경우 $\omega^2 = g/a$는 "불가능한" 쪽에 속하므로, 그러한 ω의 최댓값이 존재하며 그 값은

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

이다. (이것은 바퀴 바깥쪽 꼭대기에 놓여 있는 입자가 막 접촉을 잃게 되는 각속도이기도 하다. 이때 구심가속도(centripetal acceleration) $a\omega^2$이 g와 같다.)

$\omega > \omega_0$일 때의 최고 높이

이제 $2k = a\omega^2/g = \omega^2/\omega_0^2 > 1$이다. c의 함수로서

$$\frac{H}{a} = -kc^2 + c + k - 1$$

은 위로 볼록한 이차함수이고, 도함수 $1 - 2kc$가 0이 되는 곳, 즉

$$c = \frac{1}{2k} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

에서 최대가 된다. 이 값은 0과 1 사이에 엄격하게 놓이므로 허용되는 손 놓는 지점(바퀴 꼭대기보다 조금 앞)이며, $[-1, 1]$ 전체에서의 최댓값을 준다. 대입하면

$$\frac{H_{\max}}{a} = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} + k - 1 = k - 1 + \frac{1}{4k}.$$

이다. $k = \frac{1}{2}\omega^2/\omega_0^2$이고 따라서 $\frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\omega_0^2/\omega^2$이므로

$$H_{\max} = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 주인공은 꼭대기 쪽으로 움직이는 동안 $\cos\theta = \omega_0^2/\omega^2$인 곳에서 손을 놓으면 이 높이에 도달한다.

검산

- $\omega = \omega_0$이면 공식은 0을 주어 경계인 경우와 일치한다. 또한 ω가 클 때 공식은 $a\omega^2/(2\omega_0^2) = a^2\omega^2/(2g)$처럼 커지는데, 이는 O의 높이에서 속력 $a\omega$로 똑바로 위로 던진 입자가 도달하는 높이이다. 실제로 ω가 클 때 가장 좋은 손 놓는 지점은 속도가 연직 방향인 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 근처이다.
- 단위: ω/ω_0는 무차원량이므로 $H_{\max}$는 길이이다.
- 수치로 확인하면, $a = 2\,\mathrm{m}$, $\omega = 2\omega_0$일 때 공식은 $\frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\,\mathrm{m}$를 준다. 손 놓는 지점 $\cos\theta = \frac{1}{4}$에서부터 포물체 운동을 단계적으로 계산하면 같은 값이 나오며, 모든 손 놓는 각을 탐색해 보면 이보다 나은 경우가 없음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 높이를 바퀴 꼭대기가 아니라 바퀴 중심에서부터 재는 실수. H에 있는 $-a$가 중요하다.
- 속도가 연직 방향인 $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 손을 놓는 것이 가장 좋다고 가정하는 실수. 그렇게 하면 추가로 올라가는 높이가 최대가 될 뿐, 전체 높이가 최대가 되지는 않는다.
- 최적의 $c = \omega_0^2/\omega^2$가 실제로 $[-1, 1]$ 안에 있는지 확인하는 것을 잊는 실수.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 어떤 양을 하나의 제어 변수의 함수로 나타내고 최적화하는 방법은 최적 제어(optimal control) 문제의 가장 간단한 형태이다. 이와 가까운 주제로 **궤적의 포락선**(*envelope of trajectories*)("안전 포물선(parabola of safety)")이 있다. 이것은 바퀴 위의 손 놓는 지점들에서 도달할 수 있는 모든 점의 경계로, 같은 판별식 형태의 논증으로 구할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 회전 운동을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

풀이

STEP II 1996, 문제 11

역학 • 단순 조화 운동

> **STEP II 1996, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q11

핵심 아이디어

줄이 늘어난 길이(extension), 곧 **승강기에 대한** 입자의 상대 위치를 가지고 생각한다. 지면 좌표계에서 입자에 대한 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)을 세우고 이미 알고 있는 승강기의 가속도를 빼면, 남는 것은 옮겨진 중심을 기준으로 한 단진동(simple harmonic motion, SHM)이다. 늘어난 길이가 양수인 동안에는 줄이 팽팽하게(taut) 유지되며, 단진동의 해를 보면 늘어난 길이가 얼마나 작아질 수 있는지 정확히 알 수 있다. 승강기의 가속이 멈추면 진동의 중심만 움직인다. 승강기에 대한 입자의 위치와 속도는 그대로 이어지고, 이 값들로 새로운 진폭(amplitude)이 정해진다.

풀이

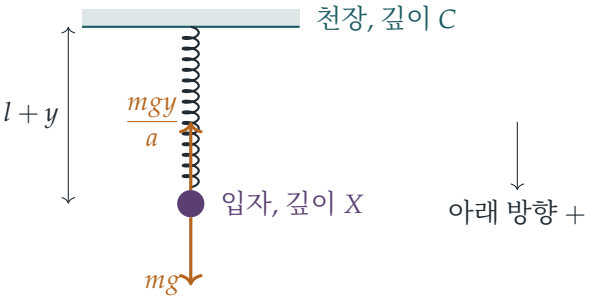
입자는 질량이 m인 것으로, 줄은 가볍고 탄성 계수(modulus)가 λ인 탄성 줄로서 팽팽한 동안 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 모형화한다. 풀이 전체에서 y는 줄의 길이가 자연 길이(natural length) l보다 긴 만큼을 나타내므로, 처음에는 $y = a$이다. 주어진 미분방정식과 맞는 해석은 이것뿐이다. 만약 y를 이전 평형 길이 $l + a$로부터 잰다면 우변은 $-f$가 될 것이다.

운동 방정식

처음 평형 상태에서는 장력 $\lambda a/l$이 무게와 균형을 이루므로

$$\frac{\lambda a}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{a},$$

이고, 늘어난 길이가 $y > 0$일 때 장력은 mgy/a이다.



지면에 고정된 한 점에서 아래쪽으로 깊이를 잰다. 천장의 깊이를 C, 입자의 깊이를 X라 하면 $X-C=l+y$이다. 승강기는 가속도 f로 내려가므로 $\ddot{C}=f$이다. 줄이 팽팽한 동안 입자에 작용하는 힘을 연직 방향(아래쪽)으로 분해하면

$$m\ddot{X}=mg-\frac{mgy}{a}.$$

$y=X-C-l$이므로 $\ddot{y}=\ddot{X}-\ddot{C}=\ddot{X}-f$이고, 따라서

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{a}y=g-f,$$

이 되어 요구한 식을 얻는다.

줄은 팽팽하게 유지된다; 진폭 af/g

$\omega^2=g/a$로 놓는다. 상수 특수해(particular solution)는 $y=(g-f)/\omega^2=a(g-f)/g$이므로 일반해(general solution)는

$$y=a-\frac{af}{g}+A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

이다. $t=0$에서 입자는 이전 평형 위치에 있고 승강기와 함께 움직이므로 $y(0)=a$, $\dot{y}(0)=0$이다. 이로부터 $A=af/g$, $B=0$을 얻는다.

$$y=a-\frac{af}{g}+\frac{af}{g}\cos\omega t.$$

이것은 $y=a-af/g$를 중심으로 하고 진폭이 af/g인 단진동이다. 승강기에 대한 입자의 위치는 $l+y$이므로, 입자는 승강기에 대하여 진폭 af/g로 진동한다.

생각해 보기 줄이 팽팽하다고 가정하는 훅의 법칙을 사용했다. 이것은 순환 논증이 아닌가?

그렇지 않다. 줄이 팽팽하다고 가정하고 방정식을 푼 다음, 그 해가 가정이 성립하는 영역을 결코 벗어나지 않음을 확인하는 것이다. y의 최솟값은

$$y_{\min}=a-\frac{2af}{g}=a\left(1-\frac{2f}{g}\right)>0,$$

이다. $f < g/2$이기 때문이다. 따라서 y는 계속 양수이고, 줄은 항상 팽팽하며, 해는 자기 모순이 없다. 조건 $f < g/2$가 필요한 곳이 바로 여기이다.

승강기의 가속이 멈춘 뒤

$t > T$에서는 $\ddot{C} = 0$이고, 같은 논법으로

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g,$$

를 얻는다. 이것은 자연스러운 평형 늘어난 길이 $y = a$를 중심으로 하는 단진동이다. $z = y - a$로 놓으면 $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$이다.

생각해 보기 이 새로운 운동의 초기 조건은 무엇인가?

$t = T$에서 승강기의 가속도는 갑자기 바뀌지만 속도 $\dot{C}$는 그렇지 않으며, 입자의 위치와 속도도 마찬가지이다. 따라서 $y = X - C - l$과 $\dot{y} = \dot{X} - \dot{C}$는 $t = T$에서 연속이다. 첫 번째 단계의 결과로부터 $t = T$에서

$$z = \frac{af}{g}(\cos\omega T - 1), \qquad \dot{z} = -\frac{af}{g}\,\omega \sin\omega T.$$

이다. 단진동 $\ddot{z} = -\omega^2 z$에서 진폭 R은 어느 순간에나 $R^2 = z^2 + \dot{z}^2/\omega^2$을 만족한다(이것은 에너지 보존(energy conservation)이며, $z = R\cos(\omega t + \varepsilon)$에 항등식 $\cos^2 + \sin^2 = 1$을 적용한 것이기도 하다). 그러므로

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\left[(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2 \omega T\right] \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\,(2 - 2\cos\omega T) \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2} \cdot 4\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega T, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $1 - \cos\theta = 2\sin^2 \frac{1}{2}\theta$를 사용했다. 따라서 새로운 진폭은

$$R = \frac{2af}{g}\left|\sin \tfrac{1}{2}\omega T\right|,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

줄은 결코 느슨해지지(slack) 않는다. 이제 늘어난 길이의 최솟값은

$$a - R \;\geq\; a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

이며, 이번에도 $f < g/2$이기 때문이다. 따라서 줄곧 $y > 0$이고 운동 방정식은 계속 유효하다.

검산

- T가 주기의 정수배, 곧 $\omega T = 2k\pi$이면, 승강기의 가속이 멈추는 바로 그 순간 입자는 $y = a$로 돌아와 있고 승강기에 대하여 정지해 있다. 공식은 진폭 0을 주며, 입자는 마땅히 그래야 하듯이 가만히 매달려 있다.
- ωT가 π의 홀수배이면, 입자는 가장 높은 점 $y = a - 2af/g$에 있고 승강기에 대하여 순간적으로 정지해 있다. 새로운 중심은 $y = a$이므로 진폭은 $2af/g$이며, 이는 공식의 최댓값이다.
- 수치적으로, 임의의 a, $f < g/2$, T에 대하여 지면 좌표계에서 전체 운동(승강기와 입자, 줄이 느슨해지면 장력을 끔)을 단계적으로 계산해 보았다. 예를 들어 $a = 0.546$, $f/g = 0.337$, $\omega T = 15.27$일 때 진폭은 0.18380과 0.35864로 나왔고, 이는 af/g 및 $\frac{2af}{g}|\sin\frac{1}{2}\omega T|$와 유효숫자 여섯 자리까지 일치했으며, 늘어난 길이는 한 번도 $a - 2af/g$ 아래로 내려가지 않았다.

흔한 실수

- y를 이전 평형 길이 $l + a$로부터 재는 것. 그러면 우변은 $g - f$가 아니라 $-f$가 된다.
- 두 번째 단계를 $\dot{y} = 0$으로 다시 시작하는 것. 일반적으로 $t = T$에서 입자는 승강기에 대하여 움직이고 있으며, 그 속도가 진폭에 기여한다.
- f의 부호를 틀리는 것. 아래쪽으로 가속하는 승강기는 유효 중력을 $g - f$로 줄이므로 진동의 중심이 올라간다.

STEP 너머

승강기의 가속도를 빼는 것은 가속 좌표계(accelerating frame)에서 생각하는 것과 같으며, 그 좌표계에서는 균일한 가속도 f가 추가적인 중력장 $-f$처럼 작용한다. 이 생각은 가상력(fictitious forces)으로 이어지고, 결국에는 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)로 이어진다. 두 번째 단계는 힘이 계단처럼 갑자기 바뀌며 구동되는 진동자의 간단한 경우이다. 그 응답은 계단 변화가 진동의 어느 시점에 일어나는지에 따라 달라지며, 이를 다루는 일반적인 도구가 그린 함수(Green's functions)(뒤아멜 원리(Duhamel's principle))이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 비관성 좌표계(non-inertial frames)와 진동자를 다룬다.

풀이

STEP II 1996, 문제 12

확률과 통계 • 최댓값과 최솟값의 분포

STEP II 1996, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s2-q12

핵심 아이디어

여러 독립(independent) 확률변수의 최댓값(maximum)을 직접 다루기는 까다롭지만, "최댓값이 작다"는 사건은 다루기 쉽다. 이 사건은 **모든** 변수가 작을 때 정확히 일어나고, 독립성 덕분에 확률을 곱할 수 있다. 그래서 먼저 누적분포함수(cumulative distribution function)를 구하고, 이를 미분하여 밀도를 얻는다. 소문항 (ii)는 그 거울상이다. **최솟값**(*minimum*)이 크다는 것은 모든 변수가 클 때와 정확히 같다.

풀이

소문항 (i)

각 X_j는 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로 $0 \le y \le 1$에 대하여 $\mathrm{P}(X_j < y) = y$이다. 이 범위의 y에 대하여 $Y < y$는 모든 j에 대하여 $X_j < y$일 때, 그리고 그때에만 일어난다. 또 X_j들은 독립이므로

$$F(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j < y) = y^n, \qquad 0 \le y \le 1.$$

물론 $y < 0$이면 $F(y) = 0$이고 $y > 1$이면 $F(y) = 1$이다. 미분하면 Y의 확률밀도함수(probability density function)는

$$f(y) = \begin{cases} n y^{n-1}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases}$$

이다. (간단히 확인해 보면 $\int_0^1 n y^{n-1}\,\mathrm{d}y = 1$이다.)

이제 적률(moment)을 구한다.

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot ny^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+1},$$
$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot ny^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+2}.$$

따라서

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2},$$

이다. 여기서 $(n+1)^2 - n(n+2) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n = 1$을 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

> **생각해 보기** 왜 곧바로 $\mathrm{P}(Y = y)$나 Y의 밀도를 쓰려 하지 않고 $\mathrm{P}(Y < y)$를 다루는가?

연속확률변수에서 밀도는 확률이 아니며, "가장 큰 값이 y와 같다"는 사건에는 어느 X_j가 가장 큰지와 나머지가 어떤 값을 갖는지가 뒤섞여 있다. 사건 $\{Y < y\}$는 n개의 독립인 사건의 교집합이므로 그 확률은 단순한 곱이 된다. 분포함수를 구한 뒤 미분하는 것이 최댓값과 최솟값을 다루는 표준적인 방법이다.

소문항 (ii)

T_j를 j번째 전구가 고장 나는 시각이라 하자. 그러면 $\mathrm{P}(T_j \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\lambda}$이고

$$\mathrm{P}(T_j > t) = \mathrm{e}^{-t/\lambda}, \qquad t > 0.$$

이다. 전구들은 서로 독립이므로 T_j들도 독립이다. 첫 번째 고장이 일어나는 시각을 $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$이라 하자. 이번에는 $T > t$라는 사건이 다루기 편리한데, 이 사건은 시각 t에 모든 전구가 아직 작동하고 있을 때, 그리고 그때에만 일어난다.

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(T_j > t) = \left(\mathrm{e}^{-t/\lambda}\right)^n = \mathrm{e}^{-nt/\lambda}.$$

따라서 $\mathrm{P}(T \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-nt/\lambda}$이고, 미분하면 밀도

$$g(t) = \frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}, \qquad t > 0.$$

를 얻는다. 다시 말해 T는 전구 하나와 같은 종류의 분포를 따르되 λ가 λ/n으로 바뀐 것이다. $u = t$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^\infty t\,\frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \Big[-\frac{\lambda}{n}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\Big]_0^\infty = \frac{\lambda}{n},$$

이다. 여기서 $t \to \infty$일 때 $t\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda} \to 0$이므로 경계항은 사라진다. 따라서 첫 번째 고장까지 걸리는 시간의 기댓값(expected value)은 구하려던 대로 λ/n이다.

검산

- $n = 1$이면 Y는 그냥 $[0,1]$에서의 균등분포를 따르고, 공식은 $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$을 준다. 이는 균등분포를 따르는 변수의 익숙한 분산(variance)이다.
- n이 커지면 분산은 $1/n^2$처럼 행동한다. 예상대로 많은 균등분포 변수의 최댓값은 1 쪽으로 바짝 몰린다.
- 소문항 (ii)에서 $n = 1$이면 전구 하나의 기대 수명은 λ이며, 이는 모수가 $1/\lambda$인 지수분포(exponential distribution)의 평균이다.
- 균등분포 변수 다섯 개의 최댓값을 200 000번 모의실험한 결과 분산은 0.01993으로, $\frac{5}{7 \cdot 36} \approx 0.01984$와 비교된다. $\lambda = 3$인 전구 네 개를 모의실험한 결과 첫 고장 시각의 평균은 0.749로, $\frac{3}{4}$와 비교된다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(T > t)$를 미분하면서 음의 부호를 빠뜨려 음수인 "밀도"를 얻는 것.
- $(\mathrm{E}(Y))^2$을 빼야 하는데 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)$라고 쓰는 것.
- n개의 전구가 각각 평균적으로 시각 λ에 고장 나므로 첫 고장도 λ에 일어난다고 생각하는 것. n개 변수의 최솟값은 그 어느 하나보다도 훨씬 작다.

STEP 너머

최댓값과 최솟값은 **순서통계량**(*order statistics*)의 극단적인 경우이다. 표본을 크기순으로 정렬하면, n개의 균등분포 변수 중 k번째로 작은 값은 베타분포(beta distribution)를 따르며, 여기서의 Y는 $k = n$인 경우이다. 소문항 (ii)는 독립인 지수분포 변수들의 최솟값이 다시 지수분포를 따르고 그 비율(rate)이 더해진다는 핵심 사실을 보여 준다. 이 사실은 포아송 과정(Poisson process)과 연속시간 마르코프 연쇄(continuous-time Markov chain) 이론의 원동력이 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문) 모두 이러한 아이디어를 전개한다.

풀이

STEP II 1996, 문제 13

확률과 통계 • 격자 위의 무작위 행보

> **STEP II 1996, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q13

핵심 아이디어

이 항등식은 방데르몽드 항등식(Vandermonde's identity)이다. 양변에서 t^n의 계수(coefficient)를 비교하면 된다. 걷기 문제에서 유용한 양은 걸음마다 정확히 1씩 변하는 하나의 수, 즉 내 호텔로부터 북쪽으로 몇 블록, 서쪽으로 몇 블록 떨어져 있는지를 더한 값이다. 내가 한 걸음 걸을 때마다 이 값은 1씩 커지고, 친구가 한 걸음 걸을 때마다 1씩 작아진다. 따라서 우리는 단 한 순간에, 교차로들이 이루는 하나의 대각선 위에서만 만날 수 있고, 만날 확률은 정확히 항등식에 나오는 합이 된다.

풀이

항등식

$(1+t)^n$에서 t^r의 계수는 $\binom{n}{r}$이다. 곱 $(1+t)^n(1+t)^n$에서 t^n인 항은 어떤 $r=0,1,\ldots,n$에 대하여 첫째 인수에서 t^r을, 둘째 인수에서 t^{n-r}을 골라서 얻어진다. 따라서 좌변에서 t^n의 계수는

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}$$

이고, 우변에서는 $\binom{2n}{n}$이다. 두 값을 같다고 놓으면 구하는 항등식을 얻는다. 같은 논증을 $(1+t)^a(1+t)^b=(1+t)^{a+b}$에 적용하면 더 일반적인 형태

$$\sum_{r}\binom{a}{r}\binom{b}{n-r}=\binom{a+b}{n}, \qquad (*)$$

를 얻으며, 이것은 뒤에서 필요하다.

만날 수 있는 곳

내 호텔을 원점에 두고, 블록 단위로 x는 동쪽으로, y는 북쪽으로 잰다. 그러면 친구의 호텔은 $(-n, n)$에 있다. 임의의 위치에 대하여

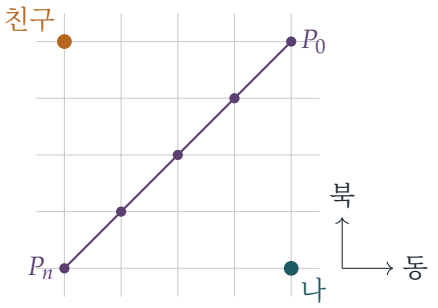
$$D = y - x,$$

로 정의한다. 이것은 내 호텔로부터 북쪽으로 떨어진 블록 수와 서쪽으로 떨어진 블록 수의 합이다. 북쪽이나 서쪽으로 가면 D가 1만큼 커지고, 남쪽이나 동쪽으로 가면 1만큼 작아진다. 따라서 t분 동안 걸은 뒤 나는 $D = t$이고, $D = 2n$에서 출발한 친구는 $D = 2n - t$이다. 걷는 동안 D는 일정하게 변하므로, 이 관계는 블록 중간을 포함한 모든 순간에 성립한다.

같은 시각에 같은 곳에 있으려면 D의 값이 같아야 하므로 $t = 2n - t$, 즉 $t = n$이다. 따라서 우리는 정확히 n분 뒤에만, 그것도 $y - x = n$인 교차로에서만 만날 수 있다. 나의 n걸음은 나를 영역 $-n \le x \le 0, 0 \le y \le n$ 안에 머물게 하므로, 만날 수 있는 점은

$$P_r = (-r, n - r), \qquad r = 0, 1, \ldots, n,$$

이다. 이것들은 내 호텔에서 북쪽으로 n블록 떨어진 교차로와 서쪽으로 n블록 떨어진 교차로를 잇는 정사각형의 대각선 위에 있는 $n + 1$개의 교차로이다. (특히 우리는 블록 중간에서 서로 스쳐 지나가는 일이 결코 없다.)



그림은 $n = 4$인 경우이며, 만날 수 있는 점은 대각선 위의 점들이다.

만날 확률

n분 뒤 내가 P_r에 있는 것은 나의 n걸음 중 r걸음이 서쪽, $n - r$걸음이 북쪽일 때이고, 그때뿐이다. n걸음의 각 순서는 확률이 2^{-n}이므로

$$\mathrm{P}(\text{내 위치가} P_r) = \binom{n}{r}\frac{1}{2^n}.$$

친구가 $(-n, n)$에서 n걸음 뒤 $P_r = (-r, n - r)$에 도달하는 것은 그중 $n - r$걸음이 동쪽, r걸음이 남쪽일 때이고, 그때뿐이며, 그 확률은 $\binom{n}{n-r}2^{-n}$이다. 두 사람의 걷기는 독

립(independent)이고, 서로 다른 r에 대한 사건 "두 사람이 모두 P_r에 있다"는 서로 배반(mutually exclusive)이므로, 항등식에 의하여

$$\mathrm{P}(\text{만남}) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

이다.

$2k$분 늦게 출발하는 경우

이번에는 친구가 출발한 때부터 시간 T를 잰다. $T \geq 2k$일 때 나는 $T-2k$분 동안 걸었으므로 $D = T-2k$이고, 친구는 $D = 2n-T$이다. 이 둘은 $T = n+k$일 때만 같다. 이때 나는 $n-k$걸음을 걸었고(여기서 $k \leq n$이므로 이것은 음이 아닌 정수이다), 친구는 $n+k$걸음을 걸었다. $n+k \geq 2k$이므로, 내가 아직 호텔에서 자고 있는 동안 친구가 대각선의 내 쪽에 도달할 수는 없다. 이번에도 우리는 교차로에서만 만날 수 있고, 블록 중간에서는 결코 만나지 않는다.

$n-k$걸음 중 r걸음이 서쪽이면 나는 $(-r, n-k-r)$에 있고, 그 확률은 $\binom{n-k}{r}2^{-(n-k)}$이다. 친구가 같은 점에 있으려면 친구의 $n+k$걸음 중 $n-r$걸음이 동쪽, $k+r$걸음이 남쪽이어야 하고, 그 확률은 $\binom{n+k}{n-r}2^{-(n+k)}$이다. 앞에서와 같이 r에 대하여 더하면, $a = n-k$, $b = n+k$로 둔 $(*)$에 의하여

$$\mathrm{P}(\text{만남}) = \frac{1}{2^{n-k}\,2^{n+k}}\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n-k}{r}\binom{n+k}{n-r} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

이다.

> **?** **생각해 보기** 늦잠을 자도 왜 아무런 차이가 없을까?

친구의 관점에서, 즉 친구에 대한 나의 상대 위치로 걷기를 바라보자. 친구의 걸음(남쪽 또는 동쪽)과 나의 걸음(북쪽 또는 서쪽)은 각각 친구에 대한 나의 상대 위치를 북쪽으로 한 블록 또는 서쪽으로 한 블록 옮기며, 그 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고 서로 독립이다. 우리는 각 방향으로 n블록씩 떨어져서 출발하고, 전체 $2n$걸음(나의 걸음과 친구의 걸음을 합한 것)이 상대적으로 "북쪽" n번과 "서쪽" n번으로 이루어질 때, 그리고 그때만 만난다. 누가 어느 걸음을 걷는지는 상관이 없으므로, $2n$걸음을 n과 n으로 나누든 $n-k$와 $n+k$로 나누든 답은 $\binom{2n}{n}/2^{2n}$이다. k에 대한 조건은 단지 내가 내 몫의 걸음을 실제로 걸을 수 있도록 보장할 뿐이다. n이 크면 이 확률은 약 $1/\sqrt{\pi n}$으로 작으며, 내가 짝수 분만큼 늦잠을 자든 안 자든 같다.

$n = 1$, 1분 늦는 경우

이제 나는 $D = T-1$이고 친구는 $D = 2-T$이며, 이 둘은 $T = \frac{3}{2}$일 때만 같다. 이때는 두 사람 모두 블록의 중간에 있는 시각이다. 따라서 우리는 같은 시각에 같은 교차로에 **결코** 있

을 수 없고, 만남이 교차로에서 만나는 것을 뜻한다면 확률은 0이다. 홀짝성(parity)이 바뀌었다. 이제 전체 걸음 수가 홀수이다.

(실제 두 사람이라면 그러하듯이) 블록 중간에서 서로 스쳐 지나가는 것도 만남으로 센다면, $T = \frac{3}{2}$에 같은 블록을 반대 방향으로 걸을 때 우리는 만난다. $T = 1$에 나는 아직 내 호텔 $(0,0)$에 있고 친구는 $(0,1)$ 또는 $(-1,0)$에 있다. 그다음 친구가 $(0,1)$에 있고 남쪽으로 가면서 내가 북쪽으로 가거나, 친구가 $(-1,0)$에 있고 동쪽으로 가면서 내가 서쪽으로 가면 우리는 만난다. 각 경우의 확률은 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(\text{블록 중간에서 만남}) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

검산

- 지연이 없는 $n = 1$의 경우, 내가 북쪽으로 가고 친구가 동쪽으로 가거나, 내가 서쪽으로 가고 친구가 남쪽으로 가면 만난다. 확률은 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \binom{2}{1}/4$이다.
- 컴퓨터로 $n \leq 5$와 허용되는 모든 k에 대하여 모든 걷기 쌍을 나열하고, 30초마다 두 사람의 위치를 추적했다. 짝수 지연이 얼마이든 만날 확률은 $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \frac{63}{256}$이었고, 만남은 언제나 예측한 단 하나의 시각에 일어났다. $n = 1$이고 1분 지연된 경우에는 $T = \frac{3}{2}$에 블록 중간에서만 만났고, 전체 확률은 $\frac{1}{4}$였다.
- $n = 100$일 때 $\binom{200}{100}/4^{100} \approx 0.0563$으로, $1/\sqrt{100\pi} \approx 0.0564$에 가깝다.

흔한 실수

- 정사각형 안의 어디에서든, 어느 시각에든 만날 수 있다고 가정하는 것. 양 $y - x$가 만남을 하나의 시각과 하나의 대각선으로 고정한다.
- 만날 수 있는 점들에 대하여 더하지 않고 확률을 제곱하거나, P_r에서 친구의 걸음 수가 서로 뒤바뀐다는 점(친구는 동쪽 걸음이 r번이 아니라 $n - r$번 필요하다)을 잊는 것.

STEP 너머

상대 위치 논증은 커플링(coupling)이다. 두 개의 독립인 랜덤 워크(random walk)를 길이를 합친 하나의 랜덤 워크로 바꾸는 것이며, 이 때문에 $\binom{2n}{n}/4^n$이 계속 다시 나타난다. 같은 양은 직선 위의 단순 대칭 랜덤 워크가 $2n$걸음 뒤에 원점에 돌아와 있을 확률이기도 하며, (스털링 공식(Stirling's formula)에서 얻는) 이 양의 $1/\sqrt{\pi n}$ 감소는 1차원과 2차원에서 그러한 랜덤 워크가 확률 1로 출발점에 돌아온다는 포여(Pólya)의 정리의 핵심이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 랜덤 워크와 이러한 귀환 확률을 다룬다.

풀이

STEP II 1996, 문제 14

확률과 통계 • 적률과 중심극한정리

> **STEP II 1996, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q14

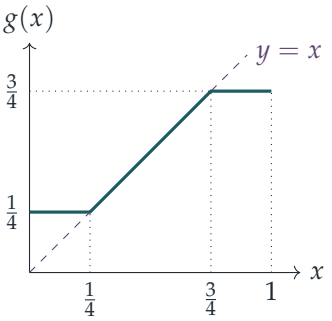
핵심 아이디어

Y는 X의 양 끝을 "잘라낸" 것이다. 즉 $\frac{1}{4}$ 아래의 확률은 모두 한 값 $\frac{1}{4}$에 쌓이고, $\frac{3}{4}$ 위의 확률은 모두 $\frac{3}{4}$에 쌓인다. 따라서 Y는 두 개의 점질량(point mass)과 연속인 가운데 부분으로 이루어진 혼합 확률변수(mixed random variable)이고, 모든 기댓값(expectation) $\mathrm{E}(g(Y))$도 같은 방식으로 세 부분으로 나뉜다. 마지막 부분에서는 서로 독립(independent)인 매우 많은 복사본의 합을 다루므로 중심극한정리(central limit theorem)가 필요하다. 이를 위해서는 Y의 평균(mean)과 분산(variance)만 있으면 되는데, 앞 부분에서 이미 이 작업을 해 두었다.

풀이

Y의 적률(moments)

$X \sim \mathrm{U}[0,1]$이므로 $\mathrm{P}(X \le \frac{1}{4}) = \mathrm{P}(X \ge \frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$이고, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$에서 X의 확률밀도(density)는 1이다. 아래 그림의 자르기 함수 g를 써서 $Y = g(X)$로 나타내면 $\mathrm{E}(Y^n) = \int_0^1 g(x)^n \,\mathrm{d}x$를 얻는다.



적분을 $\frac{1}{4}$과 $\frac{3}{4}$에서 나누면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y^n) &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \cdot \tfrac{1}{4} + \int_{1/4}^{3/4} x^n \,\mathrm{d}x + \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{3^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}} + \frac{3^n}{4^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)(1+3^n)+3^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}}.\end{aligned}$$

분자는 $n+1+(n+1)3^n+3\cdot 3^n-1 = n+(n+4)3^n$이므로

$$\boxed{\mathrm{E}(Y^n) = \frac{n+(n+4)\,3^n}{(n+1)\,4^{n+1}}} \qquad (n \geq 1).$$

X와 비교하기

균등분포(uniform distribution)를 따르는 확률변수에 대해서는 $\mathrm{E}(X^n) = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$이다.

$n=1$이면 공식에서 $\mathrm{E}(Y) = \frac{1+5\cdot 3}{2\cdot 16} = \frac{1}{2} = \mathrm{E}(X)$를 얻으며, 이것이 보이려던 것이다. (이는 놀라운 일이 아니다. 자르기는 양 끝의 질량을 $\frac{1}{2}$에 대하여 대칭적으로, 같은 만큼씩 안쪽으로 옮기기 때문이다.)

$n=2$이면 $\mathrm{E}(Y^2) = \frac{2+6\cdot 9}{3\cdot 64} = \frac{56}{192} = \frac{7}{24}$이고, 한편 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3} = \frac{8}{24}$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(Y^2) = \frac{8}{24} - \frac{7}{24} = \frac{1}{24},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

일반적인 $n \geq 2$에 대해서는 두 적률을 공통분모 $(n+1)4^{n+1}$로 나타낸다.

$$\mathrm{E}(X^n) = \frac{4^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}.$$

따라서 $4^{n+1} > n + (n+4)3^n$임을 보이면 된다. $4^{n+1} = 4(3+1)^n$과 이항정리(binomial theorem)를 쓰고, 위의 두 항을 따로 떼어 두면

$$4^{n+1} = 4 \cdot 3^n + 4n \cdot 3^{n-1} + 4\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} 3^k.$$

여기서 $n + (n+4)3^n = 4 \cdot 3^n + 3n \cdot 3^{n-1} + n$을 빼면

$$4^{n+1} - \big(n + (n+4)3^n\big) = n\,3^{n-1} - n + 4\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} 3^k.$$

? **생각해 보기** 이 차는 왜 양수인가?

$n \geq 2$이면 $3^{n-1} \geq 3$이므로 $n\,3^{n-1} - n \geq 2n > 0$이다. 합 또한 양수인데, 1과 같은 $k = 0$인 항을 포함하고 모든 항이 음이 아니기 때문이다. 따라서 차는 엄밀하게 양수이고

$$\mathrm{E}(X^n) > \mathrm{E}(Y^n) \qquad \text{모든} n \geq 2.$$

이다. ($n = 1$이면 차는 $3^0 - 1 + 0 = 0$이고, 이는 $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$와 일치한다.)

240 000개 복사본의 합

앞 부분으로부터

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{7}{24} - \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

$N = 240\,000$일 때 $S = Y_1 + \cdots + Y_N$이라 하자. Y_i들은 서로 독립이므로 기댓값과 분산이 각각 더해진다.

$$\mathrm{E}(S) = \frac{N}{2} = 120\,000, \qquad \mathrm{Var}(S) = \frac{N}{24} = 10\,000,$$

따라서 S의 표준편차(standard deviation)는 100이다. Y_i들은 서로 독립이고 분산이 유한한 같은 분포를 따르며 N이 매우 크므로, 중심극한정리에 의해 S는 근사적으로 $\mathrm{N}(120\,000,\ 100^2)$를 따른다. 따라서

$$\mathrm{P}(S < K) \approx \Phi\Big(\frac{K - 120\,000}{100}\Big) = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{K - 120\,000}{100} = \Phi^{-1}(0.75) \approx 0.6745,$$

이므로

$$K \approx 120\,000 + 67.45 \approx 120\,067.$$

연속성 수정(continuity correction)은 필요하지 않다. Y는 정숫값을 갖지 않으며, 어차피 표준편차가 100이므로 그런 수정은 이 정도의 정확도에서는 아무런 차이를 만들지 않는다.

검산

- $\frac{1}{4} \leq Y \leq \frac{3}{4}$이므로 $\mathrm{E}(Y^n)$의 공식은 당연히 $(\frac{1}{4})^n$과 $(\frac{3}{4})^n$ 사이에 있어야 하며, 실제로 그렇다. $n = 3$이면 $\frac{3+7\cdot 27}{4\cdot 256} = \frac{192}{1024} = \frac{3}{16} = 0.1875$를 얻고, $g(x)^3$을 중점법(midpoint rule)으로 적분한 값과 소수점 아래 열째 자리까지 일치한다.

- $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{24} < \frac{1}{12} = \mathrm{Var}(X)$이다. 자르기는 값들을 평균 쪽으로 끌어당기므로 퍼짐이 줄어드는 것이 맞다.
- Y의 복사본 2400개의 합을 20 000번 시뮬레이션하였더니 표준화된 제3사분위수(upper quartile)가 약 0.678로 0.6745에 가까웠으며, 이는 정규근사(normal approximation)를 뒷받침한다.

흔한 실수

- Y를 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$에서의 균등분포로 보고, 양 끝에 있는 크기 $\frac{1}{4}$의 점질량을 잊는 것. 그 구간에서의 균등분포를 따르는 확률변수의 확률밀도는 1이 아니라 2이다.
- $N\,\mathrm{Var}(Y)$ 대신 $\mathrm{Var}(S) = N^2\,\mathrm{Var}(Y)$를 쓰는 것. 독립이면 분산이 더해지므로 표준편차는 $\sqrt{N}$처럼 커진다.
- 마지막 단계에서 부호를 틀리는 것. $\mathrm{P}(S < K) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$이므로 K는 평균보다 커야 한다.

STEP 너머

Y는 X를 자른(또는 "윈저화(Winsorised)"한) 것이며, 이산도 연속도 아닌 분포를 가진다. 측도론적 확률론(measure-theoretic probability)은 이런 분포를 분포함수(distribution function)를 통해 일관되게 다루며, 모든 기댓값은 하나의 적분 $\int g\,\mathrm{d}F$가 된다. 평균이 같을 때의 부등식 $\mathrm{E}(X^n) > \mathrm{E}(Y^n)$은 볼록 순서(convex ordering)의 한 예이다. X는 Y의 "평균 보존 확산(mean-preserving spread)"이므로, 모든 볼록(convex) 함수 ϕ에 대하여 $\mathrm{E}(\phi(X)) \geq \mathrm{E}(\phi(Y))$이다. 마지막에 쓴 중심극한정리는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에 증명되어 있다.

풀이

STEP III 1996, 문제 1

순수수학 • 쌍곡선함수의 거듭제곱

> **STEP III 1996, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q1

핵심 아이디어

모든 것은 쌍곡선함수(hyperbolic function)를 지수함수(exponential)로 나타내는 데서 나온다. 거듭제곱 $\cosh^n x$는 $2^{-n}(e^x + e^{-x})^n$이 되고, 이항정리(binomial theorem)로 이를 전개하면 지수함수 $e^{(n-2r)x}$들이 나온다. 이들은 $e^{\pm jx}$처럼 짝을 이루어 나타나며, 각 짝은 하나의 $\cosh jx$가 된다. $\sinh^{2m} x$를 같은 방법으로 전개하면 부호가 번갈아 바뀐다는 점만 다르므로, 두 전개를 더하거나 빼면 항이 하나씩 걸러 사라진다.

풀이

정의와 두 항등식

다음과 같이 정의한다.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

여기서 곧바로 두 가지 사실을 얻는다. $\cosh x + \sinh x = e^x$이고 $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$이므로

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = 1.$$

정의를 제곱하면 $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$이고 $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$이므로

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh 2x,$$

이고, 여기에 항등식(identity) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$을 더하거나 빼면

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \qquad \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

마지막 두 식은 어떤 인수에 대해서도 성립하므로, 이 식에서 x를 $2x$로 바꾸어도 된다.

이제 제곱의 차(difference of squares)를 인수분해하면

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cosh^2 x + \sinh^2 x) = 1 \cdot \cosh 2x = \cosh 2x,$$

이므로 원하는 식을 얻는다. 합에 대해서는 완전제곱식(completing the square)을 만들고 $\cosh x \sinh x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}\sinh 2x$를 이용한다.

$$\begin{aligned}\cosh^4 x + \sinh^4 x &= (\cosh^2 x + \sinh^2 x)^2 - 2\cosh^2 x \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 2x - \tfrac{1}{2}\sinh^2 2x \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh 4x + 1) - \tfrac{1}{4}(\cosh 4x - 1) \\ &= \tfrac{1}{4}\cosh 4x + \tfrac{3}{4},\end{aligned}$$

이것이 두 번째 항등식이다.

계수 a_k

이항정리에 의해

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^n}\left(e^x + e^{-x}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}e^{(n-2r)x}.$$

첨자가 r인 항과 첨자가 $n-r$인 항을 짝짓는다. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$이므로 두 항은 계수가 같고, 지수는 $\pm(n-2r)x$로 부호만 반대이다. 따라서 두 항을 합치면 $2\binom{n}{r}\cosh\big((n-2r)x\big)$가 된다.

> **생각해 보기** 실제로 나타나는 $\cosh kx$는 어떤 것들이며, 가운데 항은 어떻게 되는가?

지수 $n-2r$는 $n, n-2, n-4, \ldots$이므로 n과 홀짝성(parity)이 같은 k만 나타난다. $k = n-2r$로 놓으면, $1 \le k \le n$일 때 $\cosh kx$의 계수는 $r = \frac{1}{2}(n-k)$에 대하여 $2 \cdot 2^{-n}\binom{n}{r}$이다. n이 짝수이면 짝이 없는 가운데 항 $r = \frac{n}{2}$가 하나 더 있고, 이 항은 상수 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$를 준다. 따라서

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\dbinom{n}{\frac{1}{2}(n-k)} & \text{조건: } 1 \le k \le n\text{이고} n-k\text{가 짝수,} \\ 0 & \text{조건: } n-k\text{가 홀수,}\end{cases} \qquad a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{1}{2}n} & n\text{이 짝수,} \\ 0 & n\text{이 홀수.}\end{cases}$$

예를 들어 $\cosh^5 x = \frac{5}{8}\cosh x + \frac{5}{16}\cosh 3x + \frac{1}{16}\cosh 5x$이다.

마지막 부분

$n = 2m$으로 놓고 $\sinh^{2m} x$를 같은 방법으로 전개한다.

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}e^{(2m-2r)x}.$$

$(-1)^{2m-r} = (-1)^r$이므로 항 r과 $2m-r$는 여전히 짝을 이루고, 따라서

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} \cosh\bigl(2(m-r)x\bigr),$$

이다. 이것은 $\cosh^{2m} x$의 전개(cosh가 우함수임을 이용하여 같은 방식으로 쓴 것)에서 부호만 번갈아 바뀐 것이다. 두 식을 빼고 더하면

$$\cosh^{2m} x \mp \sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} \bigl(1 \mp (-1)^r\bigr) \binom{2m}{r} \cosh\bigl(2(m-r)x\bigr).$$

따라서 차에는 홀수 r인 항만 (각각 두 배가 되어) 남고, 합에는 짝수 r인 항만 남는다. 앞에서처럼 r, $2m-r$ 짝을 모으고 $k = 2j = 2(m-r)$로 놓으면 다음을 얻는다.

$$\cosh^{2m} x - \sinh^{2m} x = b_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 홀수}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

$$\cosh^{2m} x + \sinh^{2m} x = c_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 짝수}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

여기서 상수항은 짝이 없는 가운데 항 $r = m$에서 나오며, 이 항은 m이 홀수일 때는 차에, m이 짝수일 때는 합에 남는다.

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \dbinom{2m}{m} & m\text{이 홀수}, \\ 0 & m\text{이 짝수}, \end{cases} \qquad c_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \dbinom{2m}{m} & m\text{이 짝수}, \\ 0 & m\text{이 홀수}. \end{cases}$$

말로 정리하면 다음과 같다. 홀수 k에 대하여 $\cosh kx$의 계수는 0이다. 짝수 $k = 2j \ge 2$에 대해서는 $m-j$가 홀수이면 차에서, $m-j$가 짝수이면 합에서 계수가 $2^{2-2m}\binom{2m}{m-j}$이고, 그 밖의 경우에는 0이다. $m = 2$이면 차는 $\frac{1}{4}\binom{4}{1}\cosh 2x = \cosh 2x$이고 합은 $\frac{1}{8}\binom{4}{2} + \frac{1}{4}\binom{4}{0}\cosh 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cosh 4x$이므로, 처음에 증명한 항등식들을 다시 얻는다.

검산

$x = 0$을 대입하면 모든 $\cosh kx$가 1이 되므로 a_k의 합은 1이어야 한다(실제로 그렇다. 이항계수(binomial coefficient)의 합은 2^n이다). 마지막 두 전개의 계수 합도 각각 1이어야 한다. $m = 3$이면 공식에서 $\cosh^6 x - \sinh^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cosh 4x$와 $\cosh^6 x + \sinh^6 x = \frac{15}{16}\cosh 2x + \frac{1}{16}\cosh 6x$를 얻는다. $x = 1$에서 첫 번째 식의 양변은 유효숫자 네 자리까지 모두 10.87이며, 계산기로 확인할 수 있다. 우리는 $n \le 12$와 $m \le 8$에 대하여 임의의 x 값에서 모든 공식을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 가운데 항을 두 배로 세는 것: n이 짝수일 때 $r = \frac{n}{2}$인 항은 짝이 없으므로 a_0는 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$이지, 그 두 배가 아니다.
- k와 n의 홀짝성이 다르면 언제나 $a_k = 0$이라는 사실을 잊는 것.
- 마지막 부분에서 상수항이 항상 있다고 가정하는 것. 상수항은 m이 홀수일 때만 차에, m이 짝수일 때만 합에 나타난다.

STEP 너머

$\cosh x$(또는 $\cos x$)의 거듭제곱을 $\cosh kx$들의 일차결합으로 나타내는 것은 푸리에 해석(Fourier analysis)의 첫 맛보기이다. e^{ikx}가 자연스러운 기본 단위이며, $\cos^n x$는 계수가 이항계수인 유한 푸리에 급수(Fourier series)이다. 이 과정을 거꾸로 하여 $\cos nx$를 $\cos x$에 대한 다항식으로 나타내면 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomials)을 얻는데, 이는 근사 이론(approximation theory)에서 중요하다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 지수함수 꼴이 왜 이 모든 항등식을 자연스럽게 만드는지 보여 준다.

풀이

STEP III 1996, 문제 2

순수수학 • 연립일차방정식

STEP III 1996, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q2

핵심 아이디어

미지수가 세 개인 일차방정식 세 개는 계수의 행렬식(determinant)이 0이 되지 않는 한 해를 정확히 하나 가진다. 따라서 먼저 할 일은 행렬식을 0으로 만드는 a의 값을 찾는 것이다. 그 밖의 모든 a에 대해서는 그냥 풀면 된다. 이 문제의 진짜 내용은 예외적인 값에 있는데, 거기서는 b에 따라 방정식이 모순(inconsistent)인지, 아니면 무수히 많은 해를 가지는지를 판단해야 한다.

풀이

방정식에 다음과 같이 번호를 붙인다.

$$x + y + az = 2, \tag{1}$$
$$x + ay + z = 2, \tag{2}$$
$$2x + y + z = 2b. \tag{3}$$

해가 유일한 것은 언제인가?

계수행렬(coefficient matrix)의 행렬식은 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a-1) - 1(1-2) + a(1-2a)$$
$$= 2a - 2a^2 = 2a(1-a).$$

따라서 $a \neq 0$이고 $a \neq 1$이면 b의 값에 관계없이 해가 정확히 하나 존재한다. $a = 0$인 경우와 $a = 1$인 경우는 따로 다루어야 한다.

일반적인 경우: $a \neq 0, 1$

(1)에서 (2)를 빼면

$$(1-a)y - (1-a)z = 0,$$

을 얻고, $a \neq 1$이므로 $1-a$로 나누어 $y = z$를 얻는다. $z = y$를 (1)과 (3)에 대입하면

$$x + (1+a)y = 2, \qquad 2x + 2y = 2b, \ \text{즉 } x + y = b.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $ay = 2 - b$이고, $a \neq 0$이므로

$$y = z = \frac{2-b}{a}, \qquad x = b - \frac{2-b}{a} = \frac{(a+1)b - 2}{a}.$$

이를 (1), (2), (3)에 다시 대입하면 이것이 해임을 확인할 수 있고, 위의 논증에 의해 이것이 유일한 해이다.

$a = 0$인 경우

방정식은 다음과 같이 된다.

$$x + y = 2, \qquad x + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

처음 두 식을 더하면 $2x + y + z = 4$이다. 따라서 셋째 방정식의 좌변은 4와도 같고 $2b$와도 같아야 한다.

? **생각해 보기** 행렬식이 0이면 "해가 없다"는 뜻일까?

그것만으로는 그렇지 않다. 행렬식이 0이라는 것은 방정식들이 종속(dependent)이라는 뜻이므로, 방정식들이 서로 모순되거나 그중 하나가 새로운 정보를 전혀 주지 않는다. 둘 중 어느 쪽이 일어나는지는 우변에, 여기서는 b에 달려 있다.

- $b \neq 2$이면 $4 = 2b$가 거짓이므로 **해가 없다**.
- $b = 2$이면 셋째 방정식은 처음 두 방정식의 합일 뿐이므로 $x + y = 2$와 $x + z = 2$만 남는다. $x = t$라 두면 해는

$$(x, y, z) = (t,\ 2 - t,\ 2 - t), \qquad t\text{는 임의의 실수.}$$

$a = 1$인 경우

이제 (1)과 (2)는 같은 방정식 $x + y + z = 2$이고, 연립방정식은

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

가 된다. 둘째 식에서 첫째 식을 빼면 $x = 2b - 2$이고, 그러면 $y + z = 2 - x = 4 - 2b$이다. 이 두 방정식은 결코 서로 모순되지 않으므로, **모든** b의 값에 대해 해가 무수히 많다.

$$(x, y, z) = (2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s), \qquad s\text{는 임의의 실수.}$$

요약

- $a \neq 0, 1$: 유일한 해 $x = \dfrac{(a+1)b - 2}{a}$, $y = z = \dfrac{2 - b}{a}$.
- $a = 0$, $b \neq 2$: 해가 없다.
- $a = 0$, $b = 2$: 임의의 t에 대해 $(t,\ 2 - t,\ 2 - t)$.
- $a = 1$, 임의의 b: 임의의 s에 대해 $(2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s)$.

검산

$a = 2$, $b = 4$로 두면 공식에서 $y = z = -1$, $x = 5$를 얻고, 실제로 $5 - 1 - 2 = 2$, $5 - 2 - 1 = 2$, $10 - 1 - 1 = 8 = 2b$이다. 구조적인 검산으로, 일반 공식은 분모에 a가 있으므로 $a = 0$에서 성립하지 않아야 한다. 실제로 그러하며, 따로 수행한 분석이 그 이유를 보여 준다. $a = 1$에서는 공식이 여전히 의미를 가지며 $(2b - 2,\ 2 - b,\ 2 - b)$를 주는데, 이는 해의 족에서 $s = 2 - b$에 해당하는 것이다. 이제는 $y = z$가 강제되지 않으므로, 이것은 많은 해 가운데 하나일 뿐이다. 우리는 a, b와 매개변수의 여러 무작위 값에 대해 정확한 유리수 연산으로 모든 경우를 확인하였다.

흔한 실수

- $a \neq 1$ 또는 $a \neq 0$이라는 말 없이 $1 - a$나 a로 나누는 것. 바로 그 나눗셈에 특수한 경우가 숨어 있다.
- 행렬식이 0이면 해가 없다고 가정하는 것. $a = 1$이면 언제나 해가 무수히 많고, $a = 0$이면 $b = 2$일 때 해가 존재한다.
- 무수히 많은 해의 족을 명시적으로 기술하는 것을 잊는 것. "해가 무수히 많다"고 말하는 것은 방정식을 푸는 것과 같지 않다.

STEP 너머

각 방정식은 3차원 공간의 평면(plane)을 나타내며, 이 문제는 세 평면이 어떻게 만날 수 있는지를 묻는 것이다. 한 점에서 만나거나, 공통의 직선을 따라 만나거나, 전혀 만나지 않는

다($a = 0, b \neq 2$인 경우 평면들은 둘씩 만나 세 개의 평행한 직선을 이루는데, 마치 삼각기둥의 옆면과 같다). 이를 체계적으로 다루는 도구는 가우스 소거법(Gaussian elimination)과 행렬의 랭크(rank)라는 개념이다. 연립방정식은 우변을 덧붙여도 랭크가 커지지 않을 때, 그리고 그때에만 해를 가진다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 1996, 문제 3

순수수학 • 반각 치환

> **STEP III 1996, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q3

핵심 아이디어

$1/(\text{상수} + \text{상수}\cdot\cos x)$ 꼴로 이루어진 피적분함수(integrand)는 반각 치환(half-angle substitution) $t = \tan\frac{1}{2}x$를 쓰는 전형적인 경우이다. 이 치환은 $\sin x$와 $\cos x$의 임의의 유리함수(rational function)를 t의 유리함수로 바꾼다. 여기서는 표준적인 꼴 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2)$이 나오고, 그 결과로 역탄젠트(inverse tangent)가 얻어진다. 그다음 두 "따라서(hence)" 결과는 각 피적분함수를 $1/(1-a\cos x)$ 꼴로 다시 맞추고 a와 θ를 고르기만 하면 된다.

풀이

일반적인 적분

$t = \tan\frac{1}{2}x$로 놓는다. x가 0에서 θ까지 움직일 때 t는 0에서 $T = \tan\frac{1}{2}\theta$까지 움직이며, $0 < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\pi$이므로 T는 유한한 양수이다. 표준적인 반각 공식에 의해

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

이고, 두 번째 식은 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1+t^2)$이기 때문이다. 그러면

$$1 - a\cos x = \frac{(1+t^2) - a(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{(1-a)+(1+a)t^2}{1+t^2},$$

이므로 $1+t^2$ 인수가 약분되어

$$\int_0^{\theta} \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{T} \frac{2}{(1-a)+(1+a)t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{1+a}\int_0^{T}\frac{1}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad k^2 = \frac{1-a}{1+a}.$$

이다. $-1 < a < 1$이므로 $1-a$와 $1+a$는 모두 양수이고, 따라서 $k = \sqrt{(1-a)/(1+a)}$는 진짜 양의 실수이다. (바로 이 지점에서 a에 대한 조건이 쓰인다. $|a| \geq 1$이면 분모

가 0이 될 수 있어서 적분이 이상적분(improper integral)이 되거나 답이 로그가 된다.) $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2) = \frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$를 이용하면

$$\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+a)k}\tan^{-1}\frac{T}{k}.$$

이다. 마지막으로 $(1+a)k = \sqrt{(1+a)^2}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \sqrt{1-a^2}$이므로

$$\boxed{\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\tfrac{1}{2}\theta\right).}$$

? 생각해 보기 왜 $\theta < \pi$가 필요할까?

치환 $t = \tan\frac{1}{2}x$는 $x = \pi$에서 성립하지 않는데, 이때 t가 무한대가 되기 때문이다. $\theta < \pi$로 두면 구간 $[0,\theta]$ 전체가 유한한 구간 $[0, \tan\frac{1}{2}\theta]$로 옮겨지므로, 공식에 특별히 주의할 점이 없다. ($\theta \to \pi$로 보내면 $\tan^{-1}$이 $\frac{1}{2}\pi$로 가므로 $\pi/\sqrt{1-a^2}$을 얻는다.)

첫 번째 "따라서"

인수 2를 묶어 낸다.

$$\frac{1}{2-a\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a\cos x}.$$

적분이 유한하려면 $-2 < a < 2$이어야 하고, 이때 $b = \frac{1}{2}a$는 $-1 < b < 1$을 만족한다. 따라서 a를 b로 바꾸고 $\theta = \frac{1}{2}\pi$로 두어 일반적인 결과를 적용할 수 있으며, 이때 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{2-a\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}a}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+a}{2-a}},\end{aligned}$$

여기서 $\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$을 쓰고, 역탄젠트 안의 분수에서 분자와 분모에 각각 2를 곱하였다. 이것이 구하는 결과이다.

두 번째 "따라서"

이번에는 $\sqrt{2}$를 묶어 낸다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x},$$

따라서 $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$($(-1,1)$에 속한다)와 $\theta = \frac{3}{4}\pi$($(0,\pi)$에 속한다)를 쓴다. 그러면 $\sqrt{1-a^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이고,

$$\frac{1+a}{1-a} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2,$$

이다. 여기서 분자와 분모에 $\sqrt{2}-1$을 곱하고 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$을 이용하였다. 그러므로 제곱근은 $\sqrt{2}-1$이고, 일반 공식에 의해

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1/\sqrt{2}} \tan^{-1}\left((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\right) = 2\tan^{-1}\left((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\right).$$

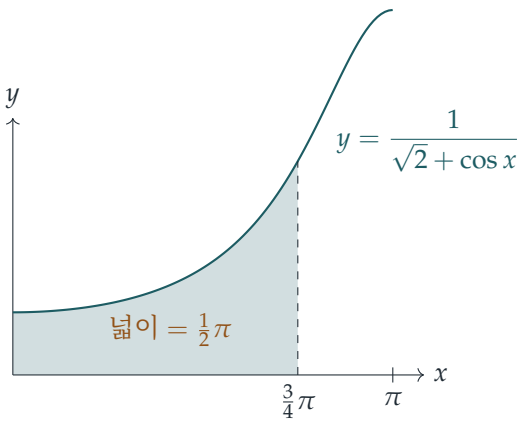
? 생각해 보기 $\tan\frac{3}{8}\pi$는 얼마일까?

$u = \tan\frac{1}{8}\pi > 0$로 두고 배각 공식(double-angle formula)을 쓰면 $1 = \tan\frac{1}{4}\pi = \frac{2u}{1-u^2}$이므로 $u^2+2u-1 = 0$이고 $u = \sqrt{2}-1$(양의 근)이다. $\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi$이므로 $\tan\frac{3}{8}\pi = \cot\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$을 얻는다.

따라서 $(\sqrt{2}-1)\tan\frac{3}{8}\pi = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$이고,

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x = 2\tan^{-1}1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

이므로 원하는 결과가 나온다.



검산

▶ $a = 0$이면 일반 공식은 $2\tan^{-1}(\tan\frac{1}{2}\theta) = \theta$를 주는데, 이는 $\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}x$와 같다. 마찬가지로 첫 번째 "따라서"에서 $a = 0$으로 두면 $\frac{2}{2}\tan^{-1}1 = \frac{1}{4}\pi = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$를 얻는다.

- 상자 안의 답을 θ에 대하여 미분하면 다시 $1/(1-a\cos\theta)$가 나와야 한다. 연쇄법칙(chain rule)을 연습하기에 좋은 문제이다.
- 마지막 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 1.5707963…이 나와 $\frac{1}{2}\pi$와 일치한다. 일반 공식과 첫 번째 "따라서" 결과도 무작위로 고른 수백 가지 a와 θ에 대하여 심프슨 공식과 10^{-10} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 피적분함수를 $1/(1-a\cos x)$ 꼴로 맞출 때 밖으로 묶어 낸 인수 $\frac{1}{2}$(또는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$)를 빠뜨린다.
- 마지막 부분에서 $a=+\frac{1}{\sqrt{2}}$를 쓴다. $\sqrt{2}+\cos x$의 부호 때문에 a는 음수이다.
- k를 놓친다. 답은 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$이지, $\tan^{-1}(t/k)$나 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(kt)$가 아니다.

STEP 너머

치환 $t=\tan\frac{1}{2}x$(흔히 바이어슈트라스 치환(Weierstrass substitution)이라고 부른다)가 잘 통하는 이유는, 이 치환이 단위원(unit circle)을 유리함수로 매개화(parametrise)하기 때문이다. 그래서 $\sin x$와 $\cos x$의 임의의 유리함수가 t의 유리함수로 바뀌고, 이는 언제나 부분분수(partial fractions)를 이용해 적분할 수 있다. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x/(1-a\cos x)=2\pi/\sqrt{1-a^2}$ 같은 적분은 복소해석학(complex analysis)에서 경로적분(contour integration)의 표준적인 첫 예제이기도 한데, 이때는 치환 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$와 유수 정리(residue theorem)가 일을 해 준다. 이러한 관점에 대해서는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 참고하라.

풀이

STEP III 1996, 문제 4

순수수학 • 곱을 최대로 하는 분할

> **STEP III 1996, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q4

핵심 아이디어

N을 나누는 모든 방법을 하나하나 살펴보는 대신, **최적인**(*optimal*) 분할(splitting)이 무엇을 포함할 수 없는지를 묻는다. 너무 큰 부분은 곱(product)을 줄이지 않으면서 두 조각으로 쪼갤 수 있는데, 처음의 부등식(inequality)이 바로 이것을 측정한다. 1과 같은 부분은 낭비이고, 너무 많은 2는 3으로 바꿀 수 있다. 이러한 조작을 거치고 나면 살아남는 형태는 몇 가지뿐이고, 합 N이 그중 하나를 골라 준다.

풀이

부등식

다음이 성립한다.

$$k \le 2(k-2) \iff k \le 2k-4 \iff k \ge 4.$$

따라서 이 부등식을 만족하는 정수는 $k = 4, 5, 6, \ldots$이다. 또한 등호는 $k = 4$일 때만 성립하고, $k \ge 5$이면 부등식은 엄격하다. 즉 $k < 2(k-2)$이다.

최적 분할의 모습

$N \ge 2$를 고정한다. N을 양의 정수들의 합으로 나타내는 방법은 유한개뿐이므로, 가장 큰 곱 $P(N)$이 존재한다. 부분들의 순서는 합에도 곱에도 영향을 주지 않으므로, 분할을 부분들의 모임으로 다룬다. 곱이 $P(N)$인 분할을 **최적** 분할이라 부르자. 세 가지 관찰을 하는데, 각 관찰은 합을 N으로 유지하면서 분할을 바꾼다.

(a) **5 이상인 부분은 없다.** 부분 $m \ge 5$를 두 부분 2와 $m-2$(둘 다 양수)로 바꾸면 곱에

$2(m-2)/m$이 곱해지는데, 엄격한 형태의 부등식에 의해 이 값은 1보다 크다. 따라서 부분 $m \geq 5$를 가진 분할은 최적이 아니다.

$2 \times 2 = 4$이므로(등호가 성립하는 경우 $k = 4$), 4와 같은 부분은 곱을 바꾸지 않고 $2+2$로 바꿀 수 있다. 따라서 최적 분할 가운데에는 3보다 큰 부분이 없는 것이 존재한다. 이제부터는 이러한 최적 분할을 다룬다.

(b) **1인 부분은 없다.** $N \geq 2$이므로 부분 1이 유일한 부분일 수는 없고, 따라서 다른 부분 a가 있다. 두 부분 1과 a를 하나의 부분 $a+1$로 바꾸면 합은 그대로이고, 인수 $1 \times a = a$는 $a+1 > a$로 바뀐다. 그러면 곱이 커지는데, 이는 최적 분할에서는 불가능하다.

(c) **2인 부분은 많아야 두 개이다.** 2가 세 개 있다면, $2+2+2$를 $3+3$으로 바꾸어 인수 8을 9로 바꿀 수 있으므로 역시 곱이 커진다.

따라서 어떤 최적 분할은 a개의 3과 b개의 2로 이루어져 있고($b \in \{0,1,2\}$),

$$N = 3a + 2b, \qquad P(N) = 3^a\, 2^b$$

이다.

> **?** **생각해 보기** 서로 다른 두 쌍 (a,b)가 같은 N에 모두 들어맞아서, 여전히 둘을 비교해야 하는 일이 생길 수 있을까?

그렇지 않다. 3을 법으로 하여 줄이면(modulo) $2b \equiv N \pmod 3$을 얻고, $b = 0,1,2$에 대하여 $2b \equiv 0,2,1 \pmod 3$이 되어 서로 다른 세 나머지(residue)가 나온다. 따라서 N이 b를 결정하고, 그러면 $a = (N-2b)/3$도 결정된다. 그러므로

$$P(N) = \begin{cases} 3^{N/3} & \text{단, } N \equiv 0 \pmod 3, \\ 2 \times 3^{(N-2)/3} & \text{단, } N \equiv 2 \pmod 3, \\ 2^2 \times 3^{(N-4)/3} & \text{단, } N \equiv 1 \pmod 3,\ N \geq 4. \end{cases}$$

$N = 5, \ldots, 9$일 때의 값

이를 각 N에 차례로 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 5 &= 3+2, & P(5) &= 2 \times 3, \\ 6 &= 3+3, & P(6) &= 3^2, \\ 7 &= 3+2+2, & P(7) &= 2^2 \times 3, \\ 8 &= 3+3+2, & P(8) &= 2 \times 3^2, \\ 9 &= 3+3+3, & P(9) &= 3^3, \end{aligned}$$

이로써 요구된 결과를 얻는다. ($N = 7$일 때는 분할 $4 + 3$도 최적이다. 관찰 (a)에서 4를 배제하지 않고 **바꾸는** 것만 허용한 이유가 이것이다.)

$P(1000)$ 구하기

$1000 = 3 \times 332 + 4$이므로 $1000 \equiv 1 \pmod 3$이고, 따라서 $b = 2$, $a = (1000 - 4)/3 = 332$이다. 최적 분할은 332개의 3과 두 개의 2로 이루어지고,

$$P(1000) = 2^2 \times 3^{332}$$

이다. 같은 말이지만, 최적 분할은 332개의 3과 두 개의 2, 또는 332개의 3과 한 개의 4로 이루어진 것이다. (a)–(c)의 조작에 의해 다른 분할은 모두 엄격하게 개선될 수 있으므로, 최적 분할은 이 두 가지뿐이다.

검산

- $N \leq 40$인 N에 대하여 모든 분할을 전수 탐색(brute-force search)한 결과는 주어진 다섯 값을 포함하여 공식과 일치한다.
- $P(n) = \max_{1 \leq p \leq n} p\,P(n-p)$를 이용하여 컴퓨터로 정확히 계산하면 $P(1000) = 4 \times 3^{332}$를 얻는데, 이는 160자리 수이다.
- 타당성 점검으로, 정수가 아닌 "분할"과 비교해 보자. N/x개의 같은 부분으로 나누면 곱은 $x^{N/x}$이고, 이 값은 $x = \mathrm{e} \approx 2.72$에서 최대가 된다. 바로 이 때문에 3들이(그리고 가끔의 2가) 이기는 것이다.

흔한 실수

- $1000 = 3 \times 333 + 1$로 쓰고 3^{333}이라고 답하는 것. 이 분할에는 1이 들어 있고, $4 > 3$이므로 $3 + 1$은 $2 + 2$로 바꾸어야 한다.
- 부분 4가 "나타날 수 없다"고 말하는 것. 4는 최적 분할에 나타날 수 있다. 다만 $2 + 2$보다 나은 결과를 주는 일이 없을 뿐이다.
- $N = 5, \ldots, 9$일 때의 값을 나열하기만 하고 이보다 나은 것이 없음을 보이지 않는 것. 이 값들이 최대임을 증명하는 것은 구조에 대한 논증이다.

STEP 너머

여기서의 논증은 전형적인 **극값 논법**(*extremal argument*) 또는 **교환 논법**(*exchange argument*)이다. 즉 가장 좋은 대상이 존재한다고 가정하고, 그것이 어떤 국소적 패턴을 피

해야 함을 보인다. 같은 아이디어가 조합론(combinatorics)에서, 탐욕 알고리즘(greedy algorithm)이 최적임을 증명할 때, 그리고 정수 분할(integer partition) 이론에서 나타난다. 연속 버전($x^{N/x}$를 최대화하는 문제)은 즐거운 미적분 연습 문제이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를, 합동식(congruence)과 초등 정수론(number theory)에 관해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*을 참고하라.

풀이

STEP III 1996, 문제 5

순수수학 • 배각 공식

> **STEP III 1996, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q5

핵심 아이디어

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7$을 이항정리(binomial theorem)로 전개하고 드무아브르(de Moivre)의 정리(de Moivre's theorem)와 비교하면 $\cos 7\theta$와 $\sin 7\theta$를 다항식(polynomial)으로 나타낼 수 있다. 여기서 전체를 $\cos^7\theta$로 나누면 모든 것이 $t = \tan\theta$의 거듭제곱으로 바뀐다. $\tan 7\theta$를 t에 대한 두 다항식의 비로 나타내고 나면, $\tan 7\theta$가 0이 되는 각에서는 분자가 0이 되고, $\tan 7\theta$가 정의되지 않는 각에서는 분모가 0이 된다. 두 다항식은 인수 t를 제외하면 모두 우함수(even)이므로 t^2에 대한 삼차식(cubic)이 되고, 나머지는 비에트(Vieta)의 공식(Vieta's formulae)이 해결해 준다.

풀이

$\tan 7\theta$에 대한 공식

$c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$라 하면, 드무아브르의 정리와 이항정리에 의해

$$\cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta = (c + \mathrm{i}s)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \mathrm{i}^k c^{7-k} s^k.$$

$\cos\theta \neq 0$이라 가정하여 $t = \tan\theta$가 정의되도록 한다. c^7을 묶어 내면 $(c + \mathrm{i}s)^7 = c^7(1 + \mathrm{i}t)^7$이다. $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$과 이항계수(binomial coefficient) $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$을 이용하면

$$(1 + \mathrm{i}t)^7 = (1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6) + \mathrm{i}\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

실수부와 허수부를 비교하면(i를 제외한 모든 것은 실수이다)

$$\cos 7\theta = \cos^7\theta\,(1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6),$$
$$\sin 7\theta = \cos^7\theta\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

두 식을 나누면 인수 $\cos^7\theta$가 약분되고, 분자와 분모에 -1을 곱하면

$$\tan 7\theta = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = \frac{t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)}{7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1},$$

이므로 요구된 식이 성립한다.

나중을 위해 위의 두 식이 말해 주는 바를 정리해 둔다. $N(t) = t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)$, $D(t) = 7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1$이라 하자. 그러면 $\sin 7\theta = -\cos^7\theta\, N(t)$이고 $\cos 7\theta = -\cos^7\theta\, D(t)$이므로, $\cos\theta \neq 0$일 때

$$\sin 7\theta = 0 \iff N(t) = 0, \qquad \cos 7\theta = 0 \iff D(t) = 0.$$

소문항 (i)

$k = 1, 2, 3$에 대하여 $\theta = \frac{k\pi}{7}$로 놓는다. 그러면 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$이고 $\cos\theta \neq 0$이므로 $N(\tan\theta) = 0$이다. 또 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta \neq 0$이고, 따라서 인수 t를 약분할 수 있다.

$$t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0.$$

그러므로 $x = \tan^2\frac{\pi}{7}$, $\tan^2\frac{2\pi}{7}$, $\tan^2\frac{3\pi}{7}$에 대하여 $x = t^2$은

$$x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$$

을 만족한다.

> ? **생각해 보기** 이 세 수가 하나의 근을 여러 번 센 것이 아니라 모든 근이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

각 $\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7}$은 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하고, 이 구간에서 tan는 양수이며 순증가한다. 따라서 $\tan^2$의 세 값은 서로 다르다. 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이므로 이 세 수가 정확히 그 근이고, 이것이 구하는 삼차방정식이다.

비에트의 공식에 의해 세 근의 곱은 7이다.

$$\tan^2\tfrac{\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{2\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{3\pi}{7} = 7.$$

각 각이 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 각 탄젠트 값은 양수이고, 따라서 양의 제곱근을 택한다.

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\,\tan\tfrac{2\pi}{7}\,\tan\tfrac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

소문항 (ii)

이번에는 $\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$로 놓는다. 그러면 $7\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$이므로 $\cos 7\theta = 0$이고, 한편 $\cos\theta \neq 0$이다. 앞의 관찰에 의해 $D(\tan\theta) = 0$이므로 $y = \tan^2\theta$는

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0.$$

을 만족한다. 소문항 (i)에서와 마찬가지로 세 각은 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하고 서로 다르므로, $\tan^2\theta$의 세 값은 서로 다르며 정확히 이 삼차방정식의 근이다. 비에트의 공식에 의해 그 합은 $\frac{35}{7}$이다.

$$\tan^2\tfrac{\pi}{14} + \tan^2\tfrac{3\pi}{14} + \tan^2\tfrac{5\pi}{14} = 5.$$

소문항 (i)을 이용하는 간단한 다른 방법도 있다. $\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}$이고, 마찬가지로 $\frac{3\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$이므로, 구하는 합은 소문항 (i)의 삼차방정식의 근 x_i에 대한 $\sum 1/x_i$이다. 즉

$$\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{35}{7} = 5.$$

같은 이야기로, 소문항 (i)의 삼차방정식에 $x = 1/y$를 대입하고 분모를 없애면 소문항 (ii)의 삼차방정식이 나온다.

검산

- $t = 1$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{4}$를 대입한다. 공식은 $\frac{1-21+35-7}{7-35+21-1} = \frac{8}{-8} = -1$을 주고, 실제로 $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$이다.
- θ가 작을 때 $\tan 7\theta \approx 7t$이고, 공식은 일차 근사로 $\frac{-7t}{-1} = 7t$를 준다.
- 수치적으로 $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} \approx 0.4816 \times 1.2540 \times 4.3813 \approx 2.6458 \approx \sqrt{7}$이고, $\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} \approx 0.0521 + 0.6360 + 4.3119 = 5.0000$이다.

흔한 실수

- 세 값이 서로 다르다는 것, 그래서 이들이 정말로 삼차방정식의 **모든** 근이라는 것을 정당화하지 않는다.
- 소문항 (i)에서 $\pm\sqrt{7}$이라고 답한다. 세 탄젠트 값이 모두 양수이므로 부호는 정해져 있다.
- i의 거듭제곱에서 부호를 틀린다. $\mathrm{i}^6 = -1$이고 $\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$이다.

STEP 너머

수 $\tan^2 \frac{k\pi}{7}$들은 켤레 대수적 수(conjugate algebraic numbers)이다. 즉 이들은 정수 계수를 갖는 하나의 기약(irreducible) 삼차다항식의 근이며, 따라서 이들에 대한 대칭식(symmetric expression)은 모두 유리수이다. 이것이 다항식의 근들 사이의 대칭을 연구하는 갈루아(Galois) 이론(Galois theory)의 출발점이다. 같은 기법으로 $\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$과 같은 항등식도 얻을 수 있는데, 이 항등식은 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$의 한 초등적 증명에 쓰인다. 드무아브르의 정리와 단위근(roots of unity)을 기하학적으로 보고 싶다면 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 이런 종류의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 참고하라.

풀이

STEP III 1996, 문제 6

순수수학 • 행렬의 군

> **STEP III 1996, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.8 절 **특이행렬로 이루어진 군**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/singular-group.html

핵심 아이디어

S의 모든 행렬은 하나의 고정된 행렬 $\mathbf{J}$의 상수배이고, $\mathbf{J}^2$ 역시 $\mathbf{J}$의 상수배이다. 따라서 S의 원소끼리 곱하는 일은 결국 실수끼리 곱하는 일이 된다. 놀라운 점은 이 군(group)의 항등원(identity)이 단위행렬(identity matrix) $\mathbf{I}$가 **아니라는** 것이다. 이 군에는 $\mathbf{I}$가 전혀 필요하지 않다. 소문항 (ii)는 왜 그럴 수밖에 없는지 설명한다. 군 안에서는 모든 원소를 다른 어떤 원소가 들어간 곱으로 나타낼 수 있고, 행렬식(determinant)은 곱하면 곱해지기 때문이다.

풀이

소문항 (i)

다음과 같이 두자.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}.$$

S의 모든 원소는 $a \neq 0$인 $a\mathbf{J}$ 꼴이며, 이를 $\mathbf{M}_a = a\mathbf{J}$로 쓴다.

닫힘성(closure). 0이 아닌 a와 b에 대하여

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = ab\,\mathbf{J}^2 = 2ab\,\mathbf{J} = \mathbf{M}_{2ab}.$$

$a \neq 0$이고 $b \neq 0$이므로 $2ab \neq 0$이고, 따라서 이 곱은 S에 속한다. 그러므로 S는 행렬 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

이제 나머지 군의 공리(group axioms)를 확인한다.

결합법칙(associativity). 행렬 곱셈은 모든 2×2 행렬에 대하여 결합법칙을 만족하므로, 특히 S의 행렬에 대해서도 만족한다.

항등원. 모든 b에 대하여 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b$, 즉 $2eb = b$를 만족하는 $\mathbf{M}_e$를 찾고자 한다. 따라서 $e = \frac{1}{2}$로 잡는다.

$$\mathbf{M}_{1/2}\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2\cdot\frac{1}{2}b} = \mathbf{M}_b,$$

마찬가지로 $\mathbf{M}_b\mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{M}_b$이다. 따라서 S에 속하는 $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{J}$는 항등원이다.

> **생각해 보기** 단위행렬 $\mathbf{I}$는 S에 속하지 않는다. 행렬로 이루어진 군이라면 단위행렬이 있어야 하지 않을까?

그렇지 않다. 군에 필요한 것은 그 집합의 다른 원소들에 대하여 항등원 역할을 하는 *어떤* 원소이며, $\frac{1}{2}\mathbf{J}$는 S의 모든 원소에 대하여 그 역할을 한다. 이것이 모든 2×2 행렬에 대한 항등원은 아니지만(예를 들어 $\frac{1}{2}\mathbf{JI} \neq \mathbf{I}$), $\mathbf{I}$는 S에 속하지 않으므로 문제가 되지 않는다.

역원(inverse). $\mathbf{M}_a$가 주어졌을 때 $2ac = \frac{1}{2}$를 만족하는 $\mathbf{M}_c$를 찾고자 한다. 그러면 $c = \dfrac{1}{4a}$이고, $a \neq 0$이므로 이 값은 존재하며 0이 아니다. 이때

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/(4a)} = \mathbf{M}_{1/(4a)}\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_{2a/(4a)} = \mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{E}.$$

네 공리가 모두 성립하므로 S는 행렬 곱셈에 대하여 군이다. (게다가 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2ab} = \mathbf{M}_b\mathbf{M}_a$이므로 아벨 군(abelian group)이기도 하다.) S의 모든 원소의 행렬식은 $a^2 - a^2 = 0$임에 주목하자. 이 행렬들은 보통의 의미에서는 역행렬이 없지만, 각각 군 안에서는 역원을 가진다.

소문항 (ii)

$\mathbf{A} \in G$가 $\det\mathbf{A} = 0$을 만족한다고 하고, $\mathbf{B}$를 G의 임의의 원소라 하자. G는 군이므로 $\mathbf{A}$는 G 안에서 $\mathbf{AA}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{E}$를 만족하는 역원 $\mathbf{A}'$을 가진다. ($\mathbf{A}^{-1}$이 아니라 $\mathbf{A}'$으로 쓴다. 이것은 G 안에서의 역원이지, 존재하지 않는 역행렬이 아니기 때문이다.)

$\mathbf{C} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$라 하자. 닫힘성에 의해 $\mathbf{C} \in G$이고,

$$\mathbf{AC} = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = (\mathbf{AA}')\mathbf{B} = \mathbf{EB} = \mathbf{B}$$

이다. 여기서 결합법칙과 $\mathbf{E}$가 G의 항등원이라는 사실을 이용하였다. 따라서 방정식 $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$는 G 안에 해 $\mathbf{C}$를 가진다. 양변의 행렬식을 취하고 $\det(\mathbf{XY}) = \det\mathbf{X}\det\mathbf{Y}$를 이용하면

$$\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}\ \det\mathbf{C} = 0 \cdot \det\mathbf{C} = 0.$$

$\mathbf{B}$는 임의의 원소였으므로 G의 모든 원소는 특이 행렬(singular matrix)이다. 특히 이러한 군의 항등원 $\mathbf{E}$도 특이 행렬이므로, 소문항 (i)에서 본 것처럼 $\mathbf{I}$일 수 없다.

생각해 보기 G가 단지 곱셈에 대하여 닫힌 집합이 아니라 군이라는 사실은 어디에 쓰였는가?

역원 $\mathbf{A}'$과 항등원 $\mathbf{E}$를 이용하여 $\mathbf{B}$를 $\mathbf{A}$와 G의 어떤 원소의 곱으로 나타내었다. 이것들이 없으면 결과가 성립하지 않는다. 예를 들어 $\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$은 곱셈에 대하여 닫혀 있고 특이 행렬을 포함하지만, $\mathbf{I}$는 특이 행렬이 아니다. (이 집합은 군이 아니다. $\mathbf{0}$은 역원을 가지지 않는다.)

$n = 3$인 예. 소문항 (i)을 그대로 따라 한다. 다음과 같이 두자.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{\, a\mathbf{K} : a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,\}.$$

$\mathbf{K}^2$의 각 성분은 $1+1+1 = 3$이므로 $\mathbf{K}^2 = 3\mathbf{K}$이고

$$(a\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = 3ab\,\mathbf{K}.$$

- **닫힘성**: $a, b \neq 0$이면 $3ab \neq 0$이므로 이 곱은 G에 속한다.
- **결합법칙**: 행렬 곱셈으로부터 그대로 물려받는다.
- **항등원**: $(\frac{1}{3}\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = (b\mathbf{K})(\frac{1}{3}\mathbf{K}) = 3 \cdot \frac{1}{3}b\,\mathbf{K} = b\mathbf{K}$이므로 $\mathbf{E} = \frac{1}{3}\mathbf{K}$이다.
- **역원**: $3 \cdot a \cdot \dfrac{1}{9a} = \frac{1}{3}$이므로 $a\mathbf{K}$의 역원은 $\dfrac{1}{9a}\mathbf{K}$이다.

따라서 G는 행렬 곱셈에 대하여 군이다. 모든 $a\mathbf{K}$는 세 행이 같으므로 $\det(a\mathbf{K}) = 0$이다. 즉 이것은 3×3 특이 행렬로 이루어진 군이다.

(똑같이 잘 되는 또 다른 예로 $a, b \neq 0$인 행렬 $\mathrm{diag}(a, b, 0)$ 전체의 집합이 있으며, 그 항등원은 $\mathrm{diag}(1, 1, 0)$이다.)

검산

- 한 경우를 시험해 보자. $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{1/12}$의 모든 성분은 $3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$이므로 이 곱은 $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1/2}$와 같고, 이는 역원 공식 $\frac{1}{4a}$가 예측하는 그대로이다.
- 0이 아닌 임의의 a, b, c 수백 개에 대하여 정확한 분수 계산으로, 2×2와 3×3 두 행렬족 모두에서 닫힘성, 항등원, 역원 공식이 성립하는지, 이 행렬들의 행렬식이 모두 0인지, 그리고 $\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$가 성립하는지 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathbf{I}$를 항등원으로 잡거나, $\mathbf{A}^{-1}$을 보통의 역행렬로 잡는 것. 둘 다 S에는 없다. 항등원과 역원은 그 군 자체의 곱셈 규칙으로부터 찾아야 한다.

- $2ab \neq 0$인지 확인하는 것을 잊는 것. 닫힘성이 성립하려면 곱이 올바른 꼴이어야 할 뿐만 아니라 매개변수가 0이 아니어야 한다.

STEP 너머

군은 그 원소들이 어디에 놓여 있는지가 아니라 그 연산에 의해 정의된다. 여기서는 군이 $n \times n$ 행렬들 안에 들어 있으면서도 그 행렬들의 항등원을 공유하지 않는다. 사실 $\mathbf{E}$는 항상 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$를 만족하므로 사영(projection)이며, 이 군은 $\mathbf{E}$의 상(image) 위에서 가역인 사상으로 작용한다. 사상 $a \mapsto \mathbf{M}_{a/2}$는 곱셈에 대한 0이 아닌 실수 전체로부터 S로의 동형사상(isomorphism)이며, 이는 직접 확인할 수 있다. 더 알고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를, 사영에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 1996, 문제 7

순수수학 • 근의 대칭함수

STEP III 1996, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q7

핵심 아이디어

두 소문항은 같은 사실에 기대고 있다. 세 수에 대한 대칭식(symmetric expression)은 모두 세 수의 합, 두 수씩 곱한 것의 합, 세 수의 곱으로 나타낼 수 있으며, 이 세 양은 바로 그 세 수를 근(root)으로 하는 삼차식(cubic)의 계수이다. (i)에서는 이 사실 덕분에 비선형 연립방정식이 삼차방정식 하나로 바뀐다. (ii)에서는 근을 구할 필요조차 없다. 헤론의 공식(Heron's formula)은 a, b, c에 대해 대칭이므로 삼차식의 계수만으로 충분하다.

풀이

소문항 (i)

먼저 제곱의 합을 구한다.

$$\alpha^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \qquad \text{따라서} \qquad x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 - 2\beta.$$

다음으로 인수분해(factorisation)

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right),$$

를 이용한다. 이 식은 우변을 전개하여 확인할 수 있다. $x\cdot xy$와 $y\cdot(-xy)$ 같은 아홉 개의 교차항은 둘씩 짝지어 소거되고, $-xyz$ 꼴의 세 항이 남는다. 대입하면

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 3\gamma + \alpha\left(\alpha^2-2\beta-\beta\right) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma. \end{aligned}$$

이다. 따라서 $A=1, B=-3, C=3\gamma$이다. (여기서 C는 곱의 세 배이므로 γ에 따라 달라지고, A와 B는 그냥 수이다.)

이제 주어진 방정식을 풀자. $\alpha = 1$이고, 제곱의 합으로부터

$$3 = \alpha^2 - 2\beta = 1 - 2\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = -1.$$

를 얻는다. 그러면 세제곱의 합으로부터

$$4 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma = 1 + 3 + 3\gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0.$$

를 얻는다.

생각해 보기 α, β, γ를 알았다. 어떻게 하면 x, y, z로 되돌아갈 수 있을까?

수 x, y, z의 합이 α, 두 수씩 곱한 것의 합이 β, 곱이 γ일 필요충분조건은 이 세 수가

$$(t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma = 0.$$

의 세 근이라는 것이다. 양쪽 방향이 모두 성립한다. x, y, z가 연립방정식의 해이면 이들은 이 삼차방정식의 근이고, 거꾸로 삼차방정식의 근들은 어떤 순서로 놓든 올바른 α, β, γ를 가지므로 (위의 항등식에 의해) 세 방정식을 모두 만족한다. 여기서 삼차방정식은

$$t^3 - t^2 - t = t\,(t^2 - t - 1) = 0, \qquad \text{따라서} \qquad t = 0, \quad t = \tfrac{1}{2}\big(1 + \sqrt{5}\big), \quad t = \tfrac{1}{2}\big(1 - \sqrt{5}\big).$$

이다. 그러므로 해는

$$\{x, y, z\} = \Big\{\, 0,\ \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \,\Big\},$$

이며 순서는 상관없다. 세 값이 서로 다르므로 순서쌍 (x, y, z)는 모두 여섯 개이다.

소문항 (ii)

a, b, c가 삼차방정식의 근이므로 모든 x에 대해

$$x^3 - 16x^2 + 81x - 128 = (x-a)(x-b)(x-c)$$

이다. x^2의 계수를 비교하면 $a + b + c = 16$이므로 $s = 8$이다. 이제 요령은 이 항등식에 $x = s = 8$을 대입하는 것이다. 우변은 $(s-a)(s-b)(s-c)$가 되는데, 이것이 바로 헤론의 공식에 나오는 곱이다.

$$(s-a)(s-b)(s-c) = 8^3 - 16 \cdot 8^2 + 81 \cdot 8 - 128 = 512 - 1024 + 648 - 128 = 8.$$

따라서

$$\text{넓이} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8.$$

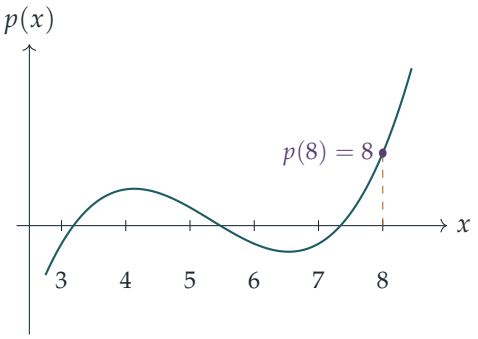
이다.

? 생각해 보기 이런 변의 길이를 갖는 삼각형이 정말 존재할까?

확인해야 한다. 헤론의 공식은 a, b, c가 양수이고 각각이 나머지 둘의 합보다 작을 때에만 삼각형을 나타내기 때문이다. $a < b + c \iff 2a < a + b + c \iff a < s$이므로, 세 근이 모두 실수이고 양수이며 8보다 작아야 한다. $p(x) = x^3 - 16x^2 + 81x - 128$이라 하자. 그러면

$$p(3) = -2, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 2, \quad p(6) = -2, \quad p(7) = -2, \quad p(8) = 8,$$

이므로 부호의 변화에 의해 $(3,4)$, $(5,6)$, $(7,8)$ 각각에 근이 하나씩 있다. 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이므로 이것이 근의 전부이고, 모든 근은 0과 8 사이에 엄격하게 놓인다. 삼각형이 존재하며, 그 넓이는 8이다.



검산

- (i)에서 $x = 1, y = 2, z = 3$을 넣어 보자. $\alpha = 6, \beta = 11, \gamma = 6$이고 $216 - 198 + 18 = 36 = 1 + 8 + 27$이다.
- $x = 0, y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618, z = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \approx -0.618$일 때 합은 1이고, $y^2 = y + 1$, $z^2 = z + 1$이므로 제곱의 합은 $(y + z) + 2 = 3$, 세제곱의 합은 $y^2 + z^2 + (y + z) = 3 + 1 = 4$이다.
- (ii)의 근을 수치로 구하면 $a \approx 3.186$, $b \approx 5.471$, $c \approx 7.343$이다. 이 값으로 헤론의 공식을 계산하면 8.000이 나오고, 코사인 법칙(cosine rule)으로 C를 구해 $\frac{1}{2}ab\sin C$를 계산해도 같은 값이 나온다.

흔한 실수

- 여섯 가지 순서를 모두 제시하지 않고 순서쌍 하나만 답하거나, $t = 0$이 $t^3 - t^2 - t = 0$의 근이라는 것을 빠뜨린다.

- 근과 계수의 관계(비에트 공식, Vieta's formulas)에서 부호를 틀린다. $t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$에서는 부호가 번갈아 나타난다.
- 근들이 실제로 삼각형을 이루는지 확인하지 않고 넓이를 구한다.

STEP 너머

대칭다항식의 기본정리(fundamental theorem of symmetric polynomials)에 따르면, x, y, z를 서로 바꾸어도 변하지 않는 x, y, z의 다항식은 모두 기본대칭함수(elementary symmetric functions) α, β, γ의 다항식이다. 뉴턴(Newton) 항등식은 거듭제곱의 합 $x^k + y^k + z^k$를 점화식으로 구해 준다. 이러한 아이디어는 갈루아(Galois) 이론으로 이어지는데, 이 이론은 삼차방정식과 사차방정식에는 근의 공식이 있지만 일반적인 오차방정식에는 없는 이유를 설명해 준다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 그 방향으로 내딛는 첫걸음으로 좋은 책이다.

풀이

STEP III 1996, 문제 8

순수수학 • 뫼비우스 변환

> **STEP III 1996, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q8

핵심 아이디어

이 변환들은 뫼비우스(Möbius) 변환, 곧 일차분수 변환(fractional linear transformation)이며, 거의 모든 내용이 두 가지 관찰에서 나온다. 첫째, $y = T(x)$에서 분모를 없애면 x에 대해 일차이고 **동시에** y에 대해서도 일차인 방정식을 얻으므로, 어느 쪽에 대해서든 풀 수 있다. 둘째, $T(x)$를 상수와 $1/(cx-d)$의 상수배의 합으로 쓰면, T가 결코 가지지 않는 값이 무엇인지 곧바로 보인다. 합성(composition)은 그냥 대입하고 분모를 곱해 정리하면 된다. 그 결과는 각 T를 행렬 $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$에 대응시키면 가장 쉽게 정리된다.

풀이

고정점

$x \neq d/c$일 때, $T(x) = x$는 $ax - b = x(cx - d)$를 뜻한다. 즉

$$cx^2 - (a+d)x + b = 0. \qquad (*)$$

먼저 ($c \neq 0$일 때) $(*)$이 금지된 값 $x = d/c$를 해로 낼 수 없음을 확인한다. 대입하면 $d^2/c - (a+d)d/c + b = (bc - ad)/c \neq 0$이므로, $(*)$의 모든 근은 실제 고정점(fixed point)이다.

$c \neq 0$인 경우, $(*)$은 이차방정식이고 고정점은

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4bc}}{2c}.$$

이다. $(a+d)^2 > 4bc$이면 고정점이 두 개, $(a+d)^2 = 4bc$이면 한 개, $(a+d)^2 < 4bc$이면 하나도 없다.

$c = 0$인 경우, 조건 $ad \neq bc$는 $ad \neq 0$이 되므로 $d \neq 0$이고, $T(x) = (b - ax)/d$는 모든 곳에서 정의된다. 이제 $(*)$은 $(a + d)x = b$가 된다. $a + d \neq 0$이면 고정점은 정확히 하나, $x = b/(a + d)$이다. $a + d = 0$이고 $b \neq 0$이면 고정점이 없다. $a + d = 0$이고 $b = 0$이면 $T(x) = -ax/d = x$이므로 T는 항등함수(identity)이고 모든 x가 고정점이다.

역함수

$y(cx - d) = ax - b$에서 $cxy - dy = ax - b$이므로 $x(cy - a) = dy - b$이고, 따라서

$$x = T^{-1}(y) = \frac{dy - b}{cy - a}.$$

이다. 이 역함수(inverse)는 T와 같은 꼴이며,

$$a' = d, \qquad b' = b, \qquad c' = c, \qquad d' = a,$$

이고, $a'd' - b'c' = da - bc \neq 0$이므로 조건도 여전히 성립한다. ($cy - a$로 나누는 것은 정당하다. $y = a/c$는 결코 T의 값이 되지 않기 때문이다. 다음 부분을 보라.)

집합 S_r

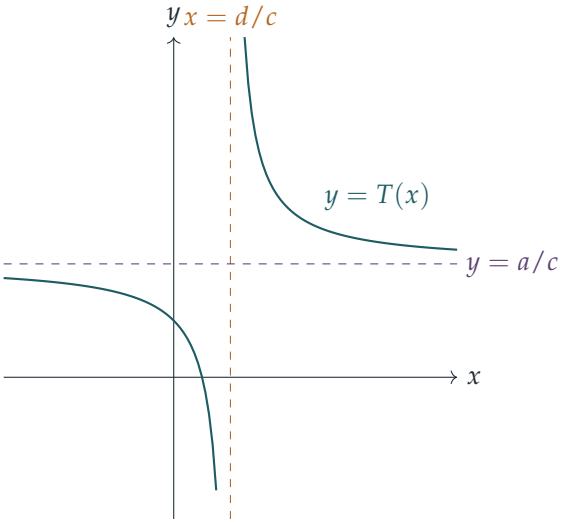
$c \neq 0$이라 하자. $T(x)$는 정확히 $cx \neq d$일 때 정의되므로 $r = d/c$로 잡는다. 그러면 T는 모든 $x \in S_{d/c}$에서 정의된다. 상(image)을 구하기 위해 상수 부분을 떼어 낸다.

$$ax - b = \frac{a}{c}(cx - d) + \frac{ad - bc}{c}, \qquad \text{따라서} \qquad T(x) = \frac{a}{c} + \frac{ad - bc}{c\,(cx - d)}.$$

$ad - bc \neq 0$이므로 둘째 항은 결코 0이 아니고, 따라서 $T(x) \neq a/c$이다. 역으로, $y \neq a/c$인 모든 값이 실제로 얻어진다. 역함수 공식에서 $x = (dy - b)/(cy - a)$이고, 이 x는 d/c가 아니다. d/c는 T^{-1}의 값이 아니기 때문이다(T^{-1}에 같은 논증을 적용하면 된다. T^{-1}의 "a'/c'"는 d/c이다). 그러므로

$$T(S_{d/c}) = S_{a/c},$$

이고, T는 $S_{d/c}$에서 $S_{a/c}$로의 전단사(bijection)이다. 그래프는 점근선(asymptote)이 $x = d/c$와 $y = a/c$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이다.



(그림은 $T(x) = (2x-1)/(x-1) = 2 + 1/(x-1)$을 사용했다.)

$c = 0$**인 경우**, $ad \neq 0$이므로 $d \neq 0$이고 $a \neq 0$이며, $T(x) = (b - ax)/d$는 상수가 아닌 일차함수이다. 따라서 T는 **모든** 실수 x에서 정의되고 제외할 값이 없으며, $\mathbb{R}$을 $\mathbb{R}$ 위로 전단사로 보낸다. 그래도 점 r 하나를 뺀다면 $T(S_r) = S_{T(r)} = S_{(b-ar)/d}$이다.

합성

$T_1(x) = \dfrac{a_1x - b_1}{c_1x - d_1}$을 T_2에 대입하고, 분자와 분모에 $c_1x - d_1$을 곱한다.

$$\begin{aligned} T_2(T_1(x)) &= \frac{a_2(a_1x - b_1) - b_2(c_1x - d_1)}{c_2(a_1x - b_1) - d_2(c_1x - d_1)} \\ &= \frac{(a_1a_2 - b_2c_1)\,x - (a_2b_1 - b_2d_1)}{(a_1c_2 - c_1d_2)\,x - (b_1c_2 - d_1d_2)}. \end{aligned}$$

따라서 T_3도 같은 꼴이며,

$$a_3 = a_1a_2 - b_2c_1, \quad b_3 = a_2b_1 - b_2d_1, \quad c_3 = a_1c_2 - c_1d_2, \quad d_3 = b_1c_2 - d_1d_2.$$

이다.

> ? **생각해 보기** "같은 꼴"이라는 것이 정말 증명되었는가? $a_3d_3 \neq b_3c_3$도 필요하다.

그렇다, 이것도 필요하다. 이 계수들은 정확히 행렬(matrix)의 곱

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ c_1 & -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ c_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

의 성분이고, 각 행렬의 행렬식(determinant)은 $bc - ad$이다. 곱의 행렬식은 행렬식의 곱이므로

$$b_3c_3 - a_3d_3 = (b_1c_1 - a_1d_1)(b_2c_2 - a_2d_2) \neq 0.$$

이다. (직접 전개해도 되는데, 몇 줄의 대수 계산이면 된다.) 따라서 T_3은 같은 유형의 변환이다.

T^2이 항등함수가 되는 때는 언제인가?

합성 공식에서 $T_1 = T_2 = T$로 놓는다. 그러면 $T^2(x) = \dfrac{Ax - B}{Cx - D}$이고,

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b(a - d), \qquad C = c(a - d), \qquad D = bc - d^2.$$

이다. T^2이 항등함수라는 것은 정의역(domain)의 모든 x에 대해 $Ax - B = x(Cx - D)$라는 뜻이며, 정의역은 많아야 몇 개의 점을 뺀 전체이다. 무한히 많은 점에서 성립하는 다항식 등식은 항등적으로 성립하므로 계수를 비교한다.

$$C = 0, \qquad A + D = 0, \qquad B = 0,$$

즉

$$c(a - d) = 0, \qquad (a - d)(a + d) = 0, \qquad b(a - d) = 0.$$

- $a = d$이면 세 조건이 모두 성립한다. 실제로 $T^2(x) = \dfrac{(a^2 - bc)x}{-(bc - a^2)} = x$이며, 여기서 $a^2 - bc = ad - bc \neq 0$이다.
- $a \neq d$이면 $b = c = 0$이고 $a = -d$여야 한다. 그러면 $T(x) = ax/(-d) = x$이므로 T 자체가 항등함수이다.

따라서 T^2이 항등함수일 **필요충분조건은 $a = d$이거나, $b = c = 0$이고 $a + d = 0$인 것**이다(후자는 T가 항등함수인 경우이다). 둘째 경우는 자명하므로, 흥미로운 대합(involution)은 정확히 $a^2 \neq bc$인 사상 $x \mapsto \dfrac{ax - b}{cx - a}$들이다.

예

방금 구한 조건에 따라, $a = d$인 두 사상으로서 그 합성은 $a \neq d$인 것이 필요하다. 다음을 잡자.

$$T_1(x) = -x \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 0, 0, 1), \qquad T_2(x) = 1 - x \quad (a_2, b_2, c_2, d_2) = (1, 1, 0, 1).$$

둘 다 $a = d$이므로 T_1^2과 T_2^2은 항등함수이다. 이는 직접 확인할 수도 있다. $-(-x) = x$이고 $1 - (1 - x) = x$이다. 둘의 합성은

$$T_3(x) = T_2(T_1(x)) = 1 - (-x) = x + 1,$$

이고, 표준형에서 $(a_3, b_3, c_3, d_3) = (1, -1, 0, -1)$이므로 $a_3 \neq d_3$이다. 실제로 $T_3^2(x) = x + 2 \neq x$이다.

기하학적으로 보면, 직선의 두 반사(reflection)(0에 대한 반사와 $\frac{1}{2}$에 대한 반사)를 합성하면 평행이동(translation)이 되고, 평행이동은 자기 자신의 역이 아니다. $c \neq 0$인 예를 원한다면, 같은 T_2와 함께 $T_1(x) = -1/x$를 시도해 보라. 그러면 $T_3(x) = (x+1)/x$이고 $T_3^2(x) = (2x+1)/(x+1)$이다.

검산

- 그림의 예 $T(x) = (2x-1)/(x-1)(a = 2, b = 1, c = d = 1)$을 사용한다. 고정점은 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 근, 곧 $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$이며, $T(2.618\ldots) = 2.618\ldots$임을 확인할 수 있다. 역함수는 $(y-1)/(y-2)$이고, 예상대로 $y = 2 = a/c$에서 정의되지 않는다.
- 합성 공식에 $T_1 = T$, $T_2 = T^{-1}$, 즉 $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (d, b, c, a)$를 넣으면 $a_3 = ad - bc$, $b_3 = 0, c_3 = 0, d_3 = bc - ad$를 얻는다. 마땅히 그래야 하듯이 이것은 항등함수이다.
- 컴퓨터로 수천 개의 무작위 (a, b, c, d)에 대해 정확한 분수 계산을 써서 역함수, 상, 합성 공식을 검증했다. 또한 $ad \neq bc$인 모든 정수 $a, b, c, d \in [-3, 3]$에 대해 T^2이 항등함수가 될 조건을 직접 계산한 결과와 대조했다.

흔한 실수

- 자명한 경우를 빠뜨리는 것: 항등함수($b = c = 0, a = -d$)도 제곱하면 항등함수가 되므로, $a = d$는 **필요조건**이 아니다.
- 합성이 일차함수의 비라는 것만 보이고 $a_3 d_3 \neq b_3 c_3$을 확인하지 않는 것.
- $c = 0$인 경우에 제외되는 점을 찾으려 하는 것. 상수가 아닌 일차사상은 모든 곳에서 정의되고 모든 실수를 값으로 가진다.

STEP 너머

$T(d/c) = \infty$, $T(\infty) = a/c$로 두어 $x = \infty$를 허용하면, 이러한 모든 T는 확장된 실직선(extended line)의 전단사가 된다. 계수를 복소수로 하면 리만(Riemann) 구(Riemann sphere)의 뫼비우스 변환을 얻는다. 위에서 사용한 행렬 대응은 이 사상들이 군(group)을 이루며, 이 군이 스칼라배를 동일시한 가역 2×2 행렬들의 군, 곧 사영선형군(projective linear group)과 동형(isomorphic)임을 말해 준다. 합성은 행렬의 곱셈이 되고, 항등함수가 아닌 사상이 대합일 필요충분조건은 그 행렬의 대각합(trace)이 0인 것이다. 여기서는 그것이 $a - d = 0$이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*에는 뫼비우스 변환을 다룬 아

름다운 장이 있다.

풀이

STEP III 1996, 문제 9

역학 • 원운동

> **STEP III 1996, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q9

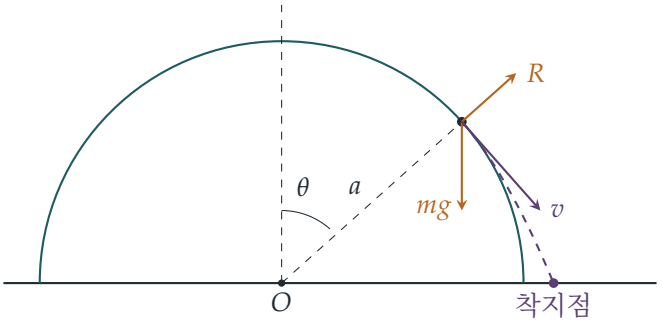
핵심 아이디어

운동은 두 단계로 이루어진다. 입자가 구 위에 머무는 동안에는 원운동을 하므로, 에너지 보존(energy conservation)으로 속력을 구하고 반지름 방향의 운동 방정식(equation of motion)으로 수직항력(normal reaction)을 구한다. 입자는 이 항력이 0으로 떨어지는 순간 구를 떠난다. 그 뒤로는 알려진 점에서 알려진 속력으로 접선(tangent) 방향으로 발사된 평범한 포물체(projectile)이므로, 이것이 중심의 높이를 지나는 위치만 찾으면 된다.

풀이

모형

입자를 중심이 O인 매끄러운 고정된 구 위에 놓인 질량 m의 질점(point mass)으로 보고, 공기 저항(air resistance)은 없다고 하자. 작용하는 힘은 무게 mg와 수직항력 R뿐이며, 수직항력은 반지름을 따라 O에서 멀어지는 방향으로 작용한다. 입자를 P라 할 때 OP와 연직 위쪽 방향이 이루는 각을 θ, 입자의 속력을 v라 하자. 처음 변위가 작으므로 초기 속력은 (극한으로서) 0으로 둔다.



1단계: 구 위에서

항력은 운동 방향에 수직이므로 일(work)을 하지 않고, 따라서 에너지가 보존된다. 입자는 꼭대기에서 $a - a\cos\theta$만큼 내려왔으므로

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga(1-\cos\theta), \qquad \text{즉} \qquad v^2 = 2ga(1-\cos\theta).$$

구 위에 머무는 동안 입자는 반지름 a인 원을 따라 움직이므로, O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{a} \quad\Longrightarrow\quad R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2).$$

생각해 보기 입자는 왜 정확히 $R = 0$일 때 구를 떠나는가?

구는 밀어낼 수만 있으므로 접촉하는 동안에는 $R \geq 0$이다. θ가 0에서부터 커지면 R는 mg에서부터 꾸준히 줄어들고, 위의 식은 $\cos\theta = \frac{2}{3}$을 넘어서면 $R < 0$을 준다. 이는 구가 입자를 안쪽으로 끌어당겨야 한다는 뜻인데, 구는 그렇게 할 수 없다. 따라서 접촉은 다음일 때 끊어진다.

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad \sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}, \qquad v^2 = 2ga\left(1-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{2}{3}ga.$$

2단계: 포물체 운동

원점을 O로 하고, x축은 (운동 방향의) 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡자. 구를 떠나는 순간 입자의 위치는

$$x_0 = a\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}a, \qquad y_0 = a\cos\theta = \tfrac{2}{3}a,$$

이고, 속도는 접선 방향으로 수평선 아래 θ의 각을 이룬다.

$$u_x = v\cos\theta = \tfrac{2}{3}v, \qquad u_y = -v\sin\theta = -\tfrac{\sqrt{5}}{3}v, \qquad \text{여기서} v = \sqrt{\tfrac{2}{3}ga}.$$

이제 $y = y_0 + u_y t - \frac{1}{2}gt^2$이므로, 입자가 $y = 0$에 도달하는 것은

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{3}v\,t - \tfrac{2}{3}a = 0.$$

일 때이다. 양의 근(root)을 택하면

$$t = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}v + \sqrt{\frac{5}{9}v^2 + \frac{4}{3}ga}}{g}.$$

$v^2 = \frac{2}{3}ga$이므로 근호 안의 식은 $\frac{10}{27}ga + \frac{36}{27}ga = \frac{46}{27}ga$이고, $\frac{\sqrt{5}}{3}v = \sqrt{\frac{10}{27}ga}$이다. 따라서

$$t = \sqrt{\frac{a}{27g}}\left(\sqrt{46} - \sqrt{10}\right).$$

비행하는 동안 이동한 수평 거리는

$$\begin{aligned} u_x t &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}ga} \cdot \sqrt{\frac{a}{27g}}\left(\sqrt{46} - \sqrt{10}\right) = \frac{2\sqrt{2}\,a}{27}\left(\sqrt{46} - \sqrt{10}\right) \\ &= \frac{2a}{27}\left(\sqrt{92} - \sqrt{20}\right) = \frac{2a}{27}\left(2\sqrt{23} - 2\sqrt{5}\right) = \frac{a}{27}\left(4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

여기에 출발 지점까지의 거리 $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{9\sqrt{5}}{27}a$를 더하면, 입자는 중심에서

$$x_0 + u_x t = \frac{a}{27}\left(9\sqrt{5} + 4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}\right) = \frac{a\left(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23}\right)}{27}$$

만큼 떨어진 곳에서 O를 지나는 수평면과 만난다. 이것이 구하려던 결과이다.

비행 경로는 구에 닿지 않는다

빈틈없이 하려면 포물체가 정말로 구에 닿지 않는지 확인해야 한다. 비행 경로를 따라 $f(t) = x^2 + y^2 - a^2$이라 하자. t의 거듭제곱으로 전개하면 다음과 같다.

- 상수항은 $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$이다.
- t의 계수는 $2(x_0 u_x + y_0 u_y) = 0$이다. 속도가 반지름에 수직이기 때문이다.
- t^2의 계수는 $u_x^2 + u_y^2 - g y_0 = v^2 - ga\cos\theta = 0$이며, 이는 정확히 $R = 0$이라는 조건이다.
- 남는 것은 $-g u_y t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4$이고, $u_y < 0$이다.

따라서 $t > 0$에서 $f(t) = g|u_y|\,t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4 > 0$이다. 입자는 구 바깥에 머물며, 위에서 구한 착지 거리가 실제로 입자가 도달하는 거리이다.

검산

- 답은 약 $1.125a$이다. 이는 당연히 a보다 커야 한다. 구는 O의 높이에서 거리 a까지 뻗어 있으므로 입자가 구를 비켜 지나가야 하기 때문이다.

- 중심 위로 $\frac{2}{3}a$의 높이에서 구를 떠난다는 것은 잘 알려진 결과이며, g나 m에 의존하지 않는다. 착지 거리도 이들에 의존하지 않는데, 이는 차원 분석(dimensional analysis)이 요구하는 바이다. 문제에 등장하는 길이는 a뿐이다.
- 운동을 수치적으로도 따라가 보았다. 아주 작은 변위에서 출발하여 $\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta$를 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 적분하고, $R = 0$에서 멈춘 뒤 포물체로 이어서 계산하면 $1.12458a$에 착지한다. 정확한 공식은 $1.124580\ldots a$를 준다.

흔한 실수

- ($R = 0$에서 얻은) $v^2 = ga\cos\theta$를 쓰고는 에너지 식과 결합하는 것을 잊거나, 잘못된 속력을 쓰는 것. 구를 떠날 때 $v^2 = \frac{2}{3}ga$이지 $\frac{1}{3}ga$가 아니다.
- 포물체를 수평으로 발사하는 것. 속도는 접선 방향으로 수평선 **아래로** θ의 각을 이루므로, 처음부터 아래쪽 성분을 가진다.
- 착지 거리를 중심이 아니라 구를 떠난 지점에서부터 재어 x_0를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

"접촉은 항력이 0이 될 때 끝난다"라는 조건은 **일방 구속**(*unilateral constraint*)의 한 예이다. 이런 구속은 철사에 꿰인 구슬에서부터 볼록한 다리를 넘어가는 자동차에 이르기까지 역학 곳곳에 나타난다. 풀이의 마지막 단계에서 일어난 우연, 즉 포물체의 경로와 구가 떠나는 지점에서 2차까지 일치한다는 사실은 그 순간 포물선과 원의 곡률(curvature)이 같다는 것을 뜻한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원운동, 구속력, 에너지 방법을 이러한 관점에서 다룬다.

풀이

STEP III 1996, 문제 10

역학 • 마찰이 있는 평형

STEP III 1996, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q10

핵심 아이디어

여섯 개의 평형(equilibrium) 방정식(각 원기둥마다 두 방향의 힘의 분해(resolution)와 하나의 모멘트(moment) 방정식)을 세우면, 이 방정식들이 모든 접촉력을 유일하게 결정한다는 것을 알게 된다. 핵심은 모멘트 방정식이다. 각 원기둥에는 중심에 대한 모멘트를 갖는 마찰력(frictional force)이 단 두 개뿐이므로, 이 두 힘의 크기는 같아야 한다. 그다음부터 네 개의 부등식은 각각 세 접촉선 중 하나에서의 "마찰력 $\leq$ 계수 $\times$ 수직항력(normal reaction)"이라는 조건이거나, 두 원기둥 사이에서 미는 힘이 음이 아니라는 조건일 뿐이다.

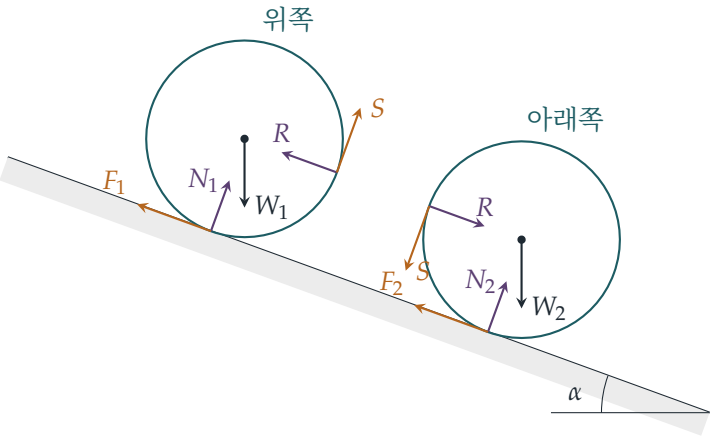
풀이

모형. 각 원기둥은 반지름이 a인 균일한 강체(rigid body)이므로 무게는 중심(축 위)에 작용한다. 두 중심을 지나는 연직 단면에서 생각한다. 반지름이 같고 두 원기둥이 모두 평면 위에 놓여 있으므로 중심선은 평면과 평행하고, 두 원기둥의 접촉점은 그 중심선의 중점이다. x축 방향은 경사면을 따라 **아래쪽**으로, y축 방향은 평면에 수직이고 평면 바깥쪽을 향하도록 잡는다.

힘을 다음과 같이 정의한다(모든 성분은 부호가 어느 쪽으로든 나올 수 있다).

- N_1, N_2: 평면이 위쪽 원기둥과 아래쪽 원기둥에 작용하는 수직항력;
- F_1, F_2: 평면이 두 원기둥에 작용하는 마찰력으로, 경사면을 따라 **위쪽**을 양의 방향으로 잰다;
- R: 두 원기둥 사이의 수직력으로, 중심선을 따라 작용하며 아래쪽 원기둥은 경사면 아래로, 위쪽 원기둥은 경사면 위로 민다;
- S: 두 원기둥 사이의 마찰력으로, 평면에 수직이며 위쪽 원기둥에는 평면에서 **멀어지는**

방향으로, 따라서 (뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 의해) 아래쪽 원기둥에는 평면을 **향하는** 방향으로 작용한다.



(알아보기 쉽도록 두 원기둥을 떨어뜨려 그렸다. R와 S는 하나의 접촉선에서 작용한다. 각 무게는 중심을 지나 연직 아래로 작용한다.)

모멘트. 각 원기둥의 중심에 대한 모멘트를 생각한다. 수직력 N_1, N_2, R와 무게는 모두 중심을 지나므로 모멘트를 갖는 힘은 마찰력뿐이다. 각 마찰력은 중심에서 거리 a인 곳에서 접선 방향으로 작용한다. 위쪽 원기둥에서 F_1(경사면 위쪽 방향, 원기둥의 맨 아래에서 작용)과 S(평면에서 멀어지는 방향, 경사 아래쪽 옆면에서 작용)는 서로 반대 방향의 모멘트를 가지므로

$$aF_1 = aS, \qquad \text{따라서} \qquad F_1 = S.$$

마찬가지로 아래쪽 원기둥에서 F_2(경사면 위쪽 방향, 맨 아래에서 작용)와 S(평면을 향하는 방향, 경사 위쪽 옆면에서 작용)는 서로 반대 방향의 모멘트를 가지므로 $F_2 = S$이다. 따라서

$$F_1 = F_2 = S.$$

? **생각해 보기** 평면이 각 원기둥에 작용하는 마찰력이 왜 두 원기둥 사이의 마찰력과 같아야 하는가?

자유롭게 구를 수 있는 원기둥이 평형을 유지하려면 축에 대한 짝힘(couple)이 상쇄되어야 하는데, 축에 대한 모멘트를 갖는 힘은 마찰력뿐이기 때문이다. 방향도 확인할 수 있다. 위쪽 원기둥에서 맨 아래에 경사면 위쪽으로 작용하는 평면의 마찰력은 원기둥을 경사 아래로, 즉 그림에서 시계 방향으로 굴리려 하고, 경사 아래쪽 옆면에서 위로 작용하는 마찰력은 원기둥을 반시계 방향으로 돌린다.

힘의 분해. 평면에 평행한 방향(경사면 아래쪽이 양의 방향):

$$\begin{aligned} \text{위쪽:} \quad & W_1 \sin\alpha - F_1 - R = 0, \\ \text{아래쪽:} \quad & W_2 \sin\alpha - F_2 + R = 0. \end{aligned}$$

두 식을 더하고 $F_1 = F_2 = S$를 이용하면

$$F_1 = F_2 = S = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha,$$

이고, 이는 예상대로 무게의 경사면 아래 방향 성분 전체의 절반이다. 이어서 두 식을 빼면

$$R = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

평면에 수직인 방향(바깥쪽이 양의 방향):

$$\begin{aligned} \text{위쪽:} \quad & N_1 - W_1\cos\alpha + S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_1 = W_1\cos\alpha - \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha, \\ \text{아래쪽:} \quad & N_2 - W_2\cos\alpha - S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_2 = W_2\cos\alpha + \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha. \end{aligned}$$

이렇게 여섯 개의 방정식이 여섯 개의 힘을 모두 결정한다. 평형은 이 힘들이 물리적으로 허용될 때, 즉 모든 수직항력이 음이 아니고 모든 마찰력이 마찰계수(coefficient of friction)와 해당 수직항력의 곱 이하일 때, 그리고 오직 그때에만 가능하다.

소문항 (i)

두 원기둥은 서로를 밀 수만 있으므로 $R \geq 0$이다. $\sin\alpha > 0$이므로 $W_1 \geq W_2$를 얻는다.

소문항 (ii)

두 원기둥 사이의 접촉에서는 $S \leq \mu R$이어야 한다.

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \leq \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

좌변은 양수이므로 $R > 0$, 즉 $W_1 > W_2$이어야 한다(실제로 무게가 같은 경우는 불가능하다). 양수 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$로 나누면

$$\mu \geq \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

위쪽 원기둥과 평면의 접촉에서는 $N_1 \geq 0$이고 $F_1 \leq \mu_1 N_1$이어야 한다. $F_1 > 0$이므로 두 번째 조건에서 이미 $N_1 > 0$이 따라 나온다. $F_1 \leq \mu_1 N_1$을 $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0$로 나누면

$$1 \leq \mu_1 \left(\frac{2W_1\cos\alpha}{(W_1 + W_2)\sin\alpha} - 1 \right) = \mu_1 \left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1 \right).$$

괄호 안은 $N_1/\left(\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha\right)$이고 양수이므로 이것으로 나눌 수 있다.

$$\mu_1 \geq \left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1+W_2}-1\right)^{-1}.$$

(평형을 위해서는 괄호 안이 양수, 즉 $\tan\alpha < 2W_1/(W_1+W_2)$이어야 한다. 그렇지 않으면 위쪽 원기둥이 평면에서 들려 올라간다.)

μ_2에 대한 부등식

여기서 $N_2 = W_2\cos\alpha + \frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$는 저절로 양수이고, $F_2 \leq \mu_2 N_2$를 $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$로 나누면

$$1 \leq \mu_2\left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right), \qquad \text{즉} \qquad \mu_2 \geq \left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right)^{-1}.$$

생각해 보기 왜 아래쪽 원기둥에서는 부호가 $+1$이고 위쪽 원기둥에서는 -1인가?

두 원기둥 사이의 마찰력 S는 위쪽 원기둥을 평면에서 떼어 내는 방향으로 당기고, 아래쪽 원기둥은 평면 쪽으로 누른다. 그래서 평면은 위쪽 원기둥을 덜 세게, 아래쪽 원기둥을 더 세게 누르며, 위쪽 원기둥에는 수직항력에 대한 마찰력의 비가 더 커야 한다.

검산

- 두 원기둥의 방정식을 더하면 계 전체에 대한 식을 얻는다. 평면의 마찰력 합은 경사면 위쪽으로 $(W_1+W_2)\sin\alpha$이고 수직항력의 합은 $(W_1+W_2)\cos\alpha$로, 하나의 강체 덩어리일 때와 정확히 같다.
- $\alpha \to 0$이면 모든 마찰력과 R가 0으로 수렴(converge)하고, μ_1, μ_2에 대한 두 하한도 0으로 수렴하는데, 평평한 바닥에서는 마땅히 그래야 한다.
- 수치로 $W_1 = 3$, $W_2 = 1$, $\alpha = 20^\circ$일 때 여섯 개의 방정식을 직접 풀면 $R \approx 0.342$, $S = F_1 = F_2 \approx 0.684$, $N_1 \approx 2.135$, $N_2 \approx 1.624$이므로 $\mu \geq 2$, $\mu_1 \geq 0.320$, $\mu_2 \geq 0.421$이 되어 공식과 일치한다. W_1, W_2, α를 무작위로 여러 번 골라도 똑같이 일치함을 확인하였다.

흔한 실수

- 모멘트 방정식을 빠뜨리는 것. 모멘트 방정식이 없으면 미지수는 여섯 개인데 방정식은 네 개뿐이어서 문제가 부정(indeterminate)인 것처럼 보인다.

- 두 원기둥 사이의 마찰력 방향을 잘못 잡는 것. 그러면 마지막 두 답에서 ± 1의 부호가 뒤바뀐다.
- 가벼운 원기둥이 아래쪽에 있어야 한다는 점을 놓치는 것. 위쪽 원기둥이 더 가볍다면 R가 음수여야 한다.

STEP 너머

이 계는 정정계(statically determinate system)이다. 평형 방정식이 모든 힘을 결정하므로 마찰 법칙은 확인 가능한 조건이 된다. 접촉이 방정식보다 많으면(예를 들어 거친 바닥 위에서 거친 벽에 기대 놓은 사다리) 계는 부정정(statically indeterminate)이 되어, 강체 정역학만으로는 힘이 어떻게 나뉘는지 알 수 없다. 이때 공학자들은 물체의 탄성(elasticity)을 고려한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 평형과 토크(torque)를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1996, 문제 11

역학 • 미소 진동

> **STEP III 1996, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q11

핵심 아이디어

원의 기하에 관한 두 가지 사실이 문제를 해결한다. AC가 지름이므로 각 ABC는 직각이다. 이로부터 두 줄의 길이를, 따라서 두 장력(tension)을 θ로 나타낼 수 있다. 또한 중심각은 원주각의 두 배이므로, B는 중심에 대하여 2θ만큼 회전한 것이다. 따라서 C에서 B까지의 호의 길이는 $2a\theta$이고, 접선 방향으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면 운동 방정식(equation of motion)을 얻는다. 진동에 대해서는 평형점(equilibrium) 근처에서 선형화(linearise)한다.

시작하기 전에 주의할 점이 있다. 문제에 인쇄된 방정식에는 $mg\sin 2\theta$가 있어야 할 자리에 $mg\sin\theta$가 적혀 있다. 아래의 유도 과정이 그 이유를 보여 주며, 수정된 방정식이어야만 문제에 주어진 $5\lambda = 24mg$와 주기가 나온다.

풀이

운동 방정식

모형. 고리 B는 매끄러운 철사 위에 있는 질량 m인 입자이므로, 철사는 반지름 방향의 수직항력 R만 작용한다. 줄은 가볍고 탄성이 있으며 훅의 법칙(Hooke's law)을 따른다. 즉 자연길이가 a인 줄을 길이 ℓ까지 늘이면 장력은 $\lambda(\ell - a)/a$이다.

기하. AC는 지름(길이 $2a$)이므로, 반원에 대한 원주각에 의해 $\angle ABC = 90^\circ$이다. 직각삼각형 ABC에서

$$AB = 2a\cos\theta, \qquad CB = 2a\sin\theta.$$

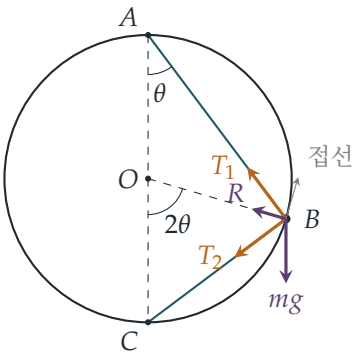
원주각 $\angle CAB = \theta$는 호 CB에 대한 각이므로, 중심각은 $\angle COB = 2\theta$이다. C에서 B까지의 호의 길이는 $s = 2a\theta$이므로, θ가 증가하는 방향(A를 향하는 방향)으로 철사를 따라 측정한

B의 가속도는 $\ddot{s} = 2a\ddot{\theta}$이다.

장력. BA와 BC의 장력은

$$T_1 = \lambda\,\frac{2a\cos\theta - a}{a} = \lambda(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = \lambda(2\sin\theta - 1).$$

두 줄이 모두 팽팽할 필요충분조건은 $\cos\theta > \frac{1}{2}$이고 $\sin\theta > \frac{1}{2}$인 것, 즉 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$이다.



B에서의 접선 방향으로 힘의 분해. 접선은 OB에 수직이므로, R은 접선 방향 성분을 갖지 않는다.

- 삼각형 OAB는 이등변삼각형($OA = OB = a$)이므로 $\angle OBA = \angle OAB = \theta$이다. 따라서 BA는 접선과 $90° - \theta$의 각을 이루고, T_1은 A를 향하는 방향으로 $T_1\sin\theta$만큼 기여한다.
- 삼각형 OCB는 이등변삼각형이고 $\angle OCB = \angle ACB = 90° - \theta$이므로 $\angle OBC = 90° - \theta$이다. 따라서 BC는 접선과 θ의 각을 이루고, T_2는 A에서 멀어지는 방향으로 $T_2\cos\theta$만큼 기여한다.
- OB는 연직 아래 방향과 2θ의 각을 이루므로, 접선은 수평 방향과 2θ의 각을 이룬다. 중력은 A에서 멀어지는 방향으로 $mg\sin 2\theta$만큼 기여한다.

접선 방향으로 뉴턴의 제2법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} 2ma\ddot{\theta} &= \lambda(2\cos\theta - 1)\sin\theta - \lambda(2\sin\theta - 1)\cos\theta - mg\sin 2\theta \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta, \end{aligned}$$

이다. $2\lambda\sin\theta\cos\theta$ 항들이 소거되기 때문이다. 이것이 구하는 방정식이다. 다만 중력 항은 인쇄된 $mg\sin\theta$가 아니라 $mg\sin 2\theta$이다.

생각해 보기 혹시 인쇄된 $mg\sin\theta$가 결국 맞는 것은 아닐까?

그렇지 않다. $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때 고리는 O와 같은 높이에 있고, 접선은 연직이며, 무게 mg 전체가 철사를 따라 작용한다. 이때 $mg\sin 2\theta = mg$이지만 $mg\sin\theta = mg/\sqrt{2}$이다. 다음 소문항도 이를 확인해 준다. 인쇄된 방정식을 쓰면 평형 상태에서 $\frac{24}{5}mg$가 아니라 $\lambda = 3mg$가 나온다.

평형

$\sin\theta = \frac{3}{5}$이면 (θ를 예각으로 잡을 때) $\cos\theta = \frac{4}{5}$이고, $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$이고 $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$이므로 θ는 줄이 팽팽한 범위에 있다. $\ddot{\theta} = 0$으로 놓으면

$$\lambda\left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\right) = mg\cdot 2\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\lambda}{5} = \frac{24mg}{25} \quad\Longrightarrow\quad 5\lambda = 24mg,$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

미소 진동

$f(\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta$로 두면 $2ma\ddot{\theta} = f(\theta)$이고, 평형점 θ_0에서 $f(\theta_0) = 0$이다. ε이 작을 때 $\theta = \theta_0 + \varepsilon$으로 놓자. 1차 근사로 $f(\theta_0+\varepsilon) \approx f'(\theta_0)\,\varepsilon$이고, 여기서

$$\begin{aligned} f'(\theta_0) &= -\lambda(\sin\theta_0 + \cos\theta_0) - 2mg\cos 2\theta_0 \\ &= -\tfrac{24}{5}mg\cdot\tfrac{7}{5} - 2mg\left(\tfrac{16}{25} - \tfrac{9}{25}\right) = -\tfrac{168}{25}mg - \tfrac{14}{25}mg = -\tfrac{182}{25}mg. \end{aligned}$$

따라서

$$2ma\ddot{\varepsilon} = -\tfrac{182}{25}mg\,\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\varepsilon} = -\frac{91g}{25a}\,\varepsilon.$$

이것은 $\omega^2 = \dfrac{91g}{25a}$인 단진동(simple harmonic motion)이다. $f'(\theta_0) < 0$이므로 이 평형은 안정(stable)하다. 변위가 작으므로 줄은 팽팽한 상태를 유지한다(θ는 θ_0 근처, 즉 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$의 충분히 안쪽에 머문다). 주기는 근사적으로

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\cdot 5\sqrt{\frac{a}{91g}} = 10\pi\sqrt{\frac{a}{91g}}.$$

검산

- $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 두 줄은 같은 길이만큼 늘어나 있으므로 접선 방향 효과가 상쇄되고($\cos\theta - \sin\theta = 0$), 무게 전체가 연직인 접선을 따라 작용한다. 우리의 방정식은 $2ma\ddot{\theta} = -mg$를 주므로 올바르다.
- $a = g = m = 1$, $\lambda = 4.8$로 두고 위치 벡터로부터 접선 방향 힘을 계산하였다. 이 힘은 $\sin\theta = 0.6$에서 0이 된다. 작은 변위에서 출발하여 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하였더니 주기가 3.29328로 나와, $10\pi/\sqrt{91} \approx 3.29328$과 일치하였다.

흔한 실수

- 호의 길이를 $a\theta$로 잡는 것. 고리는 중심에 대하여 θ가 아니라 2θ만큼 회전하므로, 접선 방향 가속도는 $2a\ddot{\theta}$이다. 좌변의 2는 여기서 나온다.
- 접선 방향이 아니라 현의 방향으로 힘을 분해하는 것. 수직항력은 미지수이므로, 이를 소거하려면 접선 방향으로 분해해야 한다.

STEP 너머

평형점 근처에서 $\ddot{x} = f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$로 선형화하는 것은 비선형계(nonlinear system)의 안정성 분석에서 첫 단계이다. 이로부터 $f'(x_0) < 0$일 때 안정하고, $\omega^2 = -f'(x_0)$인 단진동이 일어난다는 것을 알 수 있다. 대학에서는 이것이 기준 진동(normal mode)과 행렬의 고윳값(eigenvalue)을 통해 여러 자유도를 가진 계로 확장된다. 더 읽어 보려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 1996, 문제 12

확률과 통계 • 마르코프 연쇄

STEP III 1996, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.16 절 **앞으로 보고 거꾸로 보는 마르코프 연쇄**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/markov.html

핵심 아이디어

이것은 마르코프 연쇄(Markov chain)이다. 다음 정리의 유형은 현재 정리의 유형에만 의존한다. 소문항 (i)은 현재 정리의 유형을 조건으로 하는 전확률 법칙(law of total probability)이다. 소문항 (ii)는 연쇄가 바꾸지 않는 분포, 곧 **정상** 분포(stationary distribution)를 구하라는 것이며, 이는 작은 연립일차방정식이 된다. 소문항 (iii)은 연쇄를 거꾸로 돌리는 것인데, 조건부 확률(conditional probability)을 뒤집는 일이 바로 베이즈(Bayes) 정리(Bayes' theorem)가 하는 일이다.

풀이

정리들에 차례로 번호를 붙인다. 주어진 한 정리의 유형을 X, 그 다음 정리의 유형을 Y라 하면

$$\mathrm{P}(X = i) = a_i, \qquad \mathrm{P}(Y = j \mid X = i) = p_{ij}, \qquad \mathrm{P}(Y = j) = b_j.$$

소문항 (i)

사건 $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, $\{X = 3\}$은 서로 배반(mutually exclusive)이고, 모든 정리는 세 유형 가운데 정확히 하나에 속하므로 이 중 하나는 반드시 일어난다. 따라서 이 사건들은 표본공간(sample space)을 분할(partition)하며, 사건 $\{Y = j\}$는 서로소인 세 조각으로 나뉜

다.

$$\{Y = j\} = \{X = 1,\, Y = j\} \cup \{X = 2,\, Y = j\} \cup \{X = 3,\, Y = j\}.$$

각 조각의 확률을 더하고, 각각을 $\mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = j \mid X = i)$로 쓰면

$$b_j = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = j \mid X = i) = a_1 p_{1j} + a_2 p_{2j} + a_3 p_{3j},$$

이고, 이것이 전확률 법칙이다. 여기서 주어진 관찰 사실이 쓰인다. 현재 정리 이전에 무슨 일이 있었든 $\mathrm{P}(Y = j \mid X = i)$는 p_{ij}이다.

소문항 (ii)

각 j에 대하여 $b_j = a_j$이어야 하고, a_i들은 확률분포를 이루므로 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$도 성립해야 한다. 배열의 열을 따라 내려 읽으면 세 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.3a_1 + 0.2a_2 + 0.1a_3, \\ a_2 &= 0.3a_1 + 0.4a_2 + 0.3a_3, \\ a_3 &= 0.4a_1 + 0.4a_2 + 0.6a_3. \end{aligned}$$

> ? **생각해 보기** 미지수 세 개에 방정식 세 개, 거기에 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$까지 있다. 방정식이 하나 너무 많은 것 아닌가?

그렇지 않다. 세 방정식이 독립이 아니기 때문이다. 배열의 각 행의 합이 1이므로, 세 방정식을 더하면 $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$이 된다. 따라서 어느 두 방정식이든 나머지 하나를 함의하며, 해를 하나로 정해 주는 것은 정규화 조건(normalising condition)이다.

가운데 방정식이 가장 쉽다. 거기서는 a_1과 a_3의 계수가 같기 때문이다. $a_1 + a_3 = 1 - a_2$를 이용하면

$$a_2 = 0.3(1 - a_2) + 0.4a_2 \quad \Longrightarrow \quad 0.9a_2 = 0.3 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = \tfrac{1}{3}.$$

그러면 $a_1 + a_3 = \frac{2}{3}$이다. 첫째 방정식에 10을 곱하면 $7a_1 = 2a_2 + a_3 = \frac{2}{3} + a_3$이고, $a_3 = \frac{2}{3} - a_1$을 대입하면

$$7a_1 = \tfrac{4}{3} - a_1 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \tfrac{1}{6}, \qquad a_3 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

셋째 방정식을 확인하자. $0.4 \cdot \frac{1}{6} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} + 0.6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} = a_3$이다. 따라서

$$a_1 = \tfrac{1}{6}, \qquad a_2 = \tfrac{1}{3}, \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}.$$

그러므로 장기적으로 보면 Ecks 교수의 정리 가운데 절반은 거짓이다.

소문항 (iii)

이제 X를 바로 앞 정리의 유형, Y를 특정한 정리의 유형으로 잡고, X는 소문항 (ii)에서와 같은 분포를 따른다고 하자. 구하려는 것은 $q_{ij} = \mathrm{P}(X = i \mid Y = j)$이다. 베이즈 정리에 의하여

$$q_{ij} = \frac{\mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = j \mid X = i)}{\mathrm{P}(Y = j)} = \frac{a_i p_{ij}}{b_j} = \frac{a_i p_{ij}}{a_j},$$

이며, 마지막 단계에서는 소문항 (ii)의 $b_j = a_j$를 이용하였다. 문제가 a_i를 이 값들로 정해 둔 이유가 바로 이것이다. 그러면 특정한 정리가 바로 앞 정리와 같은 분포를 가진다.

열별로 계산하면 다음과 같다.

- $j = 1$ ($a_1 = \frac{1}{6}$): $q_{11} = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.3}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{10}$, $\quad q_{21} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0.2}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{5}$, $\quad q_{31} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0.1}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{10}$.
- $j = 2$ ($a_2 = \frac{1}{3}$): $q_{12} = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.3}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{20}$, $\quad q_{22} = 0.4 = \frac{2}{5}$, $\quad q_{32} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0.3}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}$.
- $j = 3$ ($a_3 = \frac{1}{2}$): $q_{13} = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.4}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{15}$, $\quad q_{23} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0.4}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{15}$, $\quad q_{33} = 0.6 = \frac{3}{5}$.

원래 배열처럼 (i행, j열로) 늘어놓으면

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{20} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{20} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.15 & 0.1\dot{3} \\ 0.4 & 0.4 & 0.2\dot{6} \\ 0.3 & 0.45 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

여기서는 합이 1이 되는 것이 **열**이다. 특정한 정리의 유형 j를 고정하면, 바로 앞 정리는 어떤 유형이든 하나의 유형이었어야 하기 때문이다.

검산

- (q_{ij})의 각 열의 합은 1이다. 예를 들어 $\frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{3}{5} = 1$이다.
- 대각성분은 공식 $q_{ii} = a_i p_{ii} / a_i$가 예측하는 대로 $q_{ii} = p_{ii}$를 만족한다.
- 연쇄를 10^6단계 시뮬레이션한 결과, 장기 빈도는 0.167, 0.333, 0.501이었고, 거꾸로 센 비율은 위의 모든 q_{ij}와 0.001 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- 배열에 a_i들로 이루어진 열벡터를 곱하는 것(열 대신 행을 사용하는 것). 방정식은 $b_j = \sum_i a_i p_{ij}$이므로, 합은 j열을 따라 내려가며 취한다.

- $a_1 + a_2 + a_3 = 1$을 잊고서, 세 균형 방정식이 a_i를 결정하지 못한다는 사실에 당황하는 것.
- 소문항 (iii)의 답으로 p_{ji}를 쓰는 것. 시간을 거꾸로 거슬러 가는 것은 배열을 반대 방향으로 읽는 것과 같지 않다. $q_{12} = 0.15$이지만 $p_{12} = 0.3$이므로 이 연쇄는 가역(reversible)이 아니다.

STEP 너머

벡터 (a_1, a_2, a_3)는 이 연쇄의 정상 분포이며, 전이 행렬(transition matrix)의 고윳값(eigenvalue) 1에 대한 왼쪽 고유벡터(left eigenvector)이다. 행렬의 모든 성분이 양수이므로, 첫 정리가 어떤 유형이었든 n번째 정리의 유형의 분포는 이 분포로 수렴(converge)한다. 배열 (q_{ij})는 **시간 역전**(time-reversed) 연쇄를 나타내며, 거꾸로 돌려도 원래와 똑같아 보이는 연쇄(세부 균형 조건(detailed balance condition)인 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$를 만족하는 연쇄)는 무작위 행보(random walk)와 몬테카를로 방법(Monte Carlo methods)에서 핵심적인 역할을 한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에 마르코프 연쇄를 쉽게 다룬 장이 있다.

풀이

STEP III 1996, 문제 13

확률과 통계 • 체비쇼프 부등식

STEP III 1996, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q13

핵심 아이디어

분산(variance)은 각 값마다 하나씩 있는 음이 아닌 항 $p_i(x_i-\mu)^2$의 합이다. 이 합을 평균(mean)에서 먼 값(적어도 λ만큼 떨어진 값)과 가까운 값으로 나눈다. 먼 값의 확률에 대한 **상계**(upper bound)를 얻으려면 가까운 항을 버리고 먼 항 각각을 아래에서 누른다. **하계**(lower bound)를 얻으려면 반대로 한다. 즉 모든 항을 위에서 누르는데, 가까운 항은 λ^2로, 먼 항은 k^2로 누른다.

풀이

정의와 $aX+b$

$p_i = \mathrm{P}(X=x_i)$라 하면 $p_i \geq 0$이고 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$이다. 그러면

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad \mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 p_i,$$

이고, 여기서 $\mu = \mathrm{E}(X)$이다. (동치로 $\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$이지만, 앞으로 사용할 것은 첫 번째 형태이다.)

확률변수(random variable) $aX+b$는 확률 p_i로 값 ax_i+b를 갖는다. ($a=0$이면 이 값들이 모두 같아지지만, 같은 값의 확률을 더해도 아래의 합은 변하지 않는다.) 따라서 $\sum_i p_i = 1$을 이용하면

$$\mathrm{E}(aX+b) = \sum_i (ax_i+b)p_i = a\sum_i x_i p_i + b\sum_i p_i = a\mathrm{E}(X) + b,$$

이다. 그러므로 $aX + b - \mathrm{E}(aX + b) = a(X - \mu)$이고,

$$\mathrm{var}(aX + b) = \sum_i \big(a(x_i - \mu)\big)^2 p_i = a^2 \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i = a^2 \,\mathrm{var}(X).$$

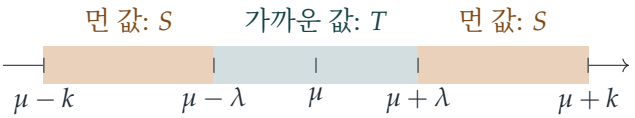
이다. b를 더하면 모든 값과 평균이 함께 평행이동하므로 퍼진 정도에는 아무 영향이 없다.

상계

$\mu = \mathrm{E}(X)$라 하고, $|x_i - \mu| \geq \lambda$인 첨자 i의 집합("먼" 값)을 S, 나머지, 즉 $|x_i - \mu| < \lambda$인 첨자의 집합을 T라 하자. 그러면

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) = \sum_{i \in S} p_i.$$

이다. 이 확률을 P라 하자.



분산의 모든 항은 음이 아니므로 T에 속하는 항을 버리면 합은 작아질 수밖에 없다. 또 $i \in S$이면 $(x_i - \mu)^2 \geq \lambda^2$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \sum_{i \in S} (x_i - \mu)^2 p_i + \sum_{i \in T} (x_i - \mu)^2 p_i \\ &\geq \sum_{i \in S} (x_i - \mu)^2 p_i \\ &\geq \lambda^2 \sum_{i \in S} p_i = \lambda^2 P.\end{aligned}$$

이다. $\lambda > 0$이므로 λ^2으로 나눌 수 있고,

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\lambda^2},$$

를 얻는다. 이것이 증명할 내용이다. (S가 공집합이면 S에 대한 두 합이 모두 0이므로 부등식은 자명하게 성립한다.)

하계

이제 모든 i에 대하여 $|x_i - \mu| \leq k$라고 추가로 가정하자. 이번에는 분산의 모든 항을 위에서 누른다.

- $i \in S$이면 새 가정에 의해 $(x_i - \mu)^2 \leq k^2$이다.
- $i \in T$이면 T의 정의에 의해 $(x_i - \mu)^2 < \lambda^2$이다.

$\sum_{i\in T} p_i = 1 - P$이므로 다음을 얻는다.

$$\operatorname{var}(X) \le k^2 \sum_{i\in S} p_i + \lambda^2 \sum_{i\in T} p_i = k^2 P + \lambda^2(1-P) = \lambda^2 + (k^2-\lambda^2)P.$$

정리하면

$$(k^2-\lambda^2)\,P \ge \operatorname{var}(X) - \lambda^2.$$

이다.

? **생각해 보기** $k^2-\lambda^2$으로 나눌 수 있는가?

$k \ge \lambda > 0$이 주어졌으므로 $k^2-\lambda^2 \ge 0$이다. $k > \lambda$이면 이 값은 양수이고, 나누어도 부등호의 방향은 그대로이다.

$$\mathrm{P}\big(|X-\mu| \ge \lambda\big) \ge \frac{\operatorname{var}(X)-\lambda^2}{k^2-\lambda^2},$$

이것이 구하는 결과이다. 경계인 경우 $k = \lambda$에서는 우변의 분모가 0이 되어 이 명제는 의미가 없다. 그 바로 앞의 부등식은 여전히 성립하며 $\operatorname{var}(X) \le \lambda^2$을 뜻하는데, 모든 $(x_i-\mu)^2 \le k^2 = \lambda^2$이므로 이는 분명하다.

$\operatorname{var}(X) \le \lambda^2$일 때는 하계가 0 이하이므로 새로운 정보를 주지 않는다. 하계가 의미를 갖는 것은 분산이 λ^2에 비해 클 때뿐이며, 이때 확률의 일부가 꼬리 쪽으로 밀려날 수밖에 없다.

검산

- $X = \pm 1$을 각각 확률 0.4로, ± 4를 각각 확률 0.1로 갖는다고 하면 $\mu = 0$이고 $\operatorname{var}(X) = 0.8\times 1 + 0.2\times 16 = 4$이다. $\lambda = 1, k = 4$로 두면 $P = 1$이고, 상계는 4, 하계는 $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$이며, 실제로 $\frac{1}{5} \le 1 \le 4$이다.
- $X = 0$ 또는 $\pm c$이고 $\mathrm{P}(X = \pm c) = q/2$씩이라 하자. 그러면 $\operatorname{var}(X) = qc^2$이고 $\lambda = c$로 두면 상계는 정확히 $q = P$이다. 즉 체비쇼프 부등식(Chebyshev's inequality)은 일반적으로 더 개선할 수 없다.
- 값이 최대 일곱 개인 무작위 분포 20 000개에 대하여 정확한 유리수 연산으로 두 부등식과 $\mathrm{E}(aX+b)$, $\operatorname{var}(aX+b)$의 공식을 검사하였고, 실패한 경우는 없었다.

흔한 실수

- $\operatorname{var}(aX+b) = a\operatorname{var}(X)$ 또는 $a^2\operatorname{var}(X) + b$라고 쓰는 것. 분산은 편차에 대하여 이차이고, 평행이동은 어떤 편차도 바꾸지 않는다.
- 하계에서 가까운 항을 λ^2 대신 0으로 누르는 것. 그러면 $\operatorname{var}(X) \le k^2 P$를 얻는데, 이는 참이지만 묻는 내용이 아니다.

- $k^2 - \lambda^2$이 양수라는 점(그리고 $k = \lambda$를 제외해야 한다는 점)을 언급하지 않고 나누는 것.

STEP 너머

첫 번째 부등식은 체비쇼프 부등식이며, 항을 버리는 기법은 $Y \geq 0$에 대한 마르코프 부등식(Markov's inequality) $\mathrm{P}(Y \geq c) \leq \mathrm{E}(Y)/c$의 바탕에 있는 것과 같은 기법이다($Y = (X - \mu)^2$에 적용하면 된다). 대학 1학년 확률론 강의에서 체비쇼프 부등식을 쓰면 대수의 약법칙(weak law of large numbers)을 두 줄로 증명할 수 있다. X의 독립(independent)인 복사본 n개의 평균은 분산이 $\mathrm{var}(X)/n$이므로 μ에서 멀리 벗어날 가능성이 작다. 두 번째 부등식은 유계성(boundedness)이 필요한 "역" 형태로, Paley–Zygmund 부등식과 같은 정신을 따른다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)이 이 내용을 모두 다룬다.

풀이

STEP III 1996, 문제 14

확률과 통계 • 두 상태 마르코프 과정

STEP III 1996, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q14

핵심 아이디어

시간을 길이 δt인 아주 짧은 구간으로 잘게 나누고, 그 한 구간 안에서 무슨 일이 일어날 수 있는지 묻는다. 그러면 기댓값으로 나타낸 횟수는 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해 그대로 더해지고, 수리 중일 확률은 "들어오는 양 빼기 나가는 양"이라는 간단한 균형식을 따르는데, 이 식은 $\delta t \to 0$일 때 1계 선형 미분방정식(first-order linear differential equation)이 된다. $p(t)$를 구하고 나면, 수리 시간의 기댓값은 그저 그 적분이다.

풀이

펑크 횟수의 기댓값

펑크는 실제로 자전거를 타는 동안에만 날 수 있고, 자전거를 타고 있는 동안에는 자전거가 멀쩡한 상태이다. 자전거를 탄 전체 시간 T를 길이 $\delta t = T/n$인 작은 조각 n개로 나눈다. X_k를 k번째 조각에서 일어난 펑크의 횟수라 하자. δt에 대한 1차 근사까지 보면 X_k는 확률 $\alpha\,\delta t$로 1이고 그렇지 않으면 0이므로, $\mathrm{E}(X_k) = \alpha\,\delta t$이다. 기댓값의 선형성에 의해(독립성은 필요 없다)

$$\mathrm{E}(\text{펑크 횟수}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = n\alpha\,\delta t = \alpha T.$$

여기서 시계는 자전거를 탄 시간만 재므로, 수리하는 데 쓴 시간은 들어가지 않는다.

$p(t)$에 대한 방정식

이제 t를 수리 시간까지 포함한 실제 (시계) 시간이라 하자. 시각 t에 나는 수리 중이거나(확률 $p(t)$) 자전거를 타고 있다(확률 $1-p(t)$). 시각 $t+\delta t$에 내가 수리 중인 경우는 다음 둘 중 하나이다.

- 시각 t에 수리 중이었고 $(t, t+\delta t)$에서 수리가 끝나지 **않았다**: 확률 $p(t)(1-\beta\,\delta t)$. 또는
- 시각 t에 자전거를 타고 있었고 $(t, t+\delta t)$에서 펑크가 났다: 확률 $(1-p(t))\,\alpha\,\delta t$.

이 두 경우는 서로 배반이므로, $(\delta t)^2$ 차수의 항(아주 짧은 한 구간에서 두 사건이 일어나는 경우)을 무시하면

$$p(t+\delta t) = p(t)(1-\beta\,\delta t) + \big(1-p(t)\big)\alpha\,\delta t.$$

정리하면

$$\frac{p(t+\delta t)-p(t)}{\delta t} = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t),$$

이고, $\delta t \to 0$으로 보내면

$$p'(t) = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t).$$

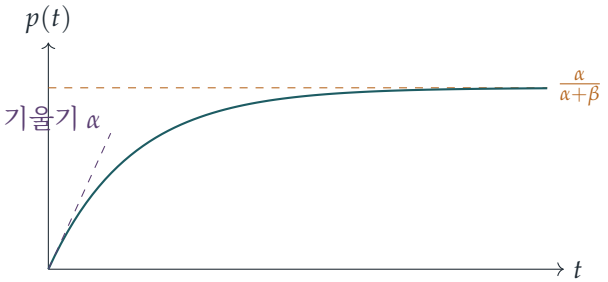
처음에 자전거는 멀쩡한 상태이므로 초기 조건(initial condition)은 $p(0)=0$이다.

주어진 해 확인하기

$p(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big)$에 대하여 $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-1) = 0$이고,

$$p'(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t},$$
$$\alpha - (\alpha+\beta)p(t) = \alpha - \alpha\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}.$$

두 식이 일치하므로, 요구한 대로 p는 미분방정식과 초기 조건을 만족한다.



그래프는 p가 0에서 시작하여 처음 기울기 α로 올라가면서 장기적인 수준 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$에 다가가는 모습을 보여 준다.

수리 시간의 기댓값

R를 $[0,T]$ 동안 수리하는 데 쓴 시간이라 하고, $I(t)$를 시각 t에 수리 중이면 1, 그렇지 않으면 0이라 하자. 그러면 $R=\int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$이다. $\mathrm{E}(I(t))=p(t)$이므로, 기댓값을 취하면(이번에도 선형성일 뿐이며, 적분을 작은 구간들에 대한 합의 극한으로 보고 적용한 것이다)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R)=\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[t+\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\right]_0^T \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(T-\frac{1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)T}}{\alpha+\beta}\right).\end{aligned}$$

? **생각해 보기** 수리 시간의 기댓값이 왜 확률의 적분과 같을까?

각각의 작은 구간 $(t,t+\delta t)$에서 수리하는 데 쓴 시간은 확률 $p(t)$로 약 δt이고 그렇지 않으면 0이므로, 그 기댓값은 $p(t)\,\delta t$이다. 이를 모든 구간에 대해 더하면 $\sum p(t)\,\delta t\to\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t$이다.

두 가지 근사

$x=(\alpha+\beta)T$라 두자. 전체 이동 시간 중 수리하는 데 쓴 시간의 비율의 기댓값은

$$F=\frac{\mathrm{E}(R)}{T}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1-\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right).$$

x가 작을 때. $\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\cdots$를 이용하면 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}=1-\frac{1}{2}x+O(x^2)$이므로

$$F\approx\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{2}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)T}{2}=\frac{\alpha T}{2}.$$

이는 이치에 맞는다. 짧은 이동에서는 $p(t)\approx\alpha t$이고, 이것의 $[0,T]$에서의 평균은 $\alpha T/2$이다.

x가 클 때. 이때 $0<\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}<\dfrac{1}{x}$이고 이 값은 작으므로

$$F\approx\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

긴 이동에서는 거의 모든 시간 동안 $p(t)$가 평형(equilibrium) 값 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$에 자리 잡고 있다.

검산

- 평형: $p'=0$으로 두면 $\alpha(1-p)=\beta p$, 즉 "들어오는 비율과 나가는 비율이 같다"는 식이 되어 $p=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$이고, 이는 T가 클 때의 극한과 일치한다.

- $\beta \to \infty$(즉시 수리)이면 수리와 관련된 모든 값이 마땅히 0으로 간다.
- $\alpha = 0.7, \beta = 2.3, T = 2.5$일 때 공식은 $\mathrm{E}(R) \approx 0.5056$을 준다. 2×10^5번의 이동을 시뮬레이션한 결과(지수분포를 따르는 주행 구간과 수리 구간을 번갈아 둠) 0.5058을 얻었고, 주행 시간 2.5 동안의 펑크 횟수를 시뮬레이션한 평균은 $1.750 = \alpha T$였다.

흔한 실수

- 펑크 항에 인수 $(1 - p(t))$를 빠뜨리는 것. 펑크는 자전거를 타고 있을 때만 날 수 있다.
- $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$를 쓰거나 초기 조건을 밝히지 않는 것. 자전거는 멀쩡한 상태에서 출발하므로 $p(0) = 0$이다.
- x가 작을 때의 전개에서 2차 항을 버려서 $F \approx 0$이 남고 $\alpha T/2$를 얻지 못하는 것.

STEP 너머

이것은 상태가 두 개인 연속 시간 마르코프 연쇄(continuous-time Markov chain)이다. 자전거는 "작동 중"과 "수리 중" 사이를 비율 α와 β로 오가며, p에 대한 방정식은 콜모고로프(Kolmogorov) 전진 방정식(forward equations)의 가장 간단한 경우이다. 같은 모형으로 고장 나고 수리되는 기계, 열리고 닫히는 이온 채널, 그리고 대기행렬 이론(queueing theory)의 많은 부분을 기술할 수 있다. 주행 시간 동안의 펑크 횟수는 비율이 α인 푸아송 과정(Poisson process)이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 푸아송 과정과 마르코프 연쇄를 알맞은 수준으로 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1996년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

