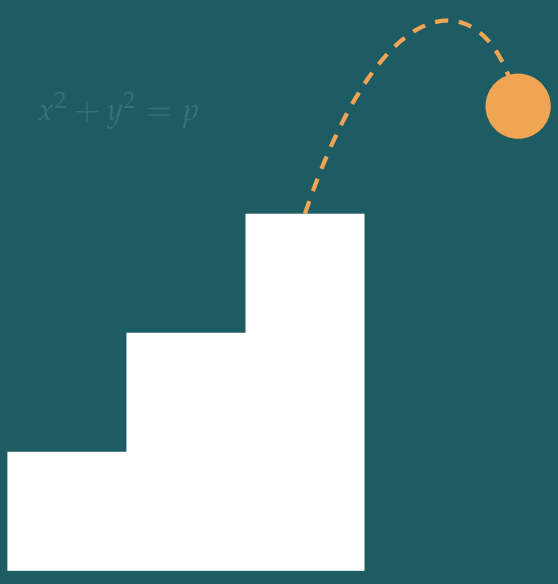
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1995년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1995년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1995년 풀이

1995년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 다항식 부등식 순수수학 . . . 3

Q2 치환적분 순수수학 . . . 7

Q3 망원급수 순수수학 . . . 10

Q4 드무아브르 정리 순수수학 . . . 13

Q5 이항급수와 적분 순수수학 . . . 16

Q6 베르누이 미분방정식 순수수학 . . . 20

Q7 삼각형의 벡터 기하 순수수학 . . . 23

Q8 선형 미분방정식 순수수학 . . . 27

Q9 포물체 궤적의 포락선 역학 . . . 30

Q10 탄성 끈과 튀어 오름 역학 . . . 34

Q11 원기둥 사이의 마찰 역학 . . . 38

Q12 배열과 경우의 수 확률과 통계 . . . 42

Q13 푸아송 솎아내기 확률과 통계 . . . 45

Q14 비율의 추정 확률과 통계 . . . 48

STEP II

Q1 등비급수의 미분 순수수학 . . . 52

Q2 재귀적인 색칠 방법 세기 순수수학 . . . 56

Q3 논리적 추론과 경우의 수 순수수학 . . . 60

Q4 윌리스 점화식 순수수학 . . . 64

Q5 최적화와 오목성 순수수학 . . . 68

Q6 1의 거듭제곱근 순수수학 . . . 71

Q7 헤론의 공식 순수수학 . . . 76

Q8 로지스틱 미분방정식 순수수학 . . . 80

Q9 마찰과 평형 역학 84
Q10 충돌과 반발계수 역학 88
Q11 속도에 비례하는 공기 저항 역학 92
Q12 순차적 결투 확률과 통계 95
Q13 푸아송 분포와 최적화 확률과 통계 99
Q14 가설 검정 확률과 통계 104

STEP III

Q1 연립일차방정식 순수수학 108
Q2 점화 공식 순수수학 112
Q3 감쇠 조화 운동 순수수학 115
Q4 삼각급수의 합 순수수학 119
Q5 매클로린 급수 순수수학 122
Q6 자취와 반전 순수수학 126
Q7 군과 동형사상 순수수학 130
Q8 평면과 구 순수수학 134
Q9 복합 진자 역학 138
Q10 경사면 위의 포물체 운동 역학 142
Q11 상대 속도 역학 145
Q12 방사 대칭 확률밀도 확률과 통계 149
Q13 잡음이 있는 이진 통신로 확률과 통계 153
Q14 적률생성함수 확률과 통계 157

풀이

STEP I 1995, 문제 1

순수수학 • 다항식 부등식

> **STEP I 1995, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)은 항을 묶어서 인수분해(factorise)되는 삼차식(cubic)이고, 일단 세 일차식의 곱으로 나타내면 그 부호는 수직선(number line)에서 바로 읽어 낼 수 있다. 소문항 (ii)는 모습만 바꾼 같은 삼차식이다. 모든 항의 전체 차수(degree)가 3이므로, y^3으로 나누면 변수 x/y에 대한 소문항 (i)의 삼차식이 된다. 그러면 같은 인수분해로부터 원점(origin)을 지나는 세 직선을 얻고, 소문항 (iii)은 직선을 따라서가 아니라 원점 둘레로 그린 부호표(sign chart)가 된다.

풀이

소문항 (i)

항을 둘씩 묶으면

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - x + 4 &= x^2(x-4) - (x-4) \\ &= (x-4)(x^2-1) \\ &= (x+1)(x-1)(x-4). \end{aligned}$$

근(root)은 $-1, 1, 4$이다. 각 인수는 일차식이고 자기 근에서만 부호가 바뀌므로, 곱은 세 근 각각에서 부호가 바뀐다. x가 충분히 큰 양수이면 세 인수가 모두 양수이므로, 오른쪽부터 읽은 부호의 패턴은 다음과 같다.

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
부호	$-$	$+$	$-$	$+$

삼차식의 값이 0이 되는 근까지 포함하면, 부등식이 성립하는 것은 정확히

$$-1 \le x \le 1 \quad \text{또는} \quad x \ge 4.$$

일 때이다.

소문항 (ii)

$f(x,y) = x^3 - 4x^2y - xy^2 + 4y^3$이라 하자. 이것은 소문항 (i)의 삼차식에서 각 항에 y의 거듭제곱을 곱해 차수를 3으로 맞춘 것이며, 같은 방식으로 묶을 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2(x-4y) - y^2(x-4y) \\ &= (x-4y)(x-y)(x+y). \end{aligned}$$

곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때뿐이므로, $f(x,y) = 0$인 곳은 세 직선

$$x = 4y \ (\text{즉} y = \tfrac{1}{4}x), \qquad y = x, \qquad y = -x,$$

이고, 이들은 모두 원점을 지난다.

? **생각해 보기** 왜 (ii)의 답이 (i)과 관련이 있어야 할까?

$y \neq 0$일 때 $t = x/y$로 놓자. 그러면 $f(x,y) = y^3\,(t^3 - 4t^2 - t + 4)$이고, 이는 소문항 (i)의 삼차식에 y^3을 곱한 것이다. 그 삼차식은 $t = -1, 1, 4$에서, 곧 $x = -y$, $x = y$, $x = 4y$ 위에서 0이 된다. ($y = 0$일 때 $f = x^3$은 원점에서만 0이 되는데, 원점은 이미 세 직선 위에 모두 있다.)

소문항 (iii)

세 직선은 평면을 원점에서 만나는 여섯 개의 부채꼴 영역(sector)으로 나눈다. 양의 x축에서 시계 반대 방향으로 재면, 여섯 개의 반직선은 다음 방향을 향한다.

$$\arctan \tfrac{1}{4} \approx 14^\circ, \quad 45^\circ, \quad 135^\circ, \quad 194^\circ, \quad 225^\circ, \quad 315^\circ.$$

한 영역 안에서는 f의 어떤 인수도 0이 아니므로, 그곳에서 f의 부호는 일정하다. 직선 하나를 건너면 정확히 한 인수의 부호가 바뀌므로(세 직선은 서로 다르고, 원점을 벗어나면 한 번에 하나의 직선만 건넌다), f의 부호는 이웃한 영역마다 번갈아 바뀐다.

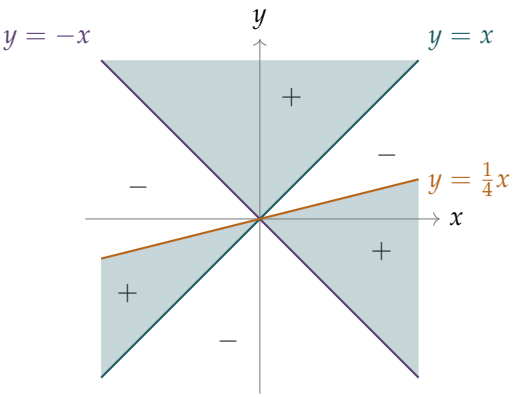
부호를 정하기 위해 $(1,0)$을 잡자. $f(1,0) = 1 > 0$이고, $(1,0)$은 315°와 14° 사이의 영역에 있다. 따라서 한 바퀴 돌면서 부호는 다음과 같다.

영역 (도)	$-45, 14$	$14, 45$	$45, 135$	$135, 194$	$194, 225$	$225, 315$
부호 f	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

확인 삼아 보면, 셋째 열에서 $f(0,1) = 4 > 0$이고 다섯째 열에서 $f(-3,-1) = 8 > 0$이다.

따라서 $f(x,y) \geq 0$인 곳은 아래 그림에서 색칠한 세 영역과 세 직선 전체($f = 0$인 곳)이다.

- 양의 x축을 포함하는 영역으로, $x > 0$에서 $y = -x$(아래)와 $y = \frac{1}{4}x$(위) 사이;
- 양의 y축을 포함하는 영역으로, $y > 0$에서 $y = x$와 $y = -x$ 사이;
- 제3사분면에서 $y = x$와 $y = \frac{1}{4}x$ 사이의 가느다란 영역.



생각해 보기 왜 그림을 원점을 중심으로 반 바퀴 돌리면 색칠만 서로 바뀌고 모양은 그대로일까?

f의 모든 항은 홀수 차수 3이므로 $f(-x,-y) = -f(x,y)$이다. 점을 원점을 중심으로 180° 회전하면 f의 부호가 뒤집히므로, 색칠한 영역마다 맞은편에 색칠하지 않은 영역이 놓인다. 이것은 어떤 그림이든 빠르게 검산하는 방법이 된다. 색칠한 영역과 색칠하지 않은 영역은 반드시 마주 보는 쌍으로 나타나야 하고, 실제로 그렇다.

검산

- 직선 $y = 1$ 위에서 $f(x,1)$은 정확히 소문항 (i)의 삼차식이므로, $y = 1$에서 색칠된 부분은 $-1 \leq x \leq 1$과 $x \geq 4$여야 한다. 그림에서 $y = 1$은 $y = -x$와 $y = x$ 사이($x = -1$부터 $x = 1$까지)에서 색칠되어 있고, $y = \frac{1}{4}x$와 만나는 $x = 4$에서 다시 색칠된 영역으로 들어간다.
- x축 위에서 $f = x^3$이고, 이는 정확히 $x \geq 0$일 때 음이 아니다. 실제로 양의 x축은 색칠되어 있고 음의 x축은 그렇지 않다.
- 수치적으로 2×10^5개의 무작위 점에서 f의 값을 계산했는데, 그 부호는 매번 여섯 영역의 부호표와 일치했다. 예를 들어 $f(1,0) = 1$, $f(0,-1) = -4$, $f(-3,-1) = 8$이다.

흔한 실수

- $y < 0$인데 y^3으로 나누면서 부등호 방향을 그대로 두는 것. 그곳에서는 $y^3 < 0$이므로 조건이 $t^3 - 4t^2 - t + 4 \leq 0$이 되며, 아래쪽 반평면이 위쪽과 달라 보이는 것도 이 때문이다.
- $y > 0$에 대해서만 소문항 (i)의 답을 이용해 색칠하고, $y < 0$은 아예 잊어버리는 것.
- 직선 자체를 빼먹는 것. 부등식에 등호가 포함되어 있으므로 직선도 영역에 속한다.

STEP 너머

모든 항의 차수가 같은 다항식을 **동차**(*homogeneous*) 다항식이라고 한다. 동차 다항식의 영점 집합은 원점을 지나는 직선들의 합집합이고, 그 부호는 방향에만 의존한다. 동차 다항식은 원점을 지나는 직선 하나 전체를 한 점으로 보는 사영기하학(projective geometry)의 출발점이며, 선형대수학(linear algebra) 강의에서 원뿔곡선(conic)과 이차형식(quadratic form)을 분류할 때 다시 등장한다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 이차형식을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 STEP 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 1995, 문제 2

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1995, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q2

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 두 적분 모두 따로 놓고 보면 쉽지 않지만, 둘을 짝지으면 훌륭하게 맞물린다. 두 적분을 더하면 약분되어 1이 되는 분수가 나오고, 빼면 분자가 정확히 분모의 도함수(derivative)가 된다. 쉬운 적분 두 개로부터 S와 T에 대한 연립방정식(simultaneous equations) 두 개를 얻는다. 소문항 (ii)에서 치환(substitution) $x = \sin^2 t$를 고르는 까닭은 이 치환이 $\frac{1}{x} - 1$을 완전제곱식 $\cot^2 t$로 바꾸어 제곱근이 사라지기 때문이다. 그 뒤로는 줄곧 배각 공식(double-angle formulae)만 쓰면 된다.

풀이

소문항 (i)

피적분함수(integrand)를 더하면

$$S + T = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c_1.$$

빼면

$$S - T = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x$이므로 분자는 분모의 도함수이다. 따라서 이 적분은 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 꼴이고,

$$S - T = \ln|\cos x + \sin x| + c_2.$$

이 두 식을 더하고 빼서 각각 반으로 나누면

$$S = \tfrac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C,$$
$$T = \tfrac{1}{2}(x - \ln|\cos x + \sin x|) + C',$$

이다. 여기서 C와 C'은 임의의 상수이다. 이 결과는 피적분함수가 정의되는 구간, 즉 $\cos x + \sin x \neq 0$인 임의의 구간에서 성립한다.

소문항 (ii)

구하는 적분을 I라 하자. $x = \sin^2 t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = 2\sin t \cos t \, \mathrm{d}t$이다. 적분 구간의 끝을 보면, $x = \frac{1}{4}$일 때 $\sin t = \frac{1}{2}$이므로 $t = \frac{\pi}{6}$이고, $x = \frac{1}{2}$일 때 $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $t = \frac{\pi}{4}$이다. (t는 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$에서 택한다. t가 이 구간을 움직일 때 x는 $\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{2}$까지 증가한다.)

다음으로 제곱근을 정리하면

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}, \qquad \text{이므로} \qquad \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

생각해 보기 제곱근이 $|\cos t / \sin t|$가 아니라 $\cos t / \sin t$인 까닭은 무엇인가?

일반적으로 $\sqrt{\cot^2 t} = |\cot t|$이다. 그러나 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$에서는 $\sin t$와 $\cos t$가 모두 양수이므로 $\cot t > 0$이고, 절댓값 기호를 없앨 수 있다. 바로 이 때문에 t를 제1사분면에서 택한 것이다.

치환하면 $\sin t$가 약분된다.

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 - 4\sin^2 t) \frac{\cos t}{\sin t} 2\sin t \cos t \, \mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 2\cos^2 t \, (1 - 4\sin^2 t) \, \mathrm{d}t.$$

이제 배각 공식을 써서 적분하기 쉬운 꼴로 만든다. $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$이고 $8\sin^2 t \cos^2 t = 2\sin^2 2t = 1 - \cos 4t$이므로

$$2\cos^2 t - 8\sin^2 t \cos^2 t = (1 + \cos 2t) - (1 - \cos 4t) = \cos 2t + \cos 4t.$$

따라서

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos 2t + \cos 4t) \, \mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{4}\sin 4t \right]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\sin \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\sin \pi \right) - \left(\tfrac{1}{2}\sin \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{1}{4}\sin \tfrac{2\pi}{3} \right) \\ &= \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{8} \right), \end{aligned}$$

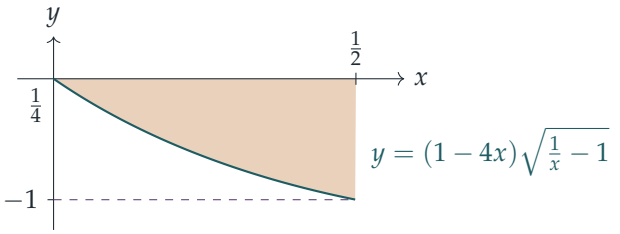
이고, 그러므로

$$\int_{1/4}^{1/2} (1 - 4x) \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{8}.$$

검산

- 부호: $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$에서 $1 - 4x < 0$이고 제곱근은 양수이므로 피적분함수는 음수이고, 따라서 I도 음수여야 한다. 실제로 $4 - 3\sqrt{3} \approx -1.196$이므로 $I \approx -0.1495$이다. 아래 그래프는 피적분함수를 나타낸다.

- 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 직접 적용하면 $-0.149519\ldots$를 얻으며, 이는 소수점 아래 열째 자리까지 $\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$과 일치한다.
- 소문항 (i)은 미분하여 확인한다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\big(x + \ln(\cos x + \sin x)\big) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$. 예를 들어 $[0,1]$에서 S와 T는 모두 수치 적분(quadrature) 값(0.66168과 0.33832)과 일치한다.



흔한 실수

- 적분 구간을 $t = \frac{\pi}{6}$과 $t = \frac{\pi}{4}$로 바꾸는 것을 잊거나, x로 되돌려 치환할 때 잘못하는 실수.
- $\mathrm{d}x$에서 인수 $2\sin t\cos t$를 빠뜨리거나, $\mathrm{d}x = 2\sin t\,\mathrm{d}t$로 쓰는 실수.
- 양수 답을 내는 실수. 피적분함수가 구간 전체에서 음수이므로 답이 양수라면 부호 오류가 있다는 신호이다.

STEP 너머

소문항 (i)의 기법, 즉 까다로운 적분을 "짝"이 되는 적분과 묶어 합과 차가 모두 쉬워지게 하는 기법은 거듭 등장한다. 예를 들어 $\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$와 $\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$에서 그렇고, 복소수 형태로는 $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$를 적분하는 방법으로 나타난다. 소문항 (ii)는 일반적인 원리의 작은 예이다. 잘 고른 치환은 대수적인 피적분함수를 삼각다항식(trigonometric polynomial)으로 바꿀 수 있으며, 이것이 푸리에 급수(Fourier series)의 출발점이다. 이런 성격의 적분을 더 많이, 자세한 논의와 함께 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 1995, 문제 3

순수수학 • 망원급수

> **STEP I 1995, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q3

핵심 아이디어

합의 연속한 항들이 대부분의 부분을 공유할 때, 각 항을 차 $\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(r-1)$ 꼴로 쓰면 거의 모든 것이 소거된다. 즉 합이 **망원급수처럼 접힌다**(*telescopes*). 핵심은 그 차가 원하는 항이 되도록 f를 고르는 것인데, 여기서는 문제가 대신 골라 준다. 부호가 번갈아 바뀌는 급수(alternating series)의 경우, 이를 **모든** 세제곱의 합에서 짝수 세제곱의 합의 두 배를 뺀 것으로 쓰는 것이 요령이며, 그러면 소문항 (ii)의 결과를 두 번 쓰게 된다.

풀이

소문항 (i)

합을 모두 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\sum_{r=1}^{n}\{\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(r-1)\}=\{\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0)\}+\{\mathrm{f}(2)-\mathrm{f}(1)\}+\cdots+\{\mathrm{f}(n)-\mathrm{f}(n-1)\}.$$

$\mathrm{f}(1),\mathrm{f}(2),\ldots,\mathrm{f}(n-1)$은 각각 더하기 부호로 한 번, 빼기 부호로 한 번 나타나므로 모두 소거된다. 첫 번째 괄호의 $-\mathrm{f}(0)$과 마지막 괄호의 $\mathrm{f}(n)$만 남으므로 $\mathrm{f}(n)-\mathrm{f}(0)$이 되어, 원하는 결과를 얻는다.

"모두 소거된다"보다 더 엄밀한 논증을 원한다면 n에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓰면 된다. $n=1$일 때 합은 $\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0)$이다. $n=k$일 때 결과가 성립한다면, 다음 항을 더하여

$$\mathrm{f}(k)-\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(k)=\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(0),$$

을 얻는데, 이것이 $n=k+1$일 때의 결과이다. 따라서 모든 $n\geq 1$에 대하여 성립한다.

소문항 (ii)

$\mathrm{f}(r) = r^2(r+1)^2$이면 $\mathrm{f}(r-1) = (r-1)^2r^2$이다. 두 식 모두 인수 r^2을 가지므로, 이를 묶어내고 제곱의 차(difference of two squares)를 이용한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1) &= r^2\left[(r+1)^2 - (r-1)^2\right] \\ &= r^2\left[(r+1)+(r-1)\right]\left[(r+1)-(r-1)\right] \\ &= r^2 \cdot 2r \cdot 2 = 4r^3.\end{aligned}$$

이제 $r = 1$부터 n까지 더하고 소문항 (i)을 적용한다. $\mathrm{f}(0) = 0$이므로

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = \mathrm{f}(n) - \mathrm{f}(0) = n^2(n+1)^2, \qquad \text{따라서} \qquad \boxed{\sum_{r=1}^{n} r^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.}$$

소문항 (iii)

이 급수는 $2n+1$개의 항으로 이루어져 있다. 홀수의 세제곱은 더하기 부호, 짝수의 세제곱은 빼기 부호를 가지며, 마지막 항은 홀수의 세제곱 $(2n+1)^3$이다.

> **생각해 보기** $\sum r^3$에 대한 공식만으로 번갈아 바뀌는 부호를 어떻게 처리할 수 있을까?

$(2n+1)^3$까지 **모든** 세제곱의 합에서 출발한다. 이 합에서는 모든 짝수 세제곱이 더하기 부호를 갖는데, 우리가 원하는 것은 빼기 부호이므로 각 짝수 세제곱을 두 번 빼 준다.

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (2n+1)^3 = \sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 2\sum_{m=1}^{n} (2m)^3.$$

짝수 세제곱은 $m = 1, \ldots, n$에 대하여 $(2m)^3 = 8m^3$이고, 그중 가장 큰 것은 $(2n)^3$이다. 소문항 (ii)를 두 번, 그중 한 번은 n 대신 $2n+1$을 넣어 사용하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 16\sum_{m=1}^{n} m^3 &= \tfrac{1}{4}(2n+1)^2(2n+2)^2 - 16\cdot\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= (2n+1)^2(n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2 \\ &= (n+1)^2\left[(2n+1)^2 - (2n)^2\right] \\ &= (n+1)^2(4n+1),\end{aligned}$$

이다. 여기서 둘째 줄에서는 $(2n+2)^2 = 4(n+1)^2$을, 마지막 줄에서는 제곱의 차 $(2n+1)^2 - (2n)^2 = (2n+1+2n)\cdot 1$을 이용하였다. 따라서

$$\boxed{1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(4n+1).}$$

검산

- $n = 0$일 때 급수는 $1^3 = 1$뿐이고, $(0+1)^2(0+1) = 1$이다.
- $n = 1$일 때: $1 - 8 + 27 = 20$이고, $2^2 \times 5 = 20$이다.
- $n = 2$일 때: $1 - 8 + 27 - 64 + 125 = 81$이고, $3^2 \times 9 = 81$이다.
- 항들을 $(2m+1)^3 - (2m)^3 \approx 12m^2$으로 짝지을 수 있으므로, 답은 마지막 항의 대략 절반인 $(2n+1)^3/2$ 정도로 증가해야 한다. 실제로 $(n+1)^2(4n+1) \approx 4n^3$이고, 이는 $\sum 12m^2 \approx 4n^3$과 일치한다.

또한 0부터 199까지의 모든 n에 대하여 직접 합을 계산하여 소문항 (ii)와 (iii)을 확인하였다.

흔한 실수

- 짝수 세제곱을 한 번만 빼는 것. 그러면 $\sum k^3 - \sum(2m)^3$, 즉 번갈아 더한 합이 아니라 홀수 세제곱의 합이 된다.
- 짝수 세제곱을 $(2n+2)^3$까지 취하거나, 모든 세제곱의 합 공식에서 $2n+1$ 대신 n을 쓰는 것. 항의 개수를 주의 깊게 세어야 한다.

STEP 너머

소문항 (i)은 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)의 이산적 유사물이다. 차 $\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1)$이 도함수의 역할을 하고, 이를 더하면 f를 되찾는다. 이는 F'을 적분하면 $F(b) - F(a)$가 되는 것과 똑같다. 이러한 "유한 차분의 미적분(calculus of finite differences)"을 이용하면 알맞은 f를 찾아 어떤 다항식이든 합을 구할 수 있으며, 같은 망원급수 아이디어가 급수의 수렴(convergence)에 관한 많은 증명의 바탕을 이룬다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에 망원급수와 이런 종류의 급수에 관한 연습 문제가 더 있다.

풀이

STEP I 1995, 문제 4

순수수학 • 드무아브르 정리

> **STEP I 1995, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q4

핵심 아이디어

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)를 쓰면 $\sin 5\theta$는 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^5$의 허수부(imaginary part)가 되고, 이항정리(binomial theorem)를 쓰면 이 거듭제곱을 $\cos\theta$와 $\sin\theta$의 곱들로 전개할 수 있다. 허수부의 모든 항에는 $\sin\theta$의 홀수 거듭제곱이 들어 있으므로, 인수 하나를 묶어 내고 나머지는 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$를 이용해 코사인으로 바꿀 수 있다. 그러면 각 $\frac{1}{5}\pi$에서는 $\sin 5\theta = 0$이므로 이 각이 특별해지고, $\cos^2\theta$에 대한 이차방정식(quadratic)이 남는다.

풀이

항등식

$c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$라 하자. 드무아브르 정리에 의해

$$\cos 5\theta + \mathrm{i}\sin 5\theta = (c + \mathrm{i}s)^5.$$

계수 $1, 5, 10, 10, 5, 1$을 갖는 이항정리에 의해

$$(c+\mathrm{i}s)^5 = c^5 + 5c^4(\mathrm{i}s) + 10c^3(\mathrm{i}s)^2 + 10c^2(\mathrm{i}s)^3 + 5c(\mathrm{i}s)^4 + (\mathrm{i}s)^5.$$

$\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$이므로, 허수 항은 $\mathrm{i}s$의 홀수 거듭제곱을 가진 항들이다.

$$\mathrm{Im}(c+\mathrm{i}s)^5 = 5c^4 s - 10c^2 s^3 + s^5.$$

c와 s는 모두 실수이므로, 허수부를 비교하면

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= s\left(5c^4 - 10c^2s^2 + s^4\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2 + 10c^4 + 1 - 2c^2 + c^4\right)\\ &= s\left(16c^4 - 12c^2 + 1\right),\end{aligned}$$

이다. 여기서 둘째 줄에서는 $s^2 = 1 - c^2$를 이용했다. 즉

$$\sin 5\theta = \sin\theta\left(16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1\right),$$

이므로 요구된 항등식(identity)이 성립한다.

$\cos^2\frac{1}{5}\pi$의 값 구하기

$\theta = \frac{1}{5}\pi$를 대입하자. 그러면 $\sin 5\theta = \sin\pi = 0$이고, $0 < \frac{1}{5}\pi < \pi$이므로 $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$이다. 따라서 항등식을 $\sin\theta$로 나눌 수 있고, $x = \cos^2\frac{1}{5}\pi$는 다음을 만족한다.

$$16x^2 - 12x + 1 = 0, \qquad \text{따라서} \qquad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

생각해 보기 이 이차방정식의 근은 두 개이다. 어느 것이 $\cos^2\frac{1}{5}\pi$인가?

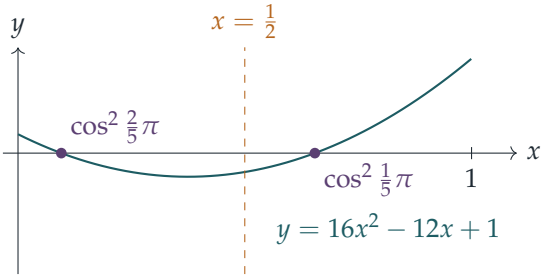
근을 고르려면 $\cos\frac{1}{5}\pi$에 대한 사실이 하나 더 필요하다. $0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{4}\pi$이고 cos는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 감소하므로 $\cos\frac{1}{5}\pi > \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$이고, 따라서

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi > \tfrac{1}{2}.$$

이제 $\sqrt{5} < 3$에서 $\frac{3-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$이고, $\sqrt{5} > 1$에서 $\frac{3+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$이다. $\frac{1}{2}$보다 큰 근은 정확히 하나이므로

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

(다른 근이 쓸모없는 근인 것은 아니다. $\theta = \frac{2}{5}\pi$에서도 $\sin 5\theta = 0$이고 $\sin\theta \neq 0$이며, $\cos^2\frac{2}{5}\pi = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$이다.)



$\cos\frac{1}{5}\pi$ 이끌어 내기

$0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos\frac{1}{5}\pi > 0$이고, 따라서 양의 제곱근을 택한다.

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}.$$

마지막으로 $(1+\sqrt{5})^2 = 1+2\sqrt{5}+5 = 6+2\sqrt{5}$이고 $1+\sqrt{5} > 0$이므로 $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$이고,

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right),$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

검산

- $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 항등식은 $\sin\frac{5}{2}\pi = 1\cdot(0-0+1) = 1$을 주는데, 이는 옳다. θ가 작을 때: 괄호 안이 $16-12+1=5$에 가까워지므로 양변은 모두 약 5θ이다.
- 수치로 보면 $\cos 36^\circ \approx 0.809017$이고 $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \approx 0.809017$이다. 또한 $\cos^2 36^\circ \approx 0.654508 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$이다. 항등식은 10^4개의 무작위 각에서도 확인했다.
- $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$는 황금비(golden ratio) φ의 절반인데, 황금비는 정오각형(regular pentagon)에서 대각선과 변의 길이의 비이다. 36°라는 각이 이를 암시한다.

흔한 실수

- i의 거듭제곱에서 생기는 부호를 놓치는 것: s^3 항에는 $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$가 붙어 $-10c^2s^3$이 된다.
- 이유 없이 이차방정식의 근을 고르는 것. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$를 배제하려면 $\cos^2\frac{1}{5}\pi > \frac{1}{2}$와 같은 부등식이 필요하다.
- $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$임을 밝히지 않고 $\sin\theta$로 나누는 것.

STEP 너머

같은 방법으로 $\sin n\theta / \sin\theta$와 $\cos n\theta$를 $\cos\theta$의 다항식으로 나타낼 수 있는데, 이것이 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomials)이며 수치해석(numerical analysis) 곳곳에 등장한다. 수 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/5}$는 1의 다섯제곱근(fifth roots of unity)이며, $\cos\frac{1}{5}\pi$가 제곱근만으로 표현된다는 사실 때문에 정오각형을 자와 컴퍼스(ruler and compasses)로 작도할 수 있다. 어떤 정다각형이 작도 가능한지에 관한 가우스(Gauss)의 정리는 대학 학부 갈루아 이론(Galois theory)의 백미이다. 드무아브르 정리 뒤에 숨은 기하학에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

풀이

STEP I 1995, 문제 5

순수수학 • 이항급수와 적분

STEP I 1995, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s1-q5

핵심 아이디어

다항식(polynomial)을 항별로 미분하면 거추장스러운 $1/r$ 인수가 사라지고, 남는 것은 거의 이항전개(binomial expansion)이다. 계수 $(-1)^{r+1}\binom{n}{r}$은 정확히 $-(1-x)^n$에서 상수항을 뺀 것의 계수이다. 일단 f'을 알면, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해 ($f(0)=0$과 함께) f를 적분으로 나타낼 수 있고, 치환(substitution) $y = 1-t$를 하면 이것이 요구된 꼴이 된다. 그 피적분함수(integrand)는 등비급수(geometric series)이므로 곧바로 적분된다.

풀이

도함수

다음과 같이 쓰자.

$$f(x) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{x^r}{r}.$$

이것은 다항식이므로 항별로 미분할 수 있다.

$$f'(x) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} x^{r-1}.$$

$x \neq 0$일 때, 양변에 x를 곱하고 $(-1)^{r+1}x^r = -(-x)^r$을 이용하면

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{f}'(x) &= -\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r \\ &= -\Big(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r - 1\Big) \\ &= 1-(1-x)^n, \end{aligned}$$

이다. 마지막 등식은 이항정리(binomial theorem)에 의한 것이다. x로 나누면

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1-(1-x)^n}{x} \qquad (x \neq 0),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. ($x = 0$에서는 급수로부터 $\mathrm{f}'(0) = n$이고, $1-(1-x)^n = nx + O(x^2)$이므로 이것은 $x \to 0$일 때 우변의 극한과도 같다.)

적분 공식

f의 모든 항은 인수 x를 포함하므로 $\mathrm{f}(0) = 0$이다. 미적분학의 기본정리에 의해

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(0) + \int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t.$$

? **생각해 보기** 식의 분모에 t가 있는데, $t = 0$을 지나서 적분해도 괜찮을까?

괜찮다. 피적분함수는 사실 다항식 $\mathrm{f}'(t)$이다. 분수 꼴은 $t \neq 0$일 때 그것을 간결하게 쓴 것일 뿐이고, $t = 0$에서의 값은 극한값 n이다. 따라서 특이점(singularity)은 없으며, 식에 제거 가능한 빈틈이 있을 뿐이다.

이제 $y = 1 - t$로 치환하면 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y$이고, $t = 0$일 때 $y = 1$, $t = x$일 때 $y = 1 - x$이다. 그러면

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= \int_1^{1-x} \frac{1-y^n}{1-y}\,(-\mathrm{d}y) \\ &= \int_{1-x}^{1} \frac{1-y^n}{1-y}\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

이다. 여기서 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸어 음의 부호를 흡수하였다. 이것이 요구된 결과이며, 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$\mathrm{f}(1)$의 값

$x = 1$을 대입하면 아래끝은 0이 된다. $y \neq 1$일 때 피적분함수는 등비급수의 합

$$\frac{1-y^n}{1-y} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^{n-1},$$

이고, (앞에서와 마찬가지로) $y = 1$에서의 값은 극한값 n이므로 피적분함수는 $[0,1]$ 전체에서 이 다항식과 같다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(1) &= \int_0^1 \left(1 + y + \cdots + y^{n-1}\right) \mathrm{d}y \\ &= \left[y + \frac{y^2}{2} + \cdots + \frac{y^n}{n} \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

이 결과가 무엇을 뜻하는지 살펴보자. 원래의 급수에 $x = 1$을 대입하면 다음과 같은 놀라운 항등식을 얻는다.

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \binom{n}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

이것은 직접 보아서는 전혀 자명하지 않다.

검산

- $n = 1$: $\mathrm{f}(x) = x$이고 $\left(1 - (1 - x)\right)/x = 1 = \mathrm{f}'(x)$이다. 또한 $\mathrm{f}(1) = 1$이다.
- $n = 4$: $\mathrm{f}(1) = 4 - \frac{6}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.
- 무작위로 고른 유리수 300개에서 도함수 공식을 정확히 확인하였고, 무작위 $x \in [-1.5, 1.5]$와 $n \leq 15$에 대하여 (심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산한) 적분값을 급수와 비교하였으며(상대 오차 10^{-11} 미만), 모든 $n \leq 40$에 대하여 $\mathrm{f}(1)$에 관한 항등식을 정확히 확인하였다.

흔한 실수

- $(1 - x)^n$의 이항전개와 맞추어 볼 때 $r = 0$인 항을 잊는 실수: $r = 1$부터의 합은 $(1 - x)^n$이 아니라 $(1 - x)^n - 1$이다.
- $\mathrm{f}(0) = 0$임을 언급하지 않고 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t$라고 쓰는 실수.
- 치환 $y = 1 - t$ 후에 적분 구간의 위끝과 아래끝을 거꾸로 쓰는 실수: $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y$의 부호가 구간을 다시 뒤집어 준다.

STEP 너머

수 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$을 조화수(harmonic numbers)라고 한다. 이 수는 $\ln n$처럼 증가하며, $H_n - \ln n$은 오일러(Euler) 상수(Euler's constant) $\gamma \approx 0.5772$로 수렴(converge)한

다. 여기서 쓴 기법, 즉 미분하여 거추장스러운 분모를 없앤 뒤 다시 적분하는 방법은 $\ln(1+x)$와 $\tan^{-1} x$의 거듭제곱급수(power series)를 얻는 방법과 같으며, 이것을 무한급수에 대해 정당화하는 일(거듭제곱급수의 항별 미분(term-by-term differentiation))은 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)가 이 내용을 꼼꼼히 다룬다.

풀이

STEP I 1995, 문제 6

순수수학 • 베르누이 미분방정식

> **STEP I 1995, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q6

핵심 아이디어

두 방정식 모두 y에 대해 선형(linear)이 아니지만, 각각 $1/y$의 적당한 거듭제곱에 대해서는 선형이다. 좌변에는 y'/y^2이 들어 있는데, 이것은 (부호를 제외하면) $1/y$의 도함수(derivative)이다. 따라서 $u = 1/y$로 놓으면 방정식은 u에 대한 1계 선형 미분방정식(first-order linear equation)이 되고, 적분인자(integrating factor)를 쓰면 풀이가 끝난다. 소문항 (ii)에서는 y'/y^3 항이 있으므로 대신 $1/y^2$을 살펴보는 것이 자연스럽다.

풀이

소문항 (i)

$u = 1/y$로 놓는다. 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

이므로 방정식의 첫째 항은 정확히 $-\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$이고, 둘째 항은 u이다. 방정식은

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \mathrm{e}^{2x}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u = -\mathrm{e}^{2x}.$$

가 된다. 이것은 u에 대해 선형이다. 적분인자는 $\mathrm{e}^{\int -1\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$이고, 양변에 이를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u\,\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \mathrm{e}^{-x}u = -\mathrm{e}^{x}.$$

를 얻는다. A를 임의의 상수로 하여 적분하면

$$u\,\mathrm{e}^{-x} = A - \mathrm{e}^{x}, \qquad \text{따라서} \qquad u = A\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

이다. $y = 1/u$이므로

$$y = \frac{1}{Ae^x - e^{2x}},$$

이고, 이것이 구하는 일반해(general solution)이다. (원래 방정식에 $1/y$가 들어 있으므로 언제나 $y \neq 0$이고, 따라서 이 치환(substitution)으로 잃어버리는 해는 없다. 이 식은 $Ae^x \neq e^{2x}$인 임의의 구간, 즉 $A > 0$일 때 $x = \ln A$를 피하는 구간에서 성립한다.)

소문항 (ii)

? **생각해 보기** 여기서는 어떤 치환이 $u = 1/y$의 역할을 하는가?

새 변수의 도함수에서 y'/y^3이 나오기를 원한다.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx},$$

이므로 알맞은 선택은 $v = 1/y^2$이다. 그러면 첫째 항은 $-\frac{1}{2}\,dv/dx$이고 둘째 항은 v이므로

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = e^{2x}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{dv}{dx} - 2v = -2e^{2x}.$$

이다. 이번에는 적분인자가 e^{-2x}이다.

$$\frac{d}{dx}\left(v\,e^{-2x}\right) = -2e^{2x}\cdot e^{-2x} = -2.$$

B를 임의의 상수로 하여 적분하면

$$v\,e^{-2x} = B - 2x, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{1}{y^2} = (B - 2x)\,e^{2x}.$$

이다. 그러므로

$$y^2 = \frac{e^{-2x}}{B - 2x}, \qquad y = \pm\frac{e^{-x}}{\sqrt{B - 2x}}.$$

이다. $1/y^2 > 0$이므로 $B - 2x > 0$이어야 한다. 즉 해는 $x < \frac{1}{2}B$에서만 존재하고, 부호는 처음에 y가 가지는 부호에 따라 정해진다(y는 결코 영이 되지 않으므로 부호가 바뀔 수 없다). 소문항 (i)과 달리 답이 두 지수함수의 차가 아니다. 여기서는 우변의 e^{2x}이 적분인자 e^{-2x}과 정확히 상쇄되어 적분할 것이 상수만 남고, 그 때문에 일차항 $-2x$가 나타난다.

검산

- (ii)에 다시 대입해 본다. $1/y^2 = (B - 2x)e^{2x}$을 미분하면 $-2y'/y^3 = -2e^{2x} + 2(B - 2x)e^{2x}$이므로 $y'/y^3 = e^{2x} - 1/y^2$이 되고, 이것이 바로 원래 방정식이다.

- 수치적으로: (ii)에서 $y(0) = 1$로 두면 $B = 1$이므로, 공식은 $y(0.4) = \mathrm{e}^{-0.4}/\sqrt{0.2} \approx 1.49888$을 예측한다. 미분방정식을 $x = 0$에서부터 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가면 소수점 아래 열 자리까지 같은 값을 얻는다. 또한 두 일반해 모두 무작위로 고른 많은 점과 상수에서 각자의 방정식을 만족한다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$에서 음의 부호(또는 소문항 (ii)에서 인수 2)를 빠뜨려 선형 방정식을 망치는 것.
- 소문항 (ii)에서 양의 제곱근만 쓰거나, 해가 $x < \frac{1}{2}B$를 요구한다는 사실을 놓치는 것.

STEP 너머

두 방정식은 모두 베르누이(Bernoulli) 방정식(Bernoulli equation) $y' + P(x)y = Q(x)y^n$의 예이다. y^n으로 나누고 $u = y^{1-n}$으로 치환하면 언제나 선형 방정식이 된다. 여기서 소문항 (i)은 $n = 2$, 소문항 (ii)는 $n = 3$인 경우이다. 해가 유한한 x에서 "폭발"할 수 있다는 사실($x \to \frac{1}{2}B$일 때처럼)은 비선형 방정식의 전형적인 특징으로, 상미분방정식(ODE) 입문 강의에서 다룬다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

풀이

STEP I 1995, 문제 7

순수수학 • 삼각형의 벡터 기하

> **STEP I 1995, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q7

핵심 아이디어

원점을 A, B, C로부터 같은 거리에 있는 점에 두면 위치벡터(position vector) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 길이가 모두 같아진다. 이 사실 하나가 모든 일을 해 준다. 길이가 같은 벡터에 대해서는 $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$이기 때문이다. Q의 위치벡터가 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$라는 아름답고 간단한 꼴임을 알고 나면, 두 소문항 모두 한두 줄의 계산으로 끝난다.

풀이

원점 정하기

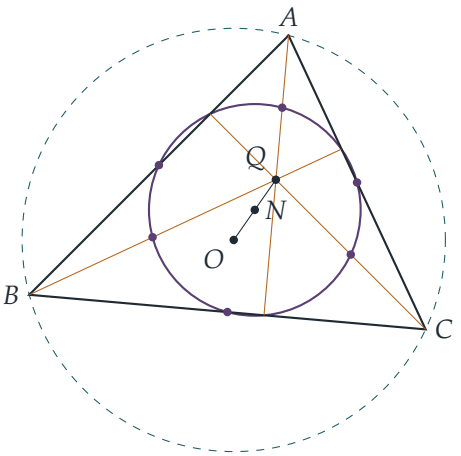
A와 B로부터 같은 거리에 있는 점들은 AB의 수직이등분선(perpendicular bisector), 즉 AB에 수직인 직선을 이룬다. B와 C에 대해서도 마찬가지이다. A, B, C는 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear) AB와 BC는 평행하지 않고, 따라서 두 수직이등분선도 평행하지 않다. 그러므로 이 두 직선은 정확히 한 점에서 만나며, 이 점은 A와 B로부터, 그리고 B와 C로부터 같은 거리에 있으므로 세 점 모두로부터 같은 거리에 있다. (이 점은 삼각형의 외심(circumcentre)이다.)

이 점을 O로 잡고, A, B, C의 위치벡터를 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$라 하며, 공통의 거리를 R이라 하자. 그러면

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R.$$

무게중심(centroid)의 위치벡터는 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$이다. $\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$는 $\mathbf{q}-\mathbf{g} = 2\mathbf{g}$를 뜻하므로

$$\mathbf{q} = 3\mathbf{g} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$



그림에는 O를 중심으로 하고 A, B, C를 지나는 원(점선), Q에서 만나는 세 수선(altitude), 그리고 N을 중심으로 하고 반지름이 $\frac{1}{2}R$이며 소문항 (ii)의 여섯 중점을 지나는 원이 나타나 있다.

소문항 (i)

$\overrightarrow{AQ} = \mathbf{q} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$이고 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$이므로

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = R^2 - R^2 = 0,$$

이다. 여기서 교차항은 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$를 이용해 소거했다. 따라서 $\overrightarrow{AQ}$는 $\overrightarrow{BC}$에 수직이다.

? **생각해 보기** $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$이면 정말로 Q가 A에서 그은 수선 위에 있는가? $\overrightarrow{AQ}$가 영벡터라면 어떻게 되는가?

$Q \neq A$이면 직선 AQ는 A를 지나고 BC에 수직이므로 A에서 그은 수선 **그 자체**이고, Q는 그 위에 있다. $Q = A$이면($\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$일 때, 즉 BC가 지름이고 A에서의 각이 직각일 때 정확히 이런 일이 일어난다) Q가 A에서 그은 수선 위에 있는 것은 자명하다. 어느 경우든 Q는 A에서 그은 수선 위에 있다.

이 논증에서 A를 특별하게 다룬 부분은 전혀 없다. 식 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$는 대칭적이므로 같은 방법으로

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CA} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$
$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0,$$

이고, Q는 B와 C에서 그은 수선 위에도 있다. 따라서 세 수선은 모두 한 점 Q를 지난다. 즉 세 수선은 한 점에서 만난다(concurrent). (Q는 수심(orthocentre)이다.)

소문항 (ii)

AQ의 중점의 위치벡터는 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{q}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$이므로, N에서 이 점까지의 변위는

$$\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

BC의 중점의 위치벡터는 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$이므로, N에서 이 점까지의 변위는

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

두 벡터의 길이는 모두 $\frac{1}{2}|\mathbf{a}| = \frac{1}{2}R$이다.

같은 대칭성에 의해 BQ와 CA의 중점은 N으로부터 $\pm\frac{1}{2}\mathbf{b}$만큼, CQ와 AB의 중점은 $\pm\frac{1}{2}\mathbf{c}$만큼 떨어져 있다. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R$이므로 여섯 중점은 모두 N으로부터 거리 $\frac{1}{2}R$에 있으며, 이것이 보여야 할 내용이었다. 사실 우리는 조금 더 많은 것을 보였다. AQ의 중점과 BC의 중점은 이 원의 한 지름의 양 끝점이고, 나머지 두 쌍도 마찬가지이다.

검산

- 정삼각형의 경우: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$이므로 O, G, Q, N이 모두 일치하고, 여섯 중점은 모두 중심으로부터 거리 $\frac{1}{2}R$에 있어야 한다. 실제로 변의 중점들은 거리 $R\cos 60^\circ = \frac{1}{2}R$에 있고, AQ 등의 중점들은 반지름의 한가운데에 있다.
- A에서의 각이 직각인 경우: 두 직각변 자체가 A를 지나는 수선이므로, 위의 논증이 예측하는 대로 $Q = A$이다.
- 수치적으로, 무작위 삼각형 10^5개를 잡아 외심을 직접 계산하고, $Q = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$임과 세 내적(dot product)이 모두 0이 됨, 그리고 여섯 중점이 모두 N으로부터 거리 $\frac{1}{2}R$에 있음을 확인했다. 가장 큰 상대오차는 약 10^{-13}이었다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$를 $\mathbf{q} = 2\mathbf{g}$로 읽는 것. 이 식은 $\mathbf{q}-\mathbf{g} = 2\mathbf{g}$를 뜻하므로 $\mathbf{q} = 3\mathbf{g}$이다.
- 수직 관계 하나만 보이고 멈추는 것. 한 점에서 만남을 보이려면 Q가 세 수선 위에 모두 있어야 한다. 같은 계산이 B와 C에 대해서도 성립한다고 명시적으로 밝혀야 한다.
- 원점의 존재를 정당화하지 않는 것. 원점이 존재하는 이유는 평행하지 않은 두 변의 수직이등분선이 반드시 만나기 때문이다.

STEP 너머

$\mathbf{q} = 3\mathbf{g}$이고 $\mathbf{n} = \frac{3}{2}\mathbf{g}$이므로 점 O, G, N, Q는 모두 한 직선, 즉 **오일러 직선**(*Euler line*) 위에 있으며 $OG : GQ = 1 : 2$이다. 오일러(Euler)의 이름이 붙은 이 직선과 함께, 소문항 (ii)의 원은 **구점원**(*nine-point circle*)이라 불린다. 이 원은 세 수선의 발(그림에서 볼 수 있다)도 지나는데, 각 수선의 발에서 AQ의 중점과 BC의 중점을 잇는 것과 같은 지름을 바라보는 각이 직각이기 때문이다. 대칭적인 식이 일을 하도록 원점을 영리하게 고르는 것은 벡터 기하와 선형대수에서 자주 등장하는 기법이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 벡터와 내적의 도구를 더 깊이 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이런 정신의 STEP 스타일 기하 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 1995, 문제 8

순수수학 • 선형 미분방정식

> **STEP I 1995, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q8

핵심 아이디어

미지의 대상은 세 함수이지만, 각각의 고정된 x에서는 세 개의 수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$일 뿐이다. 주어진 세 해를 $(*)$에 대입하면 이 세 수에 대한 세 개의 일차방정식을 얻고, 이를 연립방정식(simultaneous equations)으로 푼다. 둘째 문단에서는 $(*)$의 좌변이 y에 대하여 선형(*linear*)이므로, x, 1, x^{-1}의 일차결합에 대한 결과는 각 항이 따로 만들어 내는 결과로부터 바로 얻어진다.

풀이

f, g, h 구하기

좌변 $y'' + f(x)y' + g(x)y$를 Ly로 쓰자. 그러면 $(*)$는 $Ly = h(x)$를 뜻한다. 각 해를 차례로 대입한다.

- $y = 1$: 이때 $y' = y'' = 0$이므로 $g(x) = h(x)$이다.
- $y = x$: 이때 $y' = 1$, $y'' = 0$이므로 $f(x) + x\,g(x) = h(x)$이다.
- $y = x^{-1}$: 이때 $y' = -x^{-2}$, $y'' = 2x^{-3}$이므로

$$\frac{2}{x^3} - \frac{f(x)}{x^2} + \frac{g(x)}{x} = h(x).$$

둘째 식에 $h = g$를 쓰면 $f(x) = (1-x)\,g(x)$를 얻는다. 이 두 관계를 셋째 식에 대입하고 양변에 x^3을 곱하면($x > 0$이므로 가능하다) 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2 - x(1-x)\,g(x) + x^2\,g(x) &= x^3\,g(x) \\ 2 &= g(x)\left(x^3 - 2x^2 + x\right) = g(x)\,x(1-x)^2. \end{aligned}$$

$0 < x < 1$이므로 인수 $x(1-x)^2$은 0이 아니고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다. 그러므로

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x) = \frac{2}{x(1-x)^2}, \qquad \mathrm{f}(x) = (1-x)\,\mathrm{g}(x) = \frac{2}{x(1-x)}.$$

각 x에서 세 방정식을 자유롭게 고를 여지 없이 한 단계씩 풀었으므로, 조건을 만족하는 함수는 이것뿐이다. 조건 $0 < x < 1$은 이 함수들이 발산하는 $x = 0$과 $x = 1$을 피하게 해 준다.

따라서 구하는 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x(1-x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x(1-x)^2}y = \frac{2}{x(1-x)^2}.$$

$ax + b + c/x$는 언제 해가 되는가?

연산자(operator) L은 선형이다. 즉 상수 α, β에 대하여 $L(\alpha u + \beta v) = \alpha\,Lu + \beta\,Lv$이다. 미분이 선형이고, f, g는 단지 y'과 y에 곱해질 뿐이기 때문이다. 첫째 문단에서

$$L(x) = L(1) = L(x^{-1}) = \mathrm{h}(x).$$

그러므로 $y = ax + b + c/x$에 대하여

$$Ly = a\,L(x) + b\,L(1) + c\,L(x^{-1}) = (a+b+c)\,\mathrm{h}(x).$$

> **생각해 보기** 왜 단지 "어떤 x에서 $a+b+c=1$"이 아니라 $a+b+c=1$이라고 결론지을 수 있는가?

모든 $0 < x < 1$에 대하여 $(a+b+c)\,\mathrm{h}(x) = \mathrm{h}(x)$, 즉 $(a+b+c-1)\,\mathrm{h}(x) = 0$이어야 한다. 그런데 이 구간에서 $\mathrm{h}(x) = 2/\big(x(1-x)^2\big) > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다. 따라서 $y = ax + b + c/x$가 $(*)$의 해일 필요충분조건은

$$a + b + c = 1.$$

검산

- $(a,b,c) = (1,0,0)$, $(0,1,0)$ 또는 $(0,0,1)$로 두면 주어진 세 해를 다시 얻고, 각각 $a+b+c=1$을 만족한다.
- 직접 확인: $x = \frac{1}{2}$일 때 $\mathrm{f} = 8$, $\mathrm{g} = \mathrm{h} = 16$이다. $y = 1/x$에 대하여 $y = 2$, $y' = -4$, $y'' = 16$이고, $16 - 32 + 32 = 16$이므로 조건을 만족한다.
- 컴퓨터로 $(0,1)$ 안의 유리수 49개 점에서 세 해를 모두 정확하게 확인하였고, 무작위로 고른 (a,b,c,x) 2000개에 대하여 $Ly = (a+b+c)\mathrm{h}$임을 확인하였다.

흔한 실수

- $y = x^{-1}$에 대하여 $y'' = -2x^{-3}$으로 쓰는 실수: 음의 부호 두 개가 곱해져 $+2x^{-3}$이 된다.
- $a + b + c = 0$이라고 답하는 실수. 이것은 $ax + b + c/x$가 **동차**(*homogeneous*) 방정식 $Ly = 0$의 해가 될 조건이다. 여기서는 우변이 0이 아니라 h이다.

STEP 너머

이것이 선형 미분방정식(linear differential equation)의 해의 구조이다. $Ly = \mathrm{h}$의 임의의 두 해의 차는 $Ly = 0$의 해가 된다. 여기서 $x - 1$과 $x^{-1} - 1$은 동차방정식의 해이고, 2계 방정식에서는 일차독립인 두 해로 모든 해를 나타낼 수 있다. 따라서 $1 + \alpha(x - 1) + \beta(x^{-1} - 1)$이 일반해(general solution)이며, 이는 정확히 $a + b + c = 1$인 해들의 모임이다. 론스키안(Wronskian)을 쓰면 "일차독립"의 뜻을 엄밀하게 표현할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 이 모든 내용을 다룬다.

풀이

STEP I 1995, 문제 9

역학 • 포물체 궤적의 포락선

> **STEP I 1995, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q9

핵심 아이디어

점 (x, y)를 하나 고정하고 이렇게 묻는다: 그 점을 지나는 궤적을 갖는 발사 각도가 존재하는가? 궤적의 방정식을 θ 대신 $\tan\theta$로 쓰면 $\tan\theta$에 대한 **이차방정식**(*quadratic*)이 된다. 어떤 점에 도달할 수 있는 것은 정확히 이 이차방정식이 실근을 가질 때이므로, 문제 전체가 판별식(discriminant) 하나로 귀결된다.

풀이

모형

입자를 중력만 받아 움직이는 질점(point mass)으로 본다. 즉 공기 저항이 없고, g는 크기와 방향이 일정하며, 경로를 가로막는 것도 없다고 가정한다. 그러면 입자는 처음 속도를 포함하는 연직 평면 안에서 움직이고, O로부터의 수평 **거리**만이 중요하므로 대칭성에 의해 $x \geq 0$으로 두어도 된다. 이때 입자는 x가 증가하는 방향으로 수평면 위로 각 θ만큼, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$로 발사된다. (바로 위로 쏘는 경우 $\theta = \frac{\pi}{2}$는 마지막에 다룬다.)

궤적

$u = \sqrt{2gh}$로 두면 $u^2 = 2gh$이다. 아래쪽으로 일정한 가속도 g가 작용하므로 시간 t가 지난 뒤

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. $t = x/(u\cos\theta)$를 소거하고 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하면

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \tan^2\theta\right) = x\tan\theta - \frac{x^2}{4h}\left(1 + \tan^2\theta\right),$$

를 얻는다. 여기서 $2u^2 = 4gh$를 썼다. $T = \tan\theta$로 쓰고 양변에 $4h$를 곱하면, 궤적이 (x, y)를 지날 필요충분조건은

$$x^2T^2 - 4hx\,T + \left(x^2 + 4hy\right) = 0. \qquad (*)$$

이다. θ가 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 전체를 움직이면 $T = \tan\theta$는 모든 실숫값을 정확히 한 번씩 취하므로, 각도를 고르는 것은 실수 T를 고르는 것과 같다.

? **생각해 보기** 왜 궤적을 θ 대신 $\tan\theta$로 나타내는가?

θ로 쓰면 방정식에 sin, cos, $\sec^2$이 뒤섞여 다루기 불편하다. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 쓰면 모든 것이 한 변수 T의 다항식이 되고, "그런 각도가 있는가?"라는 질문은 "이 이차방정식이 실근을 갖는가?"라는, 곧바로 답할 수 있는 질문으로 바뀐다.

도달할 수 있는 점

$x > 0$이라 하자. 그러면 $(*)$는 T에 대한 진짜 이차방정식이고, 실근을 가질 필요충분조건은 판별식이 음이 아닌 것이다:

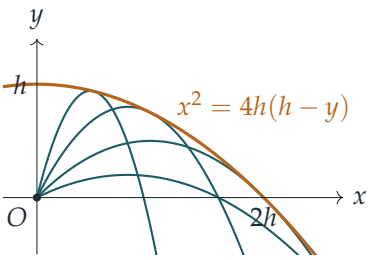
$$\begin{aligned}(4hx)^2 - 4x^2\left(x^2 + 4hy\right) \geq 0 &\iff 4x^2\left(4h^2 - x^2 - 4hy\right) \geq 0 \\ &\iff x^2 \leq 4h^2 - 4hy = 4h(h - y),\end{aligned}$$

여기서 $4x^2 > 0$으로 나누었다. 따라서 (x, y)가 포물선 **위쪽**에 있으면, 즉 $x^2 > 4h(h - y)$, 다시 말해 $y > h - \dfrac{x^2}{4h}$이면, $(*)$는 실근을 갖지 않으며 어떤 발사 각도로도 입자를 (x, y)에 보낼 수 없다.

남은 것은 O를 지나는 연직선 $x = 0$의 경우이다. 이 직선 위에서 $y \neq 0$인 점에는 연직으로 발사해야만 도달할 수 있다(다른 각도에서는 모든 $t > 0$에 대해 $x > 0$이다). 속력 u로 바로 위로 쏘면 입자는 높이 $u^2/(2g) = h$까지 올라가고 그 이상은 오르지 못하는데, 이 점이 바로 포물선이 $x = 0$과 만나는 점이다. 따라서 이 직선 위에서도 포물선 위쪽의 점에는 도달하지 못한다.

그러므로 발사 각도가 무엇이든 입자는 포물선 $x^2 = 4h(h - y)$ 위쪽의 점에는 결코 도달할 수 없다. ■

이 한계는 최선이다. $x^2 = 4h(h - y)$이면 판별식이 0이 되어 경로가 포물선에 꼭 접하는 각도 $\tan\theta = 2h/x$가 정확히 하나 존재한다. 이 포물선은 모든 궤적의 **포락선**(*envelope*)이며, 흔히 안전 포물선(parabola of safety)이라고 부른다.



속력 $\sqrt{2gh}$인 네 궤적(청록색)이 각각 경계 포물선(호박색)에 한 번씩 접한다.

단순화 가정

- 입자는 질점이다(크기도 회전도 없다).
- 공기 저항(및 중력 이외의 모든 힘)은 무시한다.
- 중력장은 균일하다. 즉 운동 영역 전체에서 g가 일정하며, 이는 지표면을 평평하게 보고 지구의 자전을 무시한다는 뜻이기도 하다.
- 경로가 예컨대 지면 등에 가로막히지 않아서, 입자가 실제로 해당 점들까지 날아갈 수 있다.

검산

- $x = 0$에서 포물선은 $y = h = u^2/(2g)$를 주는데, 이는 연직으로 던졌을 때의 최고 높이이다. $y = 0$에서는 $x = 2h = u^2/g$를 주는데, 이는 평지에서의 익숙한 최대 도달 거리이다(예측대로 $\tan\theta = 2h/x = 1$인 45°에서).
- 수치적으로, $g = 9.8$, $h = 1.7$로 두고 거의 바로 아래쪽에서 거의 바로 위쪽까지 399개의 발사 각도에 대해 운동을 단계별로 계산하였다. 어느 경로의 어느 지점에서든 포물선 위로 올라간 최대 높이는 약 -5×10^{-13}, 즉 반올림 오차 범위에서 0이었고, 고정된 x에서 각도에 대해 y를 최대화하면 매번 $h - x^2/(4h)$가 재현되었다.

흔한 실수

- θ를 범위 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서만 다루는 것. O보다 아래에 있는 점에는 아래쪽으로 발사해야 하며($T < 0$), 논증은 이런 경우도 포괄해야 한다.
- $x = 0$을 따로 다루지 않고 x(또는 x^2)로 나누는 것.
- 특정한 궤적 하나가 포물선 아래에 있음만 보이는 것. 주장은 **모든** 각도에 대한 것이며, 그래서 점을 고정하고 각도를 변화시키는 것이다.

STEP 너머

여기서의 포물선은 매개변수 하나로 이루어진 궤적족의 **포락선**, 즉 족의 모든 곡선에 접하는 곡선이다. 곡선족 $F(x, y, T) = 0$의 포락선은 $F = 0$과 $\partial F/\partial T = 0$에서 T를 소거하여 구하는데, T에 대한 이차식의 경우 이는 정확히 판별식이 0이 되는 조건이다. 포락선은 광학의 초곡선(caustic), 일계 미분방정식(differential equation) 이론의 특이해(singular solution), 그리고 주어진 속력을 가진 모든 포사체의 "안전 영역"에서 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 공기 저항이 있을 때와 없을 때의 포물선 운동을 공부하기 위한 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP I 1995, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 튀어 오름

STEP I 1995, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s1-q10

핵심 아이디어

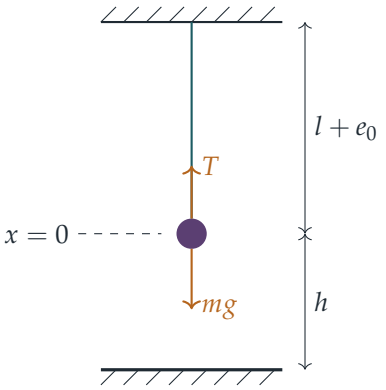
평형 위치(equilibrium position)에서부터 거리를 재면 무게와 장력(tension)의 평형 부분이 정확히 상쇄되므로, 균형을 이루지 않는 힘은 변위 x에 비례하는 훅의 법칙(Hooke's law)에 따른 복원력(restoring force)뿐이다. 따라서 단진동(simple harmonic motion)이 일어나고, 그 에너지 방정식이 바로 속력 공식이다. 그다음은 모두 계산을 정리하는 일이다. 에너지 방정식은 공을 $x = 0$과 바닥면 사이에서 옮겨 주고, 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)은 튈 때마다 속도의 방향을 바꾸고 크기를 일정 비율로 줄인다.

풀이

공은 질점(particle)으로, 줄은 가볍고 탄성이 있으며 늘어나 있는 동안 훅의 법칙을 따르는 것으로 모형화한다. 공기 저항은 무시하고, 튀어 오르는 충돌은 순간적으로 일어난다고 본다. 풀이 전체에서

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{lm}.$$

로 쓴다.



평형 상태의 길이

평형 상태에서 늘어난 길이(extension)를 e_0이라 하면 장력은 $T_0 = \lambda e_0 / l$이다. 평형 상태의 공에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면 $T_0 = mg$이므로

$$\frac{\lambda e_0}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad e_0 = \frac{mgl}{\lambda},$$

이고, 전체 길이는 $l + e_0 = l(1 + mg/\lambda)$이다. 이것이 보이려던 것이다.

속력 공식

평형 위치 아래로 공까지의 거리를 x라 하고, 아래 방향을 양의 방향으로 잡는다. $x \geq 0$이면 늘어난 길이가 $e_0 + x > 0$이므로 줄은 팽팽하고 장력은 $\lambda(e_0 + x)/l$이다. 아래 방향으로 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda(e_0 + x)}{l} = -\frac{\lambda x}{l},$$

이다. $\lambda e_0 / l = mg$이기 때문이다. 따라서 $\ddot{x} = -\omega^2 x$, 즉 $x = 0$을 중심으로 하는 단진동이다.

$\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰고 적분하면

$$\int v\,\mathrm{d}v = -\omega^2 \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v^2 = -\omega^2 x^2 + C.$$

이다. $x = 0$에서 속력이 u_0이므로 $C = u_0^2$이고

$$v^2 + \frac{\lambda}{lm}x^2 = u_0^2,$$

이다. 이것이 보이려던 것이다. (이는 에너지 보존(conservation of energy)과 같은 내용이다. 중력 퍼텐셜 에너지와 탄성 에너지를 합치면 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{l}x^2$에 상수를 더한 꼴이 된다.)

첫 번째 튐

공이 바닥면에 닿으려면 $x = h$에서 $v^2 > 0$, 즉 $u_0^2 - \omega^2 h^2 > 0$이어야 한다. 이것이 바로 주어진 조건 $\lambda h^2 < lmu_0^2$이다. 따라서 공은 속력 w_0으로 바닥면에 부딪히며, 여기서

$$w_0^2 = u_0^2 - \omega^2 h^2.$$

이다. 뉴턴의 실험 법칙에 의해 공은 속력 ew_0으로 위쪽을 향해 바닥면을 떠난다.

$x = h$에서 $x = 0$까지 올라가는 동안에도 줄은 여전히 늘어나 있으므로 같은 운동 방정식이 성립하고, 에너지 적분은 $v^2 + \omega^2 x^2 =$ 상수이다. 달라지는 것은 상수뿐이다. $x = h$에서 $v^2 = e^2 w_0^2$이므로 상수는 $e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2$이고, $x = 0$에서

$$\begin{aligned} u_1^2 &= e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right) + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm} h^2 \left(1 - e^2 \right), \end{aligned}$$

이다. 이것이 보이려던 것이다. 여기서 u_1의 방향은 위쪽이다.

두 번째 튐

생각해 보기 $x = 0$을 지난 뒤 공은 평형 위치보다 위로 올라가고, 줄이 느슨해질 수도 있다. 그래도 공은 속력 u_1로 $x = 0$에 되돌아오는가?

그렇다. $x = 0$ 위에서 공은 무게와 줄의 장력을 받거나, 줄이 느슨해지면 중력만 받으며 움직인다. 두 힘은 모두 보존력(conservative force)이다. 줄이 느슨할 때는 탄성 에너지가 그냥 0일 뿐이다. 따라서 $x = 0$ 위에서 비행하는 동안 내내 전체 역학적 에너지가 보존된다. 공이 다시 $x = 0$으로 내려오면 떠날 때와 같은 퍼텐셜 에너지를 가지므로, 속력도 같은 u_1이며 이번에는 방향이 아래쪽이다.

그러므로 두 번째 하강은 u_0 대신 u_1이 들어간다는 점만 빼면 첫 번째와 똑같다. 여전히 공이 바닥면에 닿아야 하는데,

$$u_1^2 - \omega^2 h^2 = e^2 \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right) > 0.$$

이므로 실제로 닿는다. 첫 번째 튐에서의 논증을 u_0을 u_1으로 바꾸어 되풀이하면

$$\begin{aligned} u_2^2 &= e^2 u_1^2 + \omega^2 h^2 \left(1 - e^2 \right) \\ &= e^2 \left[e^2 u_0^2 + \omega^2 h^2 (1 - e^2) \right] + \omega^2 h^2 (1 - e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \omega^2 h^2 (1 - e^2)(1 + e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm} h^2 \left(1 - e^4 \right), \end{aligned}$$

이고, 이것으로 문제가 해결된다.

검산

- $e = 1$이면 에너지 손실이 없고, 두 공식 모두 마땅히 그래야 하듯 $u_1 = u_2 = u_0$을 준다.
- $e = 0$이면 공은 정지한 상태로 바닥면을 떠나고, 이때 $u_1^2 = \omega^2 h^2$이다. 즉 공은 진폭 h인 위치에서 정지 상태로부터 올라가 속력 ωh로 중심을 지나며, 이는 단진동이 예측하는 그대로이다.
- 규칙성을 깔끔하게 보는 방법이 있다. 튈 때마다 충돌 속력의 제곱에 e^2이 곱해지므로 $u_n^2 - \omega^2 h^2 = e^{2n}\left(u_0^2 - \omega^2 h^2\right)$이다.
- 줄이 느슨해질 수 있도록 하여 운동을 수치적으로 계산해 보았다(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법). 예를 들어 $m = 1$, $l = 1$, $\lambda = 20$, $g = 9.8$, $u_0 = 6$, $h = 0.3$, $e = 0.9$일 때 시뮬레이션 결과는 $u_1 = 5.4316$, $u_2 = 4.9233$으로 공식과 일치한다. 이 예에서는 튀는 사이에 줄이 실제로 느슨해진다.

흔한 실수

- x를 평형 위치가 아니라 자연 길이에서부터 재는 것. 그러면 무게가 상쇄되지 않아 공식에 일차항이 덧붙는다.
- 반발 계수(coefficient of restitution) e를 $x = h$에서의 충돌 속력이 아니라 $x = 0$에서의 속력에 적용하는 것.
- 평형 위치 위에서도 줄이 팽팽하게 유지된다고 가정하는 것. 꼭 그렇지는 않지만, 에너지 보존 덕분에 이는 $x = 0$에서의 속력과는 무관하다.

STEP 너머

평형점 주위에서 중력이 상쇄되는 현상은 일반적인 원리의 첫 사례이다. 평형점 주위에서 선형화(linearise)하면 작은 진동은 단진동이 되고, ω^2은 "강성(stiffness)"을 질량으로 나눈 값과 같다. 튀는 공은 조각별로 매끄러운(piecewise-smooth) 진동자, 곧 **충돌**(*impact*) 진동자의 한 예이다. 이런 계는 바닥면 자체가 움직일 때 놀라울 만큼 풍부한 거동(주기 배가(period doubling), 나아가 혼돈(chaos)까지)을 보일 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동자와 에너지 방법을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

풀이

STEP I 1995, 문제 11

역학 • 원기둥 사이의 마찰

STEP I 1995, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s1-q11

핵심 아이디어

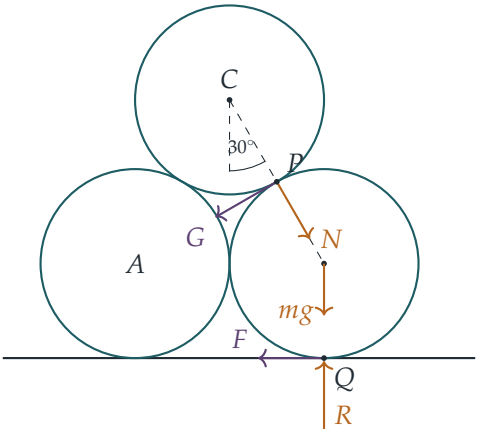
아래에 놓인 원기둥 하나를 살펴보자. 그 무게와 위쪽 원기둥이 주는 수직항력(normal reaction)은 모두 그 중심을 지나므로, 중심에 대한 모멘트(moment)를 취하면 두 마찰력(friction force)만 남고, 따라서 두 마찰력의 크기는 같아야 한다. 이어서 수평 방향으로 한 번 힘을 분해(resolving)하면 원기둥끼리의 접촉점에서 마찰력과 수직항력의 비가 정해지고, 나머지는 서로 접하는 세 원의 기하($30°$와 $60°$의 각)가 해결해 준다.

풀이

모형

원기둥을 반지름이 r인 균일한 강체(rigid body) 원기둥으로 보고, 축에 수직인 단면에서 생각한다. 그러면 각 원기둥은 원이 되고, 그 무게는 중심에 작용한다. 모든 접촉점의 마찰계수(coefficient of friction)는 똑같이 μ이다. 아래 두 원기둥을 A(왼쪽), B(오른쪽)라 하고, 위의 원기둥을 C라 하자. A와 B의 중심은 높이 r에서 서로 $2r$만큼 떨어져 있고, C의 중심은 두 중심에서 각각 $2r$만큼 떨어져 있다. 따라서 세 중심이 이루는 삼각형은 정삼각형이고, C의 중심에서 B의 중심으로 가는 직선은 연직선과 $30°$의 각을 이룬다.

당분간 A와 B는 서로 힘을 주고받지 않는다고 가정하며, 이 점은 마지막에 다시 다룬다. 대칭성에 의해 B와, C의 오른쪽 접촉점만 살펴보면 충분하다.



B에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- 중심에 작용하는 무게 mg;
- 지면과의 접촉점 Q에서, 위쪽으로 작용하는 수직항력 R와 A 쪽으로 수평하게 작용하는 마찰력 F;
- C와의 접촉점 P에서, 중심선을 따라 (아래쪽 바깥 방향으로, 연직선과 30°를 이루며) 작용하는 수직항력 N과, 공통접선(common tangent)을 따라 작용하는 마찰력 G. 이 마찰력은 아래쪽이면서 A 쪽, 즉 수평선 아래로 30°인 방향으로 작용한다고 가정한다.

만약 어느 마찰력이 실제로는 반대 방향으로 작용한다면, 그 값이 음수로 나올 뿐이다.

B의 중심에 대한 모멘트

무게는 B의 중심을 지나고, 두 원 사이의 수직항력은 두 중심을 잇는 직선을 따라 작용하므로 N도 중심을 지난다. 두 마찰력은 모두 접선을 따라 작용하며, 중심으로부터의 수직 거리는 r이다. 맨 아래에서 A 쪽을 향하는 F는 그림에서 B를 시계 방향으로 돌리고, P에서 접선을 따라 아래쪽으로 A를 향하는 G는 이를 반시계 방향으로 돌린다. 따라서

$$Fr = Gr, \qquad \text{그러므로} \qquad F = G.$$

B에 대한 수평 방향 분해

N의 바깥쪽 수평 성분은 $N\sin 30° = \frac{1}{2}N$이다. F와, G의 수평 성분 $G\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}G$는 모두 안쪽을 향한다. 따라서

$$\tfrac{1}{2}N = F + \tfrac{\sqrt{3}}{2}G = G\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

이고, 그러므로

$$\frac{G}{N} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}.$$

이 값은 양수이므로 G는 실제로 가정한 방향으로 작용하며, $F = G$도 마찬가지이다.

접촉점 P에서 미끄러지지 않으려면 $G \le \mu N$이어야 한다. 즉

$$\mu \ge 2 - \sqrt{3}.$$

지면과의 접촉

지면과의 접촉점에서 더 큰 마찰이 필요하지는 않은지도 확인해야 한다. C에 대해, B가 주는 힘은 연직선과 30°를 이루며 왼쪽 위로 향하는 N과, 접선을 따라 위쪽으로 수평선과 30°를 이루는 G이다. 이들의 연직 성분은 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$과 $\frac{1}{2}G$이고, 대칭성에 의해 A도 똑같은 기여를 한다. C에 대해 연직 방향으로 분해하면

$$2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}N + \tfrac{1}{2}G\right) = mg \implies N\left(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}\right) = mg \implies N = \tfrac{1}{2}mg.$$

전체 계의 무게는 $3mg$이고 대칭성에 의해 똑같이 나뉘므로, 전체 계에 대해 연직 방향으로 분해하면 $R = \frac{3}{2}mg$이다. 그러면

$$\frac{F}{R} = \frac{(2-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}mg}{\frac{3}{2}mg} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} < 2 - \sqrt{3},$$

이므로 $\mu \ge 2 - \sqrt{3}$이기만 하면 지면과의 접촉도 유지된다. 결정적인 것은 원기둥끼리의 접촉이다.

> ? **생각해 보기** A와 B는 서로 닿아 있다. 둘 사이의 힘을 무시해도 되는 이유는 무엇인가?

두 원기둥은 서로를 밀어낼 수만 있으므로, A가 중심선을 따라 크기 $S \ge 0$인 힘으로 B를 바깥쪽으로 민다고 하자. 이 힘은 B의 중심을 지나므로 모멘트 방정식은 여전히 $F = G$를 주지만, 수평 방향 분해는 $\frac{1}{2}N + S = G\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이 된다. 한편 C에 대한 연직 방향 방정식은 그대로 성립하고, 두 식을 연립하여 풀면 G/N은 S가 커질수록 커진다는 것을 알 수 있다($S = 0$일 때 그 값은 $2 - \sqrt{3}$이다). 방정식만으로는 S가 정해지지 않으므로 이 문제는 정역학적으로 부정정(statically indeterminate)이며, 필요한 마찰이 가장 작은 것은 $S = 0$일 때이다. 따라서 가능한 마찰 계수의 최솟값은 요구한 대로 $2 - \sqrt{3}$이다.

검산

- $2 - \sqrt{3} = \tan 15° \approx 0.268$이다. 따라서 원기둥끼리의 접촉점에서 전체 반력은 수직 방향과 정확히 15°를 이루는데, 이는 기하에 나오는 30°의 절반이다. 계산이 맞았다는 반가운 신호이다.
- 지면에서의 비 $(2 - \sqrt{3})/3 \approx 0.089$는 원기둥끼리의 비의 3분의 1인데, 이는 이치에 맞다. 지면은 N의 세 배인 $\frac{3}{2}mg$를 떠받치지만 마찰력의 크기는 같기 때문이다.

- 수치적으로 검산해 보았다. B와 C에 대한 모든 힘과 모멘트 방정식에 값을 대입하고 미지의 미는 힘 $S \geq 0$에 대해 최소화하니, μ의 최솟값이 0.267949…로 나와 $2 - \sqrt{3}$과 일치했다.

흔한 실수

- 중심 대신 지면과의 접촉점이나 P에 대해 모멘트를 취하는 것. 이렇게 해도 풀리기는 하지만 N이 끼어들어 계산이 지저분해진다. 중심에 대해 취하면 mg와 N이 한꺼번에 사라진다.
- 지면만 확인하는 것. 지면과의 접촉점에서는 훨씬 작은 마찰만 필요하므로, 틀린 임계값이 나온다.
- C에 대해 연직 방향으로 분해할 때, 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 C에 작용하는 마찰력이 접선을 따라 **위쪽**으로 작용한다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

아래 두 원기둥 사이의 힘 S는 평형(equilibrium) 방정식만으로는 구할 수 없다. 이 구조는 **정역학적으로 부정정**이며, 그래서 문제는 현명하게도 가능한 모든 S의 값에 대해 마찰의 최솟값을 묻는다. 공학에서는 이런 계를 탄성 변형을 모형화하여 해결하며, 쌓아 놓은 파이프나 모래 더미 같은 입상 물질의 역학에서도 같은 문제가 나타난다. 정역학, 마찰, 강체의 평형을 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 1995, 문제 12

확률과 통계 • 배열과 경우의 수

STEP I 1995, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s1-q12

핵심 아이디어

n명의 학생을 배열하는 모든 방법은 일어날 가능성이 같으므로, 각 확률은 조건을 만족하는 배열의 수를 $n!$로 나눈 값이다. 더 나아가 대칭성(symmetry)에 의해 하키 선수들이 **어느 자리**를 차지하는지만 신경 쓰면 된다. 즉 r개의 자리로 이루어진 $\binom{n}{r}$개의 집합 각각이 선택될 가능성이 모두 같다. 그러면 각 소문항은 자리를 고르는 경우의 수 문제가 된다. 마지막 소문항에서 틈에 관한 힌트는 표준적인 "별과 막대(stars and bars)" 기법이다. 하키 선수가 아닌 학생들을 먼저 한 줄로 세우면, 하키 선수들은 그 사이의 서로 다른 틈에 들어가야 한다.

풀이

이 풀이 전체에서 r명의 하키 선수를 H, 나머지 $n-r$명의 학생을 N이라 부른다. (서로 구별되는) 학생들의 $n!$가지 순서는 모두 일어날 가능성이 같다. H들이 차지하는 r개 자리의 집합은 어느 것이든 같은 수, 즉 $r!\,(n-r)!$가지의 순서로부터 생기므로, H들이 차지하는 자리의 집합은 가능한 $\binom{n}{r}$개의 집합 중 어느 것이 될 가능성도 같다. 두 관점 가운데 더 편리한 쪽을 사용한다.

소문항 (i)

양 끝의 두 자리를 먼저 채운다. 왼쪽 끝의 학생이 하키 선수일 확률은 $\frac{r}{n}$이다. 이 조건 아래에서 오른쪽 끝의 학생은 남은 $n-1$명 중 한 명이며 각각 가능성이 같고, 그중 $r-1$명이 하키 선수이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{양 끝에 모두 하키 선수}) = \frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1} = \frac{r(r-1)}{n(n-1)}.$$

(이 값이 0이 아니려면 $r \geq 2$이어야 하는데, 문제에서 이를 보장한다.)

소문항 (ii)

하키 선수들이 모두 붙어 서는 것은 그들의 자리가 연속한 r개의 자리로 이루어진 묶음을 이룰 때와 정확히 같다. 이러한 묶음은 $1, 2, \ldots, n-r+1$번 자리에서 시작할 수 있으므로, $\binom{n}{r}$개 중 조건을 만족하는 자리의 집합은 $n-r+1$개이다.

$$\mathrm{P}(\text{모두 붙어 있음}) = \frac{n-r+1}{\binom{n}{r}} = \frac{r!\,(n-r+1)!}{n!}.$$

같은 방법으로, r명의 하키 선수를 하나의 "슈퍼 학생"으로 묶어도 된다. $n-r+1$개 단위의 순서는 $(n-r+1)!$가지이고 묶음 안의 순서는 $r!$가지이므로 같은 답을 얻는다. 검산 삼아 $r = n$일 때 이 값은 1이 되며, 마땅히 그래야 한다.

소문항 (iii)

하키 선수가 아닌 $n-r$명을 먼저 한 줄로 세운다. 이들은 $n-r+1$개의 틈을 만든다. 첫 번째 학생 앞에 하나, 이웃한 두 학생 사이마다 하나, 마지막 학생 뒤에 하나이다.



어떤 두 하키 선수도 이웃하지 않을 필요충분조건은 각 틈에 하키 선수가 많아야 한 명씩 들어가는 것이다. (두 H가 같은 틈에 있으면 서로 이웃하게 되고, 서로 다른 틈에 있으면 적어도 한 명의 N이 그 사이를 가른다.) 따라서 조건을 만족하는 배열은 $n-r+1$개의 틈 중 r개를 고르고, 고른 틈마다 H를 한 명씩 넣는 것에 대응한다.

자리를 세어 보자. 조건을 만족하는 H의 자리 집합은 어느 r개의 틈을 쓰는지에 따라 결정되므로, 그러한 집합은 $\binom{n-r+1}{r}$개이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{어느 두 명도 붙어 있지 않음}) = \frac{\binom{n-r+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n-r+1)!\,(n-r)!}{(n-2r+1)!\,n!}.$$

(학생들의 순서를 직접 세어도 같은 결과를 얻는다. N들을 배열하는 방법이 $(n-r)!$가지, 서로 다른 r명의 H를 서로 다른 틈에 넣는 방법이 $(n-r+1)(n-r)\cdots(n-2r+2) = \frac{(n-r+1)!}{(n-2r+1)!}$가지이고, 이를 모두 $n!$로 나누면 된다.)

> **생각해 보기** 하키 선수들을 모두 떨어뜨려 놓는 것이 불가능한 경우는 언제인가?

서로 다른 틈이 r개 필요한데, 틈은 $n-r+1$개뿐이다. 따라서

- $r \leq n-r+1$, 즉 $n \geq 2r-1$이면 확률은 위에서 구한 0이 아닌 값이다.

- $r > n - r + 1$, 즉 $n \leq 2r - 2$이면 (하키 선수들을 떼어 놓기에 다른 학생이 너무 적으므로) 확률은 0이다.

경계인 경우 $n = 2r - 1$에서는 배열이 $HNHN\cdots NH$ 꼴로 강제되며, 공식은 $\frac{r!\,(r-1)!}{(2r-1)!} = 1/\binom{2r-1}{r}$을 준다. 이는 H들이 정확히 그 번갈아 나오는 r개의 자리에 놓일 확률이다.

검산

- $n = 10, r = 3$이라 하자. 그러면 (i)은 $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$, (ii)는 $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$, (iii)은 $\binom{8}{3}/\binom{10}{3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$이다. 세 값 모두 가능한 120개의 자리 집합을 컴퓨터로 전수 조사한 결과와 일치하며, 공식들은 $2 \leq r \leq n \leq 14$인 모든 경우에 대해 이 방법으로 확인하였다(또한 $n \leq 7$에 대해서는 $n!$가지 순서 전체와 대조하였다).
- $r = 2$일 때 소문항 (ii)와 (iii)은 여사건(complementary events) 관계이며(두 선수는 이웃하거나 이웃하지 않거나 둘 중 하나이다), 실제로 $\frac{2}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} = 1$이다.

흔한 실수

- 틈을 $n - r - 1$개(하키 선수가 아닌 학생들 사이에 엄밀히 끼인 틈)만 세고 줄의 양 끝을 잊는 것.
- 모델을 섞는 것: 분자에서는 H의 자리를 세면서 분모에서는 학생들의 전체 순서($n!$)를 세는 것. 한 가지 관점을 정해 끝까지 지켜야 한다.
- 답이 0이 아닐 조건을 $n \geq 2r$로 제시하는 것. $n = 2r - 1$인 경우(H로 시작하고 H로 끝나며 번갈아 나오는 배열)도 가능하다.

STEP 너머

틈을 이용한 논법은 "별과 막대" 아이디어로, 열거 조합론(enumerative combinatorics)의 핵심 도구이다. 같은 수 $\binom{n-r+1}{r}$은 "$\{1, \ldots, n\}$의 r-부분집합 중 연속한 두 정수를 포함하지 않는 것은 몇 개인가"에 대한 답이기도 하며, 이를 r에 대해 모두 더하면 피보나치 수(Fibonacci numbers)가 나온다. 사람들의 순서를 자리의 집합으로 바꾸는 단계는 대칭성을 활용해 표본공간(sample space)을 줄이는 방법을 처음 맛보는 것으로, 대학 확률론에서 끊임없이 쓰인다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 경우의 수와 확률의 고전적 정의(naive definition of probability)를 다루는 훌륭한 장들이 있다.

풀이

STEP I 1995, 문제 13

확률과 통계 • 푸아송 솎아내기

> **STEP I 1995, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q13

핵심 아이디어

소문항 (i)은 푸아송 분포(Poisson distribution)의 **솎아내기**(*thinning*) 성질이다. 실제 암세포의 수를 조건으로 두면, 표시된 세포의 수는 이항분포(binomial distribution)를 따른다. 알 수 없는 실제 개수에 대해 합하면 지수급수(exponential series)로 깔끔하게 정리된다. 소문항 (ii)에서 "두 번째 표시가 슬라이드 k에 있다"는 사건은 처음 $k-1$개의 슬라이드에 있는 표시의 총 개수(0개 또는 1개)에 의해 결정되며, 소문항 (i)과 독립인 푸아송 확률변수의 가법성(additivity)을 함께 쓰면 그 총합이 정확히 어떤 분포를 따르는지 알 수 있다.

풀이

이 풀이 전체에서 $q = 1 - p$, $\lambda = \mu p$로 둔다. 서로 다른 슬라이드의 암세포 수는 독립(independent)이라고 가정하고("무작위"라는 말의 자연스러운 해석이다), 과학자의 발견들은 서로 독립이며 세포 수와도 독립이라고 가정한다.

소문항 (i)

한 슬라이드에서 암세포의 수를 N, 과학자가 표시하는 세포의 수를 M이라 하면 $N \sim \mathrm{Po}(\mu)$이다. $N = n$일 때 n개의 세포 각각은 독립적으로 확률 p로 발견되므로 $M \mid N = n \sim \mathrm{B}(n, p)$이다. $m = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 전확률 법칙(law of total probability)에 의해 ($n \geq m$인 항만 기여한다)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M = m) &= \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} = \mathrm{e}^{-\mu} \frac{(\mu p)^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\mu q)^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\mu} \frac{(\mu p)^m}{m!} \mathrm{e}^{\mu q} = \mathrm{e}^{-\mu p} \frac{(\mu p)^m}{m!}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\binom{n}{m}/n! = 1/\big(m!\,(n-m)!\big)$을 쓰고, 이어서 $j = n - m$으로 두어 지수급수를 쓰고, 마지막으로 $-\mu + \mu q = -\mu p$를 썼다. 따라서 요구한 대로 $M \sim \mathrm{Po}(\mu p)$이다.

소문항 (ii)

슬라이드 i에서 표시된 세포의 수를 M_i라 하자. 소문항 (i)과 슬라이드 사이의 독립성에 의해 $M_1, M_2, \ldots$는 독립인 $\mathrm{Po}(\lambda)$ 확률변수이다. 처음 $k-1$개의 슬라이드에서 표시된 수를 $S = M_1 + \cdots + M_{k-1}$이라 하자. 독립인 푸아송 확률변수들의 합은 평균을 더한 푸아송 분포를 따르므로 $S \sim \mathrm{Po}\big((k-1)\lambda\big)$이고, S는 M_k와 독립이다.

> **생각해 보기** 두 번째 표시가 슬라이드 k에 오려면 정확히 무슨 일이 일어나야 하는가?

슬라이드 k 이전에는 표시가 많아야 하나여야 하고, 슬라이드 k까지 마쳤을 때는 적어도 둘이어야 한다. 따라서 서로 배반인 두 경우가 있다.



$$S = 0\text{이고 } M_k \geq 2, \text{ 또는 } S = 1\text{이고 } M_k \geq 1$$

($k = 1$이면 앞선 슬라이드가 없으므로 자동으로 $S = 0$이고, 아래 식들은 여전히 성립한다.) S와 M_k의 독립성을 쓰면

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S = 0,\ M_k \geq 2) &= \mathrm{e}^{-(k-1)\lambda}\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\big), \\
\mathrm{P}(S = 1,\ M_k \geq 1) &= (k-1)\lambda\,\mathrm{e}^{-(k-1)\lambda}\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\big).
\end{aligned}$$

이다. 둘을 더하면

$$Q = \mathrm{e}^{-(k-1)\lambda}\Big\{\big(1 + (k-1)\lambda\big)\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\big) - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\Big\}.$$

이다. 요구된 꼴에 맞추기 위해 $1 + (k-1)\lambda = (1 + k\lambda) - \lambda$로 쓰면

$$\begin{aligned}
\big(1 + (k-1)\lambda\big)\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\big) - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} &= (1 + k\lambda)\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\big) - \lambda + \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= (1 + k\lambda)\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\big) - \lambda.
\end{aligned}$$

이다. $\lambda = \mu p$를 대입하면

$$Q = \mathrm{e}^{-\mu p(k-1)}\Big\{(1 + k\mu p)\big(1 - \mathrm{e}^{-\mu p}\big) - \mu p\Big\},$$

이고, 이것이 주어진 결과이다.

검산

- $k = 1$이면 식은 $1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = P(M_1 \geq 2)$가 되어, 마땅히 그래야 하는 값이 나온다.
- $k = 1, 2, \ldots$에 대해 확률을 모두 더하면 1이 되어야 한다(과학자는 결국 확률 1로 두 번째 세포를 표시한다). 여러 λ 값에 대해 수치적으로 더해 보면 이것이 확인된다.
- $\mu = 1.6$, $p = 0.45$(따라서 $\lambda = 0.72$)로 시뮬레이션(simulation)을 하면 200 000번의 시행 중 약 26.0%에서 두 번째 표시가 슬라이드 2에 나왔다. 식으로 구하면 $Q \approx 0.2591$이다.

흔한 실수

- "슬라이드 k 이전에 표시 하나, 슬라이드 k에 적어도 하나"인 경우를 빠뜨리거나, 실수로 $S = 1$, $M_k = 0$인 경우를 포함하는 것.
- "표시가 있는 첫 번째 슬라이드"와 같은 논법으로 슬라이드를 하나씩 따져 나가는 것. 이렇게 하면 복잡해진다. 처음 $k - 1$개 슬라이드에 걸친 총합 S를 다루는 것이 효율적이다.
- 독립성(슬라이드 사이의 독립성, 그리고 S와 M_k 사이의 독립성)을 어디서 쓰는지 밝히지 않는 것.

STEP 너머

솎아내기는 푸아송 과정(Poisson process)의 한 측면이다. 사건들이 푸아송 과정으로 일어나고 각 사건을 독립적으로 확률 p로 남기면, 남은 사건들은 다시 비율이 p배가 된 푸아송 과정을 이룬다. 그러면 소문항 (ii)는 두 번째 사건까지의 대기 시간(waiting time)의 이산적인 버전이며, 연속 시간에서는 이 대기 시간이 감마 분포(gamma distribution)를 따른다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 푸아송 과정과 이러한 대기 시간 분포를 전개한다.

풀이

STEP I 1995, 문제 14

확률과 통계 • 비율의 추정

STEP I 1995, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s1-q14

핵심 아이디어

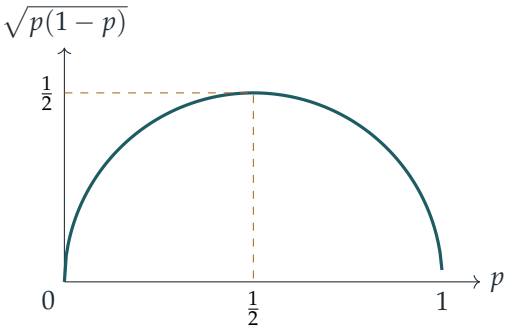
표본비율(sample proportion)은 이항(binomial) 개수를 n으로 나눈 것이다. n이 크면 표본비율은 평균(mean)이 p이고 분산(variance)이 $p(1-p)/n$인 정규분포(normal distribution)를 근사적으로 따른다. 문제는 분산이 바로 우리가 모르는 p에 의존한다는 점이다. 소문항 (i)이 이 문제를 해결한다. 소문항 (i)은 표준편차(standard deviation)가 가질 수 있는 가장 나쁜 값을 알려 주므로, 최악의 경우에 맞추어 정한 표본 크기(sample size)는 p가 무엇이든 통한다. 이어서 소문항 (iii)은 p에 대해 대략적인 정보를 이미 알고 있을 때 무엇이 달라지는지 묻는다.

풀이

소문항 (i)

완전제곱식(completing the square)을 만들면 $f(p) = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$이다. 따라서 $[0,1]$에서 $f(p) \le \frac{1}{4}$이고, 등호는 $p = \frac{1}{2}$일 때만 성립한다. 제곱근 함수는 증가함수이므로

$$\max_{0 \le p \le 1} \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{최댓값을 갖는 점: } p = \tfrac{1}{2}.$$



소문항 (ii)

X를 표본에 포함된 여성의 수라고 하자. 뽑힌 각 사람이 여성일 확률은 p이다. 모집단이 충분히 크다고 가정하여 n번의 선택이 사실상 독립(independent)이라고 본다(아주 큰 모집단에서의 비복원추출(sampling without replacement)은 복원추출(sampling with replacement)과 거의 같다). 그러면

$$X \sim \mathrm{B}(n,p), \qquad \hat{p} = \frac{X}{n}, \qquad \mathrm{E}(\hat{p}) = p, \qquad \mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

n이 크면 중심극한정리(central limit theorem), 즉 이항분포의 정규근사에 의해

$$\hat{p} \approx \mathrm{N}\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right), \qquad \text{따라서} \qquad Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \approx \mathrm{N}(0,1).$$

우리가 원하는 것은 $\mathrm{P}\left(|\hat{p}-p| > 0.01\right) < 0.01$, 즉

$$\mathrm{P}\left(|Z| > \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) < 0.01.$$

대칭성에 의해 이 1%는 양쪽 꼬리(tail)에 0.5%씩 나뉜다. $\Phi(2.576) = 0.995$이므로 다음이 필요하다.

$$\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} > 2.576 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} > 257.6\sqrt{p(1-p)}.$$

생각해 보기 p를 모르는데, p가 들어 있는 부등식으로부터 어떻게 n을 정할 수 있을까?

바로 여기서 소문항 (i)이 쓰인다. p가 무엇이든 $\sqrt{p(1-p)} \le \frac{1}{2}$이다. 따라서 $\sqrt{n} > 257.6 \times \frac{1}{2} = 128.8$이면 모든 p에 대해 부등식이 성립한다. 이 조건은 필요조건이기도 하다. $p = \frac{1}{2}$일 때(그리고 여성의 비율이 그 근처일 때) 이 상계가 실제로 달성되기 때문이다. 그러므로

$$n > 128.8^2 = 16\,589.44,$$

이어야 하고, 필요한 표본 크기는

$$\boxed{n = 16\,590} \qquad (\text{약}16\,600).$$

더 정밀한 백분율점(percentage point) $z = 2.5758$을 쓰면 $n > 16\,587.2$를 얻는다. 어느 쪽이든 답은 "약 16 600"이며, 세 번째 유효숫자(significant figure)는 사용한 표에 따라 달라진다.

소문항 (iii)

일반적으로 필요한 조건은

$$n > \left(\frac{2.576}{0.01}\right)^2 p(1-p) \approx 66\,360\,p(1-p).$$

값 16 590은 최악의 경우인 $p = \frac{1}{2}$에서 나왔다. p가 $\frac{1}{2}$에서 충분히 멀리 떨어져 있다는 것을 안다면 $p(1-p)$에 대해 더 작은 상계를 쓸 수 있다.

(a) 왼손잡이(left-handedness). 사람들 가운데 대략 10%가 왼손잡이이다. $p \leq 0.15$라고 안전하게 가정할 수 있다면, $p(1-p)$는 $[0, \frac{1}{2}]$에서 증가하므로 $p(1-p) \leq 0.15 \times 0.85 = 0.1275$이다. 이로부터 $n > 8461$을 얻는다. 정확히 $p = 0.1$이라면 $n > 66\,360 \times 0.09 \approx 5970$이므로 약 6000이다. 어느 쪽이든 아무것도 모를 때 필요한 16 590보다 훨씬 작은 표본으로 충분하다. np가 수백에 이르므로 정규근사도 여전히 잘 맞는다.

(b) 백만장자. 이번에는 p가 매우 작아서 아마 0.001에서 0.01 정도일 것이다. 글자 그대로 받아들이면 $p \leq 0.01$에서 $p(1-p) \leq 0.0099$이고 $n > 657$이다. 그러나 이는 요점을 놓친 것이다.

- p 자체가 약 0.001일 때 오차 0.01은 쓸모가 없다. 추정값 $\hat{p} = 0$만 해도 이미 참값과의 차이가 0.01 이내이기 때문이다. 우리가 정말 원하는 것은 **상대** 정확도(relative accuracy), 예를 들어 오차가 p의 1% 이하가 되는 것이다. 그러면 $n > 2.576^2(1-p)/(p \times 0.01^2)$이 필요하고, $p = 0.001$일 때 이 값은 약 6.6×10^7이다. 엄청나게 더 크다.
- p가 아주 작고 n이 수백에 불과하면 np는 1보다 작다. 그러면 이항분포는 매우 치우쳐 있어서 정규근사는 더 이상 타당하지 않으며, 푸아송 근사(Poisson approximation)가 더 나은 모형이 된다.
- 실제로는 백만장자에게 접근하기 어렵고, 사람들은 자신의 재산에 대해 사실대로 말하지 않을 수도 있으므로 무작위 추출과 정직한 응답 모두 의심스럽다.

따라서 왼손잡이의 경우에는 p를 대략 알면 더 작은 표본을 쓸 수 있다. 백만장자의 경우에는 합리적인 정확도 요구 조건이라면 어떤 것이든 훨씬 더 큰 표본이 필요하거나, 아예 다른 표본추출 방법이 필요하다.

검산

- $p = \frac{1}{2}$, $n = 16\,590$일 때 정규근사로 $\mathrm{P}(|\hat{p} - p| > 0.01) = 2\big(1 - \Phi(2.5762)\big) \approx 0.00999$를 얻으며, 이는 1%보다 아주 조금 작다.
- $n = 16\,590$, $p = \frac{1}{2}$에 대해 정확한 이항확률을 더하면 약 0.0102이다. 이 작은 초과분은 이항분포의 이산성(연속성 수정(continuity correction)을 하지 않은 정규근사)에서 온다. $p = 0.3$이면 정확한 값은 약 0.005로, 소문항 (i)이 예측하듯이 여유 있게 기준 안에 든다.
- $p = 0.1$, $n = 6000$일 때 정확한 이항확률은 약 0.0098로, (iii)(a)의 수치를 확인해 준다.

흔한 실수

- 2.576 대신 1.96이나 2.326을 쓰는 것. 1%는 양쪽 꼬리에 나뉘므로 $\Phi(z) = 0.995$가 필요하다.
- n을 p에 대한 식으로 남겨 두는 것. 문제는 어떤 p에 대해서도 통하는 하나의 수를 원하며, 소문항 (i)이 있는 이유가 바로 이것이다.
- "$\sqrt{p(1-p)} \le \frac{1}{2}$"로부터 $n > 128.8$을 얻는다고 읽는 것. 128.8보다 커야 하는 것은 n이 아니라 $\sqrt{n}$이다.

STEP 너머

이것은 여론조사에서 인용되는 "오차 한계(margin of error)" 뒤에 있는 표준적인 계산이다. 약 1000명을 대상으로 한 여론조사는 신뢰도 95%에서 대략 ± 3퍼센트포인트의 오차 한계를 주는데, 이는 정확히 소문항 (i)의 최악의 경우 논법에 따른 것이다. 대학에서는 이것이 신뢰구간(confidence interval)으로 이어지고, 드문 비율을 어떻게 추정할 것인가 하는 문제로 이어진다. 그런 경우에는 정규근사 대신 푸아송 방법과 정확한 이항 방법이 쓰인다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 중심극한정리와 이러한 근사를 매우 읽기 쉽게 다룬다.

풀이

STEP II 1995, 문제 1

순수수학 • 등비급수의 미분

STEP II 1995, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q1

핵심 아이디어

유한 등비급수(geometric series)는 닫힌 형태(closed form)로 나타낼 수 있고, x에 대한 두 함수 사이의 항등식(identity)은 미분(differentiation)하여 새로운 항등식을 얻을 수 있다. $\sum x^k$를 미분하면 인수 k가 앞으로 내려오는데, 이것이 바로 등비급수를 $\sum kx^{k-1}$로 바꾸어 준다. 그다음 $x = -1$을 대입하면 부호가 번갈아 나타난다. 제곱의 경우에는 답의 꼴로부터 A와 B가 무엇이어야 하는지 알아낸 다음, 수학적 귀납법(induction)으로 증명하는 것이 가장 깔끔한 방법이다.

풀이

소문항 (i)

$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$이라 하자. 그러면

$$S(1-x) = (1 + x + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1},$$

이다. 거듭제곱 $x, x^2, \ldots, x^n$이 각각 양의 부호와 음의 부호로 한 번씩 나타나 소거되기 때문이다. $x \neq 1$이면 $1 - x \neq 0$이므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

따라서 증명되었다.

소문항 (ii)

(i)의 양변은 $x \neq 1$에서 미분가능한 x의 함수이고 그 범위에서 서로 같으므로, 도함수(derivative)도 서로 같다. 좌변에서는

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+x+\cdots+x^n\right) = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}.$$

우변에서는 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

이제 $x=-1$을 대입한다. $-1 \neq 1$이므로 이는 허용된다. 항 kx^{k-1}이 $(-1)^{k-1}k$가 되므로 좌변은 $1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n$이 된다. $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$을 이용하면 우변은

$$\frac{1-(n+1)(-1)^n+n(-1)^{n+1}}{4} = \frac{1-(-1)^n(2n+1)}{4},$$

이 된다.

- n이 짝수이면 $(-1)^n = 1$이고, 값은 $\dfrac{1-2n-1}{4} = -\dfrac{n}{2}$이다.
- n이 홀수이면 $(-1)^n = -1$이고, 값은 $\dfrac{1+2n+1}{4} = \dfrac{n+1}{2}$이다.

이것이 보여야 할 결과이다.

소문항 (iii)

$T_n = 1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2$이라 하고, $f(n) = An^2+Bn$에 대하여 $T_n = (-1)^{n-1}f(n)$이라고 가정하자.

? **생각해 보기** 공식이 참인지 알기 전에 어떻게 A와 B를 구할 수 있을까?

T_n에 대해 확실히 알고 있는 한 가지 사실을 이용한다. 연속한 두 합의 차는 마지막 항, 즉 $T_n - T_{n-1} = (-1)^{n-1}n^2$이다. $T_{n-1} = (-1)^{n-2}f(n-1) = -(-1)^{n-1}f(n-1)$이므로 이 식은

$$(-1)^{n-1}\big(f(n)+f(n-1)\big) = (-1)^{n-1}n^2, \qquad \text{따라서} \qquad f(n)+f(n-1) = n^2.$$

이 된다. $f(n) = An^2+Bn$이면

$$\begin{aligned} f(n)+f(n-1) &= An^2+Bn+A(n-1)^2+B(n-1) \\ &= 2An^2+(2B-2A)n+(A-B). \end{aligned}$$

이것이 모든 n에 대하여 n^2과 같으려면 $2A=1$이고 $B=A$이어야 한다. 즉

$$A = B = \tfrac{1}{2}, \qquad T_n = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

(이 값들은 반드시 이렇게 정해진다. $n=1$이면 $A+B=1$이고 $n=2$이면 $-(4A+2B)=-3$인데, 이 연립방정식의 유일한 해는 $A=B=\frac{1}{2}$이다.)

수학적 귀납법에 의한 증명. $n=1$일 때 $T_1=1=(-1)^0\cdot\frac{1\cdot 2}{2}$이다. 어떤 $n\geq 2$에 대하여 $T_{n-1}=(-1)^{n-2}\frac{(n-1)n}{2}$이라고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}T_n=T_{n-1}+(-1)^{n-1}n^2&=(-1)^{n-1}\left(n^2-\frac{n(n-1)}{2}\right)\\&=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2},\end{aligned}$$

이고, 이는 n에 대한 공식이다. 따라서 $A=B=\frac{1}{2}$일 때 공식은 모든 $n\geq 1$에 대하여 성립한다.

다른 방법으로, 항을 두 개씩 묶을 수 있다. $(2m-1)^2-(2m)^2=-(4m-1)$이다. $n=2m$이면 $T_n=-\sum_{j=1}^{m}(4j-1)=-m(2m+1)=-\frac{n(n+1)}{2}$이고, $n=2m+1$이면 여기에 $(2m+1)^2$을 더하여 $(2m+1)(m+1)=\frac{n(n+1)}{2}$를 얻는다. ((ii)의 항등식에 x를 곱한 다음 한 번 더 미분할 수도 있지만, 계산이 훨씬 복잡해진다.)

검산

$n=4$일 때: $1-2+3-4=-2=-\frac{4}{2}$이고, $1-4+9-16=-10=-\frac{4\cdot 5}{2}$이다. $n=5$일 때: $1-2+3-4+5=3=\frac{6}{2}$이고, $-10+25=15=\frac{5\cdot 6}{2}$이다. 세 항등식을 모두 n이 500까지일 때 컴퓨터로 확인해 보면(예를 들어 $T_{10}=-55$, $T_{11}=66$) 정확히 일치한다.

또한 $|T_n|=1+2+\cdots+n$임에 주목하자. 제곱의 교대합(alternating sum)은 처음 n개의 정수의 단순한 합과 크기가 같은데, 이 놀라운 우연은 항을 묶는 논증으로 설명된다.

흔한 실수

- (i)의 항등식이 모든 $x\neq 1$에 대하여 성립하기 때문에 비로소 $x=-1$을 대입할 수 있다는 점을 잊는 것. $x=1$에서는 우변이 정의되지 않는다.
- $(-1)^{n+1}$의 부호 실수. 이것은 $(-1)^n$이 아니라 $-(-1)^n$과 같다.
- $n=1$과 $n=2$로부터 A와 B를 구하고 거기서 멈추는 것. 이것은 이 값들이 **가능한 유일한** 값이라는 것만 보여 준다. 공식이 실제로 모든 n에 대하여 성립함을 보이는 것은 귀납법(또는 항 묶기)이다.

STEP 너머

$\sum x^k$를 항별로 미분하는 것은 강력한 아이디어의 유한한 형태이다. 멱급수(power series)는 수렴 반지름(radius of convergence) 안에서 항별로 미분할 수 있으며, $|x| < 1$에 대하여 $\sum kx^{k-1} = (1-x)^{-2}$를 얻는다. $x = -1$에서 무한급수 $1-2+3-4+\cdots$는 발산(diverge)하지만, 공식은 $\frac{1}{4}$라는 값을 암시한다. 실제로 (ii)의 공식은 $\frac{1}{4} - (-1)^n \frac{2n+1}{4}$로 쓸 수 있으므로, 부분합(partial sum)은 $\frac{1}{4}$를 중심으로 대칭적으로 진동한다. 이러한 발산급수에 값을 부여하는 것이 아벨(Abel) 합(Abel summation)의 기본 아이디어이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 멱급수의 항별 미분을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1995, 문제 2

순수수학 • 재귀적인 색칠 방법 세기

> **STEP II 1995, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.3 절 **울타리 기둥 색칠하기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/fence-posts.html

핵심 아이디어

첫 번째 기둥이 빨간색인 색칠(colouring)을 마지막 기둥의 색에 따라 나눈다. 일렬로 선 기둥의 색칠은 기둥을 하나씩 덧붙여 가며 만들어지고, 새로 덧붙이는 기둥마다 허용되는 색은 정확히 두 가지이므로 전체 개수는 쉽게 셀 수 있다. 점화식(recurrence)이 필요한 부분은 "빨간색으로 끝나는 것"과 "빨간색이 아닌 색으로 끝나는 것"으로 나누는 일이다. 원형의 경우는 양 끝 기둥의 색도 서로 달라야 하는 직선일 뿐이다.

풀이

$r_{n+1} = s_n$인 이유

첫 번째 기둥과 마지막 기둥이 빨간색인 $n+1$개 기둥의 올바른 색칠을 하나 생각하자. 기둥 n은 빨간색인 기둥 $n+1$과 이웃하므로 기둥 n은 빨간색이 아니다. 따라서 기둥 $n+1$을 지우면 첫 번째 기둥이 빨간색이고 마지막 기둥이 빨간색이 아닌 n개 기둥의 올바른 색칠, 즉 s_n개의 색칠 가운데 하나가 남는다.

거꾸로, n개 기둥의 s_n개 색칠 가운데 하나가 주어지면 기둥 n이 빨간색이 아니므로 끝에 빨간 기둥을 하나 덧붙일 수 있고, 그러면 r_{n+1}에서 세는 색칠이 하나 얻어진다. 이 두 조작은 서로를 되돌리므로 일대일 대응(one-to-one correspondence)을 이루고,

$$r_{n+1} = s_n.$$

$r_n + s_n$ 구하기

첫 번째 기둥이 빨간색인 올바른 색칠은 모두 빨간색으로 끝나거나 다른 색으로 끝나므로, $r_n + s_n$은 첫 번째 기둥이 빨간색인 올바른 색칠 전체의 개수이다. 기둥을 차례로 칠해 보자. 첫 번째 기둥은 빨간색이고(한 가지), 그 뒤의 각 기둥은 바로 앞 기둥의 색만 아니면 어떤 색이든 될 수 있으므로, 앞에서 무슨 일이 있었든 매번 2가지 선택이 있다. 따라서

$$r_n + s_n = 2^{n-1}.$$

$r_{n+1} + r_n$ 구하기

$s_n = r_{n+1}$을 대입하면

$$r_{n+1} + r_n = 2^{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

귀납법

$P(n)$을 명제 $r_n = \frac{1}{3}\left(2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}\right)$라 하자.

기저 단계(*base case*). 기둥이 하나뿐이고 그 기둥을 빨간색으로 칠하면, 그 기둥은 첫 번째 기둥이자 마지막 기둥이므로 $r_1 = 1$이다. 공식은 $\frac{1}{3}(1+2) = 1$을 주므로 $P(1)$이 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다고 가정하자. 앞의 결과에 의하여

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 2^{n-1} - r_n \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \end{aligned}$$

이고, 여기서 $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$과 $-(-1)^{n-1} = (-1)^n$을 이용하였다. 이것은 정확히 $P(n+1)$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

> ? **생각해 보기** 왜 귀납법을 $n = 2$에서 시작하거나 기저 단계를 두 개 쓰지 않는가?

점화식 $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$은 각 항을 바로 앞의 항 하나만으로 나타내므로 기저 단계는 하나로 충분하다. 두 항에 관한 점화식이라면 기저 단계가 두 개 필요할 것이다.

원형으로 놓인 기둥

원을 따라 기둥에 $1, 2, \ldots, n$으로 번호를 붙이면, 이제 기둥 n은 기둥 1과도 이웃한다. 원형의 올바른 색칠은 정확히 직선 $1, 2, \ldots, n$의 올바른 색칠 가운데 추가로 기둥 n의 색이 기둥 1과 다른 것이다.

생각해 보기 첫 번째 기둥이 빨간색으로 고정되지 않은 색칠은 어떻게 세는가?

대칭성(symmetry)을 이용한다. 두 색의 이름을 맞바꾸면 올바른 색칠은 올바른 색칠로 옮겨지므로, 기둥 1의 색을 어떻게 고르든 색칠의 개수는 같다. 기둥 1이 빨간색일 때, 마지막 기둥의 색이 첫 번째 기둥과 다른 직선 색칠은 정확히 s_n에서 세는 것들이다. 따라서 원형 색칠의 개수는

$$\begin{aligned} 3s_n &= 3\left(2^{n-1} - r_n\right) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} \\ &= 2^n + 2(-1)^n. \end{aligned}$$

여기서 기둥들은 서로 구별되므로(정해진 자리에 서 있으므로), 회전하여 겹쳐지는 두 색칠도 따로 센다.

검산

- 작은 경우를 직접 확인한다. $r_2 = 0$(이웃한 두 기둥이 모두 빨간색일 수는 없다)이고 $r_3 = 2$(RWR, RBR)이며, 이는 $\frac{1}{3}(2-2) = 0$, $\frac{1}{3}(4+2) = 2$와 일치한다.
- 세 기둥이 삼각형을 이루면 세 색을 모두 써야 하므로 $3! = 6$가지이고, $2^3 + 2(-1)^3 = 6$이다. 네 기둥이 정사각형을 이루면 $16 + 2 = 18$이다.
- $n \le 12$에 대하여 모든 색칠을 하나하나 센 결과는 위의 모든 공식과 일치한다. 예를 들어 $r_{10} = 170$, $s_{10} = 342$이고, 10개 기둥의 원형 색칠은 1026가지이다.

흔한 실수

- 기둥 1이 빨간색일 필요가 없다는 것을 잊고 원형의 답으로 r_n이나 s_n을 쓰는 것. 인수 3이 나머지 두 색의 경우를 되살려 준다.
- 회전을 없애려고 n으로 나누는 것. 기둥들은 정해진 자리에 있으므로, 회전한 색칠은 서로 다른 칠하기이다.

STEP 너머

원형의 답 $2^n + 2(-1)^n$은 순환 그래프(cycle graph) C_n의 **채색 다항식**(*chromatic polynomial*)의 $k = 3$에서의 값이다. 일반적으로 k가지 색에 대한 채색 다항식은 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$이며, 같은 "직선을 만든 뒤 양 끝을 잇는" 논법으로 증명된다. 채색 다항식과 $r_{n+1} + r_n = 2^{n-1}$ 같은 점화식은 조합론(combinatorics)이나 그래프 이론(graph theory)

입문 과목에서 다루는 표준적인 내용이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 참고하라.

풀이

STEP II 1995, 문제 3

순수수학 • 논리적 추론과 경우의 수

STEP II 1995, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q3

핵심 아이디어

이 문제는 겉모습만 바꾼 논리 퍼즐이며, 실마리는 세기(counting)이다. 매 스테이지마다 $5+4+3+2+1=15$점이 배분되므로 다섯 선수의 점수 합은 이미 정해져 있다. 아루에(Arouet)의 점수는 최댓값에 아주 가까워서 그의 결과 대부분이 결정된다. 그다음에는 엘뤼아르(Eluard)의 결과가 엘뤼아르의 점수를 양쪽에서 조여 오고, 카뮈(Camus)가 "같은 순위를 네 번" 했다는 조건 때문에 확인할 경우가 몇 개만 남는다.

풀이

선수들의 총점을 A, B, C, D, E로 나타낸다. 문제에서 $A > B > C > D > E$이고 $A = 24$라고 주어졌다.

총점과 아루에의 스테이지

각 스테이지마다 15점이 배분되므로, 다섯 스테이지 전체에서

$$A+B+C+D+E = 75, \qquad \text{따라서} \qquad B+C+D+E = 51.$$

아루에가 얻을 수 있는 점수는 최대 $5\times 5 = 25$점이다. 24점을 얻었다는 것은 정확히 1점을 잃었다는 뜻이므로, 아루에는 네 스테이지에서 1위, 한 스테이지에서 2위를 했다. 엘뤼아르가 스테이지 5에서 우승했으므로 아루에의 2위는 스테이지 5에서 나온 것이어야 하고, 아루에는 스테이지 1–4에서 우승했다.

엘뤼아르가 11점을 얻은 이유

하한(*lower bound*). 엘뤼아르는 스테이지 4에서 3점, 스테이지 5에서 5점을 얻었고, 나머지 세 스테이지에서는 각각 적어도 1점을 얻었다. 따라서 $E \geq 3+5+3 = 11$이다.

상한(*upper bound*). 점수는 서로 다른 정수이고 $B > C > D > E$이므로 $D \geq E+1$, $C \geq E+2$, $B \geq E+3$이다. 그러므로

$$51 = B+C+D+E \geq 4E+6, \qquad \text{따라서} \qquad E \leq \tfrac{45}{4} < 12.$$

두 부등식을 합치면 $E = 11$이다. 하한에서 등호가 성립한다는 사실로부터, 엘뤼아르가 스테이지 1, 2, 3에서 모두 **꼴찌**를 했다는 것도 알 수 있다.

바르트, 카뮈, 디드로에게 남은 것

이제 모든 스테이지에서 아루에와 엘뤼아르의 순위를 알았으므로, 바르트(Barthes), 카뮈, 디드로(Diderot)는 남은 순위를 나누어 가졌다.

스테이지	아루에, 엘뤼아르	B, C, D에게 남은 순위	
1, 2, 3	1위, 5위	2위, 3위, 4위	(4, 3, 2점)
4	1위, 3위	2위, 4위, 5위	(4, 2, 1점)
5	2위, 1위	3위, 4위, 5위	(3, 2, 1점)

또한 $B+C+D = 51-11 = 40$이고 $B > C > D > 11$이므로 $D \geq 12$, $C \geq 13$이다.

? **생각해 보기** 카뮈는 같은 순위를 네 번 했다. 위의 표를 보면 그 순위는 무엇일 수 있는가?

답은 2위, 3위, 4위 중 하나이다. 카뮈가 5위를 할 수 있었던 것은 스테이지 4와 5뿐인데, 이는 네 번이 아니라 두 번이다. 세 가지 가능성을 차례로 살펴본다.

카뮈가 네 번 2위를 한 경우. 2위는 스테이지 1–4에서만 가능했으므로, 카뮈는 이 네 스테이지 모두에서 2위를 했다. 그러면 바르트는 스테이지 1–3에서 각각 최대 3점, 스테이지 4에서 최대 2점, 스테이지 5에서 최대 3점을 얻었다. 따라서 $B \leq 9+2+3 = 14$이다. 그런데 $C \geq 4 \times 4 = 16 > B$이므로 모순이다.

카뮈가 네 번 4위를 한 경우. 4위는 모든 스테이지에서 2점이므로, 카뮈가 얻을 수 있는 최고 총점은 $4 \times 2 + 4 = 12$이다(나머지 한 스테이지에서 2위를 한 경우). 이는 $C \geq 13$에 모순이다.

카뮈가 네 번 3위를 한 경우. 3위는 스테이지 1, 2, 3, 5에서 가능했고 매번 3점이므로, 이것이 카뮈의 네 번의 3위이다. 스테이지 4에서 카뮈는 $x \in \{4, 2, 1\}$점을 얻었고, $C = 12+x$이다.

- $x = 4$: $C = 16$이므로 $B \geq 17$이고 $D = 40 - B - C \leq 7$이다. 이는 $D \geq 12$에 모순이다.

- $x = 2$: $C = 14$이므로 $B \geq 15$이고 $D \leq 11$이다. 역시 모순이다.
- $x = 1$: $C = 13$이므로 $B + D = 27$이고, $B \geq 14$, $12 \leq D \leq 12$이다. 따라서 $D = 12$, $B = 15$이다.

따라서 점수는 다음과 같다.

$$\boxed{B = 15, \quad C = 13, \quad D = 12} \qquad (\text{단, } A = 24,\ E = 11).$$

마지막 스테이지에서의 바르트

> **생각해 보기** 총점은 알았지만 스테이지별 결과는 아직 모른다. 스테이지 5의 결과를 확정할 만한 정보가 충분한가?

충분하며, 홀짝성 논증(parity argument)으로 확정된다. 카뮈가 스테이지 1, 2, 3, 5에서 3위, 스테이지 4에서 5위를 했으므로, 바르트와 디드로는 스테이지 1–4 각각에서 4점과 2점짜리 순위를 나누어 가졌다. 스테이지 5에서는 2점과 1점짜리 순위(4위와 5위)를 나누어 가졌다. 디드로가 스테이지 1–4 중 k개에서 4점짜리 순위를 차지했고 스테이지 5에서 $s \in \{1, 2\}$점을 얻었다고 하자. 그러면

$$D = 4 \times 2 + 2k + s = 8 + 2k + s = 12.$$

따라서 $s = 4 - 2k$는 짝수이므로 $s = 2$(그리고 $k = 1$)일 수밖에 없다. 디드로가 마지막 스테이지에서 4위를 했으므로, **바르트는 마지막 스테이지에서 꼴찌(5위)를 했다.**

이러한 투어는 실제로 존재한다. 예를 들어 스테이지 1: A, D, C, B, E; 스테이지 2와 3: A, B, C, D, E; 스테이지 4: A, B, E, D, C; 스테이지 5: E, A, C, D, B로 두면, 요구한 대로 $24, 15, 13, 12, 11$을 얻는다.

검산

- 총점의 합이 맞는다: $24 + 15 + 13 + 12 + 11 = 75 = 5 \times 15$.
- 예시 투어에서 카뮈는 네 스테이지에서 3위이고, 엘뤼아르는 스테이지 4에서 3위, 스테이지 5에서 1위이다.
- 가능한 스테이지 결과 120^5가지를 모두 컴퓨터로 탐색하여 모든 조건을 만족하는 것만 남기면, 점수는 $(24, 15, 13, 12, 11)$뿐이다. 모든 경우에 바르트는 스테이지 5에서 5위이다. (조건을 만족하는 투어는 정확히 네 가지이며, 디드로가 스테이지 1–4 중 어느 스테이지에서 2위를 했는지에 따라 달라진다.)

흔한 실수

- $E \geq 11$만 보이는 것. 문제는 엘뤼아르가 왜 11점이어야 **하는지**를 묻고 있으므로, $B + C + D + E = 51$과 점수가 서로 다르다는 사실에서 얻는 상한이 반드시 필요하다.
- 카뮈가 **연속된** 네 스테이지에서 같은 순위를 했다고 가정하거나, 4위인 경우를 빠뜨리는 것.
- 점수는 구했지만 마지막 스테이지의 순위가 반드시 그렇게 정해진다는 것을 증명하지 않는 것. 예시 투어 하나로는 충분하지 않다. 홀짝성 논증은 가능한 모든 투어에서 바르트가 스테이지 5에서 꼴찌임을 보여 준다.

STEP 너머

이 논증은 세 단계로 이루어진다. 보존 법칙(conservation law)(고정된 총점), 극단적 추론(extremal reasoning)(24점은 거의 최댓값이다), 그리고 홀짝성 논증이다. 이 세 가지는 모두 조합론(combinatorics)에서 거듭 등장한다. 어떤 양을 양쪽에서 조여 값이 하나로 정해지게 만드는 것은 해석학(analysis)과 올림피아드 문제 풀이의 기본 기법이기도 하다. 이런 유형의 퍼즐을 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 보라. Engel의 *Problem-Solving Strategies*에는 불변성 원리(invariance principle)와 극단 원리(extremal principle)를 다루는 장이 각각 통째로 있다.

풀이

STEP II 1995, 문제 4

순수수학 • 월리스 점화식

STEP II 1995, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.4 절 **월리스, 베타 함수, 그리고 $1/2$의 계승**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/wallis-beta.html

핵심 아이디어

부분적분(integration by parts)을 하면 $\cos^2 t$가 $1-\sin^2 t$로 바뀌고, 이로부터 u_n과 u_{n-2}를 잇는 점화식(reduction formula)을 얻는다. 이 식에 u_{n-1}을 곱하면 n이 커져도 nu_nu_{n-1}의 값이 변하지 않는다는 것을 알 수 있으므로, 이 값은 $n=1$일 때의 값과 같다. 그다음은 조임(squeeze) 문제이다. u_n이 감소하므로 곱 u_nu_{n-1}은 u_n^2과 u_{n-1}^2 사이에 있다.

풀이

점화식

$n \geq 2$라 하자. $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \sin^{n-1} t \, \mathrm{d}t$로 쓰고, $\sin^{n-1} t$는 미분하고 $\sin t$는 적분하여 $-\cos t$로 만드는 부분적분을 한다.

$$\begin{aligned} u_n &= \Big[-\cos t \, \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, \sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= (n-1)(u_{n-2} - u_n). \end{aligned}$$

경계항(boundary term)이 사라지는 것은 위끝에서 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$이고 아래끝에서 $\sin 0 = 0$이기 때문이다(여기서 $n-1 \geq 1$을 이용한다). u_n 항을 한쪽으로 모으면

$$nu_n = (n-1)u_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

양변에 u_{n-1}을 곱하면

$$nu_nu_{n-1} = (n-1)u_{n-1}u_{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

일정한 곱

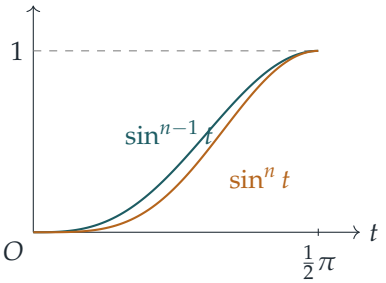
$n \geq 1$에 대하여 $p_n = nu_nu_{n-1}$이라 하자. 앞의 결과는 모든 $n \geq 2$에 대하여 $p_n = p_{n-1}$임을 말하므로, 모든 $n \geq 1$에 대하여 $p_n = p_1$이다. 이제

$$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\pi/2} = 1,$$

이므로 $p_1 = 1 \cdot u_1u_0 = \frac{1}{2}\pi$이다. 따라서

$$nu_nu_{n-1} = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{모든} n \geq 1.$$

그래프와 $0 < u_n < u_{n-1}$



두 곡선 모두 $t = 0$에서 0으로 시작하여 증가하고, $t = \frac{1}{2}\pi$에서 1에 이른다(그림은 $n = 4$인 경우이며, $n = 1$이면 위쪽 곡선은 직선 $y = 1$이다). $0 < t < \frac{1}{2}\pi$에서는 $0 < \sin t < 1$이므로

$$0 < \sin^n t = \sin t \cdot \sin^{n-1} t < \sin^{n-1} t.$$

따라서 $\sin^n t$의 그래프는 양 끝점을 제외하면 $\sin^{n-1} t$의 그래프보다 엄격하게 아래에 있다. 두 함수는 모두 연속(continuous)이므로, 그래프 아래의 넓이는

$$0 < u_n < u_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

을 만족한다.

생각해 보기 두 곡선이 양 끝에서 만나는데도 왜 부등식이 엄격하게 성립하는가?

차 $\sin^{n-1} t - \sin^n t$는 연속이고, 결코 음수가 아니며, (예를 들어) $t = \frac{1}{4}\pi$에서 양수이다. 어떤 점에서 양수인 연속함수는 그 점 근방의 작은 구간에서 양수이므로, 양의 넓이를 둘러싼

다. 고립된 두 점에서 만난다는 사실은 이를 바꾸지 못한다. 같은 논증으로 $u_n > 0$임도 알 수 있다.

양쪽 경계

$n \geq 1$이라 하자. $u_n > 0$이므로 $u_n < u_{n-1}$의 양변에 nu_n을 곱하면 $nu_n^2 < nu_nu_{n-1}$이다. $u_{n-1} > 0$이므로 양변에 nu_{n-1}을 곱하면 $nu_nu_{n-1} < nu_{n-1}^2$이다. 가운데 값은 $\frac{1}{2}\pi$이므로

$$nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2 \qquad (n \geq 1).$$

조임과 극한

오른쪽 부등식은 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립하므로, n 대신 $n+1$을 넣어 적용할 수 있다.

$$\tfrac{1}{2}\pi < (n+1)u_n^2, \qquad \text{따라서} \qquad nu_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

이것을 왼쪽 부등식과 합치면

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\tfrac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

$n \to \infty$일 때 $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$이므로 아래 경계는 $\frac{1}{2}\pi$로 수렴(converge)한다. 위 경계는 $\frac{1}{2}\pi$ 자체이다. 조임 정리(squeeze theorem, sandwich theorem)에 의하여

$$nu_n^2 \to \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{단, } n \to \infty.$$

검산

- 점화식에서 $u_2 = \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{4}\pi$이고, 이는 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi$와 일치한다($\sin^2$의 평균은 $\frac{1}{2}$이다). 그러면 예측대로 $2u_2u_1 = \frac{1}{2}\pi$이다.
- 수치적으로(심프슨 공식(Simpson's rule)) 계산하면 $u_{10} \approx 0.38656$이고, 이는 $\frac{63}{512}\pi$이다. 따라서 $10u_{10}^2 \approx 1.4943$이며, 이 값은 $\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{2}\pi \approx 1.4280$과 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$ 사이에 있다.
- 점화식을 $n = 10^5$까지 돌리면 $nu_n^2 \approx 1.570788$로, 이미 $\frac{1}{2}\pi$에 매우 가깝다.

흔한 실수

- 점화식이 $n \geq 2$에서만 성립한다는 것을 잊는 것. 따라서 상수는 u_1과 u_2만이 아니라 u_0과 u_1을 이용해 정해야 한다.
- 단지 $\sin^n t \leq \sin^{n-1} t$라는 이유만으로 $u_n < u_{n-1}$이라고 주장하는 것. 이것으로는 $\leq$만 얻는다. 엄격한 부등식을 얻으려면 어떤 구간에서 부등식이 엄격하게 성립해야 한다.

- $\frac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2$에서 곧바로 아래 경계를 얻으려는 것. 이 식은 u_n이 아니라 u_{n-1}의 경계이므로, 먼저 첨자를 옮겨야 한다.

STEP 너머

이 적분들은 월리스(Wallis) 적분(Wallis's integrals)이다. u_{2m}과 u_{2m+1}을 곱의 꼴로 쓰고 $nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$를 이용하면 월리스 곱(Wallis's product) $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots$을 얻는다. 같은 추정으로 스털링(Stirling) 공식(Stirling's formula) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$의 상수 $\sqrt{2\pi}$도 정해진다. 여기서 사용한 조임 논증은 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준 도구이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 이를 꼼꼼히 다룬다.

풀이

STEP II 1995, 문제 5

순수수학 • 최적화와 오목성

STEP II 1995, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

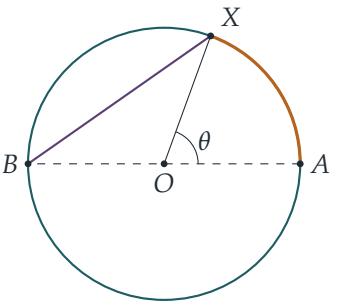
step.maths.org/questions/95-s2-q5

핵심 아이디어

선택 (i)과 (iii)은 (ii)의 경로들을 양 끝으로 밀어붙인 경우이다. $\theta \to 0$이면 곧장 가로질러 헤엄치는 것이고, $\theta \to \pi$이면 끝까지 달려가는 것이다. 따라서 전체 시간을 $[0, \pi]$에서 정의된 θ의 함수로 나타내고, 그 최솟값이 어디에서 나타나는지 살펴본다. 놀랍게도 이 함수는 오목(concave)하므로 유일한 정류점(stationary point)은 최댓값이고, 가장 좋은 경로는 언제나 양 끝 중 하나이다.

풀이

수영장의 반지름을 길이 1단위로, 그녀의 수영 속력을 1로 잡으면 달리는 속력은 k이다. 이때 시간의 단위는 (반지름)/(수영 속력)이 되며, 이는 비교 결과에 아무런 영향을 주지 않는다.



세 가지 시간

(i) 길이가 2인 지름(diameter) AB를 헤엄쳐 건너므로 시간 2가 걸린다.

(iii) 길이가 π인 반원을 달리므로 시간 π/k가 걸린다.

(ii) 길이가 θ인 (반지름이 1이므로) 호 AX를 시간 θ/k 동안 달린다. $\angle AOB = \pi$이므로 $\angle XOB = \pi - \theta$이다. 삼각형 XOB는 $OX = OB = 1$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 현(chord)의 길이는

$$XB = 2\sin\tfrac{\pi-\theta}{2} = 2\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

이다. (같은 말이지만, AB가 지름이므로 $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$이고, 이등변삼각형 AOX로부터 $\angle XAB = \frac{\pi-\theta}{2}$이므로 $XB = 2\sin\angle XAB$이다.) 전체 시간은

$$T(\theta) = \frac{\theta}{k} + 2\cos\frac{\theta}{2}, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

이다. 이 식은 양 끝에서도 의미가 있다. $T(0) = 2$는 (i)의 시간이고 $T(\pi) = \pi/k$는 (iii)의 시간이다. 따라서 세 가지 선택이 모두 $[0, \pi]$에서 연속인 하나의 함수로 표현된다.

T는 어디에서 가장 작은가?

미분하면

$$T'(\theta) = \frac{1}{k} - \sin\frac{\theta}{2}, \qquad T''(\theta) = -\tfrac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

이다. $0 < \theta < \pi$이면 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$이고 $T''(\theta) < 0$이다. 즉 함수 T는 $[0, \pi]$에서 순오목(strictly concave)하다.

> ? **생각해 보기** $k > 1$이면 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{k}$인 곳에 정류점이 있다. 그곳이 물에 뛰어들기에 가장 좋은 지점이 아닐까?

그렇지 않다. 그곳에서 $T'' < 0$이므로 그 점은 **최댓값**이 되는 곳, 즉 뛰어들기에 가장 나쁜 지점이다. 더 일반적으로, 닫힌구간에서 순오목인 함수는 양 끝값을 잇는 현보다 엄격하게 위에 있으므로, $0 < \theta < \pi$인 모든 θ에 대하여

$$T(\theta) > \Big(1 - \frac{\theta}{\pi}\Big)T(0) + \frac{\theta}{\pi}\,T(\pi) \geq \min\big(T(0),\, T(\pi)\big).$$

이다. 따라서 k의 값이 무엇이든, X를 내부의 어느 점으로 택하더라도 (i)과 (iii) 중 더 나은 쪽만큼 빠를 수는 결코 없다. ($k \leq 1$이면 이를 더 직접적으로 알 수 있다. 이때 $\sin\frac{\theta}{2} < 1 \leq \frac{1}{k}$이므로 $(0, \pi)$에서 $T'(\theta) > 0$이고, 따라서 T는 증가함수이며 곧바로 헤엄치는 것이 가장 좋다.)

(i)과 (iii)의 비교

이제 $T(0) = 2$와 $T(\pi) = \pi/k$를 비교하기만 하면 된다.

- $k < \frac{\pi}{2}$이면 $\pi/k > 2$이므로 **곧바로 헤엄쳐야** 한다. 선택 (i)이다.
- $k > \frac{\pi}{2}$이면 $\pi/k < 2$이므로 **끝까지 둘레를 달려야** 한다. 선택 (iii)이다.

- $k = \frac{\pi}{2}$이면 (i)과 (iii)의 시간이 같고, 어느 쪽이든 가장 좋다.

물리적인 이유는 단순하다. 반원의 길이가 지름의 $\frac{\pi}{2}$배이기 때문이다.

마지막으로, 선택 (ii)는 그녀가 결코 택하지 않을 경로이다. 모든 $k > 0$와 모든 $\theta \in (0, \pi)$에 대하여 (ii)는 (i)과 (iii) 중 더 나은 쪽보다 엄격하게 느리다.

검산

$k = 3$이면 달리는 데 $\pi/3 \approx 1.047$이 걸려 헤엄치는 시간 2보다 빠르다. 정류점은 $\theta = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 0.680$에 있고, 그곳에서 $T \approx 2.112$이므로 양 끝 어느 쪽보다도 느리다. 최댓값이라면 당연히 그래야 한다. 컴퓨터로 e^{-4}와 e^{4} 사이의 무작위 k 수천 개에 대하여 촘촘한 θ 격자에서 T를 계산해 보았는데, $\min(2, \pi/k)$보다 작은 내부의 값은 한 번도 나오지 않았고, 전환점이 $k = \pi/2 \approx 1.571$임도 확인되었다.

흔한 실수

- $T'(\theta) = 0$으로 놓고 그 결과의 성질을 확인하지 않은 채 최적이라고 선언하는 것. 여기서 그 점은 최댓값이다.
- 현 대신 호 XB를 사용하거나, 현의 길이를 $2\sin\frac{\theta}{2}$로 구하는 것. (그것은 XB가 아니라 AX이다.)
- 정류점이 아예 없는 $k \leq 1$인 경우를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

여기서 작동하는 원리는 구간에서 오목인 함수가 끝점에서 최솟값을 가진다는 것이다. 고차원에서는 이것이 다각형 위에서 선형(또는 오목) 목적함수가 꼭짓점에서 최소가 된다는 사실이 되며, 이는 선형계획법(linear programming)의 토대이다. 이 문제는 스넬의 법칙(Snell's law)과 페르마(Fermat)의 최소 시간 원리(principle of least time)와도 가까운 사이인데, 그 경우에는 시간 함수가 오히려 볼록(convex)하기 때문에 보통 답이 내부의 점이 된다. 이런 느낌의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 살펴보라.

풀이

STEP II 1995, 문제 6

순수수학 • 1의 거듭제곱근

> **STEP II 1995, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q6

핵심 아이디어

7제곱근인 단위근(roots of unity)은 $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^6$이고, 이들의 합은 0이다. 실수가 아닌 여섯 개를 세 개씩 두 묶음 $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}$와 $\{\alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$로 나눈다. 둘째 묶음은 첫째 묶음의 켤레복소수(complex conjugate)들이므로, 두 묶음의 합은 서로 켤레이다. 따라서 두 합의 합과 곱은 실수이고, 첫째 부분의 결과를 쓰면 이것이 이차방정식(quadratic)의 계수가 된다. 그다음 근의 실수부와 허수부를 취하면 삼각함수의 합을 얻는다.

풀이

근과 계수

u와 v가 $z^2 + az + b = 0$의 근이면, 최고차항의 계수가 1인(monic) 이차식 $z^2 + az + b$는 인수 $z - u$와 $z - v$를 가지므로 모든 z에 대하여

$$z^2 + az + b = (z - u)(z - v) = z^2 - (u + v)z + uv$$

이다. z의 계수와 상수항을 비교하면 $a = -u - v$, $b = uv$를 얻으며, 이것이 보이려던 것이다.

단위근

먼저 주의할 점이 있다. 문제지에는 $z^6 - 1 = 0$이라고 되어 있지만, 이는 $z^7 - 1 = 0$의 오식이다. 실제로 $\alpha^6 = \cos(12\pi/7) + \mathrm{i}\sin(12\pi/7) \neq 1$이며, 문제의 나머지 부분은 분명히 7등분에 관한 것이다. 여기서는 $z^7 - 1 = 0$으로 풀이한다.

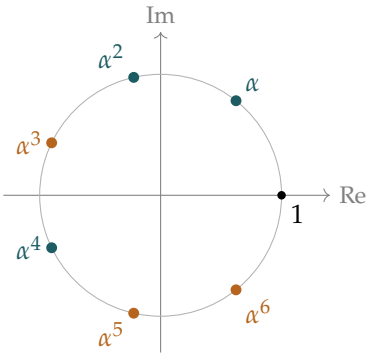
드무아브르(de Moivre)의 정리에 의하여

$$\alpha^7 = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1,$$

이므로 α는 $z^7 - 1 = 0$의 근이다. 더 일반적으로 $\alpha^k = \cos(2k\pi/7) + \mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$이고 $(\alpha^k)^7 = (\alpha^7)^k = 1$이다. 일곱 개의 수

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6$$

은 서로 다르다. $k = 0, \ldots, 6$일 때 이들의 편각(argument) $2k\pi/7$이 $[0, 2\pi)$ 안에서 서로 다르기 때문이다. 7차 다항식은 근을 많아야 7개 가지므로, 이것들이 $z^7 - 1 = 0$의 근 전부이다. 이 근들은 단위원(unit circle) 위의 정칠각형(regular heptagon)의 꼭짓점에 놓인다.



두 가지 사실이 모든 일을 해 준다. 첫째, 근들의 합은 0이다. $z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + \cdots + z + 1)$이고 $\alpha \neq 1$이므로

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0. \qquad (*)$$

이다. (같은 말로, $z^7 - 1$에서 z^6의 계수가 0이다.) 둘째, $|\alpha| = 1$이므로 $\overline{\alpha^k} = \alpha^{-k} = \alpha^{7-k}$이다. 따라서 $\alpha^6 = \overline{\alpha}$, $\alpha^5 = \overline{\alpha^2}$, $\alpha^3 = \overline{\alpha^4}$이다.

A와 B 구하기

다음과 같이 놓자.

$$p = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \qquad q = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6.$$

위의 켤레 쌍에 의하여 $q = \overline{p}$이다. 이것이 다른 근에 대한 자연스러운 추측이다. 실수 계수 이차방정식이 실수가 아닌 근 p를 가지면 $\overline{p}$도 반드시 근이기 때문이다.

> **생각해 보기** p가 실수가 아니라는 것을 어떻게 아는가? 만약 실수라면 "다른 근"이 반드시 $\overline{p}$일 필요는 없다.

p의 허수부(imaginary part)는 $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$이고, 이것이 양수임을 마지막에 보인다. 따라서 p는 실수가 아니며 두 근은 p와 $\overline{p}=q$이다. (어쨌든 p와 q를 근으로 갖는 실수 A와 B를 찾고 나면 이차방정식은 결정된다.)

$(*)$에 의하여

$$p+q=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=-1.$$

이다. 곱은 전개한 뒤 $\alpha^7=1$을 이용하여 거듭제곱의 차수를 줄인다.

$$\begin{aligned}pq&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)\\&=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10}\\&=\alpha^4+\alpha^6+1+\alpha^5+1+\alpha+1+\alpha^2+\alpha^3\\&=3+(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6)=3-1=2.\end{aligned}$$

아홉 개의 항 가운데 세 개의 1을 빼면 $\alpha,\dots,\alpha^6$이 각각 정확히 한 번씩 나타난다는 점에 주목하라. 첫째 부분에 의하여 $A=-(p+q)$, $B=pq$이므로

$$A=1,\qquad B=2,$$

이고, p와 q는 $z^2+z+2=0$의 근, 곧

$$z=\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

이다.

삼각함수의 합

$\alpha^k=\cos(2k\pi/7)+\mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$을 써서 $p=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$의 실수부(real part)와 허수부를 취하면

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}p&=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7},\\\operatorname{Im}p&=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}.\end{aligned}$$

이다. $z^2+z+2=0$의 두 근은 모두 실수부가 $-\frac{1}{2}$이므로

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다. (또는 $p+\overline{p}=-1$에서 곧바로 $2\operatorname{Re}p=-1$을 얻는다.)

허수부는 $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$이며, 어느 쪽인지 결정해야 한다.

생각해 보기 세 사인값 가운데 둘은 양수이고 하나는 음수이다. 어느 쪽이 이기는지 어떻게 확신할 수 있는가?

음수인 항을 양수인 항 하나와 비교한다. $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$이므로 $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$이다. 또 $\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\frac{3\pi}{7}$이다. 사인 함수는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 순증가(strictly increasing)하고 $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$이다. 따라서

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \underbrace{\sin\frac{2\pi}{7}}_{>0} + \underbrace{\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)}_{>0} > 0,$$

이고, 그러므로

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

이다. 이로써 앞에서 사용한 대로 $p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$가 실수가 아니라는 것도 확인된다.

검산

계산기로 (라디안 단위로) 계산하면 $\cos\frac{2\pi}{7} \approx 0.6235$, $\cos\frac{4\pi}{7} \approx -0.2225$, $\cos\frac{8\pi}{7} \approx -0.9010$이고, 이들의 합은 -0.5000이다. 사인값은 약 0.7818, 0.9749, -0.4339이고, 합은 1.3229이다. 이는 $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1.3229$와 일치한다. $p^2 + p + 2 = 0$을 직접 확인할 수도 있다. $p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$이면 $p^2 = \frac{-6-2\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$이고, 여기서 $p^2 + p + 2 = 0$이 따라 나온다.

흔한 실수

- 인쇄된 대로 $z^6 - 1 = 0$을 사용하는 것. 그러면 α는 근이 아니며, 합이 0이라는 사실 $(*)$도 성립하지 않는다.
- pq를 전개할 때 $\alpha^7 = 1$로 차수를 줄이는 것을 잊거나, 1과 같은 세 항을 잘못 세는 것.
- 사인의 합이 "두 항이 양수이므로" 양수라고 주장하는 것. $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$와 같은 비교가 필요하다.

STEP 너머

$\{1,2,4\}$와 $\{3,5,6\}$으로 나눈 것은 임의로 정한 것이 아니다. 수 1, 2, 4는 7을 법(modulo)으로 하는 0이 아닌 제곱수들이고, $2p + 1 = \mathrm{i}\sqrt{7}$은 **가우스 합**(Gauss sum)이다. 가우스(Gauss)는 $4k + 3$ 꼴의 소수 ℓ에 대하여 이차잉여(quadratic residue) r에 걸친 α^r의 합이 $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{\ell}}{2}$임을 보였다. 이것은 어떤 정다각형을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는가에 관한 이론(갈루아 이론(Galois theory))과 이차 상호 법칙(quadratic reciprocity)의 첫걸음이

다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 이차잉여를 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 단위근을 기하학적으로 바라보는 관점을 제공한다.

풀이

STEP II 1995, 문제 7

순수수학 • 헤론의 공식

STEP II 1995, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q7

핵심 아이디어

처음부터 끝까지 주인공은 내접원(incircle)이다. 내접원의 중심에서 접점(point of contact)으로 그은 반지름은 각 변에 수직이므로, ABC를 빈틈없이 채우는 세 개의 작은 삼각형의 높이가 저절로 주어지고, 이로부터 (i)이 나온다. (ii)는 헤론의 공식(Heron's formula)을 유도하는 고전적인 방법이다. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$로 쓰고, 코사인법칙(cosine rule)으로 각을 없앤 다음, 제곱의 차(difference of two squares)를 이용한 인수분해를 두 번 한다. 구에 대해서는 수직 단면(cross-section)을 살펴본다. 구가 구멍의 모서리와 접하는 점이 바로 내접원이 각 변에 접하는 점임을 알게 된다.

풀이

소문항 (i)

내접원이 BC, CA, AB에 접하는 점을 각각 P, Q, R'이라 하자. 접점으로 그은 반지름은 접선(tangent)에 수직이므로 $IP \perp BC$, $IQ \perp CA$, $IR' \perp AB$이고, 이들의 길이는 모두 r이다. 따라서 삼각형 BIC는 밑변이 a, 높이가 r이고, 나머지 두 삼각형도 마찬가지이다.

$$[BIC] = \tfrac{1}{2}ar, \qquad [CIA] = \tfrac{1}{2}br, \qquad [AIB] = \tfrac{1}{2}cr.$$

I가 삼각형 내부에 있으므로, 이 세 삼각형은 겹치는 부분 없이 정확히 맞물려 ABC를 이룬다. 더하면

$$\Delta = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = rs,$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$의 양변을 제곱하고 $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$를 이용하면

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2\alpha) = \tfrac{1}{16}\left[4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2\right],$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다. 대괄호 안은 제곱의 차이다.

$$16\Delta^2 = (2bc - 2bc\cos\alpha)(2bc + 2bc\cos\alpha).$$

코사인법칙에 의해 $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$이다. 이것을 각 인수에 대입하면

$$2bc - 2bc\cos\alpha = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2,$$
$$2bc + 2bc\cos\alpha = (b^2 + 2bc + c^2) - a^2 = (b+c)^2 - a^2,$$

이므로

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{16}\left[a^2 - (b-c)^2\right]\left[(b+c)^2 - a^2\right],$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다. 각 대괄호는 다시 제곱의 차이다.

$$16\Delta^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a).$$

이제 s를 도입한다. $a+b+c = 2s$이므로

$$b+c-a = 2(s-a), \qquad a-b+c = 2(s-b), \qquad a+b-c = 2(s-c),$$

이고, 따라서 곱은 $2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c) = 16\,s(s-a)(s-b)(s-c)$이다. 그러므로 $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$이다. $\Delta > 0$이므로 양의 제곱근을 택한다.

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

소문항 (iii)

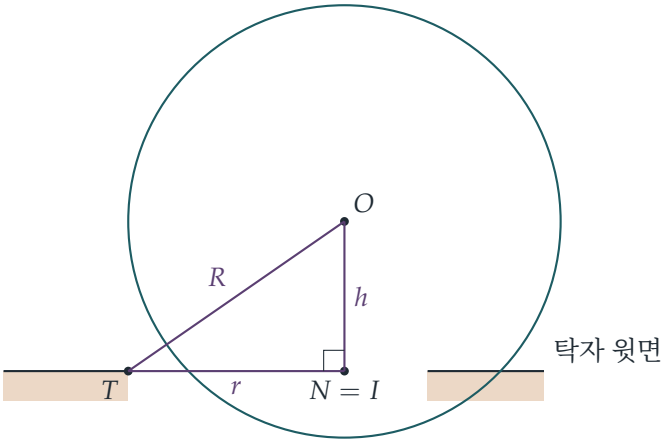
구의 중심을 O, 탁자 윗면으로부터 중심까지의 높이를 h라 하자. O에서 탁자 평면에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $ON = h$이다. 구는 구멍의 세 모서리 위에 놓여 있다. 구가 모서리 BC에 점 T에서 접한다고 하자.

? **생각해 보기** 왜 N은 내심(incentre) I이어야 할까?

구가 직선에 접하는 점에서 반지름은 그 직선에 수직이므로 $OT \perp BC$이고 $OT = R$이다. 또 ON은 탁자 평면 전체에 수직이므로 $ON \perp BC$이다. 따라서 BC는 평면 ONT 위의 평행하지 않은 두 직선에 수직이므로 그 평면에 수직이고, 특히 NT에 수직이다. 그러므로 NT는 N에서 BC까지의 거리이고, 직각삼각형 ONT에서 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem)에 의해

$$NT^2 = R^2 - h^2.$$

모서리 CA와 AB에 대해서도 같은 논증을 하면, N은 세 변으로부터 모두 같은 거리 $\sqrt{R^2-h^2}$에 있음을 알 수 있다. 점 N은 삼각형 내부에 있고(구는 구멍에 걸쳐 그 위에 놓여 있다), 삼각형 내부에서 세 변으로부터 같은 거리에 있는 점은 내심뿐이다. 따라서 $N=I$이고, 공통 거리는 r이며, 접점은 정확히 내접원이 각 변에 접하는 점이다. 이 점들은 변의 연장선이 아니라 모서리 자체 위에 있으므로, 구는 실제로 세 모서리 위에 놓인다.



그림은 O와 T를 지나는 수직 단면을 나타낸다. 모서리 BC는 T를 지나며 지면에 수직이다. 이제 삼각형 ONT에서 피타고라스 정리에 의해 $h^2=R^2-r^2$이다. (i)과 (ii)로부터

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}, \qquad \text{이므로} \qquad r^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

따라서 구의 중심은 탁자 윗면으로부터 높이

$$h=\sqrt{R^2-\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

에 있다. 이를 위해서는 $R>r$이어야 한다. 내접원보다 크지 않은 구는 구멍으로 그대로 빠져 버린다.

검산

3–4–5 삼각형을 생각하자. $s=6$이고, 헤론의 공식에 의해 $\Delta=\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}=6$이며, 이는 $\frac{1}{2}\cdot3\cdot4$와 일치한다. 그러면 $r=\Delta/s=1$이고, 이는 직각삼각형에 대한 공식 $r=\frac{1}{2}(3+4-5)$로 확인할 수 있다. $R=2$이면 공식에 의해 $h=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\approx1.732$이다. $R\to r^+$이면 $h\to0$이다. 즉 구가 내려앉아 적도가 탁자 높이와 같아지고, 내접원 위에 놓이게 된다. 더 폭넓은 검산으로, 무작위 삼각형 18,816개에 대해 수치적으로 시험해 보았다. 모든 경우에 내심 위 높이 h에 놓은 중심은 세 모서리 직선 모두로부터 정확히 거리 R에 있었고, 가장 가까운 점들은 모서리 안쪽에 있었다.

흔한 실수

- d를 I에서 **꼭짓점**까지의 거리라 할 때 $h = \sqrt{R^2 - d^2}$로 놓는 것. 구는 꼭짓점이 아니라 모서리에 접한다.
- 근거 없이 중심이 내심 바로 위에 있다고 가정하는 것. 수직에 관한 논증이나, 적어도 명확한 대칭성에 근거한 이유가 필요하다.
- (ii)에서 인수의 짝을 혼동하는 것. $b + c - a = 2(s - a)$이지, $2(s - b)$나 $2(s - c)$가 아니다.

STEP 너머

헤론의 공식은 넓이와 부피에 관한 대칭적인 공식들의 한 갈래에 속한다. 브라마굽타(Brahmagupta)의 공식은 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)에 대해 같은 역할을 하고, 케일리-멩거 행렬식(Cayley–Menger determinant)은 사면체(tetrahedron)의 여섯 모서리의 길이로부터 부피를 구해 준다. "반지름 $\perp$ 접선이므로 수선의 발은 내심이다"라는 단계는 삼수선 정리(theorem of the three perpendiculars)의 3차원 형태로, 벡터 기하를 공부할 때 알아 둘 만하다. 이런 종류의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP II 1995, 문제 8

순수수학 • 로지스틱 미분방정식

STEP II 1995, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.3 절 **개체군 수확하기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/harvesting.html

핵심 아이디어

성장 법칙은 로지스틱 방정식(logistic equation)이고, 이는 변수분리형(separable)이다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면 적분이 두 로그로 바뀐다. 둘째 부분에서는 새로운 우변을 완전제곱식으로 정리(completing the square)하면, 평행이동 $y = x - K + \alpha$가 새 방정식을 K 대신 α가 들어간 **완전히 똑같은** 로지스틱 방정식으로 바꾼다는 것을 알 수 있다. 따라서 더 이상 적분하지 않고 첫째 답을 그대로 다시 쓸 수 있다.

풀이

제거가 없을 때의 개체 수

$K > 0$으로 둔다($x = K$에서 시작하는 개체 수라면 $K > 0$이어야 한다). 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K - x)x.$$

이다. $x = K$에서 출발하면 변화율은 $K^2 > 0$이다. 해는 결코 $x = 0$이나 $x = 2K$에 도달할 수 없다. 이 상수함수들은 그 자체로 해이고, 이 방정식의 해들은 서로 교차할 수 없기 때문이다. 따라서 항상 $0 < x < 2K$이고, $(2K - x)x$로 나눌 수 있다. 부분분수로 나타내면

$$\frac{1}{x(2K - x)} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2K - x}\right),$$

이므로, 변수를 분리하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{2K}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2K-x}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}t,$$
$$\frac{1}{2K}\Big(\ln x-\ln(2K-x)\Big)=t+C.$$

x와 $2K-x$가 모두 양수이므로 절댓값 기호는 필요 없다. $t=0$에서 $x=2K-x=K$이므로 좌변은 0이고 $C=0$이다. 따라서

$$\ln\frac{x}{2K-x}=2Kt \quad\Longrightarrow\quad x=(2K-x)\,\mathrm{e}^{2Kt} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{2K\mathrm{e}^{2Kt}}{1+\mathrm{e}^{2Kt}}=\frac{2K}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}.$$

요구된 꼴에 맞추기 위해 $2=(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+(1-\mathrm{e}^{-2Kt})$로 쓰면

$$x(t)=\frac{K(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+K(1-\mathrm{e}^{-2Kt})}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}=K+K\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (같은 말로, $x=K+K\tanh Kt$이다.)

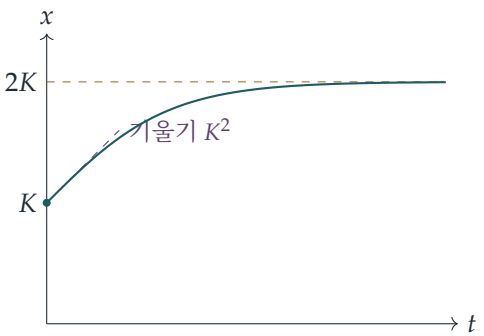
그래프 개형. $t\geq 0$이면 $\mathrm{e}^{-2Kt}\in(0,1]$이므로 $K\leq x<2K$이다. 그러면 $\dot{x}=(2K-x)x>0$이므로 x는 증가한다. 방정식을 한 번 더 미분하면

$$\ddot{x}=(2K-2x)\,\dot{x}\leq 0 \quad \text{왜냐하면} x\geq K,$$

이므로 그래프는 위로 볼록(concave)하고, $t=0$에서의 기울기는 K^2이다(이곳에서 $\ddot{x}=0$이다. 즉 시간의 원점은 S자 모양 로지스틱 곡선 전체의 변곡점(point of inflection)이다). $t\to\infty$일 때 $\mathrm{e}^{-2Kt}\to 0$이므로

$$x(t)\to 2K.$$

이다. 개체 수는 $2K$에서 일정해지며, 아래쪽에서 접근할 뿐 결코 그 값에 도달하지 않는다.



비율 L로 제거할 때

시간당 L마이크로그램을 제거하면 변화율에서 L을 빼게 된다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(2K-x)x-L.$$

우변을 완전제곱식으로 정리하면

$$(2K-x)x - L = -(x^2-2Kx) - L = K^2 - L - (x-K)^2 = \alpha^2 - (x-K)^2,$$

이고, 여기서 $K^2 > L$이므로 $\alpha = \sqrt{K^2-L} > 0$이다.

> **생각해 보기** 왜 $y = x - K + \alpha$가 올바른 치환(substitution)일까?

우변 $\alpha^2 - (x-K)^2$는 두 평형(equilibrium) 개체 수인 $x = K \pm \alpha$에서 0이 된다. $K-\alpha$만큼 평행이동하면 아래쪽 평형점이 0으로 옮겨지는데, 원래의 로지스틱 방정식에서도 아래쪽 평형점은 바로 그곳에 있었다. $x - K = y - \alpha$이고 $\dot{y} = \dot{x}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha^2 - (y-\alpha)^2 = 2\alpha y - y^2 = (2\alpha - y)\,y.$$

이다. 이것은 K 대신 α가 들어간 첫째 방정식이다. 초기 조건도 들어맞는다. $x(0) = K$이면 $y(0) = \alpha$이고, 이는 $x(0) = K$에 대응한다. $\alpha > 0$이므로 첫째 부분이 글자 그대로 적용되고,

$$y(t) = \frac{2\alpha}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha t}}, \qquad \text{따라서} \qquad x(t) = K - \alpha + \frac{2\alpha}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha t}}.$$

이다. $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-2\alpha t} \to 0$이므로 $y \to 2\alpha$이고

$$x(t) \to K - \alpha + 2\alpha = K + \alpha,$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. $L > 0$이면 $\alpha < K$이므로, 예상대로 수확되는 개체 수는 더 낮은 수준인 $K + \alpha < 2K$에 자리 잡는다.

검산

- $t = 0$에서 두 공식 모두 $x = K$를 준다. $L = 0$으로 두면 $\alpha = K$이고, 둘째 공식은 첫째 공식인 $2K/(1+\mathrm{e}^{-2Kt})$로 돌아간다.
- $x = K + K\tanh Kt$를 미분하면 $\dot{x} = K^2\operatorname{sech}^2 Kt = K^2(1-\tanh^2 Kt) = (K - K\tanh Kt)(K + K\tanh Kt) = (2K-x)x$이다.
- 수치적으로, $K = 1$이면 $x(1) = 2/(1+\mathrm{e}^{-2}) \approx 1.7616$이고, $K = 1$, $L = 0.75$이면(따라서 $\alpha = \frac{1}{2}$) $x(1) \approx 1.2311$이다. 두 값 모두 미분방정식을 직접 수치적으로(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) 푼 결과와 일치하며, 둘째 해는 $1.5 = K + \alpha$에 자리 잡는다.

흔한 실수

- 부분분수에서 인수 $\frac{1}{2K}$를 빠뜨려서 e^{-2Kt} 대신 e^{-t}를 얻는 것.
- 둘째 부분에서 $+L$로 쓰거나, 적분상수를 다시 구해야 한다는 것을 잊는 것. 여기서는 치환 덕분에 $y(0) = \alpha$가 되므로 새로운 상수가 필요하지 않다.

STEP 너머

둘째 부분은 **평형점의 안정성**(*stability of equilibria*)을 처음으로 맛보는 것이다. 방정식 $\dot{x} = \alpha^2 - (x - K)^2$는 $K \pm \alpha$에 평형점을 가진다. 위쪽 평형점은 주변의 해들을 끌어당기고, 아래쪽 평형점은 밀어낸다. 아무것도 풀지 않고도 우변의 부호만으로 이를 알 수 있다. 이러한 상선(phase line) 방법과, $L > K^2$일 때 일어나는 일(평형점이 없어서 개체 수가 유한한 시간 안에 사라진다)은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

풀이

STEP II 1995, 문제 9

역학 • 마찰과 평형

STEP II 1995, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

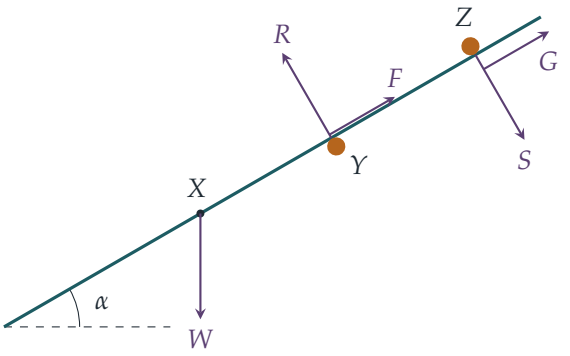
step.maths.org/questions/95-s2-q9

핵심 아이디어

막대는 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 놓여 있으므로, 막대 방향과 그에 수직인 방향으로 힘을 분해(resolve)하는 것이 자연스럽다. 막대가 그 위에 얹혀 있는 가로대는 막대를 평면에서 멀어지는 쪽으로 밀어 올리고, 막대가 그 아래로 지나가는 가로대는 막대를 아래로 누를 수만 있다. Y에 대한 모멘트(moment)를 취하면 중심이 어디에 있어야 하는지 알 수 있고, 그다음 두 마찰력(frictional force)이 모두 경사면 위쪽으로, 각각의 한계값(limiting value)으로 작용하게 하면 가장 작은 μ를 얻는다.

풀이

막대를 무게가 W인 균일한 강체(rigid body) 막대로, 가로대들을 고정된 가는 막대로 모형화한다. 각 가로대는 막대에 수직인 수직항력(normal reaction)과 막대 방향의 마찰력을 준다. 막대는 수평인 두 가로대에 모두 수직이므로 두 가로대가 이루는 평면의 최대 경사선을 따라 놓이고, 따라서 수평면과 α의 각을 이룬다. R를 Y에서의 수직항력(막대가 이 가로대 위에 놓여 있으므로 막대를 평면에서 멀어지는 쪽으로 민다), S를 Z에서의 수직항력(막대가 이 가로대 아래에 있으므로 막대를 평면 쪽으로 민다)이라 하고, $R, S \geq 0$이라 하자. F와 G를 각각 Y와 Z에서의 마찰력이라 하고, 경사면 위쪽 방향을 양으로 잡는다.



중심이 있어야 할 위치

막대에 수직인 방향으로 힘을 분해하고 Y에 대한 모멘트를 취하면(거리는 막대를 따라 잰다) 다음을 얻는다.

$$R = S + W\cos\alpha,$$
$$S\,d = W\cos\alpha \cdot XY.$$

Y에 대한 S의 모멘트는 무게의 성분 $W\cos\alpha$의 모멘트와 평형을 이루어야 하는데, 이 성분은 S와 마찬가지로 평면 쪽으로 작용한다. 같은 방향의 두 평행한 힘이 Y에 대해 서로 상쇄되는 모멘트를 가지려면, 두 힘은 Y의 서로 반대쪽에 작용해야 한다. Z는 Y보다 경사면 위쪽에 있으므로, 중심 X는 Y와 같은 위치이거나 그 아래쪽에 있어야 하고, 이때

$$XZ = XY + YZ, \qquad \text{따라서} \qquad l = XY + d \geq d.$$

이다. (만약 X가 Y와 Z 사이에 있거나 Z보다 더 위쪽에 있다면, 모멘트 방정식에 의해 $S < 0$이어야 한다. 즉 Z의 가로대가 막대를 끌어당겨야 하는데, 가로대는 그렇게 할 수 없으므로 막대는 회전하여 가로대에서 벗어난다.) 등호 $l = d$는 X가 Y에 있고 $S = 0$인 경계의 경우이다.

> ? **생각해 보기** 문제지에는 $l \leq d$라고 되어 있다. 왜 우리는 반대 방향의 부등식을 얻는가?

문제지의 부등식은 오식이다. 문제 자체가 뒤이어 $l = 2d$로 두는데, 이는 $l \geq d$일 때에만 가능하다. 위의 논증은 평형(equilibrium)을 위해 필요한 조건이 $l \geq d$임을 보여 주며, 우리는 이것을 사용한다.

μ의 최솟값

$XY = l - d$이므로 두 방정식에서

$$S = \frac{W\cos\alpha\,(l-d)}{d}, \qquad R = \frac{W\cos\alpha\,l}{d}, \qquad \text{따라서} \qquad R + S = \frac{W\cos\alpha\,(2l-d)}{d}.$$

를 얻는다. 막대 방향으로 힘을 분해하면, 마찰력이 경사면 아래쪽으로 향하는 무게의 성분을 지탱해야 한다.

$$F + G = W \sin\alpha.$$

마찰 법칙에 따라 $|F| \le \mu R$이고 $|G| \le \mu S$이므로 $F + G \le \mu(R + S)$이다. 따라서 평형이 되려면

$$W \sin\alpha \le \mu \frac{W \cos\alpha\,(2l - d)}{d}, \qquad \text{즉,} \qquad \mu \ge \frac{d \tan\alpha}{2l - d}.$$

이어야 한다. 역으로 μ가 이 값과 같으면 $F = \mu R$와 $G = \mu S$(둘 다 경사면 위쪽 방향이고, 둘 다 한계값)가 모든 방정식을 만족하므로 막대는 평형 상태에 있을 수 있다. 따라서 가능한 최솟값은

$$\mu_{\min} = \frac{d \tan\alpha}{2l - d}.$$

이다.

$l = 2d$일 때 이 값은 $\mu_{\min} = \dfrac{d \tan\alpha}{3d} = \frac{1}{3}\tan\alpha$가 되므로, 요구한 대로 $\mu \ge \frac{1}{3}\tan\alpha$이다.

검산

- $l = d$일 때 중심은 아래쪽 가로대 위에 있고 $S = 0$이며, $\mu \ge \tan\alpha$를 얻는다. 이는 거친 경사면 위에 정지해 있는 한 입자에 대한 익숙한 조건이다.
- $l \to \infty$이면 수직항력이 한없이 커지므로 아주 작은 마찰만 있으면 되고, 실제로 $\mu_{\min} \to 0$이다.
- 수치적으로 $\alpha = 0.7$이고 $l = 2d$일 때 공식은 $0.28076\ldots$을 주는데, 이는 $\frac{1}{3}\tan 0.7$이다. 또한 컴퓨터로 임의의 점들에 대한 힘과 모멘트 방정식을 확인했고, $\mu_{\min}$보다 조금 크면 평형이 성립하고 조금 작으면 성립하지 않음을 확인했다.

흔한 실수

- 두 수직항력을 같은 방향으로 잡는 것. 막대가 그 아래에 놓인 가로대는 막대를 평면 쪽으로 밀 수만 있다.
- 한쪽 가로대에서만 마찰이 한계 상태라고 가정하는 것. μ를 가능한 한 작게 하려면 두 가로대가 모두 경사면 위쪽으로 최대 마찰력을 제공해야 한다.

STEP 너머

이것은 부등식 제약이 있는 작은 정역학(statics) 문제이다. 접촉력은 선형 방정식과 마찰 부등식을 함께 만족해야 하며, 가장 작은 μ는 실행 가능 집합(feasible set)이 막 공집합이

아니게 되는 지점이다. 선형 방정식과 선형 부등식이 결합된 이와 같은 구조는 선형계획법(linear programming)과 공학에서의 마찰 접촉 해석의 바탕을 이룬다. 강체 정역학과 마찰에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 1995, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

STEP II 1995, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q10

핵심 아이디어

각 충돌은 두 개의 방정식, 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)으로 이루어진 문제이다. 두 충돌을 차례로 다루고, 두 번째 구의 최종 속도를 u와 같다고 놓은 뒤 m_1에 대해 풀면 된다. 그러면 질량은 양수여야 한다는 단순한 사실로부터 부등식이 나온다. 마지막 부분에서는 충돌이 오직 **상대** 속도에만 관련된다는 점에 주목하자. 속력 v로 움직이는 좌표계에서 운동을 바라보면 이 문제는 첫 부분의 문제로 바뀐다.

풀이

구들을 매끄러운 탁자 위에서 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. 따라서 수평 방향으로 작용하는 힘은 구 사이의 충격량(impulse)뿐이다. 첫 번째 구가 움직이는 방향을 양의 방향으로 잡는다.



첫 번째 충돌

첫 번째 충돌 직후 첫 번째 구와 두 번째 구의 속도를 각각 v_1, w라 하자. 운동량 보존과 뉴턴의 법칙(멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이다)으로부터

$$m_1 v_1 + m_2 w = m_1 u, \qquad w - v_1 = eu.$$

를 얻는다. $v_1 = w - eu$를 첫 번째 식에 대입하면 $(m_1+m_2)w = m_1(1+e)u$이므로

$$w = \frac{m_1(1+e)u}{m_1+m_2}, \qquad v_1 = \frac{(m_1-em_2)u}{m_1+m_2}.$$

이다.

두 번째 충돌

이제 속도 w로 움직이는 두 번째 구가 정지해 있는 세 번째 구와 충돌한다. 이는 m_1, m_2, u를 m_2, m_3, w로 바꾼 같은 상황이므로, 충돌 후 두 번째 구의 속도는

$$\frac{(m_2-em_3)w}{m_2+m_3}.$$

이다. 문제에서 이 값이 u와 같다고 했다. w를 대입하고 $u \neq 0$으로 약분하면

$$\frac{(m_2-em_3)\,m_1(1+e)}{(m_2+m_3)(m_1+m_2)} = 1, \qquad \text{따라서} \qquad m_1(1+e)(m_2-em_3) = (m_1+m_2)(m_2+m_3).$$

이다. m_1이 들어 있는 항을 모으면

$$m_1\left[(1+e)m_2 - e(1+e)m_3 - m_2 - m_3\right] = m_2(m_2+m_3),$$

이고, 괄호 안을 정리하면 $em_2 - m_3(1+e+e^2)$이 된다. 따라서

$$\boxed{m_1 = \frac{m_2(m_2+m_3)}{em_2 - m_3(1+e+e^2)}}.$$

이다.

생각해 보기 가진 것이 방정식뿐인데, 부등식은 어디에서 나오는가?

물리적 사실, 즉 질량은 양수라는 사실에서 나온다. 분자 $m_2(m_2+m_3)$은 양수이고, 우리가 나눈 괄호는 0일 수 없다(그렇다면 바로 앞의 식이 $0 = m_2(m_2+m_3)$이 되기 때문이다). 따라서 $m_1 > 0$이려면 분모가 양수여야 한다.

$$em_2 - m_3(1+e+e^2) > 0, \qquad \text{즉,} \qquad m_2 e > m_3(1+e+e^2),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

마지막 부분에서 충돌 횟수를 세므로, 그 뒤에 다른 일이 일어나지 않음을 확인해 둘 필요가 있다. 두 번째 충돌 후 두 번째 구는 u로 움직이고, 첫 번째 구는 $v_1 = u - \frac{m_2(1+e)u}{m_1+m_2} < u$로 움직이므로 첫 번째 구는 다시는 두 번째 구를 따라잡지 못한다. 세 번째 구는 상대 속력 $ew > 0$으로 두 번째 구에서 멀어진다. 따라서 충돌은 정확히 두 번 일어난다.

마지막 부분

이제 첫 번째 구를 제외한 세 구가 모두 공통의 속도 v로 움직이고, 첫 번째 구는 $u > v$로 움직인다. 직선을 따라 일정한 속도 v로 움직이는 좌표계(frame)에서 운동을 바라보자. 이 좌표계에서는 다음이 성립한다.

- 첫 번째 구는 $u - v > 0$의 속도로 두 번째 구를 향해 움직이고, 두 번째 구와 세 번째 구는 정지해 있다.
- 각 충돌에서 운동량은 여전히 보존된다. 모든 속도에서 v를 빼면 운동량 방정식의 양변이 같은 양 $(m_a + m_b)v$만큼 바뀌기 때문이다.
- 뉴턴의 법칙은 속도의 차만 포함하므로 변하지 않는다.

따라서 움직이는 좌표계에서는 u를 $u - v$로 바꾼 것을 제외하면 첫 부분과 정확히 같은 상황이며, 질량들도 같은 관계식(u를 전혀 포함하지 않는다)을 만족한다. 첫 부분에 의해 두 번의 충돌 후 두 번째 구는 이 좌표계에 대하여 $u - v$로 움직인다. 탁자의 좌표계로 돌아가 v를 다시 더하면, 두 번의 충돌 후 두 번째 구의 속도는

$$\boxed{u}.$$

이다. 조건 $u > v$는 첫 번째 충돌이 애초에 일어나도록 보장하는 조건이며, 가정 $v > 0$은 실제로 논증에 필요하지 않다.

검산

$e = \frac{1}{2}$, $m_3 = 1$, $m_2 = 4$로 잡자. 그러면 $em_2 = 2 > \frac{7}{4} = m_3(1 + e + e^2)$이고, 공식에 의해 $m_1 = \frac{4 \cdot 5}{1/4} = 80$이다. $u = 7$이면 첫 번째 충돌에서 두 번째 구의 속도는 $w = \frac{80 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7}{84} = 10$이 되고, 두 번째 충돌 후에는 $\frac{(4 - \frac{1}{2}) \cdot 10}{5} = 7 = u$가 되어 예상대로이다. 또한 컴퓨터로 질량과 e를 조건에 맞게 무작위로 10^4번 넘게 골라 충돌을 (분수로) 정확히 계산해 보았는데, 모든 경우에 충돌이 정확히 두 번 일어나고, 두 번째 구의 최종 속도가 u이며, 두 번째 구와 세 번째 구에 공통의 속도 $v < u$를 더해도 같은 최종 속도 u가 나옴을 확인하였다.

흔한 실수

- 뉴턴의 법칙을 거꾸로 쓰는 실수, 예를 들어 $v_1 - w = eu$라고 쓰는 것이다. 앞에 있는 구는 뒤에 있는 구보다 적어도 같은 빠르기로 움직여야 한다.
- 마지막 부분에서 문제가 명시적으로 유도하는 좌표계 변환을 쓰지 않고 충돌을 처음부터 다시 계산하는 것.
- 마지막에 v를 다시 더하는 것을 잊고 $u - v$를 답으로 쓰는 것.

STEP 너머

마지막 부분은 갈릴레이 불변성(Galilean invariance)의 한 예이다. 충돌 법칙은 일정한 속도로 움직이는 모든 좌표계에서 같은 모양이므로, 문제를 가장 쉽게 만드는 좌표계를 고를 수 있다. 대학 역학에서 가장 즐겨 쓰는 선택은 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)로, 이 좌표계에서는 전체 운동량이 0이고 충돌은 단순히 속도의 방향을 뒤집고 크기를 e배로 만든다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌을 다루면서 이 아이디어를 폭넓게 사용한다.

풀이

STEP II 1995, 문제 11

역학 • 속도에 비례하는 공기 저항

STEP II 1995, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

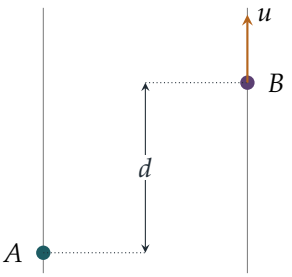
step.maths.org/questions/95-s2-q11

핵심 아이디어

저항이 속도에 대해 **선형**(*linear*)이므로 운동 방정식(equation of motion)도 선형이며, 입자가 올라가든 내려가든 같은 방정식이 성립한다. 따라서 두 운동 방정식을 빼 보자. 그러면 중력 항이 소거되고 **상대** 속도(relative velocity)는 단순히 지수적으로 감소한다. 이것을 한 번 적분하면 각 입자가 어디에 있는지 전혀 알 필요 없이 두 입자 사이의 거리를 바로 얻는다.

풀이

각 물체를 연직선 위를 움직이는 단위 질량의 입자로 모형화한다. 이 입자에는 무게 g와 운동 방향의 반대쪽으로 크기 $k|v|$인 저항이 작용한다. 위쪽을 양의 방향으로 잡고 원점을 A에 두며, 시각 t에서 입자 1(A에서 출발)과 입자 2(B에서 출발)의 높이를 각각 x_1, x_2, 속도를 각각 v_1, v_2라 하자.





위쪽 속도가 v인 입자에 작용하는 힘

운동 방정식

위쪽 속도가 v인 입자에 작용하는 저항은 $-kv$이다. $v > 0$(올라가는 중)이면 저항은 아래를 향하고, $v < 0$(내려가는 중)이면 위를 향하므로, 두 경우 모두 정확히 "운동 방향의 반대쪽"이다. 따라서 단위 질량에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙에서 각 입자에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -g - kv_1, \qquad \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -g - kv_2,$$

가 모든 $t \geq 0$에서 성립한다.

> **생각해 보기** 입자 2는 올라갔다가 멈춘 뒤 내려온다. 각 단계마다 따로 방정식을 세워야 하지 않을까?

저항이 속력의 제곱에 비례한다면 그래야 한다. 이때 힘은 $-kv|v|$가 되어 v의 부호가 바뀔 때 식의 꼴이 달라진다. 그러나 여기서 힘은 $-kv$라는 하나의 식이고, 이 식은 v의 방향이 바뀌면 이미 저절로 방향이 바뀌므로, 방정식 하나로 전체 운동을 다룰 수 있다.

상대 운동

입자 1에 대한 입자 2의 상대 속도를 $w = v_2 - v_1$이라 하자. 두 방정식을 빼면 무게 항이 소거되어

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -kw, \qquad w(0) = u - 0 = u,$$

이므로 $w = u\,\mathrm{e}^{-kt}$이다. 이제 $s = x_2 - x_1$이라 하면, B가 A보다 d만큼 높이 있으므로 $s(0) = d$이다. 그러면 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = w$이고

$$s = d + \int_0^t u\,\mathrm{e}^{-k\tau}\,\mathrm{d}\tau = d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

이다. $u \geq 0$이고 $1 - \mathrm{e}^{-kt} \geq 0$이므로 $s \geq d > 0$이다. 즉 입자 2는 항상 입자 1보다 위에 있고, 두 입자는 결코 만나지 않는다. 따라서 시각 t에서 두 입자 사이의 거리는

$$\boxed{d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)}$$

이다. $k > 0$이므로 $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-kt} \to 0$이고, 따라서 거리는 요구한 대로 $d + \dfrac{u}{k}$에 수렴(converge)한다.

각 입자의 운동 (먼 길로 돌아가고 싶다면)

각 방정식을 따로 풀면(1계 선형 미분방정식이자 변수분리형(separable)이다) $v = -\frac{g}{k} + \left(v(0) + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}$를 얻고, 한 번 더 적분하면

$$x_1 = -\frac{gt}{k} + \frac{g}{k^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right),$$
$$x_2 = d - \frac{gt}{k} + \frac{1}{k}\left(u + \frac{g}{k}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

이다. 두 식을 빼면 gt/k 항과 g/k^2 항이 소거되어 같은 s를 다시 얻는다. 두 입자 모두 종단 속도(terminal velocity) $-g/k$에 가까워지며, 이 때문에 두 입자 사이의 거리가 일정한 값으로 안정된다.

검산

- $t = 0$에서 거리는 d이다. 또 t가 작을 때 거리는 약 $d + ut$인데, 이는 저항이 없을 때와 같다(이 경우 두 입자는 중력에 의해 똑같이 떨어진다).
- $u = 0$이면 두 입자는 정지 상태에서 함께 놓여 똑같은 운동을 하므로, 공식이 말하는 대로 계속 d만큼 떨어져 있다.
- 단위: k의 단위는 s^{-1}(단위 속도당, 단위 질량당 힘)이므로 u/k는 길이이다.
- 수치적으로, 임의의 k, u, d, t에 대해 두 운동 방정식을 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 계산하면 공식과 약 10^{-12} 이내로 일치한다. $k = 0.5$, $u = 10$, $d = 3$일 때 거리는 $t = 1$에서 10.87, $t = 20$에서 22.999로, $d + u/k = 23$에 가까워진다.

흔한 실수

- 입자 2의 운동을 "올라가는" 단계와 "내려가는" 단계로 나누고 저항의 부호를 각각 다르게 잡는 것: 여기서는 불필요하며, 부호 오류가 자주 생기는 원인이다.
- v가 이미 (음수인) 위쪽 속도인데도 떨어지는 입자의 저항을 $+kv$로 쓰는 것: 이렇게 하면 부호를 두 번 반영하게 된다.

STEP 너머

방정식을 빼는 요령이 통하는 이유는 운동 방정식이 선형이기 때문이다. 즉 두 해의 차는 동차 방정식(homogeneous equation) $\dot{w} = -kw$의 해가 된다. 이것이 바로 선형 미분방정식(linear differential equation) 이론 전체를 떠받치는 중첩 원리(superposition principle)이며, 이 이론에서 모든 해는 "특수해 더하기 여함수(complementary function)"의 꼴이다. 저항이 속력의 제곱에 비례하면 이 원리가 성립하지 않으며, 두 입자 사이의 거리도 전혀 다르게 움직인다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 선형 이론을 전개하고, Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 종류의 저항이 있는 운동을 모두 다룬다.

풀이

STEP II 1995, 문제 12

확률과 통계 • 순차적 결투

> **STEP II 1995, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.13 절 **삼자 결투**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/truel.html

핵심 아이디어

누군가 맞을 때까지 계속되는 결투에서는 두 사람이 모두 빗나갈 때마다 게임이 "처음부터 다시" 시작된다. 따라서 구하려는 확률(probability)은 자기 자신을 이용한 간단한 방정식을 만족하고, 무한급수(infinite series)를 더할 필요가 없다(물론 더해도 된다). 삼자 결투에서는 앨저넌(Algernon)의 첫 발에 대한 각 선택이 곧바로 두 사람의 결투로 바뀌고, 이는 첫 번째 결과로 처리할 수 있다. 놀라운 점은 앨저넌의 최선의 수가 아무도 맞히지 않는 것이라는 사실이다.

풀이

두 사람의 결투

퍼시(Percy)가 먼저 던질 때 퍼시가 이길 확률을 P라 하자. 첫 번째 두 번의 던지기를 살펴보자.

- 퍼시가 첫 번째 던지기에서 맞히면(확률 p) 퍼시가 곧바로 이긴다.
- 퍼시가 빗나가고 로드니(Rodney)가 맞히면(확률 $(1-p)r$) 퍼시가 진다.
- 둘 다 빗나가면(확률 $(1-p)(1-r)$) 퍼시가 던질 차례인 처음 상태로 돌아간다. 각 던지기는 독립(independent)이므로, 여기서부터 퍼시가 이길 확률은 다시 P이다.

따라서

$$P = p + (1-p)(1-r)P \quad \Longrightarrow \quad P\big(1-(1-p)(1-r)\big) = p \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{p}{p+r-pr},$$

이다. 여기서 $1-(1-p)(1-r) = p+r-pr$이고, $p > 0$이므로 이 값은 양수이다. 이것이 구하려는 결과이다.

생각해 보기 게임은 반드시 끝나는가? 즉 퍼시가 지는 것이 정말로 로드니가 이기는 것과 같은가?

그렇다. 처음 n번의 라운드가 모두 둘 다 빗나가는 것으로 끝날 확률은 $\big((1-p)(1-r)\big)^n$이고, $p > 0$이므로 이 값은 0으로 수렴(tends to)한다. 같은 이야기로, 등비급수(geometric series) $\sum_{k\geq 0} p\big((1-p)(1-r)\big)^k$를 더해도 같은 답을 얻는다.

삼자 결투에서 A, B, C가 맞힐 확률은 각각 $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, 1이다. A가 먼저 던지는 A와 B의 두 사람 결투가 두 번 나오므로, 위의 결과에 $p = \frac{2}{5}$, $r = \frac{3}{5}$를 대입하여 미리 계산해 두자.

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}} = \frac{10}{19}.$$

소문항 (i)

앨저넌이 커스버트(Cuthbert)를 맞히면 앨저넌과 버티(Bertie)만 남고, 다음에는 버티가 앨저넌을 겨누어 던진다. 앨저넌은 버티가 빗나갈 때(확률 $\frac{2}{5}$)에만 살아남는다. 그 뒤에는 A가 먼저 던지는 A와 B의 결투가 되고, 앨저넌은 확률 $\frac{10}{19}$로 이긴다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{10}{19} = \frac{4}{19}.$$

소문항 (ii)

앨저넌이 버티를 맞히면, 다음에는 커스버트가 겨눌 대상으로 앨저넌만 남은 채 던진다. 커스버트는 절대 빗나가지 않으므로 앨저넌이 이길 확률은 0이다.

소문항 (iii)

앨저넌이 빗나가면 세 사람이 모두 남아 있다. 다음에는 버티가 던지는데, 커스버트를 겨눈다.

- 확률 $\frac{3}{5}$로 버티가 커스버트를 맞힌다. 앨저넌과 버티가 남고 앨저넌이 던질 차례이므로, 앨저넌은 확률 $\frac{10}{19}$로 이긴다.
- 확률 $\frac{2}{5}$로 버티가 빗나간다. 그러면 커스버트가 버티를 겨누고 반드시 맞힌다. 앨저넌과 커스버트가 남고 앨저넌이 던질 차례이다. 앨저넌은 이번 던지기에서 반드시 맞혀야 한

다. 그렇지 않으면 커스버트가 앨저넌을 맞히기 때문이다. 따라서 앨저넌은 확률 $\frac{2}{5}$로 이긴다.

그러므로

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{10}{19} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{19} + \frac{4}{25} = \frac{150+76}{475} = \frac{226}{475}.$$

빗나간 것이 일부러였든 겨냥에 실패해서였든 이 값은 같다. 그 뒤에 버티와 커스버트가 똑같이 행동하기 때문이다.

앨저넌의 최선의 전략

생각해 보기 앨저넌은 누군가를 **맞히는** 것을 선택할 수 없고, 누군가를 **겨누는** 것만 선택할 수 있다. 각 선택은 실제로 앨저넌에게 무엇을 주는가?

누군가를 겨누면 확률 $\frac{2}{5}$로 맞히고 확률 $\frac{3}{5}$로 빗나가며, 빗나가면 소문항 (iii)의 상황이 된다. 따라서

$$\begin{aligned}
\text{커스버트를 겨눔:}\quad & \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{19} + \frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475} = \frac{200+678}{2375} = \frac{878}{2375} \approx 0.370,\\
\text{버티를 겨눔:}\quad & \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475} = \frac{678}{2375} \approx 0.285,\\
\text{일부러 빗나감:}\quad & \frac{226}{475} = \frac{1130}{2375} \approx 0.476.
\end{aligned}$$

커스버트를 확실히 맞힌다 해도 확률은 $\frac{4}{19} = \frac{100}{475}$에 불과하고, 이는 $\frac{226}{475}$보다 작다. 어느 상대를 맞히든 앨저넌의 승률은 낮아질 뿐이다. 따라서 앨저넌은 **첫 발을 일부러 빗나가게 쏘아야 한다**. 그러면 버티와 커스버트가 서로를 쏘고, 앨저넌은 살아남은 사람을 상대로 먼저 던지게 된다. 이 전략을 쓰면 앨저넌이 이길 확률은 $\frac{226}{475}$이고, 이것이 구하려는 값이다.

검산

- $r = 0$이면 결투 공식은 1을 주고, $p = 1$이어도 1을 준다. 둘 다 마땅히 그래야 한다.
- 세 선택의 순위는 $0.476 > 0.370 > 0.285$이다. 삼자 결투 전체를 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)으로 돌려 본 결과(전략마다 3×10^5번의 게임) 0.476, 0.369, 0.284를 얻었고, 이는 정확한 값과 일치한다.
- 소문항 (iii)의 타당성 점검: $\frac{6}{19} \approx 0.316$과 $\frac{4}{25} = 0.16$을 더하면 0.476이다.

흔한 실수

- 첫 발 이후 던지는 순서를 잘못 잡는 것. 소문항 (i)에서는 버티가 **다음에** 던지므로, 결투 공식은 버티가 빗나간 뒤에만 적용된다.
- "커스버트를 겨눔"을 "커스버트를 맞힘"과 같은 뜻으로 다루는 것. 소문항 (i)–(iii)은 결과에 대한 조건부 확률이므로, 전략을 세울 때는 이들에 $\frac{2}{5}$와 $\frac{3}{5}$의 가중치를 주어야 한다.

STEP 너머

한 단계 뒤의 상황을 이용해 확률을 자기 자신으로 나타내는 방법을 **첫 단계 분석**(first-step analysis)이라 한다. 이는 마르코프 연쇄(Markov chain)의 기본 도구로, 도달 확률과 기대 도달 시간을 연립일차방정식의 해로 구해 준다. "삼자 결투(truel)"는 게임 이론(game theory)에서 잘 알려진 퍼즐이며, 가장 약한 사람이 싸움에서 비켜서 있을 때 가장 유리한 경우가 많다. 더 알고 싶다면 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 또는 Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*(확률 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 1995, 문제 13

확률과 통계 • 푸아송 분포와 최적화

> **STEP II 1995, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q13

핵심 아이디어

데이터베이스 분류와는 달리, 이 문제는 사업 이야기로 포장된 확률 문제이다. 탑승하지 않는 승객의 수는 시행 횟수가 매우 크고 성공 확률이 매우 작은 이항분포(binomial distribution)를 따르는 개수이며, 바로 이런 경우에 푸아송 분포(Poisson distribution)가 등장한다. 그다음 정수 k에 대해 최적화하는 요령은 미적분이 아니라 **차분**(first difference) $u_{k+1} - u_k$이다. 표를 한 장 더 팔 때 기대 이익이 늘어나는 한 계속 판다. 이 차분이 감소함을 보이고 나면, 가장 좋은 k는 차분이 처음으로 양수가 아니게 되는 곳이다.

풀이

푸아송 모형

$N + k$명의 표 소지자 각각이 서로 독립적으로 확률 ϵ으로 탑승하지 않는다고 하자. 그러면 탑승하지 않는 사람의 수 R는 이항분포 $\mathrm{B}(N+k, \epsilon)$를 따르고, 평균은 $(N+k)\epsilon$이다. k는 N에 비해 매우 작으므로 이 평균은 근사적으로 $N\epsilon = \lambda$이다. 시행 횟수가 크고 성공 확률이 매우 작은 이항분포는 평균이 같은 푸아송 분포로 잘 근사된다. 고정된 r에 대하여 $n\epsilon = \lambda$를 고정한 채 $n \to \infty$이면

$$\binom{n}{r}\epsilon^r(1-\epsilon)^{n-r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}\cdot\frac{\lambda^r}{r!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-r} \;\to\; \frac{\lambda^r}{r!}\,\mathrm{e}^{-\lambda},$$

이다. 첫 번째 인수는 1로 수렴(converge)하고 $(1-\lambda/n)^n \to \mathrm{e}^{-\lambda}$이기 때문이다. 따라서 근사적으로 $R \sim \mathrm{Po}(\lambda)$이다. 이제부터 이를 정확한 것으로 보고

$$p_r = \mathrm{P}(R = r) = \frac{\lambda^r}{r!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

이라 쓴다.

이익

항공사는 $N+k$장의 표를 장당 £A의 이익으로 팔므로, 무슨 일이 일어나든 $A(N+k)$를 얻는다. r명의 승객이 탑승하지 않으면 N개의 좌석에 $N+k-r$명이 도착한다.

- $r \geq k$이면 도착하는 사람은 많아야 N명이므로 모두 탑승한다. 보상받는 사람은 없고, $\max(0, k-r) = 0$이다.
- $r < k$이면 $k-r$명이 탑승하지 못하고, 각각 £B의 비용이 들며, $\max(0, k-r) = k-r$이다.

두 경우 모두 파운드 단위의 이익은 $A(N+k) - B\max(0, k-r)$이다.

기대 이익 $u_0, \ldots, u_3$

기댓값(expected value)을 취하면 벌금에 기여하는 것은 $r = 0, 1, \ldots, k-1$뿐이므로

$$u_k = A(N+k) - B\sum_{r=0}^{k-1}(k-r)\,p_r.$$

이다. $p_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$, $p_1 = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$, $p_2 = \frac{1}{2}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}$를 이용하면

$$\begin{aligned}
u_0 &= AN,\\
u_1 &= A(N+1) - B\mathrm{e}^{-\lambda},\\
u_2 &= A(N+2) - B\mathrm{e}^{-\lambda}(2+\lambda),\\
u_3 &= A(N+3) - B\mathrm{e}^{-\lambda}\left(3+2\lambda+\tfrac{1}{2}\lambda^2\right).
\end{aligned}$$

차분 v_k

일반식끼리 빼면

$$\begin{aligned}
v_k = u_{k+1} - u_k &= A - B\left[\sum_{r=0}^{k}(k+1-r)\,p_r - \sum_{r=0}^{k-1}(k-r)\,p_r\right]\\
&= A - B\left[p_k + \sum_{r=0}^{k-1}\big((k+1-r)-(k-r)\big)p_r\right]\\
&= A - B\sum_{r=0}^{k} p_r,
\end{aligned}$$

이다. 여기서 첫 번째 합의 $r=k$ 항인 $(k+1-k)p_k = p_k$는 두 번째 합에 짝이 없다. 말로 하면 $v_k = A - B\,\mathrm{P}(R \leq k)$이다. 이는 자연스럽다. $(k+1)$번째 추가 표는 확실히 £A를 벌어들이고, 그 승객이 결국 탑승을 거부당할 때, 즉 $R \leq k$일 때 정확히 £B의 추가 비용이 든다.

? **생각해 보기** 왜 괄호 안이 확률들의 단순한 합으로 줄어드는가?

각 $r \le k-1$에 대하여 k가 하나 늘면 p_r의 계수는 정확히 하나 늘어나고(그 결과에서 탑승을 거부당하는 승객이 한 명 더 생긴다), 결과 $r = k$는 새로 한 번의 보상 비용을 발생시키기 시작한다. 따라서 0부터 k까지의 모든 r이 p_r을 한 번씩 기여한다.

그러면

$$v_k - v_{k+1} = B\,p_{k+1} = B\,\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} > 0,$$

이다. $B > 0$이고 $\lambda > 0$이기 때문이다. 따라서 모든 k에 대하여 $v_k > v_{k+1}$이다. 즉 차분은 순감소한다.

마지막으로 $\sum_{r=0}^{k} p_r$는 $\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{r\ge 0}\lambda^r/r! = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1$의 부분합(partial sum)이므로 $k \to \infty$일 때 1로 수렴하고,

$$v_k \to A - B \qquad \text{단, } k \to \infty,$$

이다. 이것이 보이려던 것이다. $B > A$이므로 이 극한은 음수이다.

Fly By Night에 대한 조언

$F(k) = \mathrm{P}(R \le k) = \sum_{r=0}^{k} p_r$라 쓰면 $v_k = A - BF(k)$이고

$$u_{k+1} > u_k \iff v_k > 0 \iff F(k) < \frac{A}{B}.$$

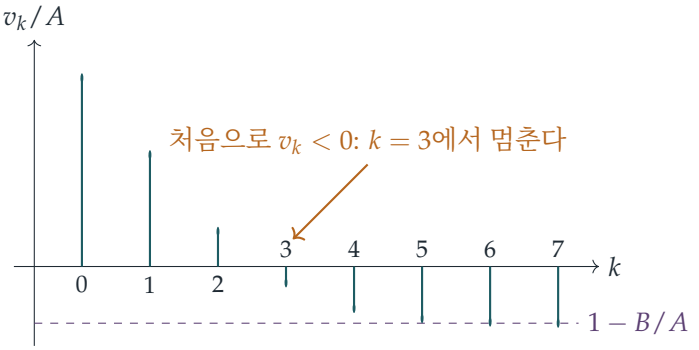
이다. v_k는 순감소하고 극한이 음수이므로, 수열(sequence) $v_0, v_1, v_2, \ldots$는 어느 지점까지는 양수이고 그 이후로는 음수이다(한 번 0이 될 수도 있다). 따라서 u_k는 증가하다가 감소하며, 최댓값은 다음 표가 더 이상 이익이 되지 않는 첫 번째 k에서 나온다.

> 다음을 만족하는 가장 작은k를 택한다: $F(k) = \displaystyle\sum_{r=0}^{k} \frac{\lambda^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda} \;\ge\; \frac{A}{B}.$

특히 $\mathrm{e}^{-\lambda} \ge A/B$이면(승객이 매우 믿을 만하거나 벌금이 매우 크면) $v_0 \le 0$이므로 항공사는 초과 예약(overbooking)을 전혀 하지 말아야 한다. 즉 $k = 0$이다. 정확히 $F(k) = A/B$이면 $v_k = 0$이고, k와 $k+1$은 같은 기대 이익을 준다. $A/B < 1$이고 $F(k) \to 1$이므로 그러한 k는 항상 존재한다.

따라서 조언은 다음과 같다. 많아야 k명이 탑승하지 않을 확률이 표 한 장의 이익과 보상금의 비 A/B보다 작은 동안에는 추가 표를 계속 팔고, 그 확률이 처음으로 A/B에 도달하는 k에서 멈춘다.

예를 들어 $\lambda = 2$이고 $B = 1.25A$이면(따라서 $A/B = 0.8$) $F(0) \approx 0.135$, $F(1) \approx 0.406$, $F(2) \approx 0.677$, $F(3) \approx 0.857$이므로 가장 좋은 선택은 $k = 3$이다. 아래 그림은 이 경우의 v_k/A를 보여 준다.



검산

- 일반식으로부터 $u_1 - u_0 = A - Be^{-\lambda} = A - Bp_0$이고 $u_2 - u_1 = A - Be^{-\lambda}(1+\lambda) = A - B(p_0 + p_1)$이므로 v_0, v_1과 일치한다.
- 극한의 경우: $B \to A$이면 $A/B \to 1$이고 k는 한없이 커진다(탑승 거부의 비용이 거의 없다). $B \to \infty$이면 $A/B \to 0$이고 $k = 0$이다.
- 수치적으로, N, A, B, λ를 무작위로 수백 번 골라 이익 공식에서 직접 u_k를 계산하여, $u_0, \ldots, u_3$와 v_k의 공식, $v_k - v_{k+1} = Bp_{k+1}$, 그리고 u_k를 최대로 하는 k가 $F(k) \geq A/B$를 만족하는 가장 작은 k라는 것을 확인하였다. $N = 400, k = 3, \epsilon = 0.01$일 때 탑승하지 않는 사람이 $r = 3$명일 이항분포 확률과 푸아송 확률은 각각 0.194와 0.195이다.

흔한 실수

- 벌금 합에 $r \geq k$인 항을 포함하는 것. 이때는 도착한 사람 모두가 좌석을 얻으므로 이 항들은 아무것도 기여하지 않는다.
- u_k를 k에 대하여 미분하는 것. 변수는 정수이므로 차분 v_k가 올바른 도구이다.
- 답을 "$v_k = 0$"이라고 쓰는 것. 일반적으로 v_k를 정확히 0으로 만드는 k는 없다. 답은 $v_k \leq 0$이 되는 첫 번째 k이다.

STEP 너머

"차분이 감소하므로 부호가 바뀌는 곳에서 멈춘다"는 논증은 오목함수(concave function)가 도함수가 0이 되는 곳에서 최댓값을 갖는다는 사실의 이산 버전이다. "$\mathrm{P}(R \leq k)$가 A/B에 도달하면 멈춘다"는 규칙은 경영과학(operations research)의 고전적인 **신문 판매원**(newsvendor) 규칙(임계 분위수(critical fractile) 규칙)이며, 항공사의 초과 예약은 그

대표적인 응용이다. 위에서 엄밀하게 보인 이항분포의 푸아송 극한은 대학 확률론 강의에서 가장 먼저 배우는 극한 정리(limit theorem) 중 하나이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 푸아송 근사와 $\max(0, k-R)$ 같은 함수의 기댓값을 모두 다룬다.

풀이

STEP II 1995, 문제 14

확률과 통계 • 가설 검정

STEP II 1995, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q14

핵심 아이디어

밀도함수(density)를 $x^2\phi(x)$로 쓴다. 여기서 ϕ는 표준정규분포(standard normal distribution)의 밀도함수이다. 그러면 필요한 모든 적분이 표준정규확률변수 Z의 적률(moment)이 되는데, 바로 여기서 $\mathrm{E}(Z^4)$에 관한 힌트가 쓰인다. 데이터가 "믿음을 흔드는지" 판단하려면, 가설(hypothesis) $(\mu = 0)$이 참일 때 적어도 이만큼 극단적인 결과가 나올 확률이 얼마인지 묻는다. 그 확률이 아주 작고, μ를 옮기면 데이터가 평범해진다면, 그 데이터는 가설에 불리한 증거가 된다.

풀이

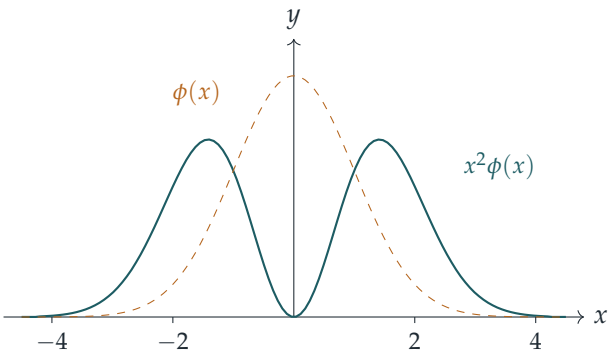
A 구하기

$u = x$, $\mathrm{d}v = x\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)하면 $v = -\mathrm{e}^{-x^2/2}$이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0 + \sqrt{2\pi},$$

이다. 여기서 표준정규분포의 적분을 이용하였다. 전체 확률은 1이어야 하므로

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \text{즉,} \qquad \mathrm{f}(x) = x^2\phi(x), \quad \phi(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$



이 밀도함수는 대칭이고 $x = \pm\sqrt{2}$에서 두 개의 봉우리를 가지며 $x = 0$에서 0이다. 대칭성에 의해 $\mathrm{E}(X) = 0$이고,

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4\phi(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}(Z^4) = 3, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{Var}(X) = 3.$$

소문항 (i)

가설 아래에서 $a = 87.3$만큼 멀리 떨어진 결과가 나올 가능성은 얼마일까? 앞에서처럼 부분적분하면 (이번에는 $\phi'(x) = -x\phi(x)$이므로 $v = -\phi(x)$로 둔다)

$$\mathrm{P}(X \geq a) = \int_a^{\infty} x \cdot x\phi(x)\,\mathrm{d}x = a\phi(a) + \mathrm{P}(Z \geq a).$$

또한 $a > 0$일 때 적분 구간에서 $x/a \geq 1$이므로 $\mathrm{P}(Z \geq a) = \int_a^{\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{\infty} \frac{x}{a}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\phi(a)}{a}$이다. 따라서 대칭성에 의해

$$\mathrm{P}(|X| \geq 87.3) \leq 2\left(a + \frac{1}{a}\right)\phi(a) \approx 70\,\mathrm{e}^{-3810.6} \approx 10^{-1653}.$$

이는 터무니없이 작은 값이다. 가설이 참이라면 이런 값은 사실상 절대 관찰되지 않아야 한다. 반면 μ가 85나 89 근처라면 (87.3이 $\mathrm{f}(x - \mu)$의 봉우리 가운데 하나에 놓이게 되므로) 87.3이라는 결과는 지극히 평범하다. 따라서 87.3이라는 결과 하나만으로도 믿음은 완전히 흔들려야 한다. 유일한 탈출구는 결과 자체를 의심하는 것(예를 들어 기록 오류)이며, 분별 있는 과학자라면 가설을 버리기 전에 이를 먼저 확인할 것이다.

> ? **생각해 보기** 모든 특정한 값의 확률이 0인데, 관찰값 하나로 판단하는 것은 불공평하지 않은가?

요점은 정확히 87.3이라는 값의 확률이 아니라, 가설이 확률을 몰아 두는 곳에서 **적어도** 이만큼 멀리 떨어진 값의 확률이다. 마찬가지로, 가설 아래에서 87.3에서의 밀도는 적절한 대립가설 아래에서의 밀도의 대략 10^{-1650}배이다. 어느 쪽으로 보든, 이렇게 극단적인 경우에는 관찰값 하나로 충분하다.

소문항 (ii)

$X_1, \ldots, X_{1000}$을 서로 독립인 결과들이라 하고 $\bar{X}$를 그 평균이라 하자. 가설 아래에서 각 X_i의 평균은 0, 분산은 3이므로

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = 0, \qquad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{3}{1000}, \qquad \mathrm{sd}(\bar{X}) = \sqrt{0.003} \approx 0.0548.$$

분산이 유한하고 1000이 충분히 크므로, f 자체는 정규분포의 밀도함수와 전혀 닮지 않았는데도 중심극한정리(central limit theorem)에 의해 $\bar{X}$는 근사적으로 $\mathrm{N}(0, 0.003)$을 따른다. 관찰된 평균은 0에서

$$\frac{0.23}{0.0548} \approx 4.2$$

표준편차만큼 떨어져 있고,

$$\mathrm{P}(|\bar{X}| \geq 0.23) \approx \mathrm{P}(|Z| \geq 4.2) \approx 3 \times 10^{-5}.$$

따라서 가설이 참이라면, 실험 전체를 십만 번 반복할 때 0에서 이만큼 떨어진 표본평균은 세 번 정도 나타난다. $\mu \approx 0.23$인 대립가설 아래에서는 같은 데이터가 지극히 전형적이다. 이 경우에도 믿음은 심각하게 흔들려야 하지만, (i)만큼 압도적이지는 않다. 통상적인 어떤 유의수준(significance level), 예를 들어 1%나 심지어 0.1%에서도 $\mu = 0$을 기각할 것이다.

> ? **생각해 보기** 체비쇼프 부등식(Chebyshev's inequality)을 써서 중심극한정리를 피할 수는 없을까?

체비쇼프 부등식을 쓰면 아무런 근사 없이 $\mathrm{P}(|\bar{X}| \geq 0.23) \leq 0.003/0.23^2 \approx 0.057$을 얻는다. 이는 시사적이지만 결정적이지는 않은데, 이렇게 극단적인 결과가 약 6% 수준까지만 배제되기 때문이다. 중심극한정리는 훨씬 더 날카로운 수치를 주며, 꼬리가 $\mathrm{e}^{-x^2/2}$처럼 감소하는 분포에서 1000개의 관찰값을 얻었으므로 이 근사는 믿을 만하다.

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 2.506628\ldots = \sqrt{2\pi}$이고, $\int x^2 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 3.000$이다.
- 꼬리 확률 공식 $\mathrm{P}(|X| \geq a) = 2(a\phi(a) + \mathrm{P}(Z \geq a))$는 $a = 3$에서 수치적분 결과와 일치한다 (둘 다 0.029291).
- $|X|$는 서로 독립인 세 개의 $\mathrm{N}(0,1)$ 변수로 이루어진 벡터의 길이와 같은 밀도함수를 가진다. 이 방법으로 X를 모의실험하여 1000개 값의 평균을 내는 일을 4000번 반복했더니, 평균의 약 4.9%가 2 sd 밖에 있었는데 이는 정규분포의 예측값 4.6%에 가깝고, 0.23 밖에 있는 평균은 하나도 없었다.

흔한 실수

- 지수함수 부분이 표준정규분포처럼 생겼다고 해서 $\mathrm{Var}(X) = 1$로 두는 것. 추가된 x^2이 확률을 바깥쪽으로 밀어내므로 분산은 3이 된다.
- (ii)에서 정규분포 검정을 $\bar{X}$가 아니라 하나의 X에 적용하거나, 분산을 1000으로 나누는 것을 잊는 것.
- (i)에서 "관찰값 하나로는 아무것도 증명할 수 없다"고 주장하는 것. 결과가 이렇게 극단적이면 증명할 수 있다.

STEP 너머

이것은 가설검정(hypothesis testing)을 기본 원리에서부터 바라본 것이다. 대학 1학년 통계학 강의에서는 이를 p-값(p-value), 우도비(likelihood ratio) (네이만–피어슨 보조정리(Neyman–Pearson lemma)), 그리고 중심극한정리로 형식화한다. 덧붙여, $|X|$는 자유도(degrees of freedom)가 3인 카이 분포(chi distribution)를 따르는데, 이는 기체 분자의 속력에 대한 맥스웰–볼츠만 분포(Maxwell–Boltzmann distribution)이다. Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 여기서 사용한 극한 정리들을 다룬다.

풀이

STEP III 1995, 문제 1

순수수학 • 연립일차방정식

> **STEP III 1995, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q1

핵심 아이디어

두 번째와 세 번째 방정식은 y항과 z항이 같으므로, 한 식에서 다른 식을 빼면 미지수 두 개가 한꺼번에 사라지고 x에 대한 방정식 하나만 남는다. 이 문제의 대부분은 그 단계나 이후의 나눗셈이 성립하지 않게 되는 a, b의 값에 관한 것이다. 계수들의 행렬식(determinant)을 보면 그런 값이 어디에 있는지 미리 알 수 있으므로, 먼저 행렬식을 계산한 다음 각각의 예외적인 경우를 따로 다룬다.

풀이

방정식에 다음과 같이 번호를 붙인다.

$$a^2x + ay + z = a^2 \tag{1}$$

$$ax + y + bz = 1 \tag{2}$$

$$a^2bx + y + bz = b. \tag{3}$$

어디에서 문제가 생길 수 있는가?

계수행렬(coefficient matrix)의 행렬식을 첫 번째 행을 따라 전개하면

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2b & 1 & b \end{vmatrix} = a^2(b-b) - a(ab - a^2b^2) + (a - a^2b)$$

$$= a^3b^2 - 2a^2b + a = a(ab-1)^2.$$

따라서 $a = 0$이거나 $ab = 1$인 경우가 아니면 해는 정확히 하나이다. 그런 경우에는 해가 없거나 무수히 많으며, 어느 쪽인지 정하려면 방정식 자체를 살펴보아야 한다.

일반적인 경우: $a \neq 0$이고 $ab \neq 1$

(3)에서 (2)를 빼면 y와 z가 사라진다.

$$(a^2b - a)x = b - 1, \qquad \text{즉,} \qquad a(ab-1)\,x = b - 1.$$

$a \neq 0$이고 $ab \neq 1$이므로 양변을 나눌 수 있고, 그러면

$$x = \frac{1-b}{a(1-ab)}.$$

다음으로, (1)에서 $z = a^2 - a^2x - ay$를 얻는다. 이것을 (2)에 대입하면

$$ax + y + a^2b - a^2bx - aby = 1 \quad \Longrightarrow \quad (1-ab)\,y = (1-a^2b) - ax(1-ab).$$

$1 - ab \neq 0$으로 나누고 $ax = \dfrac{1-b}{1-ab}$를 이용하면

$$y = \frac{1-a^2b}{1-ab} - \frac{1-b}{1-ab} = \frac{b-a^2b}{1-ab} = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}.$$

마지막으로,

$$\begin{aligned} z = a^2 - a(ax) - ay &= a^2 - \frac{a(1-b)}{1-ab} - \frac{ab(1-a^2)}{1-ab} \\ &= \frac{a^2 - a^3b - a + ab - ab + a^3b}{1-ab} = \frac{a(a-1)}{1-ab}. \end{aligned}$$

그러므로 $a \neq 0$이고 $ab \neq 1$일 때 유일한 해는 다음과 같다.

$$\boxed{x = \frac{1-b}{a(1-ab)}, \qquad y = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}, \qquad z = \frac{a(a-1)}{1-ab}.}$$

$a = 0$인 경우

방정식은 다음과 같이 된다.

$$z = 0, \qquad y + bz = 1, \qquad y + bz = b,$$

따라서 $z = 0, y = 1$이고, 마지막 방정식은 $1 = b$임을 말해 준다. 그러므로

- $a = 0$이고 $b \neq 1$이면 **해가 없다**;
- $a = 0$이고 $b = 1$이면, 임의의 실수 λ에 대하여 $x = \lambda, y = 1, z = 0$이 해이다. x가 더 이상 어떤 방정식에도 나타나지 않으므로, 해는 하나의 직선을 이룬다.

$ab = 1$인 경우 (따라서 $a \neq 0$)

생각해 보기 $ab = 1$이면 방정식 $a(ab-1)x = b-1$의 좌변은 0이다. 이것은 무엇을 말해 주는가?

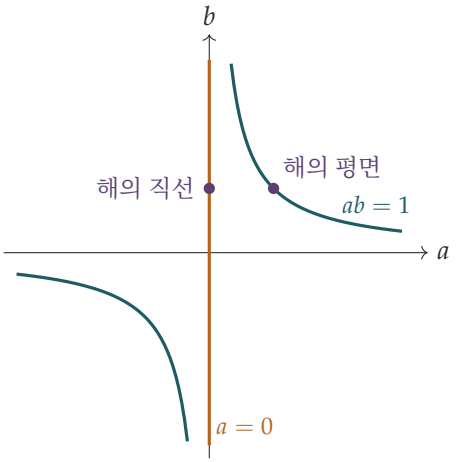
(3)에서 (2)를 빼는 것은 여전히 유효하며, 이제 그 결과는 $0 = b-1$이 된다. 따라서 $b \neq 1$이면 방정식들은 모순(inconsistent)이다. $ab = 1$일 때 조건 $b = 1$이면 반드시 $a = 1$이다. 그러므로

- $ab = 1$이고 $a \neq 1$이면 **해가 없다**;
- $a = b = 1$이면 세 방정식이 모두 $x + y + z = 1$이 되므로, 임의의 실수 λ, μ에 대하여 $x = \lambda, y = \mu, z = 1 - \lambda - \mu$가 해이다. 해는 평면 하나 전체를 이룬다.

이것은 행렬식에 제곱 인수 $(ab-1)^2$이 있다는 사실과 잘 맞아떨어진다. $a = b = 1$에서는 행렬의 계수(rank)가 1까지 떨어지므로 자유 매개변수가 두 개이고, $a = 0, b = 1$에서는 계수가 2이므로 자유 매개변수가 하나뿐이다.

요약

아래 그림은 (a, b)-평면을 나타낸다. 직선 $a = 0$과 쌍곡선(hyperbola) $ab = 1$ 밖에서는 해가 유일하다. 이 직선과 쌍곡선 위에서는 표시된 두 점을 제외하면 해가 없다.



- $a \neq 0, ab \neq 1$: 위의 상자 안에 있는 유일한 해.
- $a = 0, b = 1$: $(x, y, z) = (\lambda, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.
- $a = b = 1$: $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $a = 0$이고 $b \neq 1$, 또는 $ab = 1$이고 $a \neq 1$: 해가 없다.

검산

$a = 2, b = 3$으로 놓자. 공식에 따르면 $x = \frac{1}{5}, y = \frac{9}{5}, z = -\frac{2}{5}$이고, 실제로 $4 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{9}{5} - \frac{2}{5} = 4 = a^2$, $\frac{2}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 1$, $\frac{12}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 3 = b$이다. 또 하나의 간단한 확인은 $b = 1, a \neq 0, 1$인 경우이다. 이때 공식은 $x = 0, y = 1 + a, z = -a$를 주며, 이 값들은 세 방정식을 모두 만족한다. 또한 무작위로 고른 2000개의 순서쌍 (a, b)에 대하여 정확한 유리수 계산으로 행렬식과 일반 공식을 확인하였다.

흔한 실수

- $a = 0$과 $ab = 1$인 경우를 먼저 따로 떼어 놓지 않고 $a(ab - 1)$로 나누는 것. "가능한 모든 값에 대하여"라는 말은 특수한 경우들이 바로 이 문제의 핵심이라는 뜻이다.
- "행렬식이 0이므로 해가 없다"고 말하는 것. 행렬식이 0이라는 것은 **유일한** 해가 있을 가능성만 배제한다. 이 문제에서는 특수한 매개변수 값 가운데 두 경우에 해가 무수히 많다.
- $ab = 1$과 $b = 1$이 함께 성립하면 반드시 $a = 1$이 되어, 쌍곡선 위의 특수한 점은 단 하나뿐이라는 사실을 놓치는 것.

STEP 너머

이것은 행렬의 계수가 연립일차방정식을 어떻게 좌우하는지 보여 주는 작은 예이다. 연립방정식은 계수행렬과 첨가행렬(augmented matrix)의 계수가 같을 때, 그리고 그때에만 해를 가지며, 이때 해들은 차원이 3 − 계수인 집합을 이룬다. 그래서 우리는 한 점, 한 직선, 또는 한 평면을 얻은 것이다. 가우스(Gauss) 소거법(Gaussian elimination)을 쓰면 이 모든 것을 체계적으로 다룰 수 있으며, 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 많은 풀이 예제와 함께 이를 전개한다.

풀이

STEP III 1995, 문제 2

순수수학 • 점화 공식

STEP III 1995, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s3-q2

핵심 아이디어

인수 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{a-x}$는 모두 치환(substitution) $x = a\sin^2\theta$를 떠올리게 한다. 이 치환은 두 인수를 동시에 $\sqrt{a}\sin\theta$와 $\sqrt{a}\cos\theta$로 바꾸어 준다. (I_0에 대해서는 깔끔한 기하학적 지름길도 있다.) 점화식(reduction formula)을 얻으려면 x의 거듭제곱이 하나 줄어들도록 부분적분(integration by parts)을 한다. 그러면 $a-x$의 거듭제곱이 하나 늘어나는데, 이것을 다시 $a-x$를 이용해 쪼갠다. 그러면 I_n 자신이 다시 나타나므로 같은 항끼리 모을 수 있다.

전체에 걸쳐 $a > 0$이다.

풀이

I_0 구하기

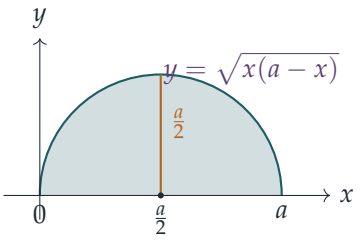
$\mathrm{I}_0 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$를 구해야 한다. $x = a\sin^2\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x = 2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$이다. x가 0에서 a까지 변할 때 θ는 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변하고, 이 범위에서 $\sin\theta, \cos\theta \geq 0$이다. 따라서 부호 문제 없이 $\sqrt{x} = \sqrt{a}\sin\theta$이고 $\sqrt{a-x} = \sqrt{a}\cos\theta$이다. 그러면

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_0 &= \int_0^{\pi/2} (\sqrt{a}\sin\theta)(\sqrt{a}\cos\theta)\,2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{8},\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 여기서 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$와 $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$를 이용했고, $\cos 4\theta$를 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 적분하면 0이 된다.

그림으로 보기. $y = \sqrt{x(a-x)}$라 하면 $y^2 = ax - x^2$이고, 이를 정리하면 $y \geq 0$인 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$이 된다. 따라서 I_0은 반지름이 $\frac{a}{2}$인 반원(semicircle)의 넓이, 즉 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$이

다.



점화식

$n \geq 1$이라 하자. $u = x^{n+\frac{1}{2}}$, $\mathrm{d}v = (a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$로 놓고 부분적분한다. 그러면 $\mathrm{d}u = \left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$이고 $v = -\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$이다. 이로부터

$$\mathrm{I}_n = \left[-\tfrac{2}{3}x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\right]_0^a + \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

를 얻는다. 경계항은 양 끝에서 모두 0이 된다. $x = a$에서는 인수 $(a-x)^{3/2}$ 때문이고, $x = 0$에서는 $x^{n+\frac{1}{2}}$ 때문이다. 또한 $\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{2n+1}{3}$임에 주목하자.

> ? **생각해 보기** 새로 생긴 적분에는 $(a-x)^{3/2}$이 들어 있어서 I_{n-1} 꼴이 아니다. 이것을 어떻게 처리할까?

$(a-x)^{3/2} = (a-x)\,(a-x)^{1/2}$로 쓰고 첫 번째 인수를 전개한다.

$$\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = a\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n.$$

따라서 3을 곱하고 I_n 항을 모으면$(3+2n+1 = 2n+4)$

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n+1}{3}\left(a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n\right) \quad\Longrightarrow\quad (2n+4)\,\mathrm{I}_n = (2n+1)\,a\,\mathrm{I}_{n-1},$$

이다. 이것이 구하려는 결과이다.

I_n 계산하기

$k = n, n-1, \ldots, 1$에 대해 $\mathrm{I}_k = \dfrac{(2k+1)a}{2k+4}\,\mathrm{I}_{k-1}$을 차례로 적용하여 I_0까지 내려가면

$$\mathrm{I}_n = a^n\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k+4)}\cdot\frac{\pi a^2}{8}.$$

을 얻는다. 이제 두 곱을 정리한다. 분자는 홀수들의 곱 $3\cdot 5\cdots(2n+1)$이다. 여기에 빠진 짝수들 $2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n!$을 채워 넣으면

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}.$$

이다. 분모는 $\prod_{k=1}^{n} 2(k+2) = 2^n \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+2) = 2^n \,\dfrac{(n+2)!}{2}$이다. 그러므로

$$\mathrm{I}_n = \frac{\pi a^{n+2}}{8} \cdot \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!} \cdot \frac{2}{2^n\,(n+2)!} = \boxed{\frac{\pi\, a^{n+2}\,(2n+1)!}{4^{n+1}\, n!\,(n+2)!}}$$

이 식은 $n = 0$일 때에도 올바른 값 $\frac{\pi a^2}{8}$을 준다.

검산

- $n = 1$: 점화식(recurrence)에서 $6\mathrm{I}_1 = 3a\mathrm{I}_0$이므로 $\mathrm{I}_1 = \frac{\pi a^3}{16}$이다. 공식에서는 $\pi a^3 \cdot 3!/(16 \cdot 1! \cdot 3!) = \frac{\pi a^3}{16}$이 나오므로 일치한다.
- 대칭성(symmetry): x를 $a - x$로 바꾸면 $\mathrm{I}_1 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$이기도 함을 알 수 있다. 두 표현을 더하면 $2\mathrm{I}_1 = a\mathrm{I}_0$이 되어, $\mathrm{I}_1 = \frac{\pi a^3}{16}$을 독립적으로 확인할 수 있다.
- $a = 1$로 두고 심프슨 공식(Simpson's rule)이나 중점 공식(midpoint rule)으로 수치 적분하면 $\mathrm{I}_0 \approx 0.392699 = \pi/8$이고 $\mathrm{I}_3 \approx 0.085903$이다. 공식에서는 $\pi \cdot 7!/(4^4 \cdot 3! \cdot 5!) = 35\pi/1280 \approx 0.085903$이 나온다.

흔한 실수

- v의 부호를 틀리는 것: 연쇄 법칙(chain rule)에서 나오는 마이너스 부호 때문에 $\int (a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$이다.
- 우변에 I_n이 다시 나타나 이를 모아야 한다는 것을 알아차리지 못하고, I_{n-1}에 직접 도달하려고 애쓰는 것.
- $3 \cdot 4 \cdots (n+2) = (n+2)!/2$에서 인수 2를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

이 적분들은 베타 함수(Beta function) $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$의 특수한 경우이다. $x = at$로 치환하면 $\mathrm{I}_n = a^{n+2}B\left(n+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$임을 알 수 있다. 우리가 증명한 점화식은 항등식 $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$의 한 경우이다. 대학 1학년 과정에서는 공식 $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$를 배우는데, 이 공식은 π가 어디에서 오는지 설명해 준다. 바로 감마 함수(Gamma function)의 값 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이런 형식의 점화식 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 1995, 문제 3

순수수학 • 감쇠 조화 운동

> **STEP III 1995, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q3

핵심 아이디어

$x = \mathrm{e}^{\lambda t}$를 시도해 보자. 그러면 미분방정식(differential equation)은 λ에 대한 이차방정식이 되고, 세 가지 경우는 그 판별식(discriminant)이 가질 수 있는 세 가지 가능성(서로 다른 두 실근, 중근, 복소근)에 불과하다. 감쇠(damped)가 있는 경우, 정류점(stationary point)은 반주기라는 같은 시간 간격마다 돌아오고, 그런 각 구간에서 진동하는 인수는 부호만 바뀌는 반면 지수 인수는 같은 비율로 줄어든다. 연이은 극값의 비가 일정한 이유가 바로 이것이다.

풀이

$x = \mathrm{e}^{\lambda t}$를 대입하면 특성방정식(auxiliary equation)

$$\lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0, \qquad \lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}$$

을 얻는다. 이하에서 A와 B는 임의의 상수이다.

소문항 (i): $k > 1$

근이 서로 다른 두 실근이므로

$$x = A\,\mathrm{e}^{(-k+\sqrt{k^2-1})\,t} + B\,\mathrm{e}^{(-k-\sqrt{k^2-1})\,t}$$

이다. ($\sqrt{k^2-1} < k$이므로 두 지수는 모두 음수이다. 이것이 진동이 없는 과감쇠(overdamping)이다.)

소문항 (ii): $k = 1$

특성방정식은 $(\lambda+1)^2 = 0$이고, 중근 $\lambda = -1$을 가진다. 두 번째 독립인 해는 $t\,\mathrm{e}^{-t}$이므로

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-t}$$

이다. (확인: $x = t\mathrm{e}^{-t}$이면 $x' = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$이고 $x'' = (t-2)\mathrm{e}^{-t}$이며, $(t-2) + 2(1-t) + t = 0$이다.)

소문항 (iii): $0 < k < 1$

이제 $k^2 - 1 < 0$이므로 근은 $\lambda = -k \pm \mathrm{i}\omega$이고, 여기서

$$\omega = \sqrt{1-k^2} > 0.$$

$\mathrm{e}^{(-k\pm\mathrm{i}\omega)t}$의 실수 결합을 취하면

$$x = \mathrm{e}^{-kt}\big(A\cos\omega t + B\sin\omega t\big).$$

연이은 극값

$x(0) = 0$이려면 $A = 0$이어야 하므로 $x = B\,\mathrm{e}^{-kt}\sin\omega t$이고, $B \neq 0$이다(그렇지 않으면 $x \equiv 0$이 되어 극대도 극소도 없다). 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,\mathrm{e}^{-kt}\big(\omega\cos\omega t - k\sin\omega t\big).$$

$k^2 + \omega^2 = 1$이므로 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$인 각으로 $k = \sin\varphi$, $\omega = \cos\varphi$라 쓸 수 있고, 그러면

$$\omega\cos\omega t - k\sin\omega t = \cos(\omega t + \varphi).$$

따라서 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,\mathrm{e}^{-kt}\cos(\omega t + \varphi)$이고, 이는 $\omega t + \varphi$가 $\frac{\pi}{2}$의 홀수 배일 때 정확히 0이 되며, 그러한 각 시각에서 부호가 바뀐다. 그러므로 ($t > 0$에서의) 정류점은

$$t_n = t_1 + \frac{(n-1)\pi}{\omega}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

에 있고, π/ω의 같은 간격으로 놓여 있다. 또한 각 정류점에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$의 부호가 바뀌므로 이들은 실제로 극대(maximum)와 극소(minimum)가 번갈아 나타나는 점이다.

? **생각해 보기** t_1을 명시적으로 구하지 않고 $x(t_{n+1})$을 $x(t_n)$과 어떻게 비교할 수 있을까?

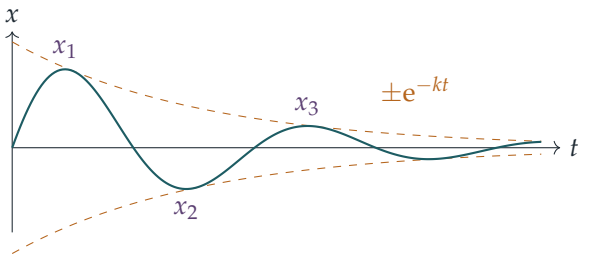
시간을 π/ω만큼 진행하면 ωt에 π가 더해지고, $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$이다. 따라서

$$x_{n+1} = B\,\mathrm{e}^{-k(t_n+\pi/\omega)}\sin(\omega t_n + \pi) = -\,\mathrm{e}^{-k\pi/\omega}\,B\,\mathrm{e}^{-kt_n}\sin\omega t_n = -\,\mathrm{e}^{-k\pi/\omega}\,x_n.$$

또한 $x_n \neq 0$이다. $\sin \omega t_n = 0$이면 $\cos \omega t_n = \pm 1$이어야 하고, 그러면 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \pm B\omega \, \mathrm{e}^{-kt_n} \neq 0$이 되기 때문이다. 그러므로

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \alpha, \qquad \text{여기서} \alpha = \mathrm{e}^{-k\pi/\omega} = \exp\left(-\frac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}} \right),$$

이고, 이는 요구한 대로 n에 의존하지 않는다. (음의 부호는 극대와 극소가 번갈아 나타남을 확인해 준다.)



k^2에 대한 공식

로그를 취하면 $\ln \alpha = -\dfrac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}$이므로

$$(\ln \alpha)^2 = \frac{k^2\pi^2}{1-k^2} \implies (\ln \alpha)^2 - k^2(\ln \alpha)^2 = k^2\pi^2 \implies k^2 = \frac{(\ln \alpha)^2}{\pi^2 + (\ln \alpha)^2},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $k \to 0$(감쇠 없음)일 때 $\alpha \to 1$이고 $\ln \alpha \to 0$이므로, 공식은 마땅히 그래야 하듯 $k^2 \to 0$을 준다. 이때 극값은 모두 같은 크기를 가진다.
- $k \to 1^-$일 때 $\alpha \to 0$이고 $(\ln \alpha)^2 \to \infty$이므로 $k^2 \to 1$이다. 임계 감쇠(critical damping)에서는 운동이 더 이상 되돌아오지 않는다.
- 수치적으로, $k = 0.5$이고 $x(0) = 0$일 때 방정식을 단계별로 진행시켜 보면 연이은 극값의 비가 0.163034로 나오며, 이는 $\mathrm{e}^{-0.5\pi/\sqrt{0.75}} \approx 0.163034$와 일치한다. 그리고 $(\ln \alpha)^2/(\pi^2 + (\ln \alpha)^2) = 0.25 = k^2$이다.

흔한 실수

- 극대와 그다음 극소 사이의 시간을 반주기 π/ω가 아니라 한 주기 전체 $2\pi/\omega$로 잡는 실수. 이렇게 하면 α 대신 α^2을 얻게 된다.

▶ 극값이 $\sin \omega t = \pm 1$인 곳에서 생긴다고 생각하는 실수. 그렇지 않다. 감쇠하는 인수 때문에 극값은 더 이른 시각, 즉 $\tan \omega t = \omega / k$인 곳으로 옮겨진다. 위의 논증은 극값의 정확한 위치는 전혀 필요로 하지 않고, 그 간격만 필요로 한다.

STEP 너머

양 $-\ln \alpha$를 **대수 감쇠율**(logarithmic decrement)이라 한다. 공학자들은 기록된 진동으로부터 이 값을 측정하고, 이 문제의 공식은 그것을 감쇠 k로 바꾸어 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 과감쇠, 임계 감쇠, 부족 감쇠(underdamping)를 자세히 다룬다.

풀이

STEP III 1995, 문제 4

순수수학 • 삼각급수의 합

> **STEP III 1995, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q4

핵심 아이디어

코사인의 합은 복소지수(complex exponential)의 합의 실수부(real part)이고, $\sum e^{ik\theta}$는 등비급수(geometric series)이다. 이 급수를 합한 뒤 분자와 분모에서 "반각(half-angle)" 인수 $e^{i\theta/2}$를 묶어 내면 다루기 불편한 $e^{in\theta}-1$ 꼴의 항들이 사인으로 바뀌는데, 분모의 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$는 바로 여기에서 나온다. 부등식에서는 $C_n(\theta)$를 $\frac{1}{2}$이 눈에 보이게 떨어져 나오도록 고쳐 쓰는 것이 요령이다.

풀이

합 C_n과 S_n

$z=e^{i\theta}$로 놓는다. $0<\theta<2\pi$이므로 $z\neq 1$이고, 따라서 등비급수의 합 공식을 쓸 수 있다.

$$C_n(\theta)+iS_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}=\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}.$$

이제 분자에는 ($\phi=(n+1)\theta$로 놓고) 분모에는 ($\phi=\theta$로 놓고) $e^{i\phi}-1=e^{i\phi/2}\bigl(e^{i\phi/2}-e^{-i\phi/2}\bigr)=2i\,e^{i\phi/2}\sin(\frac{1}{2}\phi)$를 적용하면 다음을 얻는다.

$$C_n(\theta)+iS_n(\theta)=\frac{2i\,e^{i(n+1)\theta/2}\sin\bigl(\frac{1}{2}(n+1)\theta\bigr)}{2i\,e^{i\theta/2}\sin(\frac{1}{2}\theta)}=e^{in\theta/2}\,\frac{\sin\bigl(\frac{1}{2}(n+1)\theta\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

$0<\frac{1}{2}\theta<\pi$이므로 분모는 0이 아니다. 분수 부분은 실수이므로 ($e^{in\theta/2}=\cos\frac{1}{2}n\theta+i\sin\frac{1}{2}n\theta$를 이용하여) 실수부와 허수부(imaginary part)를 비교하면

$$C_n(\theta)=\frac{\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin\bigl(\frac{1}{2}(n+1)\theta\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)},\qquad S_n(\theta)=\frac{\sin(\frac{1}{2}n\theta)\sin\bigl(\frac{1}{2}(n+1)\theta\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

첫 번째 식이 구하려던 결과이고, 두 번째 식은 이에 대응하는 S_n의 식이다.

생각해 보기 복소수를 쓰지 않고 이 결과를 알아낼 방법이 있을까?

있다. 각 항에 $2\sin(\frac{1}{2}\theta)$를 곱하고 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\cos k\theta = \sin\big((k+\tfrac{1}{2})\theta\big) - \sin\big((k-\tfrac{1}{2})\theta\big)$$

를 쓰면 된다. $k=0$부터 n까지 더하면 마지막 항과 첫 항을 제외한 모든 항이 연쇄적으로 소거(telescoping)된다.

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\,C_n(\theta) = \sin\big((n+\tfrac{1}{2})\theta\big) - \sin(-\tfrac{1}{2}\theta) = \sin\big((n+\tfrac{1}{2})\theta\big) + \sin(\tfrac{1}{2}\theta). \qquad (*)$$

합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula) $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$에 $A=(n+\frac{1}{2})\theta$, $B=\frac{1}{2}\theta$를 대입하면 우변은 $2\sin\big(\frac{1}{2}(n+1)\theta\big)\cos(\frac{1}{2}n\theta)$가 되어, 앞에서 구한 결과와 일치한다.

부등식

식 $(*)$가 바로 우리가 원하는 꼴이다. 양변을 $2\sin(\frac{1}{2}\theta) \neq 0$으로 나누면

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})\theta\big)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

(주어진 공식에서 출발하는 경우에는 $2\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin\big(\frac{1}{2}(n+1)\theta\big) = \sin\big((n+\frac{1}{2})\theta\big) + \sin(\frac{1}{2}\theta)$를 이용하면 같은 식을 얻는다.) 따라서

$$\Big|C_n(\theta) - \frac{1}{2}\Big| = \frac{\big|\sin\big((n+\frac{1}{2})\theta\big)\big|}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)} \leq \frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}$$

이다. 여기서 $0 < \theta < 2\pi$일 때 $\sin(\frac{1}{2}\theta) > 0$이라는 사실(그래서 분모에는 절댓값(modulus)이 필요 없다)과 $|\sin x| \leq 1$을 이용하였다. 이것이 구하려던 부등식이며, 등호는 정확히 $\sin\big((n+\frac{1}{2})\theta\big) = \pm 1$일 때 성립한다.

생각해 보기 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$가 양수라는 사실은 왜 중요한가?

만약 θ가 $(0, 2\pi)$ 밖의 값을 가질 수 있다면 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$가 음수가 될 수 있고, 그러면 부등식의 우변이 음수가 되는데, 이는 절댓값에 대해서는 불가능하다. 주어진 범위에서는 $\frac{1}{2}\theta \in (0, \pi)$이므로 이 상한은 진짜 양수이다.

검산

- $n=1$: $C_1 = 1+\cos\theta = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$이고, 공식은 $\cos(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta) = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$를 준다. 마찬가지로 $S_1 = \sin\theta$는 $\sin(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta)$와 일치한다.

- $\theta \to 0$일 때 C_n의 공식은 $(n+1)$로 수렴(converge)하는데, 이는 1을 $n+1$개 더한 값이다. 상한 $1/(2\sin\frac{1}{2}\theta)$는 당연히 발산한다.
- 수치로 확인해 보면, $n=3, \theta=1$일 때 직접 더한 값은 $C_3(1) \approx 0.1342$로 공식과 일치하고, $|C_3 - \frac{1}{2}| \approx 0.366 \leq 1/(2\sin\frac{1}{2}) \approx 1.043$이다. 등호는 예를 들어 $n=2, \theta=\pi/5$일 때 성립하며, 이때 양변은 모두 1.618…이다.

흔한 실수

- 합이 $k=0$부터 시작하므로 항이 $n+1$개라는 사실을 잊는 것: 등비급수의 분자에는 $e^{in\theta}$가 아니라 $e^{i(n+1)\theta}$가 온다.
- 분모를 먼저 실수로 만들지 않고 $\left(e^{i(n+1)\theta}-1\right)/\left(e^{i\theta}-1\right)$의 실수부를 구하려는 것: 반각을 이용한 인수분해가 이 일을 깔끔하게 해 준다.
- $|\sin(\frac{1}{2}\theta)|$라고 써 놓고 그것이 왜 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$와 같은지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

함수 $C_n(\theta) - \frac{1}{2} = \sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)/\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$는 상수배를 제외하면 **디리클레 핵**(*Dirichlet kernel*)으로, 푸리에 급수(Fourier series) 이론의 중심 대상이다. 어떤 함수의 n번째 푸리에 부분합(partial sum)은 이 핵에 대한 그 함수의 평균이다. 여기서 증명한 상한은 분자의 진동과 함께, 푸리에 급수가 언제 수렴하는지를 증명하는 출발점이 된다(또한 $\sum\cos(k\theta)/k$ 같은 급수에 대한 디리클레(Dirichlet) 판정법(Dirichlet's test)의 출발점이기도 하다). Abbott의 *Understanding Analysis*에는 바로 이 합들을 사용하는, 읽기 쉬운 푸리에 급수 장이 있다.

풀이

STEP III 1995, 문제 5

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 1995, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q5

핵심 아이디어

$\theta = \sin^{-1} x$로 두면 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = 1/\sqrt{1-x^2}$이다. $y^{(1)}$에 $\sqrt{1-x^2}$를 곱하면 이 성가신 인수가 상쇄되고, 한 번 더 미분하면 제곱근이 전혀 없는 2계 미분방정식(second-order differential equation)을 얻는다. 그다음 라이프니츠(Leibniz) 규칙으로 이 방정식을 점화식(recurrence)으로 바꾸면, $x = 0$에서 인수 $1 - x^2$는 1이 되고 x가 들어 있는 항은 사라진다. 그러면 점화식이 0에서의 모든 도함수 값을 알려 준다.

풀이

미분방정식

$\theta = \sin^{-1} x$라 하면 $\sin\theta = x$이고, $|x| < 1$일 때 $\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$이며 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$이다. 그러면 $y = \sin^2 m\theta$이고, 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$y^{(1)} = 2m \sin m\theta \cos m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m \sin 2m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{1-x^2}\, y^{(1)} = m \sin 2m\theta.$$

이 식을 x에 대하여 미분하되, 좌변에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다:

$$\sqrt{1-x^2}\, y^{(2)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, y^{(1)} = 2m^2 \cos 2m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

양변에 $\sqrt{1-x^2}$를 곱하고 $\cos 2m\theta = 1 - 2\sin^2 m\theta = 1 - 2y$를 이용하면

$$(1-x^2)\, y^{(2)} = x\, y^{(1)} + 2m^2(1-2y),$$

이것이 구하는 방정식이다.

? **생각해 보기** 왜 $\sqrt{1-x^2}\,y^{(1)} = m\sin 2m\theta$를 먼저 제곱하지 않는가?

제곱하면 $(1-x^2)\big(y^{(1)}\big)^2 = 4m^2y(1-y)$가 되고, 이를 미분하면 모든 항에 인수 $2y^{(1)}$가 남는다. 그러면 $y^{(1)}$로 나누어야 하는데, 이 값은 나중에 우리가 관심을 두는 바로 그 점인 $x=0$에서 0이다. 제곱하기 전에 미분하면 나눗셈을 아예 피할 수 있다.

점화식

$n \geq 1$에 대하여 라이프니츠 규칙을 써서 방정식을 n번 미분한다. $1-x^2$는 0이 아닌 도함수가 두 개($-2x$와 -2)뿐이고 x는 하나뿐이므로

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)y^{(2)}\right] &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)},\\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\,y^{(1)}\right] &= x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)},\\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[2m^2(1-2y)\right] &= -4m^2\,y^{(n)}.\end{aligned}$$

마지막 줄은 $n \geq 1$이어야 성립하는데, 그래야만 상수 $2m^2$가 미분되어 0이 되기 때문이다. 양변을 같게 놓으면

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)} - 4m^2y^{(n)},$$

이고, 항을 정리하면($xy^{(n+1)}$가 $2n+1$개, 그리고 $n(n-1)+n = n^2$)

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} = (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + (n^2-4m^2)\,y^{(n)} \qquad (n \geq 1),$$

이 되어 구하는 점화식을 얻는다.

매클로린 급수

$x=0$에서 $\theta = 0$이므로

$$y(0) = \sin^2 0 = 0, \qquad y^{(1)}(0) = m\sin 0 = 0, \qquad y^{(2)}(0) = 0 + 2m^2(1-0) = 2m^2,$$

이며, 마지막 값은 미분방정식에서 얻는다. 점화식에 $x=0$을 대입하면

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2-4m^2)\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 1).$$

홀수 번째 도함수. $y^{(1)}(0) = 0$이므로 점화식에 의해 $y^{(3)}(0) = 0$, 이어서 $y^{(5)}(0) = 0$이고, 이와 같이 계속된다. 즉 모든 홀수 번째 도함수는 0에서 값이 0이다. y가 x에 대한 우함수(even function)이므로 이는 당연하다.

짝수 번째 도함수. $n = 2j$로 두면

$$y^{(2j+2)}(0) = (4j^2-4m^2)\,y^{(2j)}(0) = -4(m^2-j^2)\,y^{(2j)}(0) \qquad (j \geq 1).$$

$y^{(2)}(0) = 2m^2$에서 시작하여 $j = 1, 2, \ldots, k-1$에 대해 이 식을 차례로 적용하면

$$y^{(2k)}(0) = 2m^2 \prod_{j=1}^{k-1} \left(-4(m^2 - j^2)\right) = (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \prod_{j=0}^{k-1} (m^2 - j^2),$$

이고, 여기서 맨 앞의 m^2를 $j = 0$인 인수로 흡수하였다. ($k = 1$이면 이 공식은 마땅히 $2m^2$를 준다.)

따라서 매클로린 급수(Maclaurin series)는

$$y = \sin^2\left(m \sin^{-1} x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1}}{(2k)!} m^2 (m^2 - 1^2)(m^2 - 2^2) \cdots \left(m^2 - (k-1)^2\right) x^{2k},$$

이고, 처음 몇 항은

$$y = m^2 x^2 - \frac{m^2(m^2-1)}{3} x^4 + \frac{2m^2(m^2-1)(m^2-4)}{45} x^6 - \cdots.$$

m이 정수이면 $k > |m|$인 모든 항이 인수 $m^2 - m^2 = 0$을 포함하므로 급수가 끝나고, y는 $2|m|$차 다항식이 된다.

검산

- $m = 1$: $y = \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2$이고, 급수도 x^2 다음에는 0만 나온다. $m = 2$: 급수는 $4x^2 - 4x^4$를 주며, 실제로 $\sin^2 2\theta = 4 \sin^2\theta (1 - \sin^2\theta) = 4x^2 - 4x^4$이다.
- $m = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$: $y = \sin^2(\pi/12) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0.066987$이다. 급수는 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^6 + \cdots$이고, 처음 세 항의 합은 0.066895이며, 항을 더할수록 차이가 줄어든다.
- 임의의 x와 m에서 미분방정식이 성립하는지, 급수의 계수가 이 방정식을 정확히 만족하는지, 그리고 $|x| \le 0.8$에서 급수(300항까지)가 y와 약 10^{-15} 이내로 일치하는지를 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- $n = 0$일 때 점화식을 쓰는 것. 점화식은 $n \ge 1$일 때만 성립하는데, $n = 0$이면 상수 $2m^2$가 살아남기 때문이다. $n = 0$인 경우는 원래 방정식이며, 우리는 바로 이것으로 $y^{(2)}(0) = 2m^2$를 얻었다.
- 라이프니츠 계수를 틀리는 것: 항 $-n(n-1)y^{(n)}$은 $\binom{n}{2} \cdot (-2x)$가 아니라 $\binom{n}{2} \cdot (-2)$에서 나온다.
- 일반항을 쓸 때 교대 부호를 빠뜨리는 것. 각 단계에서 $4(j^2 - m^2)$를 곱하는데, 이는 $m^2 > j^2$일 때 음수이다.

STEP 너머

도함수로 만든 매클로린 급수가 원래 함수와 같지 않을 수도 있지만, 여기서는 $|x| < 1$에서 같다. 이 급수의 수렴반지름(radius of convergence)은 1이고(m이 정수가 아닐 때 비율 판정법(ratio test)으로 확인된다), $\sin^{-1} x$는 $x = \pm 1$에서 더 이상 좋은 성질을 갖지 않는다. 정수 m에 대해 얻는 다항식들은 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomials)의 친척인데, $\cos 2m\theta$가 $\sin\theta$에 대한 다항식이기 때문이다. 이러한 급수가 왜 실제로 원래 함수로 수렴하는지 알고 싶다면 Abbott의 *Understanding Analysis*에서 나머지항이 있는 테일러 정리(Taylor's theorem with remainder)를 읽어 보라. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 수렴반지름이 왜 ± 1에서의 문제로 정해지는지 설명한다.

풀이

STEP III 1995, 문제 6

순수수학 • 자취와 반전

> **STEP III 1995, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q6

핵심 아이디어

원 $|z-\mathrm{i}|=1$은 원점을 지나므로, 극형식(polar form)으로 나타낸 방정식이 특히 간단하다. 즉 절댓값(modulus)이 편각(argument)의 삼각함수 하나로 표현된다. z를 절댓값–편각 형식으로 나타내고 나면 $1/z$는 곧바로 얻어지며(절댓값의 역수(reciprocal)를 취하고 편각의 부호를 바꾸면 된다), 이를 직교 형식(Cartesian form)으로 쓰면 원이 직선이 되었음을 알 수 있다. 마지막 부분은 같은 현상을 거꾸로 따라가는 것이며, $w=x+\mathrm{i}y$로 놓고 직접 계산하는 것이 가장 빠르다.

풀이

z의 절댓값

$r>0$에 대하여 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$라 하자. 그러면 $z-\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}(r\sin\theta-1)$이므로

$$\begin{aligned}|z-\mathrm{i}|^2=1 &\iff r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1=1\\ &\iff r^2-2r\sin\theta=0\\ &\iff r=2\sin\theta,\end{aligned}$$

이다. 마지막 단계에서는 r로 나누었는데, $z\neq 0$이므로 이는 허용된다. 따라서

$$|z|=2\sin\theta.$$

$r>0$이므로 $\sin\theta>0$이어야 하고, 따라서 $0<\theta<\pi$이다. 즉 (중심이 i이고 반지름이 1인) 원은 상반평면(upper half-plane)에 놓여 있으며 실수축과는 원점에서만 접하는데, 원점은 제외된다. 역으로 모든 $\theta\in(0,\pi)$는 원 위의 점 $z=2\sin\theta\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$를 주므로, θ가 $(0,\pi)$ 전체를 움직일 때 z는 원점을 제외한 원 전체를 그린다.

생각해 보기 그림에서 $|z| = 2\sin\theta$가 "당연한" 이유는 무엇인가?

0에서 2i까지의 선분은 원의 지름(diameter)이다. 반원에 대한 원주각(angle in a semicircle)의 성질에 의해 세 꼭짓점이 $0, z, 2\mathrm{i}$인 삼각형은 z에서 직각이고, 0에서의 각은 $\frac{\pi}{2} - \theta$이다. 따라서 $|z| = 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\sin\theta$이다.

$1/z$의 절댓값과 편각

$z = 2\sin\theta\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$이므로

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sin\theta}\big(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)\big),$$

이고, 따라서

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\theta.$$

$0 < \theta < \pi$이므로 각 $-\theta$는 $(-\pi, 0)$에 속하고, 따라서 이것이 주편각(principal argument)이다.

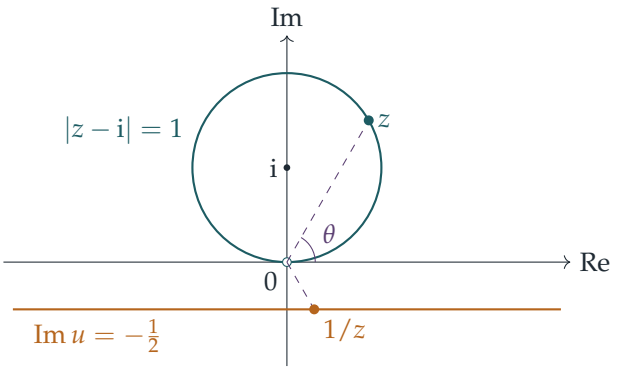
자취

$1/z$가 그리는 자취(locus)를 알아보기 위해 직교 형식으로 바꾸면

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{2\sin\theta} = \tfrac{1}{2}\cot\theta - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

허수부는 항상 $-\frac{1}{2}$이고, θ가 $(0, \pi)$ 전체를 움직일 때 실수부 $\frac{1}{2}\cot\theta$는 모든 실숫값을 정확히 한 번씩 취한다($+\infty$에서 $-\infty$까지 감소한다). 따라서 $1/z$는 직선 $\mathrm{Im}\,u = -\frac{1}{2}$ **전체**를 그린다.

정리하면 z는 중심이 i이고 반지름이 1인 원(원점 제외) 위에 있고, $1/z$는 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$를 지나는 수평선 위에 있다. 아래 그림은 두 자취와 함께 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때의 두 점을 보여 준다. 이때 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$이고 $1/z = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$이다. 두 점은 각각 각 θ와 $-\theta$의 반직선 위에 있으며, 0으로부터의 두 거리를 곱하면 1이다. z가 원점에 가까워지면 $1/z$는 직선을 따라 무한히 멀어지고, 원의 꼭대기 $z = 2\mathrm{i}$는 직선 위에서 원점에 가장 가까운 점 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$로 옮겨진다.



자취 C

$w=x+\mathrm{i}y\neq 0$이라 하자($1/w$가 존재하려면 $w\neq 0$이어야 한다). 그러면

$$\frac{1}{w}=\frac{\bar{w}}{|w|^2}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2},\qquad \text{따라서}\qquad \mathrm{Re}\,\frac{1}{w}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

그러므로 $w\neq 0$일 때

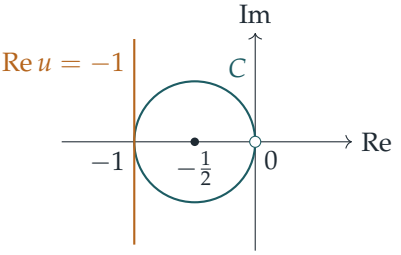
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\frac{1}{w}=-1 &\iff x=-(x^2+y^2)\\ &\iff x^2+x+y^2=0\\ &\iff \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

모든 단계는 거꾸로 갈 수 있으므로(0이 아닌 x^2+y^2를 곱했다), 이것은 진정한 "필요충분조건"이다. 따라서 C는 원

$$\left|w+\tfrac{1}{2}\right|=\tfrac{1}{2},$$

즉 중심이 $-\frac{1}{2}$이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원에서 **원점을 제외한 것**이다. 원점은 이 원 위에 있지만, 그곳에서 $1/w$가 정의되지 않으므로 C에 속하지 않는다.

이는 앞부분과 짝을 이룬다. 앞에서는 0을 지나는 원이 $z\mapsto 1/z$에 의해 0을 지나지 않는 직선으로 옮겨졌고, 여기서는 직선 $\mathrm{Re}\,u=-1$이 같은 사상(이 사상은 자기 자신의 역사상이다)에 의해 0을 지나는 원으로 옮겨진다.



검산

- $\theta = \frac{\pi}{6}$으로 놓으면 $|z| = 1$이고 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$이며, 실제로 $|z - \mathrm{i}| = |\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}| = 1$이다. 이 수의 역수는 켤레복소수(conjugate) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \approx 0.866 - 0.5\mathrm{i}$이고, 예측한 대로 허수부가 $-\frac{1}{2}$이다.
- $\theta = \frac{\pi}{2}$이면 원의 꼭대기 $z = 2\mathrm{i}$를 얻고, $1/z = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$이다.
- C의 경우: $w = -1$은 원 위에 있고 $1/w = -1$이다. $w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$는 원 위에 있고 $1/w = -1 - \mathrm{i}$이며, 실수부는 -1이다.

각 자취 위의 임의의 점 10 000개로 수치 검사를 하여 세 결과를 모두 확인하였다.

흔한 실수

- 범위 $0 < \theta < \pi$를 빠뜨리는 것. 식 $|z| = 2\sin\theta$는 $\sin\theta > 0$인 곳에서만 의미가 있다.
- $1/z$의 자취를 반직선이나 선분으로 기술하는 것. $\cot\theta$는 $(0, \pi)$에서 모든 실숫값을 취하므로 자취는 직선 전체이다.
- 원점을 C에 포함하는 것. 원점은 원의 방정식을 만족하지만 그곳에서 $1/w$는 존재하지 않는다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto 1/z$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation) $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$의 한 예이다. 이 사상들에 관한 핵심적인 사실은 이들이 "일반화된 원(generalised circle)"(원과 직선)을 일반화된 원으로 옮긴다는 것이며, $1/z$가 직선으로 옮기는 원은 정확히 원점을 지나는 원들이다. 이것은 리만(Riemann) 구(Riemann sphere)의 기하학의 출발점이며, 리만 구 위에서 직선은 무한원점을 지나는 원일 뿐이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 모든 내용을 그림과 함께 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 1995, 문제 7

순수수학 • 군과 동형사상

> **STEP III 1995, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q7

핵심 아이디어

결합법칙(associativity)은 주어져 있으므로, 각 집합에 대해 확인할 것은 세 가지뿐이다. 닫혀 있음(closure), 항등원(identity)의 존재, 그리고 모든 원소의 역원(inverse)의 존재이다. 이 중 하나라도 깨지면 그 집합은 군(group)이 아니며, 구체적인 반례(counterexample) 하나면 충분하다. 동형사상(isomorphism)에 대해서는 모든 동형사상이 보존해야 하는 구조적 특징, 즉 원소의 개수와 원소들의 위수(order)를 살펴본다.

풀이

이 풀이 전체에서 "곱셈"은 상황에 따라 복소수의 보통 곱셈, 법 n에 대한 곱셈, 또는 행렬 곱셈을 뜻한다.

소문항 (i)

$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$이라 하자.

- **닫혀 있음:** $|z| = |w| = 1$이면 $|zw| = |z||w| = 1$이다.
- **항등원:** $1 \in S$이고 $1z = z1 = z$이다.
- **역원:** $|z| = 1$이면 $z \neq 0$이고, ($z\bar{z} = |z|^2 = 1$이므로) $z^{-1} = \bar{z}$이며, 이것의 절댓값도 1이다.

따라서 S는 (무한) 군이다.

소문항 (ii)

법 4에 대한 곱셈에서 집합 $\{0,1,2,3\}$은 닫혀 있고 항등원 1을 가지지만, 모든 b에 대해 $0 \times b \equiv 0 \not\equiv 1$이므로 0은 역원을 갖지 않는다. 따라서 이 집합은 군이 **아니다**. (0을 빼도 소용이 없다. $2b$는 항상 짝수이므로 2는 여전히 역원을 갖지 않으며, 사실 $2 \times 2 \equiv 0$이므로 $\{1,2,3\}$은 닫혀 있지조차 않다.)

소문항 (iii)

덧셈정리(compound-angle formulae)를 이용하면

$$\mathrm{M}(\alpha)\mathrm{M}(\beta) = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta & -(s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta) \\ s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta \end{pmatrix} = \mathrm{M}(\alpha+\beta),$$

이다. 여기서 $c_\alpha = \cos\alpha$, $s_\alpha = \sin\alpha$ 등으로 썼다. cos와 sin의 주기(period)는 2π이므로, γ를 $\alpha+\beta$를 $[0,2\pi)$ 안으로 줄인 값이라 하면 $\mathrm{M}(\alpha+\beta) = \mathrm{M}(\gamma)$이다. 따라서 다음이 성립한다.

- **닫혀 있음**: 집합에 속한 두 행렬의 곱은 다시 이 집합에 속한다.
- **항등원**: $\mathrm{M}(0) = I$이다.
- **역원**: $0 < \theta < 2\pi$에 대해 $\mathrm{M}(\theta)\mathrm{M}(2\pi-\theta) = \mathrm{M}(2\pi) = I$이고, $\mathrm{M}(0)$은 자기 자신이 역원이다.

따라서 이 집합은 군이다.

소문항 (iv)

법 8에 대하여

$$3^2 = 9 \equiv 1, \qquad 5^2 = 25 \equiv 1, \qquad 7^2 = 49 \equiv 1,$$
$$3 \times 5 = 15 \equiv 7, \qquad 3 \times 7 = 21 \equiv 5, \qquad 5 \times 7 = 35 \equiv 3.$$

이다. 1이 포함된 자명한 곱까지 더하면 곱셈표 전체가 얻어지고(곱셈은 가환(commutative)이다), 모든 곱이 $\{1,3,5,7\}$에 속하므로 이 집합은 닫혀 있다. 항등원은 1이고, 각 원소는 자기 자신이 역원이다. 따라서 이것은 위수가 4인 군이며, 1이 아닌 모든 원소의 위수는 2이다.

소문항 (v)

단위행렬 I는 정수 성분을 가지고, 이 집합은 닫혀 있지만(정수의 곱과 합은 정수이다) 역원 조건이 성립하지 않는다. 영행렬은 아예 역행렬을 갖지 않는다. 가역인 행렬이라도 문제가

될 수 있다. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$는 실수 행렬에서 역행렬 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$를 가지며, 역행렬은 유일하므로 A는 정수 성분의 역행렬을 갖지 않는다. 따라서 이 집합은 군이 아니다.

> **생각해 보기** 영행렬을 지목하는 것만으로 정말 충분할까, 아니면 모든 행렬에 대해 무언가를 말해야 할까?

집합이 군이 아님을 보이려면 역원이 없는 원소 하나면 충분하다. 두 번째 예는 문제가 특이 행렬(singular matrix)보다 더 깊은 곳에 있음을 보여 준다. 정수 행렬이 정수 역행렬을 가질 필요충분조건은 행렬식(determinant)이 ± 1인 것이다. 두 행렬식이 모두 정수이면서 $\det A \det A^{-1} = 1$이기 때문이다. 이런 행렬들로 제한하면 실제로 군이 된다.

소문항 (vi)

법 5에 대하여 2의 거듭제곱은

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8 \equiv 3, \quad 2^4 = 16 \equiv 1.$$

이다. 따라서 $\{1,2,3,4\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$이고, 지수를 법 4로 읽으면 $2^a 2^b = 2^{a+b}$이다. 그러므로 이 집합은 닫혀 있고, 1이 항등원이며, 2^a의 역원은 2^{4-a}이다. 이것은 군이며, 2(또는 3)로 생성되는 위수 4의 순환군(cyclic group)이다.

동형사상

군인 것은 (i), (iii), (iv), (vi)이므로 짝은 여섯 개이다.

(i)과 (iii)은 동형이다. 절댓값이 1인 모든 복소수는 $0 \le \theta < 2\pi$인 $e^{i\theta}$ 꼴로 유일하게 쓸 수 있다. $\phi(e^{i\theta}) = M(\theta)$로 정의하자. $[0, 2\pi)$ 안의 서로 다른 θ는 서로 다른 행렬을 주므로(첫째 열 $(\cos\theta, \sin\theta)$가 θ를 결정한다) 이것은 전단사(bijection)이다. 또한 곱셈을 보존한다. $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$이고 $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha+\beta)$이며, 두 군 모두에서 각은 법 2π로 줄인다. 기하학적으로 두 군은 모두 원점을 중심으로 한 평면의 회전들이다.

(i) 또는 (iii)과 (iv) 또는 (vi): 동형이 아니다. 동형사상은 전단사이므로 두 군의 원소 개수가 같아야 한다. 군 (i)과 (iii)은 무한군이고, (iv)와 (vi)는 각각 원소가 네 개이다. 이것으로 네 짝이 해결된다.

> **생각해 보기** (iv)와 (vi)는 둘 다 원소가 네 개이고 둘 다 가환이다. 무엇으로 이 둘을 구별할 수 있을까?

(iv)와 (vi): 동형이 아니다. 동형사상 ϕ는 모든 원소의 위수를 보존한다. $\phi(g)^n = \phi(g^n)$이고, ϕ는 단사(injective)이며 항등원을 항등원으로 보내므로, 이것이 항등원일 필요충분조건은 g^n이 항등원인 것이다. (vi)에서 원소 2의 위수는 4이다. (iv)에서는 모든 원소 g가 $g^2 = 1$을 만족하므로 위수가 4인 원소가 없다. 따라서 동형사상은 존재하지 않는다.

정리하면, 동형인 짝은 (i)과 (iii)뿐이다.

검산

컴퓨터로 곱셈표 전체를 직접 조사하여 (iv)와 (vi)의 닫혀 있음, 항등원, 역원 성질을 확인했다. 그 결과 법 4에서 0과 2는 역원을 갖지 않고, 원소들의 위수는 (iv)에서 $1,2,2,2$, (vi)에서 ($1,2,3,4$에 대해) $1,4,4,2$임을 확인했다. 또한 10^4개의 무작위 각에서 $\mathrm{M}(\alpha)\mathrm{M}(\beta) = \mathrm{M}(\alpha+\beta)$와 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$와의 대응을 확인했다. (iv)는 손으로도 빠르게 확인할 수 있다. $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$이고 $k(k+1)$은 짝수이므로, 어떤 홀수를 제곱해도 법 8로 1이 된다.

흔한 실수

- (iv)와 (vi)가 "둘 다 원소가 네 개이므로" 동형이라고 말하는 것. 크기가 같은 것은 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
- (v)에서 $\det A \neq 0$만 확인하는 것. 역행렬도 정수 성분을 가져야 한다.
- (ii)를 법 4에 대한 덧셈으로 읽는 것. 덧셈에 대해서라면 위수 4의 순환군이 되어 (vi)와 동형이지만, 문제는 곱셈을 명시하고 있다.

STEP 너머

동형을 무시하면 위수 4인 군은 정확히 두 개이다. (vi)와 같은 순환군 C_4와, (iv)와 같은 클라인 4원군(Klein four-group) $C_2 \times C_2$이다. 원소의 위수로 작은 군들을 분류하는 것은 대학 군론 강의에서 가장 먼저 하는 일 중 하나이다. (i)과 (iii)의 원군(circle group)은 리 군(Lie group), 즉 매끄러운 곡선이나 곡면이기도 한 군의 가장 간단한 예이다. (v)에서 나온 행렬식이 ± 1인 정수 행렬들은 군 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$를 이루며, 이 군은 정수론에서 중요하다. 더 읽어 보려면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 1995, 문제 8

순수수학 • 평면과 구

> **STEP III 1995, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q8

핵심 아이디어

평면(plane)이 구(sphere)를 자르면 그 단면으로 생기는 원의 중심은 구의 중심에서 평면에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)이다. 따라서 구의 중심은 각 원의 중심을 지나는 법선(normal line) 위에 있어야 하고, 각 법선을 따라 잰 거리는 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 구의 반지름과 연결된다. 문제의 나머지 부분은 모두 이 하나의 벡터 방정식에 잘 고른 벡터를 내적(dot product)하는 일이다.

풀이

법선과 거리

X를 지나는 π의 법선은 $\mathbf{x}$를 지나고 방향이 $\mathbf{n}$인 직선이다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + t\,\mathbf{n}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

이 직선은 $(\mathbf{x} + t\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = p$인 곳, 즉 ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$이므로) $t = p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$인 곳에서 π와 만난다. 따라서 수선의 발은 $\mathbf{x} + (p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$이고, $\mathbf{n}$이 단위벡터(unit vector)이므로 X에서 π까지의 수직 거리는 다음과 같다.

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - p|.$$

두 원을 모두 지나는 구

중심이 $\mathbf{c}$이고 반지름이 R인 구가 두 원을 모두 포함한다고 하자. i를 하나 고정한다. C_i 위의 모든 점 $\mathbf{y}$는 $|\mathbf{y} - \mathbf{r}_i| = 1$과 $(\mathbf{y} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i = 0$을 만족한다. $\mathbf{y}$가 C_i를 한 바퀴 돌면, 벡터 $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{r}_i$는 $\mathbf{n}_i$에 수직인 모든 단위벡터를 거친다.

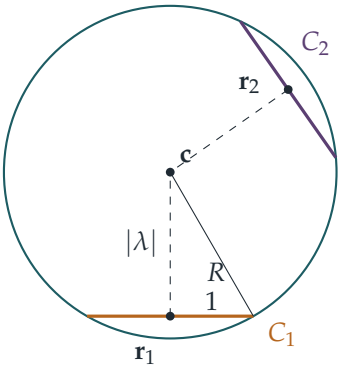
$\mathbf{a} \perp \mathbf{n}_i$가 되도록 $\mathbf{c} - \mathbf{r}_i = \mathbf{a} + \mu_i \mathbf{n}_i$로 분해한다. 그러면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i = 0$을 이용하여

$$\begin{aligned} R^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{c}|^2 &= |\mathbf{u} - \mathbf{a} - \mu_i \mathbf{n}_i|^2 \\ &= 1 - 2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + |\mathbf{a}|^2 + \mu_i^2, \end{aligned}$$

를 얻는다. 좌변은 C_i의 모든 점에서 같으므로, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}$는 허용되는 모든 $\mathbf{u}$에 대해 같은 값을 가진다. 그런데 $\mathbf{u}$가 허용되면 $-\mathbf{u}$도 허용되므로, 평면 안의 모든 단위벡터 $\mathbf{u}$에 대해 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$이다. ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$이라면) $\mathbf{u}$를 $\mathbf{a}$와 평행하게 고르면 모순이 생긴다. 따라서 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$이고

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_i + \mu_i \mathbf{n}_i, \qquad R^2 = 1 + \mu_i^2.$$

이다. 말로 하면, 구의 중심은 C_i의 중심을 지나는 π_i의 법선 위에 있으며, 이것은 바로 첫 부분에서 구한 직선이다.



이를 $i = 1$과 $i = 2$에 적용하면 $1 + \mu_1^2 = R^2 = 1 + \mu_2^2$이므로 $\mu_2 = \pm\mu_1$이다. $\lambda = \mu_1$로 두면

$$\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{n}_1 = \mathbf{c} = \mathbf{r}_2 \pm \lambda \mathbf{n}_2,$$

이므로, 조건에 맞는 구가 존재하면 이러한 λ가 반드시 존재한다. 이것으로 증명이 끝난다.

두 필요조건

식을 정리하면

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\lambda \mathbf{n}_1 \pm \lambda \mathbf{n}_2.$$

이다. 여기에 $\mathbf{n}_1$과 $\mathbf{n}_2$ 모두에 수직인 $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$를 내적하면

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = 0.$$

을 얻는다.

? **생각해 보기** p_1은 어디에서 나오는가? 벡터 방정식에는 나타나지 않는다.

중심 $\mathbf{r}_1$은 π_1 위에 있으므로 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$이고, 마찬가지로 $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = p_2$이다. $k = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$로 두자. $\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_2 \pm \lambda \mathbf{n}_2$에 $\mathbf{n}_1$을, 이어서 $\mathbf{n}_2$를 내적하면

$$p_1 + \lambda = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \pm \lambda k,$$
$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \lambda k = p_2 \pm \lambda.$$

이다. 따라서

$$p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \lambda(\pm k - 1), \qquad p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = \lambda(k \mp 1).$$

이다. 위쪽 부호를 택하면 두 우변은 모두 $\lambda(k-1)$이고, 아래쪽 부호를 택하면 각각 $-\lambda(k+1)$과 $\lambda(k+1)$이다. 어느 경우든 두 좌변은 같거나 부호만 반대이므로

$$(p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = (p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1)^2.$$

이다.

기하학적 의미

첫째 조건. 이 조건은 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$가 한 평면 위에 있다(coplanar)는 것, 즉 스칼라 삼중곱(scalar triple product)이 0이라는 뜻이다. 이는 C_1의 중심을 지나는 π_1의 법선과 C_2의 중심을 지나는 π_2의 법선이 한 평면 위에 있다는 것과 같다. 즉 두 법선은 꼬인 위치(skew)에 있지 않으므로, (구의 중심에서) 만나거나 평행하다.

둘째 조건. 첫 부분에 의해 $|p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2|$는 C_2의 중심에서 π_1까지의 거리이고, $|p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1|$는 C_1의 중심에서 π_2까지의 거리이다. 따라서 이 조건은 두 거리가 같다는 것, 즉 한 원의 중심이 다른 원의 평면에서 떨어진 거리가 다른 원의 중심이 이 원의 평면에서 떨어진 거리와 같다는 뜻이다. 이는 그림의 대칭성을 반영한다. 두 원은 모두 $\mathbf{c}$에서 같은 거리 $|\lambda|$만큼 떨어져 있으므로, $\mathbf{c}$를 지나는 적당한 평면에 대한 반사(reflection)가 두 원을 서로 바꾸고, 두 거리도 서로 바꾼다.

검산

- $\pi_1 : z = 0$과 $\pi_2 : z = 2$를 택하고, 중심이 z축 위에 있는 단위원을 생각하자. 두 원은 중심이 $(0,0,1)$이고 반지름이 $\sqrt{2}$인 구 위에 있다. 이때 아래쪽 부호로 $\lambda = 1$이고, $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$이며, 둘째 조건의 두 거리는 모두 2이다.
- 수치적으로, 반지름이 $R > 1$인 무작위 구 5000개를 만들고 각각을 단위원으로 자르는 무작위 평면 두 개를 잡았다. 모든 원 위의 점이 구 위에 있음을 확인하였고, 모든 경우에 두 조건이 10^{-9} 이내의 오차로 성립하였으며, 두 부호가 모두 나타났다. 서로 관계없는 무작위 원 쌍은 매번 첫째 조건을 만족하지 않았다.

흔한 실수

- 구의 중심이 $\mathbf{r}_i$를 지나는 법선 위에 있다는 것을 근거 없이 가정하는 것. 이것이 증명의 핵심이다.
- $\pm$를 잊는 것. 구의 중심은 두 평면에 대해 법선이 가리키는 쪽과 같은 쪽에 있을 수도 있고, 반대쪽에 있을 수도 있다.
- C_1의 중심이 π_1 위에 있으므로 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$이라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

여기서 얻은 조건은 필요조건(necessary condition)일 뿐이다. 완전한 "필요충분조건(if and only if)"을 얻으려면 두 법선이 실제로 두 원에서 같은 거리에 있는 한 점에서 만난다는 것도 필요하다. 이런 문제는 이차곡면(quadric)의 해석기하학(analytic geometry)으로 들어가는 첫걸음이다. 그곳에서는 평면, 구와 그 교선을 선형대수학(linear algebra)으로 다루며, 스칼라 삼중곱은 부피를 재는 3×3 행렬식(determinant)으로 다시 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이러한 내용을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 1995, 문제 9

역학 • 복합 진자

STEP III 1995, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

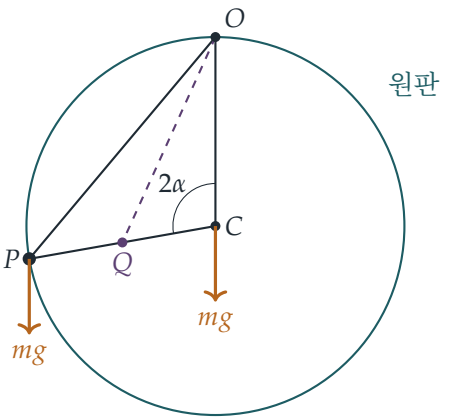
step.maths.org/questions/95-s3-q9

핵심 아이디어

원판과 입자는 질량이 **같으므로**, 계 전체의 질량중심(centre of mass)은 CP의 중점 Q이다. 거의 모든 것이 이 사실에서 나온다. 안정 평형(stable equilibrium)에서는 Q가 O의 바로 아래에 있고, 소문항 (iii)의 에너지 방정식에는 Q의 높이만 있으면 된다. 나머지는 이등변 삼각형(isosceles triangle) OCP의 기하와 표준적인 관성 모멘트(moment of inertia) 적분이다.

풀이

원판을 강체 박판(rigid lamina)으로, P를 그 둘레에 고정된 입자로 모형화한다. 회전축은 매끄러우므로 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다. 풀이 전체에서 $OC = CP = r$이고 $\angle OCP = 2\alpha$이다.



소문항 (i)

원판(질량중심 C)과 입자(P에 위치)의 질량이 모두 m이므로, 계의 질량중심은 CP의 중점 Q이다. 작용하는 힘은 중력과 회전축에서의 반작용뿐이므로, 계는 Q가 O와 같은 연직선 위에 있을 때 정확히 평형을 이루고, Q가 O보다 **아래**에 있을 때 그 평형은 안정하다(이때 어떤 변위든 Q를 들어 올려 퍼텐셜 에너지(potential energy)를 증가시킨다). 따라서 안정 평형에서 OQ는 연직이고, β는 각 $\angle COQ$이다.

원판의 평면에서 원점을 C로, O를 $(r,0)$으로 하는 좌표축을 잡자. 그러면 $P = r(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$이고 $Q = \frac{r}{2}(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$이다. 따라서

$$\overrightarrow{OC} = (-r,\, 0), \qquad \overrightarrow{OQ} = \tfrac{r}{2}\big(-(2-\cos 2\alpha),\, \sin 2\alpha\big).$$

$2 - \cos 2\alpha > 0$이므로 벡터 $\overrightarrow{OQ}$는 $\overrightarrow{OC}$ 방향으로 양의 성분 $\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)$를, 그에 수직인 방향으로 성분 $\frac{r}{2}\sin 2\alpha$를 가진다. 그러므로 β는 예각이고

$$\tan\beta = \frac{\frac{r}{2}\sin 2\alpha}{\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2-\cos 2\alpha},$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

소문항 (ii)

$\rho x / r$를 단위 넓이당 질량으로 본다. 반지름 x와 $x + \mathrm{d}x$ 사이의 고리의 넓이는 $2\pi x\,\mathrm{d}x$이므로

$$m = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^2}{3}.$$

이 고리의 모든 점은 C를 지나고 원판에 수직인 축으로부터 거리 x에 있으므로, 그 축에 대한 관성 모멘트는

$$I_C = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^4}{5} = \frac{3}{5}mr^2,$$

이다. 여기서 $2\pi\rho r^2 = 3m$을 이용하였다. O를 지나는 축은 이 축과 평행하고(둘 다 원판이 놓인 연직 평면에 수직이다) 거리 $OC = r$만큼 떨어져 있으므로, 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해

$$I_O = \frac{3}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{8}{5}mr^2.$$

소문항 (iii)

계의 관성 모멘트. 삼각형 OCP는 꼭지각(apex angle)이 2α인 이등변삼각형이므로, 현(chord)의 길이는 $OP = 2r\sin\alpha$이다. 입자는 $m(2r\sin\alpha)^2$을 더하므로

$$I = \frac{8}{5}mr^2 + 4mr^2\sin^2\alpha = \frac{4}{5}mr^2\,(2 + 5\sin^2\alpha).$$

질량중심이 내려간 거리. 놓는 순간 OQ는 수평이므로 Q는 O와 같은 높이에 있다. 마지막 위치에서는 P가 O의 바로 아래에 있으므로 OP가 연직이고, 어떤 점이 O보다 아래에 있는 깊이는 OP를 따라 O로부터 잰 거리와 같다.

- P의 깊이는 $OP = 2r\sin\alpha$이다.
- 삼각형 OCP의 밑각(base angle)은 $\frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$이므로 $\angle COP = \frac{\pi}{2} - \alpha$이고, C의 깊이는 $r\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = r\sin\alpha$이다.

Q는 CP의 중점이므로 그 깊이는 두 깊이의 평균인 $\frac{3}{2}r\sin\alpha$이다. 따라서 계(전체 질량 $2m$)가 잃은 퍼텐셜 에너지는 $2mg\cdot\frac{3}{2}r\sin\alpha = 3mgr\sin\alpha$이다.

> ? **생각해 보기** 계는 실제로 P가 O의 아래에 오는 위치에 도달하는가?

Q가 O와 같은 높이에 있는 상태에서 정지 상태로 놓으면, 계는 복합 진자(compound pendulum)처럼 OQ가 수평인 두 위치 사이를 흔들리며, Q가 O의 높이보다 아래에 있는 모든 위치를 지난다. 마지막 위치에서 Q의 깊이는 $\frac{3}{2}r\sin\alpha > 0$이므로 이 위치에 도달한다(그리고 처음에 C가 P보다 낮다는 조건은 흔들리는 방향을 정해 줄 뿐이다).

에너지. 정지 상태에서 출발하므로, 각속력(angular speed)을 ω라 하면

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = 3mgr\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{6gr\sin\alpha}{\frac{4}{5}r^2(2+5\sin^2\alpha)} = \frac{15g\sin\alpha}{2r(2+5\sin^2\alpha)}.$$

C는 O를 중심으로 반지름 $OC = r$인 원 위를 움직이므로 $v = r\omega$이고

$$v^2 = \frac{15gr\sin\alpha}{2(2+5\sin^2\alpha)},$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

최댓값. $s = \sin\alpha$라 하자. $0 < \alpha \le \pi/2$이므로 $s \in (0,1]$이다. $f(s) = \dfrac{s}{2+5s^2}$라 하면

$$f'(s) = \frac{(2+5s^2) - 10s^2}{(2+5s^2)^2} = \frac{2-5s^2}{(2+5s^2)^2},$$

이고, 이는 $s < \sqrt{2/5}$에서 양수, $s > \sqrt{2/5}$에서 음수이다. $\sqrt{2/5} < 1$은 허용 범위 안에 있으므로 f는 그곳에서 최댓값 $f = \dfrac{\sqrt{2/5}}{4} = \dfrac{\sqrt{10}}{20}$을 가진다. 따라서

$$v_{\max}^2 = \frac{15gr}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{20} = \frac{3\sqrt{10}}{8}\,gr \approx 1.19\,gr, \qquad \text{단, } \sin\alpha = \sqrt{2/5}.$$

검산

- $\alpha \to 0$이면 P는 O에 놓이고 원판만 OC가 연직이 되도록 매달린다. 실제로 $\tan\beta \to 0$이다. $\alpha = \pi/2$이면 P는 O의 정반대편에 있고, Q는 OC 위에 있으므로 역시 $\beta = 0$이다.

- $\alpha = \pi/2$일 때: $I = \frac{28}{5}mr^2$이고, 질량 $2m$이 $\frac{3}{2}r$만큼 내려가므로 $v^2 = r^2 \cdot 3mgr \cdot \frac{10}{28mr^2} = \frac{15}{14}gr$이며, 공식과 일치한다.
- 여러 α에 대해 놓는 위치에서부터 운동 방정식을 수치적으로(RK4) 적분하였다. 예를 들어 $\alpha = 0.7$, $r = 1.3$, $g = 9.81$일 때 시뮬레이션은 $v^2 = 15.1206$을 주며, 이는 공식과 유효숫자 여섯 자리까지 일치한다. 직접 탐색으로도 최댓값 $3\sqrt{10}/8 \approx 1.1859$($gr$ 단위)가 확인된다.

흔한 실수

- I_C로 균일한 원판의 값 $\frac{1}{2}mr^2$을 쓰는 것. 여기서는 밀도(density)가 바깥쪽으로 갈수록 커지므로 I_C가 $\frac{3}{5}mr^2$으로 커진다.
- 소문항 (iii)에서 관성 모멘트에 대한 입자의 기여 $m \cdot OP^2$을 빠뜨리는 것.
- v^2 대신 ω^2을 답하는 것. 문제는 C의 속력을 묻고 있으며, 그것은 $r\omega$이다.

STEP 너머

수평축을 중심으로 회전하는 강체(rigid body)를 **복합 진자**라 한다. 이는 추가 질량중심에 있는 단진자(simple pendulum)처럼 행동하지만, 관성이 Md^2 대신 I이다. 소문항 (i)의 평형 근처에서의 미소 진동의 주기는 $2\pi\sqrt{I/(Mgd)}$이고(여기서 $d = OQ$), "등가 단진자" 길이 $I/(Md)$는 한때 g를 정밀하게 측정하는 데 쓰였던 케이터(Kater)의 가역 진자(reversible pendulum)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 강체의 회전과 평행축 정리를 다룬다.

풀이

STEP III 1995, 문제 10

역학 • 경사면 위의 포물체 운동

STEP III 1995, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s3-q10

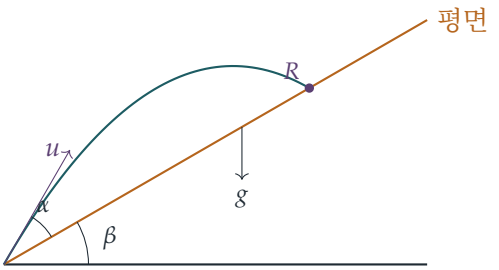
핵심 아이디어

경사면(inclined plane) 위에서 자연스러운 좌표축은 수평과 수직이 아니라 평면에 **나란한** 방향과 평면에 **수직인** 방향이다. 이 축에서 중력은 두 개의 일정한 성분을 가지고, 비행 시간(time of flight)은 수직 방향 운동만으로 정해지며, 사거리(range)는 삼각함수의 곱이 된다. 곱을 합으로 바꾸는 공식(factor formula)으로 이 곱을 사인의 차로 바꾸면 미분을 쓰지 않아도 최댓값이 바로 보인다.

풀이

설정하기

포탄을 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(particle)으로 모형화하고, 평면의 아래 끝에서 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 위쪽으로 발사한다고 하자. 포탄을 **평면 위로** 각 α만큼 기울여 발사한다고 하면, 수평면에 대한 앙각(angle of elevation)은 $\theta = \alpha + \beta$이다. 포탄이 평면 위쪽으로 올라가려면 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$이어야 한다.



x축을 최대 경사선을 따라 위쪽으로, y축을 평면에 수직이며 평면에서 멀어지는 방향으로 잡자. (연직 아래 방향의) 가속도 g를 이 두 방향으로 분해하면

$$\ddot{x} = -g\sin\beta, \qquad \ddot{y} = -g\cos\beta,$$

이고, 초기 속도의 성분은 평면 방향으로 $u\cos\alpha$, 평면에 수직인 방향으로 $u\sin\alpha$이다. 따라서 시각 t에서

$$x = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\beta, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\beta.$$

비행 시간과 사거리

포탄은 $t > 0$에서 다시 $y = 0$이 될 때 떨어진다.

$$T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

그러면 평면을 따라 올라간 거리는

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\cos\beta} - \tfrac{1}{2}g\sin\beta\cdot\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2\cos^2\beta} \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right) \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}. \end{aligned}$$

> **생각해 보기** 미분하지 않고 $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$를 최대로 만들려면 어떻게 해야 할까?

곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$에 $A = \alpha$, $B = \alpha+\beta$를 대입하면

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta,$$

이므로

$$R = \frac{u^2\left(\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta\right)}{g\cos^2\beta}.$$

α에 의존하는 항은 $\sin(2\alpha+\beta)$뿐이고, 이 값은 1 이하이다. α가 $(0, \frac{\pi}{2}-\beta)$를 움직일 때 각 $2\alpha+\beta$는 $(\beta, \pi-\beta)$를 움직이며, 이 구간은 $\frac{\pi}{2}$를 포함한다. 따라서 최댓값 1에 실제로 도달하고, 그것은 정확히 $2\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$일 때, 즉

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}, \qquad \text{즉} \qquad \theta = \alpha+\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

일 때이다. 그러므로 대포는 수평면 위로 $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$의 각으로 쏘아야 한다. 즉 발사 방향은 평면과 연직선 사이의 각을 이등분한다.

최대 사거리

$\sin(2\alpha+\beta)=1$이고, $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = (1-\sin\beta)(1+\sin\beta)$를 이용하면

$$R_{\max} = \frac{u^2(1-\sin\beta)}{g(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)},$$

이다. 여기서 $\beta < \frac{\pi}{2}$이므로 $1-\sin\beta$로 약분하는 것은 정당하다. 이것이 구하는 거리이다.

검산

- 평평한 지면, 즉 $\beta = 0$인 경우: 최적의 각은 45°이고 사거리는 u^2/g로, 익숙한 결과와 같다.
- $\beta \to \frac{\pi}{2}$일 때(연직인 "평면"), 최적의 방향은 연직 위쪽에 가까워지고 $R_{\max} \to u^2/(2g)$이다. 이는 연직 위로 쏜 포탄이 도달하는 최고 높이이다.
- 수치로 확인하면, $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\beta = 30^\circ$일 때 공식은 앙각 60°에서 $R_{\max} \approx 27.18\,\mathrm{m}$를 준다. 포탄이 평면을 지날 때까지 수평·연직 좌표에서 운동을 단계적으로 계산하면 임의의 u, β, α에 대해 $R(\alpha)$가 그대로 재현되고, α에 대해 촘촘히 탐색하면 최댓값이 $\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$에서 나타난다.

흔한 실수

- 수평면에 대한 각과 평면에 대한 각을 혼동하는 것. 답 $\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$는 수평면으로부터 잰 각이다.
- 평면 방향 성분 $-g\sin\beta$를 빠뜨리는 것. 그러면 평평한 지면의 사거리 공식이 잘못된 비율로 나온다.

STEP 너머

우아한 기하학적 관점이 있다. 한 점에서 속력 u로 쏜 모든 궤적은 발사점을 초점(focus)으로 하는 "안전 포물선(parabola of safety)"(궤적들의 포락선(envelope)) 안쪽에 놓이며, 임의의 평면 위에서의 최대 사거리는 그 평면이 이 포물선과 만나는 곳이다. 그러면 초점–준선(directrix) 성질로부터 한 줄 만에 $R_{\max} = u^2/(g(1+\sin\beta))$를 얻고, 최적의 방향이 평면과 연직선 사이의 각을 이등분하는 이유도 설명된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 벡터 방법으로 다루는 포물체 문제로 나아가기에 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP III 1995, 문제 11

역학 • 상대 속도

> **STEP III 1995, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q11

핵심 아이디어

배의 기준틀(frame)에서 생각한다. 배에 대하여 비행기는 북서쪽 직선을 따라 곧게 나갔다가 곧게 돌아와야 한다. 비행기는 공기에 실려 움직이므로, 이 기준틀에서 비행기의 속도는 대기 속도(airspeed) 벡터에 "흐름"을 더한 것이다. 이 흐름은 바람의 속도에서 배의 속도를 뺀 것이다. 이 흐름을 알고 나면 각 구간은 강을 건너는 문제가 된다. 합속도(resultant)가 직선 방향을 향하도록 기수 방향을 정하고, 왕복 시간으로부터 거리를 구한다.

풀이

전체에 걸쳐 x축을 동쪽, y축을 북쪽으로 잡고, 속력은 노트(knots, 시간당 해리)로 잰다. 그러면 거리는 해리(nautical miles) 단위로 나온다. 배의 속도는 $(-V, 0)$이다. 공기가 속도 $\mathbf{w}$로 움직이고, 공기에 대한 비행기의 속도가 $|\mathbf{a}| = kV$인 $\mathbf{a}$라면, 배에 대한 비행기의 속도는

$$\mathbf{a} + \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{w} - (-V, 0) = \mathbf{w} + (V, 0).$$

이다. 비행기는 배의 북서쪽에 머물러야 하므로, $\mathbf{a} + \mathbf{c}$는 나갈 때는 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ 방향을, 돌아올 때는 $-\mathbf{u}$ 방향을 향해야 한다.

바람이 불 때: 나가는 비행

바람은 북쪽에서 남쪽으로 불므로 $\mathbf{w} = (0, -V)$이고

$$\mathbf{c} = (V, -V) = -\sqrt{2}\, V\, \mathbf{u}.$$

이다. 이 흐름의 속력은 $\sqrt{2}\, V$이고, 정확히 남동쪽, 즉 초계 직선 방향을 향한다. 따라서 조종사는 비행기를 그냥 직선 방향으로 향하게 하면 된다. 나갈 때(북서쪽)는 흐름을 정면으

로 거슬러 날고, 돌아올 때는 흐름을 타고 난다.

$$\text{나가는 속력} = (k-\sqrt{2})V, \qquad \text{돌아오는 속력} = (k+\sqrt{2})V.$$

여기서 $k > \sqrt{2}$이어야 한다. 그렇지 않으면 비행기는 북서쪽 직선을 따라 배에서 결코 멀어질 수 없다.

비행기가 배로부터 거리 d_w까지 나가고 한 번의 왕복에 $\frac{1}{2}$시간이 걸린다면

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} + \frac{d_w}{(k+\sqrt{2})V} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{d_w}{V} \cdot \frac{2k}{k^2-2} = \frac{1}{2},$$

이므로

$$d_w = \frac{(k^2-2)V}{4k}.$$

이다. 따라서 나가는 비행에 걸리는 시간은

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} = \frac{k^2-2}{4k(k-\sqrt{2})} = \frac{k+\sqrt{2}}{4k} \text{ 시간} = 15\left(1+\frac{\sqrt{2}}{k}\right) \text{ 분}.$$

이다. 이 값은 항상 15분보다 크며, 이는 당연하다. 나가는 구간은 흐름을 거슬러 가기 때문이다.

생각해 보기 바람이 없을 때에도 비행기를 그냥 북서쪽으로 향하게 하면 안 되는 이유는 무엇인가?

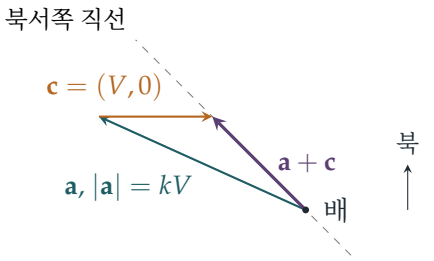
바람이 없을 때는 흐름이 더 이상 초계 직선 방향이 아니다. 조종사가 비행기를 북서쪽으로 향하게 하면, 흐름의 동쪽 방향 부분이 비행기를 직선에서 벗어나게 한다. 조종사는 흐름 쪽으로 약간 비스듬히 기수를 돌려야 하며, 그만큼 대기 속도의 일부가 소모된다.

바람이 없을 때

이제 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$이므로 $\mathbf{c} = (V, 0)$이다. 즉 배에 대하여 공기는 동쪽으로 속력 V로 흐른다. $\mathbf{c}$를 $\mathbf{u}$를 써서 직선 방향 성분(component)으로, $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$을 써서 직선에 수직인 성분으로 분해하면

$$\mathbf{c} = -\frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{u} + \frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{v}.$$

이다.



합속도는 **v** 성분이 없어야 하므로, **a**의 **v** 성분은 $-V/\sqrt{2}$이어야 한다. $|\mathbf{a}| = kV$이므로 진행 방향의 성분은

$$\sqrt{k^2V^2 - \tfrac{1}{2}V^2} = V\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{2}}.$$

이다. 직선 방향으로 흐름은 나갈 때 $-V/\sqrt{2}$, 돌아올 때 $+V/\sqrt{2}$만큼 기여한다($\mathbf{c}\cdot(-\mathbf{u}) = V/\sqrt{2}$이기 때문이다). $A = V\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$, $B = V/\sqrt{2}$로 놓으면

$$\text{나가는 속력} = A - B, \qquad \text{돌아오는 속력} = A + B.$$

이다. $A^2 - B^2 = V^2(k^2 - 1) > 0$이므로 나가는 속력은 양수이다.

왕복 시간이 똑같이 30분이므로

$$\frac{d_c}{A-B} + \frac{d_c}{A+B} = \frac{2A\,d_c}{A^2 - B^2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad d_c = \frac{A^2 - B^2}{4A} = \frac{V(k^2-1)}{4\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}.$$

이다.

비

나누면

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{(k^2-2)V}{4k} \cdot \frac{4\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}{V(k^2-1)} = \frac{(k^2-2)\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}{k(k^2-1)}.$$

이다. $\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2 - 2}$이므로

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{k^2-2}{2k(k^2-1)}\sqrt{4k^2-2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $k \to \infty$이면 바람과 배는 거의 영향을 주지 않는다. 나가는 비행 시간은 15분에 가까워지고, $d_w/d_c \to 1$이다(비의 분자와 분모가 모두 $2k^3$처럼 커진다).

- $k \to \sqrt{2}^{+}$이면 바람이 불 때 나가는 속력이 0으로 떨어지므로, 공식이 말하는 대로 $d_w \to 0$이고 비는 $\to 0$이다.
- $k = 2$이면 나가는 비행 시간은 $15(1 + 1/\sqrt{2}) \approx 25.6$분이고, $d_w/d_c = \frac{2}{12}\sqrt{14} \approx 0.624$이다. 기수 방향을 직접 풀어서 구하는 방법과 운동을 단계별로 계산하는 방법으로 이 값을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 바람의 방향을 거꾸로 잡는 것. "북쪽에서 남쪽으로" 부는 바람은 **남쪽을 향해** 분다.
- 배의 속도를 빼지 않고 더하는 것. 서쪽으로 가는 배에 대하여 정지한 공기는 **동쪽**으로 흐른다.
- 바람이 없을 때 비행기를 북서쪽으로 향하게 하고 속력을 $kV \pm V/\sqrt{2}$로 쓰는 것. 수직 방향 흐름을 먼저 상쇄해야 한다.

STEP 너머

이것은 갈릴레이(Galilean) 기준틀 변환이다. 서로에 대해 등속으로 움직이는 기준틀에서 잰 속도는 일정한 벡터만큼 차이가 난다. 같은 계산 방식이 마이컬슨–몰리(Michelson–Morley)의 "강 위의 배" 논증의 바탕에 있다. 거기서는 가로질러 갔다 오는 왕복과 나란히 갔다 오는 왕복이 바로 이 문제에서와 같은 방식으로 서로 다른 시간이 걸리며, 이것이 특수 상대성 이론이 뒤집은 고전적인 계산이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 관점에서 상대 운동을 다룬 다음 상대성 이론으로 나아간다.

풀이

STEP III 1995, 문제 12

확률과 통계 • 방사 대칭 확률밀도

> **STEP III 1995, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.22 절 **평균이 없는 분포**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/cauchy.html

핵심 아이디어

방사 대칭(radially symmetrical)인 밀도함수(density)는 원점으로부터의 거리 $r = \sqrt{u^2+v^2}$를 통해서만 (u,v)에 의존하므로, 원점을 중심으로 어떻게 회전해도 똑같아 보인다. 특히 꼭짓점이 원점인 부채꼴(sector)에 떨어질 확률은 그 부채꼴의 중심각에만 의존한다. 사건 $U/V < k$는 직선 $u = kv$와 u축이 잘라 내는 서로 마주 보는 한 쌍의 부채꼴이므로, 그 확률은 단지 어떤 각을 2π로 나눈 값이다.

풀이

결합 밀도함수와 방사 대칭

X와 Y는 각각 밀도함수 $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$를 가진다. X와 Y는 독립(independent)이므로, 결합 밀도함수(joint density)는 주변 밀도함수(marginal density)의 곱이다.

$$f(x,y) = \phi(x)\,\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

이 식은 모든 실수 x와 y에 대하여 성립하며, 이것이 보이려던 것이다.

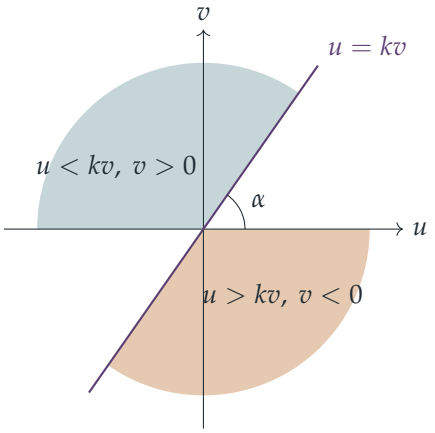
이 밀도함수가 **방사 대칭**이라는 것은, 점 (x,y)에서의 값이 그 점의 방향과는 관계없이 원점으로부터의 거리 $r = \sqrt{x^2+y^2}$에만 의존한다는 뜻이다. 여기서는 $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}$이다. 같은 말로, 이 밀도함수는 원점을 중심으로 하는 평면의 어떤 회전에 의해서도 변하지 않으며, 그 등고선(contours)은 원점을 중심으로 하는 원이다.

$\mathrm{P}(U/V < k)$에 대한 항등식

U와 V가 방사 대칭인 결합 밀도함수 $h(u,v) = \rho\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$를 가진다고 하자. 직선 $v=0$의 확률은 0이므로(넓이가 0이다), $V=0$인 경우는 무시해도 된다. 부등식 $U/V < k$에 V를 곱하되, $V<0$일 때는 부등호의 방향을 바꾸면

$$\left\{\frac{U}{V} < k\right\} = \{U < kV,\ V > 0\} \cup \{U > kV,\ V < 0\},$$

이고, 우변의 두 사건은 서로 배반이다.



그림($k>0$인 경우)에서 보듯이, 원점을 지나는 직선 $u=kv$와 u축은 평면을 네 개의 부채꼴로 나누고, 색칠된 두 부채꼴이 사건 $U/V<k$를 이룬다. 사상 $(u,v)\mapsto(-u,-v)$는 원점을 중심으로 하는 π만큼의 회전이며, 영역 $\{u<kv,\ v>0\}$를 정확히 $\{u>kv,\ v<0\}$로 옮긴다(두 부등식에 모두 -1을 곱하면 된다). 방사 대칭인 밀도함수는 $h(-u,-v)=h(u,v)$를 만족하므로, 이 두 영역의 확률은 같다. 따라서

$$\mathrm{P}\left(\frac{U}{V} < k\right) = 2\,\mathrm{P}(U < kV,\ V > 0),$$

이고, 이것이 보여야 할 것이었다.

U/V의 밀도함수

극좌표(polar coordinates) $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$를 사용하자. 영역 $\{u<kv,\ v>0\}$는 부채꼴 $\alpha<\theta<\pi$이다. 여기서 $\alpha\in(0,\pi)$는 반직선 $u=kv, v>0$이 양의 u축과 이루는 각이므로 $\cot\alpha = k$이다. (실제로 $0<\theta<\pi$이면 $\sin\theta>0$이고, $u<kv$는 $\cot\theta<k$가 된다. cot은 $(0,\pi)$에서 감소하므로, 이는 $\theta>\alpha$와 같다.)

생각해 보기 함수 ρ를 모를 때, (U,V)가 꼭짓점이 원점이고 중심각이 β인 부채꼴 안에 있을 확률은 얼마인가?

극좌표에서 넓이 요소(area element)는 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$이므로, 부채꼴 $\theta_1 < \theta < \theta_1 + \beta$의 확률은

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1+\beta}\int_0^\infty \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \beta\int_0^\infty \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r = \frac{\beta}{2\pi},$$

이다. $\beta = 2\pi$로 두면 평면 전체가 되어 $2\pi\int_0^\infty \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r = 1$이기 때문이다. 다시 말해, ρ가 무엇이든 (U, V)의 방향은 균등분포(uniformly distributed)를 따른다.

우리의 부채꼴은 중심각이 $\pi - \alpha$이므로

$$\mathrm{G}(k) = \mathrm{P}\Big(\frac{U}{V} < k\Big) = 2\cdot\frac{\pi-\alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}.$$

$\alpha \in (0,\pi)$에서 $\cot\alpha = k$이므로 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$이다($\cot(\frac{\pi}{2} - \psi) = \tan\psi$이므로 양변 모두 $(0,\pi)$에 속하고 코탄젠트 값이 k이다). 그러므로

$$\mathrm{G}(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan k, \qquad -\infty < k < \infty.$$

이 함수는 분포함수(distribution function)가 그래야 하듯이 0에서 1까지 증가한다. 미분하면 U/V의 밀도함수를 얻는다.

$$\mathrm{g}(k) = \mathrm{G}'(k) = \frac{1}{\pi(1+k^2)}, \qquad -\infty < k < \infty,$$

이것이 보이려던 것이다. 특히 이 결과는 첫 부분의 서로 독립인 표준정규분포(standard normal) 확률변수에 대한 X/Y에도 적용된다.

검산

- $\mathrm{G}(0) = \frac{1}{2}$: 대칭성에 의해 U/V가 양수일 가능성과 음수일 가능성은 같다.
- $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{\pi(1+k^2)} = \frac{1}{\pi}\big[\arctan k\big]_{-\infty}^{\infty} = 1$.
- 서로 다른 세 가지 방사 대칭 분포(서로 독립인 두 표준정규분포, 단위원판 위의 균등분포, e^{-r}에 비례하는 밀도함수)에서 각각 2×10^5개의 점을 뽑는 시뮬레이션(simulation)을 해 보면, 매번 $\mathrm{P}(U/V < 0.7) \approx 0.694$를 얻었고, 이는 $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 0.7 \approx 0.6944$와 일치한다. 여러 k 값에 대해서도 항등식의 양변이 표집 오차(sampling error) 범위 안에서 일치하였다.

흔한 실수

- $\{U/V < k\} = \{U < kV\}$로 쓰는 것: $V < 0$일 때 V를 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.
- 주의 없이 $\alpha = \arctan(1/k)$로 두는 것: $k < 0$이면 이 값은 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$에 속하지만, 필요한 각은 $(0,\pi)$에 속한다. $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$로 쓰면 모든 k에 대해 성립한다.

STEP 너머

밀도함수 $\frac{1}{\pi(1+k^2)}$은 표준 **코시 분포**(Cauchy distribution)이다. 이 분포는 평균(mean)이 존재하지 않는 것으로 유명하며($|k|\,g(k)$의 적분이 발산한다), 그래서 큰 수의 법칙(law of large numbers)이 성립하지 않는다. 서로 독립인 코시 확률변수 n개의 평균은 그중 하나와 똑같은 코시 분포를 따른다. 여기서 쓴 극좌표 논증은 야코비안(Jacobian)을 이용해 결합 밀도함수를 변환하는 방법, 즉 대학 1학년에서 배우는 표준적인 기법을 처음 맛보는 것이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 두 가지를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 1995, 문제 13

확률과 통계 • 잡음이 있는 이진 통신로

STEP III 1995, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

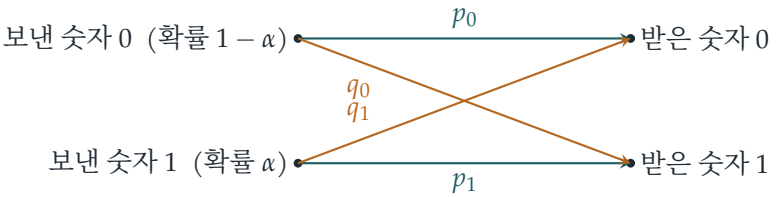
step.maths.org/questions/95-s3-q13

핵심 아이디어

모든 것은 숫자를 한 번에 하나씩 살펴보는 데서 나온다. 각 숫자는 "이진 채널(binary channel)"을 지나간다. 즉 0 또는 1로 보내진 뒤, 그대로 남거나 뒤집힌다. 숫자 하나에 무슨 일이 일어나는지 알고 나면, 메시지 전체는 그것의 서로 독립(independent)인 복사본 여러 개일 뿐이므로 확률을 곱하면 된다. 중계기(booster)에 대해서는, 숫자가 두 구간을 지난 뒤 정확히 도착하려면 **짝수** 번 뒤집히면 된다는 점을 알아차리는 것이 요령이다.

풀이

이 풀이 전체에서 메시지의 길이를 $N = 10^k$로 쓴다. 문제의 의도대로, 원래 메시지의 숫자들은 서로 독립이고(각 숫자는 확률 α로 1이다), 케이블은 각 숫자를 다른 모든 숫자와 독립적으로 처리한다고 가정한다. 숫자 하나에 대한 그림은 아래와 같다.



메시지 전체를 정확히 받을 확률

특정한 숫자 하나를 정확히 받는 사건을 C라 하자. 그 숫자는 그대로 남은 0이거나 그대로 남은 1이므로

$$\mathrm{P}(C) = (1-\alpha)p_0 + \alpha p_1.$$

N개의 숫자가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(\text{메시지 전체가 정확함}) = \left[(1-\alpha)p_0 + \alpha p_1\right]^{10^k}.$$

확률 β

숫자를 1로 받는 경우는 그 숫자가 1이었고 그대로 남은 경우이거나, 0이었는데 뒤집힌 경우이다.

$$\beta = \alpha p_1 + (1-\alpha)q_0.$$

이제

$$\begin{aligned}\beta = \alpha &\iff \alpha p_1 + (1-\alpha)q_0 = \alpha \iff (1-\alpha)q_0 = \alpha(1-p_1) = \alpha q_1 \\ &\iff q_0 = \alpha(q_0+q_1) \iff \alpha = \frac{q_0}{q_0+q_1},\end{aligned}$$

이다. 마지막 단계에서는 q_0+q_1로 나누었는데, 이 값은 케이블이 완벽한 경우($q_0 = q_1 = 0$이며, 이때는 자명하게 $\beta = \alpha$이다)가 아니면 양수이다. 모든 단계는 거꾸로도 성립하므로, 이것이 요구된 "필요충분조건"이다. 말로 하면, 케이블을 지나도 1의 비율이 변하지 않을 필요충분조건은 $0 \to 1$ 흐름(즉 $(1-\alpha)q_0$)과 $1 \to 0$ 흐름(즉 αq_1)이 균형을 이루는 것이다.

모두 0인 메시지

조건이 성립하고 받은 숫자가 모두 0이라고 하자. (보낸 숫자, 받은 숫자) 쌍들은 자리마다 서로 독립이므로, 메시지 전체가 정확할 조건부 확률(conditional probability)은 숫자 하나에 대한 확률 P(보낸 숫자0 | 받은 숫자0)들의 곱이다.

> ? **생각해 보기** "0을 받았다"는 사실을 무엇을 보냈는지에 대한 명제로 어떻게 바꿀까?

베이즈 정리(Bayes' theorem)를 쓴다. 숫자를 0으로 받을 확률은 $1-\beta$이고, 조건에 따라 $\beta = \alpha$이므로 $1-\beta = 1-\alpha$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{보낸 숫자0} \mid \text{받은 숫자0}) = \frac{(1-\alpha)p_0}{1-\beta} = \frac{(1-\alpha)p_0}{1-\alpha} = p_0,$$

이고, 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{메시지가 정확함} \mid \text{모두 0을 받음}) = p_0^{10^k}.$$

반반의 확률

$q_0 = q_1 = q$이고 $\alpha = \frac{1}{2}$이면, 각 숫자가 정확할 확률은 $\frac{1}{2}(1-q) + \frac{1}{2}(1-q) = 1-q$이다. 숫자 10^6개로 된 메시지에 대해서는

$$(1-q)^{10^6} = \tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad 10^6 \ln(1-q) = -\ln 2.$$

이어야 한다. q가 매우 작으므로 $\ln(1-q) \approx -q$이고, 따라서

$$q \approx \frac{\ln 2}{10^6} \approx 6.93 \times 10^{-7}.$$

중계기 추가하기

q는 길이의 제곱에 비례하므로, 길이를 절반으로 줄이면 q는 $2^2 = 4$로 나누어진다. 따라서 케이블의 각 절반은 확률 $q/4$로 숫자를 뒤집으며, 이는 다른 절반과 독립이다(중계기는 받은 것을 그대로 다시 보낼 뿐이다).

> ? **생각해 보기** 숫자가 정확히 도착하는 경우는 "두 절반이 모두 정확히 전송하는" 경우뿐일까?

아니다. 두 절반에서 모두 뒤집힌 숫자는 원래대로 돌아온다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{숫자가 정확함}) = \left(1-\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{q}{4}\right)^2 = 1 - \frac{q}{2} + \frac{q^2}{8} \approx 1 - \frac{q}{2},$$

이며, 여기서 q^2 차수의 항은 무시하였다. (두 번 뒤집히는 경우가 바로 그런 항 가운데 하나이므로 답에는 영향을 주지 않지만, 그 이유를 짚어 볼 가치가 있다.) 이제 메시지 전체가 정확할 확률은

$$\left(1-\frac{q}{2}\right)^{10^6}.$$

이다. 같은 차수까지 $(1-\frac{q}{2})^2 \approx 1-q$이므로

$$\left(1-\frac{q}{2}\right)^{10^6} \approx (1-q)^{10^6/2} = \left[(1-q)^{10^6}\right]^{1/2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707.$$

따라서 중계기는 완벽한 메시지를 받을 확률을 $\frac{1}{2}$에서 약 0.71로 높인다. 여기서 q의 수치는 전혀 필요하지 않았다는 점에 주목하자. 원래 조건 $(1-q)^{10^6} = \frac{1}{2}$이 모든 일을 해 주었다. $e^{-10^6 q} = \frac{1}{2}$에 같은 생각을 적용하면 $e^{-10^6 q/2} = 1/\sqrt{2}$를 얻는다.

검산

- 길이 4인 모든 보낸 메시지와 받은 메시지를 정확히 열거하면($p_0 = 0.9$, $p_1 = 0.8$일 때) $[(1-\alpha)p_0 + \alpha p_1]^4$도, α에 대한 조건 아래에서의 조건부 확률 $p_0^4 = 0.6561$도 그대로 재현된다.
- $(1-q)^{10^6} = \frac{1}{2}$을 정확히 풀면 $q = 6.9315 \times 10^{-7}$이며, 이는 유효숫자 다섯 자리까지 $\ln 2/10^6$과 일치한다.
- 이 q로 중계기가 있을 때의 정확한 확률 $\left[(1-\frac{q}{4})^2 + (\frac{q}{4})^2\right]^{10^6}$을 계산하면 0.707107이며, $1/\sqrt{2}$와 일치한다.

- 타당성 점검: $q_0 = q_1$이면 조건으로부터 $\alpha = \frac{1}{2}$을 얻는데, 이는 대칭성이 요구하는 바와 같다.

흔한 실수

- 각 절반의 오류 확률을 $q/2$로 잡는 것. 오류는 길이의 **제곱**에 비례하므로 $q/4$이다.
- "모두 0" 부분의 답을 $(1-\alpha)^N$이나 p_0만으로 쓰는 것. 각 숫자에 대한 조건부 확률을 구해 10^k제곱해야 한다.

STEP 너머

이것은 정보 이론(information theory)의 **이진 채널**이다. $q_0 = q_1$이면 이진 대칭 채널(binary symmetric channel)이 되는데, 이는 잡음이 있는 채널이 얼마나 많은 정보를 전달할 수 있는지에 대한 섀넌(Shannon)의 이론과, 오류 정정 부호(error-correcting codes)의 출발점이다. 오류 정정 부호는 중복을 덧붙여서, 가끔 일어나는 뒤집힘을 단지 드물게 만드는 데 그치지 않고 찾아내어 바로잡을 수 있게 한다. 중계기를 이용한 계산은 두 단계 마르코프 연쇄(Markov chain)이기도 하다. 뒤집힘 확률들은 전이 행렬(transition matrix)을 곱하는 방식으로 합성된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 조건부 확률과 마르코프 연쇄를 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 1995, 문제 14

확률과 통계 • 적률생성함수

> **STEP III 1995, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q14

핵심 아이디어

적률생성함수(moment generating function, MGF)는 독립(independent)인 확률변수(random variable)들의 합을 곱으로 바꾸어 준다. 즉 T_1과 T_2가 독립이면 $\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\theta(T_1+T_2)}\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\theta T_1}\right]\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\theta T_2}\right]$이다. 따라서 MGF 하나를 구하고, 그것을 거듭제곱한 다음, 그 결과가 같은 꼴의 확률밀도함수(density)의 MGF임을 알아보면 된다. MGF는 분포를 결정하므로 이렇게 알아보는 것만으로 충분하다.

풀이

T의 MGF

실수 θ에 대하여

$$M_T(\theta) = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\theta T}\right] = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-(1-\theta)t}\,\mathrm{d}t.$$

이 적분은 $\theta < 1$일 때만 수렴(converge)하므로(그렇지 않으면 피적분함수가 0으로 가지 않는다), 이제부터 $\theta < 1$이라고 가정한다. 앞으로 거듭 쓰게 될 적분은

$$\int_0^\infty t^k \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \qquad (\lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, \dots),$$

이며, 이는 부분적분(integration by parts)을 k번 하면 얻어진다(또는 $s = \lambda t$로 치환하고 $\int_0^\infty s^k \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = k!$을 이용해도 된다). $k = 1$, $\lambda = 1 - \theta > 0$으로 두면

$$\boxed{M_T(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^2}}, \qquad \theta < 1.$$

간단히 확인해 보면, 모든 MGF가 만족해야 하듯이 $M_T(0) = 1$이다.

U의 MGF

T_1과 T_2를 두 문제에 걸리는 시간이라 하면 $U = T_1 + T_2$이고, T_1과 T_2는 각각 확률밀도함수 f를 가지며 (문제에서 주어진 대로) 서로 독립이다. 그러면 $\mathrm{e}^{\theta T_1}$과 $\mathrm{e}^{\theta T_2}$도 독립이므로, 이들의 곱의 기댓값(expectation)은 각 기댓값의 곱이다.

$$M_U(\theta) = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\theta T_1}\mathrm{e}^{\theta T_2}\right] = M_T(\theta)^2 = \frac{1}{(1-\theta)^4}, \qquad \theta < 1.$$

U의 확률밀도함수

이제 제시된 확률밀도함수 $\mathrm{g}(u) = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}$의 MGF를 계산한다. 위의 적분에서 $k = 3$, $\lambda = 1 - \theta$로 두면

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\theta u}\,\tfrac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{(1-\theta)^4} = \frac{1}{(1-\theta)^4}.$$

($\theta = 0$으로 두면 g의 적분값이 1임이 확인되므로, 이것은 진짜 확률밀도함수이다.)

> **생각해 보기** g가 U와 같은 MGF를 가짐을 보였다. 왜 이것으로 U의 확률밀도함수가 g라고 말할 수 있는가?

여기에는 MGF의 유일성 정리(uniqueness theorem)가 쓰인다. 두 확률변수의 MGF가 $\theta = 0$을 포함하는 어떤 열린구간에서 존재하고 서로 같으면, 두 확률변수는 같은 분포를 가진다. 이 경우 두 MGF는 모든 $\theta < 1$에서 같고, 이 범위는 구간 $(-1, 1)$을 포함한다. 따라서 U의 확률밀도함수는

$$\mathrm{g}(u) = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}, \qquad u \geq 0,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

유일성 정리를 쓰고 싶지 않다면, 합성곱(convolution) 공식으로 같은 결과를 직접 얻을 수 있다. $T_1, T_2 \geq 0$이므로 $u \geq 0$에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(u) &= \int_0^u \mathrm{f}(s)\,\mathrm{f}(u-s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-u}\int_0^u s(u-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-u}\left[\tfrac{1}{2}us^2 - \tfrac{1}{3}s^3\right]_0^u = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}.\end{aligned}$$

n문제에 걸리는 총 시간

$U_n = T_1 + \cdots + T_n$이라 하자. 여기서 T_i들은 독립이고 확률밀도함수 f를 가진다. 같은 곱의 논리로

$$M_{U_n}(\theta) = M_T(\theta)^n = \frac{1}{(1-\theta)^{2n}}, \qquad \theta < 1.$$

$n = 2$일 때의 꼴을 보면 확률밀도함수가 $\mathrm{h}_n(u) = c\,u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}$일 것이라고 짐작할 수 있다. $k = 2n-1$인 경우의 적분을 쓰면 이것의 MGF는 $c\,(2n-1)!/(1-\theta)^{2n}$이다. 이것은 정확

히 $c = 1/(2n-1)!$일 때 M_{U_n}과 같다. 다시 유일성 정리에 의하여, n문제에 걸리는 총 시간의 확률밀도함수는

$$\boxed{\mathrm{h}_n(u) = \frac{u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(2n-1)!}, \qquad u \geq 0.}$$

$n = 1$이면 f가, $n = 2$이면 g가 나오므로 마땅히 그래야 할 결과와 일치한다.

검산

- $\mathrm{E}[T] = M_T'(0) = 2$이고, 이는 $\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2$와 일치한다. 따라서 $\mathrm{E}[U_n] = 2n$이다. h_n으로부터도 같은 값이 나온다. $\int_0^\infty u^{2n}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u/(2n-1)! = (2n)!/(2n-1)! = 2n$.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{0.5t}\,t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 4.000$이며, 이는 $1/(1-0.5)^2$와 일치한다. f에서 뽑은 세 시간의 합을 2×10^5번 시뮬레이션한 결과 $\mathrm{P}(U_3 \leq 5) \approx 0.386$이었고, h_3으로 구한 값은 $\int_0^5 u^5\mathrm{e}^{-u}/120\,\mathrm{d}u \approx 0.384$이다.

흔한 실수

- 조건 $\theta < 1$을 빠뜨리는 것. $\theta \geq 1$이면 MGF가 존재하지 않는다.
- MGF를 곱하지 않고 더하는 것. U의 MGF는 $M_T(\theta)^2$이지 $2M_T(\theta)$가 아니다. ($2T$의 MGF는 $M_T(2\theta)$이며, 이것은 또 다른 것이다.)
- 정규화 상수(normalising constant)의 계승(factorial)을 잘못 쓰는 것. u의 지수가 $2n-1$이므로 상수는 $1/(2n-1)!$이지 $1/(2n)!$이 아니다.

STEP 너머

확률밀도함수 $t\mathrm{e}^{-t}$는 형상모수(shape)가 2이고 비율모수(rate)가 1인 감마분포(gamma distribution)이며, h_n은 형상모수가 $2n$인 감마분포이다. 이 문제는 비율모수가 같은 독립인 감마분포들을 더하면 형상모수가 더해진다는 것을 보여 준다. 특히 각 T는 독립인 두 지수분포(exponential distribution) 시간의 합처럼 행동하는데, 바로 이런 방식으로 감마분포가 푸아송 과정(Poisson process)에서 k번째 사건까지의 대기 시간으로 나타난다. 대학에서는 항상 존재하는 특성함수(characteristic function) $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}]$를 배우고, 이를 이용해 중심극한정리(central limit theorem)를 증명하게 된다. Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 이러한 아이디어를 명료하게 전개한다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1995년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

