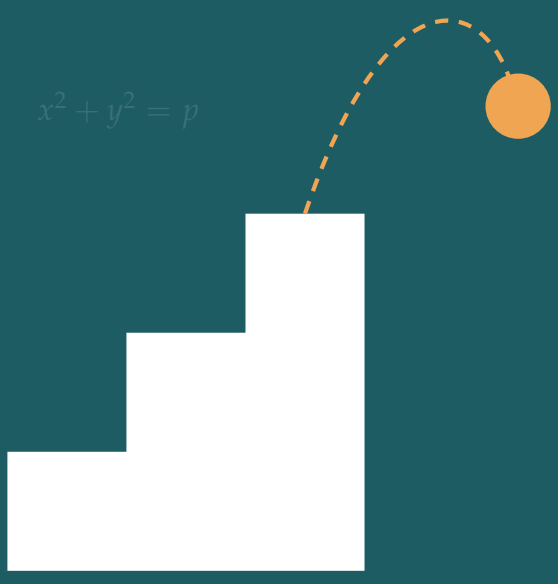
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1994년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1994년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1994년 풀이

1994년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 38개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q2 로그 미분법 순수수학 . . . 3

Q4 역탄젠트 적분 순수수학 . . . 7

Q5 포물선 위의 자취 순수수학 . . . 11

Q6 복소함수의 합성 순수수학 . . . 15

Q8 치환적분 순수수학 . . . 19

Q9 포물체 운동 역학 . . . 22

Q10 원운동 역학 . . . 26

Q11 경사면 위의 연결된 입자 역학 . . . 30

Q13 지시변수 확률과 통계 . . . 34

Q14 지수분포의 순서통계량 확률과 통계 . . . 37

STEP II

Q1 나누어떨어짐과 십진법 자릿수 순수수학 . . . 41

Q2 르장드르 다항식 순수수학 . . . 44

Q3 함수방정식 순수수학 . . . 48

Q4 타원의 넓이 순수수학 . . . 52

Q5 실근의 개수 세기 순수수학 . . . 57

Q6 삼각함수의 망원급수 순수수학 . . . 61

Q7 아폴로니오스의 원 순수수학 . . . 64

Q8 이차 모형의 최적화 순수수학 . . . 68

Q9 강체의 평형 역학 . . . 72

Q10 탄성 끈과 단진동 역학 . . . 76

Q11 포물체와 폭발 역학 . . . 80

Q12 조건부 확률 확률과 통계 . . . 84

Q13 쿠폰 수집가 문제 확률과 통계 88
Q14 기하학적 확률 확률과 통계 92

STEP III

Q1 점화 공식 순수수학 96
Q2 상반 사차방정식 순수수학 100
Q3 구, 평면과 연결 순수수학 104
Q4 상미분방정식의 특이해 순수수학 108
Q5 매클로린 급수 순수수학 112
Q6 아르강 도표에서의 회전 순수수학 116
Q7 군 동형사상 순수수학 120
Q8 네 제곱수 항등식 순수수학 124
Q9 등시곡선과 충돌 역학 127
Q10 상대 속도 역학 131
Q11 강체의 평형 역학 135
Q12 첫걸음 분석 확률과 통계 139
Q13 지수분포를 따르는 수명 확률과 통계 143
Q14 기하학적 확률 확률과 통계 147

풀이

STEP I 1994, 문제 2

순수수학 • 로그 미분법

> **STEP I 1994, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q2

핵심 아이디어

거듭제곱 미분법(power rule)은 변수가 밑에 있고 지수가 고정되어 있을 때 쓸 수 있고, 지수함수 미분법(exponential rule)은 밑이 고정되어 있고 변수가 지수에 있을 때 쓸 수 있다. x가 두 자리에 모두 나타나는 순간, 어느 법칙도 바로 적용할 수 없다. 해결책은 모든 것을 e의 거듭제곱으로 나타내는 것, 또는 같은 말이지만 양변에 로그를 취한 뒤 음함수 미분(implicit differentiation)을 하는 것이다. 로그는 다루기 힘든 거듭제곱을 곱으로 바꾸어 주고, 곱은 우리가 다룰 수 있다.

전체에 걸쳐 $x > 0$이라 하고(그렇지 않으면 x^x와 $\ln x$는 의미가 없다), (ii)에서 밑 a는 양수여야 한다.

풀이

반복해서 쓰는 도구는 하나뿐이다. $u > 0$일 때

$$u^v = \mathrm{e}^{v \ln u},$$

이므로 $y = u^v$이면 $\ln y = v \ln u$이고, 연쇄 법칙(chain rule)으로 미분하면 $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v \ln u)$를 얻는다.

소문항 (i)

여기서는 지수가 상수이므로 보통의 거듭제곱 미분법이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^a = a\, x^{a-1}.$$

이것이 정수뿐 아니라 모든 실수 a에 대해 성립하는 이유를 알고 싶다면 $x^a = \mathrm{e}^{a\ln x}$로 쓰면 된다. 연쇄 법칙에 의해 $\mathrm{e}^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x} = a\,x^a/x = a\,x^{a-1}$이다.

소문항 (ii)

이번에는 밑이 상수이다. $\ln a$가 그저 상수임에 유의하여 $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$로 쓰면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,a^x = \ln a\;\mathrm{e}^{x\ln a} = a^x\ln a.$$

이것이 (i)과 얼마나 다른지 주목하라. 답은 $x\,a^{x-1}$이 아니다.

소문항 (iii)

$y = x^x$라 하자. 로그를 취하면 $\ln y = x\ln x$이다. 양변을 미분하되 우변에는 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 1+\ln x,$$

따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^x = x^x\,(1+\ln x).$$

? 생각해 보기 그냥 거듭제곱 미분법을 써서 $x\cdot x^{x-1} = x^x$를 얻으면 왜 안 되는가?

거듭제곱 미분법은 지수가 상수라고 가정하고, 지수함수 미분법은 밑이 상수라고 가정한다. 여기서는 둘 다 변한다. 사실 정답은 두 "틀린" 답의 합과 정확히 같다. 지수를 고정된 것으로 보면 $x\cdot x^{x-1} = x^x$를, 밑을 고정된 것으로 보면 $x^x\ln x$를 얻는데, 참인 도함수는 $x^x + x^x\ln x$이다. 이것은 다변수 연쇄 법칙(multivariable chain rule)이 모습을 바꾸어 나타난 것이다. $y = u^v$일 때 각 변수가 저마다의 변화율을 보태는 것이다.

소문항 (iv)

$y = x^{(x^x)}$라 하자. 이것은 지수 자체가 x^x인 탑 모양의 거듭제곱이다. 로그를 취하면

$$\ln y = x^x\ln x.$$

우변을 곱의 미분법으로 미분하되, x^x의 도함수는 (iii)의 결과를 쓴다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^x(1+\ln x)\cdot\ln x + x^x\cdot\frac{1}{x}\\ &= x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2\right).\end{aligned}$$

$y = x^{(x^x)}$를 곱하고 x의 거듭제곱을 합치면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^{(x^x)} = x^{(x^x)}\, x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2\right) = x^{x^x + x}\left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2\right).$$

$\frac{1}{x}$를 괄호 밖으로 빼서 정리하면 $x^{x^x+x-1}(1 + x\ln x + x(\ln x)^2)$로도 쓸 수 있다.

소문항 (v)

> **?** **생각해 보기** $(x^x)^x$는 (iv)의 식과 같은 것이 아닌가?

그렇지 않다. 지수법칙(law of indices) $(u^m)^n = u^{mn}$에 의해 $(x^x)^x = x^{x\cdot x} = x^{x^2}$인데, (iv)에서는 지수가 x^2이 아니라 x^x이다. 두 식은 $x = 1$과 $x = 2$에서 우연히 일치하지만($x = 2$에서 둘 다 16이다), $x = 3$에서는 하나는 3^{27}이고 다른 하나는 겨우 3^9이다.

그러므로 $y = x^{x^2}$이라 하자. 그러면 $\ln y = x^2 \ln x$이고, 곱의 미분법에 의해

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x\,(1 + 2\ln x).$$

따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(x^x)^x = x^{x^2} \cdot x\,(1 + 2\ln x) = x^{x^2+1}\,(1 + 2\ln x).$$

(대신 $(x^x)^x$를 직접 미분해도 된다. $\ln y = x\ln(x^x) = x^2\ln x$로 같은 식이 나온다.)

검산

- $x = 1$에서 (iii), (iv), (v)는 모두 도함수 값 1을 준다. 예를 들어 (iv)에서는 $1^{1+1}(1 + 0 + 0) = 1$이다. 중심 차분(central difference) $\big(f(1.000001) - f(0.999999)\big)/0.000002$도 이와 일치한다.
- x^x는 $1 + \ln x = 0$이 되는 $x = \mathrm{e}^{-1}$에서 최솟값을 갖고, $(x^x)^x = x^{x^2}$은 $1 + 2\ln x = 0$이 되는 $x = \mathrm{e}^{-1/2}$에서 최솟값을 갖는다. 둘 다 그래프 계산기로 확인할 수 있다.
- $0.2 \le x \le 2.5$ (그리고 $0.2 \le a \le 4$)인 임의의 점 2000개에서 모든 공식을 수치 미분값과 비교했는데, 상대 오차는 항상 10^{-9}보다 작았다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = x\cdot x^{x-1}$ 또는 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = x\,a^{x-1}$로 쓰는 것. 거듭제곱 미분법은 지수가 상수여야 한다.
- (iv)와 (v)를 같은 함수로 취급하는 것. 거듭제곱은 결합법칙(associativity)이 성립하지 않는다. 일반적으로 $x^{(x^x)} \neq (x^x)^x$이다.

▶ $\ln y$를 미분한 뒤 다시 y를 곱하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

a가 무리수일 때, 예컨대 $x^{\sqrt{2}}$에서 x^a는 도대체 무슨 뜻일까? 대학에서는 먼저 exp를 멱급수(power series)로 정의하고 ln을 그 역함수로 정의한 뒤, $u > 0$에 대해 $u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$로 정의하는 것이 답이다. 그러면 모든 지수법칙과 위의 도함수들은 정리(theorem)가 된다. 이 내용은 Abbott의 *Understanding Analysis*나 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*에서 꼼꼼하게 다룬다. (iii)에서 본 "두 틀린 답의 합"은 편도함수(partial derivative)와 다변수 연쇄 법칙을 처음 엿보는 것이다.

풀이

STEP I 1994, 문제 4

순수수학 • 역탄젠트 적분

> **STEP I 1994, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q4

핵심 아이디어

소문항 (i)은 반각 항등식(half-angle identity)이고, 소문항 (ii)는 "완전제곱식(completing the square)으로 만든 뒤 $\tan^{-1}$을 쓰는" 표준적인 적분이다. 마지막 적분은 $k = \cos\alpha$로 둔 소문항 (ii)이며, 이때 $\sqrt{1-k^2} = \sin\alpha$가 되어 분자의 인수 $\sin\alpha$와 약분된다. 정말로 주의해야 할 곳은 마지막 단계뿐이다. 탄젠트 값에 $\tan^{-1}$을 취하면 그 각이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에 있을 때에만 원래의 각이 다시 나온다.

풀이

소문항 (i)

배각 공식(double-angle formulae) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$와 $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$를 쓰면

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha,$$

이고, 이 식은 $\sin\alpha \neq 0$일 때(따라서 양변이 모두 정의될 때) 항상 성립한다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

소문항 (ii)

분모를 완전제곱식으로 만든다.

$$1 - 2kx + x^2 = (x-k)^2 + (1-k^2).$$

$|k| < 1$이므로 상수 $1-k^2$은 양수이고, 따라서 $a = \sqrt{1-k^2} > 0$으로 두어 $1-k^2 = a^2$이라 쓸 수 있다. (조건 $|k| < 1$이 쓰이는 곳이 바로 여기이다. 그렇지 않으면 분모가 인수분해되

어 로그가 나온다.) $x-k=a\tan\theta$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x=a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이므로

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-k)^2+a^2}&=\int\frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}\,\mathrm{d}\theta=\int\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\theta}{a}+C\\&=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-k}{\sqrt{1-k^2}}\right)+C,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. (같은 이야기로, 우변을 미분해 보아도 된다. 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1/a}{1+(x-k)^2/a^2}=\dfrac{1}{(x-k)^2+a^2}$이다.)

마지막 적분

$k=\cos\alpha$로 두자. $0<\alpha<\pi$이므로 $|k|<1$이고, 따라서 소문항 (ii)를 적용할 수 있으며, $\sin\alpha>0$이므로

$$\sqrt{1-k^2}=\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$$

이다(이 구간에서 $\sin\alpha>0$이므로 $-\sin\alpha$가 아니다). 따라서 분자의 인수 $\sin\alpha$가 소문항 (ii)의 인수 $1/\sqrt{1-k^2}$과 약분된다.

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x&=\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]_0^1\\&=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=\tan^{-1}\left(\tan\tfrac{1}{2}\alpha\right)+\tan^{-1}(\cot\alpha),\end{aligned}$$

여기서 첫째 항에는 소문항 (i)을, 둘째 항에는 $\tan^{-1}$이 기함수(odd function)라는 사실을 썼다.

> **?** **생각해 보기** $\tan^{-1}(\tan\theta)$는 항상 θ와 같은가?

그렇지 않다. $\tan^{-1}$의 값은 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$에 속하므로, $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$는 θ가 그 구간에 있을 때에만 성립한다. 각 항을 확인해 보자.

- $0<\alpha<\pi$이므로 $0<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{2}$이고, 따라서 $\tan^{-1}\left(\tan\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}\alpha$이다.
- $\cot\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$로 쓰자. $0<\alpha<\pi$이므로 각 $\frac{\pi}{2}-\alpha$는 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$에 있고, 따라서 $\tan^{-1}(\cot\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha$이다.

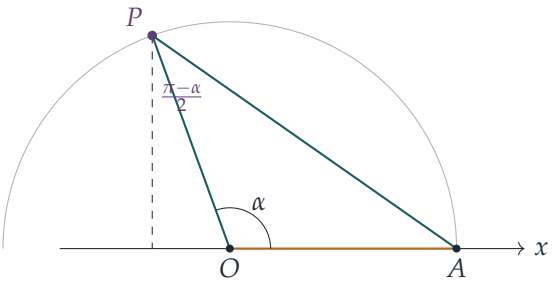
두 항을 더하면

$$\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi-\alpha}{2},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

다른 방법: 그림으로 보기

이 답에는 멋진 기하학적 이유가 있다. 단위원(unit circle) 위의 점 $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, 원점 O, 점 $A = (1,0)$을 생각하자. 점 $X = (x,0)$이 x축을 따라 움직일 때, PX와 P를 지나는 아래쪽 수직선 사이의 각 θ는 $\tan\theta = (x - \cos\alpha)/\sin\alpha$를 만족하고, 피적분함수(integrand)는 정확히 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$이다. 따라서 이 적분은 X가 O에서 A까지 움직이는 동안 쓸고 지나간 각, 곧 각 OPA이다. 삼각형 OPA는 $OP = OA = 1$이고 O에서의 꼭지각이 α인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로, 두 밑각은 각각 $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$이다.



검산

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$일 때 적분은 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$이고, 공식도 $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$를 준다.
- 수치적으로 $\alpha = 1$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)은 $1.0707963\ldots$을 주며, 이는 $\frac{1}{2}(\pi - 1) = 1.0707963\ldots$과 일치한다.
- $\alpha \to \pi^-$일 때 $[0,1]$의 각 x에 대하여 피적분함수는 0으로 가고, $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$도 마찬가지이다.

흔한 실수

- $\frac{\pi}{2} - \alpha$가 $\tan^{-1}$의 치역에 있는지 확인하지 않고 $\tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$라고 쓰는 것. 같은 변형은 α가 $(0,\pi)$ 밖에 있으면 성립하지 않는다.
- 이유를 밝히지 않고 $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = |\sin\alpha|$를 $\sin\alpha$로 두는 것. 여기서는 $0 < \alpha < \pi$이기 때문에 그렇게 할 수 있다.

STEP 너머

$\alpha \to 0^+$일 때 답은 $\frac{\pi}{2}$로 가지만, $\alpha = 0$에서 피적분함수는 항등적으로 0이다. 피적분함수가 $x = 1$ 근처에서 높고 좁은 뾰족한 모양이 되는데, 그 넓이는 줄어들지 않기 때문이다.

이것은 반평면의 푸아송 핵(Poisson kernel)이며, 극한과 적분의 순서를 함부로 바꾸면 틀린 답이 나온다. 언제 그런 교환이 허용되는지는 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 질문이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. "대응하는 각(angle subtended)"이라는 기하학적 그림은 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 아름답게 전개되어 있다.

풀이

STEP I 1994, 문제 5

순수수학 • 포물선 위의 자취

> **STEP I 1994, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q5

핵심 아이디어

먼저 기하학적 조건을 대수로 바꾼다. 원점에서의 직각은 위치벡터(position vector) $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 수직(perpendicular)이라는 뜻이며, $y = x^2$ 위의 점에 대해서는 이것이 p와 q 사이의 하나의 깔끔한 관계식으로 정리된다. 그러면 두 점 R와 T의 좌표가 모두 p와 q에 대해 대칭이므로, 모든 것을 $p+q$와 pq로 나타낸 뒤 소거한다.

풀이

직각이 될 조건

P와 Q 중 어느 것도 원점일 수 없다. 원점이라면 각이 정의되지 않기 때문이다. 따라서 $p \neq 0$이고 $q \neq 0$이다. 각 POQ가 직각일 필요충분조건은 $\overrightarrow{OP} = (p, p^2)$와 $\overrightarrow{OQ} = (q, q^2)$의 스칼라곱(scalar product)이 0이 되는 것이다.

$$pq + p^2q^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq(1+pq) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq = -1,$$

여기서 $pq \neq 0$으로 나누었다. (같은 말로, OP와 OQ의 기울기(gradient) p와 q의 곱이 -1이다.)

따라서 구하는 쌍은 정확히 $p \neq 0$인 $q = -1/p$이다. p가 0이 아닌 모든 실수를 움직일 때, 합

$$s = p + q = p - \frac{1}{p}$$

는 모든 실숫값을 취한다. 임의의 s가 주어지면 이차방정식(quadratic) $p^2 - sp - 1 = 0$의 판별식(discriminant)이 $s^2 + 4 > 0$이므로 실근을 가지며, 두 근의 곱이 -1이므로 어느 근도 0이 아니다. 아래의 자취(locus)가 곡선의 일부가 아니라 곡선 전체임을 말할 때 이 사실

이 필요하다.

소문항 (i)

PQ의 중점은

$$R = \left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2} \right).$$

이다. $R = (x, y)$라 하면 $p + q = 2x$이다. $pq = -1$을 이용하면

$$y = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{2} = \frac{4x^2+2}{2} = 2x^2 + 1.$$

$p + q$가 모든 실숫값을 취하므로 x도 그러하고, 따라서 R의 자취는 포물선(parabola)

$$y = 2x^2 + 1,$$

전체이다. 꼭짓점(vertex)은 $(0, 1)$이고 축(axis)은 y축이다. 이 포물선은 $y = x^2$보다 폭이 좁고, $2x^2 + 1 - x^2 = x^2 + 1 > 0$이므로 완전히 그 위쪽에 놓인다. 이는 R가 볼록(convex) 곡선의 현(chord)의 중점이라는 사실과 잘 맞는다.

소문항 (ii)

$y = x^2$을 미분하면 P에서의 접선(tangent)의 기울기는 $2p$이므로, 그 방정식은

$$y - p^2 = 2p(x - p), \qquad \text{즉,} \qquad y = 2px - p^2,$$

이고, 마찬가지로 Q에서의 접선은 $y = 2qx - q^2$이다. $p \neq q$이므로(두 수의 곱이 -1이므로 같을 수 없다) 두 접선은 평행하지 않다. 두 방정식을 빼면

$$2(p-q)x = p^2 - q^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p+q}{2},$$

이고, 여기서 $p - q \neq 0$으로 나누었다. 그러면

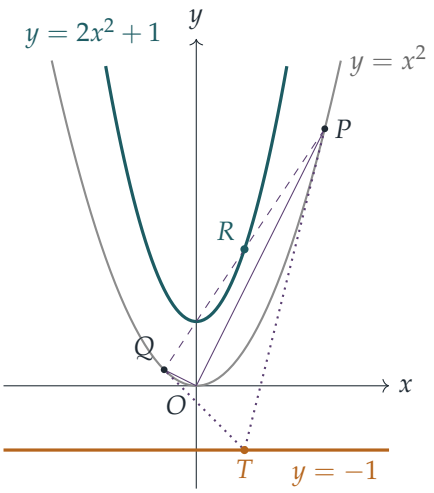
$$y = 2p \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 = pq = -1.$$

? **생각해 보기** T의 y좌표는 상수이다. 자취는 한 점인가, 선분인가, 아니면 직선 전체인가?

T의 x좌표는 $\frac{1}{2}(p+q)$이고, 앞에서 이것이 모든 실숫값을 취함을 보였다. 따라서 T는 직선 위 어디에나 있을 수 있고, T의 자취는 직선

$$y = -1.$$

전체이다. 또한 T는 항상 R의 바로 아래에 있다는 점에 주목하자. 두 점의 x좌표가 모두 $\frac{1}{2}(p+q)$이기 때문이다.



그림은 $p = 2, q = -\frac{1}{2}$인 한 경우를 보여 준다. 이때 $R = (\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$는 청록색 포물선 위에, $T = (\frac{3}{4}, -1)$는 호박색 직선 위에 있다.

검산

$p = 1, q = -1$로 두자. 그러면 $P = (1,1)$, $Q = (-1,1)$이고, OP, OQ는 직선 $y = \pm x$로서 분명히 수직이다. 중점은 $(0,1)$로 $y = 2x^2 + 1$의 꼭짓점이며, 접선 $y = 2x - 1$과 $y = -2x - 1$은 $y = -1$ 위의 점 $(0,-1)$에서 만난다. 그림에서처럼 $p = 2, q = -\frac{1}{2}$이면 $2 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{17}{8}$로, 예상대로이다. 10^5개의 무작위 p 값에 대한 수치 검산으로, R가 약 10^{-10} 이내의 오차로 $y = 2x^2 + 1$을 만족하고 T가 항상 $y = -1$을 가짐을 확인하였다.

흔한 실수

- $pq(1 + pq) = 0$에서 멈추고 $pq = 0$이 왜 배제되는지 설명하지 않는 것. $pq = 0$이면 P 또는 Q가 원점에 놓인다.
- 모든 x가 실제로 나타나는지 확인하지 않고 자취의 방정식만 제시하는 것. 이를 확인해야 그래프가 곡선의 일부가 아니라 전체임을 알 수 있다.
- T가 준선(directrix) 위에 있다고 가정하는 것. $y = x^2$의 준선은 $y = -\frac{1}{4}$이다. 접선들이 준선 위에서 만나는 것은 PQ가 초점(focus)을 지날 때이며, 이는 $\angle POQ = 90°$와는 다른 조건이다.

STEP 너머

여기서 현 PQ는 항상 고정점 $(0,1)$을 지난다. 그 방정식이 $y = (p+q)x - pq = (p+q)x + 1$이기 때문이다. 한 고정점을 지나는 직선족과, 이에 대응하여 접선들이 만나는 "극(pole)"(여기서는 $(0,1)$의 극선(polar)인 직선 $y = -1$ 위에 있다)은 사영기하학(projective geometry)의 출발점이다. 사영기하학에서는 원뿔곡선(conic)과 그 극–극선 관계를 체계적으로 연구한다. 이런 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 1994, 문제 6

순수수학 • 복소함수의 합성

> **STEP I 1994, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q6

핵심 아이디어

몫의 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)를 구하려면 분자와 분모에 분모의 켤레복소수(conjugate)를 곱한다. x가 실수이므로 그 켤레복소수는 쉽게 적을 수 있다. 함수를 거듭 적용할 때에는 (i)에서 구한 복잡한 실수부와 허수부를 식에 한 번 더 넣는 것보다, 일반적인 z에 대하여 f를 자기 자신과 **대수적으로** 합성(compose)하는 편이 훨씬 깔끔하다. $\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))$를 깔끔한 꼴로 정리하고 나면 마지막 소문항은 한 줄짜리 대입으로 끝난다.

풀이

x가 실수이므로 $\mathrm{i}x+1$의 실수부는 1이다. 따라서 이 값은 결코 0이 아니고, $\mathrm{f}(x)$는 모든 실수 x에 대하여 정의된다.

소문항 (i)

x가 실수이므로 $\mathrm{i}x+1$의 켤레복소수는 $1-\mathrm{i}x$이다. 분자와 분모에 이것을 곱하면

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) = \frac{(\mathrm{i}x-1)(1-\mathrm{i}x)}{(1+\mathrm{i}x)(1-\mathrm{i}x)} &= \frac{\mathrm{i}x+x^2-1+\mathrm{i}x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2+1} + \mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

두 분수가 모두 실수이므로, 이것이 구하는 실수부와 허수부이다.

소문항 (ii)

임의의 복소수 w에 대하여 $ww^* = (\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2$이다. 소문항 (i)을 이용하면

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x)^* = \frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2} = 1.$$

따라서 $|\mathrm{f}(x)| = 1$이다. 즉 f는 모든 실수를 단위원(unit circle) 위의 점으로 보낸다.

소문항 (iii)

(i)의 답을 f에 대입하는 대신, 일반적인 z에 대하여 합성한다. $w = \mathrm{f}(z) = \dfrac{\mathrm{i}z-1}{\mathrm{i}z+1}$로 놓고 $\mathrm{f}(w) = \dfrac{\mathrm{i}w-1}{\mathrm{i}w+1}$의 분자와 분모에 $\mathrm{i}z+1$을 곱하면

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(z)) &= \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)-(\mathrm{i}z+1)}{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)+(\mathrm{i}z+1)} = \frac{-z-\mathrm{i}-\mathrm{i}z-1}{-z-\mathrm{i}+\mathrm{i}z+1} \\ &= \frac{-(1+\mathrm{i})(z+1)}{(1-\mathrm{i})(1-z)} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}$를 이용하였다.

> **생각해 보기** $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$는 모든 실수 x에 대하여 정의되는가?

그렇지 않다. $\mathrm{i}w+1 \neq 0$, 즉 $\mathrm{f}(x) \neq \mathrm{i}$이어야 한다. 소문항 (i)에 따르면 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{i}$가 되려면 $x^2-1=0$이고 $2x = x^2+1$이어야 하는데, 이는 $x=1$일 때뿐이다. 이것은 위 식의 분모에 있는 인수 $x-1$과 맞아떨어진다. 따라서 $x \neq 1$인 실수 x에 대하여

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}\,\frac{x+1}{x-1}, \qquad \text{따라서} \qquad \operatorname{Re}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \frac{x+1}{x-1}.$$

f를 처음 적용하면 실수축이 단위원으로 옮겨지고, 두 번째로 적용하면 단위원이 허수축(imaginary axis)으로 옮겨진다.

소문항 (iv)

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$을 실수로 하여 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}y$로 쓰자. 그러면 $\mathrm{i}(\mathrm{i}y) = -y$이므로

$$\mathrm{f}(\mathrm{i}y) = \frac{-y-1}{-y+1} = \frac{y+1}{y-1}.$$

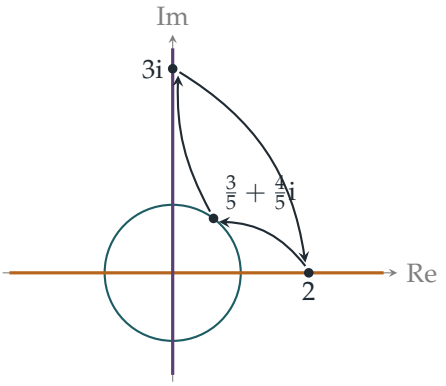
$y=1$이 되려면 $x+1 = x-1$이어야 하는데 이는 불가능하므로, 이 값은 정의된다. 이제

$$y+1 = \frac{2x}{x-1}, \qquad y-1 = \frac{2}{x-1},$$

이므로

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x \qquad \text{모든 실수} x \neq 1.$$

f를 세 번 적용하면 처음 자리로 돌아온다. 세 번째 적용이 허수축을 다시 실수축으로 보내기 때문이다. 그림은 $x = 2$일 때의 순환 $2 \mapsto \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \mapsto 3\mathrm{i} \mapsto 2$를 보여 준다.



검산

- $x = 0$: $\mathrm{f}(0) = -1$이며, 이는 단위원 위에 있으므로 (i)과 일치한다. 이어서 $\mathrm{f}(-1) = \dfrac{-\mathrm{i} - 1}{-\mathrm{i} + 1} = -\mathrm{i}$로 $\mathrm{i}\frac{0+1}{0-1}$과 일치하고, $\mathrm{f}(-\mathrm{i}) = \frac{1-1}{1+1} = 0$이다.
- $x = 2$: 소문항 (i)에서 $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$, 소문항 (iii)에서 3i를 얻고, 소문항 (iv)에서 2로 돌아온다. 무작위로 고른 실수 x (그리고 무작위 복소수 z) 10^4개에 대한 수치 검산으로 위의 모든 식이 반올림 오차 범위 안에서 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- (i)에서 구한 실수부와 허수부를 f에 직접 대입하는 것. 그렇게 해도 되지만 계산이 무겁고 틀리기 쉽다. z에 대하여 합성하는 편이 훨씬 깔끔하다.
- $\mathrm{f}(1) = \mathrm{i}$이고 $\mathrm{f}(\mathrm{i})$의 분모가 0이 되므로, (iii)과 (iv)에서 $x = 1$을 제외해야 한다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

$z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$ 꼴의 함수를 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformation*)이라 한다. 이러한 사상은 원과 직선을 원과 직선으로 보낸다. 여기서 본 것처럼 실수축은 단위원으로, 단위원은 허수축으로, 그리고 다시 실수축으로 돌아간다. 두 뫼비우스 변환의 합성은

2×2 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 곱에 대응한다. 사실 모든 복소수 z에 대하여 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))) = z$이므로, f는 뫼비우스 변환의 군(group)에서 위수(order)가 3이다. 또한 (i)에 $x = \tan\frac{\theta}{2}$를 대입하면 $\mathrm{f}(x) = -\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$를 얻는데, 이는 익숙한 "$t$-치환"에 의한 원의 매개변수화(parametrisation)이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 뫼비우스 변환과 그 기하에 관한 아름다운 장이 있다.

풀이

STEP I 1994, 문제 8

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1994, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q8

핵심 아이디어

치환(substitution) $\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$는 구간(interval) $[0, \frac{1}{4}\pi]$를 자기 자신으로 뒤집어 옮기고, 덧셈정리(addition formula)는 $1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - \phi)$를 $2/(1 + \tan\phi)$로 바꾼다. 그러면 적분(integral)이 우변에 음의 부호를 달고 다시 나타나므로, 어려운 적분을 직접 계산하는 대신 그 적분에 대한 방정식을 풀면 된다. 뒤의 두 적분은 모양만 바꾼 같은 적분이다. 하나는 $x = \tan\theta$로 치환하면, 다른 하나는 반각 공식(half-angle formulae)을 쓰면 이 적분이 된다.

풀이

첫 번째 적분

이 적분을 I라 하자. $\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$로 놓으면 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$이고, $\theta = 0$일 때 $\phi = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$일 때 $\phi = 0$이다. 따라서

$$I = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{0} \ln\bigl(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi)\bigr)\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \ln\bigl(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi)\bigr)\,\mathrm{d}\phi.$$

$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$을 이용하여 덧셈정리를 쓰면

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi) = 1 + \frac{1 - \tan\phi}{1 + \tan\phi} = \frac{2}{1 + \tan\phi}.$$

($[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\tan\phi \geq 0$이므로 분모가 0이 되는 일이 없고, 모든 로그(logarithm)의 진수는 양수이다.) 그러므로

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \bigl(\ln 2 - \ln(1 + \tan\phi)\bigr)\,\mathrm{d}\phi = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 - I,$$

이다. 마지막 적분은 적분변수(dummy variable)의 이름만 바꾼 I 자체이기 때문이다.

생각해 보기 원시함수를 한 번도 구하지 않았다. 왜 이렇게 해도 되는가?

원시함수(antiderivative)는 필요 없다. I는 하나의 수일 뿐이고, 치환을 통해 그 수가 만족해야 하는 방정식 $I = \frac{1}{4}\pi \ln 2 - I$를 얻었다. 이를 풀면

$$2I = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi \ln 2,$$

이므로 증명하려던 결과를 얻는다.

$1+x^2$이 들어 있는 적분

인수 $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$을 보면 $x = \tan\theta$로 치환할 생각이 든다. 그러면 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (1+x^2)\,\mathrm{d}\theta$이다. 적분 구간의 끝 $x=0$과 $x=1$은 각각 $\theta = 0$과 $\theta = \frac{1}{4}\pi$가 된다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi \ln 2.$$

$\sin x$와 $\cos x$가 들어 있는 적분

이 적분을 J라 하자. 가장 빠른 길은 대칭(symmetry)을 이용하는 것이다. $x = \frac{1}{2}\pi - u$로 치환하면 sin과 cos이 서로 바뀌고 $[0, \frac{1}{2}\pi]$는 자기 자신으로 옮겨지므로

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\cos u}{1+\sin u}\right)\mathrm{d}u = -J,$$

이고, 따라서 $J = 0$이다. (같은 말이지만, $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(1+\sin x)\,\mathrm{d}x$와 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$가 같으므로 그 차는 0이다.)

생각해 보기 첫 번째 결과는 어디에 쓰이는가?

J가 I와 어떻게 연결되는지 살펴볼 만하다. 아마 문제에서 이 적분을 여기에 둔 이유도 그 때문일 것이다. $t = \frac{1}{2}x$로 놓으면 반각 공식에 의해

$$1+\cos x = 2\cos^2 t, \qquad 1+\sin x = (\cos t + \sin t)^2,$$

이므로

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{(\cos t+\sin t)^2}{2\cos^2 t} = \tfrac{1}{2}(1+\tan t)^2.$$

x가 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 위를 움직이면 t는 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 위를 움직이고, $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$이다. 따라서

$$J = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \big(2\ln(1+\tan t) - \ln 2\big)\,2\,\mathrm{d}t = 4I - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = 0,$$

이고, 이는 대칭을 이용한 논증과 일치한다. 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

검산

심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 tan 적분과 $1+x^2$ 적분 모두 0.2721982613이 나와 $\frac{1}{8}\pi\ln 2 = 0.2721982613\ldots$과 일치한다. 세 번째 적분은 기계 정밀도 범위에서 0이 나온다. 손으로 대략 확인해 볼 수도 있다. 피적분함수(integrand) $\ln(1+\tan\theta)$는 0에서 $\ln 2$까지 증가하므로 I는 대략 $\frac{1}{4}\pi\ln 2$의 절반쯤이어야 한다. 바로 그것이 답이다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$라는 것과 적분 구간의 끝이 서로 바뀐다는 것 중 하나를 잊는 실수. 두 번의 부호 변화는 서로 상쇄된다. 하나만 반영하면 $I = -\frac{1}{4}\pi\ln 2 - I$가 되어 (양수인 적분의 값이 음수로 나온다).
- 덧셈정리의 분모를 잊고 $\tan(\frac{1}{4}\pi - \phi) = 1 - \tan\phi$로 쓰는 실수.
- $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ 대칭을 알아차리지 못하고 세 번째 적분에 오랜 시간을 쓰는 실수.

STEP 너머

구간을 뒤집는 치환을 하고 그 결과를 원래 적분과 더하는 기법, 즉 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$를 이용하는 기법을 어떤 책에서는 킹 성질(King property)이라고 부른다. 이 기법으로 유명한 결과 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$도 얻을 수 있다. 대학에서는 이런 결과들이 매개변수가 있는 정적분(definite integrals with parameters)과 복소 경로적분(contour integration)의 이론 안에 자리 잡는데, 여기서는 원시함수를 구하지 않고도 적분들을 통째로 계산한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소 해석의 방법으로 이런 결과를 얻는 과정을 보여 주고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 대칭 기법을 연습할 수 있는 STEP 스타일의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 1994, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP I 1994, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s1-q9

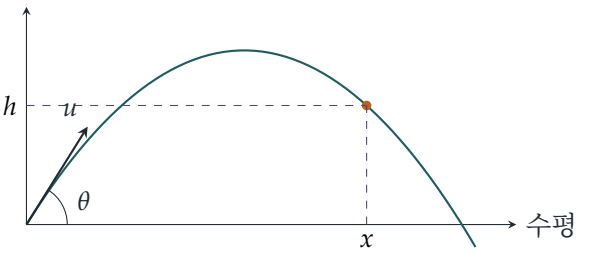
핵심 아이디어

발사각 θ는 우리가 모르는 값이므로 소거한다. 수평 방향과 연직 방향의 식에는 각각 $u\cos\theta$와 $u\sin\theta$가 들어 있으므로, 두 식을 제곱하여 더하면 θ가 완전히 사라진다. 그 결과로 얻는 식은 t^2에 대한 이차방정식(quadratic)이며, 이차방정식은 판별식(discriminant)이 음이 아닐 때에만 실근을 가진다. 바로 이 조건이 사정거리(range)에 대한 한계가 된다.

풀이

t에 대한 방정식

포탄을 중력만 받으며 움직이는 질점(particle)으로 모형화하고, 원점에서 수평면 위로 각 θ만큼 기울여 발사한다고 하자. 시각 t에서 포탄은 수평 거리 x, 높이 h인 곳에 있으므로, 대포로부터의 거리는 요구한 대로 $\sqrt{x^2+h^2}$이다.



아래 방향으로 일정한 가속도 g가 작용하고 수평 방향의 힘은 없으므로

$$x = ut\cos\theta,$$
$$h = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

θ가 들어 있는 항만 한쪽으로 모으면

$$ut\cos\theta = x, \qquad ut\sin\theta = h + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

두 식을 제곱하여 더하고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하면

$$\begin{aligned} u^2t^2 &= x^2 + \left(h + \tfrac{1}{2}gt^2\right)^2 \\ &= x^2 + h^2 + ght^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4, \end{aligned}$$

이고, 이를 정리하면 요구한 대로

$$\tfrac{1}{4}g^2t^4 - (u^2 - gh)t^2 + h^2 + x^2 = 0,$$

을 얻는다.

사정거리의 한계

이제 u와 h를 고정하고, 높이 h에서 가능한 수평 거리 x가 어떤 값인지 알아보자. 어떤 시각 t에 포탄이 (x, h)에 있다면, $T = t^2$은

$$\tfrac{1}{4}g^2T^2 - (u^2 - gh)T + (h^2 + x^2) = 0.$$

의 실근이다.

> **생각해 보기** 이 방정식에는 x, h, u, t가 들어 있지만, 우리가 원하는 것은 x만에 대한 명제이다. 이차방정식이 실근을 가지려면 무엇이 성립해야 하는가?

실근을 가지려면 판별식이 음이 아니어야 한다.

$$\begin{aligned} (u^2 - gh)^2 - 4\cdot\tfrac{1}{4}g^2(h^2 + x^2) &\geq 0 \\ u^4 - 2u^2gh + g^2h^2 - g^2h^2 - g^2x^2 &\geq 0 \\ g^2x^2 &\leq u^2(u^2 - 2gh). \end{aligned}$$

$u^2 > 2gh$이므로 우변은 양수이고, 음이 아닌 제곱근을 취하면

$$x \leq \frac{u\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}.$$

따라서 높이 h에서의 수평 사정거리는 이 값을 결코 넘을 수 없으며, 이것이 보여야 할 내용이었다. ($u^2 < 2gh$이면 어떤 x에 대해서도 이 부등식이 성립할 수 없다. 높이 h가 포탄이 도달할 수 있는 최고 높이 $u^2/2g$보다 높기 때문이다.)

한계에 실제로 도달한다

등호가 성립한다는 것은 판별식이 0이라는 뜻이므로, 중근(double root)

$$t^2 = T = \frac{u^2 - gh}{2 \cdot \frac{1}{4}g^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2}.$$

을 가진다. 이 값은 양수이므로($h \geq 0$이면 $u^2 > 2gh \geq gh$이기 때문이고, $h < 0$이면 자명하다) 실제 시각 $t > 0$을 준다. 아직 어떤 각 θ가 $x = u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$와 함께 이 시각을 만들어 내는지 확인해야 한다. 두 성분 방정식으로부터 다음이 필요하다.

$$\sin\theta = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{ut}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{ut}.$$

위의 t^2 값을 대입하면 $h + \frac{1}{2}gt^2 = h + (u^2 - gh)/g = u^2/g$이므로

$$\sin\theta = \frac{u}{gt}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{gt}.$$

생각해 보기 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값을 따로따로 정했다. 두 값을 동시에 가지는 하나의 각이 존재한다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

두 값은 모두 양수이고, t^2의 값에 의해

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{u^2 + u^2 - 2gh}{g^2t^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2t^2} = 1$$

이다. 따라서 0과 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에 조건을 만족하는 각 θ가 정확히 하나 존재하며, 그 각은

$$\tan\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}.$$

로 주어진다. 이 각으로 발사하면 포탄은 시각 t에 높이 h에 있고 수평 거리는 정확히 $u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$이므로, $u^2 > 2gh$일 때 한계에는 항상 도달한다.

$h > 0$일 때 $\tan\theta > 1$임에 주목하자. 즉 대포보다 높은 주어진 높이에서 가장 멀리 도달하려면 45°보다 가파르게 발사해야 한다. 또 그 순간의 연직 속도는 $u\sin\theta - gt = (u^2 - g^2t^2)/(gt) = (2gh - u^2)/(gt) < 0$이므로, 포탄은 내려오는 도중에 높이 h에서의 가장 먼 지점에 도달한다.

검산

- $h = 0$이면 한계는 u^2/g이고 $\tan\theta = 1$이다. 이는 평지에서 45°로 쏠 때의 익숙한 최대 사정거리이다.

- $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $h = 10\,\mathrm{m}$이면 한계는 약 $29.15\,\mathrm{m}$이고, 이때 $\theta \approx 54.5°$이다.
- 무작위로 잡은 궤적에서 사차방정식(quartic)이 성립함을 수치적으로 확인하였고, 수천 개의 발사각을 조사해도 한계를 넘는 경우는 없지만 10^{-4} 이내로 가까워짐을 확인하였다. 위에서 구한 각은 한계에 정확히 도달한다.

흔한 실수

- x를 θ에 대해 미분하여 가장 좋은 θ를 찾으려는 것. 그렇게 할 수도 있지만 계산이 지저분하다. 판별식이 최적화를 대신 해 준다.
- 마지막 단계를 빠뜨리는 것. 판별식이 0이면 t의 값을 얻지만, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 확인하여 실제로 그 값을 만드는 각이 존재함을 여전히 보여야 한다.

STEP 너머

속력 u로 발사한 포탄이 도달할 수 있는 점들은 모든 궤적의 **포락선**(envelope)으로 둘러싸인 영역을 채운다. 이 포락선이 바로 "안전 포물선"(parabola of safety) $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$이다. 여기서 구한 한계를 정리하면, (x, h)에 도달할 수 있는 것은 그 점이 이 포물선 위 또는 아래에 있을 때와 정확히 같다는 것을 알 수 있다. 곡선족의 포락선은 같은 "중근" 아이디어에서 나오며, 변분법(calculus of variations)과 광학(optics)의 커스틱(caustics)에서도 다시 등장한다. 포물체 운동과 그 바탕의 역학에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 1994, 문제 10

역학 • 원운동

> **STEP I 1994, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q10

핵심 아이디어

이 문제는 늘어나는 줄로 된 원뿔 진자(conical pendulum)이다. 입자에는 연직 방향의 가속도가 없으므로 장력(tension)의 연직 성분은 무게와 평형을 이루고, 수평 성분은 구심력(centripetal force)을 제공한다. 새로운 점은 원의 반지름이 늘어난 길이(extension)에 따라 달라지고, 늘어난 길이는 다시 장력에 따라 달라진다는 것이다. 그래서 훅의 법칙(Hooke's law)이 모든 것을 하나로 묶어 준다. 부등식은 $\cos\theta$의 어떤 값들이 실제로 원운동을 나타내는지를 따져 보는 데서 나온다.

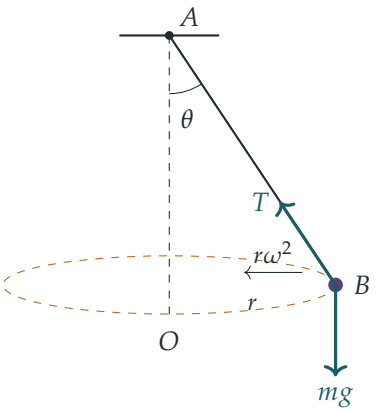
풀이

$\cos\theta$ 구하기

B를 입자로, AB를 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 줄로 모형화한다. 늘어난 길이를 x, 장력을 T라 하면

$$T = \frac{\lambda x}{l}, \qquad AB = l + x.$$

입자는 A의 연직 아래에 있는 점 O를 중심으로 반지름 $r = (l + x)\sin\theta$인 수평 원 위를 움직인다. 입자에 작용하는 힘은 무게와 BA 방향의 장력뿐이다.



연직 방향으로 힘을 분해하면 (연직 방향의 가속도는 없다)

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

중심 O를 향하는 수평 방향으로 힘을 분해하면 (가속도는 $r\omega^2$)

$$T\sin\theta = m\omega^2(l+x)\sin\theta.$$

진짜 원운동이라면 $\sin\theta \neq 0$이므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$T = m\omega^2(l+x). \tag{2}$$

이제 훅의 법칙에 의해 $\lambda x/l = m\omega^2(l+x)$, 즉

$$x\left(\lambda - m\omega^2 l\right) = m\omega^2 l^2.$$

$x > 0$이고 ((1)에서 $T > 0$이므로 줄은 늘어나 있다) $m\omega^2 l^2 > 0$이므로 $\lambda - m\omega^2 l > 0$이고

$$x = \frac{m\omega^2 l^2}{\lambda - m\omega^2 l}, \qquad l + x = \frac{l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l}.$$

그러면 (2)에서

$$T = \frac{m\omega^2 l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l},$$

이고, (1)에서

$$\boxed{\cos\theta = \frac{mg}{T} = \frac{g\left(\lambda - m\omega^2 l\right)}{l\lambda\,\omega^2}}$$

운동이 가능한 경우

? **생각해 보기** $\cos\theta$에 대한 각각의 제한 조건은 물리적으로 무엇을 뜻하는가?

줄이 팽팽한 상태로 입자가 A 아래에서 수평 원운동을 하려면 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, 즉 $0 < \cos\theta < 1$이어야 한다. 역으로, ω가 위 공식에서 $0 < \cos\theta < 1$을 준다면, $(\lambda - m\omega^2 l > 0$인 상태에서) 앞의 단계를 거꾸로 따라가면 (1)과 (2)를 만족하는 양의 늘어난 길이와 장력이 얻어지므로, 이 운동은 실제로 존재한다.

상계(*upper bound*). 다른 인수들은 모두 양수이므로 $\cos\theta > 0$은 정확히 $\lambda - m\omega^2 l > 0$일 때 성립한다. 이는

$$\omega^2 < \frac{\lambda}{ml}.$$

물리적 의미: ω가 너무 크면 줄이 아무리 유한하게 늘어나더라도 필요한 구심력을 제공할 수 없다. 늘어난 길이만큼 더 큰 힘이 필요한데, 그 필요한 힘이 줄이 제공하는 힘보다 더 빨리 커지기 때문이다.

하계(*lower bound*). $\cos\theta < 1$은

$$g\lambda - gm\omega^2 l < l\lambda\omega^2 \iff g\lambda < \omega^2 l(\lambda + mg) \iff \omega^2 > \frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)},$$

을 뜻한다. 여기서 처음에는 $l\lambda\omega^2 > 0$으로, 마지막에는 $l(\lambda + mg) > 0$으로 나누었으므로 부등호의 방향은 유지된다. 물리적 의미: ω가 너무 작으면 공식은 $\cos\theta \geq 1$을 요구하게 된다. 이때 가능한 것은 입자가 축 위에 정지한 채로 매달려 있는 경우($\theta = 0$)뿐이며, 이는 원운동이 아니다.

두 결과를 합치면, 운동이 가능한 것은

$$\frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)} < \omega^2 < \frac{\lambda}{ml},$$

일 때뿐이다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- 하계에서는 $\cos\theta = 1$이다. 이때 줄은 연직이고 장력은 mg, 길이는 $l(\lambda + mg)/\lambda$인데, 이는 정확히 매달린 입자의 평형 길이이다. $\omega^2 = g/($그 길이$)$임에 주목하자. 이것은 익숙한 원뿔 진자의 임계 조건 $\omega^2 > g/L$이다.
- $\lambda \to \infty$일 때(늘어나지 않는 줄) 결과는 $\cos\theta = g/(l\omega^2)$가 되어 표준적인 원뿔 진자와 같아지고, 범위는 $\omega^2 > g/l$이 된다.
- 수치적으로, $g = 9.8$로 두고 m, l, λ, ω를 무작위로 골라 훅의 법칙과 수평 방향 방정식을 이분법(bisection)으로 직접 풀면 공식과 같은 $\cos\theta$가 나오고, 분해한 두 방정식이 모두 성립한다. 20 000개의 무작위 경우에서 운동은 정확히 부등식이 성립할 때 존재한다.

흔한 실수

- 반지름으로 $(l + x)\sin\theta$ 대신 $l\sin\theta$를 쓰는 실수: 줄은 늘어나 있다.
- $\sin\theta$로 나누는 것을 정당화하지 않아서, 왜 $\theta = 0$ (따라서 $\cos\theta = 1$)이 제외되는지를 놓치는 실수.
- $\cos\theta < 1$만 증명하고, $\cos\theta > 0$ (즉 늘어난 길이가 양수라는 조건)이 상계를 준다는 것을 잊는 실수.

STEP 너머

상계는 **폭주**(*runaway*), 즉 불안정성(instability)의 간단한 예이다. $\omega^2 \to \lambda/(ml)$일 때 필요한 늘어난 길이가 한없이 커진다. 같은 현상이 회전하는 탄성 막대나 회전하는 물체의 안정성에서도 나타나며, 하계는 분기(bifurcation), 즉 매달린 평형 상태가 원운동으로 바뀌는 지점이다. 회전 좌표계 역학에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 1994, 문제 11

역학 • 경사면 위의 연결된 입자

STEP I 1994, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

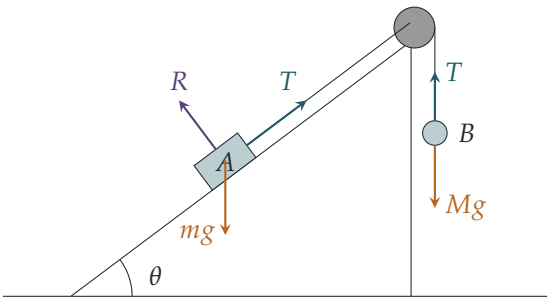
step.maths.org/questions/94-s1-q11

핵심 아이디어

기하적인 상황부터 살펴보자. 줄의 길이는 궤도의 길이와 정확히 같으므로, 수레(wagon)가 궤도의 맨 아래에 있을 때 공은 도르래(pulley) 바로 옆에 매달려 있다. 따라서 공은 경사면(incline)의 높이 $d\sin\theta$만큼 떨어지고, 수레는 경사면을 따라 같은 거리만큼 올라간다. 줄이 팽팽한(taut) 동안 계는 일정한 하나의 가속도로 움직인다. 공이 땅에 닿으면 줄이 느슨해지고(slack), 수레는 매끄러운 경사면을 따라 관성으로 올라갈 뿐이다. 따라서 소문항 (ii)는 수레에 남은 속력이 도르래까지 남은 거리를 다 갈 만큼 충분한지를 묻는 것이다.

풀이

수레와 공을 질점(particle)으로, 궤도를 매끄러운(smooth) 면으로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 줄로 보고, 줄은 가볍고 마찰 없는 도르래에 걸려 있다고 모형화한다. 따라서 장력(tension) T는 양쪽에서 같고, 줄이 팽팽한 동안 수레와 공의 속력은 같다.



소문항 (i)

공이 아래쪽으로 움직이는 가속도를 a라 하자. 이것은 수레가 경사면 위쪽으로 움직이는 가속도이기도 하다. 공(연직 방향)과 수레(경사면 방향)에 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$Mg - T = Ma,$$
$$T - mg\sin\theta = ma.$$

수직항력(normal reaction) R는 경사면에 수직이므로 식에 들어가지 않는다. 두 식을 더하면 T가 소거되어

$$a = \frac{(M - m\sin\theta)\,g}{M + m}.$$

계는 정지 상태에서 출발하므로, 공이 조금이라도 움직이려면 $a > 0$이어야 한다. ($a \le 0$이면 아무 일도 일어나지 않는다. $a = 0$이면 계는 평형(equilibrium) 상태를 유지하고, 줄은 밀 수 없으므로 $a < 0$은 불가능하다.) 따라서 공이 땅에 떨어질 필요충분조건은

$$M > m\sin\theta.$$

수레가 궤도의 맨 아래에 있을 때 줄의 전체 길이 d가 경사면을 따라 놓이므로, 공은 도르래와 같은 높이, 즉 지면에서 $d\sin\theta$ 높이에서 출발한다. 공은 정지 상태에서 일정한 가속도 a로 이 거리만큼 떨어지므로, $v^2 = u^2 + 2as$에 의해

$$v^2 = 2 \cdot \frac{(M - m\sin\theta)g}{M + m} \cdot d\sin\theta = \frac{2g(M - m\sin\theta)\,d\sin\theta}{M + m},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

공이 땅에 닿을 때 수레는 궤도를 따라 $d\sin\theta$만큼 올라가 있고 속력 v로 움직이고 있다. 도르래까지 남은 거리는

$$d - d\sin\theta = d(1 - \sin\theta)$$

이다.

생각해 보기 공이 땅에 닿은 뒤 줄은 어떻게 되는가?

공은 멈추지만 수레는 여전히 경사면을 따라 도르래 쪽으로 움직이고 있다. 따라서 줄이 느슨해지고 $T = 0$이 된다. 이제 경사면 방향으로 작용하는 힘은 중력의 성분뿐이므로, 수레는 $g\sin\theta$의 크기로 감속한다(decelerates). 수레는 $0 = v^2 - 2g\sin\theta\, s$로 주어지는 거리 s만큼 더 간 뒤 멈춘다.

$$s = \frac{v^2}{2g\sin\theta} = \frac{(M - m\sin\theta)\,d}{M + m}.$$

(그 뒤 수레는 다시 아래로 굴러 내려가고, 도르래 근처에서는 더 이상 아무 일도 일어나지 않는다.)

수레가 도르래에 닿기 전에 멈추면, 즉 $s < d(1-\sin\theta)$이면 수레는 도르래와 충돌하지 않는다. $d > 0$이고 $M+m > 0$이므로 이는 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned} M - m\sin\theta &< (M+m)(1-\sin\theta) \\ &= M + m - M\sin\theta - m\sin\theta, \end{aligned}$$

이를 정리하면 $M\sin\theta < m$이다.

이것을 소문항 (i)의 결과와 합치면, 공이 땅에 닿고 수레가 도르래에 이르기 전에 멈출 필요충분조건은

$$m\sin\theta < M < \frac{m}{\sin\theta}.$$

$M\sin\theta = m$이면 수레는 속력 0으로 도르래에 딱 도달한다. 이것은 살짝 닿는 것이지 충돌이 아니다.

검산

- 수레가 궤도에서 가장 멀리 올라가는 거리는 $d\sin\theta + s = \dfrac{Md(1+\sin\theta)}{M+m}$이다. 이것이 d보다 작을 필요충분조건은 $M\sin\theta < m$이며, 위의 조건과 일치한다. $m \to 0$이면 이 값은 $d(1+\sin\theta) > d$로 수렴한다. 예상대로 무게가 없는 수레는 언제나 도르래에 부딪힌다.
- $\theta = 90^\circ$에서는 조건 $M < m$이 소문항 (i)의 $M > m\sin\theta = m$과 모순된다. 이는 옳다. 연직 궤도에서는 수레가 도르래 바로 아래인 맨 밑에서, 공은 맨 위에서 출발하고, 수레는 공이 떨어진 거리만큼 정확히 올라가므로 도르래까지 끝까지 올라간다.
- 수치로 확인해 보자. $m = 2$, $M = 1.5$, $\theta = 30^\circ$, $d = 3$, $g = 9.8$이면 공식에서 $v^2 = 4.2$이고, 가장 멀리 간 지점은 $\frac{27}{14} \approx 1.93 < 3$이다. 짧은 시간 간격으로 운동을 단계적으로 계산해도 같은 값이 나온다. 무작위로 고른 경우들에서도 충돌은 정확히 $M\sin\theta > m$일 때 일어남이 확인된다.

흔한 실수

- 공이 떨어지는 거리를 $d\sin\theta$가 아니라 d로 잡는 것. 공은 도르래 위치에서 출발하며, 도르래의 높이는 $d\sin\theta$이다.
- 공이 땅에 닿은 뒤에도 줄이 팽팽하다고 가정하거나, 관성으로 올라가는 단계를 아예 잊고 $d\sin\theta$와 d만 비교하는 것.

▶ 줄이 느슨해진 뒤 수레의 감속도로 $g\sin\theta$ 대신 g를 쓰는 것.

STEP 너머

이 문제는 운동을 서로 다른 구속 조건이 적용되는 단계로 나눈다. 줄이 팽팽한 단계와 그 다음 줄이 느슨한 단계이다. 이것은 당길 수는 있지만 밀 수는 없는 **일방적 구속**(*unilateral constraint*)의 가장 간단한 예이다. 이러한 구속 조건은 탁자에서 떨어지는 사슬부터 로봇 공학의 접촉 문제에 이르기까지 역학 전반에 등장한다. 여기서는 에너지 방법이 빠른 대안이 된다. 관성으로 올라가는 단계에서 수레의 운동 에너지(kinetic energy) $\frac{1}{2}mv^2$는 위치 에너지(potential energy) $mgs\sin\theta$로 바뀐다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 관점을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 1994, 문제 13

확률과 통계 • 지시변수

> **STEP I 1994, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q13

핵심 아이디어

개수를 지시변수(indicator variable, 각각 1 또는 0의 값을 갖는 확률변수)들의 합으로 나타내면 어려운 기댓값(expectation) 계산이 쉬워진다. 각 조각들이 독립(independent)이든 아니든 기댓값은 선형(linear)이기 때문이다. 이 문제에서 각 시행은 분명히 독립이 아니지만, 대칭성(symmetry)에 의해 모든 X_i의 기댓값이 같다는 것을 알 수 있다. 그런 다음 X의 분포(distribution)로부터 $\mathrm{E}(X)$를 직접 한 번 더 계산하고, 두 답을 같다고 놓으면 이항계수(binomial coefficient)에 관한 항등식(identity)을 거의 공짜로 얻는다.

풀이

이 풀이 전체에서 $1 \leq n \leq M$이고, $b > a$ 또는 $b < 0$일 때 $\binom{a}{b} = 0$이라는 규약을 사용한다.

소문항 (i)

각 X_i는 i번째로 꺼낸 토큰이 빨간색이면 1, 그렇지 않으면 0이다. 따라서 합 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$에서 꺼낸 빨간 토큰은 각각 정확히 1씩 기여하고, 빨간색이 아닌 토큰은 0을 기여한다. 그러므로 이 합은 꺼낸 n개의 토큰 중 빨간 토큰의 개수, 즉 X를 센다.

소문항 (ii)

X_i는 0과 1의 값만 가지므로

$$\mathrm{E}(X_i) = 0 \cdot \mathrm{P}(X_i = 0) + 1 \cdot \mathrm{P}(X_i = 1) = \mathrm{P}(i\text{번째로 꺼낸 토큰이 빨간색}).$$

생각해 보기 i번째 토큰이 빨간색일 확률은 그 앞에서 무엇을 꺼냈는지에 따라 달라지지 않을까?

조건부(conditional)로 보면 그렇지만, 조건 없이 보면 그렇지 않다. 토큰에 번호를 붙이고 하나씩 모두 꺼낸다고 상상해 보자. M개 토큰의 모든 배열 순서는 똑같이 일어날 가능성이 있다. 따라서 i번째 자리의 토큰은, 1번째 자리의 토큰과 마찬가지로, M개의 토큰 중 어느 것이든 될 가능성이 똑같다. n번 꺼낸 뒤 멈춘다고 해서 $i \le n$인 자리에서 일어나는 일이 달라지지는 않는다. M개의 토큰 중 m개가 빨간색이므로

$$\mathrm{E}(X_i) = \mathrm{P}(X_i = 1) = \frac{m}{M} \qquad \text{각} i = 1, \ldots, n.$$

($i = 2$인 경우에는 직접 계산으로 확인할 수 있다: $\frac{m}{M} \cdot \frac{m-1}{M-1} + \frac{M-m}{M} \cdot \frac{m}{M-1} = \frac{m(M-1)}{M(M-1)} = \frac{m}{M}$.)

소문항 (iii)

소문항 (i)과 기댓값의 선형성(linearity of expectation, 독립성이 전혀 필요 없다)에 의해

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = n \cdot \frac{m}{M} = \frac{mn}{M},$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

소문항 (iv)

꺼낸 n개 토큰의 집합은 크기가 n인 $\binom{M}{n}$개의 부분집합 중 어느 것이든 될 가능성이 똑같다. 빨간 토큰이 정확히 k개이려면 m개의 빨간 토큰 중 k개를, 나머지 $M-m$개 중 $n-k$개를 골라야 하므로

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}}{\binom{M}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

이항계수에 대한 규약 덕분에 $k > m$일 때(빨간 토큰이 모자람)나 $n - k > M - m$일 때(나머지 토큰이 모자람) 이 값은 올바르게 0이 된다. 이것이 **초기하분포**(*hypergeometric distribution*)이다.

소문항 (v)

소문항 (iv)로부터 $\mathrm{E}(X)$를 직접 계산한다. $k = 0$인 항은 0이므로

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{\binom{M}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}.$$

이것을 소문항 (iii)의 결과와 같다고 놓으면

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k} = \frac{mn}{M}\binom{M}{n}.$$

마지막으로

$$\frac{n}{M}\binom{M}{n} = \frac{n}{M}\cdot\frac{M!}{n!\,(M-n)!} = \frac{(M-1)!}{(n-1)!\,(M-n)!} = \binom{M-1}{n-1},$$

이므로 우변은 $m\binom{M-1}{n-1}$이고, 이것이 바로 요구된 항등식이다.

검산

- $M=5, m=2, n=3$으로 놓자. 소문항 (iv)에서 $\mathrm{P}(X=0,1,2)=\frac{1}{10},\frac{6}{10},\frac{3}{10}$을 얻고, 이들의 합은 1이며, $\mathrm{E}(X)=\frac{6+6}{10}=\frac{6}{5}=\frac{mn}{M}$이다. 항등식은 $1\cdot2\cdot3+2\cdot1\cdot3=12=2\binom{4}{2}$이 된다.
- $n=M$이면(모두 꺼내면) 확실히 $X=m$이고, 실제로 $\mathrm{E}(X)=mM/M=m$이다.
- $M\le 6$인 모든 주머니에 대해 토큰의 모든 배열 순서를 나열하여 $\mathrm{E}(X_i)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{P}(X=k)$를 확인했고, 모든 $M<30$에 대해 (v)의 항등식을 확인했다.

흔한 실수

- $\mathrm{E}(X)=\sum\mathrm{E}(X_i)$가 성립하려면 독립성이 필요하다고 주장하는 것. 그렇지 않다. 기댓값의 선형성은 항상 성립한다.
- 각 시행을 독립으로 취급하여 (iv)에서 이항분포(binomial distribution) $\mathrm{B}(n,\frac{m}{M})$을 쓰는 것. 이렇게 하면 평균은 맞지만 확률은 틀린다. 토큰을 비복원추출(without replacement)로 꺼내기 때문이다.

STEP 너머

지시변수 방법은 확률론에서 가장 유용한 도구 중 하나이다. 이 방법으로 무작위 순열(random permutation)의 고정점(fixed point)의 개수, 동전 던지기에서 나오는 연(run)의 개수, 무작위 그래프(random graph)의 고립된 꼭짓점(isolated vertex)의 개수의 기댓값을 구할 수 있고, $\mathrm{Var}(\sum X_i)=\sum\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$를 통해 분산(variance)으로도 확장된다. 하나의 양을 두 가지 방법으로 계산하여 조합론적 항등식(combinatorial identity)을 증명하는 방법 역시 그만큼 일반적이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 책 전체에서 지시변수를 사용하며, 두 아이디어가 실제로 활용되는 모습을 보기에 훌륭한 책이다.

풀이

STEP I 1994, 문제 14

확률과 통계 • 지수분포의 순서통계량

> **STEP I 1994, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q14

핵심 아이디어

각 T_i는 지수분포(exponential distribution)를 따르므로, 소문항 (i)은 표준적인 부분적분(integration by parts) 두 번으로 해결된다. 마지막 에세이와 첫 에세이에 대해서는 최댓값(maximum)이나 최솟값(minimum)에 관한 명제를 **모든** T_i에 관한 명제로 바꾸는 것이 요령이다. 마지막 에세이가 시각 u까지 제출되는 것은 모든 에세이가 그때까지 제출되는 것과 정확히 같고, 첫 에세이가 시각 t에 아직 제출되지 않은 것은 모든 에세이가 그때까지 제출되지 않은 것과 정확히 같다. 그러면 독립성(independence)에 의해 "모두"가 곱으로 바뀌고, 분포함수(distribution function)를 미분하면 확률밀도함수(probability density function)를 얻는다.

풀이

소문항 (i)

T_i 중 어느 하나를 X라 하고, 그 확률밀도함수를 $t \geq 0$에 대하여 $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$라 하자. $u = t$, $\mathrm{d}v = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$(따라서 $v = -\mathrm{e}^{-\lambda t}$)로 놓고 부분적분하면

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty t\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

이다. 여기서 $t \to \infty$일 때 $t\mathrm{e}^{-\lambda t} \to 0$이기 때문이다(지수함수가 거듭제곱보다 빠르게 변한다). 같은 방법으로

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty t^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty 2t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}\,\mathrm{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2},$$

이다. 여기서 $\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$가 $\frac{1}{\lambda}\mathrm{E}(X)$임을 이용하였다. 따라서

$$\mathrm{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T_i) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

소문항 (ii)

먼저 하나의 T_i의 분포함수가 필요하다. $u \geq 0$에 대하여

$$\mathrm{P}(T_i \leq u) = \int_0^u \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}.$$

이제 $U = \max(T_1, \ldots, T_n)$이고, T_i 중 가장 큰 것이 u 이하일 필요충분조건은 그 모두가 u 이하인 것이다.

$$\{U \leq u\} = \{T_1 \leq u\} \cap \{T_2 \leq u\} \cap \cdots \cap \{T_n \leq u\}.$$

생각해 보기 여기서 확률을 곱해도 되는 이유는 무엇인가?

사건 $\{T_i \leq u\}$들은 서로 다른 T_i에 관한 것이고, 가정에 의해 이들은 독립이므로 교집합의 확률은 각 확률의 곱이다. 따라서 $u \geq 0$에 대하여

$$\mathrm{P}(U \leq u) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i \leq u) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)^n,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. U의 확률밀도함수는 이 분포함수의 도함수이다. 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$f_U(u) = n\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)^{n-1} \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} = n\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)^{n-1} \qquad (u \geq 0),$$

이고, $u < 0$이면 $f_U(u) = 0$이다.

소문항 (iii)

이제 $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$이다. 여기서 유용한 것은 여사건(complement)이다. 첫 에세이가 시각 t 이후에 도착할 필요충분조건은 그때까지 **하나도** 도착하지 않은 것, 즉 모든 $T_i > t$인 것이다. $\mathrm{P}(T_i > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$와 다시 독립성을 이용하면

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i > t) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0).$$

따라서 $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t}$이고, 이를 미분하면

$$f_T(t) = n\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0),$$

이며, $t < 0$이면 $f_T(t) = 0$이다.

소문항 (iv)

(iii)의 확률밀도함수는 소문항 (i)의 확률밀도함수에서 λ를 $n\lambda$로 바꾼 것과 정확히 같다. 즉 T는 모수(parameter)가 $n\lambda$인 지수분포를 따른다. 따라서 소문항 (i)로부터 바로

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{n\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

을 쓸 수 있다. 이는 직관과도 맞는다. 학생이 n명이면 첫 에세이는 특정한 한 에세이보다 대략 n배 빨리 도착할 것이다.

검산

- $n = 1$이면 에세이가 하나뿐이므로 $T = U = T_1$이다. 실제로 두 확률밀도함수 모두 $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$가 된다.
- $\mathrm{P}(U \le u)$는 $u = 0$에서 0이고 $u \to \infty$일 때 1로 증가한다. 분포함수라면 마땅히 그래야 한다.
- $n = 5, \lambda = 0.7$인 학급 2×10^5개를 모의실험(simulation)하였다. 예를 들어 $U \le 2$인 비율은 0.2425로 $(1 - \mathrm{e}^{-1.4})^5 \approx 0.2427$과 비교되고, T의 평균은 0.2860으로 $1/(5 \times 0.7) \approx 0.2857$과 비교된다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 f_U의 적분값이 1임을 확인하였다.

흔한 실수

- 최솟값에 대하여 $\mathrm{P}(T \le t)$를 직접 다루는 것. "적어도 하나의 $T_i \le t$"는 교집합이 아니므로 곱으로 분해되지 않는다. $\mathrm{P}(T > t)$를 거쳐야 한다.
- 곱을 정당화하는 것이 독립성이라는 사실을 밝히지 않는 것.
- $\mathrm{Var}(T_i) = \mathrm{E}(T_i^2) = 2/\lambda^2$로 쓰고 $(\mathrm{E}\,T_i)^2$을 빼는 것을 잊는 것.

STEP 너머

T와 U는 표본의 가장 작은 **순서통계량**(order statistics)과 가장 큰 순서통계량이다. 독립인 지수분포 확률변수들의 최솟값이 비율(rate)을 모두 더한 지수분포를 따른다는 사실은 푸아송 과정(Poisson process)과 대기행렬 이론(queueing theory)의 기초이다. 무기억성(memoryless property)으로부터 얻어지는 또 하나의 아름다운 사실은, 연이은 에세이 사이의 간격들이 비율이 각각 $n\lambda, (n-1)\lambda, \ldots, \lambda$인 독립인 지수분포를 따른다는 것이고, 따라서 $\mathrm{E}(U) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$이다. 이 두 내용은 Grimmett와 Welsh의 *Probability:*

An Introduction(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 1994, 문제 1

순수수학 • 나누어떨어짐과 십진법 자릿수

> **STEP II 1994, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q1

핵심 아이디어

곱의 마지막 몇 자리는 인수들의 마지막 몇 자리에만 의존하므로, 여기서 다루는 것은 모두 10의 거듭제곱을 법(modulo)으로 하는 산술이다. 1, 3, 7 또는 9로 끝나는 수는 10과 공통인수를 갖지 않으며, 그 덕분에 10을 법으로, 사실은 10의 임의의 거듭제곱을 법으로 가역(*invertible*)이다. 가운데 부분에서는 n에서 인수 2와 5를 떼어 내어 이를 0들로 바꾼다. 마지막 부분에서는 10^{10}을 법으로 하는 가역성을 이용하여 곱의 마지막 열 자리가 우리가 원하는 어떤 숫자 묶음이든 되도록 만든다.

풀이

소문항 1: 1로 끝나는 배수

$n \times m$의 마지막 자리는 (n의 마지막 자리)$\times$(m의 마지막 자리)의 마지막 자리와 같다. 나머지 자리들은 10의 배수만큼만 기여하기 때문이다. n은 5나 짝수 숫자로 끝나지 않으므로 1, 3, 7 또는 9로 끝나며,

$$1 \times 1 = 1, \qquad 3 \times 7 = 21, \qquad 7 \times 3 = 21, \qquad 9 \times 9 = 81.$$

따라서 각각 $m = 1, 7, 3$ 또는 9로 잡으면 된다. 그러면 요구한 대로 $n \times m$은 1로 끝난다.

소문항 2: 임의의 n

$$n = 2^a\, 5^b\, k,$$

로 쓰자. 여기서 $a, b \geq 0$이고 k는 2로도 5로도 나누어떨어지지 않는다. 그러면 k는 5나 짝수 숫자로 끝나지 않으므로, 소문항 1에 의해 km'이 1로 끝나는 m'이 존재한다. 이제

$$m = 2^b 5^a m'.$$

이라 하자. 그러면

$$n \times m = 2^{a+b} 5^{a+b} km' = 10^{a+b} (km').$$

10^{a+b}을 곱하는 것은 km' 뒤에 0을 $a+b$개 덧붙이는 것일 뿐이다. 따라서 $n \times m$은 $a+b = 0$이면 1로 끝나고, 그렇지 않으면 1 뒤에 0이 $a+b$개 이어진 형태로 끝난다. 이것이 우리가 보여야 할 것이었다.

예를 들어 $n = 40 = 2^3 \cdot 5$이면 $k = 1$이므로 $m = 2 \cdot 5^3 = 250$이고 $n \times m = 10\,000$이다.

소문항 3: 열 개의 숫자 모두

$r \geq 0$이고 q가 1로 끝나도록 $n = 10^r q$로 쓰자. 0을 덧붙여도 기존의 숫자가 사라지지는 않으므로, $q \times m$이 모든 숫자를 포함하는 m을 찾으면 충분하다. 그러면 $n \times m = 10^r (qm)$도 모든 숫자를 포함한다.

$N = 10^{10}$이라 하고, 모든 숫자를 포함하는 $X = 1234567890$을 생각하자. 우리의 목표는

$$qm \equiv X \pmod{N},$$

즉 qm이 열 자리 숫자 1234567890으로 끝나게 하는 것이다.

> **생각해 보기** 왜 q의 어떤 배수는 반드시 10^{10}으로 나눈 나머지가 X가 되는가?

N개의 수 $q \times 0$, $q \times 1$, …, $q \times (N-1)$과 이들을 N으로 나눈 나머지를 생각하자. 두 나머지가 같다고, 즉 $0 \leq t < s \leq N-1$에 대하여 $qs \equiv qt \pmod{N}$이라고 가정하자. 그러면 10^{10}은 $q(s-t)$를 나눈다. 그런데 q는 1로 끝나므로 홀수이고 5의 배수도 아니어서, $10^{10} = 2^{10}5^{10}$과 공통인 소인수를 갖지 않는다. 따라서 $2^{10}5^{10}$이 $s-t$를 나누어야 하는데, $0 < s-t < N$이므로 이는 불가능하다. 그러므로 N개의 나머지는 모두 서로 다르다. 가능한 나머지는 $0, 1, \ldots, N-1$의 N개뿐이므로, 이들 각각이 모두 나타난다. 특히 $qm \equiv X \pmod{N}$을 만족하는 $0 \leq m \leq N-1$인 m이 존재한다.

$X \neq 0$이므로 이 m은 0이 아니다. 따라서 qm은 양의 배수이고 $qm \geq X \geq 10^9$이다. 그러므로 그 마지막 열 자리는 정확히 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$이며, X의 맨 앞자리 1도 실제로 나타난다. 따라서 $q \times m$은, 그리고 $n \times m$도, 숫자 $0, 1, \ldots, 9$를 모두 포함한다.

예를 들어 $n = 21$이면 $m = 7\,201\,646\,090$으로 잡을 수 있고, 이 때 $21 \times m = 151\,234\,567\,890$이다.

> **생각해 보기** n에 대한 가정은 어디에서 쓰였고, 왜 필요했는가?

이 가정은 q가 인수 2나 5를 갖지 않는다는 것을 알기 위해서만 쓰였다. 그 가정이 없으면 나머지 $qm \bmod 10^{10}$이 모든 값을 가질 수는 없다. 예를 들어 2의 배수는 모두 짝수이므로 $\ldots 1$로 끝날 수 없다. 곱의 끝부분을 우리 마음대로 정할 수 있게 해 주는 것이 바로 이 가정이다. (소문항 2는 모든 n이 이런 꼴의 배수를 가짐을 보여 주므로, 소문항 3과 합치면 모든 n이 열 개의 숫자를 모두 포함하는 배수를 갖는다.)

검산

- 소문항 1을 손으로 확인하면: $13 \times 7 = 91$이고 $29 \times 9 = 261$이다.
- 컴퓨터로 확인한 결과, 5나 짝수 숫자로 끝나지 않는 모든 $n \leq 20\,000$에 대하여 소문항 1의 방법이 성립하였다. 소문항 2의 구성은 모든 $n \leq 20\,000$과 10^{15} 이하의 임의의 n 20 000개에 대하여 성립하였다. 또한 요구된 꼴의 n 값 10 000개 이상(여러 개의 0으로 끝나는 것들도 포함)에 대하여 소문항 3의 곱하는 수를 계산하였고, 모든 경우에 $n \times m$은 열 개의 숫자를 모두 포함하였다. 예: $21 \times 7\,201\,646\,090 = 151\,234\,567\,890$, $11 \times 4\,657\,687\,990 = 51\,234\,567\,890$.

흔한 실수

- 소문항 3에서 숫자 묶음 1234567890이 정말로 온전히 나타나는지 확인하는 것을 잊는 경우. 맨 앞자리 1이 나타나려면 $qm \geq 10^9$이어야 하는데, $qm \equiv X$이고 $qm > 0$이므로 이는 성립한다.
- 소문항 2에서 $2^b 5^a$ 대신 10^{a+b}을 곱하는 경우. 그러면 0은 덧붙지만, n에 이미 들어 있는 2와 5들은 그대로 남는다.

STEP 너머

소문항 3의 비둘기집 원리(pigeonhole principle) 논증은 일반적인 사실을 증명한다. 즉 $\gcd(q, N) = 1$이면 q는 N을 법으로 곱셈에 대한 역원(multiplicative inverse)을 갖는다. 가역인 잉여(residue)들은 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$로 쓰는 군(group)을 이루며, 이는 초등 정수론(number theory)과 RSA 암호(cryptography)의 출발점이다. 다른 기법을 쓰면 마지막 부분이 어떤 n에 대해서도 성립함을 보일 수 있다. $10^k \geq n$이면 n의 어떤 배수는 $X \cdot 10^k$과 $X \cdot 10^k + 10^k$ 사이에 놓이고, 그런 배수는 1234567890으로 시작한다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동(congruence)과 잉여에 대한 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP II 1994, 문제 2

순수수학 • 르장드르 다항식

STEP II 1994, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s2-q2

핵심 아이디어

인수 $(x-a)^m$은 미분할 때마다 조금씩 약해지기는 하지만 살아남는다. 따라서 m중근(repeated root of order m)은 처음 $m-1$개의 도함수(derivative)의 근이기도 하다. 다항식(polynomial) $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$은 구간 $[-1,1]$의 양 끝점에서 n중근을 가지므로, $x^m \mathrm{P}_n(x)$를 부분적분(integration by parts)하면 경계항(boundary term)이 모두 사라진다. 부분적분을 한 번 할 때마다 미분 하나가 $(x^2-1)^n$에서 x^m으로 옮겨 가며, $(x^2-1)^n$보다 x^m이 먼저 미분할 여지를 다 써 버린다.

풀이

중근과 도함수

곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'(x) &= m(x-a)^{m-1}\mathrm{Q}(x) + (x-a)^m\mathrm{Q}'(x)\\ &= (x-a)^{m-1}\big[m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)\big] = (x-a)^{m-1}\mathrm{R}(x),\end{aligned}$$

이다. 여기서 다항식의 합과 곱은 다항식이므로 $\mathrm{R}(x) = m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)$는 다항식이다. 이것이 구하는 꼴이다.

이 결과는 $k \geq 1$일 때 인수 $(x-a)^k$를 갖는 다항식의 도함수가 인수 $(x-a)^{k-1}$을 갖는다는 뜻이다. $k = m$에서 시작하여 이를 반복해서 적용하면, 어떤 다항식 R_r에 대하여

$$\mathrm{P}^{(r)}(x) = (x-a)^{m-r}\mathrm{R}_r(x) \qquad (0 \leq r \leq m)$$

를 얻는다. $\mathrm{P}^{(r+1)}$을 얻기 위해 $\mathrm{P}^{(r)}$을 미분하는 것은 $r \leq m-1$일 때뿐이고, 이때 지수 $m-r$은 1 이상이므로 각 단계는 정당하다. $1 \leq r \leq m-1$이면 $m-r \geq 1$이므로 $(x-a)$는

여전히 $\mathrm{P}^{(r)}(x)$의 인수이고, 따라서 $\mathrm{P}^{(r)}(a) = 0$이다. (이는 $r = 0$일 때도 성립하지만, $r = m$일 때는 일반적으로 성립하지 않는다.)

P_n은 n차 다항식이다

$\mathrm{F}(x) = (x^2-1)^n$이라 하자. 이항정리(binomial theorem)에 의해 $\mathrm{F}(x)$는 x^{2n}에 차수가 $2n-2$ 이하인 항들을 더한 것이다. x^k를 n번 미분하면 ($k < n$일 때) 0이 되거나 x^{k-n}의 상수배가 되므로, $\mathrm{P}_n = \mathrm{F}^{(n)}$은 차수가 n 이하인 다항식이다. 그 x^n항은 오직 x^{2n}에서만 나온다.

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} x^{2n} = 2n(2n-1)\cdots(n+1)\,x^n = \frac{(2n)!}{n!}\,x^n.$$

이 계수는 0이 아니므로 P_n의 차수는 정확히 n이다.

0이 되는 적분

$\mathrm{F}(x) = (x-1)^n(x+1)^n$이므로, 첫 번째 결과에 $a = 1, m = n, \mathrm{Q}(x) = (x+1)^n$을 적용하면 $1 \le r \le n-1$에 대하여 $\mathrm{F}^{(r)}(1) = 0$이다. $a = -1$로 같은 논증을 하면 $\mathrm{F}^{(r)}(-1) = 0$을 얻는다. 또한 $\mathrm{F}(\pm 1) = 0$임은 바로 알 수 있다. 따라서

$$\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1) = 0 \qquad \text{단, } 0 \le r \le n-1. \tag{$*$}$$

이제 $j \ge 1, 1 \le k \le n$이라 하자. x^j를 미분하고 $\mathrm{F}^{(k)}$를 적분하는 방식으로 부분적분하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^j \mathrm{F}^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^j \mathrm{F}^{(k-1)}(x)\right]_{-1}^{1} - j\int_{-1}^{1} x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -j\int_{-1}^{1} x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

이다. $k-1 \le n-1$이므로 $(*)$에 의해 경계항이 사라지기 때문이다.

> **생각해 보기** 이 과정을 몇 번까지 써도 문제가 생기지 않을까?

한 번 쓸 때마다 x의 지수가 하나 줄고 도함수의 계수도 하나 준다. x^m과 $\mathrm{F}^{(n)}$에서 시작하므로 m번 적용할 수 있다. 이 단계에는 $k \ge 1$이 필요한데, 사용하는 가장 작은 k는 $n-m+1 \ge 1$이다. m번 적용하고 나면

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^m m! \int_{-1}^{1} \mathrm{F}^{(n-m)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

이다. ($m = 0$이면 이것은 원래 적분 그대로이다.)

$0 \le m \le n-1$이면 $n-m \ge 1$이므로 마지막 피적분함수는 그 자체로 도함수이고, $0 \le n-m-1 \le n-1$이므로 $(*)$에 의해

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^m m!\left[\mathrm{F}^{(n-m-1)}(x)\right]_{-1}^{1} = 0,$$

이다. 이것이 구하는 결과이다.

$m = n$인 경우

$m = n$일 때도 같은 환원 과정이 여전히 유효하며(마지막 단계에서 $k = 1$을 쓴다),

$$\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = n! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x,$$

를 얻는다. $(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$이기 때문이다. 피적분함수는 우함수(even function)이고, 치환(substitution) $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$는 $[0,1]$을 $[0, \frac{\pi}{2}]$로 보내며 $1 - x^2 = \cos^2 t$이다. 따라서 힌트에 주어진 공식을 쓰면

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

이다. 그러므로

$$\boxed{\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}(n!)^3}{(2n+1)!}.}$$

검산

$n = 1$이면 $\mathrm{P}_1(x) = 2x$이므로 $\int_{-1}^{1} x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$이고, 공식은 $\frac{8\cdot 1}{6} = \frac{4}{3}$을 준다. $n = 2$이면 $\mathrm{P}_2(x) = 12x^2 - 4$이다. 이때 $\int_{-1}^{1}(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 8 - 8 = 0$이고 $\int_{-1}^{1} x(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 0$(피적분함수가 기함수)이므로 예측과 일치한다. 또한 $\int_{-1}^{1} x^2(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = \frac{24}{5} - \frac{8}{3} = \frac{32}{15}$이고, 이는 $\frac{2^5\cdot 8}{120} = \frac{32}{15}$와 일치한다. $n \le 10$에 대해서는 이 모든 것을 컴퓨터로 정확히 확인하였다.

흔한 실수

- 경계항이 사라지려면 $1 \le r \le n-1$뿐 아니라 $r = 0$일 때도 $\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1) = 0$이어야 한다는 것을 잊는 것. $m = n-1$일 때 마지막 단계에서 $r = 0$을 쓴다.
- 부호를 놓치는 것: $(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$이 부분적분에서 생긴 $(-1)^n$을 상쇄하므로 답은 양수이다. $x^n \mathrm{P}_n(x)$의 최고차항 계수가 양수이므로 이는 타당하다.

STEP 너머

상수배를 제외하면 P_n은 n차 르장드르 다항식(Legendre polynomial)이고, 이를 나타내는 이 공식은 로드리게스 공식(Rodrigues' formula)이다. 첫 번째 결과는 내적(inner product) $\int_{-1}^{1} fg\,\mathrm{d}x$에 대하여 P_n이 더 낮은 차수의 모든 다항식과 직교(orthogonal)한다는 뜻이다. 이것이 르장드르 급수(Legendre series)와 가우스 구적법(Gaussian quadrature)의 바탕이 되는 성질이다. 르장드르 다항식은 구면좌표(spherical coordinates)에서 라플라스 방

정식(Laplace's equation)을 풀 때도 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)는 르장드르 미분방정식을 통해 이 다항식들을 다룬다.

풀이

STEP II 1994, 문제 3

순수수학 • 함수방정식

> **STEP II 1994, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q3

핵심 아이디어

f에 대해 아는 것은 모든 x와 y에 대해 성립하는 항등식(identity) 하나와 값 하나, 즉 $\mathrm{f}(0) = 1$뿐이다. 따라서 쓸 수 있는 도구는 대입(substitution)뿐이다. 대부분의 인수가 0이나 a가 되도록 x와 y를 고르면, 그 점에서의 값은 이미 알고 있거나 곧 알게 된다. 이 항등식을 보면 $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$가 떠올라야 한다. 여기서 $\mathrm{f}(a-x)$가 $\pm \sin x$의 역할을 한다. 이 유사성은 어떤 결과를 기대해야 하는지, 그리고 예가 무엇이 될지를 모두 알려 준다.

풀이

이하에서 주어진 항등식을 다음과 같이 쓴다.

$$\mathrm{f}(x-y) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(a+y) \qquad \text{모든} x, y. \qquad (*)$$

아래의 모든 단계는 $(*)$에 대한 대입이므로, 연속성(continuity), 미분가능성(differentiability) 등 어떤 가정도 하지 않는다.

$\mathrm{f}(a) = 0$임을 보이기

$(*)$에 $x = y = 0$을 대입하면

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(0)^2 - \mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a), \qquad \text{따라서} \qquad 1 = 1 - \mathrm{f}(a)^2.$$

그러므로 $\mathrm{f}(a)^2 = 0$이고, $\mathrm{f}(a)$는 실수이므로 $\mathrm{f}(a) = 0$이다.

소문항 (i)

$(*)$에 $x = 0, y = t$를 대입하면

$$\mathrm{f}(-t) = \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a+t) = 1 \cdot \mathrm{f}(t) - 0 = \mathrm{f}(t),$$

이다. 여기서 $\mathrm{f}(0) = 1$과 $\mathrm{f}(a) = 0$을 이용하였다. 따라서 f는 우함수(even function)이다.

소문항 (ii)

$(*)$에 $x = y = a$를 대입하면

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)^2 - \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(2a), \qquad \text{따라서} \qquad 1 = 0 - \mathrm{f}(2a),$$

이므로 $\mathrm{f}(2a) = -1$이다.

소문항 (iii)

> **생각해 보기** 우변의 첫 번째 곱을 없애면서도 t를 자유롭게 남겨 두는 대입 하나는 무엇인가?

$x = a$로 두면 $\mathrm{f}(a) = 0$이므로 항 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$가 사라지고, $\mathrm{f}(a-x)$는 $\mathrm{f}(0) = 1$이 되며, y는 여전히 자유롭다. $x = a$일 때 $(*)$는 다음이 된다.

$$\mathrm{f}(a-y) = 0 \cdot \mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(a+y) = -\mathrm{f}(a+y) \qquad \text{모든} y.$$

즉 f는 "a에 관한 기함수(odd function)"이다. 이제 $y = a - t$로 택하면 $a - y = t$이고 $a + y = 2a - t$이므로

$$\mathrm{f}(t) = -\mathrm{f}(2a - t),$$

이다. 이는 모든 t에 대해 $\mathrm{f}(2a-t) = -\mathrm{f}(t)$라는 뜻이므로 요구한 결과가 성립한다. ($t = 0$을 대입하면 소문항 (ii)가 다시 나오는데, 이는 유용한 일관성 점검(consistency check)이다.)

소문항 (iv)

(iii)을 두 번 적용하되, 그 사이에 (i)을 쓴다. 먼저 (iii)에서 t를 $-t$로 바꾸면

$$\mathrm{f}(2a+t) = -\mathrm{f}(-t) = -\mathrm{f}(t), \tag{1}$$

이다. 여기서 (i)을 이용하였다. 즉 인수를 $2a$만큼 옮기면 부호가 바뀐다. 다시 $2a$만큼 옮기면, 즉 (1)에서 t를 $2a + t$로 바꾸어 적용하면

$$\mathrm{f}(4a+t) = -\mathrm{f}(2a+t) = -\big(-\mathrm{f}(t)\big) = \mathrm{f}(t).$$

따라서 ($a \neq 0$일 때) f는 주기(period)가 $4a$인 주기함수이며, 이는 주기가 $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$인 코사인과 정확히 같다.

예

$a = \pi/2$**인 경우.** $\mathrm{f}(x) = \cos x$로 잡는다. 그러면 $\mathrm{f}(0) = 1$이고, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\cos(\frac{\pi}{2} + y) = -\sin y$이므로

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} - x)\mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y) = \mathrm{f}(x - y).$$

$a = -2$**인 경우.** $\mathrm{f}(x) = \cos kx$를 시도해 보자. 위의 결과에 따르면 $\mathrm{f}(a) = 0$, 즉 $\cos(2k) = 0$이어야 하고, 주기는 $4|a| = 8$이어야 한다. 따라서 $k = \frac{\pi}{4}$, 즉 $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$로 잡는다. 확인해 보면 $\mathrm{f}(0) = 1$이고, $u = \frac{\pi x}{4}$, $v = \frac{\pi y}{4}$라 하면

$$\mathrm{f}(-2-x) = \cos\bigl(-\tfrac{\pi}{2} - u\bigr) = \cos\bigl(\tfrac{\pi}{2} + u\bigr) = -\sin u, \qquad \mathrm{f}(-2+y) = \cos\bigl(v - \tfrac{\pi}{2}\bigr) = \sin v,$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(-2-x)\mathrm{f}(-2+y) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \\ &= \cos(u - v) = \cos\tfrac{\pi(x-y)}{4} = \mathrm{f}(x - y).\end{aligned}$$

두 함수 모두 분명히 상수함수가 아니다. (더 일반적으로, $\cos ka = 0$인 임의의 a에 대해 $\cos kx$가 성립하므로, $a = -2$일 때 $\cos\frac{3\pi x}{4}$도 답이 된다.)

검산

소문항 (iii)에 $t = 0$을 대입하면 $\mathrm{f}(2a) = -\mathrm{f}(0) = -1$이 되어 (ii)와 일치하고, (iii)에 $t = a$를 대입하면 $\mathrm{f}(a) = -\mathrm{f}(a)$가 되어 $\mathrm{f}(a) = 0$과 일치한다. 수치로 확인하면, $a = -2$이고 $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$일 때 $x = 1, y = 3$에서 좌변은 $\mathrm{f}(-2) = 0$이고 우변은 $\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(-3)\mathrm{f}(1) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 0$이다. 컴퓨터로 두 예를 무작위 순서쌍 (x, y) 20 000개에서 시험한 결과, 항등식이 10^{-13} 이내의 오차로 성립하였다.

흔한 실수

- 반주기 이동의 부호를 잘못 잡는 것: (iii)과 (i)에서 $\mathrm{f}(t + 2a) = -\mathrm{f}(t)$가 나오므로, 주기는 $2a$가 아니라 $4a$이다.
- (i)–(iv)를 증명할 때 f가 미분가능하다고(또는 코사인이라고) 가정하는 것. 문제에서 이를 금지하므로, 대입만 허용된다.
- $a = -2$일 때 $\cos\frac{\pi x}{4}$가 항등식을 만족하는지 확인하지 않고 제시하는 것: $\mathrm{f}(a) = 0$과 주기를 맞추는 것은 좋은 길잡이일 뿐 증명이 아니다.

STEP 너머

함수가 만족하는 항등식으로부터 그 함수를 결정하는 것이 **함수방정식**(*functional equations*)의 주제이다. 여기서는 항등식 하나만으로 우함수 성질, "반주기" 부호 변화, 주기성이 모두 따라 나온다. 해석학(analysis) 강의에서는 고전적인 결과들을 만나게 된다. 코시(Cauchy)의 방정식 $\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(y)$는 연속성을 추가하면 $\mathrm{f}(x)=cx$를 강제하고, 그런 조건이 없으면 기이한 해들이 존재한다. 마찬가지로 코사인의 뺄셈 공식은 연속함수 가운데에서 $\cos kx$를 특징짓는다. 이런 논증에 연속성이 어떻게 개입하는지에 대한 엄밀한 설명은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 보라.

풀이

STEP II 1994, 문제 4

순수수학 • 타원의 넓이

STEP II 1994, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s2-q4

핵심 아이디어

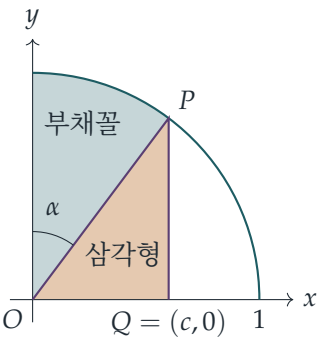
첫 번째 적분은 사분원(quarter circle) 아래의 넓이이고, 이 넓이는 직각삼각형(right-angled triangle) 하나와 원의 부채꼴(sector) 하나로 깔끔하게 나뉘므로 치환(substitution)이 필요 없다. 타원(ellipse)은 원을 두 방향으로 서로 다른 배율만큼 늘인 것이고, 늘이기(stretching)는 넓이에 상수를 곱하므로 두 번째 결과가 곧바로 나온다. 마지막 부분에서는 대칭성(symmetry)이 거의 모든 일을 해 준다. 두 타원은 직선 $y = x$에 대해 서로의 반사(reflection)이므로 교집합(intersection)의 8분의 1만 구하면 되고, 그 조각은 두 번째 결과에서 삼각형 하나를 뺀 것이다.

풀이

$(1 - x^2)^{1/2}$의 적분

문제의 영역은 사분원 $y = (1 - x^2)^{1/2}$, 두 좌표축, 그리고 직선 $x = c$로 둘러싸여 있다. (곡선은 경계로 읽어야 한다. 즉 영역은 $0 \le y \le (1 - x^2)^{1/2}, 0 \le x \le c$를 만족하는 점들의 집합이다.) 이 영역의 넓이가 바로 우리가 구하려는 적분이다.

$P = \left(c, (1 - c^2)^{1/2}\right)$를 $x = c$ 위에 있는 원 위의 점, $Q = (c, 0)$이라 하고, $\alpha = \sin^{-1} c$라 하면 $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$이다. O와 P를 이으면 영역이 두 조각으로 나뉜다.



- 삼각형 OQP는 Q에서 직각이고, 밑변이 c, 높이가 $(1-c^2)^{1/2}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}c(1-c^2)^{1/2}$이다.
- 나머지는 OP와 y축 사이에 있는 단위원의 부채꼴이다. P에서 y축까지의 수평 거리가 $c = 1 \cdot \sin\alpha$이므로 OP와 y축 사이의 각은 α이다. 반지름이 1이고 중심각이 α인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}c$이다.

두 조각을 더하면

$$\int_0^c (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[c(1-c^2)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}c\right], \qquad 0 < c \le 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ($c = 1$이면 삼각형이 납작해져서 사분원의 넓이 $\frac{\pi}{4}$를 얻는다.)

타원 아래의 넓이

이번에도 영역은 $0 \le x \le c$에서 곡선의 위쪽 절반 $y = b\left(1 - x^2/a^2\right)^{1/2}$ 아래에 있으므로, 넓이는

$$\int_0^c b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

이다. $x = au$로 치환하면 $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u$이고 적분 구간은 0부터 c/a까지가 된다($0 < c \le a$이므로 $0 < c/a \le 1$이다). 그러면 이 적분은

$$ab\int_0^{c/a}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{ab}{2}\left[\frac{c}{a}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)\right],$$

이다. 여기서 첫 번째 결과의 c를 c/a로 바꾸어 썼다. 이것이 구하는 넓이이다.

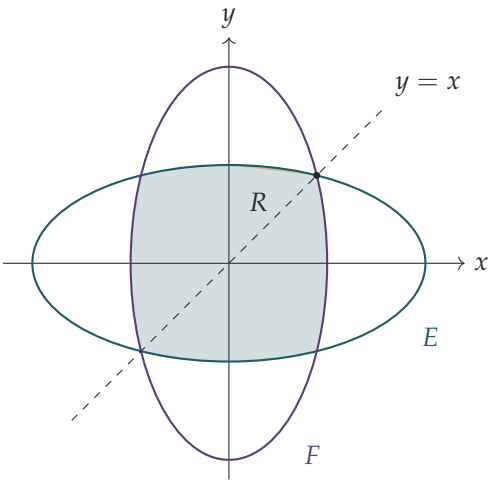
기하학적으로 보면, 타원은 단위원을 가로로 a배, 세로로 b배 늘인 것이고, 이 늘이기는 모든 넓이에 ab를 곱한다.

두 타원의 교집합

E와 F는 모두 $x \mapsto -x$와 $y \mapsto -y$에 대해 변하지 않으므로 $E \cap F$도 그렇고, 따라서 그 넓이는 사분면 $x, y \geq 0$에 있는 부분의 넓이의 네 배이다. 또 x와 y를 맞바꾸면 E는 F가 되고 F는 E가 되므로, $E \cap F$는 직선 $y = x$에 대해 대칭이다. 따라서 제1사분면에 있는 4분의 1 조각은 서로 거울상인 두 절반으로 이루어지고,

$$\text{넓이}(E \cap F) = 8 \times \text{넓이} R, \qquad R = \{(x, y) \in E \cap F : \ 0 \leq x \leq y\}.$$

이다.



생각해 보기 R에서 실제로 경계를 이루는 것은 두 타원 중 어느 것인가?

임의의 점에 대하여

$$\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = (x^2 - y^2)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

이다. $0 \leq x \leq y$이면 $x^2 - y^2 \leq 0$이고, $0 < b \leq a$이므로 $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \geq 0$이다. 따라서 이 차는 ≤ 0이다. 즉 $y = x$의 그쪽 편에서는 E에 속하는 점이 자동으로 F에도 속한다. 그러므로

$$R = \{(x, y) \in E : \ 0 \leq x \leq y\},$$

이고 E만 신경 쓰면 된다. (바로 여기서 $b \leq a$가 쓰인다. $b > a$이면 두 타원의 역할이 뒤바뀐다.)

E의 경계는 제1사분면에서 $x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$인 곳, 즉 $x = y = x_0$에서 $y = x$와 만나며, 여기서

$$x_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

이다. $0 \le x \le x_0$에서는 E의 위쪽 절반이 $y = x$ 위에 있거나 그 위쪽에 있고(높이 $b > 0$에서 시작하여 x_0에서만 직선과 만난다), $x > x_0$에서는 직선 아래에 있다. 따라서 R은 $0 \le x \le x_0$에서 $y = x$와 곡선 $y = b(1 - x^2/a^2)^{1/2}$ 사이의 영역이다.

$$\text{넓이}(R) = \underbrace{\int_0^{x_0} b\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x}_{\text{앞의 결과에서 } c = x_0} - \underbrace{\tfrac{1}{2}x_0^2}_{\text{삼각형 넓이, 직선 } y = x}.$$

$c = x_0$으로 두면(필요한 대로 $0 < x_0 < a$이다)

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \frac{c}{a}\Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \text{넓이}(E \cap F) &= 8\,\text{넓이}(R) \\ &= 4ab\left[\frac{ab}{a^2 + b^2} + \sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big)\right] - \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \\ &= 4ab\sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big), \end{aligned}$$

이다. 두 대수적 항이 정확히 상쇄되기 때문이다. 이것이 구하는 넓이이다.

? 생각해 보기 왜 대수적 항들이 상쇄되는가?

항 $\frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{a}(1 - c^2/a^2)^{1/2} = \frac{1}{2}x_0y_0$은 원 그림의 삼각형 O, $(x_0, 0)$, (x_0, y_0)을 늘인 것이다. 여기서 $y_0 = x_0$이므로, 이것은 우리가 빼는 $y = x$ 아래의 삼각형과 정확히 같다. 남는 것은 늘인 부채꼴이고, 그래서 답이 순수한 역사인 함수 하나로 나온다.

검산

- $a = b$이면 두 타원은 같은 원이고, 공식은 $4a^2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi a^2$을 주므로 마땅히 그래야 하는 값이 나온다.
- a를 고정하고 $b \to 0$이면 넓이는 $4ab \cdot \frac{b}{a} = 4b^2$처럼 행동한다. 교집합은 E의 가는 가로띠가 F의 가는 세로 띠와 교차하는 곳에 생기는, 한 변이 $2b$인 정사각형에 가깝다.
- $a = 2$, $b = 1$일 때 공식은 $8\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 3.70918$을 준다. 두 경계 중 아래쪽 것에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 3.70918이 나오고, 2×10^5개의 점으로 한 몬테카를로(Monte Carlo) 추정값은 3.707이다. 앞의 두 결과도 무작위로 고른 여러 a, b, c에 대해 수치 적분(quadrature)으로 확인하였다.

흔한 실수

- 부채꼴의 각을 잘못 잡는 것: 부채꼴은 OP와 y축 사이에 있고, 그 각은 $\cos^{-1} c$가 아니라 $\sin^{-1} c$이다.
- 어느 타원이 영역의 경계인지 확인하지 않는 것. 절반 $0 \leq x \leq y$에서 경계가 E인 것은 오직 $b \leq a$이기 때문이다. 반대로 고르면 역사인 함수 안에 b 대신 a가 들어간 답이 나온다.

STEP 너머

선형사상(linear map) $(x, y) \mapsto (ax, by)$는 모든 넓이에 ab를 곱하고, 일반적으로 선형사상은 넓이에 그 행렬식(determinant)의 절댓값을 곱한다. 이것은 대학 1학년 미적분학에서 배우는 중적분(multiple integral)의 변수 변환 공식(change-of-variables formula)에 나오는 야코비안(Jacobian) 인수의 2차원 경우이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 행렬식을 넓이(와 부피)의 배율로 설명한다.

풀이

STEP II 1994, 문제 5

순수수학 • 실근의 개수 세기

> **STEP II 1994, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q5

핵심 아이디어

$f(x) = c$의 근(root)의 개수를 센다는 것은 수평선 $y = c$가 f의 그래프와 몇 번 만나는지를 묻는 것이다. 따라서 중요한 것은 f의 모양, 곧 어디에서 가장 작아지고 어디에서 증가하거나 감소하는지이다. 여기 나오는 식은 모두 어떤 중심점에 대하여 대칭으로 놓인 두 괄호로 이루어져 있다. 중심이 원점이 되도록 변수를 평행이동하면 홀수 차수 항이 소거되거나(네제곱의 경우) 짝수 차수 항이 소거되어(세제곱의 경우) 모양이 한눈에 드러난다.

풀이

소문항 (i)

이항정리(binomial theorem)로 전개한다. $(x+1)^4$과 $(x-1)^4$에서 x의 홀수 차수 항은 부호가 반대이므로 합에서 소거된다.

$$f(x) = (x-1)^4 + (x+1)^4 = 2\left(x^4 + 6x^2 + 1\right) = 2x^4 + 12x^2 + 2.$$

따라서 f는 우함수(even function)이고 $f(x) = 2 + 2x^4 + 12x^2 \geq 2$이며, 등호는 $x = 0$일 때만 성립한다. $x \geq 0$에서 $x > 0$이면 $f'(x) = 8x^3 + 24x > 0$이므로 f는 $[0, \infty)$에서 순증가(strictly increasing)하고, $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$이다. f는 연속(continuous)이므로 $[0, \infty)$에서 $[2, \infty)$의 모든 값을 정확히 한 번씩 취한다. 대칭성에 의해 $(-\infty, 0]$에서도 마찬가지이다.

- $c > 2$인 경우: 근 $x = a > 0$이 정확히 하나 있고, 그러면 $x = -a$가 두 번째 근이다. 두 근은 서로 다르며 다른 근은 없다. 따라서 실근은 **정확히 두 개**이다.
- $c = 2$인 경우: $f(x) = 2$이면 $2x^4 + 12x^2 = 0$이어야 하므로 $x = 0$이 **유일한** 근이다.

▶ $c < 2$인 경우: 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 2 > c$이므로 근이 **없다**.

이것이 바로 요구된 결과이다.

(다른 방법으로, $2x^4 + 12x^2 + 2 - c = 0$은 $u = x^2$에 대한 이차방정식이고 그 근은 $u = -3 \pm \sqrt{8 + c/2}$이다. 음이 아닐 수 있는 것은 $+$ 쪽 근뿐이며, 이 근은 $c > 2$, $c = 2$, $c < 2$에 따라 각각 양수, 0, 음수이다.)

소문항 (ii)

괄호 $x - 3$과 $x - 1$의 중심은 $x = 2$이므로 $y = x - 2$로 놓는다. 그러면

$$(x-3)^4 + (x-1)^4 = (y-1)^4 + (y+1)^4,$$

이고, 이는 변수 y에 대한 소문항 (i)의 식이다. $x \mapsto y = x - 2$는 실수 사이의 일대일대응(one-to-one correspondence)이므로, 이 방정식의 실근의 개수는 소문항 (i)과 같다.

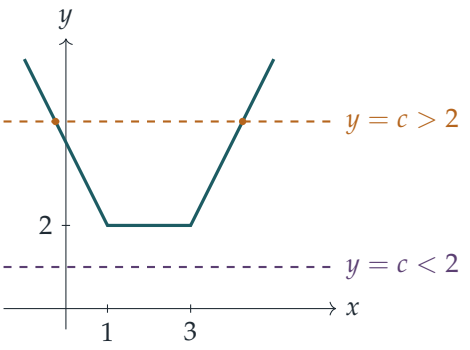
$$\text{근 두 개, 단} c > 2, \qquad \text{근 한 개} (x = 2), \text{단} c = 2, \qquad \text{근 없음, 단} c < 2.$$

소문항 (iii)

$g(x) = |x - 3| + |x - 1|$이라 하고, $x = 1$과 $x = 3$으로 나뉜 세 구간 각각에서 절댓값(modulus) 기호를 없앤다.

$$g(x) = \begin{cases} (3-x) + (1-x) = 4 - 2x, & x < 1, \\ (3-x) + (x-1) = 2, & 1 \leq x \leq 3, \\ (x-3) + (x-1) = 2x - 4, & x > 3. \end{cases}$$

따라서 그래프는 바닥이 평평한 V자 모양이다. 1과 3 사이에서는 2로 일정하고, 왼쪽에서는 순감소, 오른쪽에서는 순증가하며, $[1, 3]$ 바깥에서는 $g > 2$이다.



▶ $c < 2$인 경우: 모든 곳에서 $g(x) \geq 2 > c$이므로 근이 **없다**.

- $c = 2$인 경우: $1 \le x \le 3$인 모든 x가 근이고 그 바깥에는 근이 없으므로, 근은 **무수히 많다**.
- $c > 2$인 경우: $[1,3]$에는 근이 없다. $x < 1$에서는 $4 - 2x = c$로부터 $x = 2 - \frac{c}{2}$를 얻는데, $c > 2$이므로 이 값은 실제로 1보다 작다. $x > 3$에서는 $2x - 4 = c$로부터 $x = 2 + \frac{c}{2} > 3$을 얻는다. 따라서 근은 **정확히 두 개**이며, $x = 2 \pm \frac{c}{2}$이다.

생각해 보기 $c = 2$일 때의 답이 소문항 (ii)와 이토록 다른 까닭은 무엇인가?

네제곱의 경우에는 두 항이 모두 순볼록(strictly convex)하므로 합은 중심점에서 하나의 뾰족한 최솟값을 가진다. 절댓값의 경우에는 x를 1과 3 사이에서 움직이면 한쪽 거리가 늘어나는 만큼 다른 쪽 거리가 정확히 줄어들므로, 합은 구간 전체에서 2(1과 3 사이의 거리)로 유지된다.

소문항 (iv)

다시 $y = x - 2$로 놓는다. 세제곱의 경우에는 y의 짝수 차수 항이 소거된다.

$$(x-3)^3 + (x-1)^3 = (y-1)^3 + (y+1)^3 = 2y^3 + 6y.$$

$h(y) = 2y^3 + 6y$라 하자. 그러면 모든 실수 y에 대하여

$$h'(y) = 6y^2 + 6 \ge 6 > 0$$

이므로 h는 실수 전체에서 순증가하고, 따라서 각 값을 많아야 한 번 취한다. 또한 $y \to \infty$일 때 $h(y) \to \infty$이고 $y \to -\infty$일 때 $h(y) \to -\infty$이며 h는 연속이므로, 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 모든 실숫값을 적어도 한 번 취한다.

그러므로 **모든** 실수 c에 대하여 이 방정식은 **정확히 하나의** 실근을 가진다.

검산

- 중심점 $x = 2$에서 두 네제곱 식은 모두 $1 + 1 = 2$이 되어 $c = 2$인 경우와 맞아떨어지고, $(2-3)^3 + (2-1)^3 = 0$이다.
- 소문항 (iv)에서 $c = 8$이면 $x = 3$이 나와야 한다. 실제로 $0^3 + 2^3 = 8$이고, $y = 1$일 때 $h(1) = 2 + 6 = 8$이다.
- 소문항 (iii)에서 $c = 4$이면 근 $x = 0$과 $x = 4$는 각각 $3 + 1 = 4$와 $1 + 3 = 4$를 준다.

임의의 점들에서 전개식이 성립함을 수치적으로 확인했고, 여러 c 값(예를 들어 (i)과 (ii)에서는 $c = 1.9, 2.5, 100$, (iv)에서는 -1000부터 5000까지의 c)에 대하여 각 함수에서 c를 뺀 것의 부호 변화를 촘촘한 격자 위에서 세었다. 그 개수는 주장한 대로 0, 2, 2였고 (iv)에서는 항상 1이었다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 $c = 2$일 때 "근 한 개" 또는 "근 두 개"라고 답하는 것. 구간 $1 \leq x \leq 3$ 전체가 근으로 이루어져 있다.
- 소문항 (iv)에서 삼차방정식이 "실근을 한 개 또는 세 개 가진다"고만 하고 어느 쪽인지 정하지 않는 것. 모든 곳에서 $h'(y) > 0$이라는 사실이 이를 결정해 준다.
- $x = 2 - \frac{c}{2}$가 식 $4 - 2x$를 사용한 영역 $x < 1$에 실제로 속하는지 확인하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

여기서의 논증은 해석학(analysis) 입문 강의에서 엄밀하게 증명하는 두 정리에 기대고 있다. 하나는 중간값 정리(구간에서 연속인 함수는 그 사이의 모든 값을 취한다)이고, 다른 하나는 도함수가 양수인 함수는 순증가한다는 사실로, 이는 평균값 정리(mean value theorem)에서 따라 나온다. 소문항 (iii)은 볼록성(convexity)과 ℓ^1 거리를 처음 맛보는 경험이기도 하다. 두 점까지의 거리의 합은 두 점 사이의 선분 전체에서 최소가 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 이러한 아이디어를 엄밀하게 전개한다.

풀이

STEP II 1994, 문제 6

순수수학 • 삼각함수의 망원급수

> **STEP II 1994, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q6

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 작은 항등식 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$에 달려 있다. 이 항등식은 합의 각 항을 $\frac{1}{2^r}\cot\frac{\theta}{2^r}$ 꼴의 연속한 두 항의 차로 바꾸어 주므로 합이 연쇄적으로 소거(telescoping)되고, 바로 이 항등식이 귀납 단계를 성립하게 만든다. 그러면 무한급수에는 극한 $\frac{\sin\varphi}{\varphi}\to 1$만 있으면 된다.

풀이

유용한 항등식

$\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$가 모두 0이 아닌 임의의 x에 대하여

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x,$$

이므로

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x. \qquad (*)$$

이다. $(*)$는 $r \geq 1$일 때 $x = \theta/2^r$인 경우에만 사용한다. $0 < \theta < \pi$이므로 이러한 x는 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하고, 따라서 $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$가 모두 양수이며 앞으로 쓰는 모든 tan와 cot이 정의된다.

유한합: 수학적 귀납법으로

좌변 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^r}\tan\frac{\theta}{2^r}$를 S_n이라 쓰고, $P(n)$을 다음 명제라 하자.

$$S_n = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} - \cot\theta.$$

기저 단계(*base case*) $n = 1$. $(*)$에 $x = \theta/2$를 대입하고 2로 나누면

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{\theta}{2} - \cot\theta,$$

이고, 이것이 $P(1)$이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하자. $(*)$에 $x = \theta/2^{k+1}$를 대입하면 $2x = \theta/2^k$이고, 양변을 2^{k+1}로 나누면

$$\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}.$$

이다. 이것을 $P(k)$에 더하면

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}} \\ &= \left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k} - \cot\theta\right) + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \cot\theta, \end{aligned}$$

이고, 이것이 $P(k+1)$이다. 따라서 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 $n \geq 1$과 모든 $\theta \in (0, \pi)$에 대하여 $P(n)$이 성립하며, 이것이 증명하려던 것이다.

생각해 보기 항등식 $(*)$를 처음 본다면 어떻게 찾아낼 수 있을까?

귀납법에서 거꾸로 거슬러 올라가 보자. $n = k$에서 $n = k+1$로 갈 때 우변은 $\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}$만큼, 좌변은 $\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}}$만큼 변한다. 2^{k+1}을 곱하고 $x = \theta/2^{k+1}$로 쓰면, 두 변화량은 정확히 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$일 때 같아진다. 즉 문제 자체가 어떤 항등식을 증명해야 하는지 알려 주며, 그다음에는 배각 공식(double-angle formulae)으로 확인하면 된다.

무한급수

모든 항이 양수이고 부분합에 대한 정확한 공식이 있으므로, $n \to \infty$일 때 S_n의 극한을 구하기만 하면 된다. $\varphi_n = \theta/2^n$이라 하면 $\varphi_n \to 0^+$이고 $\frac{1}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta}$이다. 그러면

$$\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta}\cdot\frac{\cos\varphi_n}{\sin\varphi_n} = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\cdot\cos\varphi_n \longrightarrow \frac{1}{\theta}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{\theta},$$

이다. 여기서 $\varphi \to 0$일 때의 잘 알려진 극한 $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1$과 $\cos\varphi \to 1$을 사용하였다. $\cot\theta$는 n에 의존하지 않으므로

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}\tan\frac{\theta}{2^r} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\theta} - \cot\theta,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 특히 이 급수는 모든 $\theta \in (0, \pi)$에 대하여 수렴(converge)한다.

생각해 보기 "무한급수의 합은 S_n의 극한과 같다"고 말해도 되는 이유는 무엇일까?

그것이 바로 무한급수의 합의 정의이다. 즉 $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$는 극한 $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r$가 존재할 때 그 극한을 뜻한다. 우리는 극한을 직접 계산하여 그것이 존재함을 보였으므로 더 필요한 것은 없다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$: 우변은 $\frac{2}{\pi} - 0 \approx 0.63662$이다. 급수의 처음 60개 항을 수치적으로 더해도 0.6366198이 나온다.
- $\theta = 1$: 급수와 $1 - \cot 1$ 모두 0.3579074이다.
- 작은 θ: $\tan\frac{\theta}{2^r} \approx \frac{\theta}{2^r}$이므로 급수는 대략 $\theta\sum 4^{-r} = \frac{\theta}{3}$이다. 이는 전개식 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta = \frac{\theta}{3} + O(\theta^3)$과 일치한다.
- $\theta \to \pi^-$일 때 $\cot\theta \to -\infty$이고 첫째 항 $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} \to +\infty$이므로, 마땅히 그래야 하듯 양변이 함께 발산한다.

흔한 실수

- $(*)$에서 인수 2를 잘못 쓰는 것. 예를 들어 $\tan x = \cot x - \cot 2x$라고 쓰는 경우이다. $x = \frac{\pi}{4}$에서 확인해 보라: $1 = 1 - 2\cdot 0$.
- $\frac{1}{2^n} \to 0$이므로 $\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} \to 0$이라고 주장하는 것. 코탄젠트는 $2^n/\theta$처럼 커지므로 곱은 0이 아니라 $\frac{1}{\theta}$로 수렴한다.
- 탄젠트와 코탄젠트가 정의되는 이유를 말하지 않는 것. 모든 각 $\theta/2^r$을 $(0, \frac{\pi}{2})$ 안에 머무르게 하는 것은 조건 $0 < \theta < \pi$이다.

STEP 너머

함수 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta$는 유명한 함수족에 속한다. 부분분수 전개(partial-fraction expansion) $\cot\theta = \frac{1}{\theta} + \sum_{k\geq 1}\frac{2\theta}{\theta^2 - k^2\pi^2}$를 미분하면 바젤 문제(Basel problem)의 합 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$을 얻으며, 오일러(Euler)는 $\sin\theta$의 무한곱(infinite product)으로부터 이러한 결과들을 얻었다. 비에트(Viète)의 곱 $\frac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{r\geq 1}\cos\frac{\theta}{2^r}$에 로그를 취하고 미분하면 정확히 이 문제의 급수가 나오며, 이것은 결과를 이해하는 또 다른 방법이다. 무한급수와 무한곱의 이러한 조작을 엄밀하게 만드는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 1994, 문제 7

순수수학 • 아폴로니오스의 원

> **STEP II 1994, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q7

핵심 아이디어

높이가 h인 깃대의 꼭대기를 거리 r에서 올려다본 앙각(angle of elevation)의 탄젠트는 h/r이다. 따라서 "앙각이 같다"는 것은 곧 병사와 두 깃대 밑동 사이의 거리의 비가 고정된 비 $h_1 : h_2$라는 뜻이다. 이 조건을 제곱하면 첫 번째 부분과 정확히 같은 꼴의 방정식이 나오므로, 자취(locus)는 원(아폴로니오스의 원(circle of Apollonius))이다. 마지막 부분에서는 깃대를 일반적인 위치에 두고 각 중심을 두 밑동의 가중 결합으로 나타낸다. 그러면 항등식이 자연스럽게 나오고, 그 계수들의 합이 0이라는 사실이 세 점이 한 직선 위에 있음(collinearity)을 보장한다.

풀이

원

$a > 0$이므로 a로 나누고 완전제곱식을 만들(completing the square) 수 있다.

$$x^2 + y^2 + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \iff \left(x + \frac{g}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{f}{a}\right)^2 = \frac{g^2 + f^2 - ac}{a^2}.$$

$f^2 + g^2 > ac$이므로 우변은 양수이다. 따라서 이것은

$$\text{중심} \left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right), \qquad \text{반지름} \frac{\sqrt{g^2 + f^2 - ac}}{a}.$$

인 원이다. (이 조건이 없으면 "원"은 한 점이거나 공집합이 된다.)

깃대 두 개

높이가 h_1인 깃대의 밑동을 원점에, 다른 깃대의 밑동을 $(d, 0)$에 둔다. 병사가 (x, y)에 있고 두 밑동으로부터의 거리가 각각 r_1, r_2라면, 앙각 θ_1, θ_2는 $\tan\theta_i = h_i/r_i$를 만족한다. 두 각은 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있고 이 구간에서 tan는 일대일(one-to-one)이므로

$$\theta_1 = \theta_2 \iff \frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2} \iff h_2^2 r_1^2 = h_1^2 r_2^2$$

이다. 모든 양이 양수이므로 마지막 단계는 거꾸로도 성립한다. (병사는 밑동 위에 설 수 없다. $r_1 = 0$이면 $r_2 = 0$이어야 하기 때문이다.) 따라서 경로는

$$h_2^2(x^2 + y^2) = h_1^2\big((x-d)^2 + y^2\big) \iff (h_2^2 - h_1^2)(x^2 + y^2) + 2h_1^2 d\,x - h_1^2 d^2 = 0.$$

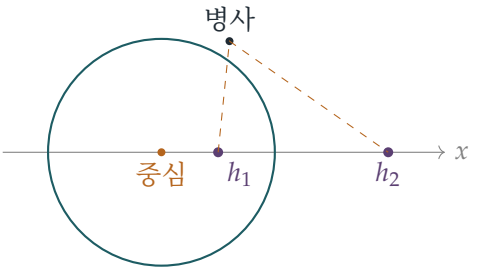
이다. $h_2 > h_1$이 되도록 깃대에 이름을 붙인다(높이가 다르면 하나가 더 높다). 그러면 이것은

$$a = h_2^2 - h_1^2 > 0, \quad g = h_1^2 d, \quad f = 0, \quad c = -h_1^2 d^2,$$

인 첫 번째 부분의 방정식이고,

$$g^2 + f^2 - ac = h_1^4 d^2 + (h_2^2 - h_1^2) h_1^2 d^2 = h_1^2 h_2^2 d^2 > 0.$$

이다. 따라서 병사는 중심이 $\left(-\dfrac{h_1^2 d}{h_2^2 - h_1^2}, 0\right)$이고 반지름이 $\dfrac{h_1 h_2 d}{h_2^2 - h_1^2}$인 원을 따라 행진한다. 중심은 두 밑동을 지나는 직선 위, 낮은 깃대 너머에 있다. 이 원은 낮은 깃대를 둘러싸는데, 이는 당연하다. 낮은 깃대가 높은 깃대만큼 높아 보이게 하려면 낮은 깃대에 더 가까이 서야 하기 때문이다.



($h_1 = 1, h_2 = 2, d = 3$인 경우를 그린 것이다. 중심은 $(-1, 0)$이고 반지름은 2이다.)

$h_1 = h_2$이면 $x^2 + y^2$ 항이 소거되어 방정식은 $2h_1^2 d\,x = h_1^2 d^2$, 즉 $x = \frac{1}{2}d$가 된다. 병사는 두 밑동을 잇는 선분의 수직이등분선(perpendicular bisector)을 따라 걷게 되며, 이는 원이 아니라 직선이다. 이것은 위의 원들의 극한이다. $h_2 \to h_1$일 때 반지름은 무한대로 발산한다.

깃대 세 개

이제는 세 밑동을 모두 한 축 위에 둘 수 없으므로, 높이가 h_i인 깃대가 $\mathbf{p}_i = (p_i, q_i)$에 서 있다고 하자. $r_i^2 = (x-p_i)^2 + (y-q_i)^2$로 놓고 위의 논증을 되풀이하면, 깃대 i와 j를 맡은 병사는

$$(h_j^2 - h_i^2)(x^2+y^2) - 2(h_j^2 p_i - h_i^2 p_j)x - 2(h_j^2 q_i - h_i^2 q_j)y + \text{상수} = 0.$$

을 따라 걷는다. 이것은 원이다(원점을 옮겨도 g^2+f^2-ac의 값은 변하지 않으므로, $h_j < h_i$이면 전체에 -1을 곱한 뒤에도 여전히 $h_i^2 h_j^2 |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|^2 > 0$이다). 첫 번째 부분을 이용하면 그 중심 $\mathbf{c}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$는

$$(h_j^2 - h_i^2)\,\mathbf{c}_{ij} = h_j^2 \mathbf{p}_i - h_i^2 \mathbf{p}_j.$$

를 만족한다. 이 식은 i와 j를 바꾸어도 변하지 않으므로(양변의 부호가 함께 바뀐다), $\mathbf{c}_{31}$에 어느 쪽 순서로 이름을 붙이든 상관없다.

생각해 보기 아무것도 풀지 않고 이런 공식 세 개를 주어진 항등식으로 바꾸려면 어떻게 해야 할까?

항등식의 각 항에는 이미 x_{ij} 옆에 인수 $\pm(h_j^2 - h_i^2)$가 붙어 있으므로, 위의 공식을 바로 대입할 수 있다. 벡터를 써서 x좌표와 y좌표를 한꺼번에 처리하자.

$$\begin{aligned}
h_3^2(h_1^2 - h_2^2)\,\mathbf{c}_{12} &= -h_3^2(h_2^2\mathbf{p}_1 - h_1^2\mathbf{p}_2) &&= -h_2^2 h_3^2\,\mathbf{p}_1 + h_1^2 h_3^2\,\mathbf{p}_2,\\
h_1^2(h_2^2 - h_3^2)\,\mathbf{c}_{23} &= -h_1^2(h_3^2\mathbf{p}_2 - h_2^2\mathbf{p}_3) &&= -h_1^2 h_3^2\,\mathbf{p}_2 + h_1^2 h_2^2\,\mathbf{p}_3,\\
h_2^2(h_3^2 - h_1^2)\,\mathbf{c}_{31} &= \quad h_2^2(h_3^2\mathbf{p}_1 - h_1^2\mathbf{p}_3) &&= \quad h_2^2 h_3^2\,\mathbf{p}_1 - h_1^2 h_2^2\,\mathbf{p}_3.
\end{aligned}$$

더하면 모든 항이 짝지어 소거되므로

$$h_3^2(h_1^2 - h_2^2)\,\mathbf{c}_{12} + h_1^2(h_2^2 - h_3^2)\,\mathbf{c}_{23} + h_2^2(h_3^2 - h_1^2)\,\mathbf{c}_{31} = \mathbf{0}.$$

이다. x성분은 x_{ij} 사이의 구하는 관계식이고, y성분은 y_{ij} 사이의 같은 관계식이다.

생각해 보기 세 점 사이의 선형 관계(linear relation)가 왜 세 점을 한 직선 위에 있게 만들까?

세 계수를 $A = h_3^2(h_1^2 - h_2^2)$, $B = h_1^2(h_2^2 - h_3^2)$, $C = h_2^2(h_3^2 - h_1^2)$라 하자. 높이는 모두 양수이고 서로 다르므로 A, B, C 중 어느 것도 0이 아니다. 핵심이 되는 추가 사실은 이들의 합이 0이라는 것이다.

$$A + B + C = h_1^2 h_3^2 - h_2^2 h_3^2 + h_1^2 h_2^2 - h_1^2 h_3^2 + h_2^2 h_3^2 - h_1^2 h_2^2 = 0.$$

따라서 $C = -A - B$이고, 관계식은

$$A(\mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{31}) + B(\mathbf{c}_{23} - \mathbf{c}_{31}) = \mathbf{0}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{31} = -\frac{B}{A}\,(\mathbf{c}_{23} - \mathbf{c}_{31}).$$

가 된다. $\mathbf{c}_{31}$에서 나머지 두 중심으로 가는 벡터가 평행하므로(두 중심이 일치하면 하나는 영벡터이다), 세 중심은 한 직선 위에 있다. $A+B+C=0$이 없다면 선형 관계만으로는 아무것도 증명할 수 없다. 임의의 세 점은 그런 꼴의 관계식을 어떤 것이든 하나는 만족하기 때문이다.

검산

- $h_1=1, h_2=2, d=3$이면 우리 공식은 중심 $(-1,0)$, 반지름 2를 준다. 점 $(1,0)$은 두 밑동으로부터 거리가 1과 2이고, $(-3,0)$은 거리가 3과 6이다. 둘 다 비가 $1:2$로, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- 수치 검산으로 각 원 위에 무작위로 점을 잡아 두 앙각이 일치함을 확인했다. 또한 무작위 위치에 놓인 깃대 세 개의 무작위 조합 2000개에 대해 항등식과 세 중심이 한 직선 위에 있음도 확인했다.
- 세 중심이 한 직선 위에 있으리라 기대할 또 다른 이유가 있다. 어떤 점이 두 원 위에 있으면 $r_1:r_2=h_1:h_2$이고 $r_2:r_3=h_2:h_3$이므로 $r_1:r_3=h_1:h_3$이 되어 그 점은 세 번째 원 위에도 있다. 원들이 만나면 모두 같은 두 점을 지나므로, 그 중심들은 모두 그 두 점의 수직이등분선 위에 있다.

흔한 실수

- 각이 같으면 왜 탄젠트가 같은지(두 각이 모두 예각이다) 말하지 않고 $h_1/r_1=h_2/r_2$로 놓는 것.
- $g^2+f^2>ac$를 확인하지 않는 것. 첫 번째 부분은 이 조건 아래에서만 원을 준다.
- $A+B+C=0$과 $A,B,C\neq 0$을 쓰지 않고 항등식만으로 세 점이 한 직선 위에 있다고 결론짓는 것.

STEP 너머

두 고정점으로부터의 거리의 비가 고정된 값 $k\neq 1$인 점들의 집합을 **아폴로니오스의 원**이라 한다. k의 모든 값을 택하면 원들의 **공축 원족**(coaxal system)을 얻는데, 이는 어느 두 원도 같은 근축(radical axis)을 공유하는 원들의 모임이다. 이런 원족에서 반전 기하학(inversive geometry)이 시작되며, 복소평면(complex plane)에서 이들은 원 $|z-a|=k|z-b|$이고, 뫼비우스(Möbius) 변환은 이 원들을 서로에게 옮긴다. 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 공축 원과 반전을 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 쪽 관점을 보여 준다.

풀이

STEP II 1994, 문제 8

순수수학 • 이차 모형의 최적화

> **STEP II 1994, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q8

핵심 아이디어

한 번의 배송 주기 동안 돈의 흐름을 따라가 본다. 재고는 바닥날 때까지 일정한 비율 r로 줄어들므로 $S(t)$는 단순한 경사로 모양이고, 보관 비용은 그 경사로 아래 넓이에 b를 곱한 값이다. 그러면 한 주기당 이익은 X에 대한 이차식(quadratic)이 된다. 이것을 허용 범위 $0 < X \leq rT$에서 최대화하면 조건을 얻는데, 가정 $T \geq p/b$가 바로 포물선(parabola)의 꼭짓점(vertex)을 그 범위 안에 놓이게 하는 조건이다.

풀이

왜 $X \leq rT$인가

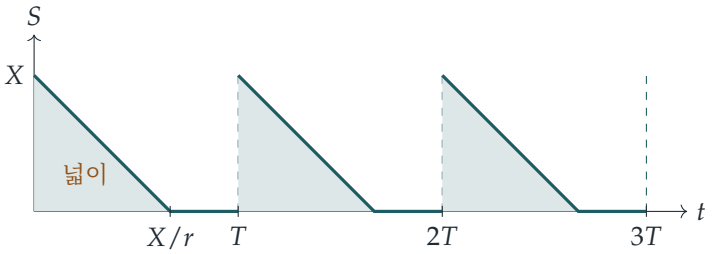
T시간 동안 그녀가 팔 수 있는 양은 많아야 rT단위이다. 만약 $X > rT$이면 다음 트럭이 도착할 때 적어도 $X - rT$단위가 여전히 진열대에 남아 있다. 그러면 매 주기마다 팔리지 않은 잉여분이 적어도 $X - rT$씩 더 늘어나므로, n번의 주기가 지나면 그 양은 적어도 $n(X - rT)$이다. 이 값은 한없이 커지고, 단위당 시간당 b인 보관 비용도 마찬가지로 한없이 커진다. 그녀는 이 물건들의 값을 (그리고 보관 비용을) 치르지만, 어차피 판매량은 주기당 rT로 제한되어 있으므로 이 물건들은 추가 매출을 전혀 만들어 내지 못한다. 따라서 한 번 배송에 rT보다 많이 주문하는 것은 비용만 늘릴 뿐이므로, $X \leq rT$로 잡아야 한다.

재고량

$X \le rT$이면 각 주기는 정확히 X단위로 시작한다. 연속 모형에서 그녀는 재고가 있는 동안 비율 r로 판매하므로

$$S(t) = \begin{cases} X - rt, & 0 \le t \le X/r, \\ 0, & X/r \le t \le T. \end{cases}$$

이 그래프는 X에서 출발하여 $t = X/r$에서 0이 될 때까지 직선으로 내려간 다음, $t = T$에서 다음 배송이 올 때까지 0에서 평평하게 유지된다(그 순간 다시 X로 뛰어오른다). 여러 주기에 걸쳐 보면 톱니 모양이 된다.



한 주기당 이익

T시간의 한 주기 동안:

- **매출**. ($X \le rT$이므로) X단위가 모두 각각 £$(p+q)$에 팔려서 £$(p+q)X$가 된다.
- **배송비**. £$(a + qX)$.
- **보관비**. $S(t)$단위를 짧은 시간 δt 동안 보관하는 비용은 $bS(t)\,\delta t$이므로, 전체 비용은

$$b\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t = b\int_0^{X/r} (X - rt)\,\mathrm{d}t = b \cdot \tfrac{1}{2} \cdot X \cdot \frac{X}{r} = \frac{bX^2}{2r},$$

  즉 색칠한 삼각형의 넓이에 b를 곱한 값이다.

- **운영비**. £cT.

qX 항은 서로 소거되므로 한 주기당 이익은

$$P(X) = pX - \frac{bX^2}{2r} - a - cT.$$

따라서 p가 각 단위에서 얻는 실제 이윤이다. q는 그대로 고객에게 전가될 뿐이다.

언제 사업이 이익을 낼 수 있는가?

T가 고정되어 있을 때 그녀는 범위 $0 < X \le rT$에서 X를 조절할 수 있다. 완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$P(X) = \frac{p^2 r}{2b} - a - cT - \frac{b}{2r}\left(X - \frac{pr}{b}\right)^2.$$

생각해 보기 가장 좋은 X가 실제로 허용되는 값인가?

포물선은 $X = pr/b$에서 최댓값을 가지며, $pr/b \le rT$이어야 하는데 이는 $T \ge p/b$와 같다. 이것이 바로 주어진 가정이다. 따라서 그녀는 $X = pr/b$를 선택할 수 있고, 그러면

$$P = \frac{p^2 r}{2b} - (a + cT).$$

이 값은 정확히 $p^2 r > 2b(a + cT)$일 때, 즉

$$p^2 > 2\,\frac{(a + cT)b}{r}.$$

일 때 양수이다. 그러므로 이 부등식이 성립하면 주문량 $X = pr/b$로 사업이 이익을 내게 되어, 요구한 결과를 얻는다. (사실 pr/b가 가능한 최선의 선택이므로, $T \ge p/b$일 때 이 조건은 필요조건이기도 하다.)

반대로 $T < p/b$이면 꼭짓점이 rT보다 바깥에 있다. 이때 P는 허용 범위 전체에서 증가하므로 그녀가 할 수 있는 최선은 $X = rT$이다. 이 특정한 조건을 얻는 데 T에 대한 가정이 필요한 이유가 바로 이것이다.

검산

- $a = 10$, $b = 1$, $r = 10$, $p = 4$, $c = 1$, $T = 5$로 놓자. 그러면 $T \ge p/b = 4$이고, $p^2 = 16 > 2(15)(1)/10 = 3$이다. 최선의 주문량은 $X = 40 \le rT = 50$이고, 이익은 $160 - 10 - 80 - 5 = 65 = \frac{16 \cdot 10}{2} - 15$이다.
- 무작위로 정한 30개의 매개변수 조합에 대해 컴퓨터로 한 주기 동안 $S(t)$를 수치적으로 계산해 보았더니 $P(X)$와 10^{-7} 이내로 일치했다. 또 $T \ge p/b$인 무작위 사례 2000개에 대해 X를 격자 탐색한 결과 최댓값이 $\frac{p^2 r}{2b} - a - cT$임을 확인했다.
- 단위: $p^2 r/b$의 단위는 (£/단위)$^2 \times$(단위/h)/(£/단위/h) = £이고, a와 cT의 단위도 마찬가지이다.

흔한 실수

- 실제로 보유한 재고에 대한 보관비 $b\int S\,\mathrm{d}t$ 대신 X단위 전체를 T시간 내내 보관한 것으로 계산하는 것(bXT).
- $X = pr/b$가 $X \le rT$를 만족하는지 확인하는 것을 잊는 것. 조건 $T \ge p/b$가 쓰이는 곳은 오직 이 확인 단계뿐이다.

STEP 너머

이것은 운용과학(operations research)의 고전적인 **경제적 주문량**(economic order quantity) 모형이다. 주문 한 번당 드는 고정 비용과 단위 시간당 보유 비용 사이의 균형을 맞추면 제곱근 법칙이 나온다. 여기서 그녀가 T도 선택할 수 있다면, 이익 **비율** P/T는 a와 보관비 사이의 득실을 따져 최대화된다. 이런 종류의 제약 최적화(constrained optimisation)(여기서는 꼭짓점과 경계 $X = rT$ 사이의 비교)는 선형계획법(linear programming)과 비선형계획법(nonlinear programming), 그리고 카루시–쿤–터커 조건(Karush–Kuhn–Tucker conditions)으로 발전한다. 이런 모형을 세우고 검증하는 습관을 기르는 데에는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*가 좋은 길잡이가 된다.

풀이

STEP II 1994, 문제 9

역학 • 강체의 평형

STEP II 1994, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s2-q9

핵심 아이디어

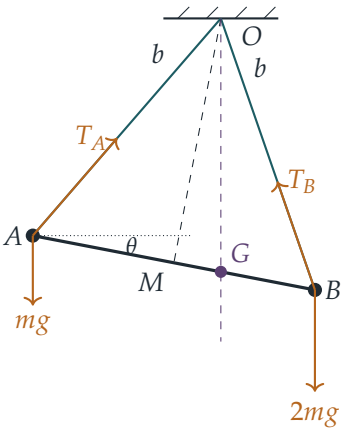
막대, 두 줄, 두 입자를 하나의 강체(rigid body)로 본다. 이 물체에 작용하는 외력은 두 무게와 O에서의 지지력뿐이므로, 평형(equilibrium)을 이루려면 질량중심(centre of mass) G에 작용하는 전체 무게가 O를 지나는 직선을 따라 작용해야 한다. 즉 G는 O의 연직 아래에 매달린다. 이렇게 하면 각을 구하는 문제는 순수하게 이등변삼각형(isosceles triangle)의 기하 문제가 된다. 장력(tension)을 구할 때는 B에 대한 모멘트(moment)를 잡는다. 그러면 B에 작용하는 두 미지의 힘이 모두 사라진다.

풀이

모형. 막대와 줄은 가볍고, 줄은 늘어나지 않으며, A, B는 입자이다. $OA = OB = b$이고 $AB = 2a$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형이다. M을 AB의 중점이라 하자. 그러면 $OM \perp AB$이고, 피타고라스 정리(Pythagorean theorem)에 의해

$$OM = h = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

더 무거운 입자 B가 더 낮게 매달리고, 막대는 수평과 각 θ를 이룬다.



각

막대, 줄, 입자를 모두 합친 전체 계를 생각한다. 이 계에 작용하는 외력은 A에서의 무게 mg, B에서의 무게 $2mg$, 그리고 O에서 지지대가 주는 힘이다. O에 대한 모멘트를 잡으면 지지력의 모멘트는 0이므로, O에 대한 무게들의 모멘트의 합은 0이어야 한다. 두 무게는 평행하므로 입자들의 질량중심 G를 지나는 하나의 힘 $3mg$로 합쳐진다. 이 힘의 O에 대한 모멘트가 0이 되는 것은 G가 O를 지나는 연직선 위에 있을 때뿐이다. 따라서 G는 O의 바로 아래에 있다.

이제 G를 구한다. G는 AB 위에 있고 $AG : GB = 2m : m = 2 : 1$이므로 $AG = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4a}{3}$이고, 따라서

$$MG = AG - AM = \frac{4a}{3} - a = \frac{a}{3},$$

이며 G는 M에 대해 B 쪽에 있다.

> **?** **생각해 보기** 왜 각 MOG가 θ와 같은가?

OG는 연직이고 OM은 막대에 수직이다. 연직선을 OM으로 돌리는 회전은 수평선을 막대로 돌리는 회전과 같으므로, OG와 OM 사이의 각은 막대와 수평선 사이의 각, 곧 θ와 같다.

삼각형 OMG는 M에서 직각이므로

$$\tan\theta = \frac{MG}{OM} = \frac{a/3}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{a}{3\sqrt{b^2 - a^2}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

AO의 장력

다시 막대와 입자를 함께 생각한다. 이 계에 작용하는 힘은 AO 방향의 T_A, BO 방향의 T_B, 그리고 두 무게이다. (막대 속의 힘은 내력이다.) B에 대한 모멘트를 잡으면 T_B와 무게 $2mg$가 사라진다.

B에서 직선 OA까지의 수직 거리는 삼각형 OAB의 넓이의 두 배를 OA로 나눈 값이다. 그 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h = ah$이므로 거리는 $2ah/b$이다. A에서의 무게 mg의 모멘트 팔(moment arm)은 A와 B 사이의 수평 거리, 즉 $2a\cos\theta$이다. 두 모멘트는 방향이 서로 반대이므로, 이 둘을 같게 놓으면

$$T_A\cdot\frac{2ah}{b} = mg\cdot 2a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad T_A = \frac{mgb\cos\theta}{h}.$$

θ가 예각이고 $\tan\theta = \dfrac{a}{3h}$이므로 $\cos\theta = \dfrac{3h}{\sqrt{9h^2+a^2}}$이며, $9h^2+a^2 = 9b^2-8a^2$이다. 따라서

$$T_A = \frac{mgb}{h}\cdot\frac{3h}{\sqrt{9b^2-8a^2}} = \frac{3mgb}{\sqrt{9b^2-8a^2}}.$$

(A에 대한 모멘트로 같은 논증을 하면 $T_B = 2T_A$를 얻는다. 즉 각 줄의 장력은 그 줄이 지탱하는 질량에 비례한다.)

검산

- $a\to 0$이면 줄이 연직이 되고 $T_A\to 3mgb/(3b) = mg$인데, 이는 정확히 입자 A를 지탱하는 데 필요한 값이다.
- 전체 계에 대해 연직 방향으로 분해하면 $3mg$가 나와야 한다. $a=1$, $b=2$, $m=1$, $g=9.8$로 두면 $T_A\approx 11.11\,\mathrm{N}$, $T_B\approx 22.22\,\mathrm{N}$을 얻는다. 이들을 줄의 방향으로 분해하면 연직 성분의 합은 $29.4\,\mathrm{N} = 3mg$이다.
- 무작위로 고른 2000개의 (a,b,m)에 대해 막대를 예측된 각에 놓고, 각 입자에서의 힘의 평형을 따로따로 푸는 수치 검산을 하였다. 두 입자에서 구한 막대의 힘이 일치하며 그 힘은 미는 힘(thrust)이고, 장력은 약 10^{-15}의 오차로 공식과 일치한다.

흔한 실수

- G를 M에서 $\frac{2a}{3}$만큼 떨어진 곳에 두거나 반대쪽에 두는 실수. 질량중심은 더 무거운 입자에 가깝고, 중점에서 $\frac{a}{3}$만큼 떨어져 있다.
- B에 대한 T_A의 모멘트 팔을 $2a$나 b로 잡는 실수. 필요한 것은 B에서 직선 OA까지의 수직 거리이다.
- 답을 m, g, a, b로 나타내라고 했는데 θ를 포함한 채로 남겨 두는 실수.

STEP 너머

한 점에 자유롭게 매달린 물체는 질량중심이 그 점의 아래에 오도록 자리 잡는다는 원리는 더 깊은 사실의 가장 간단한 경우이다. 안정 평형은 위치 에너지(potential energy)를 최소로 하며, 여기서 위치 에너지는 단지 $3mg$에 G의 높이를 곱한 값이다. 대학에서는 이것이 가상일의 원리(virtual work principle)와 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 발전하는데, 여기서는 힘을 분해하는 대신 에너지를 미분하여 평형을 찾는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 에너지 방법을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1994, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 단진동

> **STEP II 1994, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q10

핵심 아이디어

트레일러의 위치 대신 밧줄의 **늘어난 길이**(extension)를 변수로 삼는다. 트럭의 속도가 일정하므로, 늘어난 길이는 부호만 다를 뿐 트레일러의 가속도와 똑같은 방정식을 따르고, 그 방정식은 단순조화운동(simple harmonic motion)의 방정식이다. 따라서 밧줄은 반 주기 동안 팽팽(taut)하게 유지되다가, 트럭보다 빠르게 움직이는 트레일러를 놓아 준다. 그 다음은 등속도로 따라잡는 평범한 문제이다.

풀이

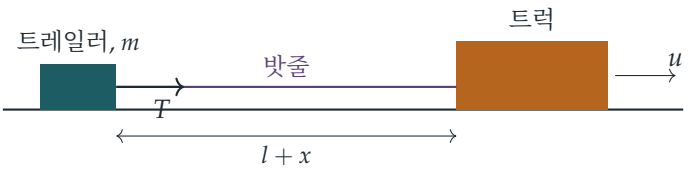
설정

트레일러를 질점(particle)으로, 밧줄은 가볍고 팽팽할 때는 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르며 느슨할 때는 힘을 작용하지 않는 것으로 모형화하고, 마찰은 무시한다. 시간 t는 밧줄이 처음 팽팽해지는 순간부터 재고, 거리는 운동 방향을 따라 잰다. $t = 0$일 때 트럭은 속력 u로 움직이고 있고(그 속력을 계속 유지한다), 트레일러는 정지해 있으며, 트럭은 트레일러보다 거리 l만큼 앞에 있다.

트레일러의 위치를 $y(t)$라 하고 $y(0) = 0$이라 하면, 트럭의 위치는 $l + ut$이다. 밧줄의 늘어난 길이는

$$x = (l + ut) - y - l = ut - y.$$

이다.



밧줄이 팽팽한 동안

$x > 0$인 동안 장력(tension)은 $T = \lambda x/l$이고, 이것이 트레일러에 작용하는 유일한 수평 방향의 힘으로서 트레일러를 앞으로 끌어당긴다. 따라서

$$m\ddot{y} = \frac{\lambda x}{l}.$$

이다. $x = ut - y$이고 u가 상수이므로 $\ddot{x} = -\ddot{y}$이고, 따라서

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \text{여기서} \omega^2 = \frac{\lambda}{ml}.$$

이다. 이것은 단순조화운동이다. 초기 조건은 $x(0) = 0$(밧줄이 막 팽팽해졌다)과 $\dot{x}(0) = u - \dot{y}(0) = u$이므로

$$x = \frac{u}{\omega}\sin\omega t, \qquad \dot{x} = u\cos\omega t.$$

이다. 트레일러의 속도는 $\dot{y} = u - \dot{x} = u(1 - \cos\omega t)$이다.

> **생각해 보기** 단순조화운동의 공식에 따르면 얼마 후 x가 음수가 된다. 그때에도 이 공식이 여전히 성립하는가?

그렇지 않다. 방정식 $\ddot{x} = -\omega^2 x$는 장력 $\lambda x/l$을 사용했는데, 이는 $x > 0$일 때만 적용된다. 밧줄은 밀 수 없기 때문이다. 이 공식은 $\sin\omega t \geq 0$인 $0 \leq t \leq \pi/\omega$에서 성립하며, 밧줄은

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

에서 다시 느슨해진다. 그 순간 늘어난 길이는 0이므로 트레일러는 다시 트럭보다 거리 l만큼 뒤에 있고, 그 속도는

$$\dot{y}(t_1) = u(1 - \cos\pi) = 2u.$$

이다.

밧줄이 느슨해진 후

$t > t_1$에서 트레일러는 $2u$로, 트럭은 u로 움직이므로, $t = t_1$에서 l이던 둘 사이의 간격은 일정한 비율 $2u - u = u$로 줄어든다. 그러면 간격이 l보다 작으므로 밧줄은 계속 느슨한 상태로 있고, 트레일러에는 여전히 수평 방향의 힘이 작용하지 않으므로 그 속력은 실제로 $2u$로 유지된다. 간격은 추가로 시간 l/u가 지난 후 0이 된다.

따라서 트레일러는 밧줄이 처음 팽팽해진 후

$$t_1 + \frac{l}{u} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2} + \frac{l}{u}$$

의 시간이 지나서 트럭과 충돌하며, 이로써 요구된 결과가 증명된다.

검산

- 단위: λ는 힘이므로 lm/λ의 단위는 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}/\mathrm{N} = \mathrm{s}^2$이고, 두 항 모두 시간이다.
- 기준틀(frame)의 변환: 밧줄은 트레일러와 사실상 질량이 무한대인 트럭 사이의 탄성 충돌(elastic collision)에서 용수철처럼 행동한다. 트럭의 기준틀에서 트레일러는 u로 다가와서 반대 방향으로 u로 멀어지므로, 결국 지면에 대한 속력은 $2u$가 되어 앞에서 구한 결과와 같다.
- 트레일러의 운동 방정식을 (밧줄이 느슨할 때마다 힘을 끄는 방식으로) m, l, λ, u의 임의의 값에 대해 수치 적분한 결과가 공식과 일치했다. 예를 들어 $\pi/\omega \approx 2.9944$이고 $l/u \approx 2.3017$이 되도록 m, l, λ, u를 고르면, 예측값 5.2961에 대해 충돌 시간 5.2962를 얻었다.

흔한 실수

- 늘어난 길이가 0으로 돌아오면 밧줄이 느슨해진다는 것을 잊고, 단순조화운동의 해를 모든 시간에 대해 적용하는 실수.
- 트레일러의 위치 y에 대한 운동 방정식을 직접 세워서 강제 진동 방정식인 $m\ddot{y} = \lambda(ut - y)/l$을 얻는 경우. 이 방정식도 풀 수는 있지만, 치환 $x = ut - y$를 하면 곧바로 강제항이 없는 방정식이 된다.
- 마지막 l/u를 빠뜨리는 실수: 밧줄이 느슨해질 때 트레일러는 여전히 트럭보다 고유 길이(natural length) 전체만큼 뒤에 있다.

STEP 너머

트럭의 기준틀로 바꾸면 전체 과정은 트레일러와 움직이지 않는 벽에 붙은 용수철 사이의 탄성 "충돌"이 된다. 트레일러는 속력 u로 들어와서 속력 u로 나가며, 접촉은 속력과 관계없이 정확히 반 주기 동안 지속된다. 이것은 갈릴레이 불변성(Galilean invariance)과 에너지 보존(energy conservation)이 충돌을 어떻게 제약하는지 보여 주는 가장 간단한 예로, 대학 1학년 역학 전반에 걸쳐 나타나며 산란 이론(scattering theory)으로 이어지는 아이디

어이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동과 충돌을 모두 이러한 관점에서 다룬다.

풀이

STEP II 1994, 문제 11

역학 • 포물체와 폭발

> **STEP II 1994, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q11

핵심 아이디어

폭발은 알려진 높이, 즉 연직 비행의 꼭대기에서 일어나고, 그 순간 포탄(shell)은 정지해 있다. 따라서 두 파편(fragment)은 같은 점에서 크기가 같고 방향이 반대인 속도로 출발한다. 방향을 하나의 각 θ로 나타내면 각 착지 시간은 이차방정식(quadratic equation)에서 나오고, 두 착지점 사이의 간격은 θ에 대한 하나의 함수가 된다. 두 경우가 생기는 까닭은 그 함수의 최댓값이 허용 범위의 끝점에 있거나 내부의 극점(turning point)에 있기 때문이다.

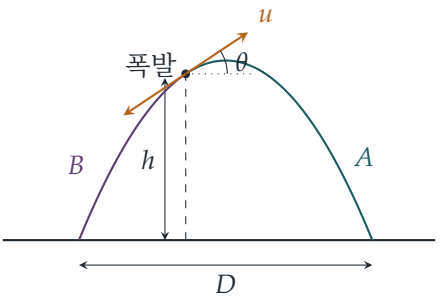
풀이

설정

포탄과 파편을 중력만 받으며 움직이는 질점(particle)으로 모형화한다. 포탄은 처음 속력 v로 올라가므로 다음 높이에서 정지한다.

$$h = \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{즉,} \qquad 2gh = v^2.$$

폭발 직후의 파편을 A와 B라 하자. 두 파편의 속도는 크기가 같고 방향이 반대이므로, 둘 다 폭발점을 지나는 하나의 연직 평면 위에 있다. 그 평면에서 x축을 수평으로, y축을 연직 위쪽으로 잡고, 폭발점을 $(0, h)$에 둔다. A가 아래쪽으로 움직이지 않도록 파편에 이름을 붙일 수 있다. 그러면 A의 속도는 $(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$, B의 속도는 $(-u\cos\theta,\ -u\sin\theta)$이고, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다. $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$로 쓰면 $c \ge 0$이다.



착지 시간

폭발 후 시각 t에서 파편 A의 높이는 $h + ust - \frac{1}{2}gt^2$이다. A는 다음 식이 성립할 때 착지한다.

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - us\,t - h = 0.$$

두 근의 곱은 $-2h/g < 0$이므로 양의 근은 정확히 하나이다.

$$t_A = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + 2gh}}{g} = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

B의 연직 속도는 $-us$이므로 s를 $-s$로 바꾸면 된다.

$$t_B = \frac{-us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

$\sqrt{u^2s^2 + v^2} > us$이므로 이 값은 양수이다.

착지점 사이의 거리

수평 방향으로 A는 x축의 양의 방향으로 $uc\,t_A$만큼, B는 음의 방향으로 $uc\,t_B$만큼 이동하므로, 두 파편은 출발점의 서로 반대편에 착지한다. 따라서 착지점 사이의 거리는 다음과 같다.

$$D = uc\,(t_A + t_B) = \frac{2uc\sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

$D \geq 0$이므로 D를 최대화하는 것은 D^2을 최대화하는 것과 같다. $x = s^2 \in [0,1]$로 두면 $c^2 = 1 - x$이다. 그러면

$$\frac{g^2D^2}{4u^2} = (1-x)(v^2 + u^2x) = f(x), \qquad \text{라 두자,}$$

이고

$$f(x) = v^2 + (u^2 - v^2)x - u^2x^2.$$

이것은 최고차항의 계수가 음수인 x에 대한 이차식이고, 꼭짓점(vertex)은 다음 위치에 있다.

$$x^* = \frac{u^2 - v^2}{2u^2}.$$

? **생각해 보기** f의 꼭짓점은 최댓값인데, 왜 답이 항상 $f(x^*)$가 아닐까?

$x = \sin^2\theta$이므로 $x \in [0,1]$만 허용된다. 항상 $x^* < \frac{1}{2}$임에 주목하자. 따라서 꼭짓점이 위쪽 끝을 넘어서는 일은 없다. 꼭짓점이 허용되는지는 오직 그 부호에 달려 있다.

$u \le v$인 경우. 이때 $x^* \le 0$이다. $[0,1]$에서는 아래로 볼록한 포물선의 꼭짓점 오른쪽에 있으므로 f는 감소하고, 최댓값은 $x = 0$에서 $f(0) = v^2$이다. 이는 $\theta = 0$, 즉 수평 방향의 폭발에 해당한다. 따라서

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\sqrt{v^2} = \frac{2uv}{g}.$$

$v \le u$인 경우. 이때 $0 \le x^* < \frac{1}{2}$이므로 꼭짓점이 허용되고, 거기서 최댓값을 얻는다.

$$f(x^*) = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{2u^2} - \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2} = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2}$$
$$= \frac{4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4u^2} = \frac{(u^2+v^2)^2}{4u^2}.$$

그러므로

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\cdot\frac{u^2+v^2}{2u} = \frac{u^2+v^2}{g}.$$

이는 $\sin^2\theta = \dfrac{u^2-v^2}{2u^2}$일 때, 즉 파편이 수평과 어떤 각을 이루며 날아갈 때 일어난다.

$u = v$이면 두 공식 모두 $2u^2/g$를 주므로, 두 답은 경우의 경계에서 마땅히 그래야 하듯 일치한다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- 단위: uv/g와 $(u^2+v^2)/g$는 모두 (속력)^2/(가속도)이고, 이는 길이이다.
- $g = 9.8$, $u = 30$, $v = 10$으로 두면 최적의 각은 $\theta \approx 41.8^\circ$이고, D의 일반 공식과 $(u^2+v^2)/g$ 모두에서 $D = 1000/9.8 \approx 102.04\,\text{m}$를 얻는다. 수평 방향의 폭발은 $2\cdot 30\cdot 10/9.8 \approx 61.2\,\text{m}$만 준다.
- 두 궤적을 수치적으로 한 단계씩 계산하고 θ를 촘촘한 격자에서 훑어 보면, 수백 개의 무작위 쌍 (u,v)에 대해 두 최댓값이 모두 재현된다.
- $v = 0$이면 포탄은 지면에서 폭발하고, 답은 u^2/g가 된다. 이는 속력 u, 각 45°로 쏜 발사체의 잘 알려진 최대 사거리로, 마땅히 그래야 한다. B는 곧바로 땅속으로 들어가고, $x^* = \frac{1}{2}$는 $\theta = 45^\circ$를 준다.

흔한 실수

- 최적의 폭발이 수평 방향이라고 가정하는 것. 이는 $u \leq v$일 때만 참이다.
- 두 파편에 같은 비행 시간을 쓰는 것. 위쪽으로 던져진 파편이 공중에 더 오래 머문다.
- 최대화할 때 제약 조건 $0 \leq \sin^2\theta \leq 1$을 잊어서 경우 나누기를 놓치는 것.

STEP 너머

이 깔끔한 답에는 멋진 설명이 있다. 그저 똑바로 아래로 떨어지는 질량중심(centre of mass)에 대해 보면, 두 파편은 상대 속력 $2u$로 일직선을 따라 멀어진다. 하지만 두 파편은 서로 다른 시각에 지면에 닿으므로, 이 문제는 제약 조건 아래의 최적화 문제가 되고, 매개변수가 변함에 따라 최댓값의 위치가 경계에서 내부로 바뀐다. 이런 전환은 대학 1학년 최적화에서 배우는 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multiplier)와 카루시–쿤–터커(Karush–Kuhn–Tucker) 조건에서 다시 나타난다. 운동량 보존(conservation of momentum), 질량중심 좌표계, 발사체 문제를 더 깊이 다룬 내용은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 1994, 문제 12

확률과 통계 • 조건부 확률

STEP II 1994, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s2-q12

핵심 아이디어

첫 번째 던지기로 "포인트(point)" s가 정해지고 나면, 그 뒤의 던지기는 모두 결과가 세 가지인 똑같은 독립(independent) 시행이다. s가 나오면 이기고, 7이 나오면 지며, 그 밖의 값이 나오면 계속한다. 따라서 포인트가 주어졌을 때 게임이 끝나는 던지기의 차례는 기하분포(geometric distribution)를 따르고, 문제 전체는 포인트에 따라 경우를 나눈 뒤 전확률 법칙(law of total probability)으로 더하는 일로 귀결된다. 마지막 부분은 조건으로 삼는 사건만 다를 뿐 같은 계산이다.

풀이

S를 공정한 주사위 두 개의 눈의 합이라 하자. 일어날 가능성이 같은 36가지 결과를 세면

$$\mathrm{P}(S = s) = \frac{6 - |s - 7|}{36}, \qquad s = 2, 3, \ldots, 12,$$

이므로 합 $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$의 확률은 $\frac{1}{36} \times (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$이다.

첫 번째 던지기에서 이길 확률

첫 번째 합이 7 또는 11이면 그녀는 곧바로 이긴다.

$$\mathrm{P}(\text{승리, 던지기1}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}.$$

두 번 이상 던질 때, n번째 던지기에서 이길 확률

그녀가 두 번 이상 던지는 것은 첫 번째 합이 포인트 $4, 5, 6, 8, 9, 10$ 가운데 하나일 때이고, 오직 그때뿐이다. 그 확률은

$$\mathrm{P}(M) = \frac{3+4+5+5+4+3}{36} = \frac{2}{3}$$

이다. 여기서 M은 사건 "그녀가 두 번 이상 던진다"이다.

포인트 s를 고정하고 $p_s = \mathrm{P}(S = s)$라 쓰자. 그 뒤의 각 던지기는 앞선 던지기들과 독립이고, 각 던지기에서

$$\mathrm{P}(\text{합}s) = p_s, \qquad \mathrm{P}(\text{합}7) = \tfrac{1}{6}, \qquad \mathrm{P}(\text{둘 다 아님}) = r_s = 1 - p_s - \tfrac{1}{6}.$$

이다. ($s \neq 7$이므로 이 두 사건은 서로 배반(disjoint)이다.) 그녀가 던지기 $n \geq 2$에서 이기는 것은 던지기 $2, \ldots, n-1$이 모두 "둘 다 아님"이고 던지기 n에서 s가 나올 때이며, 오직 그때뿐이다. 따라서 독립성에 의해

$$\mathrm{P}(\text{승리, 던지기}n \mid \text{포인트}s) = r_s^{n-2}\, p_s.$$

이다. 포인트는 확률이 같은 것끼리 짝을 이룬다(4와 10, 5와 9, 6과 8). $k = 3, 4, 5$에 대하여 $p_s = k/36$이라 쓰면 $r_s = (30-k)/36$이고, 이는 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{25}{36}$이다. 전확률 법칙에 의해 $n \geq 2$일 때

$$\mathrm{P}(\text{승리, 던지기}n) = \sum_s p_s \cdot r_s^{n-2} p_s = 2\sum_{k=3}^{5} \left(\frac{k}{36}\right)^2 \left(\frac{30-k}{36}\right)^{n-2}.$$

이다. 던지기 $n \geq 2$에서 이기면 M이 일어나므로, $\mathrm{P}(M) = \frac{2}{3}$으로 나누면 각 계수에 $\frac{3}{2}$가 곱해진다.

$$2 \cdot \frac{k^2}{1296} \cdot \frac{3}{2} = \frac{k^2}{432} \quad \text{이로부터} \quad \frac{9}{432} = \frac{1}{48}, \quad \frac{16}{432} = \frac{1}{27}, \quad \frac{25}{432}.$$

따라서

$$\mathrm{P}(\text{승리, 던지기}n \mid M) = \frac{1}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \frac{1}{27}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-2} + \frac{25}{432}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

> **? 생각해 보기** 하나의 "평균" 포인트와 하나의 기하분포로 계산하면 왜 틀릴까?

계속할 확률 r_s가 포인트에 따라 달라지기 때문이다. 세 기하분포의 혼합(mixture)은 그 자체로는 기하분포가 아니며, 그래서 답에 거듭제곱이 하나가 아니라 세 개 따로 나타난다.

m번보다 많이 던질 때

$m > 1$에 대하여 M_m을 사건 "그녀가 m번보다 많이 던진다"라 하자. 이 사건은 첫 번째 던지기에서 포인트 s가 나오고 던지기 $2, \ldots, m$이 모두 "둘 다 아님"일 때이며, 오직 그때뿐이

다. 따라서

$$\mathrm{P}(M_m) = \sum_s p_s\, r_s^{m-1} = \frac{2}{36}\sum_{k=3}^{5} k\Big(\frac{30-k}{36}\Big)^{m-1}.$$

이다. $n \le m$이면 던지기 n에서 이기는 사건은 M_m과 함께 일어날 수 없으므로 조건부 확률(conditional probability)은 0이다. $n > m$이면 던지기 n에서 이길 때 M_m이 일어나므로

$$\mathrm{P}(\text{승리, 던지기}n \mid M_m) = \frac{\mathrm{P}(\text{승리, 던지기}n)}{\mathrm{P}(M_m)} = \frac{9\big(\frac{3}{4}\big)^{n-2} + 16\big(\frac{13}{18}\big)^{n-2} + 25\big(\frac{25}{36}\big)^{n-2}}{36\Big[3\big(\frac{3}{4}\big)^{m-1} + 4\big(\frac{13}{18}\big)^{m-1} + 5\big(\frac{25}{36}\big)^{m-1}\Big]},$$

이다. 여기서 인수 $\frac{2}{1296}$와 $\frac{2}{36}$는 약분하였다. 분자와 분모에 $\frac{1}{432}$을 곱하면 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$\frac{\frac{1}{48}\big(\frac{3}{4}\big)^{n-2} + \frac{1}{27}\big(\frac{13}{18}\big)^{n-2} + \frac{25}{432}\big(\frac{25}{36}\big)^{n-2}}{\frac{1}{4}\big(\frac{3}{4}\big)^{m-1} + \frac{1}{3}\big(\frac{13}{18}\big)^{m-1} + \frac{5}{12}\big(\frac{25}{36}\big)^{m-1}}, \qquad n > m.$$

분모가 $\mathrm{P}(M_m \mid M)$이라는 점에 주목하자. 마땅히 그래야 한다. 분자는 M을 조건으로 한 앞의 답이고, $M_m \subseteq M$이기 때문이다.

검산

- $m = 1$이면 분모는 $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = 1$이 되어 앞 부분의 결과로 돌아간다.
- $n = 2$일 때 조건부 확률 공식은 $\frac{1}{48} + \frac{1}{27} + \frac{25}{432} = \frac{50}{432} = \frac{25}{216} \approx 0.1157$을 준다. 직접 계산한 $\frac{3}{2}\cdot\frac{2(9+16+25)}{1296}$도 같은 값이다.
- $m = 2, n = 3$일 때 답은 $\frac{107}{930} \approx 0.1151$이다. 모든 공식을 분수를 이용해 게임을 한 단계씩 정확히 전개한 결과와 비교하여 확인하였고, 4×10^5번의 게임을 모의실험한 결과도 표본 오차 범위 안에서 일치하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(M) = \frac{2}{3}$으로 나누는 것을 잊는 실수. 그러면 계수가 $\frac{1}{72}$, $\frac{2}{81}$, $\frac{25}{648}$이 된다.
- 하나의 비율로 $\mathrm{P}(M_m) = (\text{어떤 값})^{m-1}$이라 쓰는 실수. 조건으로 삼는 사건 역시 포인트들에 대한 혼합이다.
- "둘 다 아님"인 던지기의 횟수를 $n-2$가 아니라 $n-1$로 세는 실수. 던지기 1은 포인트를 정하고, 던지기 n은 이기는 던지기이다.

STEP 너머

이 게임은 흡수 상태(absorbing state) "승리"와 "패배"를 가진 작은 마르코프 연쇄(Markov chain)이고, 여기서 흡수될 때까지 걸리는 시간은 기하분포들의 혼합이다. m번의 던지기를 넘어 살아남았다는 조건을 주면 혼합 가중치가 가장 오래 버티는 포인트(여기서는 다시 나올 가능성이 가장 작은 4와 10) 쪽으로 옮겨 간다. 이는 무기억성(memoryless) 분포들의 혼합이 그 자체로는 무기억성을 갖지 않는다는 것을 보여 주는 간단한 예이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 수준에서 조건부 확률과 마르코프 연쇄를 다룬다.

풀이

STEP II 1994, 문제 13

확률과 통계 • 쿠폰 수집가 문제

STEP II 1994, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s2-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.11 절 **한 세트 모두 모으기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/coupon-collector.html

핵심 아이디어

이 문제는 고전적인 "쿠폰 수집가 문제(coupon collector problem)"이며, 데이터베이스라는 분류와 달리 순수한 확률 문제이다. 카드 한 세트를 모두 모으기까지의 긴 기다림을 n개의 짧은 기다림으로 나눈다. 첫 번째 새 카드를 기다리는 시간, 두 번째 새 카드를 기다리는 시간, 이런 식이다. 각각의 짧은 기다림은 기하분포(geometric distribution)를 따르므로 평균을 쉽게 구할 수 있고, 기댓값의 선형성(linearity of expectation)으로 이들을 더하면 된다. 그 합은 n에 조화합(harmonic sum)을 곱한 것이고, 적분 부등식은 이 합이 얼마나 큰지 알려 주기 위해 주어진 것이다.

풀이

새 카드 기다리기

각 봉지에는 n장의 카드 중 한 장이 들어 있고, 각 카드가 들어 있을 확률은 똑같이 $\frac{1}{n}$이며, 다른 모든 봉지와 독립(independent)이라고 모형화한다.

내가 이미 서로 다른 카드 r장을 가지고 있다고 하자. 여기서 $0 \le r \le n-1$이다. 봉지 하나에서 새 카드가 나올 확률은

$$p = \frac{n-r}{n} > 0,$$

이고, 이미 가진 카드가 나올 확률은 $q = 1 - p = \frac{r}{n}$이다. 첫 번째 새 카드가 나올 때까지(그

봉지를 포함하여) 뜯는 봉지의 개수를 X라 하자. 봉지들은 서로 독립이므로 $X = k$는 이미 가진 카드가 $k-1$번 나온 뒤 새 카드가 나온다는 뜻이고, 따라서

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\,(1-q)^{-2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p},$$

이다. 여기서 $|q| < 1$일 때 성립하는 $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1} = (1-q)^{-2}$를 이용하였다(기하급수(geometric series)를 미분하거나, $(1-q)^{-2}$를 이항전개(binomial expansion)하면 된다). $r \leq n-1$이므로 여기서 $0 \leq q < 1$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{n-r},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

(더 간결한 방법도 있다. 첫 번째 봉지에서 새 카드가 나오면 멈추고, 그렇지 않으면 확률 q로 처음 상태로 되돌아가므로 $\mathrm{E}(X) = 1 + q\,\mathrm{E}(X)$이고, 따라서 $\mathrm{E}(X) = 1/(1-q) = 1/p$이다. 이 방법은 $\mathrm{E}(X)$가 유한하다고 가정하는데, 이는 위의 급수로 확인된다.)

적분 부등식

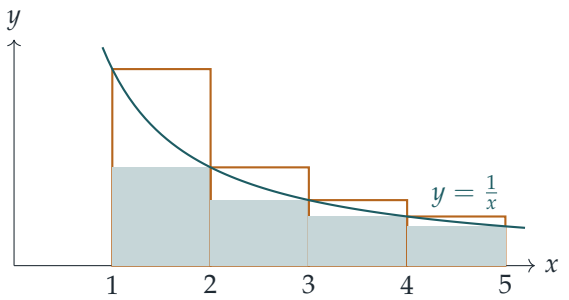
$r \geq 1$이라 하자. $r \leq x \leq r+1$일 때

$$\frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{r},$$

이 성립한다. $x > 0$에서 $1/x$가 감소하기 때문이다. 길이가 1인 구간에서 적분해도 이 부등식은 유지되므로

$$\frac{1}{r+1} \leq \int_r^{r+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{r}.$$

이다. 그림으로 보면, $x = r$와 $x = r+1$ 사이에서 $y = 1/x$ 아래의 넓이는 높이가 $\frac{1}{r+1}$인 낮은 직사각형과 높이가 $\frac{1}{r}$인 높은 직사각형의 넓이 사이에 있다.



(알아보기 쉽도록 세로 방향을 늘려 그렸다.) 색칠한 직사각형은 곡선 아래에 있고, 테두리만 그린 직사각형은 곡선 위로 솟아 있다.

이제 $n \geq 2$에 대하여 $r = 1, 2, \ldots, n-1$일 때의 부등식을 모두 더한다. 적분들은 하나로 이어진다.

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r+1} \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}.$$

가운데 항은 $\ln n - \ln 1 = \ln n$이고, 왼쪽 합에서 $r+1$을 새로 r로 바꾸어 쓰면 범위는 2부터 n까지가 된다. 따라서

$$\sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r} \leq \ln n \leq \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

한 세트 모두 모으기

서로 다른 카드를 정확히 r장 가지고 있는 동안 뜯는 봉지의 개수를 X_r라 하자. 이때 마지막 봉지는 $r+1$번째 카드가 나오는 봉지이다. 한 세트를 모두 모으는 데 필요한 봉지의 총개수는

$$T = X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}.$$

이다.

> **생각해 보기** X_r들은 앞에서 일어난 일에 따라 달라진다. 그래도 그냥 기댓값을 더해도 될까?

그렇다. 기댓값의 선형성 $\mathrm{E}(A+B) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(B)$에는 독립성이 전혀 필요 없다. (사실 지금까지의 과정이 주어지더라도 X_r는 언제나 $p = \frac{n-r}{n}$인 기하분포를 따르므로, 첫 부분의 결과를 각 X_r에 적용할 수 있다.) 그러므로 $k = n - r$로 놓으면

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n}{n-r} = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{1}\right) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

이다.

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$로 쓰자. 부등식의 두 부분으로부터

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \geq \ln n + \frac{1}{n}.$$

을 얻는다. 따라서

$$n\ln n + 1 \leq \mathrm{E}(T) \leq n\ln n + n.$$

이다. 두 경계의 차는 n보다 작은데, n이 크면 이는 $n\ln n$에 비해 아주 작다(두 값의 비 $1/\ln n \to 0$). 그러므로 n이 크면 대략

$$n\ln n \text{ 봉지를 먹을 것으로 기대해야 한다.}$$

예를 들어 수학자가 100명이면 Cruncho를 약 460봉지 먹어야 한다.

검산

- $r = 0$: 첫 번째 봉지는 언제나 새 카드이고, $n/(n-0) = 1$이다. $r = n-1$: 특정한 카드 한 장만 빠져 있고 이 카드는 확률 $\frac{1}{n}$으로 나오므로 n봉지를 기대하게 되며, 이는 $n/1$과 일치한다.
- $n = 2$: $\mathrm{E}(T) = 2(1 + \frac{1}{2}) = 3$이고, 경계는 $2\ln 2 + 1 \approx 2.39$와 $2\ln 2 + 2 \approx 3.39$이다.
- $n = 20$으로 전체 수집을 10^5번 시뮬레이션한 결과 평균 71.9봉지가 나왔는데, 이론값은 $20H_{20} \approx 71.95$이다. 경계는 60.9와 79.9이다.

흔한 실수

- 적분 부등식을 $r = 0$부터 더하는 것: 그곳에서는 경계 $\frac{1}{r}$이 성립하지 않고, $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$는 발산한다. 합은 $r = 1$부터 시작해야 한다.
- 기댓값을 더하려면 X_r들이 독립이어야 한다고 생각하는 것. 선형성에는 독립성이 필요 없다.
- 답을 $\ln n$이나 n으로 내는 것: 기대되는 봉지 수는 $n\ln n$처럼 증가하며, n보다 빠르게 커진다.

STEP 너머

차 $H_n - \ln n$은 감소하면서 어떤 극한, 즉 오일러-마스케로니 상수(Euler–Mascheroni constant) $\gamma \approx 0.5772$에 수렴(converge)한다. 따라서 더 정밀한 답은 $\mathrm{E}(T) \approx n(\ln n + \gamma)$이고, $n = 100$이면 460봉지가 아니라 약 519봉지가 된다. 이처럼 합과 적분을 비교하는 것이 급수의 적분판정법(integral test)이며, 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 일찍 배운다. 쿠폰 수집가 문제 자체도 알고리즘 분석(analysis of algorithms)과, 카드 한 벌을 무작위로 몇 번 섞어야 충분히 섞이는지에 관한 연구에서 다시 등장한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 기하분포를 따르는 대기 시간과 기댓값의 선형성이 함께 쓰이는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 1994, 문제 14

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP II 1994, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s2-q14

핵심 아이디어

"원판 위에서 균등(uniform)하다"는 것은 확률이 넓이에 비례한다는 뜻이다. 따라서 중심에서 거리 r 이내에 떨어질 확률은 작은 원판의 넓이를 과녁의 넓이로 나눈 값이고, 이로부터 곧바로 R의 분포함수(distribution function)를 얻는다. 그러면 (ii)는 한 번 던질 때의 확률 p 하나, 기하분포 유형의 "적어도 한 번 성공" 계산, 그리고 정수에서 정의된 함수의 최소화로 귀결되며, 이 최소화는 미적분 대신 이웃한 값의 차를 살펴서 해결한다.

풀이

소문항 (i)

각 다트를 반지름 a인 원판 위에 균등하게 분포하는 점으로 모형화한다. 그러면 다트가 과녁의 어떤 영역에 떨어질 확률은 그 영역의 넓이를 πa^2으로 나눈 값이다.

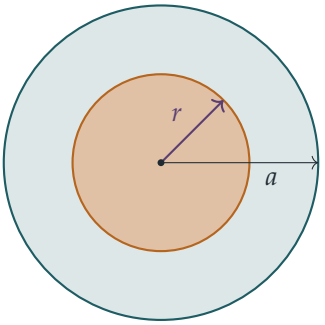
$0 \le r \le a$일 때, 사건 $R \le r$는 다트가 반지름 r인 동심원판 안에 떨어진다는 뜻이므로

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}.$$

이를 미분하면 R의 확률밀도함수(probability density function)는

$$f(r) = \frac{2r}{a^2} \qquad (0 \le r \le a)$$

이고, 그 밖의 범위에서는 $f(r) = 0$이다.



R는 $[0, a]$에서 균등분포를 따르지 **않는다**는 점에 주의한다. 반지름이 클수록 넓이가 더 많기(가는 고리가 더 길기) 때문이며, 그래서 밀도가 r에 비례하여 커진다.

이제

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^a r \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{2a}{3},$$
$$\mathrm{E}(R^2) = \int_0^a r^2 \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{2},$$

이므로

$$\mathrm{Var}(R) = \mathrm{E}(R^2) - \big(\mathrm{E}(R)\big)^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{9} = \frac{a^2}{18}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

(문제의 "with $a/\sqrt{10}$"은 "within $a/\sqrt{10}$"으로 읽는다.) (i)에 의해, 한 번 던진 다트가 중심에서 $a/\sqrt{10}$ 이내에 떨어질 확률은

$$p = \frac{(a/\sqrt{10})^2}{a^2} = \frac{1}{10}$$

이다. 각 던지기는 독립(independent)이라고 가정한다(매번 과녁 위의 새로운 균등 무작위 점이다). 그러면 m번 던져서 한 번도 $a/\sqrt{10}$ 이내에 들지 못할 확률은 $(0.9)^m$이므로

$$\mathrm{P}(\text{참가자가 돌려받는 상금}£12) = 1 - (0.9)^m.$$

손실은 지불한 $£(12+m)$에서 돌려받는 금액을 뺀 것이므로, 파운드 단위의 기대 손실은

$$L(m) = 12 + m - 12\big(1 - (0.9)^m\big) = m + 12(0.9)^m$$

이다. 한 번 더 던질 때마다 확실히 £1이 들지만 £12를 받을 가능성은 커진다. 이 둘이 균형을 이루는 지점을 찾아야 한다.

? 생각해 보기 자연수에서만 정의된 함수는 어떻게 최소화할까?

이웃한 값을 비교한다. $m \geq 1$일 때

$$L(m+1) - L(m) = 1 + 12(0.9)^m(0.9-1) = 1 - 1.2\,(0.9)^m.$$

m이 커질수록 $(0.9)^m$은 감소하므로 이 차는 m에 대하여 증가한다. 따라서 L은 차가 음수인 동안 감소하고, 차가 양수가 되면 증가한다. 차가 음수인 것은 정확히 $(0.9)^m > \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$일 때이다. 그런데

$$(0.9)^1 = 0.9 > \tfrac{5}{6}, \qquad (0.9)^2 = 0.81 < \tfrac{5}{6}$$

이므로 $L(2) - L(1) < 0$이고, 모든 $m \geq 2$에 대하여 $L(m+1) - L(m) > 0$이다. 따라서

$$L(1) > L(2) < L(3) < L(4) < \cdots$$

이고, 실제로 $L(1) = 11.80$, $L(2) = 11.72$, $L(3) = 11.748$이다. (참가자는 반드시 게임을 하기로 했으므로 $m = 0$은 허용되지 않는다. 어차피 $L(0) = 12$가 더 크다.)

참가자는 $m = 2$번 던지기를 선택해야 하며, 이때 기대 손실은 £11.72이다. 최솟값이 엄격하므로 이러한 값은 $m = 2$뿐이다.

검산

- 단위 원판 위의 균등한 점 4×10^5개로 모의실험을 하면 평균 0.667, 제곱의 평균 0.500, 분산(variance) $0.0556 \approx \frac{1}{18}$을 얻어 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{18}$과 일치한다. 또한 점의 약 10%가 중심에서 $1/\sqrt{10}$ 이내에 떨어졌다.
- 정확한 값은 $L(1) = \frac{59}{5}$, $L(2) = \frac{293}{25}$, $L(3) = \frac{2937}{250}$이며, $1 \leq m \leq 99$ 범위를 모두 조사하면 $m = 2$가 최솟값임이 확인된다.
- 타당성 점검: 분산 $a^2/18$은 $[0, a]$에서의 균등분포 확률변수의 분산 $a^2/12$보다 훨씬 작다. R가 가장자리 쪽에 몰려 있기 때문이다.

흔한 실수

- R가 $[0, a]$에서 균등분포를 따른다고 생각하여 분산을 $a^2/12$로 얻는 것.
- 고정된 £12가 비용의 일부일 뿐이라는 점을 잊는 것. 손실은 단순히 m이 아니라 $12 + m$에서 기대 상금을 뺀 것이다.
- $m + 12(0.9)^m$의 도함수를 0으로 놓으면 $m \approx 2.3$을 얻는데, 이는 답이 아니다. 그 양쪽의 정숫값을 비교해야 한다.

STEP 너머

평면 위의 균등한 점으로부터 R의 분포를 구하는 것은 결합밀도(joint density)를 극좌표(polar coordinates)로 변환하는 가장 간단한 예이다. 여기서 $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$에 나타나는 야코비안(Jacobian) 인자 r가 바로 R의 밀도를 r에 비례하게 만드는 원인이다. 결합밀도의 변수변환(change of variables)과 이산적인 선택에 대한 최적화는 대학 1학년 확률론의 표준 주제이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 두 주제를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 1994, 문제 1

순수수학 • 점화 공식

STEP III 1994, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q1

핵심 아이디어

첫 번째 적분에서는 $\operatorname{sech} t$를 $\dfrac{\cosh t}{\cosh^2 t} = \dfrac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}$로 고쳐 쓴다. 분자는 $\sinh t$의 도함수(derivative)이므로, 이 적분은 사실상 아크탄젠트(arctan)이다. 점화식(reduction formula)에서는 $\tanh t$의 도함수인 $\operatorname{sech}^2 t$를 인수로 떼어 내고 부분적분(integration by parts)을 하는 것이 자연스럽다. 그러면 항등식 $\tanh^2 t = 1 - \operatorname{sech}^2 t$에 의해 우변에 I_n이 다시 나타나고, 이를 한쪽으로 모으면 된다.

풀이

$\operatorname{sech} t$의 적분

분모와 분자에 $\cosh t$를 곱하고 $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$를 이용하면

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

$s = \sinh t$로 치환하면 $\mathrm{d}s = \cosh t \, \mathrm{d}t$이고 적분 구간은 0부터 $\sinh x$까지가 되므로

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\sinh x} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \arctan(\sinh x).$$

$\operatorname{sech} t = \dfrac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}$로 쓰고 $u = \mathrm{e}^t$로 치환하는 방법도 똑같이 좋으며, 이때 답은 $2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$의 꼴로 나온다. 두 답은 일치한다. 둘 다 $x = 0$에서 0이고 도함수가 $\operatorname{sech} x$이기 때문이다. (이 x의 함수를 **구더만 함수**(*Gudermannian*)라고 한다.)

점화식

$n \geq 2$라 하고 $\operatorname{sech}^n t = \operatorname{sech}^{n-2} t \cdot \operatorname{sech}^2 t$로 쓴다. 다음과 같이 놓고 부분적분을 한다.

$$u = \operatorname{sech}^{n-2} t, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \operatorname{sech}^2 t,$$

그러면 $v = \tanh t$이고, 연쇄법칙(chain rule)에 의해 ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t = -\operatorname{sech} t \tanh t$를 이용하면)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (n-2)\operatorname{sech}^{n-3} t \cdot (-\operatorname{sech} t \tanh t) = -(n-2)\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t.$$

따라서

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t\Big]_0^x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \tanh^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \left(1 - \operatorname{sech}^2 t\right) \mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2) I_{n-2} - (n-2) I_n, \end{aligned}$$

이고, 여기서 $\tanh 0 = 0$이므로 0에서의 경계항은 사라진다.

> **생각해 보기** 제자리를 맴돈 것처럼 보인다. 우변에 I_n이 다시 나타났다. 이것이 문제가 될까?

전혀 그렇지 않으며, 오히려 바로 우리가 원하던 것이다. 우변의 I_n의 계수는 $+1$이 아니라 $-(n-2)$이므로, 이를 좌변으로 옮기면 $(n-1)I_n$이 되고 $n-1 \neq 0$으로 나눌 수 있다. 점화식은 다음과 같다.

$$\boxed{(n-1) I_n = \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\, I_{n-2} \qquad (n \geq 2).}$$

I_5 구하기

홀수 번째 항들은 $I_1 = \arctan(\sinh x)$에서 시작한다. $n = 3$을 대입하면

$$2I_3 = \operatorname{sech} x \tanh x + I_1, \qquad \text{따라서} \qquad I_3 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{1}{2}\arctan(\sinh x).$$

$n = 5$를 대입하면

$$4I_5 = \operatorname{sech}^3 x \tanh x + 3I_3,$$

이므로

$$I_5 = \tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^3 x \tanh x + \tfrac{3}{8}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{3}{8}\arctan(\sinh x).$$

I_6 구하기

짝수 번째 항들은 $I_0 = \int_0^x 1 \,\mathrm{d}t = x$에서 시작하거나, 더 직접적으로는 $I_2 = \int_0^x \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t = \tanh x$에서 시작한다(점화식에 $n = 2$를 대입해도 $I_2 = \tanh x + 0$으로 이를 확인할 수 있

다). $n = 4$를 대입하면

$$3I_4 = \operatorname{sech}^2 x \tanh x + 2I_2, \qquad \text{따라서} \qquad I_4 = \tfrac{1}{3}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{2}{3}\tanh x.$$

$n = 6$을 대입하면

$$5I_6 = \operatorname{sech}^4 x \tanh x + 4I_4,$$

이므로

$$I_6 = \tfrac{1}{5}\operatorname{sech}^4 x \tanh x + \tfrac{4}{15}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{8}{15}\tanh x.$$

짝수 거듭제곱에 대한 "다른 방법"

짝수 거듭제곱에는 더 깔끔한 직접적인 방법이 있다. $u = \tanh t$로 치환하면 $\mathrm{d}u = \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t$이고 $\operatorname{sech}^2 t = 1 - u^2$이므로

$$I_6 = \int_0^x (\operatorname{sech}^2 t)^2 \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\tanh x} (1-u^2)^2 \,\mathrm{d}u = \tanh x - \tfrac{2}{3}\tanh^3 x + \tfrac{1}{5}\tanh^5 x.$$

앞에서 구한 답에서 $\operatorname{sech}^2 x$를 $1 - \tanh^2 x$로 바꾸고 전개하면 정확히 이 식이 나오므로, 두 형태는 일치한다.

검산

- $x \to \infty$일 때 $\tanh x \to 1$, $\operatorname{sech} x \to 0$, $\arctan(\sinh x) \to \frac{\pi}{2}$이므로 $I_5 \to \frac{3\pi}{16} \approx 0.58905$이고 $I_6 \to \frac{8}{15}$이다. 구간 $[0, 30]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.589049와 0.533333을 얻는다.
- $x = 1$에서 심프슨 공식은 $I_5 \approx 0.561566$, $I_6 \approx 0.518343$을 주며, 이는 위의 공식과 일치한다. 또한 $2 \le n \le 8$에 대하여 임의로 고른 200개의 x 값에서 점화식을 확인하였다.
- sech가 우함수(even function)이므로, I_5와 I_6은 당연히 둘 다 x에 대한 기함수(odd function)이다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t$의 부호를 틀리는 것. 이는 $-\operatorname{sech} t \tanh t$이며, 바로 이 음의 부호 때문에 경계항이 양수가 된다.
- I_n의 두 항을 모은 뒤 $n - 1$이 아니라 n으로 나누는 것.
- 답을 부정적분으로 남겨 두는 것. 적분 구간이 0부터 x까지이므로 적분상수는 없으며, 모든 항은 $x = 0$에서 0이 되어야 한다.

STEP 너머

이와 같은 점화식을 이용하면 적분들의 한 무리 전체를 재귀적으로 계산할 수 있다. 같은 아이디어가 $\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$에 대한 월리스(Wallis) 공식의 바탕이 되며, 이 공식은 π에 대한 유명한 무한곱으로 이어진다. 여기서 구한 극한값 $\int_0^{\infty} \operatorname{sech}^n t \, \mathrm{d}t$는 베타 함수(Beta function)의 값으로, 베타 함수는 대학 1학년 해석학과 확률론에서 중심적인 대상이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 점화식 연습 문제가 더 있으며, Abbott의 *Understanding Analysis*는 이상적분(improper integral)을 엄밀하게 다룬다.

풀이

STEP III 1994, 문제 2

순수수학 • 상반 사차방정식

STEP III 1994, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q2

핵심 아이디어

(i)의 사차식(quartic)은 **회문형**(*palindromic*)이다. 즉 계수(coefficient)를 앞에서부터 읽으나 뒤에서부터 읽으나 같다. x^2으로 나누면 x^2은 x^{-2}와, x는 x^{-1}과 짝을 이루고, 두 짝 모두 $y = x + x^{-1}$로 나타낼 수 있으므로 사차식이 y에 대한 이차식(quadratic)으로 줄어든다. (ii)에는 힌트가 없으므로 같은 대칭성을 비튼 형태를 찾아본다. 배율을 허용하면 계수 1, 1, −10, −4, 16이 짝을 이루며, 이로부터 치환(substitution) $y = x - 4/x$를 떠올릴 수 있다.

풀이

소문항 (i)

상수항(constant term)이 $1 \neq 0$이므로 $x = 0$은 근이 아니고, 따라서 x^2으로 나눌 수 있다.

$$x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \text{즉} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0.$$

$y = x + x^{-1}$로 두면 $y^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$이므로 $x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$이다. 방정식은 다음과 같이 된다.

$$y^2 - 2 + 10y + 26 = 0 \iff y^2 + 10y + 24 = 0 \iff (y+4)(y+6) = 0,$$

따라서 $y = -4$ 또는 $y = -6$이다. 이제 $x + x^{-1} = y$의 양변에 x를 곱하여 x로 돌아간다($x \neq 0$이므로 역시 문제없다).

$$x + \frac{1}{x} = -4 \iff x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3},$$
$$x + \frac{1}{x} = -6 \iff x^2 + 6x + 1 = 0 \iff x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

이들은 서로 다른 네 수이고, 사차방정식의 근은 많아야 네 개이므로 해는 다음과 같다.

$$x = -2 \pm \sqrt{3}, \qquad x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

근이 역수(reciprocal) 쌍으로 나타난다는 점에 주목하자. $(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3}) = 1$이고 $(-3+2\sqrt{2})(-3-2\sqrt{2}) = 1$이다. 회문형 다항식이라면 바로 이렇게 되어야 한다. x를 $1/x$로 바꾸고 x^4을 곱하면 같은 방정식이 다시 나오기 때문이다.

소문항 (ii)

생각해 보기 계수 1, 1, −10, −4, 16은 대칭이 아니다. 그래도 (i)과 같은 치환이 통할까?

바깥쪽 계수끼리 비교해 보자. 상수항은 최고차항의 계수(leading coefficient)의 $16 = 4^2$배이고, x의 계수는 x^3의 계수의 -4배이다. 따라서 항들이 다음과 같이 짝을 이룬다.

$$x^4 + 16 = x^2\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right), \qquad x^3 - 4x = x^2\left(x - \frac{4}{x}\right).$$

이는 회문형 패턴에서 $1/x$를 $-4/x$로 바꾼 것이다. 상수항이 16이므로 $x = 0$은 근이 아니고, x^2으로 나누면 다음을 얻는다.

$$\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + \left(x - \frac{4}{x}\right) - 10 = 0.$$

$y = x - 4/x$로 두자. 그러면 $y^2 = x^2 - 8 + 16/x^2$이므로 $x^2 + 16/x^2 = y^2 + 8$이고,

$$y^2 + 8 + y - 10 = 0 \iff y^2 + y - 2 = 0 \iff (y-1)(y+2) = 0,$$

따라서 $y = 1$ 또는 $y = -2$이다. $x - 4/x = y$의 양변에 x를 곱하면

$$x - \frac{4}{x} = 1 \iff x^2 - x - 4 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$
$$x - \frac{4}{x} = -2 \iff x^2 + 2x - 4 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

이번에도 서로 다른 네 근이므로 이것이 근 전부이다.

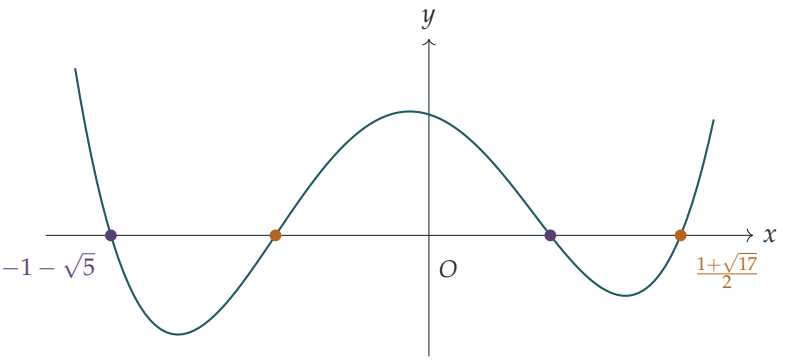
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \qquad x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

여기서는 근들이 곱이 1이 아니라 -4가 되도록 짝을 이룬다. 이제 대칭은 $x \mapsto -4/x$이다.

검산으로, 위의 풀이는 다음 인수분해(factorisation)와 같다.

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 16 = (x^2 - x - 4)(x^2 + 2x - 4),$$

전개해 보면 확인할 수 있다. x^3 항은 $2 - 1 = 1$, x^2 항은 $-4 - 2 - 4 = -10$, x 항은 $4 - 8 = -4$이다.



(ii)의 사차식의 그래프는 축과 네 번 만난다. 호박색 근은 $x^2 - x - 4 = 0$에서, 자주색 근은 $x^2 + 2x - 4 = 0$에서 나온다.

검산

- 근의 곱: (i)에서 네 근을 모두 곱하면 $1 \cdot 1 = 1$로 상수항과 같고, (ii)에서는 $(-4)(-4) = 16$으로 역시 상수항과 같다.
- 근의 합: (i)에서 $(-4) + (-6) = -10$으로 x^3의 계수에 마이너스를 붙인 값이고, (ii)에서도 $1 + (-2) = -1$로 마찬가지이다.
- 수치적으로, $x = -2 + \sqrt{3} \approx -0.268$과 $x = -3 - 2\sqrt{2} \approx -5.828$은 모두 (i)의 사차식의 값을 10^{-9} 이내로 0에 가깝게 만들고, $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \approx 2.562$와 $x = -1 - \sqrt{5} \approx -3.236$도 (ii)에서 마찬가지이다.

흔한 실수

- 교차항(cross term)을 빠뜨리는 실수: $x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$이지 y^2이 아니다. 또 (ii)에서는 $x^2 + 16x^{-2} = y^2 + 8$인데, $(x - 4/x)^2$의 교차항이 -8이므로 부호가 플러스이다.
- (ii)에서 $y = x + 4/x$를 시도하는 실수. 그러면 $x^2 + 16/x^2 = y^2 - 8$은 얻지만 $x^3 - 4x$는 만들 수 없다. 이 항의 부호를 보면 $x - 4/x$여야 한다.
- y의 값에서 멈추는 실수. 문제는 x를 구하라고 하며, y의 값 하나마다 x의 값이 두 개씩 나온다.

STEP 너머

이 기법이 통하는 것은 다항식이 어떤 치환에 대해 불변(invariant)이기 때문이다. (i)에서는 $x \mapsto 1/x$, (ii)에서는 $x \mapsto -4/x$이다. 양 y는 그 치환에 의해 변하지 않으며, 변하지 않는

다항식 표현은 모두 y로 나타낼 수 있다. 이것은 다항식의 근들 사이의 대칭이 그 방정식을 어떻게 풀 수 있는지를 결정한다는 갈루아 이론(Galois theory)을 처음 엿보는 것이다. 이 아이디어가 전개되는 모습을 보려면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 1994, 문제 3

순수수학 • 구, 평면과 연결

STEP III 1994, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q3

핵심 아이디어

각 원은 자신만의 평면(plane) 위에 놓여 있고, 두 평면은 직선 L에서 만난다. 따라서 C_1이 C_2의 평면을 통과할 수 있는 곳은 L 위에 있는 C_1의 두 점뿐이며, 반대 방향으로도 마찬가지이다. 그러므로 두 원이 얽혀 있는지(linked)의 여부는 1차원 문제, 즉 L 위의 네 점이 직선을 따라 어떻게 배열되어 있는가의 문제로 귀결된다.

풀이

평면과 구

구(sphere)의 중심을 Q, 반지름을 r라 하고, Q에서 평면 Π까지의 거리를 d라 하자. Q에서 Π에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)을 F라 하자. Π 위의 점 X에 대하여 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 $QX^2 = d^2 + FX^2$이므로, X가 구 위에 있을 필요충분조건은 $FX^2 = r^2 - d^2$이다. 따라서 다음이 성립한다.

- $d > r$이면 평면은 구와 만나지 않는다.
- $d = r$이면 평면은 구와 한 점 F에서 접한다(접평면(tangent plane)이다).
- $d < r$이면 교집합은 Π 위에서 중심이 F이고 반지름이 $\sqrt{r^2 - d^2}$인 원이다. $d = 0$일 때 이것은 반지름이 r인 대원(great circle)이다.

주어진 자료

완전제곱식으로 고치면 S_2는

$$x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3,$$

이고, 중심은 $(0,3,2)$, 반지름은 $\sqrt{3}$이다. 구 S_1은 중심이 O이고 반지름이 $\sqrt{7}$이다.

O에서 P_1까지의 거리는 $\frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} < \sqrt{7}$이므로, C_1은 반지름이 $\sqrt{7 - \frac{1}{10}}$인 진짜 원이다. $(0,3,2)$에서 P_2까지의 거리는 $\frac{|0-3+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$이므로, C_2는 반지름이 $\sqrt{3-2} = 1$인 원이다. 그 중심은 수선의 발 $(0,3,2) + (1,-1,0) = (1,2,2)$이다. $1 - 2 + 1 = 0$임을 확인하라.

직선 L

두 평면의 방정식을 빼면 $2x - 2 = 0$이므로 $x = 1$이고, 그러면 $y = x + 1 = 2$이며, z는 자유롭다. 따라서

$$L = \{(1,2,t) : t \in \mathbb{R}\},$$

즉 L은 $(1,2,0)$을 지나는 수직선이다.

S_1 위에서는 $1 + 4 + t^2 = 7$이므로 $t = \pm\sqrt{2}$이다. 따라서 L은 S_1과

$$(1,2,\sqrt{2}) \quad \text{그리고} \quad (1,2,-\sqrt{2}).$$

에서 만난다. S_2 위에서는 $1 + 1 + (t-2)^2 = 3$이므로 $t - 2 = \pm 1$이다. 따라서 L은 S_2와

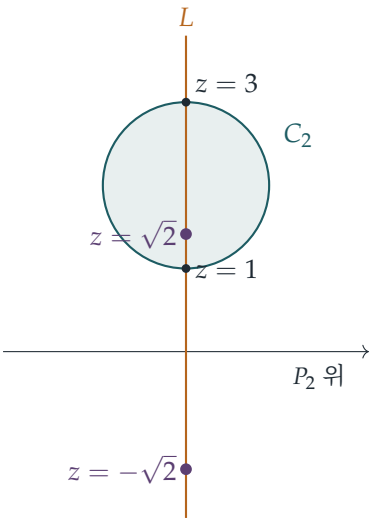
$$(1,2,1) \quad \text{그리고} \quad (1,2,3).$$

에서 만난다. L이 P_1 위에 있으므로, S_1 위에 있는 L의 점들은 정확히 C_1 위에 있는 L의 점들이다. 마찬가지로 S_2 위에 있는 L의 점들은 C_2 위에 있는 L의 점들이다. 특히 $(1,2,1)$과 $(1,2,3)$은 C_2의 한 지름의 양 끝점이며, 이는 C_2의 중심이 $(1,2,2)$이고 반지름이 1이라는 사실과 일치한다.

두 원은 얽혀 있는가?

먼저, 두 원은 만나지 않는다. 공통점이 있다면 그 점은 $P_1 \cap P_2 = L$ 위에 있어야 하는데, L 위에 있는 C_1의 점들($z = \pm\sqrt{2}$)은 L 위에 있는 C_2의 점들($z = 1, 3$)과 다르다.

C_2를 경계로 하는 P_2 위의 평평한 원판(disc)을 D_2라 하자. D_2는 L과 $(1,2,1)$에서 $(1,2,3)$까지의 지름, 즉 $1 \le t \le 3$인 점 $(1,2,t)$들에서 만난다.



그림은 평면 P_2를 나타낸 것으로, C_2와 그 원판이 칠해져 있다. 보라색 점들은 C_1이 P_2를 통과하는 곳이다.

> **생각해 보기** C_1이 이 두 점에서 P_2에 단지 접하는 것이 아니라 정말로 P_2를 **통과하**는 이유는 무엇인가?

직선 L은 평면 P_1을 두 개의 반평면(half-plane)으로 나누는데, P_1이 L을 따라 P_2를 가로지르므로 이 두 반평면은 P_2의 서로 반대쪽에 있다. 원 C_1은 L과 서로 다른 두 점에서 만나므로, L은 C_1을 두 개의 호로 자르고, 각 반평면에 호가 하나씩 놓인다. 따라서 C_1의 한 호는 P_2의 한쪽에 완전히 놓이고 다른 호는 반대쪽에 완전히 놓이며, C_1은 $(1, 2, \sqrt{2})$와 $(1, 2, -\sqrt{2})$에서 P_2를 가로지르고, 그 밖의 곳에서는 가로지르지 않는다.

이제 $1 < \sqrt{2} < 3$이므로 $(1, 2, \sqrt{2})$에서의 교차는 원판 D_2 안에서 일어난다. 그러나 $-\sqrt{2} < 1$이므로 $(1, 2, -\sqrt{2})$에서의 교차는 원판 밖에서 일어난다. C_1을 한 바퀴 돌면, C_2가 둘러싸는 원판을 정확히 한 번 통과하고, 원판 밖에서 P_2를 다시 가로질러 돌아온다. 다시 말해 C_1은 사슬의 두 고리처럼 C_2를 한 번 꿰뚫고 지나간다.

L을 따라 네 점은

$$-\sqrt{2} < 1 < \sqrt{2} < 3,$$

의 순서로 놓이므로, C_1에서 온 쌍과 C_2에서 온 쌍이 **번갈아 끼어 있다**. 바로 이것이 C_1이 D_2를 한 번 가로지르게 만든다. (어느 쌍도 다른 쌍을 분리하지 않는다면 C_1은 D_2를 두 번 가로지르거나 전혀 가로지르지 않을 것이고, 두 원은 얽혀 있지 않을 것이다.) 따라서 **두 원 C_1과 C_2는 얽혀 있다**.

두 원을 떼어 놓을 수는 없다. 두 원을 멀리 떨어진 두 원으로 옮기는 연속적인 움직임은 어떤 것이든 C_1이 C_2의 원판을 가로지르는 횟수를 홀수에서 짝수로 바꾸어야 한다. 그런데 한

원이 다른 원을 통과하지 않는 한 교차는 쌍으로만 생기고 사라지며, 자르지 않고 떼어 내는 과정에서는 그런 통과가 허용되지 않는다.

검산

각 점을 대입해 보라. 예를 들어 $(1,2,1)$을 대입하면 $3-2-1=0$, $1-2+1=0$, $1+4+1-12-4+10=0$이다. 수치적으로, 두 원을 매개변수화하여 가우스(Gauss)의 얽힘 적분(linking integral) $\frac{1}{4\pi}\oint\oint \frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathrm{d}\mathbf{r}_1\times\mathrm{d}\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$ 을 계산하였더니 1.002를 얻었다(얽혀 있지 않은 쌍이면 0이 나온다). 또한 두 원 사이의 최단 거리가 약 0.09임을 확인하였으므로, 두 원은 가까이 다가가지만 닿지는 않는다.

흔한 실수

- 두 원이 만나는지만 확인하는 것. 두 원은 만나지 않지만, 그것만으로는 얽혀 있는지에 대해 아무것도 말해 주지 않는다.
- C_1과 P_2의 교점이 L 위에 있어야 한다는 사실을 잊고 다른 곳에서 교점을 찾는 것.
- S_2의 중심을 잘못 구하는 것. $-6y$와 $-4z$ 항으로부터 중심은 $(0,-3,-2)$가 아니라 $(0,3,2)$이다.

STEP 너머

서로 만나지 않는 두 닫힌곡선이 얽혀 있는지는 정수 불변량(invariant)인 **얽힘수**(linking number)로 측정된다. 얽힘수는 한 곡선이 다른 곡선을 경계로 하는 곡면을 부호를 고려하여 몇 번 가로지르는지 세어서 계산할 수도 있고(우리가 한 방법이다), 검산에서 쓴 가우스의 이중적분으로 계산할 수도 있다. 얽힘수는 매듭 이론(knot theory)과 대수적 위상수학(algebraic topology)으로 들어가는 첫걸음이다. Colin Adams의 *The Knot Book*(매듭 이론 입문서)은 매우 읽기 쉬운 입문서이다.

풀이

STEP III 1994, 문제 4

순수수학 • 상미분방정식의 특이해

STEP III 1994, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.1 절 **해가 유일하지 않을 때**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/non-uniqueness.html

핵심 아이디어

양변의 제곱근을 취하면 이 방정식은 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm 2\sqrt{y}$가 되고, 곧바로 변수분리(separation of variables)가 된다. 더 좋은 방법은 모든 포물선(parabola) $y = (x-c)^2$이 이 방정식을 만족한다는 사실에 주목하는 것이다. 그러면 해는 단순히 $y = x^2$을 x축을 따라 미끄러뜨린 복사본들이다. 이 그림이 보이면, 뒤의 소문항들은 어떤 복사본이 어떤 점을 지나는지, 그리고 모든 복사본이 공통으로 가지는 것이 무엇인지에 관한 문제가 된다.

풀이

일반해

$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2 \geq 0$이므로 모든 해는 $y \geq 0$을 만족한다. $y > 0$인 곳에서는 상수 c에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 2\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{y} = \pm(x-c)$$

로 쓸 수 있고, 어느 부호이든 제곱하면

$$y = (x-c)^2.$$

을 얻는다. 왼쪽 절반과 오른쪽 절반, 그리고 꼭짓점(vertex)을 포함하여 이 포물선 전체가 해라는 것을 직접 확인해 볼 만하다. $y' = 2(x-c)$이므로 모든 x에 대하여 $(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$이다.

생각해 보기 두 부호가 같은 식을 주었다. 그렇다면 "±"는 어디로 갔는가?

그것은 각 포물선의 두 절반 속에 숨어 있다. $y = (x-c)^2$ 위에서 기울기(gradient) $2(x-c)$는 꼭짓점의 왼쪽에서는 $-2\sqrt{y}$이고 오른쪽에서는 $+2\sqrt{y}$이므로, 하나의 포물선이 두 부호를 모두 사용한다. 부호의 선택은 한 점을 지나도록 맞출 때 c의 선택으로 다시 나타난다.

(a, b^2)를 지나는 해

$(a-c)^2 = b^2$이어야 하므로 $a-c = \pm b$, 즉 $c = a-b$ 또는 $c = a+b$이다. 두 해는

$$y = (x-a+b)^2 \qquad \text{그리고} \qquad y = (x-a-b)^2.$$

이다. $b \neq 0$이면 $a-b \neq a+b$이므로 이 둘은 서로 다르다. ($b = 0$이면 두 해는 꼭짓점이 $(a, 0)$인 하나의 포물선으로 합쳐진다. 이때 그 점은 해 $y = 0$ 위에도 놓이는데, 이 해는 마지막에 다시 만난다.) b를 $-b$로 바꾸면 두 해가 서로 바뀔 뿐인데, 점 (a, b^2)가 변하지 않으므로 당연한 일이다.

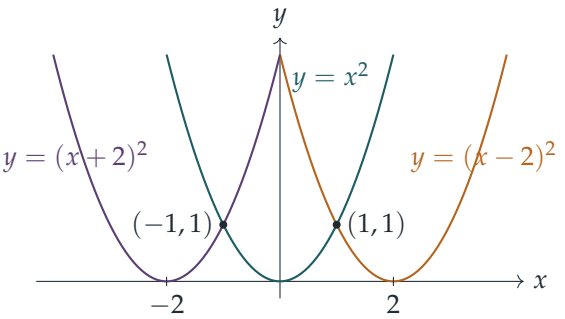
점 $(a_1, 1)$과 $(a_2, 1)$

$b = 1$로 두면 $(a, 1)$을 지나는 해는 $y = (x-a+1)^2$과 $y = (x-a-1)^2$이다. 포물선 $y = (x-c)^2$이 원점을 지나는 것은 정확히 $c = 0$일 때이므로, $a-1 = 0$ 또는 $a+1 = 0$이어야 한다. 따라서

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -1.$$

이다. $(1, 1)$을 지나는 해는 $y = x^2$ ($c = a_1 - 1 = 0$에서)과 $y = (x-2)^2$이다. $(-1, 1)$을 지나는 해는 $y = (x+2)^2$과 $y = x^2$ ($c = a_2 + 1 = 0$에서)이다.

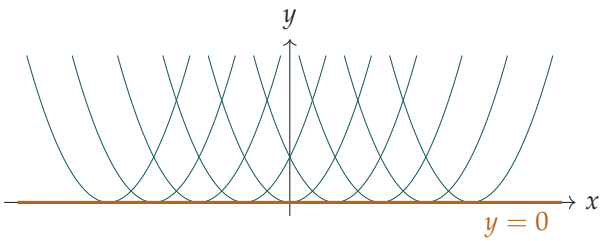
원점을 지나는 해는 두 점 모두에 대하여 같은 곡선 $y = x^2$이므로, 그 그래프는 일치한다. 이는 놀라운 일이 아니다. $(1, 1)$과 $(-1, 1)$은 $y = x^2$ 위에서 높이가 1인 두 점으로, 꼭짓점의 양쪽에 하나씩 있다. 나머지 두 해는 $y = (x-2)^2$과 $y = (x+2)^2$인데, 이는 $y = x^2$을 각각 오른쪽과 왼쪽으로 2만큼 평행이동한 것이다.



$(1,1)$에서 곡선 $y = x^2$의 기울기는 $+2$이고 $y = (x-2)^2$의 기울기는 -2이다. 한 점을 지나는 두 해는 언제나 그 점에서 기울기 $\pm 2b$로 교차하며, 각 기울기는 두 제곱근 중 하나에 대응한다.

해의 족과 공통접선

a와 b를 변화시키면 $c = a \pm b$가 모든 실수 위를 움직일 뿐이므로, 해의 족(family)은 $y = x^2$을 수평으로 평행이동(translate)한 모든 곡선이다.



모든 포물선은 기울기가 0인 꼭짓점 $(c,0)$에서 x축에 접한다. 따라서 직선 $y = 0$은 족 전체의 공통접선(common tangent)이다(이것을 족의 **포락선**(*envelope*)이라 한다).

이것이 중요한 이유는 $y = 0$ 자체가 해이기 때문이다. 이때 $y' = 0$이므로 $(y')^2 = 0 = 4y$이다. 그러나 이 해는 어떤 c에 대해서도 포물선 중 하나가 아니다. 이것은 **특이해**(*singular solution*)로, 변수분리 과정에서 $\sqrt{y}$로 나누었기 때문에 놓친 해이다. 각 점 $(c,0)$에서 해 $y = 0$과 포물선 $y = (x-c)^2$은 같은 값과 같은 기울기를 가지므로, x축 위의 점을 지나는 해는 유일하지 않다. 실제로 이어 붙일 수도 있다. $p < q$에 대하여

$$y = \begin{cases} (x-p)^2, & x < p, \\ 0, & p \le x \le q, \\ (x-q)^2, & x > q \end{cases}$$

는 연속인 도함수를 가지며 모든 곳에서 방정식을 만족한다. 그러므로 엄밀히 말하면 (a,b^2)를 지나는 "두 해"란 그 점 근처에서 포물선과 일치하는 두 해를 뜻한다. 그 점에서 멀어지면, 해가 x축에 닿은 뒤 한동안 축을 따라 달리다가 떠날 수도 있다.

검산

- 다시 대입해 본다. $y = (x - a \pm b)^2$에 대하여 $x = a$일 때 $y = b^2$이고, $(y')^2 = 4y$는 항등적으로 성립한다.
- (a,b^2)에서의 두 기울기는 $2(a-c) = \pm 2b$이며, 그 제곱은 둘 다 요구한 대로 $4b^2 = 4y$이다.

- 수치적으로, 중심차분(central difference) 도함수를 이용하여 임의의 포물선과 $p = -1$, $q = 1$인 위의 이어 붙인 곡선에 대해 $(y')^2 = 4y$임을 확인하였고, $(1,1)$과 $(-1,1)$을 지나는 해가 각각 $c \in \{0,2\}$와 $c \in \{-2,0\}$을 가져 $c = 0$만 공유한다는 것도 확인하였다.

흔한 실수

- $y' = 2\sqrt{y}$만 써서 각 점을 지나는 반쪽 포물선 하나만 얻는 것.
- $y = 0$을 잊는 것. 이것은 진짜 해이며, 마지막 소문항이 찾는 바로 그 공통접선이다.
- $(a_1,1)$과 $(a_2,1)$을 지나는 해 중 원점을 지나는 두 해가 서로 다른 곡선이라고 생각하는 것. 둘 다 $y = x^2$이다.

STEP 너머

이 방정식은 해의 유일성(uniqueness)이 깨지는 경우의 표준적인 예이다. 피카르-린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리는 f가 y에 대하여 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족할 때 한 점을 지나는 $y' = f(x,y)$의 해가 정확히 하나 존재함을 보장한다. 그런데 $\pm 2\sqrt{y}$는 $y = 0$ 근처에서 립시츠 조건을 만족하지 않으며, 바로 그곳에서 포물선들과 특이해가 만난다. 한 매개변수 곡선족의 포락선과, 클레로(Clairaut) 방정식 같은 방정식에서 포락선이 주는 특이해는 상미분방정식(ODE) 입문 강의의 고전적인 주제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이와 같은 예를 들어 해의 존재성과 유일성을 다룬다.

풀이

STEP III 1994, 문제 5

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 1994, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q5

핵심 아이디어

$\sin^{-1} x$를 한 번 미분하면 제곱근이 나오고, 한 번 더 미분하면 제곱근이 전혀 없는 f''과 f' 사이의 관계식을 얻는다. 그러면 라이프니츠 정리(Leibniz's theorem)가 이 하나의 식을 모든 고계도함수에 대한 점화식(recurrence)으로 바꾸어 준다. $x = 0$에서는 대부분의 항이 사라지므로 매클로린(Maclaurin) 계수에 대한 간단한 점화식을 얻는다. g의 경우에는 로그의 법칙(laws of logarithms)을 쓰면 모든 것이 익숙한 $\ln(1 \pm x)$의 급수로 귀결된다.

풀이

미분방정식

$-1 < x < 1$일 때

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

두 번째 식에 $1 - x^2$을 곱하면 $(1-x^2)\mathrm{f}''(x) = x(1-x^2)^{-1/2} = x\mathrm{f}'(x)$이므로

$$(1-x^2)\mathrm{f}''(x) - x\mathrm{f}'(x) = 0,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

점화식

이 항등식을 라이프니츠 정리 $(uv)^{(n)} = \sum_r \binom{n}{r} u^{(r)} v^{(n-r)}$를 이용하여 n번 미분한다. 첫 번째 곱에서는 $u = 1 - x^2$으로 둔다. 그 도함수는 차례로 $-2x$, -2, 그다음부터는 0이므로 세

항만 남는다.

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)\mathrm{f}''\right] = (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} + n(-2x)\mathrm{f}^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\mathrm{f}^{(n)}.$$

두 번째 곱에서는 $u = x$이고, 두 항만 남는다.

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\mathrm{f}'\right] = x\mathrm{f}^{(n+1)} + n\mathrm{f}^{(n)}.$$

두 식을 빼고 $2\binom{n}{2} = n(n-1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - \big(n(n-1)+n\big)\mathrm{f}^{(n)} \\ &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - n^2\mathrm{f}^{(n)}, \end{aligned}$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. 이 식은 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립하며, $n = 0$일 때는 처음의 식 그 자체이다. (원한다면 수학적 귀납법(induction)으로 증명할 수도 있다. n인 경우의 식을 한 번 미분하고 항을 정리하면 $n+1$인 경우를 얻는다. 이는 같은 계산을 한 단계씩 하는 것과 같다.)

f의 매클로린 급수

생각해 보기 x에 어떤 값을 넣으면 이 점화식을 쓰기 쉬워질까?

$x = 0$을 대입한다. 가운데 항이 사라지고 $1 - x^2 = 1$이므로

$$\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2\,\mathrm{f}^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

출발점은 $\mathrm{f}(0) = \sin^{-1} 0 = 0$과 $\mathrm{f}'(0) = 1$이다.

짝수 계 도함수. $\mathrm{f}(0) = 0$이므로 점화식에 의해 모든 짝수 계 도함수는 0에서 값이 0이다. $\sin^{-1}$은 기함수(odd function)이므로 이는 예상한 대로이다.

홀수 계 도함수. $n = 1, 3, 5, \ldots$을 대입하면

$$\mathrm{f}'''(0) = 1^2, \quad \mathrm{f}^{(5)}(0) = 3^2 \cdot 1^2, \quad \mathrm{f}^{(7)}(0) = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2,$$

이고, 일반적으로

$$\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = \big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\big)^2 \qquad (k \geq 1).$$

따라서

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1^2}{3!}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!}x^7 + \cdots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots.$$

x^{2k+1}의 계수는 깔끔하게 정리된다. $(2k+1)! = \big(1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\big)\big(2 \cdot 4 \cdots 2k\big)(2k+1)$로 쓰고 홀수들의 곱 하나를 약분하면

$$a_{2k+1} = \frac{\big(1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\big)^2}{(2k+1)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

$a_{2k+3}/a_{2k+1} \to 1$이므로 비판정법(ratio test)에 의해 이 급수는 $|x| < 1$에서 수렴한다. 그 범위에서 급수가 실제로 $\sin^{-1} x$와 같다는 것은 $(1-x^2)^{-1/2}$의 이항급수(binomial series)를 항별로 적분하여 확인할 수 있으며, 그렇게 하면 정확히 같은 계수를 얻는다.

함수 g

로그의 법칙에 의해 $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$이다. $|x| < 1$일 때

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

두 식의 차에서 짝수 차수 항은 소거되고 홀수 차수 항은 두 배가 된다. 따라서

$$\mathrm{g}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(g가 $\tanh^{-1} x$임을 알아챈 독자도 있을 것이다.)

계수 비교

> **생각해 보기** 두 계수 모두 인수 $\frac{1}{2k+1}$을 가진다. 그렇다면 남은 비교 대상은 무엇인가?

$n \geq 1$일 때 x^{2n+1}의 계수는 g에서 $\dfrac{1}{2n+1}$이고, f에서는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

이다. n개의 인수 $\frac{2r-1}{2r}$은 각각 0과 1 사이에 엄격하게 놓여 있고, $n \geq 1$이므로 이러한 인수가 적어도 하나 있다. 따라서 이들의 곱은 1보다 엄격하게 작고, 그러므로

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

따라서 요구한 대로 g의 계수가 더 크다. $n = 0$일 때는 두 계수가 모두 1이며, 문제에서 이 경우를 제외한 것은 이 때문이다.

검산

- $x = -\frac{1}{2}$에서 급수를 x^{59}항까지 더하면 -0.5235987756이 되어 $\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$과 일치한다.
- 계수 $1, \frac{1}{6}, \frac{3}{40}, \frac{5}{112}$는 $\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2 \mathrm{f}^{(n)}(0)$으로부터 직접 구한 값과 일치한다. 비교 $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$, $\frac{3}{40} < \frac{1}{5}$, $\frac{5}{112} < \frac{1}{7}$도 주장한 대로 성립한다.

- f의 모든 계수가 대응하는 g의 계수 이하이므로 $0 < x < 1$에서 $\sin^{-1} x < \tanh^{-1} x$이어야 한다. $x = 0.5$에서 $0.5236 < 0.5493$이다.

흔한 실수

- 라이프니츠 정리에서 $\binom{n}{2}$ 항을 빠뜨려 최종 계수에 n^2 대신 n이 나오는 실수.
- 제곱을 빼고 $\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$로 쓰는 실수. 점화식의 각 단계에서 곱해지는 것은 n이 아니라 n^2이다.
- 매클로린 계수를 구할 때 $(2k+1)!$ 대신 $(2k)!$이나 $(2k+1)$만으로 나누는 실수.

STEP 너머

비 $\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$는 $\binom{2n}{n}/4^n$과 같고, n이 클 때 $1/\sqrt{\pi n}$처럼 행동한다. 이는 월리스(Wallis)의 곱과 스털링(Stirling)의 공식에서 나오는 결과이다. $\sin^{-1} x$의 급수는 $x = 1$에서도 수렴하여 $\pi/2$가 되지만, 이를 증명하려면 수렴구간(interval of convergence)의 끝점에서의 거듭제곱급수(power series)에 관한 아벨(Abel)의 정리가 필요하다. 함수의 도함수들이 미분방정식(differential equation)을 만족하면 계수에 대한 점화식이 따라 나온다. 이것이 상미분방정식의 급수해법이며, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다. 테일러 급수가 언제 실제로 원래 함수와 같아지는지에 대한 엄밀한 증명은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP III 1994, 문제 6

순수수학 • 아르강 도표에서의 회전

> **STEP III 1994, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q6

핵심 아이디어

점 p를 중심으로 각 θ만큼 회전(rotation)하는 것은 사상 $z \mapsto p + e^{i\theta}(z-p)$이다. 즉 p를 원점으로 옮기고, 회전한 다음, 다시 되돌려 놓는다. 이러한 사상 여러 개를 합성(composition)하면 언제나 $z \mapsto \lambda z + \mu$ 꼴이 되고, "모든 P_1에 대해 $P_{\text{last}} = P_1$"이라는 것은 이 사상이 항등사상(identity)이라는 뜻이므로 $\lambda = 1$이고 $\mu = 0$이다. 나머지는 모두 이 두 방정식을 기하학적으로 읽어 내는 일이다.

풀이

z_5 구하기

양의 방향으로 4분의 1 바퀴 도는 것은 i를 곱하는 것이므로, P_1을 A를 중심으로 회전하면

$$z_2 = a + i(z_1 - a) = (1-i)a + iz_1.$$

을 얻는다. 같은 방법으로 $z_3 = (1-i)b + iz_2$, $z_4 = (1-i)c + iz_3$, $z_5 = (1-i)d + iz_4$이다. 한 단계씩 거슬러 대입하면

$$\begin{aligned} z_5 &= (1-i)\big(d + ic + i^2 b + i^3 a\big) + i^4 z_1 \\ &= (1-i)\big(d - b + i(c-a)\big) + z_1. \end{aligned}$$

P_5는 언제 P_1으로 돌아오는가?

4분의 1 회전을 네 번 하면 한 바퀴가 되므로 z_1의 계수는 정확히 1이고,

$$z_5 - z_1 = (1-i)\big(d - b + i(c-a)\big),$$

이며, 이는 z_1에 전혀 의존하지 않는다. 합성 사상은 순수한 평행이동(translation)이다. $1-\mathrm{i} \neq 0$이므로

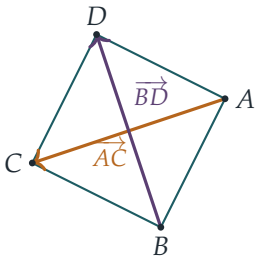
$$\begin{aligned} z_5 = z_1, \text{모든} z_1 &\iff d - b + \mathrm{i}(c-a) = 0 \\ &\iff \mathrm{i}(c-a) = b - d \\ &\iff a - c = \mathrm{i}(b-d), \end{aligned}$$

이다. 여기서 마지막 단계는 양변에 $-\mathrm{i}$를 곱한 것이다($-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = 1$). 모든 단계가 거꾸로도 성립하므로, 이것이 바로 요구된 "필요충분조건(if and only if)"이다. (조건이 성립하지 않으면 평행이동은 0이 아니고, 그러면 **모든** P_1의 선택에 대해 $P_5 \neq P_1$이다.)

> **?** **생각해 보기** $a - c = \mathrm{i}(b-d)$는 도형 $ABCD$에 대해 무엇을 말해 주는가?

-1을 곱하면 조건은 $c - a = \mathrm{i}(d-b)$이다. 이제 $c-a$는 벡터 $\overrightarrow{AC}$를, $d-b$는 벡터 $\overrightarrow{BD}$를 나타낸다. i를 곱하면 벡터의 길이는 그대로 두고 $\pi/2$만큼 회전한다. 따라서

$\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{BD}$를 양의 방향으로 직각만큼 돌린 것이다. 즉 사각형(quadrilateral) $ABCD$의 대각선(diagonal) AC와 BD는 길이가 같고 서로 수직이며, AC는 BD에서 반시계 방향(anticlockwise)으로 4분의 1 바퀴 돌린 위치에 있다.



그림의 예에서 $\overrightarrow{BD} = -1+3\mathrm{i}$이고 $\overrightarrow{AC} = -3-\mathrm{i} = \mathrm{i}(-1+3\mathrm{i})$이다. 방향(orientation)이 중요하다. **시계 방향**(clockwise)으로 이름 붙인 정사각형은 조건을 만족하지만, 반시계 방향으로 이름 붙인 정사각형은 만족하지 않는다(이 경우 $\overrightarrow{AC} = -\mathrm{i}\,\overrightarrow{BD}$이다).

각 θ만큼의 회전 세 번

$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$라 하자. 앞에서와 똑같이 각 단계는 $z \mapsto (1-w)p + wz$이므로

$$\begin{aligned} z_4 &= (1-w)c + w\big((1-w)b + w\big((1-w)a + wz_1\big)\big) \\ &= (1-w)\big(c + wb + w^2a\big) + w^3 z_1. \end{aligned}$$

이것은 $\lambda = w^3$, $\mu = (1-w)(c+wb+w^2a)$인 $\lambda z_1 + \mu$이다. 이것이 모든 z_1에 대해 z_1과 같을 필요충분조건은 $\lambda = 1$이고 $\mu = 0$인 것이다($z_1 = 0$을 대입하면 $\mu = 0$을 얻고, 이어서 $z_1 = 1$을 대입하면 $\lambda = 1$을 얻는다).

각. $w^3 = 1$은 3θ가 2π의 배수라는 뜻이다. $\theta \neq 0$을 "정수 바퀴가 아니다"로 해석하므로 $w \neq 1$이다. 따라서 w는 실수가 아닌 1의 세제곱근(cube root of unity)이고

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

이다. **점.** $w \neq 1$이므로 $\mu = 0$은 $c + wb + w^2a = 0$이 된다. 양변에 w를 곱하고 $w^3 = 1$을 이용하면 $a + w^2b + wc = 0$을 얻으며, ($w^3 = 1$, $w \neq 1$이므로) $1 + w + w^2 = 0$이어서 $a = -(w + w^2)a$로 고쳐 쓸 수 있다. 따라서

$$w(c-a) + w^2(b-a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c - a = -w\,(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}(b-a).$$

> ? **생각해 보기** $\theta = \pm 2\pi/3$일 때 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}$는 무엇인가?

$\theta = 2\pi/3$이면 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$이고, $\theta = -2\pi/3$이면 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이다($\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이므로). 따라서 $\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{AB}$를 길이는 그대로 두고 $\mp\pi/3$만큼 돌린 것이다. 즉 ABC는 **정삼각형**(equilateral triangle)이며, $\theta = 2\pi/3$일 때는 A, B, C가 **시계 방향** 순서로, $\theta = -2\pi/3$일 때는 **반시계 방향** 순서로 놓인다. 역으로, 이 단계들은 모두 거꾸로도 성립하므로 이 조건들로부터 $\mu = 0$도 얻어진다.

A, B, C가 단위원 위에 있으므로 그 원이 삼각형의 외접원(circumcircle)이고, 정삼각형에서는 외심(circumcentre)이 곧 중심이므로 꼭짓점들은 $|z| = 1$ 위에 같은 간격으로 놓인다. 두 경우를 하나의 명제로 깔끔하게 합칠 수 있다.

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}, \qquad b = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad c = b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

말로 하면, 세 회전은 3분의 1 바퀴씩이고, A, B, C는 단위원 위에 같은 간격으로 놓이되 회전과 **반대** 방향으로 차례로 돌아간다.

검산

- 컴퓨터로 임의의 A, B, C, D를 중심으로 임의의 점에 4분의 1 회전을 네 번 적용해 보았더니 z_5에 대한 공식과 10^{-9}까지 일치했다. $c = a - \mathrm{i}(b-d)$일 때는 모든 P_1이 제자리로 돌아왔고, c를 0.1만큼 살짝 옮기자 성립하지 않았다.
- 단위원 위의 임의의 a와 $\theta = \pm 2\pi/3$에 대해 $b = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $c = b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$로 두면 임의의 z_1에 대해 $z_4 = z_1$이었다. 이름 붙이는 순서를 거꾸로 하거나 다른 θ를 쓰면 그렇지 않았다.
- 손으로 확인하기: 시계 방향으로 이름 붙인 단위 정사각형 $a = 0$, $b = \mathrm{i}$, $c = 1 + \mathrm{i}$, $d = 1$을 중심으로 $z_1 = 0$을 회전한다. 그러면 $0 \to 0 \to 1 + \mathrm{i} \to 1 + \mathrm{i} \to 0$이 된다. 제자리로 돌아왔다.

흔한 실수

- A를 중심으로 하는 회전을 $z \mapsto \mathrm{i}z$로 쓰는 것. 먼저 A를 원점으로 옮기는 것을 잊은 것이다.
- 방향을 빠뜨리는 것. 대각선의 회전 방향, 그리고 $\theta = \pm 2\pi/3$ 각각에 대한 삼각형의 방향도 조건의 일부이다.

STEP 너머

$|\lambda| = 1$인 사상 $z \mapsto \lambda z + \mu$는 평면의 방향을 보존하는 등거리변환(isometry)이며, 이들은 군(group)을 이룬다. 각은 더해지므로 회전들의 합성은 전체 각만큼의 회전이 되거나, 전체 각이 정수 바퀴이면 평행이동이 된다. 그래서 $z_5 - z_1$이 상수로 나온 것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 1994, 문제 7

순수수학 • 군 동형사상

STEP III 1994, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q7

핵심 아이디어

두 군이 동형(isomorphic)이 되려면 동형사상(isomorphism)이 보존하는 모든 구조적 성질을 공유해야 한다. 그런 성질 가운데 가장 쓸모 있는 두 가지는 원소의 위수(order) 목록과, 군이 가환(commutative)인지, 곧 아벨군(abelian)인지의 여부이다. 위수를 나열하는 것만으로도 S_3와 Z_6는 이미 구별된다. 두 군이 동형임을 증명하려면 구체적인 전단사(bijection)를 하나 적고 그것이 연산을 보존하는지 확인한다. 마지막 부분은 가환성 문제로 귀결된다. 복소수로 이루어진 군은 모두 아벨군이지만, S_3는 그렇지 않다.

풀이

S_3와 Z_6의 원소

세 대상에 $1, 2, 3$이라는 이름을 붙이고 순환 표기(cycle notation)를 쓴다. 합성은 오른쪽에서 왼쪽으로 하므로, $\sigma\tau$는 "먼저 τ를 하고, 그다음 σ를 한다"는 뜻이다. 여섯 개의 치환(permutation)은 다음과 같다.

S_3의 원소	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
위수	1	2	2	2	3	3

호환(transposition)은 두 대상을 맞바꾸고, 두 번 하면 모든 것이 제자리로 돌아오므로 위수가 2이다. (123)과 같은 3-순환(3-cycle)은 $1 \to 2 \to 3 \to 1$로 보내므로, 각 대상이 제자리로 돌아오려면 세 번 적용해야 하고, 따라서 위수가 3이다.

$Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$에서 항등원(identity)은 0이고, a의 위수는 $na \equiv 0 \pmod 6$을 만족하는 가장 작은 $n \geq 1$이며, 이는 $6/\gcd(a, 6)$이다.

Z_6의 원소	0	1	2	3	4	5
위수	1	6	3	2	3	6

예를 들어 $4+4=8\equiv 2$이고 $4+4+4=12\equiv 0$이므로 4의 위수는 3이다.

S_3와 Z_6는 동형인가?

아니다. 동형사상 θ는 위수를 보존한다. g의 위수가 n이면 $\theta(g)^k=\theta(g^k)$이고, θ가 단사(injective)이므로 이것이 항등원이 되는 것은 정확히 g^k가 항등원일 때이다. 따라서 동형인 두 군은 각 위수의 원소를 같은 개수만큼 가진다. 그런데 Z_6에는 위수가 6인 원소가 두 개 있고 S_3에는 하나도 없으므로, 두 군은 동형이 아니다. (위수가 2인 원소의 개수도 다르다. S_3에는 세 개가 있고 Z_6에는 하나뿐이다.)

두 번째 이유도 있는데, 이것은 마지막에 다시 쓴다. 덧셈은 가환이므로 Z_6는 아벨군이다. 반면 S_3는 그렇지 않다.

$$(12)(13)=(132),\qquad (13)(12)=(123).$$

첫 번째 곱에서 (13)은 $1\to 3$으로 보내고 그다음 (12)는 3을 고정하므로 $1\to 3$이다. 마찬가지로 $3\to 2, 2\to 1$이다. 동형사상은 서로 교환되는 쌍을 서로 교환되는 쌍으로 옮기므로, 비가환군은 아벨군과 동형일 수 없다.

C_6는 Z_6와 동형이다

$k=0,1,\dots,5$에 대하여 $\phi(k)=\alpha^k$로 $\phi: Z_6\to C_6$를 정의한다.

- **전단사.** $k=0,\dots,5$에 대한 수 $\alpha^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/3}$의 편각은 $0,\frac{\pi}{3},\dots,\frac{5\pi}{3}$이다. 이들은 $[0,2\pi)$ 안의 서로 다른 각이므로, 여섯 값은 단위원 위의 서로 다른 점이다. 따라서 ϕ는 단사이고, 크기가 6인 두 집합 사이의 사상이므로 전단사이다.
- **연산.** $a,b\in Z_6$라 하고, $r=(a+b)\bmod 6$으로 하여 $a+b=6q+r$로 쓴다. $\alpha^6=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$이므로

$$\phi(a)\,\phi(b)=\alpha^a\alpha^b=\alpha^{a+b}=(\alpha^6)^q\alpha^r=\alpha^r=\phi\big((a+b)\bmod 6\big).$$

따라서 ϕ는 mod 6 덧셈을 복소수 곱셈으로 바꾸며, 동형사상이다. 그러므로 $C_6\cong Z_6$이다. 확인 삼아 보면, α와 α^5(1과 5의 상)는 위수가 6이고, α^2와 α^4는 위수가 3이며, $\alpha^3=-1$은 위수가 2이므로, Z_6의 표와 일치한다.

S_3와 동형인 $\mathbb{C}$의 부분군이 있는가?

? **생각해 보기** 복소수로 이루어진 **모든** 군이 공유하는 성질은 무엇인가?

이들은 모두 아벨군이다. $(\mathbb{C}, +)$의 부분군(subgroup) H는 모든 복소수 z, w에 대하여 $z + w = w + z$이므로 아벨군이다. 곱셈에 대한 0이 아닌 복소수들의 부분군 H는 $zw = wz$이므로 아벨군이다. 부분군은 큰 군과 같은 연산을 쓰므로 가환성을 물려받는다.

이제 그러한 어떤 H에 대하여 동형사상 $\theta : S_3 \to H$가 있다고 하자. 위에서 본 서로 교환되지 않는 쌍에 이를 적용한다. H가 아벨군이므로

$$\theta\big((12)(13)\big) = \theta(12)\,\theta(13) = \theta(13)\,\theta(12) = \theta\big((13)(12)\big),$$

이다(곱셈으로 적었으며, 덧셈의 경우에는 곱을 합으로 바꾸면 된다). θ가 단사이므로 이로부터 $(12)(13) = (13)(12)$를 얻게 되는데, 이는 거짓이다. 따라서 복소수의 부분군은 덧셈에 대한 것이든 곱셈에 대한 것이든 **어느 것도** S_3와 동형이 아니다.

검산

- 각 군에서 위수는 6의 약수이다(라그랑주 정리(Lagrange's theorem)). S_3에서는 $1, 2, 3$, Z_6에서는 $1, 2, 3, 6$이다.
- 컴퓨터로 S_3, Z_6, C_6의 모든 위수를 다시 계산하고, $(12)(13) \neq (13)(12)$임을 확인했으며, 36개의 모든 쌍 (a, b)에 대하여 $\alpha^{(a+b) \bmod 6} = \alpha^a \alpha^b$를 10^{-12} 이내의 오차로 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- "둘 다 원소가 여섯 개이므로 동형이다"라고 말하는 것. 크기가 같은 것은 필요조건이지만 충분조건과는 거리가 멀다.
- S_3에서 위수가 3인 원소가 (12)와 (13)이라고 말하는 것. 호환의 위수는 2이고, 위수가 3인 것은 3-순환뿐이다.
- 마지막 부분에서 **유한** 곱셈 부분군(단위근)만 배제하는 것. 가환성 논증은 유한이든 무한이든, 덧셈이든 곱셈이든 모든 부분군을 한꺼번에 다룬다.

STEP 너머

이 문제는 불변량(invariants), 곧 원소의 위수나 가환성처럼 동형인 군들이 반드시 공유해야 하는 성질에 관한 것이다. 사실 위수가 6인 군은 모두 Z_6 또는 S_3와 동형이다. 더 일반

적으로, 곱셈에 대한 0이 아닌 복소수들의 유한 부분군은 모두 순환군(cyclic)이므로 단위근(roots of unity)들의 군이다. 두 결과 모두 군론 첫 강의의 초반에 만나게 된다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이에 관해 읽기 좋은 친절한 책이다.

풀이

STEP III 1994, 문제 8

순수수학 • 네 제곱수 항등식

STEP III 1994, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.8 절 **네 제곱수**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/four-squares.html

핵심 아이디어

$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$ 꼴의 행렬(matrix)의 행렬식(determinant)은 $zz^* + ww^* = |z|^2 + |w|^2$이고, 이는 네 개의 실수 제곱의 합이다. a, b, c, d를 이런 행렬 하나에, p, q, r, s를 또 다른 행렬에 담으면 $\det(AB) = \det A \det B$로부터 좌변을 얻는다. 해야 할 일은 곱 AB도 같은 특수한 꼴임을 보이는 것이다. 그러면 그 행렬식도 네 제곱의 합이 되고, 그 제곱들이 바로 L_i^2이다.

풀이

준비

복소수(complex number) z와 w에 대하여

$$M(z,w) = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}, \qquad \det M(z,w) = zz^* - w(-w^*) = |z|^2 + |w|^2.$$

이라 하자. 다음과 같이 잡는다.

$$z_1 = a + b\mathrm{i}, \quad z_2 = c + d\mathrm{i}, \quad z_3 = p + q\mathrm{i}, \quad z_4 = r + s\mathrm{i}.$$

그러면

$$\det M(z_1, z_2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \qquad \det M(z_3, z_4) = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

이다.

곱도 같은 꼴이다

곱을 전개하면

$$M(z_1, z_2)\, M(z_3, z_4) = \begin{pmatrix} z_1 z_3 - z_2 z_4^* & z_1 z_4 + z_2 z_3^* \\ -z_2^* z_3 - z_1^* z_4^* & -z_2^* z_4 + z_1^* z_3^* \end{pmatrix}.$$

이다. 첫째 행의 성분을 $w_1 = z_1 z_3 - z_2 z_4^*$, $w_2 = z_1 z_4 + z_2 z_3^*$로 놓자. 곱의 켤레(conjugate)는 켤레들의 곱이고 $(z^*)^* = z$이므로

$$w_1^* = z_1^* z_3^* - z_2^* z_4, \qquad -w_2^* = -z_1^* z_4^* - z_2^* z_3,$$

이며, 이들은 정확히 오른쪽 아래 성분과 왼쪽 아래 성분이다. 따라서

$$M(z_1, z_2)\, M(z_3, z_4) = M(w_1, w_2).$$

이다.

? 생각해 보기 곱이 이런 특수한 모양을 가진다는 것이 왜 중요한가?

일반적인 2×2 복소 행렬의 행렬식은 전혀 제곱의 합이 아니다. 곱이 다시 $M(w_1, w_2)$ 꼴이기 때문에 비로소 그 행렬식이 $|w_1|^2 + |w_2|^2$이 되고, 이것이 네 개의 실수 제곱으로 나뉜다.

행렬식 취하기

$\det(AB) = \det A \, \det B$를 이용하면

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = \det M(w_1, w_2) = |w_1|^2 + |w_2|^2.$$

이다. 이제 w_1과 w_2의 실수부와 허수부를 구하면 된다.

$$\begin{aligned} w_1 &= (a + b\mathrm{i})(p + q\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i})(r - s\mathrm{i}) \\ &= \big[(ap - bq) + (aq + bp)\mathrm{i}\big] - \big[(cr + ds) + (dr - cs)\mathrm{i}\big] \\ &= (ap - bq - cr - ds) + (aq + bp + cs - dr)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= (a + b\mathrm{i})(r + s\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i})(p - q\mathrm{i}) \\ &= \big[(ar - bs) + (as + br)\mathrm{i}\big] + \big[(cp + dq) + (dp - cq)\mathrm{i}\big] \\ &= (ar - bs + cp + dq) + (as + br - cq + dp)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

따라서

$$L_1 = ap - bq - cr - ds, \qquad L_2 = aq + bp + cs - dr,$$
$$L_3 = ar - bs + cp + dq, \qquad L_4 = as + br - cq + dp,$$

로 잡을 수 있고, 그러면 $|w_1|^2 + |w_2|^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2$이므로

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2.$$

을 얻는다. 각 L_i는 $(a,b,c,d$ 중 한 문자$) \times (p,q,r,s$ 중 한 문자$)$ 꼴의 항들의 합이므로, 요구된 대로 각 변수 묶음에 대하여 따로따로 일차식(linear)이다. (답은 유일하지 않다. L_i의 부호를 아무렇게나 바꾸거나 z_j를 다르게 잡으면 다른 올바른 답을 얻는다.)

검산

- $(a,b,c,d) = (1,2,3,4)$, $(p,q,r,s) = (5,6,7,8)$로 두자. 좌변은 $30 \times 174 = 5220$이다. 공식에 따르면 $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (-60, 12, 30, 24)$이고, $3600 + 144 + 900 + 576 = 5220$이다.
- $c = d = r = s = 0$으로 두자. 그러면 $L_3 = L_4 = 0$이고 항등식은 $(a^2+b^2)(p^2+q^2) = (ap-bq)^2 + (aq+bp)^2$로 줄어드는데, 이는 $|z_1 z_3| = |z_1||z_3|$에서 나오는 두 제곱 항등식이다.
- 컴퓨터로 여덟 변수에 대한 20,000개의 무작위 유리수 값에서 항등식이 정확히 성립함을 확인했고, $M(z_1,z_2)M(z_3,z_4) = M(w_1,w_2)$도 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- 곱을 계산할 때 아래 행의 켤레를 빠뜨려서 곱의 특수한 꼴이 깨지는 경우.
- $(c+d\mathrm{i})(r-s\mathrm{i})$에서의 부호 실수: 항 $-ds\,\mathrm{i}^2$은 $+ds$가 된다.

STEP 너머

이것은 오일러(Euler)의 네 제곱 항등식(four-square identity)이다. 행렬 $M(z,w)$는 해밀턴(Hamilton)의 사원수(quaternion)의 구체적인 모형이다. 이 행렬들은 곱셈에 대하여 닫혀 있고, 행렬식은 "길이"의 제곱으로서 곱셈적(multiplicative)이다. 이 항등식은 모든 양의 정수가 네 제곱수의 합이라는 라그랑주(Lagrange)의 정리에서 핵심 단계인데, 문제를 소수(prime)의 경우로 줄여 주기 때문이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 제곱수의 합을 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 두 제곱의 경우에 대한 기하학적 직관을 제공한다.

풀이

STEP III 1994, 문제 9

역학 • 등시곡선과 충돌

STEP III 1994, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q9

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.4 절 **등시 곡선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/tautochrone.html

핵심 아이디어

곡면을 따라 에너지 보존(energy conservation)을 적용하면 제1적분(first integral)을 얻고, 그릇의 모양 $y = s^2/(4k)$를 대입하면 이것은 호의 길이(arc-length) s에 대한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)의 에너지 방정식이 된다. 단순 조화 운동의 주기(period)는 진폭(amplitude)에 의존하지 않으므로, 정지 상태에서 놓은 입자는 어디에서 출발하든 모두 같은 시간이 지난 뒤 V에 도달한다. 이 때문에 마지막 부분의 두 입자는 반드시 V에서 만나고, 이후에도 거듭해서 만난다.

풀이

상수

입자를 매끄러운 곡면 위의 질점(point mass)으로 모형화한다. 입자에는 무게와 수직항력(normal reaction)의 두 힘이 작용한다. 입자는 정지 상태에서 출발하므로, 처음 속도에는 출발점과 축을 지나는 연직 평면에 수직인 수평 성분이 없다. 두 힘 모두 그 평면에 수직인 성분이 없으므로(축대칭(axially symmetric) 곡면의 수직항력은 축을 지나는 평면 안에 놓인다), 입자는 그 연직 단면 안에 머문다. 입자는 곡선 $s = 2\sqrt{ky}$를 따라 속력 $|\mathrm{d}s/\mathrm{d}t|$로 움직인다.

곡면이 매끄러우므로 수직항력은 속도에 수직이고 일을 하지 않는다. 일을 하는 것은 중력

뿐이므로 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다.

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgy = \text{상수}.$$

양변에 $2/m$를 곱하면 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2gy$가 상수임을 알 수 있고, 이것이 보여야 할 내용이다. 높이 h에서 정지 상태로 놓으면 이 상수는 $2gh$이다.

V에 도달하는 시간

곡선 위에서 $y = s^2/(4k)$이다. 이를 대입하면

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{g}{2k}s^2 = 2gh.$$

t에 대하여 미분하고 $2\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$로 나누면(입자가 움직이는 동안에는 가능하다)

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{2k}s,$$

를 얻는다. 이것은 s에 대한 단순 조화 운동으로, $\omega^2 = \dfrac{g}{2k}$이고 중심은 $s = 0$, 즉 점 V이다.

생각해 보기 놓은 순간부터 V에 이르기까지의 시간이 왜 주기의 4분의 1인가?

입자는 끝점 $s_0 = 2\sqrt{kh}$에서 정지 상태로 출발하므로 $s = s_0\cos\omega t$이다. 입자가 처음으로 $s = 0$에 도달하는 것은 $\omega t = \frac{\pi}{2}$일 때이고, 이는 주기 $2\pi/\omega$의 4분의 1이다. 따라서 V에 도달하는 시간은

$$T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

이고, 이것이 보여야 할 내용이다. 이 값은 h에 의존하지 않는다. 즉 이 그릇은 **등시곡선**(*tautochrone*)이다.

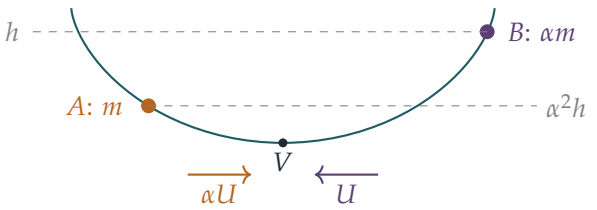
나중에 쓰기 위해 적어 두면, V에서의 속력은 ωs_0이고, 에너지 방정식에 $y = 0$을 넣어 직접 구하면 $\sqrt{2gh}$이다.

두 입자

두 입자를 V에서 정면으로 충돌하는 질점으로 다룬다. 그 점에서 접선은 수평이므로 충돌은 수평선을 따라 일어난다. 질량 m인 입자를 입자 A(높이 α^2h에서 놓음), 질량 αm인 입자를 입자 B(반대쪽 높이 h에서 놓음)라 하자.

두 입자는 V에서 만난다. 앞 부분에 의해 각 입자는 출발 높이와 관계없이 시간 T가 지난 뒤 V에 도달한다. 두 입자를 동시에 놓으므로 둘은 동시에 V에 도착하고, 시각 T에 그곳에서 충돌한다.

충돌 직전의 속력. $U = \sqrt{2gh}$라 쓰자. 에너지 방정식에서 A는 속력 $\sqrt{2g\alpha^2 h} = \alpha U$로, B는 속력 U로 서로 반대 방향으로 움직이며 도착한다. A의 운동 방향을 양의 방향으로 잡는다.



충돌 전의 운동량은

$$m(\alpha U) + \alpha m(-U) = 0.$$

이다. 질량과 높이를 이렇게 고른 이유가 바로 이것이다.

첫 번째 충돌 후. 충돌 후의 속도를 v_A, v_B라 하자. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)에서

$$mv_A + \alpha m\, v_B = 0, \qquad v_B - v_A = \alpha\big(\alpha U - (-U)\big) = \alpha(1+\alpha)U.$$

첫 번째 식에서 $v_B = -v_A/\alpha$이다. 이를 두 번째 식에 대입하면 $-v_A(1+\alpha)/\alpha = \alpha(1+\alpha)U$이므로

$$v_A = -\alpha^2 U, \qquad v_B = \alpha U.$$

두 속도 모두 방향이 반대로 바뀌고 크기에 α가 곱해진다. (전체 운동량이 0이므로 상대 속도와 각각의 속도가 모두 $-\alpha$배가 된다.) 따라서 각 입자는 그릇의 **자기** 쪽으로 다시 올라간다. 에너지 보존에 의해 A는 높이 $\alpha^4 h$까지, B는 높이 $\alpha^2 h$까지 올라간다.

같은 양상이 반복된다. 두 입자는 충돌 후 시간 T가 지난 같은 순간에 각자의 새로운 최고점에서 정지한다. 그런 다음 각각 다시 시간 T가 걸려 V로 돌아온다. 따라서 두 입자는 시각 $3T$에 V에서 다시 충돌하는데, 이때 A는 높이 $\alpha^4 h$에서, B는 높이 $\alpha^2 h$에서 내려온다. 이것은 처음 배치에서 h를 $\alpha^2 h$로 바꾼 것과 정확히 같다. 다시 전체 운동량은 0이고, 다시 두 속도 모두 방향이 바뀌고 α배가 된다.

수학적 귀납법(induction)에 의해 n번째 충돌은 시각 $(2n-1)T$에 V에서 일어나고, 그 후

$$A\text{가 올라가는 높이: } \alpha^{2n+2}h, \qquad B\text{가 올라가는 높이: } \alpha^{2n}h,$$

이며, 각 입자는 자신이 출발한 그릇의 쪽에서 올라간다. 두 입자는 각자의 쪽에서 진동하고, 같은 간격의 시각 $T, 3T, 5T, \ldots$에 V에서 충돌한다. 충돌할 때마다 속력은 α배로 줄어들므로 높이는 α^2배로 줄어들고, 운동 에너지의 $1-\alpha^2$만큼의 비율이 손실된다. 충돌 사이의 간격이 항상 $2T$이므로 충돌은 결코 멈추지 않는다. 진폭은 등비수열로 줄어들고, 두 입자는 $t \to \infty$일 때 V에서 정지 상태에 가까워지지만 유한한 시간 안에 그곳에 도달하지는 않는다.

검산

- 차원(dimensions): ($s^2 = 4ky$이므로) k는 길이이고, 따라서 $\sqrt{k/g}$는 시간이다.
- 임의의 k와 h에 대해 $\int_0^{s_0} \mathrm{d}s/\sqrt{2g(h-y)}$를 수치 적분(quadrature)으로 계산하였다. $k = 1$, $g = 9.81$일 때 그 값은 h와 관계없이 $0.7092\ldots = \pi\sqrt{1/19.62}$이다.
- 두 입자의 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하고($\alpha = 0.6$과 $\alpha = 0.3$), 만날 때마다 충돌 법칙을 적용하였다. 충돌은 $t/T = 1, 3, 5, 7$에서 일어났고, 언제나 V에서, 전체 운동량이 0인 상태로 일어났다. $\alpha = 0.6$일 때 첫 번째 충돌 후의 높이는 $0.1296h = \alpha^4 h$와 $0.36h = \alpha^2 h$였다.
- 극한의 경우 $\alpha \to 1$: 같은 질량이 같은 높이에서 출발하고 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌을 하므로, 예상대로 각 입자는 영원히 출발 높이까지 되튀어 오른다.

흔한 실수

- V가 출발점에서 반주기 떨어져 있다고 생각하는 것: 입자는 진동의 끝점에서 출발하므로 V까지는 4분의 1 주기이다.
- 뉴턴의 법칙에서 방향이 반대로 바뀌는 것을 잊는 것: 속력만이 아니라 부호가 있는 속도를 사용해야 한다.
- 유한 번의 충돌 후 입자들이 정지한다고 주장하는 것. 충돌 사이의 간격은 (바닥에서 튀는 공과 달리) 줄어들지 않고 일정하므로, 무한한 시간에 걸쳐 무한히 많은 충돌이 일어난다.

STEP 너머

내재 방정식(intrinsic equation) $s^2 = 4ky$는 사이클로이드(cycloid)를 나타낸다. 이 문제는 하위헌스(Huygens)의 등시곡선을 다시 발견하는 것이다. 즉 뒤집힌 사이클로이드 위에서는 바닥까지 미끄러져 내려가는 시간이 출발점에 의존하지 않는다. 하위헌스는 이를 이용하여 주기가 흔들림의 크기에 의존하지 않는 진자시계를 설계하였다. 같은 곡선은 가장 빨리 내려가는 곡선인 최속강하곡선(brachistochrone)이기도 한데, 이는 대학 2학년 역학의 표준 주제인 변분법(calculus of variations)으로 구한다. 진동과 충돌에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP III 1994, 문제 10

역학 • 상대 속도

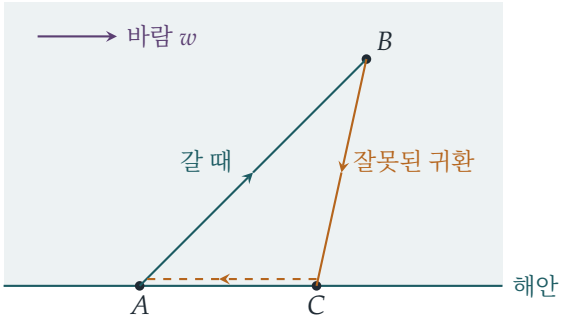
> **STEP III 1994, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q10

핵심 아이디어

모든 것은 벡터 덧셈(vector addition)이다. 지면에 대한 비행기의 속도는 공기에 대한 속도(대기 속도)에 바람의 속도를 더한 것이다. 해안을 x축에 놓고 알파포트(Alphaport)를 원점으로 잡은 다음, 갈 때의 대기 속도를 성분으로 나타낸다. 기수 방향을 반대로 돌리면 대기 속도는 반대가 되지만 바람은 반대가 **되지 않는다**. 그래서 돌아올 때 운동의 북쪽 성분과 동쪽 성분은 매우 다르게 움직이며, 첫 번째 부분의 이야기는 이것이 전부이다. 두 번째 부분에서는 올바른 두 대지 속도가 같은 이차방정식(quadratic)에서 나오므로, 비에트(Vieta)의 공식, 즉 근과 계수의 관계가 일을 대신해 준다.

풀이

비행기를 크기 v인 일정한 대기 속도로 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. 이 대기 속도는 정동쪽으로 일정한 속도 w로 움직이는 공기에 대한 속도이다(서쪽**에서** 부는 바람은 동쪽**으로** 분다). 알파포트 A를 원점으로 잡고, x축을 동쪽, y축을 북쪽으로 잡는다. 그러면 해안은 직선 $y = 0$이고 섬은 $y > 0$인 영역에 있다. 베타빌(Betaville) B는 $\left(\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}}\right)$에 있다. 속력의 단위는 $\mathrm{km\,h^{-1}}$, 시간의 단위는 시간(hour)이다. (문제지에서는 장소를 Alphabet/Alphaport, Betaville/Betaport라고 부르는데, 같은 장소이다.)



갈 때의 비행

갈 때의 대기 속도를 (a, b)라 하면 $a^2 + b^2 = v^2$이다. 대지 속도(ground velocity)는 $(a + w,\ b)$이고, 이것은 북동쪽을 향해야 하므로 두 성분이 같고 양수이다.

$$a + w = b > 0.$$

조종사는 y 방향 속력 b로 y 방향 거리 $\frac{d}{\sqrt{2}}$를 이동하고, 갈 때 걸린 시간이 t이므로

$$bt = \frac{d}{\sqrt{2}} = (a + w)t. \tag{1}$$

잘못된 귀환

기수를 반대로 돌리면 대기 속도는 $(-a, -b)$가 되지만 바람은 여전히 $(w, 0)$을 더하므로, 대지 속도는

$$(w - a,\ -b).$$

생각해 보기 조종사는 해안의 어디에, 알파포트의 어느 쪽에 도착하는가?

북쪽 방향의 운동은 바람의 영향을 받지 않는다. y좌표는 $y = \frac{d}{\sqrt{2}}$에서부터 비율 b로 감소하므로, (1)에 의해 정확히 시간 t 후에, 즉 갈 때와 같은 시간 후에 $y = 0$에 도달한다. 그동안 x좌표는 $(w - a)t$만큼 변하므로, (1)을 다시 쓰면 해안을 지나는 지점은

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} + (w - a)t = (a + w)t + (w - a)t = 2wt,$$

이다. 따라서 조종사는 알파포트에서 **동쪽**으로 거리 $2wt$만큼 떨어진 C에 도착한다. 갈 때는 바람이 비행기를 동쪽으로 밀었고 기수 방향은 그것을 상쇄하도록 정해졌지만, 돌아올 때는 기수 방향의 보정만 반대가 되고 바람이 미는 효과는 반대가 되지 않으므로 표류가 두 배가 된다. $2wt > 0$이므로 해안을 따라 서쪽으로 도는 것이 실제로 올바른 방향이다.

대기 속력 v로 바람을 안고 정서쪽으로 날면 대지 속력은 $v - w > 0$이다($v > w$이므로). 해

안 구간은 $\dfrac{2wt}{v-w}$가 걸리므로, 귀환 전체에 걸리는 시간은

$$t + \frac{2wt}{v-w} = \frac{(v-w)+2w}{v-w}\,t = \left(\frac{v+w}{v-w}\right)t \text{ 시간,}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

올바른 귀환

직선 AB 방향의 대지 속도를 $\pm(p, p)$로 쓰자. 여기서 $\sqrt{2}\,p$가 대지 속력이다. 대기 속도는 대지 속도에서 바람을 뺀 것이고, 그 크기는 v이다.

갈 때는 대지 속도가 (p_1, p_1), 대기 속도가 $(p_1 - w,\ p_1)$이다.

$$(p_1 - w)^2 + p_1^2 = v^2 \iff 2p_1^2 - 2wp_1 + (w^2 - v^2) = 0.$$

돌아올 때는 $p_2 > 0$에 대해 대지 속도가 $(-p_2, -p_2)$, 대기 속도가 $(-p_2 - w,\ -p_2)$이다.

$$(p_2 + w)^2 + p_2^2 = v^2 \iff 2(-p_2)^2 - 2w(-p_2) + (w^2 - v^2) = 0.$$

따라서 p_1과 $-p_2$는 모두 같은 이차방정식 $2p^2 - 2wp + (w^2 - v^2) = 0$의 근이다. 이 방정식의 두 근의 곱은 $\frac{w^2-v^2}{2} < 0$이므로 한 근은 양수, 다른 한 근은 음수이다. p_1이 양수인 근이고 $-p_2$가 음수인 근이므로, 이 둘은 서로 다른 두 근이다. 비에트의 공식에 의해

$$p_1 + (-p_2) = w, \qquad p_1(-p_2) = \frac{w^2 - v^2}{2},$$

즉 $p_1 - p_2 = w$이고 $p_1 p_2 = \frac{1}{2}(v^2 - w^2)$이다.

편도 거리는 d이므로 갈 때 걸린 시간은 $t = \dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_1}$이고 올바른 귀환에 걸리는 시간은 $\dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_2}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{d}{\sqrt{2}\,p_2} &= t + \frac{d}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) = t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2} \\ &= t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2w}{v^2 - w^2} = t + \frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2 - w^2} \text{ 시간,}\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

► $w = 0$이면 두 귀환 시간 모두 t가 되는데, 바람이 없을 때 당연히 그래야 한다.

- $v = 300$, $w = 60$, $d = 400$이면 $t \approx 1.1785\,\mathrm{h}$이고, 잘못된 귀환(운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하여 구한 값)은 $1.7678\,\mathrm{h} = \frac{360}{240}t$가 걸리며, 올바른 귀환은 $1.5713\,\mathrm{h}$가 걸려 $t + \frac{\sqrt{2}\cdot 60\cdot 400}{86400}$과 일치한다. $v > w$와 d의 여러 값에 대한 무작위 시험에서도 반올림 오차 범위 안에서 일치한다.
- 잘못된 귀환은 항상 올바른 귀환보다 느리다. 이것은 부등식(inequality) $\frac{2wt}{v-w} > \frac{\sqrt{2}wd}{v^2-w^2}$, 즉 $\sqrt{2}(v+w)t > d$인데, $p_2 < v$이므로 갈 때의 대지 속력 $\frac{d}{t} = \sqrt{2}p_1 = \sqrt{2}(p_2 + w)$가 $\sqrt{2}(v+w)$보다 작아서 성립한다.

흔한 실수

- 대기 속도 대신 대지 속도를 반대로 뒤집는 것. 조종사가 방향을 돌린다고 바람까지 방향을 돌리지는 않는다.
- 바람이 서쪽으로 분다고 받아들이는 것. "서쪽에서" 분다는 것은 바람이 비행기를 동쪽으로 실어 나른다는 뜻이다.
- 각 이차방정식을 근의 공식으로 풀고 복잡한 무리수의 역수끼리 빼는 것. p_1과 $-p_2$가 하나의 이차방정식의 근임을 알아차리면 그런 계산을 모두 피할 수 있다.

STEP 너머

이것은 가장 단순한 형태의 상대 속도(relative velocity)이다. 지면 기준틀에서 본 비행기의 속도는 공기 기준틀에서 본 비행기의 속도에 공기의 속도를 더한 것이며, 이는 갈릴레이 변환(Galilean transformation), 즉 갈릴레이식 기준틀 변환이다. 같은 계산을 꼼꼼히 하는 것이 항법, 대학 1학년 역학의 강 건너기 문제의 바탕이 되며, (빠른 속도에서 이 계산이 성립하지 않게 될 때에는) 특수 상대성 이론(special relativity)의 동기가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 움직이는 기준틀을 철저하게 다룬다.

풀이

STEP III 1994, 문제 11

역학 • 강체의 평형

STEP III 1994, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q11

핵심 아이디어

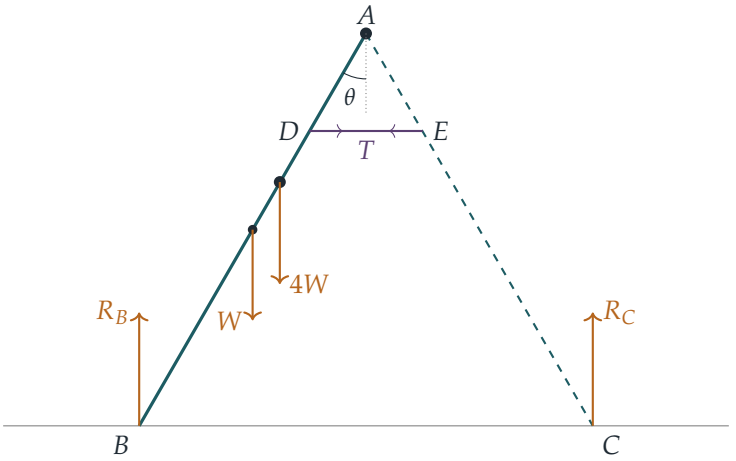
바닥이 매끄러우므로 바닥이 작용하는 힘은 연직 방향뿐이고, 따라서 사다리 전체를 생각하면 C에서의 반작용(reaction)을 곧바로 구할 수 있다. 그다음에는 가벼운 다리 AC가 영리한 역할을 한다. AC에는 바닥의 반작용, 밧줄의 장력(tension), 경첩의 힘이라는 세 힘만 작용하므로, 경첩 A에 대한 모멘트(moment)를 취하면 미지의 경첩 힘이 사라지고 밧줄의 장력과 C에서의 반작용이 연결된다. 훅의 법칙(Hooke's law)은 장력을 사다리의 각과 연결해 주고, 이로부터 β를 각의 함수로 얻어 이를 최대화한다.

풀이

설정하기

AB는 균일한 막대, AC는 가벼운 막대로 모형화하고, 둘의 길이는 모두 $4a$이며 A에 매끄러운 경첩이 있다고 하자. 밧줄은 가볍고 탄성이 있다. 사람은 질점(particle)으로 본다. 대칭성($AD = AE$이고 $AB = AC$)에 의해 밧줄 DE는 수평이다. 각 다리가 연직선과 이루는 각을 θ라 하고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

바닥이 매끄러우므로 B와 C에서의 반작용 R_B와 R_C는 연직 방향이다. AB의 무게 W는 중점에 작용하며, 이 점은 B로부터 수평 거리 $2a\sin\theta$만큼 떨어져 있다. 사람의 무게 $4W$는 B로부터 수평 거리 $\beta a\sin\theta$인 곳에 작용한다. 장력 T는 D와 E를 서로를 향해 끌어당긴다.



C에서의 반작용

접사다리 전체에 대해 B에 대한 모멘트를 취하면(경첩 힘과 장력은 내력이므로 나타나지 않는다), $BC = 8a\sin\theta$이므로

$$R_C \cdot 8a\sin\theta = W \cdot 2a\sin\theta + 4W \cdot \beta a\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad R_C = \tfrac{1}{4}W(1+2\beta).$$

연직 방향으로 힘을 분해하면 $R_B = 5W - R_C = \frac{1}{4}W(19-2\beta)$이고, $\beta \le 4$(발판이 사다리 위에 있다)이므로 이 값은 양수이다. 따라서 다리가 바닥에서 들리는 일은 없다.

밧줄의 장력

밧줄의 길이는 $DE = 2a\sin\theta$이고 자연 길이는 $\frac{a}{4}$이다. 만약 밧줄이 느슨하다면 $T = 0$이고, 아래에서 AC에 대해 A에 대한 모멘트를 취하면 $R_C = 0$이 되어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 밧줄은 늘어나 있고 $\sin\theta > \frac{1}{8}$이며, 훅의 법칙에 의해

$$T = \frac{W\left(2a\sin\theta - \frac{a}{4}\right)}{a/4} = W(8\sin\theta - 1).$$

가벼운 다리 AC의 평형

? **생각해 보기** 왜 AB가 아니라 AC만 따로 살펴볼까?

다리 AC는 가벼우므로 C에서의 R_C, E에서의 장력 T, A에서의 경첩 힘이라는 세 힘만 작용한다. A에 대한 모멘트를 취하면 미지의 경첩 힘이 사라진다. 장력은 수평이며 A보다 연직으로 $a\cos\theta$만큼 아래에서 작용하고, 반작용 R_C는 연직이며 A로부터 수평 거리 $4a\sin\theta$인 곳에서 작용한다. 따라서

$$R_C \cdot 4a\sin\theta = T \cdot a\cos\theta.$$

R_C와 T를 대입하면

$$\begin{aligned} W(1+2\beta)\sin\theta &= W(8\sin\theta-1)\cos\theta, \\ \text{따라서}\quad 1+2\beta &= 8\cos\theta-\cot\theta, \\ \text{그러므로}\quad \beta &= \tfrac{1}{2}\left(8\cos\theta-\cot\theta-1\right). \end{aligned}$$

사람의 각 위치 β에 대해, 평형이 가능할 필요충분조건은 이 방정식이 ($\sin\theta > \frac{1}{8}$인) 해 θ를 갖는 것이다. 따라서 가능한 가장 큰 β는 $f(\theta) = 8\cos\theta - \cot\theta$의 최댓값으로 정해진다.

최대화하기

미분하면

$$f'(\theta) = -8\sin\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1-8\sin^3\theta}{\sin^2\theta}.$$

$\sin\theta$는 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 증가하므로, 이 값은 $\sin\theta < \frac{1}{2}$일 때 양수이고 $\sin\theta > \frac{1}{2}$일 때 음수이다. 따라서 f는 $\sin\theta = \frac{1}{2}$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때 최댓값을 가지며, 이때

$$f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 8\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \qquad \beta_{\max} = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3}-1\right) \approx 2.10.$$

이 값은 4보다 작으므로 발판은 사다리 위에 있고, $\sin\theta = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$이므로 가정한 대로 밧줄은 팽팽하다.

발판의 높이

발판은 B로부터 BA를 따라 βa만큼 떨어져 있고 BA는 연직선과 각 θ를 이루므로, 발판의 높이는

$$h = \beta a\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3}-1\right)a\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(9-\sqrt{3})\,a}{4} \approx 1.82a.$$

검산

- $W = a = 1$이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때: $T = 8\cdot\frac{1}{2} - 1 = 3$이고 $R_C = \frac{1}{4}(1+3\sqrt{3}-1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$이며, 실제로 $R_C\cdot 4\sin\theta = 2.598 = T\cos\theta$이다.
- 두 다리 각각에 대한 힘과 모멘트 방정식을 따로 풀고 θ를 $(0, \frac{\pi}{2})$ 전체에서 훑어본 수치 검산에서, 가장 큰 β는 $\theta \approx 30^\circ$에서 2.09808이었고 이때 높이는 $1.81699a$였다.
- 극한의 경우도 타당하다. $\sin\theta \to \frac{1}{8}$이면 밧줄이 느슨해지고 β는 음수가 되어야 하며, $\theta \to \frac{\pi}{2}$이면 밧줄의 모멘트 팔 $a\cos\theta$가 0이 되므로 역시 β가 줄어들어야 한다. 따라서 그 사이에 최댓값이 있으리라 예상할 수 있다.

흔한 실수

- A에서의 경첩 힘을 수평이라고 가정하는 것. 두 다리에 걸리는 하중이 다르므로 일반적으로 수평이 아니다. A에 대한 모멘트를 취하면 이 힘이 아예 필요 없다.
- 전체 길이 $DE = 2a\sin\theta$를 늘어난 길이로 쓰는 것. 늘어난 길이는 $2a\sin\theta - \frac{a}{4}$이다.
- 문제에서 요구한 높이 대신 $\beta_{\max}$(사다리를 따라 잰 거리)를 답으로 내는 것. 높이를 구하려면 인수 $a\cos\theta$를 더 곱해야 한다.

STEP 너머

이 문제는 배치(θ)가 주어지지 않고 탄성 밧줄에 의해 정해지는 정역학(statics) 문제이다. 따라서 평형 위치들은 하나의 매개변수를 갖는 족을 이루고, 문제는 그 족 위에서의 최적화 문제가 된다. 대학에서는 이것이 가상일(virtual work)과 퍼텐셜 에너지(potential energy) 방법의 바탕이 되는 아이디어이다. 평형점은 퍼텐셜 에너지의 정류점(stationary point)이며, 어느 평형이 안정한지를 묻다 보면 분기(bifurcation) 이론과 파국(catastrophe) 이론으로 이어진다. 역학을 더 깊이 공부하려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 1994, 문제 12

확률과 통계 • 첫걸음 분석

> **STEP III 1994, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q12

핵심 아이디어

게임을 두 개씩 묶어서 본다. 2점 차의 리드는 짝수 번의 게임이 끝난 뒤에만 나타날 수 있고, 게임 두 개가 끝날 때마다 두 선수는 각각 한 번씩 서브(serve)를 넣었으므로 서브 차례가 처음 상태로 돌아온다. 그러면 경기는 단순한 반복 시행이 된다. 각 묶음은 A가 둘 다 이기거나, B가 둘 다 이기거나, 하나씩 나누어 갖는데, 마지막 경우에는 다시 동점이 된다. 표준 테니스도 처음 두 묶음만 따로 다룬다는 점을 빼면 같은 구조이다.

풀이

이 풀이 전체에서

$$a = p_A p_B, \qquad b = q_A q_B, \qquad s = p_A q_B + q_A p_B.$$

라고 쓴다. 두 선수가 한 번씩 서브를 넣는 연속된 두 게임에서, a는 A가 두 게임을 모두 이길 확률, b는 B가 두 게임을 모두 이길 확률, s는 두 사람이 한 게임씩 이길 확률이다(마지막 경우는 A와 B가 모두 자기 서브 게임을 지키거나, 둘 다 상대 서브 게임을 브레이크하는 경우이다). 문제의 의도대로 서로 다른 게임의 결과는 독립(independent)이라고 가정한다. 가능한 결과는 이 세 가지뿐이므로

$$a + b + s = (p_A + q_A)(p_B + q_B) = 1.$$

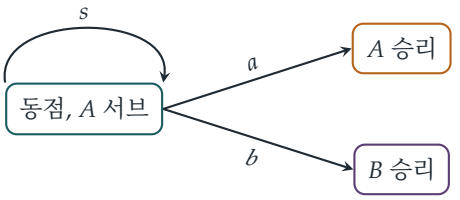
이다.

단축 테니스

점수 차는 게임마다 ± 1씩 변하므로, 짝수 번의 게임 뒤에는 짝수이고 홀수 번의 게임 뒤에는 홀수이다. 따라서 정확히 2점 차의 리드는 $2, 4, 6, \ldots$ 번째 게임 뒤에만 처음 생길 수 있고,

짝수 번의 게임 뒤에도 경기가 계속되고 있다면 점수는 동점이다.

그러므로 경기를 두 게임씩 묶는다(1–2번째 게임, 3–4번째 게임, ...). A가 서브할 차례인 동점 상태에서 시작하면, 다음 묶음에서 확률 a로 A의 승리로 경기가 끝나고, 확률 b로 B의 승리로 끝나며, 확률 s로 다시 A가 서브할 차례인 동점 상태로 돌아온다. 이때의 상황은 처음과 완전히 같으므로



$$P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}} \quad \Longrightarrow \quad P_{\text{short}} = \frac{a}{1-s} = \frac{a}{a+b} = \frac{p_A p_B}{p_A p_B + q_A q_B},$$

이다. 여기서 $1 - s = a + b$를 이용하였다. ($1 - s$로 나누는 것은 $s = 1$이 아닌 한 문제없다. $s = 1$은 모든 묶음이 나누어져 경기가 영원히 끝나지 않는 퇴화된 경우이다.)

B가 먼저 서브하면, 각 묶음은 B의 서브 게임 뒤에 A의 서브 게임이 오는 형태가 된다. A가 둘 다 이길 확률, B가 둘 다 이길 확률, 하나씩 나누어 가질 확률은 각각 $p_B p_A$, $q_B q_A$, $q_B p_A + p_B q_A$이다. 묶음 안에서 두 게임의 순서는 상관없으므로 이는 같은 a, b, s이다. 같은 논증으로 같은 답이 나오므로, P_{short}는 누가 먼저 서브하는지에 의존하지 않는다.

4게임 만에 승부가 나는 경우

4게임이 끝나기 전에는 승부가 날 수 없다. 4게임(두 묶음, A가 먼저 서브) 뒤의 점수 차는 짝수이고, 점수가 4–0, 3–1, 1–3, 0–4일 때에만 정확히 승부가 난다. 두 묶음으로 나타내면 다음과 같다.

- A의 4–0: A가 두 묶음을 모두 이기는 경우로, 확률은 $a^2 = p_A^2 p_B^2$이다.
- 0–4: B가 두 묶음을 모두 이기는 경우로, 확률은 $b^2 = q_A^2 q_B^2$이다.
- A의 3–1: A가 한 묶음을 이기고 다른 묶음은 나누어지는 경우로, 순서는 어느 쪽이든 되며 확률은 $2as$이다.
- 1–3: 마찬가지로 $2bs$이다.

이들을 더하면

$$\Pr(\text{4게임 만에 승부가 남}) = p_A^2 p_B^2 + q_A^2 q_B^2 + 2(p_A p_B + q_A q_B)(p_A q_B + q_A p_B),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

확률이 같을 때의 표준 테니스

4게임 만에 승부가 나지 않으면 점수는 2–2이다. 이는 확률 $s^2 + 2ab$로 일어난다(두 묶음이 모두 나누어지거나, 두 선수가 순서에 관계없이 한 묶음씩 이기는 경우). 2–2에서는 "2점 차로 앞서야 한다"는 규칙이 동점에서 시작하는 단축 테니스 규칙과 정확히 같고, 5번째 게임은 A가 서브한다. 따라서 그 시점부터 A가 이길 확률은 P_{short}이다. 그러므로 일반적으로

$$P_{\text{stan}} = a^2 + 2as + (s^2 + 2ab)P_{\text{short}}.$$

이다. 이제 $p_A = p_B = p$, $q_A = q_B = q$로 두면 $a = p^2$, $b = q^2$, $s = 2pq$이고 $P_{\text{short}} = \dfrac{p^2}{p^2 + q^2}$이다. 그러면

$$P_{\text{stan}} = p^4 + 4p^3q + \frac{6p^4q^2}{p^2 + q^2}.$$

이다.

> **생각해 보기** 모든 것을 p와 q의 거듭제곱으로 전개하지 않고 P_{stan}과 P_{short}를 비교하는 방법이 있을까?

있다. 단축 테니스를 같은 처음 네 게임에 대해 펼쳐 쓰면 된다. $P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}}$를 두 번 적용하면

$$P_{\text{short}} = a + as + s^2P_{\text{short}}.$$

이다. 말로 하면, A가 첫 번째 묶음을 이기거나, 첫 묶음이 나누어지고 A가 두 번째 묶음을 이기거나, 두 묶음이 모두 나누어져 처음부터 다시 시작한다는 뜻이다. P_{stan}의 식에서 이 식을 빼면 s^2P_{short} 항이 소거된다.

$$\begin{aligned} P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} &= a^2 + as - a + 2abP_{\text{short}} \\ &= a(a + s - 1) + 2abP_{\text{short}} \\ &= -ab + \frac{2a^2b}{a + b} \qquad (a + s - 1 = -b\text{이므로}) \\ &= \frac{ab(a - b)}{a + b}. \end{aligned}$$

이 식은 임의의 p_A, p_B에 대해 성립한다. $a = p^2$, $b = q^2$를 대입하면

$$P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} = \frac{p^2q^2(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2} = \frac{p^2q^2(p - q)(p + q)}{p^2 + q^2} = \frac{p^2q^2(p - q)}{p^2 + q^2},$$

이다. 마지막 등호는 $p + q = 1$이기 때문이다. 이것이 요구된 결과이다.

그 이유는 계산 과정에서 드러난다. 두 방식은 A가 첫 번째 묶음을 이기고 B가 두 번째 묶음을 이기는 경우, 또는 그 반대인 경우에만 차이가 난다. 단축 테니스는 이 경우 첫 번째 묶음을 이긴 사람에게 승리를 주고, 표준 테니스는 2–2에서 경기를 계속한다. 두 순서 모두 확률이 ab이므로 차이는 $ab(2P_{\text{short}} - 1)$이고, 이는 더 강한 선수에게 유리하다.

검산

- $p = q = \frac{1}{2}$이면 차이는 0이다. 대칭성(symmetry)에 의해 당연히 그래야 한다. 두 확률이 모두 $\frac{1}{2}$이기 때문이다.
- $p = 0.6$이 면 $P_{\text{short}} = 0.36/0.52 \approx 0.6923$이 고 $P_{\text{stan}} = 0.1296 + 0.3456 + 0.124416/0.52 \approx 0.7145$이며, 그 차이 0.02215는 $0.0576 \times 0.2/0.52$와 일치한다.
- 4게임 만에 승부가 날 확률 $a^2 + b^2 + 2(a+b)s$와 2–2에 도달할 확률 $s^2 + 2ab$를 더하면, 당연히 그래야 하듯이 $(a+b+s)^2 = 1$이다.
- 실제 규칙을 따르는 컴퓨터 시뮬레이션(simulation)에서 $p_A = 0.7$, $p_B = 0.45$로 두면, 누가 먼저 서브하든 A가 단축 테니스에서 이기는 비율은 약 65.6%로, $0.315/0.48 = 0.65625$와 일치한다.

흔한 실수

- 3–1이 두 가지 순서(나눈 뒤 이기기, 또는 이긴 뒤 나누기)로 나올 수 있다는 것을 잊고 인수 2를 빠뜨린다.
- 게임을 이길 확률을 모든 게임에서 같다고 취급한다. 이 확률은 누가 서브하는지에 따라 달라지며, 바로 그 때문에 두 게임씩 묶는 것이 매우 유용하다.
- 무한 등비급수(geometric series)를 쓰면서, 그것이 결국 방정식 $P = a + sP$일 뿐이라는 점을 짚지 않는다.

STEP 너머

묶음 단위로 따지는 이 논증은 흡수 상태(absorbing state)가 있는 **마르코프 연쇄**(Markov chain)의 첫 번째 예이며, 방정식 $P = a + sP$는 흡수 확률(absorption probability)을 구하는 표준적인 방법인 첫 단계 분석(first-step analysis)이다. 같은 아이디어로 테니스 한 세트 전체나 스쿼시 한 경기를 이길 확률도 구할 수 있으며, 더 나아가 도박꾼의 파산(gambler's ruin) 문제와 무작위 행보(random walk)로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 바로 이 수준에서 무작위 행보와 마르코프 연쇄를 전개한다.

풀이

STEP III 1994, 문제 13

확률과 통계 • 지수분포를 따르는 수명

STEP III 1994, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q13

핵심 아이디어

모든 것은 지수 분포(exponential distribution)를 따르는 수명의 생존 함수(survival function) $\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$에서 나온다. 시각 t_0까지 살아남았다는 조건을 거는 조건부 확률(conditional probability)은 이런 지수함수 두 개를 나누는 것일 뿐이며, 유명한 **무기억성**(memoryless property)이 바로 여기서 나온다. 두 밧줄이 모두 끊어질 때까지의 시간은 서로 독립(independent)인 두 수명의 **최댓값**(maximum)이고, 최댓값이 t 이하인 것은 각 수명이 모두 t 이하인 것과 정확히 같다. 따라서 먼저 분포 함수(distribution function)를 구한 뒤 미분한다. 마지막 부분에서 "둘 다 같은 공연 중에 끊어진다"는 것은 두 밧줄이 같은 구간 $((n-1)h,\, nh]$에서 끊어진다는 뜻이고, 이를 n에 대해 모두 더한다. 이 합은 기하급수(geometric series)이다.

풀이

이미 사용 중인 밧줄

밧줄의 전체 수명을 T라 하면, $t \geq 0$에 대하여

$$\mathrm{P}(T > t) = \int_t^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

밧줄이 t_0시간 동안 버텼다는 것, 즉 $T > t_0$임을 알고 있다. 앞으로 더 버티는 시간을 $S = T - t_0$이라 하자. $s \geq 0$에 대하여 사건 $\{T > t_0 + s\}$는 $\{T > t_0\}$에 포함되므로

$$\mathrm{P}(S > s \mid T > t_0) = \frac{\mathrm{P}(T > t_0 + s)}{\mathrm{P}(T > t_0)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t_0+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_0}} = \mathrm{e}^{-\lambda s}.$$

따라서 남은 시간 S의 확률 밀도 함수(probability density function)는 $s \geq 0$일 때 $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda s}$이다($s < 0$일 때는 0). 즉 S는 t_0의 값에 관계없이 **같은** 모수 λ를 갖는 지수 분포를 따른다.

해석. 사용한 밧줄은 새 밧줄과 정확히 똑같이 좋다. 밧줄은 과거에 사용된 것을 "기억하지" 않으며, 다음의 짧은 구간 δt 동안 끊어질 확률은 나이에 관계없이 약 $\lambda\,\delta t$이다(일정한 고장률(failure rate)). 이는 갑작스러운 무작위 사고로 생기는 고장에 잘 맞는다. 하지만 실제 밧줄은 해지고 닳으므로 이 모형은 현실적이지 않으며, 오래된 밧줄일수록 곧 끊어질 가능성이 더 커야 한다. 나이가 들수록 고장률이 증가하는 모형이 더 낫다. 이 모형에서는 아무 차이가 없지만, 새 밧줄을 고집하는 곡예사의 태도는 실제로는 현명하다.

두 새 밧줄이 모두 끊어질 때까지의 시간

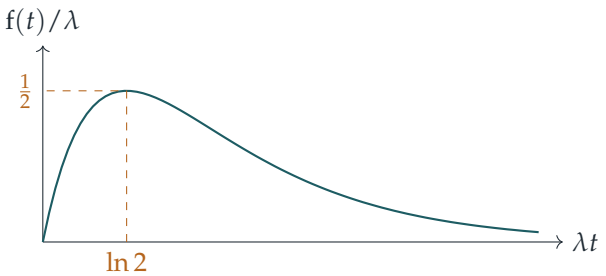
두 새 밧줄의 수명을 T_1, T_2라 하자. 이들은 서로 독립이고, 각각 $t \geq 0$에서 분포 함수 $\mathrm{P}(T_i \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$를 갖는다. 시각 t까지 둘 다 끊어졌다는 것은 나중에 일어나는 고장이 이미 일어났다는 것과 정확히 같으므로, 구하는 시간은 $M = \max(T_1, T_2)$이다. 이제 $M \leq t$일 필요충분조건은 $T_1 \leq t$ 이고 $T_2 \leq t$인 것이므로, 독립성에 의해

$$\mathrm{P}(M \leq t) = \mathrm{P}(T_1 \leq t)\,\mathrm{P}(T_2 \leq t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^2 \qquad (t \geq 0),$$

이고 $t < 0$일 때 $\mathrm{P}(M \leq t) = 0$이다. 연쇄 법칙(chain rule)으로 미분하면

$$\mathrm{f}(t) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} = 2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) \quad (t \geq 0),$$

이고 $t < 0$일 때 $\mathrm{f}(t) = 0$이므로, 요구된 결과를 얻는다.



하나의 지수 분포 수명과 달리, M의 밀도는 $t = 0$에서 0이다. 시작하자마자 두 고장이 한꺼번에 일어날 수는 없기 때문이다. 밀도는 $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$인 곳에서 최대가 된다.

두 밧줄이 모두 n번째 공연 중에 끊어질 확률

n번째 공연은 공연 시간의 구간 $\big((n-1)h,\, nh\big]$이다. $q = \mathrm{e}^{-\lambda h}$로 놓자. 밧줄 하나에 대하여

$$\mathrm{P}\big((n-1)h < T_i \leq nh\big) = \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)h} - \mathrm{e}^{-\lambda nh} = q^{n-1}(1-q).$$

? **생각해 보기** $\mathrm{f}(t)$를 n번째 공연 구간에서 적분해야 할까?

아니다. $\int_{(n-1)h}^{nh} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$는 **두 번째** 고장이 n번째 공연에서 일어날 확률이다. 첫 번째 밧줄은 그 이전 공연에서 끊어졌을 수도 있다. 우리에게 필요한 것은 **각** 밧줄이 n번째 공연에서 끊어지는 것이고, 두 밧줄은 독립이므로

$$p_n = \left(q^{n-1}(1-q)\right)^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda(n-1)h}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda h}\right)^2.$$

두 밧줄이 같은 공연 중에 끊어질 확률

$n = 1, 2, 3, \ldots$에 대한 사건 "둘 다 n번째 공연에서 끊어진다"는 서로 배반(mutually exclusive)이므로 확률을 더하면 된다. 이는 공비가 $q^2 < 1$인 기하급수이다($\lambda h > 0$이므로):

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = (1-q)^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{2(n-1)} = \frac{(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{1-q}{1+q}.$$

이제 분자와 분모에 $\mathrm{e}^{\lambda h/2}$를 곱하면

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda h}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda h}} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda h/2} - \mathrm{e}^{-\lambda h/2}}{\mathrm{e}^{\lambda h/2} + \mathrm{e}^{-\lambda h/2}} = \tanh\left(\frac{\lambda h}{2}\right),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

검산

- $\int_0^{\infty} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \left[(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^2\right]_0^{\infty} = 1$이므로 f는 제대로 된 확률 밀도 함수이다.
- 극한: $h \to \infty$이면(끝없이 이어지는 하나의 공연) 답 $\tanh(\lambda h/2) \to 1$이다. $h \to 0$이면 답은 0으로 가는데, 두 연속 수명이 아주 작은 공통 구간에 함께 들어가는 일은 거의 없기 때문이다. h가 작을 때 답은 약 $\lambda h/2$이다.
- 수치로 확인하면, $\lambda = 0.7$, $h = 0.8$일 때 급수와 $\tanh(0.28)$ 모두 0.27291을 준다. 밧줄 2×10^5쌍으로 한 모의실험에서는 0.2746을 얻었고, $p_1 \approx 0.1839$는 모의실험 값 0.1848과 일치했다.

흔한 실수

- 최댓값 대신 **최솟값**(minimum)을 사용하는 것. 최솟값은 **첫 번째** 밧줄이 끊어질 때까지의 시간이며, 모수가 2λ인 지수 분포를 따른다.
- p_n을 구하려고 f를 n번째 공연 구간에서 적분하는 것. 그렇게 구한 확률들을 모두 더하면 $\tanh(\lambda h/2)$가 아니라 1이 된다.

STEP 너머

무기억성은 지수 분포를 특징짓는다. 즉 이 성질을 갖는 연속 분포는 지수 분포뿐이다. 신뢰성 이론(reliability theory)에서 "고장률", 즉 위험 함수(hazard function) $\mathrm{f}(t)/\mathrm{P}(T > t)$가 상수인 것은 지수 분포뿐이다. 마모는 증가하는 위험 함수로 모형화하며, 예를 들어 와이블 분포(Weibull distribution)를 쓴다. 독립인 확률변수들의 최댓값과 최솟값은 **순서통계량**(order statistics)의 양 극단에 해당하며, 대학의 첫 확률론 강의에서 만나게 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 이 내용을 모두 다룬다.

풀이

STEP III 1994, 문제 14

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP III 1994, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q14

핵심 아이디어

원에 내접하는 각, 즉 원주각(inscribed angle)은 마주 보는 호(arc)가 중심에서 이루는 각의 절반이다. 따라서 삼각형의 세 각은 P, Q, R가 원을 나누어 만든 세 호를 원주에 대한 비율로 잰 값에 π를 곱한 것에 지나지 않는다. 그러면 문제는 원이 무작위로 세 조각으로 나뉘는 방식에 관한 문제가 되고, 이는 다시 삼각형 내부의 넓이에 관한 문제가 된다.

풀이

설정하기

원 위의 위치를 원주에 대한 비율로 재어, 원의 "길이"가 1이 되도록 한다. 회전 대칭(rotational symmetry)에 의해 P의 위치는 중요하지 않으므로 P를 0에 둔다. 그러면 Q와 R의 위치는 서로 독립(independent)이고 각각 $[0,1)$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다.

Q와 R의 위치를 작은 순서대로 $U < V$라 하자. 순서쌍 (U,V)는 넓이가 $\frac{1}{2}$인 영역 $0 < u < v < 1$에서 균등하게 분포하므로, 그 영역에서 결합 밀도(joint density)는 2이다. (두 점이 겹칠 확률은 0이고, 아래에 나오는 경계의 경우들도 모두 마찬가지이다.) 세 호는 다음과 같다.

$$X = U, \qquad Y = V - U, \qquad Z = 1 - V, \qquad X + Y + Z = 1.$$

변수 변환(change of variables) $(u,v) \mapsto (x,y) = (u, v-u)$의 야코비안(Jacobian)은 1이므로, (X,Y)는 삼각형

$$T = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\},$$

위에서 밀도 2를 가진다. 이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 아래의 모든 확률은 T 내부의

넓이의 두 배이다.

생각해 보기 삼각형의 각 각이 왜 호에 π를 곱한 값인가?

삼각형의 R에서의 각은 R를 포함하지 않는 호 PQ 위에 서 있는 원주각이다. 원주각 정리에 의해 이 각은 그 호가 중심에서 이루는 각의 절반이다. 원주의 x만큼을 차지하는 호는 중심에서 $2\pi x$의 각을 이루므로, R에서의 각은 πx이다. 각 꼭짓점에서 같은 사실이 성립하므로 PQR의 세 각은 πX, πY, πZ이다(그리고 그 합은 당연히 π이다). 그러므로

$$\text{한 각이 다음 값보다 크다: } k\pi \iff \text{대응하는 호가 다음 값보다 크다: } k.$$

사건 $X > k, Y > k, Z > k$를 각각 A_X, A_Y, A_Z라 하자. 구하려는 것은 $\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z)$이다.

한 호가 k보다 큰 경우

$0 \le k \le 1$에 대하여:

- A_X는 T에서 $x > k$인 부분이다. 이는 두 변의 길이가 $1-k$인 직각삼각형이고 넓이는 $\frac{1}{2}(1-k)^2$이다.
- A_Y는 $y > k$인 부분이다. 같은 계산으로 넓이는 $\frac{1}{2}(1-k)^2$이다.
- A_Z는 $x + y < 1 - k$인 부분이다. 이는 두 변의 길이가 $1-k$인 모서리의 삼각형이고 넓이는 $\frac{1}{2}(1-k)^2$이다.

두 배를 하면 $\mathrm{P}(A_X) = \mathrm{P}(A_Y) = \mathrm{P}(A_Z) = (1-k)^2$이다.

$\frac{1}{2} \le k \le 1$인 경우

k보다 큰 호는 많아야 하나이다. 두 호가 k보다 크다면 그 합은 $2k \ge 1$보다 커지지만, 세 호의 합은 1이기 때문이다. 따라서 사건 A_X, A_Y, A_Z는 서로 배반(mutually exclusive)이고,

$$\mathrm{P}(\text{어떤 각이 다음보다 큼: } k\pi) = 3(1-k)^2,$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

$\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$인 경우

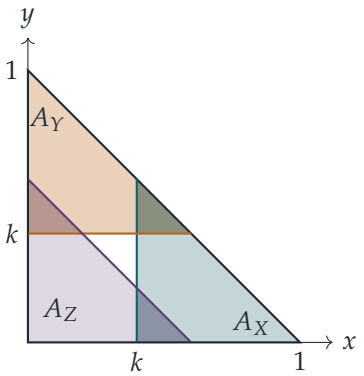
이제는 두 호가 동시에 k보다 클 수 있으므로 포함-배제 원리(inclusion–exclusion)를 사용한다.

두 호. $A_X \cap A_Y$는 T에서 $x > k, y > k, x + y < 1$인 부분이다. $x = k + s, y = k + t$로 치환하면 이는 $s, t > 0, s + t < 1 - 2k$가 되고, 두 변의 길이가 $1 - 2k \ge 0$인 삼각형으로 넓이는

$\frac{1}{2}(1-2k)^2$이다. 따라서 $\mathrm{P}(A_X \cap A_Y) = (1-2k)^2$이다. 나머지 두 쌍도 같은 값을 준다. 예를 들어 $A_X \cap A_Z$는 $x > k, y > 0, x + y < 1 - k$이며, 이 역시 두 변의 길이가 $1-2k$인 삼각형이다.

세 호. 세 호가 모두 k보다 크려면 $X + Y + Z > 3k \geq 1$이어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 세 사건의 교집합의 확률은 0이다.

아래 그림은 $k = 0.4$일 때의 T를 나타낸다. 세 모서리의 삼각형이 A_X, A_Y, A_Z이고, 더 진하게 겹친 부분이 두 사건씩의 교집합이다.



포함-배제 원리에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z) &= 3(1-k)^2 - 3(1-2k)^2 + 0 \\ &= 3\big[(1-k) - (1-2k)\big]\big[(1-k) + (1-2k)\big] \\ &= 3k(2-3k).\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2}$일 때 적어도 한 각이 $k\pi$보다 클 확률은

$$3k(2-3k) = 6k - 9k^2.$$

검산

- $k = \frac{1}{2}$에서 두 공식은 모두 $\frac{3}{4}$를 주므로 연속적으로 이어진다. 이는 무작위로 내접한 삼각형이 둔각삼각형(obtuse triangle)일 확률이 $\frac{3}{4}$라는 고전적인 결과이다.
- $k = \frac{1}{3}$에서는 $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1$을 얻는다. 세 각의 합이 π이므로 가장 큰 각은 항상 $\frac{\pi}{3}$ 이상이고, 따라서 이 값은 옳다.
- $k = 1$에서는 0을 얻는다. 어떤 각도 π보다 클 수 없기 때문이다.
- 무작위 삼각형 4×10^5개를 시뮬레이션하여 좌표로부터 각을 직접 계산한 결과, $k = 0.4$에서 0.9602(공식 0.96), $k = 0.6$에서 0.4783(공식 0.48)을 얻었다.

흔한 실수

- 세 번째 꼭짓점을 **포함하지 않는** 호 대신 호 PQ 전체를 사용하는 것. 두 개의 호 PQ 중에서 R의 맞은편에 있는 호는 하나뿐이다.
- X, Y, Z를 서로 독립인 균등분포 확률변수로 취급하는 것. 이들은 $X+Y+Z=1$이라는 제약을 받으며, 이를 제대로 다루는 방법이 넓이를 이용한 그림이다.
- $k=\frac{1}{2}$보다 작은 경우에 $3(1-k)^2$을 적용하는 것. $k<\frac{1}{2}$이면 이 식은 큰 각이 두 개인 삼각형을 두 번 세게 되며, $k=\frac{1}{3}$에서는 $\frac{4}{3}>1$이 되어 버린다.

STEP 너머

호 (X,Y,Z)는 단체(simplex) $x+y+z=1$ 위에서 균등하게 분포한다. 이것이 디리클레 분포(Dirichlet distribution)이며, 무작위 점들이 구간이나 원을 자를 때 생기는 "간격(spacings)"을 기술한다. 점이 n개일 때 같은 포함-배제 원리로 $\mathrm{P}(\text{가장 큰 간격} > k) = \sum_j (-1)^{j+1}\binom{n}{j}(1-jk)_+^{n-1}$를 얻는데, 이 공식은 Whitworth까지 거슬러 올라간다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 기하학적 확률과 결합밀도를 잘 다루고 있다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1994년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

