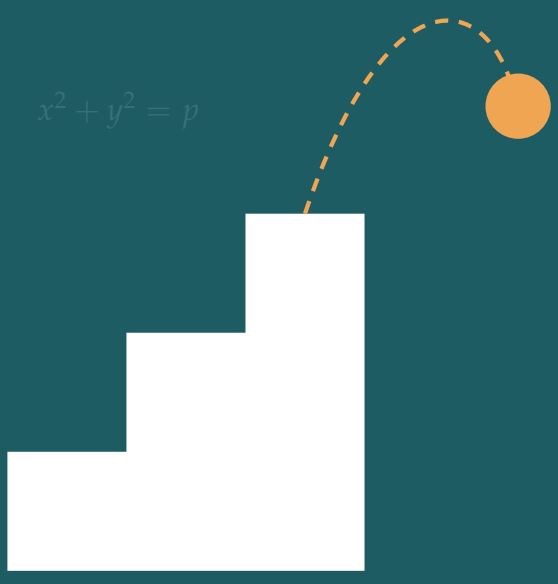
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1993년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1993년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1993년 풀이

1993년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 48개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 주사위 눈의 합 세기 순수수학 3

Q2 등비급수 순수수학 7

Q3 디오판토스 방정식 순수수학 11

Q4 치환적분 순수수학 14

Q5 절댓값과 삼각부등식 순수수학 18

Q6 곡선 그리기 순수수학 22

Q7 삼차식의 근 순수수학 26

Q8 구와 벡터 순수수학 30

Q9 일계 미분방정식 순수수학 35

Q10 용수철이 있는 평형 역학 39

Q11 질량중심 역학 43

Q12 포물체 요격 역학 46

Q13 일과 일률 역학 50

Q14 지수분포를 따르는 대기 시간 확률과 통계 54

Q15 베이즈 정리 확률과 통계 58

Q16 기하학적 확률 확률과 통계 62

STEP II

Q1 조합 게임의 전략 순수수학 66

Q2 삼각함수 적분과 대수적 적분 순수수학 70

Q3 리카티 미분방정식 순수수학 74

Q4 꼬인 위치의 직선과 최근접 거리 순수수학 78

Q5 극곡선과 곡선의 길이 순수수학 83

Q6 행렬 대수의 반례 순수수학 87

Q7 법 5에 대한 무한 강하법 순수수학 91
Q8 수학적 귀납법을 이용한 산술-기하 평균 부등식 순수수학 94
Q9 복소수의 편각 순수수학 98
Q10 이차형식과 이차곡선 순수수학 102
Q11 속도의 제곱에 비례하는 저항을 받는 운동 역학 106
Q12 마찰과 강체 역학 110
Q13 단순 조화 운동 역학 114
Q14 튀어 오름과 반발계수 역학 118
Q15 중심극한정리 확률과 통계 122
Q16 푸아송 과정 확률과 통계 126

STEP III

Q1 호의 길이와 부피 순수수학 130
Q2 변곡점과 극좌표 넓이 순수수학 133
Q3 행렬의 LU 분해 순수수학 137
Q4 급수의 합 순수수학 141
Q5 군과 사원수 순수수학 145
Q6 복소평면 위의 자취 순수수학 149
Q7 쌍곡선 함수 연립방정식 순수수학 153
Q8 3차원 공간의 평면과 직선 순수수학 157
Q9 제곱합 부등식 순수수학 161
Q10 행렬 변환 순수수학 165
Q11 짝힘과 관성모멘트 역학 169
Q12 탄성 끈과 에너지 역학 174
Q13 질량이 변하는 사슬 역학 178
Q14 연직 원운동 역학 182
Q15 대기 시간의 분포 확률과 통계 186
Q16 절단정규분포 확률과 통계 189

풀이

STEP I 1993, 문제 1

순수수학 • 주사위 눈의 합 세기

> **STEP I 1993, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q1

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.6 절 **이상한 주사위**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/strange-dice.html

핵심 아이디어

모든 면의 색이 서로 다르므로, 어떤 합을 던지는 하나의 "방법"은 각 주사위에서 면을 하나씩 고르는 것이다. 한 주사위에 k가 적힌 면이 a_k개, 다른 주사위에 b_k개 있다면, 합 n을 던지는 방법의 수는

$$N(n) = \sum_{i+j=n} a_i\, b_j.$$

이다. 둘째 부분에서는 표를 가장 작은 합부터 차례로 읽어 올라간다. 새로운 합이 나올 때마다 아직 만나지 않은 미지수가 하나나 둘만 새로 등장하므로, 면의 개수가 하나씩 강제로 정해지고, 그 과정에서 나타나는 몇 안 되는 갈래만 배제하면 된다.

풀이

합이 6인 경우

첫째 주사위에서 개수는 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$, $a_6 = 1$이다. 둘째 주사위에서는 $b_1 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 1$, $b_5 = 1$, $b_6 = 1$이다. 합이 6이 되려면 첫째 주사위가 1, 2, 3 중 하나를 보여야 한다. 6이 나오면 둘째 주사위에 0이 있어야 하기 때문이다. 따라서

$$N(6) = a_1b_5 + a_2b_4 + a_3b_3 = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7,$$

이고, 이것이 요구된 일곱 가지 방법이다.

새로운 번호 매기기 찾기

두 주사위를 P와 Q라 하자. $k = 1, \ldots, 6$에 대하여 P에는 k가 적힌 면이 a_k개, Q에는 b_k개 있다고 하자. 이들은 음이 아닌 정수이고

$$a_1 + \cdots + a_6 = b_1 + \cdots + b_6 = 6.$$

을 만족한다. (간단한 확인으로, 표의 항목을 모두 더하면 $36 = 6 \times 6$이 된다.)

합 2와 3. $N(2) = a_1 b_1 = 0$이므로 두 주사위가 모두 1을 가질 수는 없다. 그런데 $N(3) = a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2$이므로 어느 한 주사위에는 1이 있다. 그 주사위를 P라 하자. 그러면 $a_1 \geq 1$이고 $b_1 = 0$이며

$$N(3) = a_1 b_2 = 2, \qquad \text{따라서} \qquad (a_1, b_2) = (2, 1) \text{ 또는 } (1, 2).$$

$a_1 = 2$, $b_2 = 1$인 경우는 불가능하다. Q에는 1이 없으므로 $N(7) \geq a_1 b_6 = 2b_6$이고, $N(7) = 3$에서 $b_6 \leq 1$이다. 이 경우 Q에는 2가 적힌 면이 하나 있으며, 3이나 4가 없음을 확인해 보자.

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = 2b_3 + a_2 = 1$이므로 $2b_3 \leq 1$이고, 따라서 $b_3 = 0$, 이어서 $a_2 = 1$이다.
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 2b_4 + 0 + a_3 = 1$이므로 $b_4 = 0$이고 $a_3 = 1$이다.

따라서 Q에는 2가 하나 있고 1, 3, 4는 없으며, 나머지 다섯 면은 5와 6이다. 즉 $b_5 + b_6 = 5$이다. $b_6 \leq 1$이므로 $b_5 \geq 4$이고, 그러면

$$N(6) \geq a_1 b_5 = 2b_5 \geq 8,$$

이 되어 $N(6) = 4$에 모순(contradiction)이다. 따라서 이 경우는 일어날 수 없다.

따라서 $a_1 = 1$이고 $b_2 = 2$이다. 이제 $b_1 = 0$임을 기억하면서 표를 따라 올라간다.

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = b_3 + 2a_2 = 1$. $2a_2$는 짝수이므로 $a_2 = 0$, $b_3 = 1$이다.
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = b_4 + 0 + 2a_3 = 1$. 같은 방법으로 $a_3 = 0$, $b_4 = 1$이다.
- $N(6) = a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$.

지금까지 Q의 면 중 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 + 2 + 1 + 1 = 4$개가 정해졌으므로 $b_5 + b_6 = 2$이다. $b_5 = 4 - 2a_4$에서 b_5는 짝수이므로 $b_5 = 0$ 또는 $b_5 = 2$이다.

생각해 보기 $b_5 = 0$과 $b_5 = 2$ 중 어느 쪽인지 어떻게 결정할까?

다음 합을 이용한다. P에는 2나 3이 없고 Q에는 1이 없으므로

$$N(7) = a_1b_6 + a_4b_3 + a_5b_2 = b_6 + a_4 + 2a_5 = 3.$$

- $b_5 = 0$이면 $a_4 = 2$이고 $b_6 = 2$이다. 그러면 $N(7) \geq b_6 + a_4 = 4 > 3$이 되어 불가능하다.
- $b_5 = 2$이면 $a_4 = 1$이고 $b_6 = 0$이다. 그러면 $N(7) = 0 + 1 + 2a_5 = 3$에서 $a_5 = 1$이다. P의 면 중 $a_1 + a_4 + a_5 = 3$개가 정해졌으므로 $a_6 = 3$이다.

표에 의해 모든 것이 강제로 정해졌다.

$$P:\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6 \qquad\qquad Q:\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5.$$

표의 나머지 확인하기. 합 2부터 7까지만 사용했으므로, 이 번호 매기기가 나머지 항목도 만들어 내는지 확인해야 한다. $a_1 = a_4 = a_5 = 1, a_6 = 3$이고 $b_2 = 2, b_3 = b_4 = 1, b_5 = 2$일 때

$$\begin{aligned} N(8) &= a_4b_4 + a_5b_3 + a_6b_2 = 1 + 1 + 6 = 8, \\ N(9) &= a_4b_5 + a_5b_4 + a_6b_3 = 2 + 1 + 3 = 6, \\ N(10) &= a_5b_5 + a_6b_4 = 2 + 3 = 5, \\ N(11) &= a_6b_5 = 6, \\ N(12) &= a_6b_6 = 0. \end{aligned}$$

이 값들은 모두 표와 일치한다. 따라서 두 주사위는 반드시 $1,4,5,6,6,6$과 $2,2,3,4,5,5$로 번호가 매겨져야 하고, 이 번호 매기기는 실제로 표를 만들어 낸다. 어느 주사위를 어떻게 부르는지 바꾸는 것을 제외하면, 이것이 가능한 유일한 번호 매기기이다.

검산

- $1,4,5,6,6,6$과 $2,2,3,4,5,5$에 대한 6×6 합의 표를 그리고 각 합의 개수를 세어 보라. $0,2,1,1,4,3,8,6,5,6,0$이 나와야 한다.
- 두 주사위에 1부터 6까지의 수를 매기는 모든 방법(주사위 하나당 462개의 중복집합(multiset)이 있다)을 컴퓨터로 탐색하면 정확히 이 한 쌍만 찾아지며, 이로써 풀이가 유일함이 확인된다.

흔한 실수

- 표에 맞는 번호 매기기를 추측하고 거기서 멈추는 것. 문제는 추론을 요구하므로, 표가 번호 매기기를 강제한다는 것을 보여야 한다.

- $a_1 = 2, b_2 = 1$인 경우를 잊어버리거나, 이유 없이 배제하는 것.
- 작은 합들로부터 면의 개수를 정해 놓고, 합 8부터 12까지를 전혀 확인하지 않는 것.

STEP 너머

$N(n)$을 깔끔하게 정리하는 방법은 생성함수(generating function)를 쓰는 것이다. $p(x) = \sum a_k x^k$, $q(x) = \sum b_k x^k$라 하면 $p(x)q(x)$에서 x^n의 계수(coefficient)가 정확히 $N(n)$이므로, 이 문제는 주어진 다항식을 특정한 꼴의 두 조각으로 인수분해(factorise)하라는 것이다. 같은 아이디어로 **시커먼 주사위**(*Sicherman dice*) $1,2,2,3,3,4$와 $1,3,4,5,6,8$을 얻는데, 이 주사위들은 보통의 주사위 두 개와 같은 합의 분포(distribution)를 가진다. Herbert Wilf의 *generatingfunctionology*(생성함수론)는 이 방법을 생기 있게 소개하는 입문서이다.

풀이

STEP I 1993, 문제 2

순수수학 • 등비급수

> **STEP I 1993, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q2

핵심 아이디어

각 급수(series)는 등비수열(geometric progression)에서 일부 항을 뺀 것이다. $S_n(r)$의 지수(exponent)는 3의 배수가 아닌 수들이다. $T_n(r)$의 지수는 짝수이거나 또는 3의 배수인 수들이다. 따라서 각 합을 완전한 등비수열들의 조합으로 나타낸다. 즉 전체 등비수열을 택한 뒤 필요 없는 항을 빼거나, 두 등비수열을 더한 뒤 두 번 센 항을 뺀다.

풀이

짝수 거듭제곱의 합

좌변은 첫째항이 1, 공비(common ratio)가 r^2, 항의 개수가 $n+1$인 등비수열의 합이다. 이를 E라 하자. 그러면

$$E - r^2E = (1 + r^2 + \cdots + r^{2n}) - (r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n+2}) = 1 - r^{2n+2},$$

이다. 나머지 항은 모두 소거되기 때문이다. $|r| \neq 1$이면 $r^2 \neq 1$이므로 $1 - r^2$로 나눌 수 있다.

$$1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (실수 r에 대하여 조건 $r^2 \neq 1$은 정확히 $|r| \neq 1$과 같다.)

급수 $S_n(r)$

지수 $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \ldots, 3n-1$은 1부터 $3n-1$까지의 정수 중 3의 배수가 아닌 것들이다. 이들은 $k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $3k+1,\ 3k+2$의 쌍으로 묶인다. 따라서

$$S_n(r) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(r^{3k+1} + r^{3k+2}\right) = (r + r^2) \sum_{k=0}^{n-1} r^{3k}.$$

마지막 합은 공비가 r^3이고 항이 n개인 등비수열의 합이다. 실수 r에 대하여 $r \neq 1$이면 $r^3 \neq 1$이므로

$$S_n(r) = \frac{r(1+r)(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

이다. 같은 결과를 다른 방법으로 얻을 수도 있다. 거듭제곱 $r, r^2, \ldots, r^{3n}$을 모두 택한 뒤 지수가 3의 배수인 것을 빼면

$$S_n(r) = \frac{r(1-r^{3n})}{1-r} - \frac{r^3(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

이다. 극한(limit)을 구할 때 필요한 것은 이 두 번째 형태이다.

극한. $|r| < 1$이면 $n \to \infty$일 때 $|r^{3n}| = |r|^{3n} \to 0$이다. 따라서

$$S_n(r) \to \frac{r}{1-r} - \frac{r^3}{1-r^3}.$$

그런데 $\dfrac{r}{1-r} = \dfrac{1}{1-r} - 1$이고 $\dfrac{r^3}{1-r^3} = \dfrac{1}{1-r^3} - 1$이다. 두 개의 -1이 상쇄되어

$$S_n(r) \to \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r^3},$$

이 남으므로 원하는 결과를 얻는다.

급수 $T_n(r)$

지수 $0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots, 6n$은 0부터 $6n$까지의 정수 중 짝수이거나 3으로 나누어떨어지는(또는 둘 다인) 것들이다.

> **생각해 보기** 짝수 거듭제곱과 지수가 3의 배수인 거듭제곱을 더하면, 어떤 항을 두 번 센 것인가?

지수가 짝수이면서 동시에 3의 배수인 것은 정확히 그 지수가 6의 배수일 때이다. 그러므로 포함-배제(inclusion–exclusion)를 사용한다. 즉 짝수 거듭제곱을 더하고, 지수가 3의 배수인 거듭제곱을 더한 뒤, 지수가 6의 배수인 거듭제곱을 뺀다. $6n$까지는 다음이 있다.

- 짝수 거듭제곱 $r^0, r^2, \ldots, r^{6n}$: 공비가 r^2이고 항이 $3n+1$개인 등비수열을 이룬다.

- 지수가 3의 배수인 거듭제곱 $r^0, r^3, \ldots, r^{6n}$: 공비가 r^3이고 항이 $2n+1$개인 등비수열을 이룬다.
- 지수가 6의 배수인 거듭제곱 $r^0, r^6, \ldots, r^{6n}$: 공비가 r^6이고 항이 $n+1$개인 등비수열을 이룬다.

첫 번째 결과에서 n을 $3n$으로 바꾸고, 공비가 r^3과 r^6인 경우에도 같은 논증을 적용하면

$$\mathrm{T}_n(r) = \frac{1-r^{6n+2}}{1-r^2} + \frac{1-r^{6n+3}}{1-r^3} - \frac{1-r^{6n+6}}{1-r^6}.$$

을 얻는다. $|r| \neq 1$이므로 어느 분모도 영이 되지 않는다. 문제에서 여기서는 $|r| \neq 1$을 요구하고 S_n에 대해서는 $r \neq 1$만 요구하는 까닭이 바로 이것이다. $r = -1$이면 $1-r^2$와 $1-r^6$이 영이 된다.

극한. $|r| < 1$이면 r^{6n+2}, r^{6n+3}, r^{6n+6}은 모두 0으로 수렴(converge)한다. 따라서

$$\mathrm{T}_n(r) \to \frac{1}{1-r^2} + \frac{1}{1-r^3} - \frac{1}{1-r^6}.$$

이다. $1-r^6 = (1-r^2)(1+r^2+r^4) = (1-r^3)(1+r^3)$을 이용하여 공통분모 $1-r^6$으로 통분하면 다음과 같이 정리된다.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n(r) = \frac{(1+r^2+r^4)+(1+r^3)-1}{1-r^6} = \frac{1+r^2+r^3+r^4}{1-r^6}.$$

$r > 1, r = 1, r = -1$인 경우

먼저 항의 개수를 센다. 연속한 여섯 지수 $6k, 6k+1, \ldots, 6k+5$로 이루어진 각 묶음에서 짝수이거나 3으로 나누어떨어지는 것은 $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$의 네 개이다. 묶음 $k = 0, \ldots, n-1$이 $6n-1$까지의 지수를 모두 포함하고, 마지막 항은 r^{6n}이다. 따라서 $\mathrm{T}_n(r)$의 항은 $4n+1$개이다.

- $r > 1$: 모든 항 r^e가 $r^e \geq 1$을 만족하므로 $\mathrm{T}_n(r) \geq 4n+1$이고, 따라서 $\mathrm{T}_n(r) \to \infty$이다.
- $r = 1$: 모든 항이 1이므로 $\mathrm{T}_n(1) = 4n+1 \to \infty$이다. 이 경우에는 분모가 영이 되므로 공식이 성립하지 않는다.
- $r = -1$: $(-1)^e$는 짝수 e에 대해서는 $+1$이고 홀수 e에 대해서는 -1이다. 각 묶음에서 지수 $6k, 6k+2, 6k+4$는 짝수이고 $6k+3$은 홀수이므로, 각 묶음이 기여하는 값은 $1+1-1+1=2$이다. 따라서

$$\mathrm{T}_n(-1) = 2n+1 \to \infty.$$

세 경우 모두 $\mathrm{T}_n(r)$은 $+\infty$로 발산(diverge)한다. $r = -1$일 때에도 발산한다는 점에 주의하자. 지수가 3의 홀수 배인 항들이 짝수 지수의 항들을 충분히 상쇄하지 못하기 때문이다. 단지 진동하기만 하는 $1-1+1-\cdots$와 같은 단순한 교대급수(alternating series)와 대조해 보라.

검산

- S_n의 공식에 $n = 1$을 대입하면 $\frac{r(1+r)(1-r^3)}{1-r^3} = r + r^2$이 되어 올바르다.
- T_n의 극한에 $r = \frac{1}{2}$를 대입한다. 공식은 $\frac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{64}} = \frac{92}{63} \approx 1.4603$을 주며, $T_n(\frac{1}{2})$의 항을 수백 개 직접 더해도 같은 값이 나온다.
- $r \to 1^-$일 때 T_n의 극한은 $\frac{4}{6(1-r)} = \frac{2}{3(1-r)}$처럼 행동한다. 이는 거듭제곱 여섯 개 중 네 개가 들어 있어서 전체 급수 $\frac{1}{1-r}$의 약 3분의 2가 된다는 사실과 일치한다.

흔한 실수

- 지수가 6의 배수인 항을 빼는 것을 잊는 것. 그러면 $1, r^6, r^{12}, \ldots$를 두 번 세게 된다.
- 각 등비수열의 항의 개수를 잘못 세는 것. 0부터 $6n$까지의 짝수 지수는 $3n$개가 아니라 $3n+1$개이다.
- 한 묶음의 항을 실제로 더해 보지 않고 $T_n(-1)$이 교대급수처럼 진동한다고 가정하는 것.

STEP 너머

두 집합의 원소 개수를 더한 뒤 교집합의 원소 개수를 빼서 합집합의 항을 세는 방법을 **포함-배제 원리**라 한다. 이를 생성함수(generating function)와 결합하면 조합론(combinatorics)과 정수론(number theory)의 표준적인 도구가 된다. 우리가 구한 극한은 6과 공약수를 갖는 음이 아닌 정수들의 생성함수이다. 같은 체(sieve)의 아이디어를 모든 소수(prime)에 적용하면 리만(Riemann) 제타 함수(zeta function)에 대한 오일러(Euler)의 곱 공식을 얻는다. 대학 해석학(analysis)에서는 "$|r| < 1$일 때 $r^n \to 0$"이라는 단계를 엄밀하게 다루고, 무한급수를 언제 이와 같이 재배열할 수 있는지를 묻는다. Abbott의 *Understanding Analysis*가 이 내용을 잘 다룬다.

풀이

STEP I 1993, 문제 3

순수수학 • 디오판토스 방정식

> **STEP I 1993, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q3

핵심 아이디어

$p \le q \le r$이므로 역수(reciprocal) $\frac{1}{p}$가 세 항 가운데 **가장 크다**. 따라서 합은 많아야 $\frac{3}{p}$이고, 이로부터 p의 값이 두어 개로 좁혀진다. p를 정하고 나면 남은 두 항에 같은 방법을 써서 q의 범위를 제한할 수 있고, 그러면 r은 저절로 결정된다. 핵심은 순서 관계를 이용하여 미지수가 세 개인 방정식(또는 부등식(inequality))을 짧은 유한 개의 경우 확인으로 바꾸는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$1 \le p \le q \le r$이므로 $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}$이다. 따라서

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{3}{p},$$

이고, 이로부터 $p \le 3$을 얻는다. 또한 $p \neq 1$인데, $p = 1$이면 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$이 되어 양수 q, r에 대해 불가능하기 때문이다. 따라서 $p = 2$ 또는 $p = 3$이다.

경우 $p = 2$. 이제 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$이다. $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q}$이므로

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{2}{q} \quad \Longrightarrow \quad q \le 4,$$

이고, $\frac{1}{r} > 0$이므로 $\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$이어야 한다. 즉 $q \ge 3$이다.

- $q = 3$: $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$이므로 $r = 6$이다.

- $q = 4$: $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$이므로 $r = 4$이다.

경우 $p = 3$. 이제 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{2}{3} \leq \frac{2}{q}$이므로 $q \leq 3$이다. $q \geq p = 3$과 함께 생각하면 $q = 3$일 수밖에 없고, 그러면 $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$이므로 $r = 3$이다.

모든 경우를 다 살펴보았으므로, 해는

$$(p, q, r) = (2, 3, 6), \quad (2, 4, 4), \quad (3, 3, 3),$$

뿐이고 다른 해는 없다.

소문항 (ii)

$p = 1$이면 모든 q와 r에 대해 합이 $1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$이다. 이것이 문제에서 이미 알려 준 해들이다. (순서 조건 $p \leq q \leq r$에 따르면 이 해들은 $1 \leq n \leq m$인 $q = n, r = m$이다. 문제에서 m과 n 사이에 적어 놓은 부등호는 방향이 거꾸로이지만 상관없다. $p = 1$은 어떤 q와 r에 대해서도 성립하기 때문이다.) 따라서 $p \geq 2$인 해를 찾는다.

앞에서와 마찬가지로 $\frac{1}{p}$가 가장 큰 항이므로

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{3}{p} \quad \Longrightarrow \quad p < 3.$$

$p \geq 2$와 함께 생각하면 $p = 2$이다. 이제 다음이 성립해야 한다.

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}.$$

생각해 보기 왜 이번에는 q의 범위에서 부등호가 엄격한 부등호가 되며, 그것이 중요한가?

$\frac{1}{r} \leq \frac{1}{q}$이므로 $\frac{1}{2} < \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{2}{q}$이고, 따라서 $q < 4$이다. $q = 4$를 배제하는 것이 바로 이 엄격한 부등호이다. (소문항 (i)에서는 $q = 4$가 허용되었고, 등호가 성립하는 경우인 $(2, 4, 4)$를 주었다.) $q \geq p = 2$와 함께 생각하면 $q = 2$ 또는 $q = 3$이다.

- $q = 2$: 합은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{r} > 1$이고, 이는 **모든** r에 대해 성립한다. 따라서 $r \geq 2$인 모든 정수 r에 대해 $(2, 2, r)$는 해이다.
- $q = 3$: $\frac{1}{r} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$이어야 하므로 $r < 6$이다. $r \geq q = 3$과 함께 생각하면 $r = 3, 4, 5$이다.

따라서 $p = 1$인 해들을 제외하면, 해는

$$(p, q, r) = (2, 2, r) \text{ , 정수} r \geq 2, \qquad (2, 3, 3), \quad (2, 3, 4), \quad (2, 3, 5).$$

이다. 위의 각 단계는 모두 필연적이었으므로 다른 해는 없다.

검산

직접 대입해 본다. 예를 들어 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}>1$이지만 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$로 정확히 1이다. 이를 보면 왜 $(2,3,5)$가 $q=3$인 해들 가운데 마지막이고, $(2,3,6)$이 소문항 (i)에서 나온 경계의 경우인지 알 수 있다. 마찬가지로 $(2,4,4)$는 합이 정확히 1이므로, $p=2, q=4$인 것은 하나도 소문항 (ii)의 해가 되지 못한다. $1\le p\le q\le r<400$인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색해 보면 두 목록이 정확히 맞음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 무한히 많은 해 $(2,2,r)$를 빠뜨리는 것. $p=q=2$이면 처음 두 항만으로 이미 합이 1이 된다.
- 소문항 (ii)에서 $p<3$ 대신 $p\le 3$이라고 쓴 뒤 $p=3$인 경우(합이 많아야 1이다)에 시간을 낭비하는 것.
- 모든 경우를 확인했음을 보이지 않고 해의 목록만 적는 것. "다른 해가 없다"는 부분이 배점의 절반이다.

STEP 너머

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$의 해는 각의 크기가 $\frac{\pi}{p},\frac{\pi}{q},\frac{\pi}{r}$인 삼각형이 구면(sphere) 위에 존재하는 세 수의 쌍과 정확히 일치한다. 이들은 3차원의 유한 대칭군(symmetry group)에 대응한다. $(2,2,r)$는 이면체군(dihedral group), $(2,3,3)$은 정사면체군(tetrahedral group), $(2,3,4)$는 정팔면체군(octahedral group), $(2,3,5)$는 정이십면체군(icosahedral group)에 해당한다. 소문항 (i)의 해는 평면의 세 가지 정규 쪽매맞춤(regular tiling)을 준다. 이와 같이 정수 범위에서 푸는 방정식을 디오판토스 방정식(Diophantine equation)이라 한다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 좋은 입문서이고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 대칭군을 다룬다.

풀이

STEP I 1993, 문제 4

순수수학 • 치환적분

STEP I 1993, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s1-q4

핵심 아이디어

치환(substitution) $t = \pi - x$는 구간(interval) $[0, \pi]$를 자기 자신으로 뒤집어 옮기며, $\sin(\pi - t) = \sin t$이므로 $\sin x$를 바꾸지 않는다. 따라서 다루기 까다로운 인수 x는 $\pi - t$로 바뀌고, 우리가 구하려는 적분이 우변에 음의 부호를 달고 다시 나타난다. 그래서 이 적분에 대한 방정식을 풀 수 있다. 그 뒤에 나오는 적분들에서 할 일은 주로 $1 + \cos^2 x$를 $\sin x$로 나타내는 것이다. 구간 $[\pi, 2\pi]$에서는 π만큼 평행이동하면 다시 $[0, \pi]$로 돌아온다.

풀이

일반적인 결과

$I = \int_0^\pi x\, \mathrm{f}(\sin x)\, \mathrm{d}x$라 하고 $t = \pi - x$로 놓는다. 그러면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$이다. $x = 0$일 때 $t = \pi$이고, $x = \pi$일 때 $t = 0$이다. 또한 $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$이다. 따라서

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t)\, \mathrm{f}(\sin t)\, (-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t)\, \mathrm{f}(\sin t)\, \mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\, \mathrm{d}t - \int_0^\pi t\, \mathrm{f}(\sin t)\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

적분변수(variable of integration)의 이름은 상관이 없으므로 마지막 적분은 다시 I이다. 그러므로 $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\, \mathrm{d}t$이고, 이로부터

$$\int_0^\pi x\, \mathrm{f}(\sin x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\, \mathrm{d}x,$$

를 얻어 원하는 결과가 증명된다. (적분이 존재해야 하는데, 예를 들어 f가 $[-1, 1]$에서 연속(continuous)이면 된다.)

구간 $[0, \pi]$에서의 적분

생각해 보기 피적분함수(integrand)에는 $\sin x$뿐 아니라 $\cos^2 x$도 들어 있다. 정말 $x\,\mathrm{f}(\sin x)$ 꼴일까?

그렇다. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이므로 $1 + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$이고, 따라서

$$\frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = x\,\mathrm{f}(\sin x) \qquad \text{단,} \qquad \mathrm{f}(s) = \frac{s}{2 - s^2},$$

이며 f는 $[-1, 1]$에서 연속이다. 일반적인 결과에 의해

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

$\sin x$는 $\cos x$의 도함수(derivative)에 음의 부호를 붙인 것이므로 남은 적분은 쉽다. $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$로 치환하면

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \Big[\arctan u\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

그러므로

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

구간 $[0, 2\pi]$에서의 적분

일반적인 결과는 $[0, \pi]$에만 적용되므로 적분 구간을 나눈다.

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}.$$

생각해 보기 $\int_\pi^{2\pi}$를 어떻게 $[0, \pi]$에서의 적분으로 되돌릴 수 있을까?

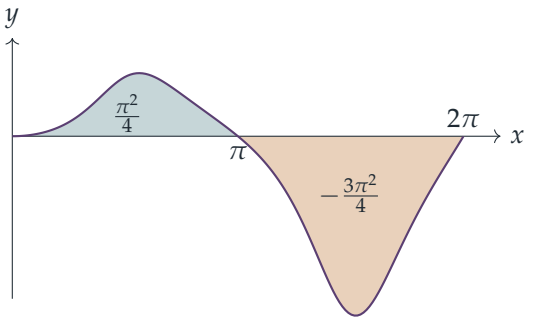
π만큼 평행이동한다. $x = u + \pi$로 놓으면 u는 0부터 π까지 변한다. 이때 $\sin x = -\sin u$이고 $\cos x = -\cos u$이므로 $\cos^2 x = \cos^2 u$이다. 따라서

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{2\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{(u + \pi)(-\sin u)}{1 + \cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^\pi \frac{u \sin u}{1 + \cos^2 u}\,\mathrm{d}u - \pi \int_0^\pi \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{\pi^2}{4} - \pi \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi^2}{4},
\end{aligned}$$

이며, 여기서 앞 단계의 두 결과를 모두 사용하였다. 두 부분을 더하면

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

그래프를 보면 답이 음수인 이유를 알 수 있다. $[\pi, 2\pi]$에서는 인수 $\sin x$가 음수이고, 그곳에서 인수 x는 $[0, \pi]$에서보다 크다. 그래서 축 아래쪽 넓이가 축 위쪽 넓이보다 크다.



검산

- $f \equiv 1$로 두면 일반적인 결과는 $\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}$를 주는데, 이는 옳다.
- 피적분함수는 $(0, \pi)$에서 양수이므로 첫 번째 답은 양수여야 하며, 실제로 $\pi^2/4 \approx 2.467$는 양수이다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 첫 번째 적분은 2.4674011, 두 번째 적분은 -4.9348022로, 각각 $\pi^2/4$와 $-\pi^2/2$에 일치한다.
- 일반적인 항등식도 임의로 고른 여러 f에 대해 수치적으로 확인된다.

흔한 실수

- 일반적인 결과를 $[0, 2\pi]$에 그대로 적용하는 것. 이 결과는 반사 $x \mapsto \pi - x$가 구간을 자기 자신으로 옮긴다는 사실에 의존하며, $[0, 2\pi]$에 적용하면 틀린 답 $\frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$이 나온다. (그 구간에서 올바른 반사는 $x \mapsto 2\pi - x$이고, 이때 $\sin x$의 부호가 바뀐다.)
- $dx = -dt$에서 나오는 음의 부호를 빠뜨리거나, 적분 구간의 위끝과 아래끝을 다시 바꾸는 것을 잊는 것.
- $\arctan(-1) = 3\pi/4$라고 쓰는 것. 역탄젠트(arctangent)의 값은 $(-\pi/2, \pi/2)$에 속하므로 $\arctan(-1) = -\pi/4$이다.

STEP 너머

여기서 쓴 요령은 피적분함수가 거의 따르는 정의역의 대칭(symmetry)을 이용하는 것이다. 즉 x를 $\pi - x$로 바꾸고 두 형태의 적분을 평균한다. 같은 아이디어로 적분을 직접 계산하지 않고도 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$를 얻을 수 있다. 대학에서는 이와 같은 대칭 논

법이 해석학(analysis) 곳곳과 푸리에 급수(Fourier series)에서 등장하는데, 푸리에 급수에서는 함수의 홀짝성(parity)이 어떤 항이 살아남는지를 결정한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 종류의 치환을 연습할 수 있는 STEP 스타일 문제가 더 있고, Abbott의 *Understanding Analysis*는 변수 변환 공식(change-of-variables rule)을 엄밀하게 다룬다.

풀이

STEP I 1993, 문제 5

순수수학 • 절댓값과 삼각부등식

STEP I 1993, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s1-q5

핵심 아이디어

모든 것은 삼각부등식(triangle inequality)에 바탕을 둔다. 합의 길이는 길이들의 합보다 크지 않다. 이를 항별로 적용하면 다항식(polynomial)이 $|z|$에 관한 등비급수(geometric series)로 위에서 눌리고, $|z| \leq \frac{1}{2}$이면 그 급수는 언제나 1보다 확실히 작다. 근(root)이라면 다항식 부분이 -1과 같아야 하는데, -1의 절댓값(modulus)은 정확히 1이다. 따라서 근은 원판(disc) $|z| \leq \frac{1}{2}$ 안에 있을 수 없다.

풀이

절댓값과 곱의 법칙

x, y가 실수일 때 $z = x + \mathrm{i}y$의 절댓값은 원점에서 점 (x, y)까지의 거리이다.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(음이 아닌 제곱근)}.$$

a, b, c, d가 실수일 때 $z_1 = a + \mathrm{i}b, z_2 = c + \mathrm{i}d$라 하자. 그러면 $z_1 z_2 = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$이므로

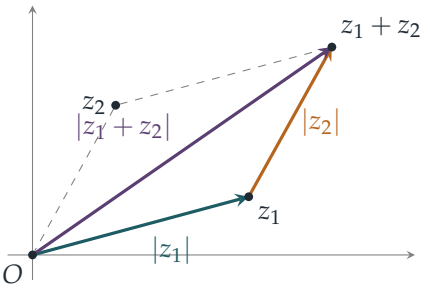
$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 |z_2|^2. \end{aligned}$$

$|z_1 z_2|$와 $|z_1||z_2|$는 모두 음이 아니므로, 양변에 제곱근을 취하면 요구한 대로 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$를 얻는다.

삼각부등식

복소평면(Argand diagram)에서 O를 원점, A를 점 z_1, C를 점 $z_1 + z_2$라 하자. 그러면 $\overrightarrow{AC}$는 z_2를 나타내고(O에서 z_2로 가는 벡터와 같은 벡터이다), 따라서 OAC는 세 변의 길이가 다음과 같은 삼각형이다.

$$OA = |z_1|, \qquad AC = |z_2|, \qquad OC = |z_1 + z_2|.$$



두 점 사이의 가장 짧은 경로는 직선이다. O에서 C로 곧장 가는 길은 A를 거쳐 가는 길보다 길지 않다. 따라서

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

이고, 등호는 O, A, C가 한 직선 위에 있고 A가 그 사이에 있을 때, 즉 z_1과 z_2가 같은 방향을 가리킬 때(또는 둘 중 하나가 0일 때) 정확히 성립한다.

대수적인 방법을 선호한다면, 켤레복소수(conjugate)를 $\bar{z}$로 나타낼 때

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

이다. 복소수의 실수부(real part)는 그 절댓값보다 크지 않고, 곱의 법칙에 의해 $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$이기 때문이다.

이 부등식을 거듭 적용하면(항의 개수에 대한 간단한 수학적 귀납법(induction)으로) 임의의 복소수 $w_1, \ldots, w_n$에 대하여

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \leq |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|$$

를 얻는다.

다항식의 상계

각 j에 대하여 $|a_j| \le 1$이고 $|z| \le \frac{1}{2}$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}\left|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z\right| &\le |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| \\ &\le |z|^n + |z|^{n-1} + \cdots + |z| \\ &\le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \tfrac{1}{2} \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &< 1.\end{aligned}$$

첫째 줄은 n개 항에 대한 삼각부등식과 곱의 법칙(거듭 적용하여 $|a_k z^k| = |a_k||z|^k$)을 쓴 것이다. 둘째 줄은 $|a_j| \le 1$을, 셋째 줄은 $0 \le |z| \le \frac{1}{2}$를 쓰고, 넷째 줄은 유한 등비급수의 합을 구한 것이다. 이것이 요구한 엄격한 부등식이다.

> **생각해 보기** 엄격한 부등식은 어디에서 오는가? 위의 각 단계는 모두 "$\le$"일 뿐이다.

그것은 유한 등비급수에서 온다. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$은 1보다 정확히 $\frac{1}{2^n} > 0$만큼 모자란다. 바로 이 차이가 다음 결론을 끌어내는 데 필요하다.

근

(문제지의 마지막 줄에는 $|x| > \frac{1}{2}$라고 되어 있는데, 지금 다루는 근이 w이므로 이는 분명히 $|w| > \frac{1}{2}$의 오식이다.)

w를 근이라 하면

$$a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \cdots + a_1 w = -1, \qquad \text{따라서} \qquad |a_n w^n + \cdots + a_1 w| = |-1| = 1.$$

귀류법(proof by contradiction)으로, $|w| \le \frac{1}{2}$라고 가정하자. 그러면 앞 부분에 $z = w$를 대입하여 $|a_n w^n + \cdots + a_1 w| < 1$을 얻는데, 이는 절댓값이 정확히 1이라는 사실에 모순이다. 따라서 모든 근은 $|w| > \frac{1}{2}$를 만족한다.

검산

- 이 상계는 극한에서 도달된다. 모든 $a_j = 1$이고 $z = \frac{1}{2}$이면 좌변은 정확히 $1 - 2^{-n}$이다.
- 근에 관한 결과도 더 이상 개선할 수 없다. 모든 $a_j = -1$로 두면 $1 - z - z^2 - \cdots - z^n = 0$이 되고, 그 양의 근은 $n = 1$일 때 1, $n = 2$일 때 0.618(황금비(golden ratio)의 켤레), $n = 5$일 때 0.5087, $n = 10$일 때 0.50025이다. 항상 $\frac{1}{2}$보다 크지만 $\frac{1}{2}$에 가까워진다.

- 수치적으로, 단위원판 안의 a_j와 반지름 $\frac{1}{2}$인 원판 안의 z를 무작위로 50 000번 골라 시험했고(찾은 최댓값은 0.79), 이러한 무작위 다항식 2000개의 모든 근을 구했다. 근의 절댓값 중 가장 작은 것은 0.562였다.

흔한 실수

- $|a_1z + \cdots + a_nz^n| = |a_1||z| + \cdots + |a_n||z|^n$이라고 쓰는 것. 삼각부등식은 "$\leq$"만 보장한다.
- 무한급수 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$을 쓰는 것. 이렇게 하면 ≤ 1밖에 얻지 못해 결론을 끌어낼 수 없다. 유한합을 써야 한다.
- $|z^k| = |z|^k$의 근거를 대지 않는 것. 이는 방금 증명한 곱의 법칙에서 나온다.

STEP 너머

이것은 수치적 근 찾기의 바탕이 되는 다항식 근의 상계에 관한 결과들의 아주 간단한 형태이다. 코시(Cauchy)의 상계는 다항식의 모든 근을, 반지름이 계수의 크기에만 의존하는 원판 안에 가두며, 같은 "지배적인 항이 이긴다"는 논법이 복소해석학(complex analysis)의 루셰(Rouché) 정리를 움직인다. 삼각부등식 자체는 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심에 있는 추상적인 거리 개념인 **거리**(metric)를 정의하는 성질이다. 이 모든 내용을 아름답고 기하학적으로 다룬 책으로 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 1993, 문제 6

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 1993, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q6

핵심 아이디어

모든 것은 $N = 10^{100}$일 때 x^N이 어떻게 행동하는지에 달려 있다. $|x| < 1$이면, 비록 1보다 아주 조금 작을 뿐이더라도 x^N은 상상할 수 없을 만큼 작다. $|x| > 1$이면, 비록 1보다 아주 조금 클 뿐이더라도 상상할 수 없을 만큼 크다. 그리고 $x = \pm 1$에서는 (N이 짝수이므로) 정확히 1이다. 따라서 분수 $x^N/(1+x^N)$은 스위치처럼 행동한다. 즉 $(-1, 1)$ 안에서는 0이고 바깥에서는 1이다. h에 대해서는 정반대의 아이디어가 쓰인다. $10^{-N}x$가 너무나 작아서 sin이 그 인수와 구별되지 않는다.

풀이

이 풀이 전체에서

$$s(x) = \frac{x^N}{1+x^N} = \frac{1}{1+x^{-N}} \quad (x \neq 0), \qquad s(0) = 0,$$

으로 두면, $\mathrm{f}(x) = 2 + s(x)$이고 $\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$이다.

f의 특징

- **대칭성과 치역.** N이 짝수이므로 $x^N = (-x)^N \geq 0$이다. 따라서 f는 우함수(even function)이고, $0 \leq s(x) < 1$로부터 $2 \leq \mathrm{f}(x) < 3$을 얻는다.
- **$|x| < 1$에서의 높이 $y = 2$.** 여기서는 $x^N \to 0$이 엄청난 속도로 일어난다. 예를 들어 $0.99^N = 10^{N \log_{10} 0.99} \approx 10^{-4.4 \times 10^{97}}$이다. 따라서 $s(x) \approx x^N$은 그래프로 나타낼 수 있는 어떤 크기보다도 훨씬 작고, 눈에 보이는 어떤 정확도로도 $\mathrm{f}(x) = 2$이다. 정확히는 $\mathrm{f}(0) = 2$이다.

- $|x| > 1$에서의 높이 $y = 3$. 이제 x^{-N}도 마찬가지로 아주 작으므로, $s(x) = 1/(1 + x^{-N})$은 눈에 보이는 어떤 정확도로도 1이고 $\mathrm{f}(x) = 3$이며, 이 값에 아래쪽에서 접근한다. (실제로 직선 $y = 3$은 $|x| \to \infty$일 때의 점근선(asymptote)이다.)
- $x = \pm 1$에서의 도약. $x = \pm 1$에서는 $x^N = 1$이므로 $\mathrm{f}(\pm 1) = \frac{5}{2}$로, 딱 중간 높이이다. 이 함수는 연속(continuous)이고 미분가능(differentiable)하므로, 스케치에 그린 수직 선분은 실제로는 극도로 가파른 오르막이다. 미분하면

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{Nx^{N-1}}{(1+x^N)^2}, \qquad \mathrm{f}'(1) = \frac{N}{4} = 2.5 \times 10^{99}.$$

? **생각해 보기** 그래프의 "수직" 부분은 얼마나 좁을까?

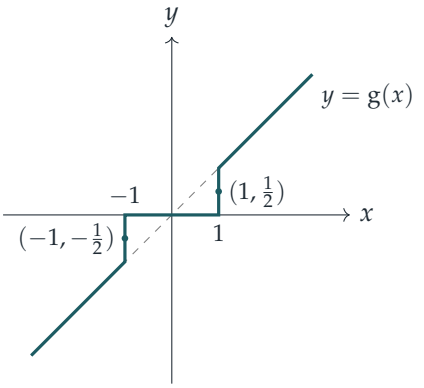
δ가 작을 때 $x = 1 + \delta$로 두면 $x^N = \mathrm{e}^{N\ln(1+\delta)} \approx \mathrm{e}^{N\delta}$이고 $s(x) \approx 1/(1 + \mathrm{e}^{-N\delta})$이다. $N\delta$가 $-\ln 99$에서 $\ln 99$까지 변하는 동안 이 값은 0.01에서 0.99까지 올라간다. 즉 폭이 약 9×10^{-100}인 구간에서 이 오르막이 일어난다. 어떤 그림에서든 이것은 수직선이다. 대칭성에 의해 $x = -1$에서도 같은 일이 일어난다. (x^{N-1}의 부호는 x의 부호와 같으므로, f'의 부호로부터 f가 $x > 0$에서 증가하고 $x < 0$에서 감소한다는 것도 알 수 있다.)

g의 그래프

$\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$이므로, 이제 스위치 s가 직선 $y = x$에 곱해진다.

- $|x| < 1$이면 $s(x)$는 무시할 수 있을 만큼 작으므로, 눈에 보이는 어떤 정확도로도 $\mathrm{g}(x) = 0$이다($x = 0$에서는 정확히 0이다).
- $|x| > 1$이면 $s(x)$는 눈에 보이는 어떤 정확도로도 1이므로 $\mathrm{g}(x) = x$이다. 정확히 말하면 $x - \mathrm{g}(x) = \dfrac{x}{1+x^N}$이고, 이는 무시할 수 있다.
- $x = \pm 1$에서는 $\mathrm{g}(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}$로, 각 도약의 중간 높이이다.

s가 우함수이고 x가 기함수이므로 g는 기함수(odd function)이다. 또한 증가함수이다. $\mathrm{g}'(x) = s(x) + x\,s'(x)$이고, x와 $s'(x)$의 부호가 같으므로 두 항 모두 ≥ 0이기 때문이다. $x = 1$에서 기울기는 $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + \frac{N}{4}$이므로 여기서도 겉보기에 수직인 도약이 나타나는데, 이번에는 $x = 1$에서 0부터 1까지, 그리고 $x = -1$에서 -1부터 0까지 올라간다.



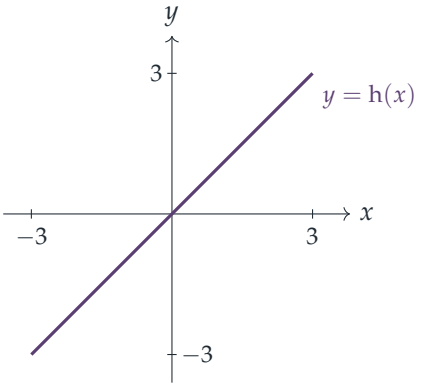
$[-3,3]$에서 그린 g의 스케치: $(-1,1)$에서는 값이 0이고 바깥에서는 직선 $y=x$(점선)를 따르며, 이 둘은 $(\pm1,\pm\frac{1}{2})$를 지나는 거의 수직인 오르막으로 이어진다.

h의 그래프

$u=10^{-N}x$라 하자. $|x|\le 3$이면 $|u|\le 3\times 10^{-N}$이고, 이는 엄청나게 작다. 작은 u에 대해 $\sin u = u-\frac{u^3}{6}+\cdots$이고, $u>0$이면 부등식 $u-\frac{u^3}{6}\le \sin u\le u$가 성립한다. 여기에 10^N을 곱하면 $0\le x\le 3$에 대해

$$0\le x-\mathrm{h}(x)\le \frac{x^3}{6}10^{-2N}\le \frac{27}{6}\times 10^{-2N},$$

이고, h는 기함수이므로 $-3\le x\le 0$에서도 부호만 반대로 하여 같은 결과가 성립한다. 따라서 $[-3,3]$에서 h의 그래프는 상상할 수 있는 어떤 정확도로도 원점을 지나는 직선 $y=x$이며, $x>0$에서는 그 직선보다 아주 조금 아래에, $x<0$에서는 아주 조금 위에 놓인다. 기울기는 $\mathrm{h}'(x)=\cos(10^{-N}x)$이고, 이는 약 10^{-2N} 이내의 오차로 1이다.



사인 곡선은 여전히 존재하지만 엄청나게 늘어나 있다. 첫 번째 극댓값은 $x=\frac{\pi}{2}\times 10^N$에서 나타나고 그 높이는 10^N이므로, 창 $[-3,3]$에는 원점을 지나는, 직선처럼 보이는 아주 작은 조각만 보인다.

검산

- $s = 1/(1+\mathrm{e}^{-N\ln|x|})$로 직접 계산하면, $s(0.999)$와 $s(1.001)$은 기계 정밀도(machine precision) 내에서 각각 0과 1이고, $s(\pm1) = \frac{1}{2}$는 정확한 값이다.
- $N = 10$이나 200처럼 적당한 크기의 N으로 수치 미분을 하면 $s'(1) = N/4$와 $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + N/4$가 확인되고, 촘촘한 격자에서 계산하면 g가 $[-3,3]$에서 증가함을 알 수 있다. N을 키우면 계단이 더 날카로워질 뿐이다.
- 임의의 $x \in [-3,3]$에 대해 $10^{100}\sin(10^{-100}x)$는 배정밀도(double precision)의 모든 자릿수까지 x와 일치하고, 규모를 줄인 유사한 함수 $M\sin(x/M)$은 $M = 1000$일 때 부등식 $0 < x - M\sin(x/M) \le x^3/(6M^2)$을 만족한다.

흔한 실수

- N이 짝수라는 사실을 잊는 것: $x < -1$에서 x^N은 거대한 **양수**이므로, 그곳에서 f는 다른 값이 아니라 3이다.
- 계단을 진짜 불연속(discontinuity)으로 설명하는 것. 세 함수는 모두 연속이며 (사실 미분가능하며), 오르막이 너무 가팔라서 그릴 수 없을 뿐이다.
- h를 진동하는 그래프로 다루는 것. $[-3,3]$에서는 극점 근처에도 전혀 가지 않는다.

STEP 너머

함수 $x^n/(1+x^n)$은 짝수 값을 따라 $n \to \infty$로 갈 때, $(-1,1)$ 안에서는 0, ±1에서는 $\frac{1}{2}$, 바깥에서는 1인 계단함수(step function)로 **점별** 수렴(pointwise convergence)한다. 즉 매끄러운 함수들의 수열인데 그 극한은 불연속이다. 이는 해석학자들에게 왜 **균등** 수렴(uniform convergence)이 필요한지 보여 주는 고전적인 예이며, 균등 수렴은 실해석학(real analysis) 첫 강의의 핵심 개념이다. 함수 h는 그 반대편을 보여 준다. $M \to \infty$일 때 유계 구간에서 $M\sin(x/M) \to x$로 균등 수렴한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 두 개념을 모두 매우 읽기 쉽게 다룬다.

풀이

STEP I 1993, 문제 7

순수수학 • 삼차식의 근

> **STEP I 1993, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q7

핵심 아이디어

최고차항 계수(leading coefficient)가 양수인 삼차함수(cubic)는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 올라가므로, 근에 관한 모든 것은 두 극점(turning point)에서 결정된다. 곡선의 극댓값(local maximum)이 축보다 위에 있고 극솟값(local minimum)이 축보다 아래에 있으면 그래프는 축과 반드시 세 번 만나고, 그렇지 않으면 그보다 적게 만난다. $x^3 + ax^2 + b$의 경우에는 도함수(derivative)가 인수분해되므로 극점을 정확히 구하기 쉽다.

풀이

극점

$\mathrm{f}(x) = x^3 + Ax^2 + B$에 대하여

$$\mathrm{f}'(x) = 3x^2 + 2Ax = x(3x + 2A),$$

이므로 임계점(stationary point)은 $x = 0$과 $x = -\frac{2A}{3}$이다. 이 점에서의 함숫값은 $\mathrm{f}(0) = B$와

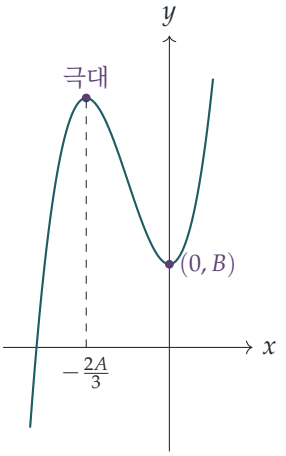
$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{2A}{3}\right) = -\frac{8A^3}{27} + \frac{4A^3}{9} + B = \frac{4A^3}{27} + B.$$

이다. 또 $\mathrm{f}''(x) = 6x + 2A$이므로 $\mathrm{f}''(0) = 2A$이고 $\mathrm{f}''(-\frac{2A}{3}) = -2A$이다. $A > 0$이면 $x = 0$인 점은 극소, $x = -\frac{2A}{3}$인 점은 극대이고, $A < 0$이면 그 역할이 서로 바뀐다.

$A > 0, B > 0$일 때의 개형

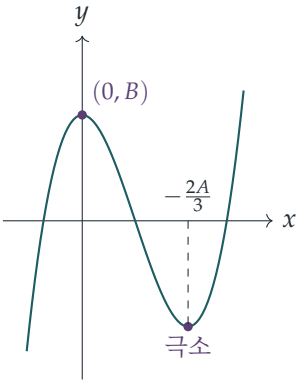
극대점은 $\left(-\frac{2A}{3},\ B + \frac{4A^3}{27}\right)$로, y축의 왼쪽에 있고 B보다 높다. 극소점은 $(0, B)$로, y축의 양의 부분 위에 있다. 두 극점이 모두 x축보다 위에 있으므로 곡선은 극대점의 왼쪽에서 x축과

정확히 한 번 만난다. (그림은 $A = 3, B = 2$인 경우로, 극대점은 $(-2, 6)$, 극소점은 $(0, 2)$이다.)



$A < 0, B > 0$일 때의 개형

이번에는 극대점이 $(0, B)$이고 극소점은 y축의 오른쪽에 있는 $\left(-\frac{2A}{3}, B + \frac{4A^3}{27}\right)$이다. $A^3 < 0$이므로 극솟값은 B보다 작으며, 양수일 수도, 0일 수도, 음수일 수도 있다. $\mathrm{f}(0) = B > 0$이고 $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{f} \to -\infty$이므로 $x < 0$인 근이 항상 하나 있다. 극솟값이 축보다 아래로 내려가면 $x > 0$인 근이 두 개 더 있다(그림의 $A = -3, B = 2$인 경우처럼, 극소점은 $(2, -2)$이고 근은 $1 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3}$이다). 극솟값이 축 위에 있으면 곡선은 그 점에서 축에 접한다. 극솟값이 축보다 위에 있으면 음의 근이 유일한 근이다.



근의 개수 세기

이제 $\mathrm{g}(x) = x^3 + ax^2 + b$를 생각하자. $a = 0$이면 g는 순증가(strictly increasing)하므로(도함수 $3x^2$는 0에서만 0이 된다) 실근(real root)을 정확히 하나 가진다. 따라서 $a \neq 0$이라 하자. 앞의 계산에서 g는 서로 다른 두 극점을 가지며, 그 함숫값은 b와 $b + \frac{4a^3}{27}$이다.

생각해 보기 두 극점에서의 함숫값으로 근의 개수를 어떻게 알 수 있을까?

극점을 $x_1 < x_2$라 하자. 이 삼차함수는 $(-\infty, x_1]$에서 순증가, $[x_1, x_2]$에서 순감소, $[x_2, \infty)$에서 순증가하므로 각 구간에서 근을 많아야 하나 가진다. $g(x_1) > 0 > g(x_2)$이면 사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의하여($x \to \mp\infty$일 때 $g \to \mp\infty$임을 이용하면) $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), (x_2, ∞) 각각에 근이 하나씩 있으므로 서로 다른 근이 세 개 있다. 반대로 두 값의 부호가 같거나 둘 중 하나가 0이면, 적어도 한 구간은 그 내부에 근이 없으므로 근은 많아야 두 개이다. 극댓값은 항상 두 값 중 큰 쪽이므로 "하나는 양수, 하나는 음수"는 "두 값의 곱이 음수"와 같다. 따라서 g가 서로 다른 세 실근을 가질 필요충분조건은

$$b\left(b + \frac{4a^3}{27}\right) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 27b^2 + 4a^3b < 0.$$

이다. ($27 > 0$을 곱해도 부등식의 방향은 바뀌지 않는다.) 이 조건은 $a = 0$인 경우도 포함하는데, 이때 $27b^2 + 4a^3b = 27b^2 \geq 0$이다.

첫 번째 조건

$27b^2 + 3a^3b < 0$이라 하자. 그러면 $3a^3b < -27b^2 \leq 0$이므로 $a^3b < 0$이고, 따라서

$$27b^2 + 4a^3b = \left(27b^2 + 3a^3b\right) + a^3b < 0 + 0 = 0.$$

이다. 앞의 판정 기준에 의하여 방정식은 서로 다른 세 실근을 가지며, 이것이 보이려던 것이다.

두 번째 조건

문제지에 인쇄된 대로라면 두 번째 조건은 부등식 $27b^2 + 4a^3b < 0$을 반복하는데, "$<$"인 채로는 이 주장이 거짓이다. $a = -3$, $b = 1$이면 $27 - 108 = -81 < 0$이지만, $x^3 - 3x^2 + 1$은 $x = 0$에서 1, $x = 2$에서 -3의 값을 가지므로 서로 다른 세 실근을 가진다. 의도된 부등식은 반대 방향이어야 한다. 판정 기준에 의하면

$$27b^2 + 4a^3b > 0$$

이면(사실 $27b^2 + 4a^3b \geq 0$이기만 해도) 방정식의 서로 다른 실근은 세 개보다 적다. 이로써 문제가 해결된다.

따라서 정확한 경계선은 $27b^2 + 4a^3b = 0$이다. $3a^3$이 들어간 조건은 세 근을 가지기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. $a = -2$, $b = 1$이면 $27b^2 + 3a^3b = 3 > 0$이지만 $27b^2 + 4a^3b = -5 < 0$이고, $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$은 세 근 1과 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$를 가진다.

검산

$A = -3$, $B = 2$이면 $x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$이고, 그 근 1, $1 \pm \sqrt{3}$은 개형과 일치하며, 판정 기준이 예측하는 대로 $27 \cdot 4 + 4(-27)(2) = -108 < 0$이다. 수치적으로도, 첫 번째 조건을 만족하는 약 80,000개의 무작위 유리수 쌍 (a, b)에 대하여 두 임계점에서의 함숫값은 항상 부호가 반대였다. 200,000개의 쌍에 대하여 "서로 다른 세 근"은 $27b^2 + 4a^3b < 0$과 정확히 일치했다.

흔한 실수

- 두 극점이 하나의 변곡점(point of inflection)으로 합쳐지는 $a = 0$인 경우를 빠뜨린다.
- 극점에서의 함숫값이 0인 경우를 세 근으로 취급한다. 이때는 중근(repeated root)이 생기므로 서로 다른 근은 두 개뿐이다.
- 두 번째 명제가 판정 기준과 모순된다는 것을 알아채지 못하고 인쇄된 그대로 증명하려 한다.

STEP 너머

값 $-(4a^3b + 27b^2)$는 $x^3 + ax^2 + b$의 **판별식**(*discriminant*)으로, $b^2 - 4ac$에 대응하는 삼차식의 판별식이다. 이 값은 근들의 차의 제곱을 모두 곱한 것과 같으므로, 서로 다른 세 실근을 가지면 양수, 중근을 가지면 0, 두 근이 허근이면 음수이다. 판별식과 근의 대칭함수(symmetric function)는 갈루아(Galois) 이론에서 본격적으로 다룬다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 입문서이다.

풀이

STEP I 1993, 문제 8

순수수학 • 구와 벡터

> **STEP I 1993, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q8

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 원점과 좌표축을 대칭이 있는 곳에 놓는다. 구의 중심이 z축 위에 있고 평면이 $z = 0$이면, 방정식이 거의 모든 일을 해 준다. 구가 두 개인 경우도 더 어렵지 않은데, 두 방정식을 빼면 제곱항이 모두 소거되고 **평면**의 방정식이 남기 때문이다. 소문항 (ii)에서도 좌표를 쓰면 모든 것이 스칼라곱(scalar product)으로 귀결된다. B를 원점에 두어 두 기둥의 꼭대기를 모두 E에서 재도록 한다.

풀이

소문항 (i)

구와 평면. 구의 중심을 O', 반지름을 $r > 0$이라 하고, O'에서 평면에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)을 N이라 하자. N을 원점으로, 평면을 $z = 0$으로, z축을 NO' 방향으로 잡는다. 그러면 $O' = (0, 0, d)$이고, 여기서 $d \geq 0$은 중심에서 평면까지의 거리이다. 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = r^2,$$

이므로, 어떤 점이 구와 평면 위에 동시에 있을 필요충분조건은 $z = 0$이고

$$x^2 + y^2 = r^2 - d^2.$$

인 것이다.

- $d < r$이면, 이것은 평면 위에서 중심이 N이고 반지름이 $\sqrt{r^2 - d^2}$인 원이다.
- $d = r$이면, $x^2 + y^2 = 0$에서 $x = y = 0$이어야 하므로 교집합은 한 점 N이다(이때 평면은 접평면(tangent plane)이다).

▶ $d > r$이면, 우변이 음수이므로 그런 점은 없고 교집합은 공집합이다.

이 경우들이 모든 가능성을 다루므로 첫 번째 명제가 증명된다.

두 구. 두 구의 반지름을 $r, s > 0$이라 하고, 서로 다른 두 중심 사이의 거리를 $c > 0$이라 하자. 첫 번째 중심을 원점에, 두 번째 중심을 $(0,0,c)$에 놓는다.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad x^2 + y^2 + (z-c)^2 = s^2.$$

? 생각해 보기 두 이차방정식의 해집합이 어떻게 원 하나일 수 있을까?

첫 번째 방정식에서 두 번째 방정식을 뺀다. 제곱항이 모두 소거되고

$$2cz - c^2 = r^2 - s^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = h, \qquad \text{단, } h = \frac{r^2 - s^2 + c^2}{2c}.$$

가 남는다. 중심이 서로 다르므로 c로 나눌 수 있다. 어떤 점이 두 구 위에 모두 있을 필요충분조건은 그 점이 첫 번째 구 위에 있고 차의 방정식을 만족하는 것이므로

$$(\text{구 } 1) \cap (\text{구 } 2) = (\text{구 } 1) \cap (\text{평면} z = h).$$

이다. 첫 번째 결과에 의해 이것은 원, 한 점 또는 공집합이다. (구체적으로, $|h| < r$이면 평면 $z = h$ 위의 원 $x^2 + y^2 = r^2 - h^2$이고, $|h| = r$이면 한 점이며, $|h| > r$이면 공집합이다.) 이 원은 두 중심을 잇는 직선에 수직인 평면 위에 있고, 원의 중심은 그 직선 위에 있다.

소문항 (ii)

밑점에 대한 가정. 문제에는 A, B, C가 어디에 서 있는지 나와 있지 않다. 이들이 평평한 지면 위에서 한 변의 길이가 $2\,\mathrm{m}$인 정삼각형의 꼭짓점에 있다고 가정한다. 이것이 주어진 각을 만들어 내는 배치이다(검산 참고).

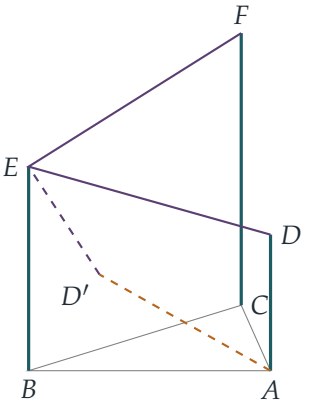
B를 원점으로, z축을 연직 방향으로 잡는다.

$$B = (0,0,0), \quad A = (2,0,0), \quad C = (1, \sqrt{3}, 0),$$

그러면 기둥의 꼭대기는

$$D = (2,0,2), \quad E = (0,0,3), \quad F = (1, \sqrt{3}, 4).$$

이다.



그림에서 D'(점선)은 반달리스트들이 기둥을 옮긴 뒤 D의 위치이다.

원래의 조형물. E에서 출발하는 벡터를 쓰면

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

이므로 $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 + 0 - 1 = 1$이고 $|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{5}$이다. 따라서

$$\cos \angle DEF = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{5}, \qquad \text{이므로} \qquad \angle DEF = \cos^{-1} \tfrac{1}{5},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

반달리스트들이 다녀간 뒤. 기둥 AD는 여전히 길이가 2이고 여전히 A에 서 있다. 이제 이 기둥은 A와 B를 지나는 연직 평면(평면 $y = 0$) 안에 있으며, 지면과 $\frac{1}{4}\pi$의 각을 이루며 B 쪽으로 기울어져 있다. A에서 B 쪽으로 가는 것은 $-x$ 방향이므로

$$D' = \left(2 - 2\cos \tfrac{\pi}{4},\ 0,\ 2\sin \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(2 - \sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\right).$$

이다. $2 - \sqrt{2} \approx 0.59$는 0과 2 사이에 있으므로, 점 D'은 실제로 선분 AB 위쪽에 있다. 이제

$$\overrightarrow{ED'} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} - 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{ED'} \cdot \overrightarrow{EF} = (2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 3) = -1,$$

이고

$$|\overrightarrow{ED'}|^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2 = (6 - 4\sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2}) = 17 - 10\sqrt{2}.$$

이다.

생각해 보기 내적(dot product)이 음수이다. 이것은 각에 대해 무엇을 알려 주는가?

스칼라곱이 음수라는 것은 각이 둔각이라는 뜻이므로, $\frac{1}{2}\pi$와 π 사이에 있는 $\cos^{-1}$의 값을 구해야 한다.

$$\cos\angle D'EF = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{17-10\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{85-50\sqrt{2}}} \approx -0.264542,$$
$$\angle D'EF \approx 1.839 \text{ 라디안 (유효숫자 네 자리)}.$$

검산

- 밑면이 한 변의 길이가 s인 정삼각형이면, 같은 방법으로 $\cos\angle DEF = \dfrac{s^2/2-1}{s^2+1}$을 얻는다. 이 값은 $s=2$일 때에만 $\frac{1}{5}$와 같으므로, 가정한 밑면이 타당함을 뒷받침한다. 수치 계산으로도 $s=2$일 때 $\cos\angle DEF = 0.2$임을 확인하였다.
- $|AD'|=2$와 $\angle BAD' = \frac{1}{4}\pi$를 수치로 확인하였다. 새로운 각은 1.838525… 라디안(약 105.3°)으로 나와, 위의 정확한 꼴과 일치하였다.
- 소문항 (i): 무작위로 잡은 구들에 대해 예측된 원 위의 점들을 시험해 보았더니, 그 점들은 10^{-12} 이내의 오차로 두 곡면 위에 모두 놓였다.

흔한 실수

- 두 구의 경우에서 두 방정식의 차가 곧 교집합**이라고** 주장하는 것. 평면은 교집합을 포함할 뿐이므로, 여전히 그 평면과 두 구 중 하나의 교집합을 구해야 한다.
- D'을 A의 반대편, 즉 B에서 멀어지는 쪽에 놓는 것. 그 점은 선분 AB 위쪽에 있지 않으며, 다른 각을 준다.
- 답을 도 단위로 쓰거나, 음의 부호를 놓쳐 예각 $\cos^{-1}(0.2645)$로 쓰는 것.

STEP 너머

두 구의 방정식을 빼서 평면을 얻는 것은 두 원 또는 두 구의 **근평면**(radical plane, 2차원에서는 근축(radical axis))의 바탕이 되는 아이디어이다. 같은 기법으로 GPS 방식의 삼변측량(trilateration)을 선형 문제로 바꿀 수 있다. 더 일반적으로, 임의의 이차곡면(quadric surface)과 평면의 교선은 원뿔곡선(conic)이며, 이러한 교선을 분류하는 것은 이차형식(quadratic form)을 이용한 선형대수학의 좋은 첫 연습 문제이다. Strang의 *Introduction*

to Linear Algebra(선형대수학 입문)가 그 도구들을 전개하고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 좌표기하 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 1993, 문제 9

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP I 1993, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q9

핵심 아이디어

이것은 혼합 문제(mixing problem)이다. 통 안에 있는 A의 양의 변화율은 (들어오는 비율)에서 (나가는 비율)을 뺀 것이고, 혼합이 빠르게 일어나므로 나가는 액체의 농도는 통 안의 농도와 같다. 가장 먼저 알아차려야 할 점은 각 통의 전체 부피가 결코 변하지 않는다는 것이다. 따라서 농도는 단순히 "A의 양을 상수로 나눈 것"이 된다. 그러면 각 통마다 1계 선형 미분방정식(first-order linear differential equation)이 하나씩 나오고, 첫 번째 통에서 나오는 양이 두 번째 통의 강제항(forcing term)이 된다.

풀이

첫 번째 통

첫 번째 통에는 액체가 전체적으로 초당 $a + (b - a) = b$리터의 비율로 들어오고 초당 b리터의 비율로 나간다. 따라서 모든 $t \geq 0$에 대하여 부피는 처음 값인 K리터로 유지된다.

혼합이 빠르게 일어나므로 시각 t에서 통 안의 내용물은 균일하고, 액체 중 화학물질 A가 차지하는 비율은 $V(t)/K$이다. 짧은 시간 δt 동안 A가 $a\,\delta t$리터 들어오고 혼합물이 $b\,\delta t$리터 나가는데, 그중 $\frac{V}{K}\,b\,\delta t$리터가 A이다. 따라서

$$\delta V \approx a\,\delta t - \frac{bV}{K}\,\delta t,$$

이고, 양변을 δt로 나눈 뒤 $\delta t \to 0$으로 보내면

$$\dot{V}(t) = -\frac{bV(t)}{K} + a,$$

가 되어 구하는 방정식을 얻는다.

이 방정식은 상수 계수 선형 방정식이다. 이를 $\dot{V} + \frac{b}{K}V = a$로 쓰고 적분인자(integrating factor) $\mathrm{e}^{bt/K}$를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\mathrm{e}^{bt/K}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/K} \quad \Longrightarrow \quad V\mathrm{e}^{bt/K} = \frac{aK}{b}\mathrm{e}^{bt/K} + C.$$

처음에 통에는 화학물질 B만 들어 있으므로 $V(0) = 0$이고, 따라서 $C = -\frac{aK}{b}$이다. 그러므로

$$V(t) = \frac{aK}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}\right), \qquad t \geq 0,$$

이 되어 증명이 끝난다.

두 번째 통

두 번째 통은 첫 번째 통으로부터 초당 b리터를 받고 초당 b리터씩 비워지므로, 부피는 L리터로 유지된다. 시각 t에서 이 통 안에 있는 A의 부피를 $W(t)$라 하면 $W(0) = 0$이다.

? **생각해 보기** 화학물질 A는 어떤 비율로 두 번째 통에 도착하는가?

A는 첫 번째 통을 떠나는 비율과 정확히 같은 비율, 즉 $\frac{bV}{K} = a\left(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}\right)$로 도착한다. 그리고 같은 빠른 혼합 논리에 의해 $\frac{bW}{L}$의 비율로 나간다. 따라서

$$\dot{W} + \frac{b}{L}W = a - a\,\mathrm{e}^{-bt/K}.$$

적분인자 $\mathrm{e}^{bt/L}$를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W\mathrm{e}^{bt/L}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/L} - a\,\mathrm{e}^{bt(1/L - 1/K)}.$$

$L \neq K$이므로 지수 $b\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}\right) = \frac{b(K-L)}{KL}$는 0이 아니고, 따라서 둘째 항을 지수함수로 적분할 수 있다.

$$W\mathrm{e}^{bt/L} = \frac{aL}{b}\mathrm{e}^{bt/L} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{b(K-L)t/(KL)} + D.$$

양변에 $\mathrm{e}^{-bt/L}$를 곱하고 $\frac{b(K-L)}{KL} - \frac{b}{L} = -\frac{b}{K}$임에 주목하면

$$W = \frac{aL}{b} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{-bt/K} + D\mathrm{e}^{-bt/L}.$$

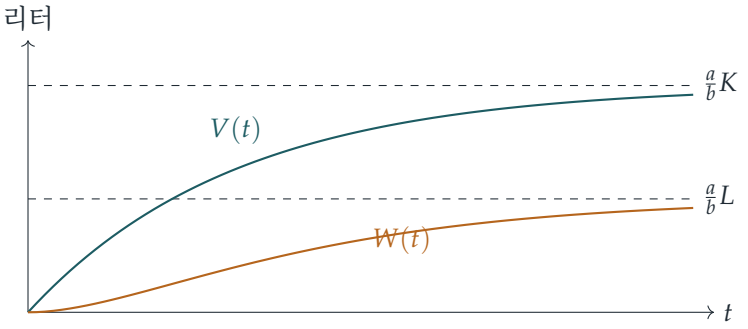
$W(0) = 0$으로 놓으면

$$D = \frac{aKL}{b(K-L)} - \frac{aL}{b} = \frac{aL}{b}\cdot\frac{K - (K-L)}{K-L} = \frac{aL^2}{b(K-L)}.$$

따라서 시각 $t \geq 0$에서 두 번째 통에는

$$\boxed{W(t) = \frac{aL}{b}\left(1 - \frac{K\mathrm{e}^{-bt/K} - L\mathrm{e}^{-bt/L}}{K-L}\right)}$$

리터의 화학물질 A가 들어 있다.



위 그림은 $a = 1, b = 2, K = 10, L = 5$를 사용한 것이다. W의 기울기가 0에서 시작한다는 점에 주목하자. 처음에는 첫 번째 통에서 들어오는 액체 속에 A가 거의 없기 때문이다.

검산

- $t = 0$에서 괄호 안의 값은 $1 - \frac{K-L}{K-L} = 0$이며, 마땅히 그래야 한다. 또한 $\dot{W}(0) = 0$인데, 이는 A가 $bV(0)/K = 0$의 비율로 도착한다는 사실과 일치한다.
- $t \to \infty$일 때 $V \to \frac{a}{b}K$이고 $W \to \frac{a}{b}L$이다. 즉 두 통 모두 결국 A의 농도가 a/b가 되는데, 이는 들어오는 액체의 농도이다.
- 이 공식은 앞에 붙은 인수 L을 제외하면 K와 L에 대하여 대칭이며, 이는 계산이 맞았는지 확인하는 좋은 일관성 검사가 된다.
- $a = 1, b = 2, K = 10, L = 5, t = 5$일 때 $V = 5(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 3.1606$이고 $W = 2.5(1 - \mathrm{e}^{-1})^2 \approx 0.99894$이다. 두 통을 (부피까지 추적하며) 수치적으로 시뮬레이션해 보면, a, b, K, L을 무작위로 여러 번 골라도 두 공식과 약 10^{-13} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- A의 유출량으로 $b - a$나 a를 사용하는 것: 유출량은 전체 유출 비율에 농도를 곱한 것이다.
- 두 번째 통으로 들어오는 A의 유입량을 a로 잡는 것: 첫 번째 통을 떠난 A만이 두 번째 통에 도달한다.
- $L \neq K$가 왜 필요한지 잊는 것: $L = K$이면 강제항 $\mathrm{e}^{-bt/K}$가 동차방정식(homogeneous equation)의 해가 되어, 답에 대신 $t\,\mathrm{e}^{-bt/K}$ 항이 포함된다.

STEP 너머

잘 섞이는 탱크들을 사슬처럼 이은 것은 표준적인 구획 모형(compartment model)으로, 몸속을 이동하는 약물 투여량이나 방사성 붕괴 사슬을 다루는 데 쓰인다. 이를 연립방정식 $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x} + \mathbf{f}$로 쓰면 감쇠율 b/K와 b/L은 M의 고윳값(eigenvalue)이 되고, $L = K$인 경우는 중복 고윳값에 해당한다. 이것이 바로 $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ 꼴의 해를 낳는 "공명(resonance)"과 같은 현상이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 혼합 문제와 선형 연립방정식을 모두 이런 방식으로 다룬다.

풀이

STEP I 1993, 문제 10

역학 • 용수철이 있는 평형

STEP I 1993, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

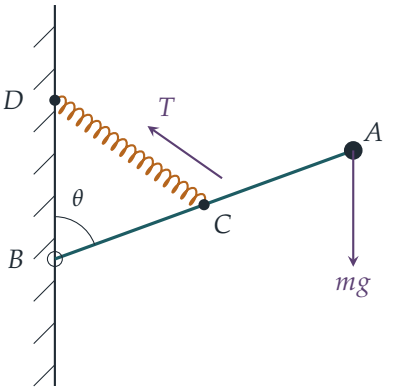
step.maths.org/questions/93-s1-q10

핵심 아이디어

경첩(hinge) B에 대한 모멘트(moment)를 구한다. 그러면 B에서의 미지의 반작용력이 완전히 사라지고, 용수철의 장력과 막대의 각을 잇는 방정식 하나만 남는다. 기하는 보기보다 다루기 쉽다. $BD = BC = a$이므로 삼각형 BCD는 이등변삼각형(isosceles triangle)이고, 그 안의 모든 길이를 B에서의 각의 절반으로 나타낼 수 있기 때문이다.

풀이

램프는 질점(particle)으로, 막대는 가볍고 강체인 것으로, B의 경첩은 매끄러운 것으로, 용수철은 가볍고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 모형화한다. $\theta = \angle DBA$, 즉 막대와 위쪽 연직선 BD 사이의 각이라 하자. "벽에서 떨어져 있다"는 것은 $0 < \theta < \pi$를 뜻한다. $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$이면 막대가 벽을 따라 놓이기 때문이다.



용수철의 길이

$BC = BD = a$이고 두 변 사이의 각이 θ이므로 삼각형 BCD는 이등변삼각형이다. B에서 CD에 수선을 내리면 이 수선은 각 θ와 변 CD를 모두 이등분하므로

$$CD = 2a\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad B\text{에서 직선 } CD\text{까지의 거리} = a\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

훅의 법칙에 의해 용수철의 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda}{a}\left(2a\sin\tfrac{\theta}{2} - a\right) = \lambda\left(2\sin\tfrac{\theta}{2} - 1\right)$$

이다. 여기서 T가 음수이면 용수철이 압축되어 밀고 있다는 뜻이다.

B에 대한 모멘트

막대와 램프로 이루어진 계에 작용하는 힘은 A에서의 무게 mg, C에서 CD 방향으로 작용하는 용수철의 힘 T, 그리고 B에서의 반작용력이며, 반작용력은 B에 대한 모멘트가 없다. 무게는 벽에서 수평 거리 $2a\sin\theta$인 곳에서 연직으로 작용하며, 막대를 아래로 돌린다(θ가 증가한다). 장력은 C를 D 쪽으로 당겨 막대를 다시 벽 쪽으로 돌린다. 평형(equilibrium)이려면

$$T \cdot a\cos\tfrac{\theta}{2} = mg \cdot 2a\sin\theta = 4mga\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

$0 < \theta < \pi$에서 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$이므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$T = 4mg\sin\tfrac{\theta}{2}.$$

특히 $T > 0$이다. 즉 용수철은 늘어나 있어야 한다. 무언가가 램프를 받쳐 들고 있어야 하므로 이는 당연하다.

생각해 보기 이제 T에 대한 식이 두 개 있다. 두 식을 같다고 놓으면 무엇을 얻는가? 그리고 그 답이 막대의 실제 위치를 나타내려면 무엇이 성립해야 하는가?

$s = \sin\frac{\theta}{2}$라 하자. T에 대한 두 식을 같다고 놓으면

$$\lambda(2s-1) = 4mgs \quad\Longrightarrow\quad s(2\lambda - 4mg) = \lambda \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)}$$

이다. 단, $\lambda \neq 2mg$이어야 한다($\lambda = 2mg$이면 방정식이 $0 = \lambda$가 되어 불가능하다). $0 < \theta < \pi$이므로 실제 위치가 되려면 $0 < s < 1$이어야 한다.

- $\lambda < 2mg$이면 $s < 0$이므로 해가 없다.
- $\lambda > 2mg$이면 $s > 0$이고,

$$s < 1 \iff \lambda < 2\lambda - 4mg \iff \lambda > 4mg.$$

따라서 $\lambda > 4mg$이면 값 $s = \lambda/\big(2(\lambda - 2mg)\big)$는 0과 1 사이에 엄격히 놓이고, 모멘트가 평형을 이루는 각 $\theta \in (0, \pi)$가 정확히 하나 존재한다. (실제로 $s > \frac{1}{2}$이므로 용수철은 정말로 늘어나 있다.) 이때 합력은 B에서의 반작용력이 감당하므로, 요구한 대로 램프는 벽에서 떨어진 채 평형을 이루며 매달려 있을 수 있다. 역으로 $\lambda \leq 4mg$이면 그러한 위치는 존재하지 않는다.

그 각은

$$\angle DBA = \theta = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)}\right)$$

이고, $\cos\theta = 1 - 2s^2$이므로 동치로

$$\cos\angle DBA = 1 - \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 2mg)^2}$$

이다.

검산

- $\lambda \to \infty$이면 용수철이 늘어날 수 없으므로 $CD \to a$이고 삼각형 BCD는 정삼각형이 된다. 공식에서 $s \to \frac{1}{2}$이므로 $\theta \to 60°$이다. ✓
- 위쪽에서 $\lambda \to 4mg$이면 $s \to 1$이고 $\theta \to 180°$이다. 용수철이 너무 약해서 램프가 아래로 처져 벽에 붙어 매달리게 된다.
- $\lambda = 6mg$이면 $s = \frac{3}{4}$, $\cos\theta = -\frac{1}{8}$이므로 $\theta \approx 97.2°$이다. 이 각을 완전한 벡터 모멘트 방정식(용수철의 힘은 좌표로 계산)에 대입하면 알짜 모멘트가 0이 된다. $0 < \theta < \pi$에서 알짜 모멘트를 수치적으로 훑어보면 $\lambda > 4mg$일 때 근이 하나뿐이고(예를 들어 $\lambda = 5mg$일 때 112.9°), $\lambda \leq 4mg$일 때는 근이 없다.

흔한 실수

- B에서 용수철 힘의 작용선까지의 거리로 a 대신 막대 전체의 길이 $2a$를 쓰는 것. 수직 거리는 $a\cos\frac{\theta}{2}$이다.
- 모멘트를 구하는 대신 힘을 분해하는 것. 이렇게 하면 아무 이득 없이 B에서의 반작용력의 미지 성분 두 개가 끼어든다.
- $0 < \sin\frac{\theta}{2} < 1$인지 확인하는 것을 잊는 것. 조건 $\lambda > 4mg$는 바로 여기서 나온다.

STEP 너머

이 문제는 평형이 존재하는지만 묻는다. 자연스러운 다음 질문은 그 평형이 **안정**(*stable*)한가, 즉 살짝 건드렸을 때 그 흔들림이 잦아드는가 아니면 커지는가이다. 이 질문에는 퍼텐셜 에너지(potential energy) $V(\theta)$(중력 에너지와 탄성 에너지의 합)를 쓰고 평형점에서 $V''(\theta)$의 부호를 살펴봄으로써 답할 수 있다. 이 아이디어는 대학 1학년 역학 전반에 걸쳐, 그리고 나중에는 역학계(dynamical systems) 전체에 걸쳐 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 에너지 방법과 안정성을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1993, 문제 11

역학 • 질량중심

> **STEP I 1993, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q11

핵심 아이디어

한 점에 자유롭게 매달린 강체(rigid body)에는 단 두 힘, 즉 받침점이 당기는 힘과 무게만 작용한다. 두 힘이 평형을 이루려면 같은 직선 위에서 작용해야 하므로, 무게중심(centre of mass)은 받침점의 바로 아래에 매달려야 한다. 따라서 모든 것은 구부린 철사의 무게중심 G를 구하고, 두 위치 사이에서 물체가 직선 GA와 GB 사이의 각만큼 회전한다는 것을 알아차리는 데로 귀결된다.

풀이

무게중심

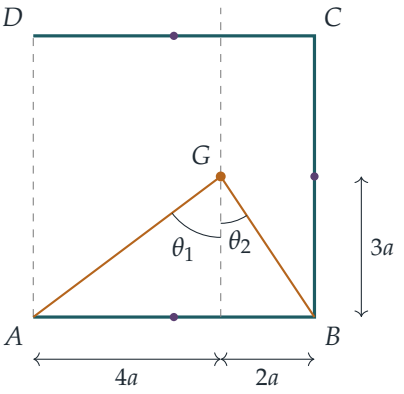
철사를 세 변 AB, BC, CD로 구부린 균일한 강체 막대로 모형화하자. 각 변의 무게는 모두 W로 같고, 철사는 매끄러운 못이나 가벼운 줄에 매달려 있다. 수가 정수가 되도록 정사각형의 한 변의 길이를 $6a$로 잡고, 철사가 놓인 평면에 다음과 같이 좌표축을 설정한다.

$$A = (0,0), \quad B = (6a,0), \quad C = (6a,6a), \quad D = (0,6a).$$

각 변은 균일한 막대이므로 그 무게는 중점에 작용한다. 즉 AB는 $(3a,0)$, BC는 $(6a,3a)$, CD는 $(3a,6a)$에서 작용한다. 세 무게가 같으므로 G는 세 중점의 평균이다.

$$G = \left(\frac{3a+6a+3a}{3}, \frac{0+3a+6a}{3}\right) = (4a,\ 3a).$$

(BC와 AD의 중점을 지나는 직선에 대한 대칭성에 의해 G는 높이 $3a$에 있어야 했다. 계산이 필요했던 것은 가로 위치뿐이다.)



그림에서 G를 지나는 수직 점선은 BC(그리고 빠진 변 AD)와 평행하다. GA가 이 점선과 이루는 각을 θ_1, 반대쪽에서 GB가 이 점선과 이루는 각을 θ_2라 하자. 그림에서 읽으면

$$\tan\theta_1 = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

(실제로 $AG = 5a$이다. 3–4–5 삼각형이다.)

A에 매달 때와 B에 매달 때

철사가 A에 매달려 평형 상태에 있을 때, 철사에 작용하는 힘은 A에서의 반작용력과 G에 작용하는 전체 무게 $3W$뿐이다. 이 두 힘이 평형을 이루려면 A에 대한 모멘트(moment)가 상쇄되어야 하므로, 무게의 작용선은 A를 지나야 한다. 즉 직선 AG는 연직이고 G는 A의 아래에 있다. BC는 그림의 점선과 평행하므로, 이제 BC는 연직선에 대해 θ_1만큼 기울어져 있다.

마찬가지로 철사를 B에 매달면 직선 BG가 연직이 되고, BC는 연직선에 대해 반대 방향으로 θ_2만큼 기울어진다.

> ? **생각해 보기** BC의 두 방향 사이의 각이 $\theta_1 - \theta_2$가 아니라 $\theta_1 + \theta_2$인 이유는 무엇인가?

첫 번째 위치에서 두 번째 위치로 갈 때 철사는 강체로서 회전하므로, 철사 안의 모든 직선이 같은 각만큼 회전한다. 같은 말이지만, 철사를 종이 위에 고정해 두고 대신 "아래쪽" 방향이 회전한다고 생각해도 된다. 첫 번째 위치에서 아래쪽은 GA 방향이고, 두 번째 위치에서는 GB 방향이다. 따라서 회전한 각은 이 둘 사이의 각 AGB이다. 그림에서 A와 B는 G를 지나는 점선의 서로 반대쪽에 있으므로

$$\angle AGB = \theta_1 + \theta_2.$$

덧셈정리(addition formula)를 이용하면

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{8}{9}}=\frac{2}{\frac{1}{9}}=18.$$

θ_1과 θ_2는 모두 예각이므로 $0<\theta_1+\theta_2<180°$이고, 그 탄젠트 값이 양수이므로 합은 실제로 예각이다. 따라서 BC의 두 방향 사이의 각은 요구한 대로 $\tan^{-1}18$이다.

검산

- 수치로 확인하면 $\theta_1=\tan^{-1}\frac{4}{3}\approx53.13°$, $\theta_2=\tan^{-1}\frac{2}{3}\approx33.69°$이고, 더하면 $86.82°$이다. $\tan^{-1}18\approx86.82°$도 같다.
- 철사를 90 000개의 작고 같은 조각으로 바꾸어 그 위치를 평균하여 $G=(4a,3a)$를 얻고, 매번 G가 받침점 아래에 오도록 물체 전체를 회전시키면, BC의 두 상 사이의 각이 소수점 아래 아홉째 자리까지 같게 나온다.
- G에 대한 타당성 확인: G는 빠진 변 AD보다 BC에 더 가까이 있는데, 오른쪽에는 철사가 모두 있고 왼쪽에는 하나도 없으므로 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- G를 정사각형의 중심 $(3a,3a)$로 잡는 실수. 네 변이 모두 있다면 맞겠지만, 빠진 변 AD는 무게중심을 왼쪽으로 전혀 끌어당기지 않는다.
- 두 기울기를 더하지 않고 빼는 실수. A에 매달면 BC가 한쪽으로 기울고, B에 매달면 반대쪽으로 기운다.

STEP 너머

"자유롭게 매달린 물체는 무게중심이 받침점 아래에 오도록 매달린다"는 원리는 실제로 다루기 까다로운 평면 도형의 무게중심을 찾는 방법이기도 하다. 도형을 두 점에서 각각 매달아 보고 두 연직선(plumb line)이 만나는 곳을 찾으면 된다. 대학 1학년 과정에서는 같은 아이디어가 위치 에너지(potential energy)를 통해 나타난다. 평형 위치는 G의 높이의 정류점(stationary point)이고, 안정한 평형 위치는 가장 낮은 곳이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 무게중심과 강체의 정역학을 이와 같은 예제를 훨씬 많이 들어 다룬다.

풀이

STEP I 1993, 문제 12

역학 • 포물체 요격

> **STEP I 1993, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q12

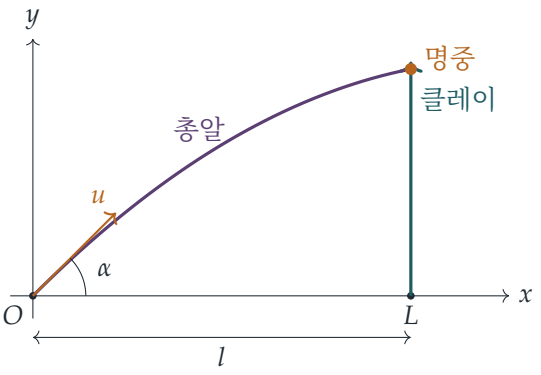
핵심 아이디어

명중한다는 것은 총알과 클레이가 같은 순간에 같은 위치에 있다는 뜻이다. 총알이 발사기를 지나는 연직선에 도달하는 시각은 수평 운동만으로 정해지므로, 먼저 그 시각을 구한 다음 두 높이를 맞춘다. 총알이 날아가는 동안 중력(gravity)은 두 물체를 정확히 같은 양 $\frac{1}{2}gt^2$만큼 끌어내리므로, 이 항은 소거되고 깔끔한 일차 조건이 남는다. $T = 0$일 때 이 소거는 문제 전체를 간결하게 해석하는 방법을 준다.

풀이

모형

클레이와 총알을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자(particle)로 보고, 사수는 발사기를 포함하는 연직 평면 안에서 발사기 쪽으로 쏜다고 가정한다. 사수를 원점 O에 두고, x축은 수평으로 $x = l$에 있는 발사기 L 쪽을 향하게, y축은 연직 위쪽을 향하게 잡는다. 시각 t는 소총을 쏜 순간부터 잰다. 따라서 클레이는 이미 시간 T 동안 공중에 있었고, 시각 t에는 $T + t$ 동안 날아간 상태이다.



명중 조건

발사 후 시각 t에 총알의 위치는

$$x_B = (u\cos\alpha)\,t, \qquad y_B = (u\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

이고, 시간 T만큼 먼저 속력 v로 위로 출발한 클레이는 $x = l$에 있으며 그 높이는

$$y_C = v(T+t) - \tfrac{1}{2}g(T+t)^2 = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 총알은 직선 $x = l$ 위에서만 클레이와 만날 수 있고, $(u\cos\alpha)\,t = l$일 때, 즉

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha}.$$

일 때 그곳에 도달한다. (여기서 $\cos\alpha > 0$이다. $l > 0$이므로 바로 위를 향한 소총은 발사기에 결코 도달하지 못한다.) 명중하려면 이 순간에 $y_B = y_C$여야 한다. $-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 소거되므로

$$(u\sin\alpha)\,t = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t.$$

이다. $t = l/(u\cos\alpha)$를 대입하면

$$\frac{l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + \frac{(v-gT)\,l}{u\cos\alpha},$$

이고, 양변에 $\cos\alpha$를 곱하면

$$l\sin\alpha - \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right)\cos\alpha = \frac{v-gT}{u}\,l,$$

이 되어 구하는 결과를 얻는다.

$T = 0$인 경우

$T = 0$이면 조건은 $l\sin\alpha = vl/u$가 되고, $l > 0$이므로

$$\sin\alpha = \frac{v}{u}.$$

이다.

? 생각해 보기 왜 이로부터 $v \le u$가 아니라 $v < u$가 반드시 성립해야 하는가?

$\sin\alpha \le 1$이어야 하므로 $v \le u$이다. 그런데 $v = u$이면 $\alpha = \frac{\pi}{2}$여야 하고, 그러면 $\cos\alpha = 0$이다. 즉 총알은 O에서 바로 위로 올라가 직선 $x = l$에 결코 도달하지 못한다. 따라서 명중은 $v < u$일 때만 가능하다. 이때

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u},$$

이며, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이므로 양의 제곱근을 택했다. 명중은

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha} = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

에 일어난다. 클레이는 $t = 0$부터 다시 $vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$이 될 때까지, 즉 $t = 2v/g$까지 공중에 있다. 따라서 클레이가 떨어지기 전에 맞히려면

$$\frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}} < \frac{2v}{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2v\sqrt{u^2 - v^2}}{g} > l,$$

이어야 한다. 여기서 양수 $\sqrt{u^2 - v^2}$를 곱했다. $v < u$와 함께 이것이 보여야 할 내용이다.

$T = 0$인 경우를 보는 멋진 방법이 있다. $\sin\alpha = v/u$이면 총알의 속도의 연직 성분은 $u\sin\alpha = v$로 클레이의 것과 같고, 둘은 같은 중력을 받는다. 그러므로 총알과 클레이는 **매 순간 같은 높이에** 있으며, 남은 문제는 총알의 수평 속력 $\sqrt{u^2 - v^2}$로 클레이가 떨어지기 전에 거리 l을 갈 수 있는지뿐이다.

검산

- **중력이 없는 극한.** $g = 0$이고 $T = 0$이면 두 물체는 모두 직선으로 움직이며, 조건 $\sin\alpha = v/u$는 등속도 운동에서의 요격에 대한 통상적인 "앞질러 겨냥하기" 조건일 뿐이다.
- **최대 사정거리.** u를 고정하면 상계 $2v\sqrt{u^2 - v^2}/g$는 $v = u/\sqrt{2}$일 때 가장 크고, 그 값은 u^2/g로 속력 u로 발사한 포물체의 최대 사정거리(maximum range)와 같다. 이는 이치에 맞다. $v = u/\sqrt{2}$이면 $\alpha = 45°$이고, 명중은 총알이 막 지면으로 돌아오는 순간에 일어난다.
- **수치.** $g = 9.8$, $v = 20$, $T = 0.7$, $u = 120$, $l = 60$ (SI 단위)으로 두고 명중 각도를 수치적으로 구하면 $\alpha \approx 0.2987$ rad이며, 첫 번째 항등식의 양변이 일치한다. 두 운동을 시간에 따라 단계적으로 진행시켜 보면, 총알이 발사기에 도달할 때 총알과 클레이는 모두 높이 17.13 m에 있다. $T = 0$, $v = 20$, $u = 100$이면 상계는 약 400 m이고 $\alpha \approx 11.5°$이다.

흔한 실수

- 지연 시간 T를 고려하지 않고 두 물체에 같은 시간 변수를 쓰는 것. 클레이의 높이에는 $T+t$를 써야 한다.
- $v=u$를 배제하는 것을 잊는 것. 이 경우 $\alpha=90°$가 되어 전혀 명중하지 않는다.
- 총알이 발사기에 도달하는지만 확인하고, 그 순간 클레이가 아직 공중에 있는지는 확인하지 않는 것.

STEP 너머

$\frac{1}{2}gt^2$의 소거는 깊은 아이디어의 특수한 경우이다. 가속도 g로 자유 낙하하는 좌표계에서는 중력이 사라지고 모든 포물체가 등속도로 직선 운동을 한다. 이것은 가속하는 좌표계에 적용한 갈릴레이 상대성(Galilean relativity)이며, 아인슈타인(Einstein)의 손에서 일반 상대성 이론(general relativity)의 핵심인 등가 원리(equivalence principle)가 되었다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 비관성 좌표계(non-inertial frame)를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 1993, 문제 13

역학 • 일과 일률

STEP I 1993, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

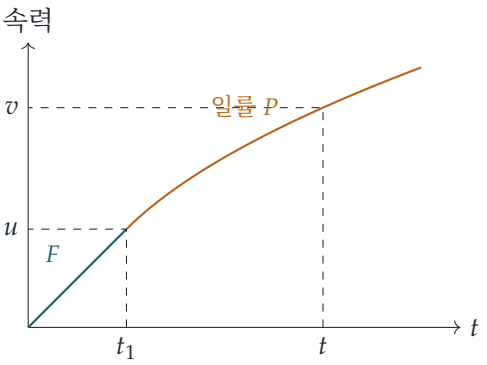
step.maths.org/questions/93-s1-q13

핵심 아이디어

운동은 두 단계로 이루어지며, 각 단계마다 그에 맞는 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)의 형태가 필요하다. 힘이 일정한 동안에는 가속도도 일정하므로 **등가속도 공식**(*suvat*)으로 모든 것을 해결할 수 있다. 기관이 일정한 일률(power)로 작동하기 시작하면 구동력은 P/v가 되어 속력에 따라 변한다. 이때의 요령은 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$(시간을 구할 때) 또는 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$(거리를 구할 때)로 써서 변수가 분리되도록(separation of variables) 하는 것이다.

풀이

기관차와 열차를 합쳐 질량이 M인 하나의 입자로 보고, 저항이 없는 수평 직선 선로를 따라 움직인다고 모형화한다. 수평 방향의 힘은 견인력(tractive force)뿐이다(무게와 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이며 서로 상쇄된다). 그림은 시간에 대한 속력의 개형을 나타낸다. 속력 u까지는 직선이고, 그 뒤로는 속력이 커질수록 기울기가 작아지는 곡선이다.



1단계: 일정한 힘

힘 F가 일정하면 가속도는 F/M이다. 정지 상태에서 출발하므로, $F = P/u$를 이용하면 속력이 u에 이르는 시각은

$$t_1 = \frac{Mu}{F} = \frac{Mu^2}{P},$$

이다. $v^2 = u^2 + 2as$(여기서는 0에서 u까지)에 의해 이동한 거리는

$$s_1 = \frac{u^2}{2F/M} = \frac{Mu^2}{2F} = \frac{Mu^3}{2P}.$$

2단계: 일정한 일률

일률은 힘과 속도의 곱이므로, 속력이 w일 때 견인력은 P/w이다. $w = u$일 때 이 값은 $P/u = F$이므로, 기관의 작동 방식이 바뀔 때 힘이 갑자기 변하지 않는다는 점에 주목하자. 뉴턴의 제2법칙에 의해

$$M\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{w}.$$

시간. 변수를 분리하면 $Mw\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}t$이다. 시각 t_1에서의 속력 u부터 시각 t에서의 속력 v까지 적분하면

$$\frac{M}{2}\left(v^2 - u^2\right) = P\,(t - t_1).$$

(이것은 바로 일-에너지 원리(work–energy principle)이다. 기관이 한 일 $P(t - t_1)$이 모두 운동 에너지(kinetic energy)가 된다.) 따라서

$$t = \frac{Mu^2}{P} + \frac{M}{2P}\left(v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(2u^2 + v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(u^2 + v^2\right),$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. $v \geq u$이므로 속력 v는 2단계에서(또는 정확히 2단계가 시작될 때) 도달되며, 그렇기 때문에 2단계의 방정식을 사용할 수 있다.

생각해 보기 거리를 구하려면 t가 아니라 x를 독립변수(independent variable)로 삼아야 한다. 가속도를 어떻게 다시 써야 할까?

연쇄법칙(chain rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$이다. 따라서 운동방정식(equation of motion)은 다음과 같이 된다.

$$Mw\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{w}, \qquad \text{즉,} \qquad Mw^2\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}x.$$

거리. $w = u$부터 $w = v$까지 적분하면, 2단계에서 이동한 거리 s_2는 다음을 만족한다.

$$\frac{M}{3}\left(v^3 - u^3\right) = P\,s_2, \qquad s_2 = \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right).$$

따라서 전체 이동 거리는

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \frac{Mu^3}{2P} + \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(3u^3 + 2v^3 - 2u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right). \end{aligned}$$

시험지의 오타. 인쇄된 답에는 u^3 대신 u^2이 적혀 있다. 이는 옳을 수 없다. Mv^3/P는 길이이고(일률의 단위는 $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$이며 Mv^3의 단위는 $\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}$이다), 반면 Mu^2/P는 시간이므로, 두 항을 더하려면 u가 들어간 항도 세제곱이어야 한다. 올바른 거리는 $\dfrac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right)$이며, 이것이 바로 우리가 보인 결과이다.

검산

- $v = u$로 두면 시간 공식은 $Mu^2/P = Mu/F$, 거리 공식은 $Mu^3/(2P) = Mu^2/(2F)$가 되어, 마땅히 그래야 하듯 1단계의 결과와 정확히 일치한다.
- 단위(units): Mv^2/P는 에너지를 일률로 나눈 것이므로 시간이고, Mv^3/P는 길이이다. 오타는 바로 여기서 드러난다.
- $M = F = u = 1$(따라서 $P = 1$)이고 $v = 2$일 때, 공식은 $t = 2.5$, 거리 $17/6 \approx 2.833$을 준다. 운동을 수치적으로 단계별 계산하면(속력 u 미만에서는 힘 F, 그 이상에서는 P/w) 두 값이 모두 재현되며, 임의의 M, F, u와 $v \geq u$에 대해서도 공식과 10^{-7}보다 작은 오차로 일치한다. 반면 인쇄된 u^2 형태는 일치하지 않는다.

흔한 실수

- 1단계를 잊고 일정한 일률에 대한 방정식을 정지 상태부터 적분하는 것. 2단계의 방정식은 $w \geq u$일 때에만 성립한다. $w = 0$부터 적용하면 힘이 무한대가 되어야 한다.
- x에 대해 적분하면서 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$를 사용하는 것. 거리를 구할 때에는 가속도를 $w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$로 써야 한다.
- 1단계의 시간을 u/F로 쓰는 것. 가속도는 F가 아니라 F/M이다.

STEP 너머

일정한 일률 단계는 변수분리로 푸는 1계 미분방정식(differential equation)이며, 독립변수를 t에서 x로 바꾸는 것은 에너지 방법 전반에서 쓰이는 것과 같은 요령이다. $w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$를 적분하면 운동 에너지가 나오고, 이는 일-에너지 정리로, 나아가 퍼텐셜(potential)과 보존량(conserved quantity)으로 이어진다. 저속에서 힘에 상한을 두는 것은 실제 견인 방식이기도 하다. 일정한 일률의 전동기는 정지 상태에서 무한히 큰 힘을 낼 수 없기 때문이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 흐름을 따라 일, 에너지, 일률을 전개한다.

풀이

STEP I 1993, 문제 14

확률과 통계 • 지수분포를 따르는 대기 시간

STEP I 1993, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s1-q14

핵심 아이디어

중요한 것은 토드 씨(Mr Toad)의 속력이 아니라 마지막 1킬로미터를 가는 데 걸리는 시간 T이며, $T = 1/V$이다. V의 밀도함수(density)는 다루기 까다로워 보이지만 누적분포함수(cumulative distribution function)는 매우 간단하다. 이를 T에 대한 명제로 바꾸면 T가 모수 α인 지수분포(exponential distribution)를 따름을 알 수 있다. 그다음부터는 각 초록불 구간의 확률이 두 지수함수의 차가 되고, 모든 초록불 구간의 확률을 더하면 등비급수(geometric series)가 된다.

풀이

도착 시간의 분포

V를 분당 킬로미터 단위의 속력이라 하고, $T = 1/V$를 신호등이 초록불로 바뀐 순간부터 재어 그가 신호등에 도착하기까지 걸리는 시간(분)이라 하자.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{e}^{-\alpha/v} = \alpha v^{-2}\mathrm{e}^{-\alpha/v},$$

이고 $v \to 0^+$일 때 $\mathrm{e}^{-\alpha/v} \to 0$임을 알아차리면, V의 분포함수(distribution function)는

$$\mathrm{P}(V \le v) = \int_0^v \alpha u^{-2}\mathrm{e}^{-\alpha/u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\alpha/v} \qquad (v > 0).$$

이다. ($v \to \infty$일 때 이 값은 1로 수렴하므로, 이것은 제대로 된 밀도함수이다.) $V > 0$이므로 $t > 0$에 대하여 $T > t \iff 1/V > t \iff V < 1/t$이고, 따라서

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}\left(V < \tfrac{1}{t}\right) = \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

이다. 그러므로 T는 모수 α인 지수분포를 따른다.

? 생각해 보기 왜 V 대신 T를 다루는가?

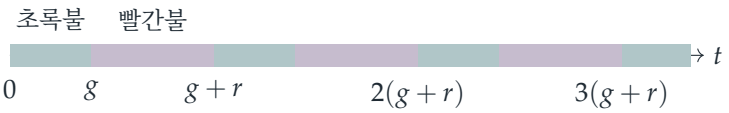
신호등은 시간으로 기술되므로, 우리가 관심 있는 모든 사건은 T의 값의 구간이다. V의 밀도함수를 직접 T의 밀도함수로 옮기려면 변수변환(change of variable)이 필요하지만, $\mathrm{P}(T > t)$를 거치면 그럴 필요 없이 한 줄로 답이 나온다.

한 번의 초록불 구간

시각 0에 신호등이 초록불로 바뀐다. 신호등은 $[0, g)$에서 초록불, $[g, g+r)$에서 빨간불, $[g+r, (g+r)+g)$에서 초록불이며, 이와 같이 계속된다. $(n+1)$번째 초록불 구간은 $n(g+r) \le t < n(g+r)+g$이다. T는 연속확률변수이므로 끝점의 포함 여부는 상관이 없고,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big(n(g+r) < T < n(g+r)+g\big) &= \mathrm{P}\big(T > n(g+r)\big) - \mathrm{P}\big(T > n(g+r)+g\big)\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)} - \mathrm{e}^{-\alpha(n(g+r)+g)},\end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. (인쇄된 시험지에는 두 번째 지수의 닫는 괄호가 잘못된 위치에 있다. 지수는 여기서처럼 $-\alpha\big(n(g+r)+g\big)$이어야 한다.) 이 계산은 $n = 0$일 때, 즉 신호등이 한 번도 빨간불로 바뀌기 전인 첫 번째 초록불 구간에서도 똑같이 성립한다.



초록불일 확률

그가 초록불에 통과하는 것은 T가 이 초록불 구간들 중 하나에 속할 때이고, 그때뿐이다. 이 구간들은 서로소이므로 $n = 0$을 포함하여 각 확률을 더하면 된다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)} - \mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)}\mathrm{e}^{-\alpha g}\right) = \left(1-\mathrm{e}^{-\alpha g}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}\right)^{n}\\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha g}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}},\end{aligned}$$

여기서 등비급수의 합을 구했는데, ($\alpha > 0$이고 $g+r > 0$이므로) $0 < \mathrm{e}^{-\alpha(g+r)} < 1$이어서 이 급수는 수렴한다.

극한

$\alpha \to \infty$일 때 ($g > 0, g+r > 0$이므로) $\mathrm{e}^{-\alpha g} \to 0$이고 $\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)} \to 0$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\alpha) \to \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

이다. 이는 타당하다. α가 크다는 것은 토드 씨가 매우 빠르다는 뜻이고, 그는 거의 항상 첫 번째 초록불 구간이 끝나기 전에 통과한다.

$\alpha \to 0$일 때는 분자와 분모가 모두 0으로 수렴하므로 더 신중해야 한다. 각각에서 $1-\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x}-1)$로 쓰면

$$\mathrm{P}(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha g}\left(\mathrm{e}^{\alpha g}-1\right)}{\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}\left(\mathrm{e}^{\alpha(g+r)}-1\right)} = \mathrm{e}^{\alpha r}\cdot\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha g}-1}{\alpha g}}{\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha(g+r)}-1}{\alpha(g+r)}}\cdot\frac{g}{g+r},$$

이다. 여기서 분자와 분모를 α로 나누고 인수 g와 $g+r$를 끼워 넣었다. $\alpha \to 0$일 때 $\mathrm{e}^{\alpha r} \to 1$이고, $\alpha g \to 0$이며 $\alpha(g+r) \to 0$이므로, $(\mathrm{e}^{x}-1)/x \to 1$에 의해 두 분수는 각각 1로 수렴한다. 그러므로

$$\mathrm{P}(\alpha) \to \frac{g}{r+g} \qquad \text{단, } \alpha \to 0.$$

이다. 이 경우 토드 씨는 매우 느리고 그의 도착 시간은 아주 많은 주기에 걸쳐 퍼져 있으므로, 초록불일 확률은 단순히 각 주기에서 초록불이 차지하는 비율이 된다.

검산

- $\alpha = 0.7, g = 1, r = 2$일 때 공식은 $\mathrm{P}(\alpha) \approx 0.5737$을 준다. $\mathrm{e}^{-\alpha/v}$의 역함수를 이용해 V를 추출하여 4×10^{5}번의 주행을 모의실험(simulation)한 결과는 0.5744였으며, 개별 초록불 구간 $n = 0, 1, 2$의 확률도 일치했다.
- $g = 1, r = 2$일 때 $\mathrm{P}(10^{-4}) \approx 0.33337$로 $\frac{1}{3}$에 가깝고, $\mathrm{P}(10) \approx 0.99995$이다.
- $r = 0$이면 신호등은 항상 초록불이고, 공식은 마땅히 그래야 하듯 모든 α에 대해 $\mathrm{P}(\alpha) = 1$을 준다.

흔한 실수

- $n = 0$을 빠뜨리는 것. 빨간불이 켜지기 전인 첫 번째 초록불 구간의 확률이 가장 크다.
- 인쇄된 지수 $-\alpha(n(g+r))+g$를 그대로 베끼는 것. 이는 $-\alpha\big(n(g+r)+g\big)$의 오식이다.
- V 자체를 도착 시간으로 다루거나, $\mathrm{E}(T)$를 구하려 하는 것. 사실 여기서 $\mathrm{E}(V)$는 무한대이지만, 문제의 어디에서도 그것이 필요하지 않다.

STEP 너머

분포함수를 통해 V의 분포를 $T = g(V)$의 분포로 바꾸는 것은 확률변수(random variable)를 변환하는 표준적인 방법이다. 여기서 V는 역지수분포(inverse-exponential distribution)를 따른다. 극한 $\alpha \to 0$은 일반적인 아이디어의 작은 예이다. 즉, 많은 주기에 걸쳐 퍼져 있는 무작위 시각은 각 단계에 그 단계의 길이에 비례하는 확률로 떨어지며, 이것이 재생 이론(renewal theory)의 출발점이다. Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 확률변수의 변환과 지수분포를 모두 다룬다.

풀이

STEP I 1993, 문제 15

확률과 통계 • 베이즈 정리

> **STEP I 1993, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q15

핵심 아이디어

이 문제는 이야기로 포장한 베이즈 정리(Bayes' theorem)이다. 요령은 **실제** 방향을 조건으로 놓고, 각 경우에 원주민이 내놓은 일련의 대답이 나올 가능성이 얼마나 되는지 묻는 것이다. Biscii는 언제나 거짓말을 하므로, Biscii의 반복된 대답은 언제나 서로 일치하고 언제나 틀린 방향을 가리킨다. 따라서 같은 대답이 반복될수록 상대가 Biscii일 가능성이 커지며, 바로 이 때문에 한 번 더 물어보는 것만으로 결정이 뒤집힐 수 있다.

풀이

Ascii만 생각하는 경우

Ascii는 이전 대답과 독립적으로(independent) 각 질문에 확률 $\frac{3}{4}$로 참말을 한다. 질문에 대한 대답은 두 가지(왼쪽 또는 오른쪽)뿐이므로, 두 대답이 같은 것은 두 대답이 모두 참이거나 모두 거짓일 때와 정확히 같다.

$$\mathrm{P}(\text{두 번 같은 대답}) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{10}{16} = \tfrac{5}{8},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. 이 가운데 "둘 다 참"인 경우가 $\frac{9}{16}$을 차지하므로, 조건부 확률(conditional probability)의 정의에 의해

$$\mathrm{P}(\text{참말을 함} \mid \text{두 번 같은 대답}) = \frac{9/16}{10/16} = \frac{9}{10},$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다.

"왼쪽"이라는 대답이 두 번 나온 경우

왼쪽이 올바른 방향인 사건을 L, 오른쪽이 올바른 방향인 사건을 R이라 하자. 원주민이 Ascii인 사건과 Biscii인 사건을 각각 A와 B라 하면 $\mathrm{P}(A) = \frac{11}{16}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{5}{16}$이고, 부족은 지리와 독립적으로 정해진다. 선장은 처음에 방향에 대해 아무것도 모르므로 $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$로 둔다. 원주민이 "왼쪽"이라고 두 번 대답하는 사건을 E_2라 하자.

? **생각해 보기** 왜 $\mathrm{P}(L \mid E_2)$보다 $\mathrm{P}(E_2 \mid L)$을 구하기가 더 쉬운가?

실제 방향을 알고 나면 각 부족의 행동이 완전히 정해지므로, 대답이 나올 확률을 쉽게 적을 수 있다. 그런 다음 베이즈 정리로 이 조건을 뒤집는다.

왼쪽이 올바른 방향이면, Ascii가 "왼쪽"이라고 두 번 말하는 것은 두 번 모두 참말을 하는 경우이고, 그 확률은 $\frac{9}{16}$이다. Biscii라면 거짓말을 하여 "오른쪽"이라고 말할 것이므로 E_2가 일어날 수 없다. 따라서

$$\mathrm{P}(E_2 \mid L) = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{9}{16} + \tfrac{5}{16} \cdot 0 = \tfrac{99}{256}.$$

오른쪽이 올바른 방향이면, Ascii가 "왼쪽"이라고 두 번 말하는 것은 두 번 모두 거짓말을 하는 경우로 그 확률은 $\frac{1}{16}$이고, Biscii는 반드시 "왼쪽"이라고 두 번 말한다. 따라서

$$\mathrm{P}(E_2 \mid R) = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{1}{16} + \tfrac{5}{16} \cdot 1 = \tfrac{11+80}{256} = \tfrac{91}{256}.$$

L과 R의 사전확률(prior)이 같으므로 베이즈 정리에서 약분된다.

$$\mathrm{P}(L \mid E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256} + \frac{1}{2} \cdot \frac{91}{256}} = \frac{99}{99+91} = \frac{99}{190}.$$

이 값은 $\frac{1}{2}$보다 크므로 왼쪽이 더 가능성이 높은 방향이다. 따라서 선장은 왼쪽으로 가야 하며, 이때 옳은 방향을 택할 확률은 $\frac{99}{190}$이다.

"왼쪽"이라는 대답이 세 번 나온 경우

"왼쪽"이라는 대답이 세 번 나오는 사건을 E_3이라 하자. 같은 추론을 이번에는 Ascii의 독립적인 세 대답에 적용한다.

$$\mathrm{P}(E_3 \mid L) = \tfrac{11}{16} \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 + \tfrac{5}{16} \cdot 0 = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{27}{64} = \tfrac{297}{1024},$$
$$\mathrm{P}(E_3 \mid R) = \tfrac{11}{16} \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 + \tfrac{5}{16} \cdot 1 = \tfrac{11}{1024} + \tfrac{320}{1024} = \tfrac{331}{1024}.$$

$\mathrm{P}(E_3 \mid R) > \mathrm{P}(E_3 \mid L)$이고 사전확률이 같으므로, 이제는 오른쪽이 더 가능성이 높은 방향이다. 정확히는

$$\mathrm{P}(R \mid E_3) = \frac{331}{297+331} = \frac{331}{628} > \frac{1}{2}.$$

따라서 선장은 **오른쪽**으로 가야 하며, 이때 옳은 방향을 택할 확률은 $\frac{331}{628}$이다.

생각해 보기 어떻게 세 번째 "왼쪽"이 왼쪽의 가능성을 **낮출** 수 있는가?

"왼쪽"이 하나 늘 때마다 $\mathrm{P}(E \mid L)$에서 Ascii가 기여하는 항에 $\frac{3}{4}$이 곱해진다. $\mathrm{P}(E \mid R)$에서는 Ascii 항이 $\frac{1}{4}$배로 줄어들지만 Biscii 항은 $\frac{5}{16}$에 그대로 머문다. 똑같은 대답이 길게 이어지는 것은 바로 Biscii가 만들어 내는 모습이므로, 증거는 점점 더 "이 사람은 거짓말쟁이다"라고 말하게 된다. 참말을 하는 Ascii도 일관된 대답을 하지만 그 확률은 $(\frac{3}{4})^n$에 불과하며, 이는 점점 0으로 줄어든다.

검산

- "왼쪽"이 한 번 나온 뒤의 가능도(likelihood)는 $\frac{11}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{64}$($L$이 주어졌을 때)과 $\frac{11}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{31}{64}$($R$이 주어졌을 때)이므로 $\mathrm{P}(L \mid \text{왼쪽}) = \frac{33}{64}$이다. 수열 $\frac{33}{64} \approx 0.516$, $\frac{99}{190} \approx 0.521$, $\frac{297}{628} \approx 0.473$은 증가했다가 감소하며, 이는 위의 설명과 일치한다.
- 대답의 수가 많아지면 Biscii 항이 지배적이 되므로 $\mathrm{P}(L \mid E_n) \to 0$이다.
- 네 확률을 모두 분수를 이용한 정확한 열거로 확인했고, 10^6번의 대화를 시뮬레이션하여서도 확인했다. 시뮬레이션 값은 0.5214(정확한 값 $\frac{99}{190} \approx 0.5211$)와 0.5266(정확한 값 $\frac{331}{628} \approx 0.5271$)이었다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$이라는 가정을 밝히지 않는 것. 방향에 대한 사전확률이 없으면 이 문제에 답할 수 없다.
- 첫 번째 부분에서 얻은 $\frac{9}{10}$을 전체 주민에게 적용하는 것. 이 값은 Ascii에 대해서만 성립하는 명제이다. Biscii도 매번 같은 대답을 두 번 한다.
- 원주민이 **누구이든** 세 대답을 독립으로 취급하는 것. 대답들은 부족(그리고 실제 방향)을 알고 난 뒤에만 독립이며, 그래서 먼저 조건을 거는 것이다.

STEP 너머

이 계산은 베이즈 갱신(Bayesian updating)의 한 예이다. 가능도비(likelihood ratio) 또는 베이즈 인수(Bayes factor)라고 부르는 비 $\mathrm{P}(E \mid R)/\mathrm{P}(E \mid L)$은 증거가 한 가설을 얼마나 강하게 지지하는지를 나타낸다. 부족은 모든 대답이 공유하는 숨은 변수(hidden variable)이므로 대답들은 **조건부로만** 독립(conditionally independent)이며, 한쪽을 가리키는 듯한 증거가 결국 반대쪽을 가리키게 될 수도 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 조건부 확률과 바로 이런 종류의 역설을 훌륭하게 다루고 있

다.

풀이

STEP I 1993, 문제 16

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP I 1993, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s1-q16

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.20 절 **뷔퐁의 바늘**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/buffon.html

핵심 아이디어

이것은 뷔퐁(Buffon)의 바늘(Buffon's needle) 문제이다. 핀이 가장 가까운 직선과 교차하는지는 오직 핀의 끝이 그 직선 **쪽으로** 얼마나 뻗어 있는지에만 달려 있고, 그 뻗은 길이는 핀의 절반을 수직 방향으로 사영(projection)한 것이다. 먼저 중심까지의 거리를 고정하고 각도만으로 조건부 확률(conditional probability)을 구한 다음, 거리에 대해 평균을 낸다. 첫 번째 부분의 적분은 바로 이 평균을 낼 때 나오는 적분이며, 그래서 문제가 거기서 시작하는 것이다.

풀이

적분

$y = \cos^{-1} t$로 치환(substitution)하면 $t = \cos y$이고 $\mathrm{d}t = -\sin y \,\mathrm{d}y$이다. $t = 0$일 때 $y = \frac{\pi}{2}$이고, $t = 1$일 때 $y = 0$이다. 따라서

$$\int_0^1 \cos^{-1} t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 y\,(-\sin y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y.$$

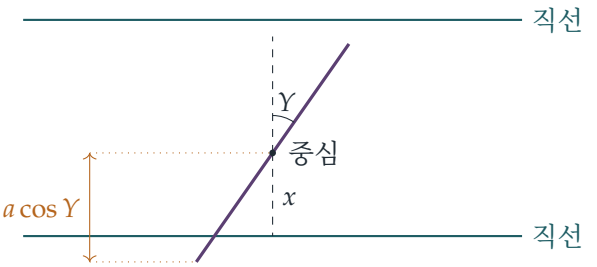
$u = y$, $\mathrm{d}v = \sin y\,\mathrm{d}y$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} y\sin y\,\mathrm{d}y &= \Big[-y\cos y\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y \\ &= 0 + \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1,\end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

(다른 방법: 이 적분은 $y = \cos^{-1} t$와 두 축 사이의 넓이이고, 이는 $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$에서 $t = \cos y$ 아래의 넓이와 같은 영역이므로 $\int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y = 1$이다.)

$X = x$일 때의 확률



핀의 각 절반은 길이가 a이고 직선들에 수직인 방향과 각 Y를 이루므로, 핀의 양 끝은 중심의 양쪽으로 수직 거리 $a\cos Y$만큼 떨어져 있다. 가장 가까운 직선은 중심에서 거리 x에 있으므로, 핀이 그 직선과 교차하는 것은 정확히

$$a\cos Y \;\ge\; x.$$

일 때이다. (핀의 끝이 직선에 딱 닿는 등호의 경우는 확률이 0이므로, 이를 포함하든 안 하든 상관없다.)

? **생각해 보기** $a\cos Y \ge x$를 어떻게 Y만에 대한 조건으로 바꿀 수 있을까?

cos는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 감소하므로, x/a가 도달 가능한 값인지에 따라 달라진다.

- $x \ge a$이면 $a\cos Y \le a \le x$이고 등호는 $Y = 0$이고 $x = a$일 때만 성립하므로, 확률은 0이다.
- $0 \le x < a$이면 $\cos Y \ge x/a$는 $Y \le \cos^{-1}(x/a)$와 동치이며, 여기서 $\cos^{-1}(x/a) \in (0, \frac{\pi}{2}]$이다. Y는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로

$$\mathrm{P}(\text{교차} \mid X = x) = \frac{\cos^{-1}(x/a)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}.$$

여기서 X와 Y의 독립성(independence)을 사용했다. 즉 $X = x$임을 알아도 Y는 여전히 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 균등분포를 따른다.

일반적인 던지기에 대한 확률

이제 $a < b$라 하자. X의 확률밀도함수(probability density function)는 $[0, b]$에서 $1/b$이다. $a < b$이므로 교차가 가능한 구간 $[0, a)$는 $[0, b]$ 안에 놓이고, $[a, b]$에서는 조건부 확률이 0이다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$\mathrm{P}(\text{교차}) = \int_0^b \mathrm{P}(\text{교차} \mid X = x)\, \frac{1}{b}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \int_0^a \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{a}\, \mathrm{d}x.$$

$x = at$, $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$로 치환하고 첫 번째 부분의 결과를 이용하면

$$\mathrm{P}(\text{교차}) = \frac{2a}{\pi b} \int_0^1 \cos^{-1} t\, \mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi b},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. $a < b$이므로 핀은 간격 $2b$보다 짧아서 두 번째 직선에는 결코 닿을 수 없다. 따라서 "어떤 직선과 교차한다"와 "가장 가까운 직선과 교차한다"는 같은 사건이다.

검산

- $a \to b$일 때 답은 $2/\pi \approx 0.637$로 수렴(converge)하는데, 이는 당연히 1보다 작다. 간격만큼 긴 핀이라도 여전히 직선들과 거의 평행하게 놓이는 경우가 많기 때문이다.
- 답은 a에 비례한다. 짧은 핀의 길이를 두 배로 하면 교차할 확률도 두 배가 되는데, 이는 교차 횟수의 기댓값이 길이에 대해 선형이라는 사실과 맞아떨어진다.
- 실제 기하적 상황(중심은 띠 전체에서 균등, 각도도 균등)을 $a = 1$, $b = 2$로 시뮬레이션한 결과, 4×10^5번 던졌을 때 0.3183을 얻었고, 이는 $1/\pi \approx 0.31831$과 비교된다. 중점 구적법(midpoint quadrature)으로는 $\int_0^1 \cos^{-1} t\, \mathrm{d}t = 1.0000000$을 얻었다.

흔한 실수

- $a \cos Y$ 대신 $a \sin Y$를 쓰는 것: 여기서 Y는 직선 자체가 아니라 직선에 **수직인 방향**으로부터 잰 각이다.
- 공식 $\frac{2}{\pi} \cos^{-1}(x/a)$를 가지고 조건부 확률을 $[0, b]$ 전체에서 적분하는 것: 이 공식은 $x > a$에서 정의되지 않으며, 그곳에서 조건부 확률은 0이다.
- X에 대해 평균을 낼 때 확률밀도 $1/b$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

뷔퐁은 18세기에 이 문제를 제시했으며, 이는 **기하학적 확률**(geometric probability)의 고전적인 예이다. 기하학적 확률에서는 확률을 매개변수 공간, 여기서는 직사각형 $[0, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

안의 넓이로 계산한다. 답에 π가 들어 있으므로, 핀을 던지면 π에 대한 (매우 느린) 몬테카를로(Monte Carlo) 추정값을 얻는다. 아름다운 확장인 "뷔퐁의 국수(Buffon's noodle)"는 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용하여, 어떤 모양의 곡선이든 교차 횟수의 기댓값이 오직 그 길이에만 달려 있음을 보여 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 연속 결합분포(joint distribution)와 이런 종류의 조건부 확률을 다룬다.

풀이

STEP II 1993, 문제 1

순수수학 • 조합 게임의 전략

> **STEP II 1993, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q1

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 세기 사실에 달려 있다. 두 사람 모두 나누어 배치할 수 있는 양이 정확히 9이므로, 베티가 모든 전장에서 애덤과 같거나 더 많으면서 한 전장에서는 확실히 이길 수는 없다. 그렇게 하려면 적어도 $9+1$이 필요하기 때문이다. 따라서 베티가 이길 때는 언제나 정확히 두 전장에서 이기고 나머지 한 전장에서 진다. 이 사실을 알고 나면 첫 번째 부분은 정해진 처방대로 풀리고, 두 순서쌍(triple)에 관한 부분은 짧은 경우 나누기(case analysis)가 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 "베티가 전장 i에서 이긴다"는 것은 $b_i > a_i$를 뜻하고, "애덤이 전장 i에서 이긴다"는 것은 $a_i > b_i$를 뜻하며, $a_i = b_i$인 전장은 비긴 것이다.

보조정리(lemma): 베티가 이기는 방법

베티의 순서쌍이 애덤의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)을 이긴다고 하자. 여기서 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$이다.

- 베티는 세 전장 모두에서 이길 수 없다. 그러려면 각 i에 대하여 $b_i \geq a_i + 1$이어야 하므로 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 12$가 되기 때문이다.
- 베티가 정확히 한 전장에서만 이긴다고 하자. 베티가 애덤보다 점수가 많으므로 애덤의 점수는 0이고, 따라서 나머지 두 전장은 비기거나 베티가 이긴다. 그러면 모든 i에 대하여 $b_i \geq a_i$이고 적어도 한 번은 등호가 성립하지 않으므로 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 9 + 1 = 10$이다. 이는 불가능하다.

베티는 애덤보다 점수가 많으므로 적어도 한 점은 얻는다. 따라서 베티는 **정확히 두** 전장에서 이긴다. 그러므로 베티가 (a_1, a_2, a_3)을 이길 필요충분조건은 어떤 두 전장 i, j에 대하여

$$b_i \geq a_i + 1, \qquad b_j \geq a_j + 1,$$

이 성립하고 나머지 전장 k에서 지는 것이다. 전장 k에서 지는 것은 저절로 성립한다는 점에 주목하자. $b_k = 9 - b_i - b_j \leq 9 - a_i - a_j - 2 = a_k - 2$이기 때문이다.

베티는 언제나 이길 수 있다

$a_1 \geq a_2 \geq a_3$이 되도록 전장에 번호를 붙이자. 그러면 $3a_1 \geq a_1 + a_2 + a_3 = 9$이므로 $a_1 \geq 3$이다. 베티는 애덤이 가장 강한 전장을 포기하고, 나머지 두 전장에서 애덤보다 하나씩 더 많이 배치한다.

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1 - 2,\ a_2 + 1,\ a_3 + 1).$$

이들은 합이 9인 음이 아닌 정수이다($a_1 - 2 \geq 1$이므로). $a_1 - 2 < a_1$이므로 베티는 전장 2와 3에서 이기고 전장 1에서 진다. 베티는 2점, 애덤은 1점을 얻으므로 베티가 이긴다.

애덤은 자신이 절대 이기지 못하도록 할 수 있다

$(a_1, a_2, a_3) = (9, 0, 0)$으로 잡자. $b_2, b_3 \geq 0$이므로 애덤은 전장 2나 3에서 점수를 얻을 수 없다. 따라서 애덤은 많아야 한 점을 얻으며, 그것도 전장 1에서 이길 때뿐이고, 이는 $b_1 \leq 8$을 뜻한다. 이 경우 $b_2 + b_3 = 9 - b_1 \geq 1$이므로 베티는 전장 2 또는 전장 3에 양수만큼 배치하여 적어도 한 점을 얻는다. 애덤의 점수는 0이거나, 1이면서 베티가 적어도 1점을 얻는다. 어느 경우에도 애덤은 베티보다 점수가 많지 않으므로, 베티가 무엇을 하든 애덤은 절대 이기지 못한다.

(전수 조사(brute force)를 해 보면 이 성질을 갖는 순서쌍은 $(9, 0, 0)$과 그 순서를 바꾼 것들뿐임을 알 수 있다. 다른 순서쌍에 대해서는 베티가 어리석은 선택을 하여 애덤에게 승리를 내주는 경우가 있다.)

두 순서쌍: $(5, 3, 1)$과 $(3, 1, 5)$

어떤 순서쌍 (b_1, b_2, b_3)도 두 순서쌍을 모두 이길 수 없음을 보여야 한다. 보조정리에 의하여 베티는 각 순서쌍에 대해 두 전장에서 이겨야 한다.

$(5, 3, 1)$**에 대하여.** 전장 1과 2에서 이기려면 $6 + 4 = 10 > 9$가 필요하므로 불가능하다. 따라서 베티는 전장 3과 함께 전장 1 또는 전장 2에서 이겨야 한다.

$$b_3 \geq 2 \quad \text{그리고} \quad (b_1 \geq 6 \ \text{또는}\ b_2 \geq 4). \tag{A}$$

$(3, 1, 5)$**에 대하여.** 전장 1과 3에서 이기려면 $4 + 6 = 10 > 9$가 필요하므로 불가능하다. 따

라서 베티는 전장 2와 함께 전장 1 또는 전장 3에서 이겨야 한다.

$$b_2 \geq 2 \quad \text{그리고} \quad (b_1 \geq 4 \text{ 또는 } b_3 \geq 6). \tag{B}$$

생각해 보기 두 조건 모두 전장을 고르는 선택을 포함한다. 어떤 경우도 빠뜨리지 않고 이 둘을 어떻게 결합할 수 있을까?

(B)의 두 번째 선택에 따라 경우를 나누자.

- $b_3 \geq 6$이면 $b_1 + b_2 \leq 3$이므로 $b_1 \geq 6$도 $b_2 \geq 4$도 성립할 수 없고, 이는 (A)에 모순이다.
- $b_1 \geq 4$이면, (B)의 $b_2 \geq 2$와 (A)의 $b_3 \geq 2$에 (A)의 선택지를 더하여

  $$b_1 + b_2 + b_3 \geq 6 + 2 + 2 = 10 \qquad \text{또는} \qquad b_1 + b_2 + b_3 \geq 4 + 4 + 2 = 10.$$

  을 얻는다. 합이 9이므로 둘 다 불가능하다.

모든 경우가 모순에 이르므로, 어떤 순서쌍 하나도 $(5,3,1)$과 $(3,1,5)$를 모두 이길 수 없다. 따라서 요구한 대로 애덤은 이 두 순서쌍으로 이긴다.

검산

순서쌍은 $\binom{11}{2} = 55$개뿐이므로 모든 것을 전수 조사로 확인할 수 있다. 컴퓨터로 확인하면 애덤의 55개 순서쌍 모두가 위의 베티의 처방에 지고, 이기는 모든 응수는 정확히 두 전장에서 이긴다. 또한 $(5,3,1)$을 이기는 순서쌍 13개와 $(3,1,5)$를 이기는 순서쌍 13개를 나열해 보면, 두 목록에 공통인 순서쌍은 없다. 구체적인 예로, $(4,2,3)$은 $(3,1,5)$를 2–1로 이기지만, $(5,3,1)$에 대해서는 전장 3에서만 이기고 전장 1과 2에서 지므로 1–2로 진다.

흔한 실수

- 애덤의 "절대 이기지 않는" 순서쌍으로 $(3,3,3)$을 시도하는 것. 베티가 $(2,2,5)$를 내면 1–2로 지므로, 이 순서쌍으로 애덤은 이길 **수 있다**.
- 베티가 한 전장에서만 이겨서 승리하려면 애덤이 한 점도 얻지 못해야 한다는 점을 잊고, 합이 9라는 사실로 그 경우를 배제하지 않는 것.
- 두 순서쌍에 관한 부분에서 **어떤** 응수도 통하지 않음을 증명하는 대신 $(6,0,3)$이나 $(0,2,7)$ 같은 자연스러운 응수 몇 개만 확인하는 것.

STEP 너머

블로토 대령(Colonel Blotto) 게임은 게임 이론(game theory)의 고전이다. 베티는 모든 정보를 알고 나중에 두므로 언제나 이기며, 따라서 흥미로운 형태는 두 사람이 동시에 두는 경우이다. 이때는 보통 최선의 순수 전략(pure strategy)이 존재하지 않고, 해는 **혼합 전략**(*mixed strategy*), 즉 순서쌍들 위의 확률분포(probability distribution)가 된다. 이러한 해의 존재는 폰 노이만(von Neumann)의 최소최대 정리(minimax theorem)가 보장한다. 이 문제의 두 순서쌍 변형은 그 방향으로 나아가는 첫걸음이다. 애덤의 최선의 방어는 여러 순서쌍에 선택을 분산하는 것이기 때문이다. 같은 정신의 문제들은 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 보라. 혼합 전략을 뒷받침하는 확률 도구는 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)을 보라.

풀이

STEP II 1993, 문제 2

순수수학 • 삼각함수 적분과 대수적 적분

STEP II 1993, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q2

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 코사인의 곱은 적분하기 까다롭지만 합은 쉽게 적분할 수 있으므로, 곱을 합으로 바꾸는 공식(factor formula)을 써서 곱을 합으로 바꾼다. 그러면 모든 것이 한 가지 사실에 달려 있다. $\cos kx$를 한 주기(period) 전체에 걸쳐 적분하면 $k = 0$이 아닌 한 0이 된다는 것이다. 특수한 경우는 정확히 $m - n$ 또는 $m + n$이 0인 경우이다. 소문항 (ii)에서는 제곱근 안을 하나의 분수로 합친 뒤 유리화(rationalise)하는데, 그러면 피적분함수(integrand)가 표준적인 두 부분으로 나뉜다.

풀이

소문항 (i)

곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\cos A\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$에 의해

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}\big[\cos\big((m-n)x\big) + \cos\big((m+n)x\big)\big].$$

이다. 따라서 정수 k에 대하여 $\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x$를 구하면 된다.

$$\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\sin 2k\pi}{k} = 0, & k \neq 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi, & k = 0. \end{cases}$$

여기서 k가 정수이므로 $\sin 2k\pi = 0$임을 이용했다. $k = 0$일 때는 k로 나눌 수 없으므로 이 경우를 따로 다룬다.

? **생각해 보기** 서로 다른 경우는 몇 가지이며, 겹치는 경우가 있는가?

$k = m - n$과 $k = m + n$은 각각 0이거나 0이 아니며, 둘 다 0인 것은 $m = n = 0$일 때뿐이다. 따라서 다음 세 가지 경우가 생긴다.

- $m \neq n$이고 $m \neq -n$, 즉 $|m| \neq |n|$인 경우: 두 적분이 모두 0이 되므로 답은 0이다.
- $m - n, m + n$ 중 정확히 하나가 0, 즉 $|m| = |n| \neq 0$인 경우: 한 항은 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$를, 다른 항은 0을 기여하므로 답은 π이다.
- $m = n = 0$인 경우: 두 항이 모두 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$를 기여한다. (직접 보아도 피적분함수가 1이다.) 답은 2π이다.

정리하면

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & |m| \neq |n|, \\ \pi, & |m| = |n| \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

이다. cos는 우함수(even function)여서 $\cos(-nx) = \cos(nx)$이므로, $m = -n$인 경우는 $m = n$인 경우와 같은 부류에 속한다는 점에 주목하자.

소문항 (ii)

피적분함수 $\sqrt{1 + 1/x} = \sqrt{(x+1)/x}$는 $(x+1)/x \geq 0$일 때, 즉 $x > 0$ 또는 $x \leq -1$일 때만 실수이다. 먼저 $x > 0$인 경우를 다룬다.

$x > 0$인 경우. 근호 안의 분자와 분모에 $x + 1$을 곱하면

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}},$$

이다. 여기서 $(x+1)^2$의 제곱근을 구할 때 $x + 1 > 0$임을 이용했다. 이제 분자의 한 부분이 $x^2 + x$의 도함수(derivative)의 절반이 되도록 분자를 나눈다.

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

생각해 보기 $1/\sqrt{x^2+x}$는 어떻게 적분하는가?

완전제곱식으로 고치면(complete the square) $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$이다. 그러면 $u > a > 0$에서 성립하는 표준 결과 $\int (u^2 - a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)$에 $u = x + \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$를 적용할 수 있다.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}} = \ln\left(x + \tfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right) + \text{const} = \ln\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}\right) + \text{const}.$$

첫 번째 부분은 $\int \frac{1}{2}(2x+1)(x^2+x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}$이다. 따라서 $x>0$에 대하여

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) + C.$$

이다. $2x+1+2\sqrt{x^2+x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2$이므로, 이것을

$$\sqrt{x(x+1)} + \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + C.$$

로 쓸 수도 있다. 치환(substitution) $x = \sinh^2 t$를 쓰면 이 두 번째 꼴이 바로 나온다. 피적분함수는 $2\cosh^2 t = 1+\cosh 2t$가 되고, 이를 적분하면 $t + \sinh t \cosh t$이다.

$x \le -1$인 경우. 이제 $x+1 \le 0$이므로 $\sqrt{(x+1)^2} = -(x+1)$이고

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = -\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

이다. 같은 방식으로 나눌 수 있지만, 이번에는 $x+\frac{1}{2} < 0$이므로 $|u| > a$에서 성립하는 $\int (u^2-a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|$가 필요하다. $x<-1$에 대하여

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right| + C.$$

이다. $\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right) = 1$이므로 로그 항을 $+\frac{1}{2}\ln\left|2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right|$로 쓸 수도 있다.

검산

- 소문항 (i): $m=n=1$이면 피적분함수는 $\cos^2 x$이고 그 평균은 $\frac{1}{2}$이므로, 적분값은 예상대로 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$이다. $-6 \le m,n \le 6$인 모든 쌍에 대하여 수치 계산(심프슨 공식(Simpson's rule))을 한 결과가 세 경우로 나눈 공식과 일치했다.
- 소문항 (ii): 답을 미분해 본다. $\sqrt{x^2+x}$의 도함수는 $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$이다. $\frac{1}{2}\ln(\cdots)$의 도함수는 $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$이다. 둘을 더하면 원하는 대로 $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$가 된다.
- 수치적으로, 심프슨 공식으로 계산해도, 공식 $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$로 계산해도 $\int_1^3 \sqrt{1+1/x}\,\mathrm{d}x \approx 2.48547$이다.

흔한 실수

- $m=-n\neq 0$인 경우를 빠뜨리는 것. 이 경우도 $m=n\neq 0$인 경우와 마찬가지로 π가 된다.

- $k = 0$일 때 $\dfrac{\sin kx}{k}$라고 쓰는 것. 이 경우는 따로 다루어야 한다.
- 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$이라고 쓰는 것. 그러면 $x < -1$에서 틀린 답이 나온다.

STEP 너머

소문항 (i)은 함수 $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$가 $[0, 2\pi]$에서 **직교**(orthogonal)한다는 것을 말해 준다. 이것이 푸리에(Fourier) 급수(Fourier series)의 바탕이 되는 사실이다. $f(x) = \sum a_n \cos nx$이면, $\cos mx$를 곱하여 적분할 때 계수 a_m 하나만 골라진다. 적분이 내적(dot product)의 역할을 하는 이 같은 생각은 함수 공간에서의 선형대수(linear algebra)의 많은 부분의 밑바탕이 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 직교성을 다루고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 푸리에 급수가 열 방정식(heat equation)을 푸는 데 실제로 쓰이는 모습을 보여 준다.

풀이

STEP II 1993, 문제 3

순수수학 • 리카티 미분방정식

STEP II 1993, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q3

핵심 아이디어

두 방정식 모두 y^2 항 때문에 비선형(nonlinear)이므로, 표준적인 일계(first-order) 풀이법을 바로 적용할 수 없다. 주어진 치환(substitution)은 바로 이 y^2 항을 없애도록 고안된 것이다. (i)에서는 y를 u'/u의 상수배로 쓰면 제곱 항들이 상쇄되어 상수 계수(constant coefficients)를 갖는 선형 이계(linear second-order) 방정식이 남는다. (ii)에서는 마침 $y = 1/x$가 정확한 해이므로, $y = 1/x + 1/v$로 쓰면 방정식이 v에 대한 선형 일계 방정식이 되고, 이는 적분인자(integrating factor)로 풀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$y = -\dfrac{u'}{3u}$로 놓자. 여기서 $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$이다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u''}{3u} + \frac{(u')^2}{3u^2}, \qquad \text{그리고} \qquad 3y^2 = 3 \cdot \frac{(u')^2}{9u^2} = \frac{(u')^2}{3u^2}.$$

따라서 까다로운 항들이 상쇄된다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2 = -\frac{u''}{3u}.$$

그러므로 방정식 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y - 3y^2 = -2$는 다음과 같이 된다.

$$-\frac{u''}{3u} + \frac{u'}{3u} = -2.$$

양변에 $-3u$를 곱하면($u \neq 0$이어야 하는데, 이는 어차피 y가 정의되기 위해 필요한 조건이다)

$$u'' - u' - 6u = 0.$$

특성방정식(auxiliary equation)은 $m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2) = 0$이므로 $m = 3$ 또는 $m = -2$이고,

$$u = Ae^{3x} + Be^{-2x}$$

이다. 여기서 A와 B는 상수이며 둘 다 영은 아니다. 그러면 $u' = 3Ae^{3x} - 2Be^{-2x}$이고

$$y = -\frac{u'}{3u} = \frac{2Be^{-2x} - 3Ae^{3x}}{3\left(Ae^{3x} + Be^{-2x}\right)}.$$

> ? **생각해 보기** 일계 방정식에는 임의상수(arbitrary constant)가 하나 있어야 한다. 그런데 왜 두 개가 나왔을까?

중요한 것은 A와 B의 비뿐이다. u에 영이 아닌 상수를 곱해도 u'/u는 변하지 않기 때문이다. $A \neq 0$이면 분자와 분모를 Ae^{3x}로 나누고 $K = B/A$로 쓰면

$$y = \frac{2Ke^{-5x} - 3}{3\left(1 + Ke^{-5x}\right)} = \frac{2K - 3e^{5x}}{3\left(e^{5x} + K\right)},$$

이고, 여기서 K는 임의상수이다. $A = 0$인 경우는 상수해 $y = \frac{2}{3}$을 주는데, 이는 $K \to \infty$일 때 이 해들의 극한이다. $K = 0$으로 두면 또 다른 상수해 $y = -1$을 얻는다. 검산해 보면, 상수해는 $-y - 3y^2 = -2$, 즉 $(3y-2)(y+1) = 0$을 만족한다.

소문항 (ii)

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$로 놓자. 그러면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2},$$

이므로

$$\begin{aligned} x^2\frac{dy}{dx} &= -1 - \frac{x^2v'}{v^2}, \\ xy &= 1 + \frac{x}{v}, \\ x^2y^2 &= x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}\right) = 1 + \frac{2x}{v} + \frac{x^2}{v^2}. \end{aligned}$$

이 세 줄을 더하면 방정식 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$은

$$1 - \frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 1, \qquad \text{즉,} \qquad -\frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 0.$$

이 된다. 양변에 v^2/x^2를 곱하면(방정식이 요구하는 대로 $x \neq 0$이다) 다음 선형 방정식을 얻는다.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}v = 1.$$

적분인자는 $\exp\left(-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = x^{-3}$이다(구간 $x > 0$과 $x < 0$ 중 어느 쪽에서든 그렇다. 적분인자의 상수배도 똑같이 적분인자 역할을 하므로 절댓값 기호는 떼어도 된다). 따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c \quad\Longrightarrow\quad v = cx^3 - \tfrac{1}{2}x = \frac{x\left(Kx^2-1\right)}{2},$$

이고, 여기서 c는 임의상수이며 $K = 2c$이다. 그러므로

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\left(Kx^2-1\right)} = \frac{Kx^2+1}{x\left(Kx^2-1\right)},$$

이고 K는 임의상수이다. $K = 0$으로 두면 $y = -1/x$를 얻는다. 이 치환은 $1/v$가 존재한다고 가정했으므로 $y = 1/x$ 자체("$v = \infty$")는 놓친다. $x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1 + 1 = 1$이므로 이것 역시 해이며, $K \to \infty$일 때 이 해들의 극한이다.

검산

- (i)에서 $x = 0$일 때 해는 $y(0) = \dfrac{2K-3}{3(1+K)}$이다. $x \to +\infty$이면 $y \to -1$이고, $x \to -\infty$이면 $y \to \frac{2}{3}$이다($K \neq 0$일 때). 따라서 해들은 한 상수해에서 다른 상수해로 이어지며, 이는 예상한 대로이다.
- (ii)에서 $K = 1$, $x = 2$로 두면 $y = \frac{5}{6}$이고 $y'(2) = -\frac{31}{36}$이다. 그러면 $x^2y' + xy + x^2y^2 = -\frac{31}{9} + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} = 1$로, 요구한 대로 성립한다.
- 두 일반해(general solution) 모두 수백 개의 무작위 점과 K 값에서 유한차분(finite differences)으로 수치적으로 확인하였다. 원래 방정식의 잔차(residual)는 반올림 오차 범위 안에서 영이었다.

흔한 실수

- (i)의 답에 두 상수 A, B를 그대로 남겨 두고, 그 비만 중요하다는 점을 알아차리지 못한다.
- (ii)에서 x^2y^2의 교차항에 있는 인수 2를 빠뜨려 $3v/x$가 $2v/x$가 되고, 그 결과 잘못된 적분인자를 얻는다.
- 치환으로는 얻을 수 없는 해 $y = 1/x$(또는 (i)의 $y = \frac{2}{3}$)를 놓친다.

STEP 너머

$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ 꼴의 방정식을 리카티 방정식(Riccati equations)이라고 한다. 여기서 쓴 두 기법은 모두 일반적으로 통한다. 치환 $y = -u'/(ru)$는 리카티 방정식을 언제나 선형 이계 방정식으로 바꾼다. 또한 특수해(particular solution) y_1 하나를 알고 있다면, $y = y_1 + 1/v$는 언제나 v에 대한 선형 일계 방정식을 준다. 리카티 방정식과 선형 이계 방정식 사이의 이 연결은 양자역학(quantum mechanics)과 제어 이론(control theory)에서도 다시 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 리카티 방정식에 관한 연습문제가 있다.

풀이

STEP II 1993, 문제 4

순수수학 • 꼬인 위치의 직선과 최근접 거리

STEP II 1993, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q4

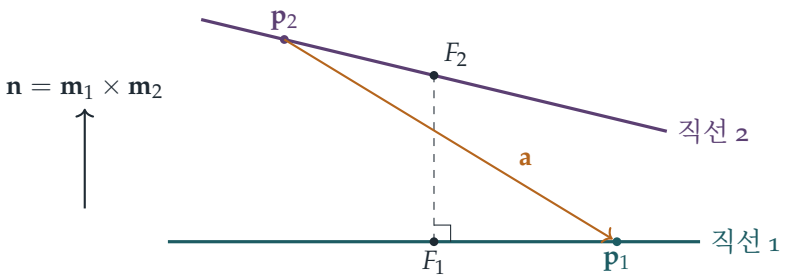
핵심 아이디어

한 직선 위의 점과 다른 직선 위의 점을 잇는 벡터(vector)는 모두 공통법선(common normal) $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ 방향의 성분이 같다. 어느 직선을 따라 움직여도 $\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{m}_2$의 실수배만 더해지는데, 이 두 벡터는 그 법선에 수직이기 때문이다. 이 고정된 성분이 바로 최단 거리(shortest distance)이다. 비행기 문제에서는 A_2의 기준틀(frame)에서 생각하는 것이 요령이다. A_2에서 A_1으로 가는 벡터는 **하나의** 직선을 따라 움직이므로, 가장 가까이 접근하는 거리는 점과 직선 사이의 거리가 된다.

풀이

두 직선 사이의 최단 거리

$\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, $\mathbf{n} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$라 하자. 이 벡터는 두 직선이 평행하지 않으므로 영벡터가 아니며, $\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{m}_2$ 모두에 수직이다.



그림은 두 직선(꼬인 위치(skew)에 있으므로 만나지 않는다), $\mathbf{p}_2$에서 $\mathbf{p}_1$으로 가는 벡터 $\mathbf{a}$,

그리고 $\mathbf{n}$에 평행한 공통수선(common perpendicular) F_1F_2를 보여 준다.

직선 2 위의 점에서 직선 1 위의 점으로 가는 일반적인 벡터는

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2.$$

이다. $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$이므로, 단위법선벡터 $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ 방향의 성분은

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

이고, 이 값은 t_1, t_2를 어떻게 택하든 같다. 벡터의 길이는 그 어떤 성분보다도 작지 않으므로 $|\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}|$이고, 등호는 $\mathbf{d}$가 $\mathbf{n}$에 평행할 때, 그리고 그때에만 성립한다. 등호는 실제로 성립한다. $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n}$은 한 평면 위에 있지 않으므로 기저(basis)를 이루고, 따라서 $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m}_1 + \beta\mathbf{m}_2 + \gamma\mathbf{n}$으로 쓸 수 있다. $t_1 = -\alpha$, $t_2 = \beta$로 택하면 $\mathbf{d} = \gamma\mathbf{n}$만 남는다. 이렇게 택한 값이 그림의 수선의 발 F_1, F_2를 준다. 그림에서 최단 거리는 $\mathbf{n}$ 방향으로 잰 $\mathbf{a}$의 "높이"이다. 따라서 최단 거리는

$$|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \frac{|(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}.$$

이다.

소문항 (i)

여기서 $\mathbf{a} = (1,1,1)$이다. $\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{m}_2$를 영이 아닌 임의의 실수배로 바꾸어도 분자와 분모에서 그 인수가 약분되므로 공식은 변하지 않는다. 따라서 $(4,3,0)$과 $(0,-3,1)$을 써도 된다.

$$(4,3,0) \times (0,-3,1) = (3,-4,-12), \qquad |(3,-4,-12)| = \sqrt{9+16+144} = 13.$$

그러면 $(1,1,1) \cdot (3,-4,-12) = -13$이므로 최단 거리는 $13/13 = 1$이다.

소문항 (ii)

시각 t에 두 비행기는 $\mathbf{p}_1 + v_1 t\,\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{p}_2 + v_2 t\,\mathbf{m}_2$에 있으므로, A_2에서 A_1으로 가는 벡터는

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} = v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2.$$

이다. $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$가 평행하지 않으므로 (두 속력이 모두 0이 아닌 한) $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$이다. 비행은 $t = 0$ 이전과 이후의 모든 시각을 포함한다고 보자. 그러면

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} + t^2|\mathbf{w}|^2,$$

이고, 이는 최고차항의 계수가 양수인 t에 대한 이차식이다. 완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{w}|^2\Big(t + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\Big)^2 + |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{w})^2}{|\mathbf{w}|^2},$$

이므로, $t = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}/|\mathbf{w}|^2$에서의 최솟값은

$$d^2 = \frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|^2\,|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2 - [(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(v_1\mathbf{m}_1-v_2\mathbf{m}_2)]^2}{|v_1\mathbf{m}_1-v_2\mathbf{m}_2|^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 기하적으로 d는 원점에서 직선 $\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{w}$까지의 거리이며, θ를 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{w}$ 사이의 각이라 하면 이 거리는 $|\mathbf{a}|\sin\theta$이다.

소문항 (iii)

먼저 계산이 필요 없는 하한부터 보자. 매 순간 A_1은 직선 1 위에, A_2는 직선 2 위에 있으므로, 소문항 (i)에 의해 $d \geq 1$이다. 등호가 성립하려면 두 비행기가 **동시에** 수선의 발 F_1, F_2에 있어야 한다.

> **생각해 보기** A_2의 조종사가 실제로 그렇게 만들 수 있을까?

수선의 발을 구하자. $\mathbf{a}+t_1\mathbf{m}_1-t_2\mathbf{m}_2$가 $\mathbf{m}_1$과 $\mathbf{m}_2$에 수직이라는 조건에 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_1 = \frac{7}{5}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}$, $\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{9}{5\sqrt{10}}$를 대입하여 두 일차방정식을 풀면

$$t_1 = -\tfrac{20}{13}, \qquad t_2 = \tfrac{\sqrt{10}}{13}.$$

을 얻는다. A_1은 시각 $t_1/v_1 < 0$에 F_1에 있지만, $v_2 > 0$이면 A_2는 시각 $t_2/v_2 > 0$에 F_2에 있다. 이 두 시각은 결코 같을 수 없다. F_1은 $\mathbf{p}_1$의 뒤쪽에 있고 F_2는 $\mathbf{p}_2$의 앞쪽에 있기 때문이다. 따라서 A_2가 $\mathbf{m}_2$ 방향으로 비행하면 $d=1$이라는 값에 도달할 수 없다. 어떤 값에 도달할 수 있는지 알아보기 위해 소문항 (ii)를 이용한다.

$v_2 = \sqrt{10}\,\lambda v_1$로 놓자. 즉 λ는 척도를 조정한 속력의 비이다. 그러면

$$\mathbf{w} = v_1\left(\tfrac{1}{5}(4,3,0) - \lambda(0,-3,1)\right) = \tfrac{v_1}{5}(4,\ 3+15\lambda,\ -5\lambda),$$

이고, 인수 $\frac{v_1}{5}$는 d^2의 공식에서 약분된다. $|\mathbf{a}|^2 = 3$이므로

$$\mathbf{a}\cdot(4,3+15\lambda,-5\lambda) = 7+10\lambda, \qquad |(4,3+15\lambda,-5\lambda)|^2 = 25+90\lambda+250\lambda^2,$$

이고, 따라서

$$d^2 = 3 - \frac{(7+10\lambda)^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26+130\lambda+650\lambda^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26}{5}\cdot\frac{1+5\lambda+25\lambda^2}{5+18\lambda+50\lambda^2}.$$

이다. 마지막 분수 N/D를 미분(differentiation)하면 도함수(derivative)의 분자는 다음과 같이 간단해진다.

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (5+50\lambda)(5+18\lambda+50\lambda^2) - (1+5\lambda+25\lambda^2)(18+100\lambda) \\ &= 7+150\lambda+200\lambda^2 = (1+20\lambda)(7+10\lambda). \end{aligned}$$

따라서 모든 실수 λ의 함수로 볼 때, d^2은 $\lambda = -\frac{7}{10}$에서 최댓값을 갖고(이때 $\mathbf{a} \perp \mathbf{w}$이고 $d = \sqrt{3}$), $\lambda = -\frac{1}{20}$에서 최솟값을 가지며, 그 최솟값은

$$d^2 = \frac{26}{5} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}{5 - \frac{9}{10} + \frac{1}{8}} = \frac{26}{5} \cdot \frac{13/16}{169/40} = 1.$$

이다. 이것이 바로 하한 $d = 1$이며, $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$일 때 도달한다. 이는 수선의 발에서 얻은 t_2/t_1과 일치한다.

따라서 두 비행기는 두 직선 사이의 최단 거리인 $d = 1$까지 가까워질 수 있으며, 그보다 더 가까워질 수는 없다. 이를 이루려면 A_2의 조종사는 직선 $\mathbf{2}$를 따라 $-\mathbf{m}_2$ 방향으로 속력 $\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$로 비행하면 된다. 문제의 기호로는 $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$인데, 이는 속력이라기보다 $\mathbf{m}_2$ 방향의 속도이다. 그러면 두 비행기는 같은 순간에 공통수선의 발에 도달한다. 이는 소문항 (i)의 답을 재현하며, 아마도 출제자가 의도한 답일 것이다. 답이 비 v_2/v_1에만 의존한다는 점에 주목하자.

양의 속력에 대한 참고. v_2가 진짜 속력이어야 해서 $v_2 > 0$이고 $\lambda > 0$이라면, $(1 + 20\lambda)(7 + 10\lambda) > 0$이므로 d^2은 v_2에 대해 순증가한다.

$$d^2 \to \frac{26}{25} \quad \text{조건: } v_2 \to 0^+, \qquad d^2 \to \frac{13}{5} \quad \text{조건: } v_2 \to \infty.$$

이렇게 해석하면 최선의 속력은 없다. 조종사는 느리게 날수록 유리하며, 가장 가까운 접근 거리는 $\mathbf{p}_2$에서 직선 $\mathbf{1}$까지의 거리인 $\frac{\sqrt{26}}{5} \approx 1.020$에 원하는 만큼 가깝게 만들 수 있지만, 결코 그 값에 도달하지는 못한다.

검산

- (i)의 공통수선: $t_1 = -\frac{20}{13}$, $t_2 = \frac{\sqrt{10}}{13}$일 때 두 점을 잇는 벡터는 $\frac{1}{13}(-3, 4, 12)$이고, 이는 $(3, -4, -12)$에 평행하며 길이가 정확히 1이다.
- 컴퓨터로 임의의 속력들에 대해 직접 탐색하여 $|\mathbf{r}(t)|$를 최소화했더니 (ii)의 공식과 10^{-6} 이내로 일치했다. 또한 v_2/v_1을 $[-2, 2]$ 범위에서 훑어본 결과, 최솟값은 $v_2/v_1 \approx -0.1581 = -1/(2\sqrt{10})$에서 $d^2 = 1.0000$이었고, $v_2 > 0$에서는 d^2이 1.04부터 증가했다.
- 극한의 경우: $v_2 = 0$이면 A_2는 $\mathbf{p}_2$에 고정된 점이 되고, $3 - (\frac{7}{5})^2 = \frac{26}{25}$는 실제로 $\mathbf{p}_2$에서 직선 $\mathbf{1}$까지의 거리의 제곱이다.

흔한 실수

- 두 비행기가 같은 순간에 공통수선의 발에 도달할 수 있는지 확인하지 않고 (iii)에 "소문항 (i)에 의해 1"이라고 답하는 것.

- (ii)의 공식이 $\mathbf{w}$의 크기를 바꾸어도 변하지 않는다는 사실을 잊고, 여러 쪽에 걸친 계산 내내 v_1을 달고 다니는 것.
- 직선 사이의 거리 공식에서 절댓값을 빠뜨려 -1을 얻는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 **정사영**(orthogonal projection)의 작은 예이다. d는 $\mathbf{a}$의 성분 중 $\mathbf{w}$에 수직인 성분의 길이이고, $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})^2 = |\mathbf{a}\times\mathbf{w}|^2$은 그람 행렬식(Gram determinant), 즉 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{w}$로 만든 평행사변형의 넓이의 제곱이다. 대학의 첫 선형대수학 강의에서 배우는 최소제곱 근사(least-squares fitting)도 같은 사영의 아이디어에 바탕을 둔다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이를 훌륭하게 전개한다.

풀이

STEP II 1993, 문제 5

순수수학 • 극곡선과 곡선의 길이

> **STEP II 1993, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q5

핵심 아이디어

R에서의 직각 덕분에 작은 삼각형 PQR의 모든 길이를 직각삼각형 ORQ로부터 읽어 낼 수 있으며, 이때 필요한 것은 OQ와 작은 각 $\delta\theta$뿐이다. $Q \to P$일 때의 극한(limit)을 취하면 현(chord) PQ가 접선(tangent)으로 바뀐다. 나선의 경우 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$가 r의 상수배이므로 $r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$는 어디서나 같고, 호의 길이(arc length)를 구하는 적분의 피적분함수는 단순한 지수함수가 된다.

풀이

곡선과 동경 사이의 각

점 R는 직선 OP(의 연장선) 위에 있고, $\angle ORQ$는 직각이다. 직각삼각형 ORQ에서 빗변(hypotenuse)은 $OQ = r + \delta r$이고 O에서의 각은 $\delta\theta$이므로

$$QR = (r+\delta r)\sin\delta\theta, \qquad OR = (r+\delta r)\cos\delta\theta.$$

$OP = r$이므로 $PR = OR - OP = (r+\delta r)\cos\delta\theta - r$이다. 삼각형 PRQ는 R에서 직각인 직각삼각형이므로

$$\tan\angle QPR = \frac{QR}{PR} = \frac{(r+\delta r)\sin\delta\theta}{(r+\delta r)\cos\delta\theta - r}.$$

$\delta\theta$가 작을 때 $\sin\delta\theta = \delta\theta + O(\delta\theta^3)$이고 $\cos\delta\theta = 1 + O(\delta\theta^2)$이므로

$$\tan\angle QPR = \frac{r\,\delta\theta + \delta r\,\delta\theta + \cdots}{\delta r + O(\delta\theta^2)} = \frac{r\dfrac{\delta\theta}{\delta r} + \delta\theta + \cdots}{1 + O\left(\dfrac{\delta\theta^2}{\delta r}\right)},$$

이다. 여기서 점들은 나타낸 항들에 비해 작은 항들이다. $Q \to P$이면 δr와 $\delta\theta$가 모두 0으로 가고 $\delta\theta/\delta r \to \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$이다. 따라서 $\delta\theta^2/\delta r = \delta\theta \cdot (\delta\theta/\delta r) \to 0$이고, 또한 $\delta\theta \to 0$이다. 그러므로

$$\tan\angle QPR \to r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}.$$

? **생각해 보기** 왜 $\angle QPR$의 극한이 곡선이 OP와 만나는 각이 되는가?

각 QPR는 현 PQ와 P를 지나는 동경 직선 사이의 각이다. 곡선을 따라 $Q \to P$일 때, 현 PQ는 P에서의 접선으로 바뀐다. 따라서 극한에서 $\angle QPR$는 접선과 OP 사이의 각이 되며, 이것이 바로 "곡선이 OP와 만나는 각"의 뜻이다. 그러므로 그 각은

$$\tan^{-1}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right),$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

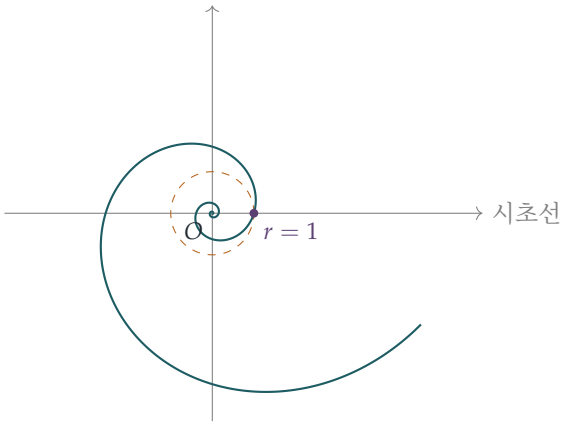
등각나선

$r = \mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}$에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \cot\alpha\,\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha} = r\cot\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{r\cot\alpha} = \tan\alpha.$$

$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 각 α는 $\tan^{-1}$의 치역 안에 있고, 따라서 $\tan^{-1}(\tan\alpha) = \alpha$이다. 이 값은 θ에 의존하지 않으므로, 나선은 모든 점에서 모든 동경 직선과 각 α로 만난다.

개형. $\cot\alpha > 0$이므로 r는 θ에 따라 꾸준히 증가한다. 한 바퀴 돌 때마다 r에 일정한 인수 $\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}$가 곱해진다. $\theta \to -\infty$일 때 $r \to 0$이므로, 곡선은 원점에 결코 도달하지 않으면서 원점 주위를 무한히 많이 감는다. $\theta \to +\infty$일 때는 시계 반대 방향으로 바깥을 향해 나선을 그린다. $\theta = 0$일 때 $r = 1$에서 시초선과 만난다. 개형에서는 $\cot\alpha = 0.3$을 사용하였다.



점선 원은 $r = 1$이다. 그 안쪽에 있는 나선 부분이 안쪽으로 무한히 감기는 부분이다.

호의 길이

주어진 공식과 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = r\cot\alpha$를 이용하면

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + r^2\cot^2\alpha = r^2\operatorname{cosec}^2\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha},$$

이다. s는 θ에 따라 증가하고 $\sin\alpha > 0$이므로 양의 제곱근을 택하였다.

$r = 1$에서 시작하여 바깥으로 도는 한 바퀴는 $\theta = 0$부터 $\theta = 2\pi$까지이다. 그 길이는

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1}{\cot\alpha} = \sec\alpha\left(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1\right).$$

$r \le 1$인 부분은 $\theta \le 0$, 즉 $-\infty < \theta \le 0$인 부분이다. 그 길이는 이상적분(improper integral)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-T\cot\alpha}}{\sin\alpha\cot\alpha} = \sec\alpha,$$

이다. $\cot\alpha > 0$이므로 $\mathrm{e}^{-T\cot\alpha} \to 0$이기 때문이다. 따라서 이 부분은 원점 주위를 무한히 많이 감지만, 전체 길이는 유한하며 그 값은 $\sec\alpha$이다.

검산

- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$이면 $\cot\alpha \to 0$이고, 나선은 단위원이 된다. 단위원은 모든 동경과 직각으로 만난다. 한 바퀴의 길이는 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1) \approx \sec\alpha\cdot 2\pi\cot\alpha = 2\pi\operatorname{cosec}\alpha \to 2\pi$로, 원주와 같다.
- $\sec\alpha$에 대한 멋진 기하학적 검산: 나선을 따라 임의의 점에서 원점까지의 길이는 $r\sec\alpha$이며, 이는 그 점에서 O를 지나고 OP에 수직인 직선까지 그은 접선 선분의 길이와 같다.
- 수치적으로, $\alpha = 0.9$일 때 2×10^5개의 현을 더하면 한 바퀴의 길이는 233.8349, 안쪽 부분의 길이는 1.608726이 나온다. 이 값들은 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1)$ 및 $\sec\alpha$와 적어도 유효숫자 여덟 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 이유를 설명하지 않고 $PR = \delta r$, $QR = r\,\delta\theta$라고 쓰는 것. 둘 다 일차 근사(first order)로만 참이며, 문제가 시험하려는 것이 바로 이 극한 논증이다.
- 안쪽 부분에 대해 $(-\infty, 0]$ 대신 $[0, 2\pi]$에서 적분하는 것. $r \le 1$인 부분은 한 바퀴가 아니라 무한히 많은 바퀴로 이루어져 있다.

STEP 너머

등각나선(equiangular spiral, 로그나선(logarithmic spiral))은 자기 닮음(self-similar)이다. 즉 $e^{2\pi\cot\alpha}$배로, 혹은 어떤 배율로든 확대하면 같은 곡선을 회전한 것이 된다. 복소수로 나타내면 $z = e^{(\cot\alpha+i)\theta}$이고, 이는 지수 사상에 의한 직선의 상이다. 각이 일정하다는 사실은 exp가 등각(conformal, 각을 보존함)이라는 사실에서 나온다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 관점을 아름답게 전개한다. 무한히 감긴 곡선의 길이가 유한하다는 것은 처음 듣는 해석학 강의에서 만나게 될 이상적분과 수렴(convergence) 문제를 처음 맛보는 것이다.

풀이

STEP II 1993, 문제 6

순수수학 • 행렬 대수의 반례

> **STEP II 1993, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.1 절 **행렬에서는 성립하지 않는 법칙**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/matrix-rules.html

핵심 아이디어

각 명제는 실수에 대해서라면 참이 되는 내용이므로, 이 문제는 사실상 보통의 대수에서 익숙한 습관 가운데 어떤 것이 행렬(matrix)에서도 살아남는지를 묻고 있다. 두 가지가 무너진다. 행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않을 수 있고(commute), 영이 아닌 두 행렬의 곱이 영이 될 수 있다. 잘 고른 아주 간단한 행렬 한 쌍이면 (i)과 (ii)가 해결되고, 수반행렬(adjugate matrix)로 (iii)이 해결되며, 멱영(nilpotent)이라는 반전이 들어간 중근("root")으로 (iv)가 해결된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\mathbf{I}$는 2×2 단위행렬(identity matrix)이고 $\mathbf{0}$은 영행렬(zero matrix)이다.

소문항 (i)

거짓. 다음과 같이 두자.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

둘 다 영행렬이 아니다. 그러면

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

생각해 보기 이런 반례(counterexample)를 그냥 추측하는 대신 어떻게 찾아낼 수 있을까?

우리는 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이기를 원하므로, $\mathbf{B}$의 모든 열은 $\mathbf{A}$에 의해 소멸되어야 한다. 위의 행렬 $\mathbf{A}$는 $(0, y)^{\mathsf{T}}$ 꼴의 벡터(vector)를 모두 소멸시키므로, $\mathbf{B}$의 열을 그런 꼴로 잡으면 된다. 그다음에는 $\mathbf{BA}$가 우연히 영이 되는지만 확인하면 된다. 가장 자연스러운 선택에서는 영이 되지 않는다.

소문항 (ii)

거짓. 모든 곱의 순서를 지키면서 조심스럽게 전개하면

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2,$$

이므로, 이 명제는 정확히 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$일 때 성립한다. 소문항 (i)의 행렬들은 교환되지 않으므로 반례가 된다. 그 경우 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$이다. 구체적으로 계산하면

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

이다. 여기서 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$와 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$을 이용하였다.

소문항 (iii)

참. 양쪽 방향을 모두 증명(proof)한다.

$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$이 영이 아닌 해를 가지면 $\det \mathbf{A} = 0$이다. 대우(contrapositive)를 증명한다. $\det \mathbf{A} \neq 0$이라고 하자. 그러면 $\mathbf{A}^{-1}$이 존재하고, $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$으로부터 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$을 얻는다. 따라서 해는 영행렬뿐이다.

$\det \mathbf{A} = 0$이면 영이 아닌 해가 존재한다. 다음과 같이 쓰자.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(즉 $\mathbf{X}$는 $\mathbf{A}$의 수반행렬이다). 곱을 계산하면

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\, \mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{X}$의 성분은 $\mathbf{A}$의 성분을 재배열하고 일부의 부호를 바꾼 것이며, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이므로 $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$이다. 이로써 증명이 끝난다. 여기서 가정 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이 쓰였다는 점에 주목하자. 바로 이 가정이 수반행렬이 영이 아님을 보장한다.

소문항 (iv)

거짓. 수에 대해서는 이차방정식(quadratic)의 근이 많아야 두 개이지만, 그 사실의 증명에는 "$pq = 0$이면 $p = 0$ 또는 $q = 0$"이 쓰이며, 소문항 (i)에서 방금 보았듯이 이것은 행렬에서 성립하지 않는다. 그러므로 완전제곱(perfect square)으로 인수분해되는 이차식을 찾아보자. $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$로 두면 둘 다 영행렬이 아니다. $\mathbf{I}$는 모든 행렬과 교환되므로

$$\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2,$$

이고, 따라서 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$이면 된다. $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$을 만족하는 행렬 $\mathbf{N}$이라면 무엇이든 $\mathbf{X} - \mathbf{I}$로 쓸 수 있으며, 그런 행렬은 무수히 많다. 각 실수 t에 대하여

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

라 하자. 그러면

$$\mathbf{X}_t^2 - 2\mathbf{X}_t + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

각 $\mathbf{X}_t$는 영행렬이 아니고, t의 값이 다르면 서로 다른 행렬이 된다. 따라서 이 방정식은 많아야 두 개가 아니라 무수히 많은 해를 가진다.

> **?** **생각해 보기** $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$에 특별한 점이 있을까?

그렇지 않다. $\mathbf{A} = -2\lambda\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \lambda^2\mathbf{I}$로 두면 (단, $\lambda \neq 0$은 임의), $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$인 모든 $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}$이 해가 된다. 멱영행렬 자체도 큰 집합을 이룬다. 모든 실수 p, q에 대하여 $\begin{pmatrix} pq & -p^2 \\ q^2 & -pq \end{pmatrix}$를 제곱하면 $\mathbf{0}$이 된다. 본질적인 점은 오직 이차식이 두 행렬의 곱으로 인수분해된다는 것이며, 그런 곱은 수의 경우보다 훨씬 다양한 방식으로 영이 될 수 있다.

검산

각 반례를 손으로 직접 곱해 보자. (i)에서 $\mathbf{AB}$는 모든 성분이 0이지만 $\mathbf{BA}$는 왼쪽 아래 구석에 1이 있다. 항등식 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$는 무작위 정수 행렬 쌍 1000개에 대해 확인하였고, $\operatorname{adj}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이면서 $\mathbf{A}\operatorname{adj}\mathbf{A} = \mathbf{0}$임은 무작위 특이행렬(singular matrix) 2000개에 대해 확인하였다. (iv)에서는 $t = 3$을 대입해 보자. $\mathbf{X}_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이고, $\mathbf{X}_3^2 - 2\mathbf{X}_3 + \mathbf{I} = \mathbf{0}$이다.

흔한 실수

- $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$인 것처럼 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$를 전개하는 것. (ii)에서 구체적인 반례 없이 "거짓"이라고만 쓰면 점수를 거의 받지 못한다. 문제가 반례를 요구하기 때문이다.
- (iii)에서 "필요충분조건(if and only if)"의 한쪽 방향만 증명하는 것.
- (iv)에서 근의 공식이나 인수분해로 이차방정식을 "풀어서" $\mathbf{X} = \mathbf{I}$가 유일한 근이라고 결론짓는 것. 인수분해 자체는 괜찮지만, $\mathbf{P}^2 = \mathbf{0}$이라고 해서 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$인 것은 아니다.

STEP 너머

2×2 실수 행렬 전체는 **영인자를 가진 비가환환**(non-commutative ring with zero divisors)을 이루며, 이 문제의 각 소문항은 체(field)에서는 성립하지만 그런 환에서는 성립하지 않는 법칙을 하나씩 시험한다. 소문항 (iii)은 선형대수학(linear algebra)의 핵심 정리의 2×2 경우이다. 즉 정사각행렬이 자명하지 않은 영공간(null space)을 가질 필요충분조건은 그 행렬식(determinant)이 영이 되는 것이다. (iv)에 나온 것처럼 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$을 만족하는 행렬을 멱영행렬이라 하며, 이는 조르당 표준형(Jordan normal form)의 핵심 재료이다. 선형대수학은 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서, 환론은 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 다룬다.

풀이

STEP II 1993, 문제 7

순수수학 • 법 5에 대한 무한 강하법

> **STEP II 1993, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q7

핵심 아이디어

우변이 5의 배수이므로, 5를 법(modulo)으로 하여 생각하면 방정식이 유한한 몇 가지 경우만 확인하면 되는 문제로 바뀐다. 제곱수는 5를 법으로 $0, 1, 4 \pmod 5$ 중 하나뿐이기 때문이다. a와 b가 5의 배수일 수밖에 없음을 보이고 나면, 방정식에 의해 c도 5의 배수가 되고, 모든 수를 5로 나누면 **더 작은** 해가 얻어진다. 0이 아닌 정수를 5로 끝없이 나눌 수는 없으므로, 이것이 바로 페르마(Fermat)의 무한 강하법(method of infinite descent)이다.

풀이

a와 b가 5로 나누어떨어짐

5를 법으로 하는 각 나머지(residue)를 제곱하면 다음과 같다.

$x \pmod 5$	0	1	2	3	4
$x^2 \pmod 5$	0	1	4	4	1
$2x^2 \pmod 5$	0	2	3	3	2

따라서 $b^2 \equiv 0, 1$ 또는 4이고, $2a^2 \equiv 0, 2$ 또는 $3 \pmod 5$이다. $5c^2 \equiv 0 \pmod 5$이므로

$$2a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

이어야 한다. 이제 가능한 모든 조합을 나열한다.

$2a^2 + b^2$	$b^2 \equiv 0$	$b^2 \equiv 1$	$b^2 \equiv 4$
$2a^2 \equiv 0$	**0**	1	4
$2a^2 \equiv 2$	2	3	1
$2a^2 \equiv 3$	3	4	2

값이 0인 칸은 $2a^2 \equiv 0$이고 $b^2 \equiv 0$인 경우 하나뿐이다. 첫 번째 표에서 $x^2 \equiv 0 \pmod 5$가 되는 것은 $x \equiv 0$일 때뿐이다(같은 말로, 5는 소수(prime)이므로 $5 \mid x^2$이면 $5 \mid x$이다). 그러므로 $a \equiv 0$이고 $b \equiv 0 \pmod 5$이다. 즉 a와 b는 모두 5로 나누어떨어지며, 이것이 보이려던 것이다.

유일한 해는 $a = b = c = 0$

정수 p, q에 대하여 $a = 5p, b = 5q$로 놓는다. 이를 대입하면

$$25(2p^2 + q^2) = 5c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 5(2p^2 + q^2).$$

따라서 $5 \mid c^2$이고, 5는 소수이므로 $5 \mid c$이다. $c = 5r$로 놓으면 $25r^2 = 5(2p^2 + q^2)$, 즉

$$2p^2 + q^2 = 5r^2.$$

이다. 이것은 처음 방정식과 똑같다. 그러므로 (a, b, c)가 해이면 세 수 모두 5로 나누어떨어지고, $(a/5,\ b/5,\ c/5)$도 정수해가 된다.

> **생각해 보기** "5로 계속 나눌 수 있다"는 사실이 왜 모든 수가 0이어야 함을 뜻하는가?

이 단계를 반복해서 적용한다. 해 (a, b, c)에서 출발하여 n번 반복하면 정수해 $(a/5^n,\ b/5^n,\ c/5^n)$를 얻으므로, **모든** $n \geq 1$에 대하여 5^n이 a, b, c 각각을 나눈다.

그런데 0이 아닌 정수 m은 5로 유한한 횟수만큼만 나눌 수 있다. $5^n \mid m$이고 $m \neq 0$이면 $5^n \leq |m|$이어야 하는데, n이 충분히 크면 이 부등식은 성립하지 않는다. 따라서 a, b, c 중 어느 것도 0이 아닐 수 없다.

같은 내용을 강하법 논증으로 쓰면 다음과 같다. $c \neq 0$인 해가 존재한다고 가정하고, 그중 $|c|$가 양수이면서 가장 작은 해를 하나 고른다. 그러면 $(a/5, b/5, c/5)$는 $0 < |c/5| < |c|$를 만족하는 해이므로 모순이다. 따라서 $c = 0$이고, 그러면 두 항이 모두 음이 아니므로 $2a^2 + b^2 = 0$에서 $a = b = 0$이다.

그러므로 유일한 정수해는 $a = b = c = 0$이다.

검산

- 5를 법으로 하는 나머지 쌍 $(a, b) \bmod 5$ 25개를 모두 확인해 보면, $2a^2 + b^2 \equiv 0$이 되는 것은 $(0, 0)$뿐이다.
- $|a|, |b| \leq 300$인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색해도 $a = b = c = 0$ 이외에는 $2a^2 + b^2 = 5c^2$의 해가 없다.

- $a^2 + b^2 = 5c^2$와 비교해 보자. 이 방정식은 $(1, 2, 1)$과 같은 자명하지 않은(non-trivial) 해를 가진다. 여기서는 $1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$이므로 첫 부분의 나머지 논증이 성립하지 않으며, 이는 당연히 그래야 하는 결과이다.

흔한 실수

- $5 \mid a^2$에서 이유 없이 $5 \mid a$라고 결론 내리는 것. 이는 5가 소수이기 때문에(또는 표에 의해) 참이지만, 그 이유를 밝혀야 한다.
- c도 5로 나누어떨어진다는 것을 보이지 않는 것. 이것이 없으면 $(a/5, b/5, c/5)$가 정수해라는 보장이 없고, 강하법을 시작할 수 없다.
- "다시 5로 나눌 수 있다"에서 멈추는 것. 반복된 나눗셈이 왜 0을 강제하는지 설명해야 증명이 완성된다.

STEP 너머

이것은 페르마의 **무한 강하법**으로, $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하거나 $x^4 + y^4 = z^2$이 자명하지 않은 해를 갖지 않음을 증명할 때 쓰는 것과 같은 방법이다. $2a^2 + b^2 = 5c^2$과 같은 방정식은 정수론(number theory)에서 체계적으로 연구된다. 르장드르(Legendre)의 정리는 $Ax^2 + By^2 = Cz^2$이 자명하지 않은 정수해를 가질 정확한 조건을 이차잉여(quadratic residue)를 써서 제시한다. 이 문제에서 해를 막는 장애물은 -2가 5를 법으로 제곱수가 아니라는 점이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식, 이차잉여, 강하법을 다룬다.

풀이

STEP II 1993, 문제 8

순수수학 • 수학적 귀납법을 이용한 산술-기하 평균 부등식

STEP II 1993, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.2 절 *AM–GM, 거꾸로*에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/am-gm-backwards.html

핵심 아이디어

두 항에 대한 부등식은 제곱이 음이 아니라는 사실에 지나지 않는다. 2^m개의 항에서 2^{m+1}개의 항으로 넘어가려면, 목록을 길이가 2^m인 두 절반으로 나누고, 각 절반에 귀납 가정(induction hypothesis)을 적용한 다음, 두 절반의 평균에 두 항 부등식을 적용하면 된다. 이렇게 하면 항의 개수가 2의 거듭제곱일 때에만 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이 증명된다. 마지막 소문항에서는 코시(Cauchy)가 고안한 깔끔한 기법으로 이 빈틈을 메운다. 목록에 그 목록 자신의 평균을 여러 개 덧붙이는 것인데, 이렇게 해도 평균은 바뀌지 않고 곱에 관해서도 본질적인 것은 아무것도 바뀌지 않는다.

풀이

두 항의 경우

전개하면

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - a_1 a_2 = \frac{a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 - 4a_1 a_2}{4} = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

이므로 $a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$이고, 등호는 정확히 $a_1 = a_2$일 때 성립한다. 이 부등식은 임의의 두 양수에 대해 성립한다는 점에 주목하자. 아래에서는 이를 a_1, a_2가 아닌 다른 수들에도 사용할 것이다.

귀납법

$P(m)$을 2^m개의 양수로 이루어진 모든 목록에 대해 $(*)$가 성립한다는 명제라 하자. $m = 1$인 경우는 방금 증명한 두 항 부등식이다.

이제 $P(m)$이 성립한다고 가정하고, 2^{m+1}개의 양수 $a_1, \ldots, a_{2^{m+1}}$을 잡자. $N = 2^m$이라 쓰고, 이 수들을 각각 N개의 항으로 이루어진 두 절반으로 나누어 그 평균을

$$X = \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}, \qquad Y = \frac{a_{N+1} + \cdots + a_{2N}}{N}.$$

라 하자. 각 절반에 $P(m)$을 적용하면

$$a_1 \cdots a_N \le X^N \qquad \text{그리고} \qquad a_{N+1} \cdots a_{2N} \le Y^N.$$

을 얻는다. 여기 나오는 양은 모두 양수이므로 두 부등식을 서로 곱할 수 있다.

$$a_1 \cdots a_{2N} \le X^N Y^N = (XY)^N.$$

이제 X와 Y는 양수이므로 두 항 부등식에 의해 $XY \le \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$이다. $t > 0$에서 $t \mapsto t^N$은 증가함수이므로, 양변을 N제곱해도 부등호의 방향은 유지된다.

$$(XY)^N \le \left(\frac{X+Y}{2}\right)^{2N}.$$

마지막으로 $\dfrac{X+Y}{2} = \dfrac{(a_1 + \cdots + a_N) + (a_{N+1} + \cdots + a_{2N})}{2N}$은 $2N = 2^{m+1}$개의 수 전체의 평균이다. 부등식들을 한데 모으면

$$a_1 \cdots a_{2^{m+1}} \le \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

이고, 이것이 바로 $P(m+1)$이다. 수학적 귀납법에 의해 $(*)$는 모든 양의 정수 m에 대해 성립한다.

? 생각해 보기 이처럼 두 부등식을 서로 곱하는 것이 정당한가?

$0 < p \le q$이고 $0 < r \le s$이면, 먼저 r의 양수 조건을, 다음으로 q의 양수 조건을 써서 $pr \le qr \le qs$를 얻는다. 양수 조건이 없으면 이는 성립하지 않을 수 있다(예를 들어 $-3 \le 1$이고 $-3 \le 1$이지만 $9 > 1$이다). 그래서 $a_i > 0$이라는 조건이 중요하다.

2의 거듭제곱까지 채우기

문제에 인쇄된 정의에는 $b_1 = a_2$로 되어 있는데, 이는 $b_1 = a_1$의 오식임이 분명하다. 즉 $1 \le i \le n$이면 $b_i = a_i$, $n < i \le 2^m$이면 $b_i = A$로 둔다. 각 b_i는 양수이다(A는 양수들의 평균이므로). 이들의 합은

$$b_1 + \cdots + b_{2^m} = (a_1 + \cdots + a_n) + (2^m - n)A = nA + (2^m - n)A = 2^m A,$$

이므로 b_i들의 평균은 정확히 A이다. 이들의 곱은 $a_1 \cdots a_n \, A^{2^m - n}$이다. 따라서 b_i들에 $(*)$를 적용하면

$$a_1 \cdots a_n \, A^{2^m - n} \leq A^{2^m},$$

을 얻으며, 이것이 증명하려던 것이다.

산술-기하 평균 부등식

임의의 양의 정수 n이 주어지면 $2^m > n$인 m을 고른다($2^m \to \infty$이므로 가능하다). 그러면 앞 단계를 적용할 수 있다. 양수인 $A^{2^m - n}$으로 나누면

$$a_1 \cdots a_n \leq A^n.$$

을 얻는다. 양변이 모두 양수이고 $t > 0$에서 $t \mapsto t^{1/n}$은 증가함수이므로, n제곱근을 취하면

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

이고, 이것이 산술-기하 평균 부등식이다. (n이 마침 2의 거듭제곱이라면 $(*)$를 바로 인용해도 되지만, $2^m > n$이 되도록 고르면 경우를 따로 나눌 필요가 없다.)

검산

$n = 3$, $a = (1, 2, 6)$으로 시험해 보자. $A = 3$이고, $m = 2$로 두면 채운 목록은 $(1, 2, 6, 3)$이며, 그 평균은 3이고 곱은 $36 \leq 3^4 = 81$이다. 3으로 나누면 $12 \leq 27 = A^3$이므로 $\sqrt[3]{12} \approx 2.29 \leq 3$이다. 또한 모든 a_i가 같을 때에는 사용한 모든 부등식이 등식이 되는데, 마땅히 그래야 한다. 컴퓨터로 정확한 유리수 연산을 사용하여 수천 개의 무작위 목록에 대해 $m \leq 6$에서 $(*)$를, $n \leq 40$에서 최종 부등식을 검사했는데, 실패한 경우는 하나도 없었다.

흔한 실수

- 2^{m+1}개의 항 전체에 한꺼번에 귀납 가정을 적용하는 것. 귀납 가정은 길이가 2^m인 목록만 다루므로 반드시 절반으로 나누어야 한다.
- 채운 목록의 평균이 여전히 A인지 확인하는 것을 잊는 것. 다른 것이 아니라 바로 A로 채우는 이유가 전적으로 여기에 있다.
- 양들이 양수임을 언급하지 않고 n제곱근을 취하거나 나누는 것.

STEP 너머

이러한 "전진–후퇴" 귀납법은 코시가 산술-기하 평균 부등식을 증명한 방법이다. 먼저 2의 거듭제곱에 대해 증명한 다음, 다시 내려와서 모든 n에 대해 증명한다. 산술-기하 평균 부

등식은 오목 함수(concave function) ln에 대한 옌센 부등식(Jensen's inequality)의 특수한 경우이기도 하며, 거듭제곱 평균 부등식(power-mean inequality), 횔더(Hölder) 부등식, 민코프스키(Minkowski) 부등식 등 일련의 부등식이 모두 같은 아이디어에서 자라난다. 이들은 대학 1학년 해석학의 기본 도구이다. Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)는 처음부터 이러한 부등식을 사용하며, Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 1993, 문제 9

순수수학 • 복소수의 편각

> **STEP II 1993, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q9

핵심 아이디어

$0 \le \arg z < 2\pi$라는 규약 아래에서 "허수부(imaginary part)가 양수"라는 말은 "편각(argument)이 0과 π 사이에 있다(양 끝 제외)"는 뜻이다. 복소수의 덧셈은 벡터(vector)의 덧셈이고, 모두 같은 열린 반평면(open half-plane) 안을 향하는 벡터들의 합은 그 반평면 안에 머문다. z_1이나 z_3이 실수축 위에 놓이도록 회전시키면 주어진 부등식은 바로 이 사실이 된다. 마지막 부분에서는 곱의 편각이 편각들의 합(2π의 정수배 차이를 무시하면)이라는 사실을 쓰고, 앞에서 증명한 부등식으로 그 차이를 0과 2π 사이(양 끝 제외)에 가둔다.

풀이

양의 허수부

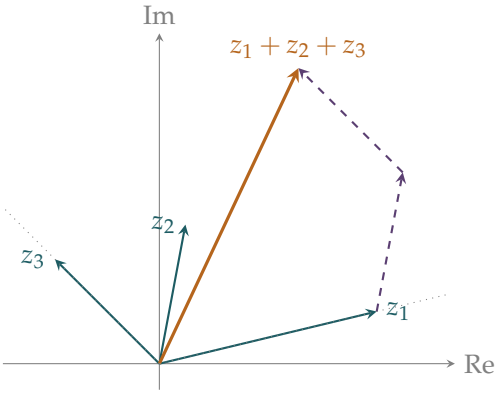
$r > 0, 0 \le \theta < 2\pi$에 대하여 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$라 하자. 그러면 $\operatorname{Im} z = r\sin\theta > 0$인 것은 정확히 $\sin\theta > 0$일 때이고, $[0, 2\pi)$에서 이는 정확히 다음일 때 일어난다.

$$0 < \arg z < \pi.$$

따라서 z는 위쪽 반평면에 있고, 그 편각은 결코 0이나 π가 아니다(그렇다면 z는 실수가 된다).

그림

$\theta_k = \arg z_k$라 쓰면 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \pi$이다. z_1, z_2, z_3을 원점에서 출발하는 화살표로 그린 다음, 이들을 꼬리에 머리를 이어 붙여 $z_1 + z_2 + z_3$에 이른다.



경로의 각 단계는 바로 앞 단계에 비해 시계 반대 방향으로 꺾이고($\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$이므로), 모든 단계는 위쪽 반평면을 향한다. 경로는 각 θ_1의 반직선을 따라 출발한 뒤 그 왼쪽으로 꺾이므로, 끝점은 그 반직선보다 엄밀하게 시계 반대 방향 쪽에 있다. 반대쪽 끝에서 돌아보면, 경로는 각 θ_3인 단계로 끝나고 그 앞의 모든 것은 각 θ_3의 반직선보다 시계 방향 쪽에 있다. 따라서 합은 각 θ_1과 θ_3의 두 반직선 사이의 쐐기 영역에 놓인다.

이를 엄밀하게 하기 위해, 모든 것을 시계 방향으로 θ_1만큼 회전시키는 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$을 곱한다.

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}(z_1+z_2+z_3) = r_1 + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} + r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\theta_1)},$$

여기서 $r_k = |z_k| > 0$이다. 첫째 항은 양의 실수이고, 나머지 두 항은 각이 $(0,\pi)$에 있으므로 허수부가 양수이다. 따라서 우변은 허수부가 양수이고, 그 편각 α는 $0 < \alpha < \pi$를 만족한다. 그러므로 $z_1+z_2+z_3$은 편각 $\theta_1+\alpha$를 가지며, $\theta_1 < \theta_1+\alpha < \theta_1+\pi < 2\pi$이므로 이것이 바로 $[0,2\pi)$ 범위의 편각이다. 따라서 $\arg(z_1+z_2+z_3) > \theta_1$이다.

마찬가지로 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_3}$을 곱하면 $r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_3)} + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_3)} + r_3$을 얻는데, 앞의 두 각은 $(-\pi,0)$에 있으므로 이 수는 허수부가 음수이고 $0 < \beta < \pi$인 β에 대하여 $\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$로 쓸 수 있다. 그러면 $z_1+z_2+z_3 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\beta)}$이고, 여기서 $-\pi < \theta_3-\beta < \theta_3 < \pi$이다. 합은 허수부가 양수이므로 그 편각은 $(0,\pi)$에 있고 $\theta_3-\beta$와는 2π의 정수배만큼 차이 난다. 두 수 모두 길이가 2π인 구간 $(-\pi,\pi)$에 있으므로 두 수는 같다. 따라서 $\arg(z_1+z_2+z_3) = \theta_3-\beta < \theta_3$이고, 종합하면 다음과 같다.

$$\arg z_1 < \arg(z_1+z_2+z_3) < \arg z_3.$$

곱과 합

$\varphi = \arg(z_1+z_2+z_3)$라 하면, 앞 부분에 의해 $\theta_1 < \varphi < \theta_3$이다. 복소수를 곱하면 편각이 더해지므로

$$z_1z_2z_3 = r_1r_2r_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)},$$

이고, $\arg(z_1z_2z_3)$는 $[0,2\pi)$에 있으면서 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$과 2π의 정수배만큼 차이 나는 수이다.

생각해 보기 합 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$은 $(0,3\pi)$의 어디에든 있을 수 있으므로, 2π의 몇 배를 빼야 하는지 알 수 없다. 그것을 알 필요가 없게 하려면 어떻게 해야 할까?

알 필요가 없다. 필요한 것은 $\arg(z_1z_2z_3)=\varphi$라면

$$D=\theta_1+\theta_2+\theta_3-\varphi$$

가 2π의 정수배라는 사실뿐이다. 이제 $\theta_1<\varphi<\theta_3$을 이용하여 D의 범위를 잡는다.

$$D>\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_3=\theta_1+\theta_2>0,$$
$$D<\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_1=\theta_2+\theta_3<2\pi,$$

첫째 줄에서는 $\theta_k>0$을, 둘째 줄에서는 $\theta_k<\pi$를 이용하였다. 따라서 $0<D<2\pi$이고, 0과 2π 사이(양 끝 제외)에는 2π의 정수배가 없다. 그러므로 $\arg(z_1z_2z_3)$는 결코 $\arg(z_1+z_2+z_3)$와 같지 않다.

검산

그림의 예인 $z_1=2.5+0.6\mathrm{i}$, $z_2=0.3+1.6\mathrm{i}$, $z_3=-1.2+1.2\mathrm{i}$에서 편각은 각각 약 0.236, 1.385, 2.356이고, $\arg(z_1+z_2+z_3)=\arg(1.6+3.4\mathrm{i})\approx1.131$로 첫째와 마지막 편각 사이에 있다. 임의로 뽑은 200 000개의 세 쌍(절댓값(modulus)은 e^{-4}과 e^{4} 사이)으로 시험해 본 결과, 두 부등식과 $0<D<2\pi$가 매번 성립했고 곱과 합은 한 번도 같은 방향을 가리키지 않았다.

위쪽 반평면이 왜 중요한지 보려면, 순서 조건을 등호까지 허용하도록 느슨하게 하여 $z_1=z_2=z_3=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$을 시도해 보자. 곱은 1이고 합은 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 방향을 가리키며, 이는 $D=4\pi/3$과 일치한다. 세 각을 모두 π에 가까이 보내면 D는 2π에 가까워지므로, $\theta_k<\pi$라는 조건이 실제로 중요한 역할을 한다.

흔한 실수

- $\arg(z_1z_2z_3)=\theta_1+\theta_2+\theta_3$이라고 바로 쓰는 것: 합이 2π 이상이면 언제나 틀린 식이다. 쓸 수 있는 것은 2π를 법으로 하는 같음뿐이다.
- $\arg(z_1+z_2+z_3)$가 θ_k들의 일종의 평균이라고 주장하는 것. 그렇지 않다(절댓값이 영향을 준다). 참인 것은 그것이 θ_1과 θ_3 사이(양 끝 제외)에 있다는 사실뿐이다.

STEP 너머

첫째 사실은 열린 반평면(실은 각이 π보다 작은 모든 쐐기 영역)이 **볼록뿔**(*convex cone*)이라는 명제이다. 즉 그 안의 벡터들의 양의 일차결합은 그 안에 머문다. 볼록뿔은 선형계획법(linear programming)과 최적화(optimisation)에서 핵심적이며, 마지막 부분에서 피해 간 arg의 다가성(multivaluedness)은 복소해석학(complex analysis) 첫 강좌에서 분지 절단(branch cut)과 복소로그(complex logarithm)로 이어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 두 아이디어를 모두 아름답게 기하학적으로 다룬 책이다.

풀이

STEP II 1993, 문제 10

순수수학 • 이차형식과 이차곡선

STEP II 1993, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q10

핵심 아이디어

x와 y에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 복잡한 데에는 두 가지 이유가 있다. 하나는 xy 교차항이고, 다른 하나는 일차항이다. 행렬 $\mathbf{P}$는 첫 번째 문제를 해결한다. $\mathbf{PAP}$가 대각행렬(diagonal matrix)이기 때문이다. 평행이동 $\mathbf{a}$는 두 번째 문제를 해결한다. 원점을 원뿔곡선(conic)의 중심으로 옮기도록 $\mathbf{a}$를 고르면 $\mathbf{x}_1$에 대한 일차항이 모두 소거된다. 남는 것은 순수한 "제곱의 합 = 상수" 꼴이다.

풀이

대각화하기

먼저

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix},$$

이므로

$$\mathbf{PAP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix},$$

이고, 요구한 대로 대각행렬이다. 또한 $\mathbf{P}$는 대칭행렬(symmetric matrix)이므로 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$임에 주목하자. 이 사실은 곧 쓰인다.

대입하기

$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}$로 놓자. 그러면 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}$이고,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

가운데 두 항이 같은 까닭은 각각이 1×1 행렬이어서 자기 자신의 전치(transpose)와 같기 때문이다. 실제로 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{P}$가 대칭이라는 사실을 쓰면 $(\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a})^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$이다. 또 $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$이다. 따라서 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \left(2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11\right) = 0.$$

생각해 보기 "적절한 벡터 $\mathbf{a}$"는 무슨 일을 해야 하는가?

목표인 $3x_1^2 - y_1^2 = c$에는 x_1이나 y_1만 있는 항이 없으므로 가운데 괄호가 사라져야 한다. $\mathbf{A}$가 대칭이므로 $2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (2\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathrm{T}}$이고, 따라서 다음이 필요하다.

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

여기서 $\det \mathbf{A} = -11 - 64 = -75 \neq 0$이므로 해는 정확히 하나이다.

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} -75 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(확인: $\mathbf{A}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1-8 \\ 8-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$.)

상수항

이 $\mathbf{a}$에 대하여 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{b}\right) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$이므로 상수항은

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11 = \tfrac{1}{2}(18 - 6) - 11 = -5.$$

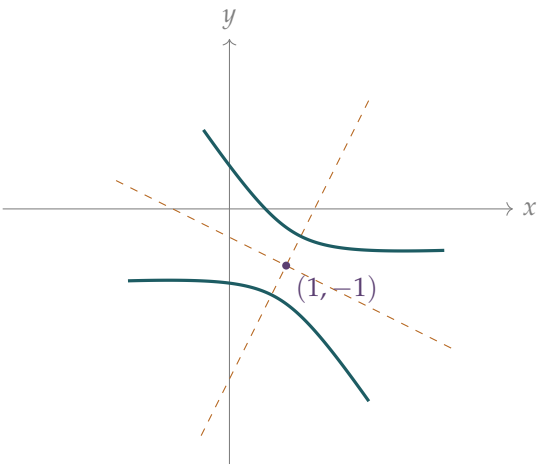
이차항은

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}\mathbf{x}_1 = 75x_1^2 - 25y_1^2.$$

따라서 방정식은 $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5 = 0$이 된다. 25로 나누면

$$3x_1^2 - y_1^2 = \tfrac{1}{5}, \qquad \text{따라서} c = \tfrac{1}{5}.$$

대입을 풀어 쓰면 $x = x_1 + 2y_1 + 1$, $y = 2x_1 - y_1 - 1$이다. 원래 방정식은 $-x^2 + 16xy + 11y^2 + 18x + 6y - 11 = 0$이므로, 이 곡선은 중심이 $(1, -1)$인 쌍곡선(hyperbola)이다. $\mathbf{P}$의 열 $(1, 2)$와 $(2, -1)$은 서로 수직이므로 쌍곡선의 대칭축(axes of symmetry)을 준다.



점선은 방향이 $(1,2)$와 $(2,-1)$인 대칭축이다.

? **생각해 보기** **P**는 왜 회전(rotation)이 아닌가?

열들은 서로 수직이지만 각각의 길이가 $\sqrt{5}$이므로, $\mathbf{P}^2 = 5\mathbf{I}$이고 **I**가 아니다. 그래서 **PAP**의 대각성분이 75와 -25인 것이다. 이 값들은 **A**의 고유값(eigenvalue) 15와 -5의 5배이다. 여기서는 이 배율이 문제가 되지 않는데, 이차 부분에 5를 곱할 뿐이기 때문이다.

검산

- **A**의 대각합(trace)과 행렬식(determinant)은 10과 -75이므로 고유값은 15와 -5이다. 이는 $75/5$, $-25/5$와 일치한다.
- $x_1 = y_1 = 0$으로 놓자. 그러면 $(x,y) = (1,-1)$이고 원래 좌변은 $-1-16+11+18-6-11 = -5$로, $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5$와 일치한다.
- $x_1 = 1, y_1 = 1$로 놓자. 그러면 $(x,y) = (4,0)$이고 $-16+72-11 = 45 = 75-25-5$이다.

또한 항등식 좌변 $= 25\left(3x_1^2 - y_1^2 - \frac{1}{5}\right)$이 무작위로 고른 유리수 점 1000개에서 정확히 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- 교차항 $\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{PAa}$와 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{APx}_1$이 같다는 사실을 잊어 인수 2를 놓치고 $\mathbf{Aa} = -\mathbf{b}$를 얻는 실수.
- $75x_1^2 - 25y_1^2 = 5$에서 멈추고, 요구된 꼴에 맞추어 양변을 나누지 않은 채 $c = 5$라고 답

하는 실수.

STEP 너머

이것은 주축 정리(principal axes theorem)의 축소판이다. 모든 실대칭행렬은 직교행렬(orthogonal matrix)(여기서는 $\mathbf{P}/\sqrt{5}$)로 대각화할 수 있다. 따라서 모든 원뿔곡선, 그리고 3차원의 모든 이차곡면(quadric surface)은 회전(또는 반사(reflection))과 평행이동(translation)으로 표준형으로 만들 수 있다. 같은 아이디어로 헤세 행렬(Hessian matrix)을 통해 다변수 함수의 정류점(stationary point)을 분류한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에는 대칭행렬과 양의 정부호성(positive definiteness)을 다룬 좋은 장이 있다.

풀이

STEP II 1993, 문제 11

역학 • 속도의 제곱에 비례하는 저항을 받는 운동

STEP II 1993, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

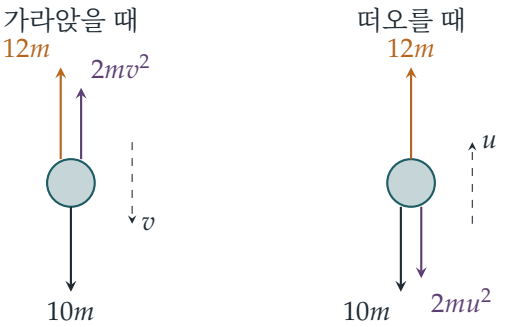
step.maths.org/questions/93-s2-q11

핵심 아이디어

물체가 액체 속에 들어가면 부력(buoyancy)이 중력보다 크므로, v^2에 비례하는 저항(resistance) 외에 위쪽으로 향하는 일정한 알짜힘이 작용한다. 저항은 항상 운동을 방해하는 방향으로 작용하므로 물체가 방향을 바꾸면 저항의 방향도 뒤집힌다. 따라서 가라앉는 단계와 떠오르는 단계에는 각각 따로 운동 방정식(equation of motion)을 세워야 한다. 두 방정식 모두 변수분리(separation of variables)가 깔끔하게 된다. 시간을 구할 때는 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$를, 거리를 구할 때는 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$를 사용한다.

풀이

물체를 입자(particle)로 모형화한다. 액체 속에서 물체의 무게는 아래쪽으로 $10m$ N이고 부력은 위쪽으로 $\frac{6}{5} \times 10m = 12m$ N이므로, 둘을 합하면 물체가 어느 방향으로 움직이든 위쪽으로 $2m$ N의 알짜힘이 된다. 저항 $2mv^2$ N은 속도의 반대 방향으로 작용한다.



가라앉는 단계

아래쪽을 양의 방향으로 잡고, x를 수면 아래의 깊이, v를 아래쪽으로의 속력이라 하자. 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)에 의해

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10m - 12m - 2mv^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2(1+v^2).$$

물체가 속력 $V > 0$으로 액체에 들어간다고 하자. 변수를 분리하여, 들어가는 순간($t = 0$, $v = V$)부터 가라앉기를 멈추는 순간($t = T_1$, $v = 0$)까지 적분하면

$$\int_V^0 \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^{T_1} \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad T_1 = \tfrac{1}{2}\arctan V.$$

모든 유한한 V에 대하여 $\arctan V < \frac{\pi}{2}$이므로 $T_1 < \frac{1}{4}\pi$이다. 즉 물체를 아무리 빠르게 떨어뜨려도, 물체는 들어간 뒤 $\frac{1}{4}\pi$초가 지나기 전에 가라앉기를 멈춘다. (또한 내내 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \le -2$이므로 물체는 확실히 멈춘다.)

$V = 1$일 때 도달하는 깊이

이제 $T_1 = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}$이다. 깊이를 구하기 위해 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2(1+v^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_1^0 \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^D \mathrm{d}x,$$

이므로 $-\frac{1}{2}\ln 2 = -2D$이고, 최대 깊이는

$$D = \tfrac{1}{4}\ln 2 \text{ 미터},$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

떠오르는 단계

깊이 D에서 물체는 순간적으로 정지하지만, 위쪽으로 $2m$ N의 알짜힘은 여전히 작용하므로 물체는 떠오르기 시작한다. 이제 저항은 아래쪽으로 작용한다. 위쪽을 양의 방향으로 잡고, y를 최저점에서부터 올라간 높이, u를 위쪽으로의 속력이라 하면

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 12m - 10m - 2mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2).$$

> ? **생각해 보기** 가라앉을 때의 방정식을 그대로 두고 v가 음수가 되도록 하면 왜 안 될까?

항 $-2mv^2$는 v의 부호와 관계없이 항상 위쪽을 향한다. 물체가 떠오르기 시작하면 저항은 아래쪽을 향해야 하므로 방정식이 바뀐다. (하나의 방정식으로 쓰려면 $-2mv|v|$가 필요하다.) 또한 올라가는 동안 내내 $u < 1$임에 주목하자. u는 0에서 시작하고 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} > 0$은 $u < 1$인

동안에만 성립하므로, u는 종단 속력(terminal speed) 1 ms^{-1}에 가까워질 수만 있다. 덕분에 아래에서 $1-u^2$는 항상 양수이다.

수면에서의 속력. $u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2(1-u^2)$를 이용하여 $y=0$, $u=0$부터 $y=D$, $u=U$까지 적분하면

$$\int_0^U \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = 2\int_0^D \mathrm{d}y \qquad\Longrightarrow\qquad -\tfrac{1}{2}\ln(1-U^2) = 2D = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

따라서 $1-U^2 = \frac{1}{2}$이고, 물체는 속력 $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ms^{-1}로 수면에 돌아온다.

떠오르는 데 걸리는 시간. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2)$에 부분분수(partial fractions) $\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1-u}\right)$를 이용하면

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_0^U \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{4}\Big[\ln\frac{1+u}{1-u}\Big]_0^U = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

이다. 마지막 단계에서는 분자와 분모에 $\sqrt{2}$를 곱했다.

전체 시간. 물체는 수영장에 들어간 뒤

$$T_1 + T_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \text{ 초}$$

가 지나서 다시 수면에 도달한다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$이므로 떠오르는 시간은 $T_2 = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.4407\,\mathrm{s}$이고, 전체 시간은 $\approx 0.3927 + 0.4407 = 0.8334\,\mathrm{s}$이다.
- 운동을 수치적으로 단계별 계산하면(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법, 저항은 $-2v|v|$로 씀) 멈추는 시간 0.39270 s, 깊이 $0.17329\,\mathrm{m} = \frac{1}{4}\ln 2$, 돌아올 때의 속력 0.70711 ms^{-1}, 돌아오는 시각 0.83339 s를 얻으며, 모두 일치한다.
- 돌아올 때의 속력은 들어갈 때의 속력보다 작은데, 당연히 그래야 한다. 내려갈 때와 올라올 때 모두 저항이 음의 일(work)을 하기 때문이다.

흔한 실수

- 다시 올라올 때에도 저항을 위쪽으로 두는 것. 그러면 위쪽 알짜힘이 $2m + 2mu^2$이 되어 훨씬 빠르게 떠오르게 된다.

- 부력이 중력보다 크다는 것을 잊어서, 알짜힘을 $-2m$(아래쪽이 양의 방향)가 아니라 $+2m$로 쓰는 것.
- 깊이를 구할 때 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$를, 시간을 구할 때 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$를 사용하여 적분에서 막히는 것.

STEP 너머

이차 항력(quadratic drag)은 운동 방정식을 비선형(nonlinear)으로 만들지만 여전히 변수분리가 가능하다. 그래서 내려갈 때는 arctan이, 올라갈 때는 $\tanh^{-1}$이 나타난다(실제로 $T_2 = \frac{1}{2}\tanh^{-1} U$이다). 올라가는 운동은 종단 속력 $1\ \mathrm{ms}^{-1}$에 가까워지는데, 이 속력에서 항력이 위쪽 알짜힘과 균형을 이룬다. 대학 1학년 과정에서는 이런 모형을 체계적으로 다루며, $\dot{u} = 2(1-u^2)$ 같은 방정식의 위상선(phase line) 그림도 함께 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘을 다루고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 변수분리형 방정식과 자율(autonomous) 방정식을 다룬다.

풀이

STEP II 1993, 문제 12

역학 • 마찰과 강체

STEP II 1993, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q12

핵심 아이디어

구는 벽과 평면 사이에 끼어 있으므로, 둘 중 하나와의 접촉을 잃지 않고서는 움직여 빠져나갈 수 없다. 두 접점에서 동시에 미끄러진다면 구의 중심은 제자리에 있고 구는 단지 중심을 축으로 돈다. 구가 어느 쪽으로 돌지를 알아내면 각 마찰력(friction)이 어느 방향으로 작용하는지 알 수 있다. 그다음은 미지수 N_1, N_2, m에 대한 세 방정식(두 방향의 힘의 분해와 하나의 모멘트 방정식)을 푸는 일이다. 두 번째 부분에서는 모멘트를 잡을 점을 잘 고르면 답이 한 줄 만에 나온다.

풀이

모형과 마찰력의 방향

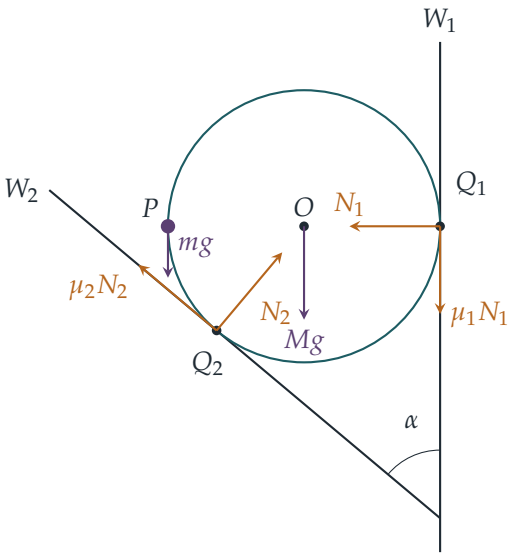
구는 균일한 강체(rigid body) 구로, 입자는 P에 고정된 질점으로 모형화한다. Q_1과 Q_2에서의 접촉은 거칠다. 수직항력(normal reaction)을 각각 N_1(수평 방향, 벽에서 멀어지는 쪽)과 N_2(평면에 수직, 중심 O를 지남)라 하자.

PQ_1이 수평인 지름이므로, 입자는 O로부터 벽의 반대쪽으로 수평 거리 r만큼 떨어진 곳에 매달려 있다. 따라서 입자의 무게는 O에 대하여 mgr의 모멘트(moment)를 가지며, 이 모멘트는 P가 내려가는 쪽으로 구를 돌리려 한다. 접점에서의 힘들이 이를 상쇄해야 한다.

? **생각해 보기** 각 접점에서 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가?

구가 두 점 모두에서 미끄러진다면 두 면과의 접촉이 유지되므로 O는 고정되고, 구는 P가 떨어지는 방향으로 O를 중심으로 회전한다. 그러면 P의 반대편 점인 Q_1은 벽을 따라 **위로** 움직이고, Q_2는 평면을 따라 모서리 쪽으로 **아래로** 움직인다. 마찰력은 미끄러짐에 반대하

므로 Q_1에서는 벽을 따라 **아래로**, Q_2에서는 평면을 따라 **위로** 작용한다. 두 점 모두에서 막 미끄러지려는 참이므로 두 곳 모두 최대 마찰(limiting friction) 상태이다. 즉 $F_1 = \mu_1 N_1$, $F_2 = \mu_2 N_2$이다. 두 마찰력의 O에 대한 모멘트는 모두 입자의 모멘트와 반대 방향이며, 마땅히 그래야 한다.



두 접점 모두에서 미끄러지는 경우

평면은 연직 방향과 각 α를 이루므로, 평면의 법선은 수평 방향과 각 α를 이룬다. 따라서 N_2는 벽 쪽으로 $N_2 \cos\alpha$, 위쪽으로 $N_2 \sin\alpha$의 성분을 가지고, 평면을 따라 위로 작용하는 마찰력 $\mu_2 N_2$는 벽에서 멀어지는 쪽으로 $\mu_2 N_2 \sin\alpha$, 위쪽으로 $\mu_2 N_2 \cos\alpha$의 성분을 가진다.

수평 방향으로 분해(resolving)하면

$$N_1 = N_2 \cos\alpha - \mu_2 N_2 \sin\alpha = N_2(\cos\alpha - \mu_2 \sin\alpha). \tag{1}$$

연직 방향으로 분해하면

$$N_2 \sin\alpha + \mu_2 N_2 \cos\alpha - \mu_1 N_1 = (M+m)g. \tag{2}$$

O에 대한 모멘트를 잡자. 두 수직항력은 모두 O를 지나고, Mg도 마찬가지이다. 두 마찰력은 접선을 따라 O로부터 거리 r인 곳에 작용한다. 따라서

$$mgr = \mu_1 N_1 r + \mu_2 N_2 r \quad \Longrightarrow \quad mg = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2. \tag{3}$$

(1)을 (3)과 (2)에 대입하면

$$mg = N_2\big(\mu_2 + \mu_1 \cos\alpha - \mu_1\mu_2 \sin\alpha\big),$$
$$(M+m)g = N_2\big(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha - \mu_1 \cos\alpha + \mu_1\mu_2 \sin\alpha\big).$$

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면

$$\begin{aligned} Mg &= N_2\big(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - 2\mu_1\cos\alpha + 2\mu_1\mu_2\sin\alpha - \mu_2\big) \\ &= N_2\big((2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2\big). \end{aligned}$$

mg에 대한 식을 이 식으로 나누면 N_2와 g가 소거되어

$$m = \frac{\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha}{(2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2}\,M,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

이것이 물리적으로 의미가 있으려면 $N_1 > 0$이어야 하고, (1)에 의해 이는 $\mu_2 < \cot\alpha$를 뜻한다. μ_2가 그보다 크면 Q_2에서의 마찰력이 구를 벽에서 떼어 내게 되며, 이것이 마지막 부분의 상황이다.

Q_2를 중심으로 구르는 경우

이제 구는 Q_2에서 미끄러지지 않는다. 대신 Q_2를 중심으로 막 돌려는(평면을 따라 위로 구르려는) 참이므로, 중심이 벽에서 멀어지고 Q_1에서의 접촉이 막 끊어지려 한다. 구르기 시작하는 순간 $N_1 = 0$이고, 따라서 Q_1에서의 마찰력도 0이다.

생각해 보기 이제 미지수가 된 Q_2에서의 마찰력은 어떻게 처리하는가?

Q_2에 대한 모멘트를 잡으면 Q_2에서의 수직항력과 마찰력이 모두 빠진다. 그러면 두 무게만 남는다. 수평 거리를 Q_2로부터 잰다. OQ_2는 평면에 수직이므로 수평 방향과 각 α를 이루고, 따라서 O는 Q_2로부터 벽 쪽으로 수평 거리 $r\cos\alpha$에 있다. 입자는 O보다 벽에서 먼 쪽으로 r만큼 더 떨어져 있으므로, Q_2로부터 반대쪽으로 수평 거리 $r - r\cos\alpha$에 있다. 모멘트가 평형을 이루려면

$$Mg\,r\cos\alpha = mg\,r(1-\cos\alpha) \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{M\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{M}{\sec\alpha - 1},$$

이며, 마지막 등호는 분자와 분모를 $\cos\alpha$로 나누어 얻는다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 두 답은 두 경우의 경계, 즉 $N_1 = 0$인 $\mu_2 = \cot\alpha$에서 일치해야 한다. 첫 번째 공식에 $\mu_2 = \cos\alpha/\sin\alpha$를 대입하면, μ_1의 값에 관계없이 분자는 $\cot\alpha$, 분모는 $(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$가 된다. 따라서 $m = M\cos\alpha/(1-\cos\alpha)$이고, 이는 두 번째 답과 일치한다.
- $\alpha = 60^\circ$이면 두 번째 답은 $m = M$을 준다. $\alpha = 60^\circ$, $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.3$, $M = 1$이면 첫 번째 답은 $m \approx 0.561$을 준다. 이 값들과 무작위로 고른 2000가지 경우에 대해 컴퓨터로 힘과 모멘트의 평형을 확인하였다.

- 두 접촉면이 모두 매끄럽다면($\mu_1 = \mu_2 = 0$) 첫 번째 공식은 $m = 0$을 준다. 예상대로, 입자의 모멘트에 저항할 수 있는 것이 아무것도 없다.

흔한 실수

- 마찰력의 방향을 잘못 잡는 것. 먼저 구가 어느 쪽으로 돌지 정한 다음, 각 접점이 어느 쪽으로 미끄러질지 정하라.
- 두 수직항력이 모두 중심을 지나므로 O에 대한 모멘트 방정식에 나타나지 않는다는 사실을 잊는 것.
- 마지막 부분에서 벽의 마찰력을 그대로 두는 것. 구가 막 벽에서 떨어지려 하면 $N_1 = 0$이므로 그곳의 마찰력은 0이다.

STEP 너머

미끄러지거나 구를 수 있는 접점이 여러 개 있는 이런 문제는 구속 조건이 있는 강체 역학의 출발점이다. 각 접점은 부등식($|F| \leq \mu N, N \geq 0$)을 하나씩 주며, 그중 어느 것이 등호로 성립하는지 알아내야 한다. 같은 경우 분석이 로봇 공학에도 등장하는데, 로봇 손이 물체를 잡을 수 있는지를 이것으로 판단한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 정역학과 강체의 회전을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1993, 문제 13

역학 • 단순 조화 운동

STEP II 1993, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q13

핵심 아이디어

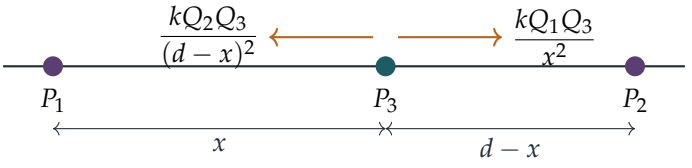
움직이는 구슬에 좌표를 정하고, 구슬에 작용하는 알짜힘(net force)을 적는다. 이 힘은 서로 반대 방향으로 미는 두 역제곱(inverse-square) 척력이다. 평형(equilibrium)은 두 힘이 균형을 이루는 곳이다. 진동을 다루려면 구슬을 작은 y만큼 변위시키고 주어진 근사를 두 힘 모두에 적용한다. 그러면 상수항은 평형 조건에 의해 소거되고, y에 비례하는 복원력(restoring force)만 남는다. 이것이 바로 단순 조화 운동(simple harmonic motion)의 방정식이다.

(문제에서는 P_3이 "P_1과 P_3 사이에서" 움직인다고 되어 있는데, 이는 "P_1과 P_2 사이에서"를 잘못 쓴 것이다.)

풀이

모형. 구슬은 질점(particle)으로 본다. 철사는 매끄럽고 수평이므로 P_3의 무게와 수직항력은 모두 철사에 수직이며, 철사를 따른 운동에는 아무 영향도 주지 않는다. 철사 방향으로 작용하는 힘은 P_3에 작용하는 두 전기적 척력뿐이다(고정된 구슬은 제자리에 붙잡혀 있으므로 그것들에 작용하는 힘은 신경 쓸 필요가 없다).

x를 P_1에서 P_2 쪽으로 잰다. 그러면 P_3은 P_1으로부터 거리 x, P_2로부터 거리 $d-x$에 있고, $0 < x < d$이다.



P_1은 P_3을 P_2 쪽(양의 방향)으로 밀고 P_2는 반대로 밀어내므로, 철사 방향으로 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙을 적용하면 다음을 얻는다.

$$m\ddot{x} = \frac{kQ_1Q_3}{x^2} - \frac{kQ_2Q_3}{(d-x)^2}. \qquad (*)$$

평형 위치

평형에서는 $x = a$이고 $(*)$의 우변이 0이 된다. k와 Q_3은 양수이므로 kQ_3으로 나눌 수 있다.

$$\frac{Q_1}{a^2} = \frac{Q_2}{(d-a)^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d-a}{a}\right)^2 = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

a와 $d-a$는 모두 양수이므로(구슬이 고정된 두 구슬 사이에 있으므로) 양의 제곱근을 택한다.

$$\frac{d-a}{a} = \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{Q_1}\,(d-a) = \sqrt{Q_2}\,a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}},$$

이로써 원하는 결과를 얻는다. $S = \sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}$, $b = d - a$로 두면 편리하다. 그러면

$$a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{S}, \qquad b = \frac{d\sqrt{Q_2}}{S}.$$

구슬이 더 약한 전하에 더 가까이 놓인다는 점에 주목하자. 이는 직관과도 맞는다.

작은 진동

y가 작을 때 $x = a + y$로 두면 $d - x = b - y$이고 $\ddot{x} = \ddot{y}$이다. 주어진 근사(그리고 같은 근사에서 y를 $-y$로, a를 b로 바꾼 것)를 쓰면

$$\frac{1}{(a+y)^2} \approx \frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}, \qquad \frac{1}{(b-y)^2} \approx \frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}.$$

이를 $(*)$에 대입하면

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &\approx kQ_3\left[Q_1\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}\right) - Q_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}\right)\right] \\ &= kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2}\right) - 2kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3}\right)y. \end{aligned}$$

생각해 보기 y를 포함하지 않는 항들은 어떻게 되는가?

그 항들은 정확히 평형 조건이므로 $\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2} = 0$이 되어 소거된다. 평형점 주위에서 전개하면 항상 이런 일이 일어난다. 0차 항의 힘은 정의에 의해 0이기 때문이다.

이제 a와 b의 식을 이용하여 y의 계수를 정리한다.

$$\frac{Q_1}{a^3} = \frac{Q_1S^3}{d^3Q_1^{3/2}} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_1}}, \qquad \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_2}},$$

따라서

$$\frac{Q_1}{a^3}+\frac{Q_2}{b^3}=\frac{S^3}{d^3}\cdot\frac{\sqrt{Q_2}+\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1Q_2}}=\frac{S^4}{d^3\sqrt{Q_1Q_2}}.$$

그러므로

$$\ddot{y}\approx-\omega^2 y,\qquad \omega^2=\frac{2kQ_3S^4}{md^3\sqrt{Q_1Q_2}}>0.$$

이것은 단순 조화 운동의 방정식이므로, 변위가 작을 때 P_3은 $x=a$를 중심으로 근사적인 단순 조화 운동을 한다. ($y=y_0$에서 정지 상태로 놓으면 운동은 $y\approx y_0\cos\omega t$이다.) 주기(period)는

$$\begin{aligned}T=\frac{2\pi}{\omega}&=2\pi\sqrt{\frac{md^3\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3S^4}}=\frac{2\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}}\\&=\frac{\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{4md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}}=\frac{\pi d}{(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^2}\sqrt{\frac{2md\sqrt{Q_1Q_2}}{kQ_3}},\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- **대칭성:** $Q_1=Q_2$이면 $a=d/2$, 즉 중점이 되어야 하며 실제로 그렇다. 주기 공식도 Q_1과 Q_2에 대해 대칭인데, 이 역시 당연하다(두 전하를 바꾸는 것은 그림을 좌우로 뒤집는 것일 뿐이다).
- **차원(dimensions):** kQQ'/r^2은 힘이므로 $kQ_3\sqrt{Q_1Q_2}$의 차원은 힘 $\times$ 길이^{2}이다. 그러면 $md\sqrt{Q_1Q_2}/(kQ_3)\cdot d^2/(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^4$의 차원은 질량 $\times$ 길이/힘 $=$ 시간^{2}이다. 올바르다.
- **수치:** $Q_1=4$, $Q_2=1$, $d=3$, $k=Q_3=m=1$로 두면 $a=2$(확인: $4/2^2=1/1^2$)이고 $T=2\pi/\sqrt{3}\approx 3.628$이다. 상수를 무작위로 여러 번 골라 아주 작은 변위에서 $(*)$을 수치적으로 적분해 보면, 주기 공식이 10^4분의 1보다 좋은 정확도로 재현된다.

흔한 실수

- 두 힘 가운데 하나만 전개하는 것: 두 힘 모두 y에 의존하며, 둘 다 (같은 부호로) 복원력에 기여한다.
- $1/(b-y)^2$에서 y 항의 부호를 틀리는 것: 주어진 근사에서 y를 $-y$로 바꾸면 $+2y/b^3$이 된다.
- 평형 조건에서 음의 제곱근을 택하는 것: 그러면 구슬이 선분 P_1P_2 바깥에 놓이게 된다.

STEP 너머

우리가 한 일은 **선형화**(*linearisation*)이다. 퍼텐셜(potential) $V(x)$의 안정 평형점 근처에서 운동은 근사적으로 $\omega^2 = V''(a)/m$인 단순 조화 운동이다. 여기서는 $V = kQ_3\left(Q_1/x + Q_2/(d-x)\right)$이며, $V''(a)$가 같은 ω^2을 준다는 것을 확인할 수 있다. 이 아이디어를 여러 좌표로 확장하면 진동의 정규 모드(normal modes)로 이어지는데, 이는 대학 1학년 동역학의 핵심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 평형 주위의 작은 진동을 명쾌하게 다룬다.

풀이

STEP II 1993, 문제 14

역학 • 튀어 오름과 반발계수

STEP II 1993, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q14

핵심 아이디어

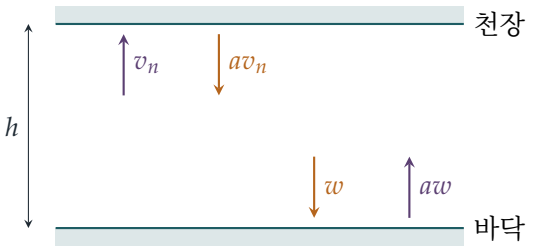
충돌과 충돌 사이에 공은 중력만 받으며 자유롭게 움직이므로, $v^2 = u^2 \pm 2gh$가 바닥과 천장에서의 속력을 이어 주고, 매 충돌마다 속력에 a가 곱해진다. 한 번의 완전한 주기(천장, 바닥, 다시 천장)를 따라가면 천장에서의 운동 에너지(kinetic energy)에 대한 선형 점화식(recurrence relation)을 얻는데, 이는 고정점(fixed point)만큼 평행이동하여 푼다. 공이 n번째로 천장에 닿는 것은 바로 그 에너지가 양수일 때이며, 로그(logarithm)를 취하면 이 조건이 구하는 부등식으로 바뀐다.

풀이

공을 공기 저항(air resistance) 없이 연직으로 움직이는 입자(particle)로 모형화하고, $0 < a < 1$로 둔다(부등식의 분모에 $\ln a$가 있고, $a = 1$이면 공은 천장에 끝없이 부딪힐 것이다). n번째 천장 충돌 직전의 속력을 v_n이라 하고,

$$E_n = \frac{v_n^2}{2gh}, \qquad \text{이므로} \qquad \tfrac{1}{2}mv_n^2 = mgh\,E_n.$$

로 둔다.



첫 번째 천장 충돌

공은 $u^2 = 2kgh$로 바닥을 떠나 중력을 거슬러 높이 h만큼 올라가므로

$$v_1^2 = 2kgh - 2gh = 2gh(k-1), \qquad E_1 = k - 1 > 0,$$

이고, $k > 1$이므로 이 값은 양수이다. 따라서 공은 적어도 한 번은 반드시 천장에 닿는다.

한 번의 완전한 주기

n번째 천장 충돌 직후 공은 속력 av_n으로 아래로 움직인다(고정된 천장에서의 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)). 공은 높이 h만큼 떨어지므로 속력 w로 바닥에 닿으며, 여기서

$$w^2 = a^2 v_n^2 + 2gh.$$

이다. 공은 속력 aw로 위로 튀어 올라 높이 h만큼 올라간다. 다시 천장에 닿는다면, 그때의 속력은

$$v_{n+1}^2 = a^2 w^2 - 2gh = a^4 v_n^2 + 2gh\,(a^2 - 1).$$

을 만족한다. $2gh$로 나누면

$$E_{n+1} = a^4 E_n + (a^2 - 1).$$

이다. 이 식은 우변이 양수일 때마다 성립한다. 우변이 0이거나 음수이면 공은 다시는 천장에 닿지 못한다.

> **생각해 보기** $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ 꼴의 점화식은 어떻게 푸는가?

$E = a^4 E + (a^2 - 1)$을 만족하는 상수해 E를 찾는다:

$$E = \frac{a^2 - 1}{1 - a^4} = \frac{a^2 - 1}{(1 - a^2)(1 + a^2)} = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

이 고정점을 빼면 상수항이 없어진다. 즉 $F_n = E_n + \dfrac{1}{1 + a^2}$로 두면 $F_{n+1} = a^4 F_n$이다. 따라서 $F_n = a^{4(n-1)} F_1$이고, $F_1 = (k-1) + \dfrac{1}{1 + a^2}$이므로

$$E_n = a^{4n-4}\left(k - 1 + \frac{1}{a^2 + 1}\right) - \frac{1}{a^2 + 1} = a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}.$$

이다. mgh를 곱하면, n번째 천장 충돌 직전의 운동 에너지는

$$mgh\left(a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}\right),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

천장 충돌 횟수

공이 n번째로 천장에 부딪히려면 천장에 도달할 때 속력이 양수여야 한다. 즉 $E_n > 0$이어야 한다. (공이 천장에 n번째로 부딪힌다면 그 이전의 모든 경우에도 부딪힌 것이므로 위의 식이 적용된다.) $E_n > 0$의 양변에 $a^2 + 1 > 0$을 곱하면

$$a^{4n-4}\big((k-1)(a^2+1)+1\big) > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^{4n-4}\big(a^2(k-1)+k\big) > 1.$$

이다. 양변이 모두 양수이므로 로그를 취할 수 있다:

$$(4n-4)\ln a + \ln\big[a^2(k-1)+k\big] > 0.$$

생각해 보기 $4\ln a$로 나누면 부등호의 방향은 어떻게 되는가?

$0 < a < 1$이므로 $\ln a < 0$이고, 따라서 $4\ln a$로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다:

$$n - 1 < -\frac{\ln\big[a^2(k-1)+k\big]}{4\ln a}, \qquad \text{즉,} \qquad n < 1 - \frac{\ln\big[a^2(k-1)+k\big]}{4\ln a}.$$

그러므로 공이 천장에 N번 부딪힌다면 $n = N$일 때 이 부등식이 성립하고

$$N < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

이다. 특히 천장 충돌 횟수는 이 값 이하이며, 이것이 보여야 할 내용이다. (실제로 E_n은 n에 대해 감소하므로, N은 정확히 이 경계값보다 작은 양의 정수의 개수이다.)

검산

- $n = 1$: 식은 $mgh(k-1)$을 주며, 이는 에너지 보존(conservation of energy)으로 얻는 $\frac{1}{2}m(2kgh) - mgh$와 일치한다.
- n이 클 때: $E_n \to -\frac{1}{1+a^2} < 0$이므로 공은 결국 천장에 닿지 못하게 된다. 매 충돌마다 에너지를 잃으므로 당연히 그래야 한다.
- 수치적으로 $k = 6$, $a = 0.9$, $h = 2\,\mathrm{m}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두고 단계별 시뮬레이션을 하면 천장에서의 운동 에너지는 98, 60.57, 36.02 J로 식과 일치한다. 공은 천장에 6번 부딪히고, 경계값은 약 6.48이다.

흔한 실수

- 천장과 바닥 **두 곳 모두**에서 속력에 a가 곱해진다는 사실을 잊어, 한 주기마다 a^4 대신 a^2를 얻는 것.

- 부등호의 방향을 바꾸지 않고 $\ln a$로 나누는 것.
- 반발(restitution)을 속력이 아닌 운동 에너지에 적용하는 것: 매 충돌마다 에너지에는 a가 아니라 a^2가 곱해진다.

STEP 너머

점화식 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$는 1계 선형 차분방정식(first-order linear difference equation)이다. 고정점을 빼는 기법은 선형 상미분방정식(ODE)의 특수해(particular integral)를 구하는 방법의 이산 버전이며, 반복 사상(iterated map)과 그 안정성(stability)을 연구할 때 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 에너지 손실을 더 일반적으로 다룬다.

풀이

STEP II 1993, 문제 15

확률과 통계 • 중심극한정리

STEP II 1993, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q15

이 문제는 *Beyond STEP*의 13.6 절 쌓이는 오차에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch13/errors-add-up.html

핵심 아이디어

전체 오차는 수 하나마다 하나씩 생기는 작고 서로 독립인 오차들의 합이다. 따라서 하나의 수에서 생기는 오차의 평균과 분산을 구하고, 이를 모든 수에 대하여 더한 다음, 중심극한정리(Central Limit Theorem)를 이용하여 전체 오차를 근사적으로 정규분포로 다룬다. 두 컴퓨터의 차이는 전적으로 평균에서 나온다. 한 기계의 오차는 평균적으로 서로 상쇄되지만, 다른 기계의 오차는 모두 같은 방향으로 쏠린다.

풀이

수 하나에서 생기는 오차

수를 $a = m + U$로 나타내자. 여기서 $m = \lfloor a \rfloor$은 정수이고 U는 소수 부분(fractional part)이며, $U \sim \mathrm{U}[0,1)$이다. 오차를 (근삿값) $-$ (참값)으로 정의한다. 부호를 어떻게 정하든 오차의 크기에는 영향이 없다.

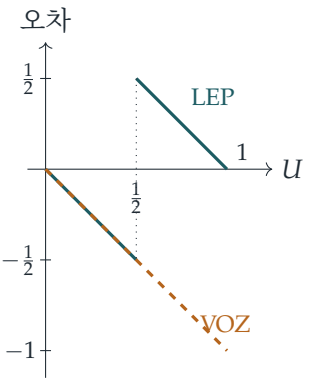
LEP (반올림(*rounding*)). $U < \frac{1}{2}$이면 수가 m으로 바뀌므로 오차는 $-U$이고, $U \geq \frac{1}{2}$이면 $m+1$로 바뀌므로 오차는 $1-U$이다. 따라서 오차는

$$X = \begin{cases} -U, & 0 \leq U < \frac{1}{2}, \\ 1-U, & \frac{1}{2} \leq U < 1, \end{cases}$$

이고, 이는 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$의 각 값을 일정한 밀도로 취한다. 즉 X는 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$에서 균등분포(uniform

distribution)를 따른다(그림의 톱니 모양).

VOZ (버림(*truncation*)). 수가 m으로 바뀌므로 오차는 $Y = -U$이고, $(-1, 0]$에서 균등분포를 따른다.



길이가 1인 구간에서의 균등분포는 구간이 어디에 있든 분산이 $\frac{1}{12}$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(X) = 0, \quad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{1}{12}; \qquad \mathrm{E}(Y) = -\tfrac{1}{2}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \tfrac{1}{12}.$$

(참고로, $\mathrm{Var}(U) = \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}u - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$이다.)

1500개의 수 더하기

컴퓨터는 근삿값들을 정확하게 더하므로, 답의 오차는 각 수에서 생긴 오차의 합이다. 소수 부분들은 서로 독립이므로 각 오차도 서로 독립이고, 따라서 분산을 더할 수 있다. $n = 1500$개의 수에 대하여

$$\mathrm{Var}(\text{전체 오차}) = \frac{1500}{12} = 125, \qquad \text{표준편차} \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11.18.$$

중심극한정리에 의하여, 독립이고 동일한 분포를 따르는 1500개 오차의 합은 정규분포에 매우 가깝다.

LEP. 전체 오차 E_L은 근사적으로 $\mathrm{N}(0, 125)$를 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|E_L| > 15) &\approx \mathrm{P}\left(|Z| > \frac{15}{\sqrt{125}}\right) = \mathrm{P}(|Z| > 1.342) \\ &= 2\big(1 - \Phi(1.342)\big) \approx 2(1 - 0.9102) \approx 0.18.\end{aligned}$$

오차는 정수가 아니라 연속확률변수이므로 연속성 보정(continuity correction)은 필요 없다.

VOZ. 전체 오차 E_V는 근사적으로 $\mathrm{N}(-750, 125)$를 따른다. 오차의 크기가 15 이하가 되려면 $E_V \geq -15$이어야 하는데, 이는 평균보다

$$\frac{-15 - (-750)}{\sqrt{125}} = \frac{735}{11.18} \approx 66$$

표준편차만큼 위에 있는 값이다. 이 확률은 완전히 무시할 수 있을 만큼 작으므로

$$\mathrm{P}(|E_V| > 15) \approx 1.$$

버림은 언제나 아래쪽으로, 평균적으로 $\frac{1}{2}$만큼 오차를 내므로, 1500개의 수를 더하고 나면 VOZ는 약 750만큼 틀리게 된다.

생각해 보기 두 기계의 오차는 분산이 같다. 그런데 왜 답이 이렇게 다를까?

전체 오차의 퍼짐은 약 ± 11로 같지만, 그 **중심**은 다르다. LEP의 오차는 중심이 0이므로 전체 오차는 0 근처에서 오르내린다. VOZ의 오차는 모두 평균이 $-\frac{1}{2}$이므로, 편향(bias)은 n에 비례하여 커지는 반면 무작위적인 퍼짐은 $\sqrt{n}$ 정도로만 커진다. 편향이 쉽게 이긴다.

LEP는 몇 번 더할 수 있는가?

LEP가 n개의 수를 더한다고 하자. 전체 오차는 근사적으로 $\mathrm{N}\left(0, \frac{n}{12}\right)$를 따르고, 다음이 필요하다.

$$\mathrm{P}(|E_L| < 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 \;\geq\; 0.9 \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.95.$$

Φ는 증가함수이고 $\Phi(1.6449) = 0.95$이므로, 이는

$$\frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.6449 \iff n \leq 12\left(\frac{10}{1.6449}\right)^2 \approx 443.5.$$

와 같다. 이 확률은 n이 커질수록 감소하므로, $n \leq 443$일 때 0.9 이상을 유지하고 $n = 444$에서 처음으로 0.9 아래로 떨어진다. 따라서 LEP는 **443**개의 수를 더할 수 있다. ("덧셈"을 $+$ 기호를 한 번 쓰는 것으로 센다면, 443개의 수를 더하는 데는 442번의 덧셈이 필요하다. 어느 쪽으로 해석하든 어떤 뜻인지 밝히기만 하면 된다.)

검산

- 1.342는 그럴듯한가? 전체 오차 15는 표준편차(11.18)의 한 배를 조금 넘고, 정규분포에서 평균으로부터 1.34 표준편차보다 멀리 떨어진 부분은 약 18%이다. 대략 맞다.
- **수치적으로.** 반올림한 수 1500개씩으로 이루어진 묶음 10^5개를 시뮬레이션하면 $\mathrm{P}(|E_L| > 15) \approx 0.179$를 얻는다. 균등분포 합의 정확한 분포로 계산하면 0.1797이고, 정규근사로는 0.1797이다. 두 번째 부분에서 정확한 확률은 $n = 443$일 때 0.90019, $n = 444$일 때 0.89981이므로 경계값이 확인된다.

흔한 실수

- LEP의 오차가 $[0, \frac{1}{2}]$에서 균등분포를 따른다고 보는 것. 반올림은 올라갈 수도 내려갈 수도 있으므로 오차는 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$에서 균등분포를 따른다.
- VOZ에서 수 하나당 평균 $-\frac{1}{2}$를 잊어버려서 LEP와 같은 답을 내는 것.
- 마지막 부분에서 0.95 대신 $\Phi(z) = 0.9$를 쓰는 것. 사건 $|E| < 10$은 양쪽에 걸쳐 있으므로 각 꼬리에 0.05씩 돌아간다.

STEP 너머

이것은 부동소수점 연산(floating-point arithmetic)에서 반올림 오차를 분석하는 고전적인 방법이다. 편향 없는 반올림을 쓰면 누적 오차가 $\sqrt{n}$ 정도로 커지지만, 편향된 규칙을 쓰면 n 정도로 커진다. IEEE 754 표준이 절반을 항상 올림하는 대신 "짝수로 반올림(round half to even)"을 쓰는 것도 이 때문이다. n개의 균등분포 확률변수의 합은 정확한 분포(어윈–홀 분포(Irwin–Hall distribution))를 가지며, 이 분포가 얼마나 빨리 정규분포에 가까워지는지 살펴보는 것은 중심극한정리에 입문하는 좋은 방법이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 이 정리를 증명하고 논의한다.

풀이

STEP II 1993, 문제 16

확률과 통계 • 푸아송 과정

STEP II 1993, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q16

핵심 아이디어

이 문제에는 서로 독립인 두 가지 무작위성의 원천이 있다. 하나는 기하분포(geometric distribution)를 따르는 대기 시간을 주는 버스이고, 다른 하나는 포아송 과정(Poisson process)을 이루는 승객이다. 첫 버스가 언제 오는지를 조건(condition)으로 두자. 그것을 알고 나면 기다리는 사람 수는 알려진 시간 길이 동안의 포아송 개수일 뿐이다. 소문항 (iii)에서는 전확률 법칙(law of total probability)을 쓰는데, 진짜 문제는 그 결과로 나오는 무한급수(infinite series)의 값을 표와 계산기만으로 유효숫자(significant figures) 두 자리까지 어떻게 구하느냐이다.

풀이

시간은 8:00 이후 경과한 분 단위로 잰다. 첫 버스가 도착하는 시각을 T라 하고, $(0, t]$ 동안 도착한 승객 수를 X_t라 하자. 승객 과정은 분당 비율이 4인 포아송 과정이므로 $X_t \sim \mathrm{Po}(4t)$이다. 버스는 $t = 1, 2, 3, \ldots$에만 올 수 있고("8시 직후"라는 말은 8:00에 올 수도 있는 버스가 이미 왔다 갔다는 뜻이다), 승객과는 독립이다.

소문항 (i)

첫 버스가 8시 n분에 도착하는 것은 정확히 $1, 2, \ldots, n-1$분에는 버스가 오지 않고 n분에 버스가 올 때이다. 이 사건들은 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(T = n) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} \tfrac{1}{4}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

이다. 따라서 T는 모수가 $\frac{1}{4}$인 기하분포를 따른다. (검산으로, 이 확률들의 합은 $\frac{1}{4}/\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 1$이다.)

소문항 (ii)

8:05에 기다리고 있는 사람들은 정확히 $(0,5]$ 동안 도착한 사람들이다. 8:05 전에는 버스가 오지 않았으므로 떠난 사람은 아무도 없다. 따라서 $T=5$일 때 X_5의 조건부 분포를 구하면 된다.

> **생각해 보기** 첫 버스가 8:05에 왔다는 사실을 알면 승객 수의 분포가 달라지는가?

그렇지 않다. 사건 $T=5$는 버스에만 의존하고, 버스는 승객과 독립이다. 따라서 $T=5$를 조건으로 두어도 X_5의 분포는 변하지 않으며, $X_5 \sim \mathrm{Po}(4\times 5)=\mathrm{Po}(20)$이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(m\text{명이 기다림} \mid T=5)=\frac{\mathrm{e}^{-20}\,20^m}{m!},\qquad m=0,1,2,\ldots$$

이다.

소문항 (iii)

버스가 모든 사람을 태우지 못하는 것은 정확히 25명보다 많은 사람이 기다릴 때, 즉 $X_T\geq 26$일 때이다. 이 사건을 F라 하자. T를 조건으로 두고 (ii)에서처럼 독립성을 쓰면

$$\mathrm{P}(F)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(T=n)\,\mathrm{P}(X_n\geq 26)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}\tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}\big(\mathrm{Po}(4n)\geq 26\big).$$

이다. 이제 이 무한급수를 유한한 양의 계산으로 바꾸되, 오차가 0.005보다 충분히 작도록 하는 계획이 필요하다. 유효숫자 두 자리를 원하는데, 답은 0.1 정도의 크기로 나오게 된다.

1단계: 여사건(complement)을 다루어 꼬리 부분을 쉽게 만든다. $w_n=\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}\tfrac{1}{4}$, $q_n=\mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n)\leq 25)$라 쓰자. $\sum w_n=1$이므로

$$\mathrm{P}(F)=1-\sum_{n=1}^{\infty}w_n\,q_n.$$

이다. 이 형태가 더 나은 까닭은 n이 클 때 q_n이 아주 작기 때문이다. $n\geq 11$이면 평균 $4n\geq 44$가 25보다 훨씬 크다. n이 커질수록 q_n은 감소하므로(시간이 길수록 승객이 많아진다)

$$\sum_{n\geq 11}w_nq_n\leq q_{11}\sum_{n\geq 11}w_n=q_{11}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{10}.$$

이다. 정규근사(normal approximation)를 쓰면 $q_{11}\approx\Phi\big((25.5-44)/\sqrt{44}\big)=\Phi(-2.79)\approx 0.003$이므로 이 꼬리 부분은 0.0002보다 작아 버려도 된다. 그러면 열 개의 항이 남는다.

2단계: 처음 몇 항. $n = 1$과 $n = 2$(평균 4와 8)에서는 승객이 26명 이상일 가능성이 매우 낮아서, 필요한 정확도를 훨씬 넘어서까지 $q_1 = q_2 = 1$이다. 따라서 이 항들은 $w_1 + w_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}$만큼 기여한다.

3단계: 표에서 읽는 중간 항. $n = 3, 4, 5$(평균 12, 16, 20)에서는 $q_n = \mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n) \le 25)$를 누적 포아송 분포표(cumulative Poisson tables)에서 바로 읽는다. 보통 이 표는 평균 20까지 나와 있다. 표에 평균 24와 28도 있다면 $n = 6, 7$에도 그것을 쓴다.

4단계: 더 큰 평균은 정규근사로. 10까지의 나머지 n(평균 40까지)에서는 연속성 수정(continuity correction)을 하여 $\mathrm{Po}(\mu) \approx \mathrm{N}(\mu, \mu)$를 쓴다.

$$q_n \approx \Phi\left(\frac{25.5 - 4n}{\sqrt{4n}}\right),$$

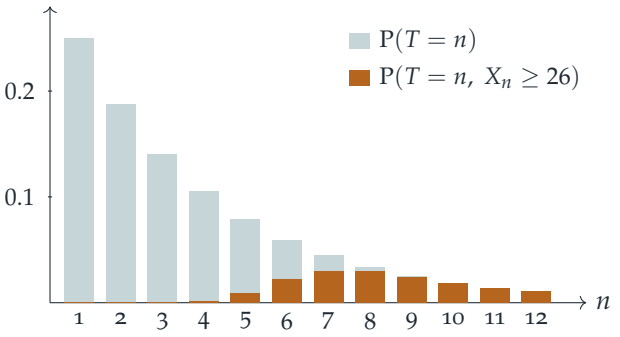
여기서 Φ는 정규분포표에서 읽는다. 이 평균들은 근사가 좋을 만큼 충분히 크다. 더 중요한 점은 가중치 w_n이 이미 작다는 것이다($w_8 \approx 0.033$, $w_{10} \approx 0.019$). 따라서 q_n에 천분의 몇 정도의 오차가 있어도 $\mathrm{P}(F)$는 0.001보다 적게 변한다.

5단계: 합치기. 계산기로 $w_1, \ldots, w_{10}$을 구하고

$$\mathrm{P}(F) \approx 1 - \sum_{n=1}^{10} w_n q_n,$$

을 계산한 다음 유효숫자 두 자리로 반올림한다. 버리거나 근사한 각 부분은 많아야 0.001 정도이므로, 합계가 반올림 경계에 아주 가깝게 떨어지지 않는 한 반올림은 안전하다. 만약 경계에 가깝다면, 이 방법은 어느 항을 더 정밀하게 계산해야 하는지 정확히 보여 준다.

문제에서 이것을 실제로 계산하라고 요구하지는 않지만, 계산해 보면 $\mathrm{P}(F) \approx 0.19$를 얻는다. 아래 그림은 이 확률이 어디서 나오는지 보여 준다. 대부분은 첫 버스가 8:06에서 8:10 사이에 오는 경우에서 나오는데, 이때 기대 대기 인원 24에서 40명은 정원에 가깝거나 정원을 넘는다.



검산

- (i)에서 확률들의 합은 1이고, 당연히 $\mathrm{P}(T=1)=\frac{1}{4}$이다.
- (ii)에서 기다리는 사람 수의 평균은 20이며, 이는 5분 동안 분당 4명이다.
- (iii)에서 (컴퓨터로 계산한) 정확한 합은 0.1904이다. 2×10^5번의 아침을 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)하면 0.189를 얻는다. 위의 표와 정규근사를 쓴 방법은 0.1912를 준다. 세 값 모두 반올림하면 0.19이다.

흔한 실수

- 경계를 하나 틀리는 것. 버스는 26명 이상이 기다릴 때만 모두를 태우지 못하므로, 구해야 할 확률은 $1-\mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n)\leq 24)$가 아니라 $1-\mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n)\leq 25)$이다.
- 대기 인원을 $\mathrm{Po}(4\,\mathrm{E}[T])=\mathrm{Po}(16)$으로 취급하는 것. 대기 시간이 확률적이므로, 평균 시간을 대입할 것이 아니라 포아송 확률들을 T에 대해 평균해야 한다.
- 왜 잘라도 되는지 말하지 않고 급수를 무한한 채로 두는 것. 버린 꼬리 부분이 너무 작아서 유효숫자 둘째 자리에 영향을 주지 않음을 보여야 한다.

STEP 너머

기다리는 사람 수 X_T는 평균이 확률적인 포아송 개수, 즉 포아송 분포들의 **혼합**(*mixture*)이다. T가 기하분포를 따르므로 X_T는 깔끔한 닫힌 형태의 생성함수(generating function)를 갖게 되며, 이와 같은 조건부 논증은 대기행렬 이론(queueing theory)과, 처음 배우는 확률론 강의에서 만나는 복합 분포(compound distribution)와 혼합 분포의 기초이다. 급수를 어디서 자르고 오차를 어떻게 한정하느냐 하는 문제는 수치해석(numerical analysis)의 출발점이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 포아송 과정과 생성함수를 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 1993, 문제 1

순수수학 • 호의 길이와 부피

> **STEP III 1993, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q1

핵심 아이디어

배각 공식(double-angle formula) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$를 쓰면 매개변수 곡선(parametric curve)이 곧바로 직교좌표(Cartesian) 방정식으로 바뀌고, θ의 범위를 보면 포물선(parabola)의 어느 부분이 나오는지 정확히 알 수 있다. 길이를 구할 때 $\sqrt{1+16x^2}$는 $1+\sinh^2 u = \cosh^2 u$이므로 쌍곡선 함수 치환(hyperbolic substitution)을 쓰라는 전형적인 신호이다. 부피는 P의 양 끝이 회전축(axis of rotation) 위에 있다는 것만 알아차리면 평범한 회전체의 부피(volume of revolution) 문제가 된다.

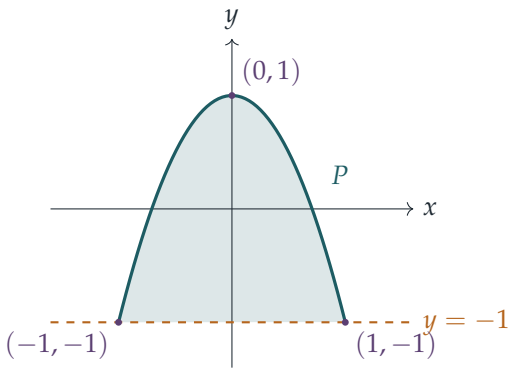
풀이

곡선과 그 개형

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$이고 $x = \sin\theta$이므로

$$y = 1 - 2x^2.$$

따라서 P의 모든 점은 포물선 $y = 1 - 2x^2$ 위에 있다. θ가 $-\pi/2$에서 $\pi/2$까지 움직이면 $x = \sin\theta$는 -1에서 1까지 꾸준히 증가하며 각 값을 정확히 한 번씩 취한다. 따라서 P는 정확히 포물선에서 $-1 \le x \le 1$인 부분의 호이다. 이 호는 $(-1,-1)$에서 꼭짓점(vertex) $(0,1)$까지 올라갔다가 다시 $(1,-1)$까지 내려오며, y축에 대하여 대칭이다.



P의 길이

직교좌표 방정식으로 계산하면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x$이므로

$$\text{길이} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x,$$

이다. 여기서 피적분함수(integrand)가 우함수(even function)라는 사실을 이용하였다. (매개변수 공식 $\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\theta$를 써도 $x = \sin\theta$로 치환하면 같은 적분이 나온다.)

? 생각해 보기 어떤 치환을 하면 $\sqrt{1+16x^2}$가 깔끔하게 정리될까?

$16x^2$이 $\sinh^2$ 꼴이 되기를 원하므로 $4x = \sinh u$로 놓는다. 그러면 $4\,\mathrm{d}x = \cosh u\,\mathrm{d}u$이고 $\sqrt{1+16x^2} = \cosh u$이다($\cosh u > 0$이므로 양수이다). 적분 구간 $x = 0, 1$은 $u = 0$과 $u = \alpha$가 되며, 여기서 $\alpha = \sinh^{-1} 4$이다. $\sinh\alpha = 4$이고 $\cosh\alpha = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$임에 주목하자. $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$를 이용하면

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^\alpha \cosh u \cdot \tfrac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}\int_0^\alpha (1+\cosh 2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[u + \tfrac{1}{2}\sinh 2u\Big]_0^\alpha = \tfrac{1}{4}\big(\alpha + \sinh\alpha\cosh\alpha\big) \\ &= \tfrac{1}{4}\big(\sinh^{-1}4 + 4\sqrt{17}\big). \end{aligned}$$

따라서 P의 길이는 요구한 대로 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4$이다.

부피

P의 양 끝이 모두 직선 $y = -1$ 위에 있으므로, P를 이 직선을 축으로 회전시키면 닫힌 곡면이 만들어진다. 이 곡면이 둘러싸는 입체는 P와 $y = -1$ 사이의 색칠한 영역을 회전시켜 얻는 입체와 정확히 같다. 위치 x에서 자른 단면은 반지름이

$$y - (-1) = 2 - 2x^2 = 2(1-x^2)\ (\geq 0, \text{단} |x| \leq 1).$$

인 원판이다. 따라서

$$V = \pi \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)^2 \,\mathrm{d}x = 8\pi \int_{0}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) \mathrm{d}x$$
$$= 8\pi\left(1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\right) = 8\pi \cdot \tfrac{8}{15} = \frac{64\pi}{15}.$$

검산

- $\theta = 0$일 때 $(0,1)$, $\theta = \pm\pi/2$일 때 $(\pm 1, -1)$을 얻으며, 이는 $y = 1 - 2x^2$와 일치한다.
- 길이 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4 \approx 4.6468$은 $(\pm 1, -1)$에서 $(0,1)$까지의 두 현(chord)의 길이의 합 $2\sqrt{5} \approx 4.472$보다 조금 커야 한다. 실제로 그렇다. 또한 $[-\pi/2, \pi/2]$에서 $\int \sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$를 중점 규칙(midpoint rule)으로 계산해도 4.64678이 나온다.
- 파푸스(Pappus)의 정리: 영역의 넓이는 $\int_{-1}^{1}(2 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$이고, 무게중심(centroid)은 축에서 $\frac{4}{5}$만큼 위에 있다. 따라서 $V = 2\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{64\pi}{15} \approx 13.404$이며, 이 값 역시 수치 적분(numerical integration) 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 실수로 x축을 축으로 회전시켜 반지름으로 $y + 1$ 대신 y를 쓰는 것.
- $\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u$에서 나오는 인수 $\frac{1}{4}$를 빠뜨리거나, $\sinh 2\alpha$를 $2\sinh\alpha\cosh\alpha = 8\sqrt{17}$로 정리하지 않고 그대로 두는 것.

STEP 너머

곡선의 길이(arc length)는 곡선의 미분기하학(differential geometry)을 처음 엿보는 창이다. 곡선 위의 위치를 호의 길이 s로 나타내면 속력은 항상 1이고, s에 따라 방향이 얼마나 빨리 바뀌는지를 나타내는 양이 **곡률**(*curvature*)이다. 포물선 $y = 1 - 2x^2$의 곡률은 꼭짓점에서 가장 크다. 위와 같은 쌍곡선 함수 치환은 대학 1학년 미적분학 곳곳에 등장한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 1993, 문제 2

순수수학 • 변곡점과 극좌표 넓이

STEP III 1993, 2번 문제

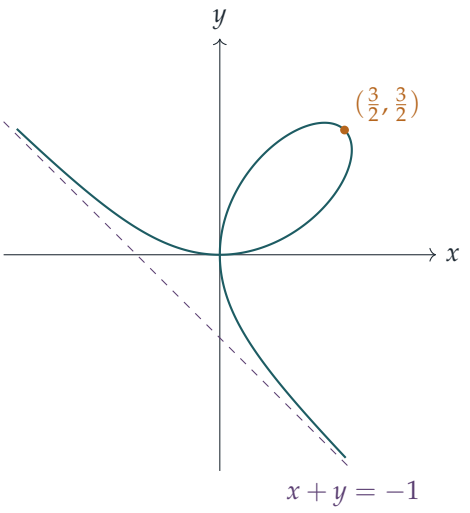
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q2

핵심 아이디어

변곡점(point of inflection)에서는 이계도함수(second derivative)가 0이 되어야 하고 (또한 부호가 바뀌어야 하고), 따라서 (i)의 계획은 음함수 미분(implicit differentiation)으로 $\frac{d^2y}{dx^2}$를 구한 다음 이것이 언제 0이 될 수 있는지 살펴보는 것이다. 계산은 복잡해 보이지만, 곡선의 방정식 자체가 분자를 아주 간단한 식으로 줄여 준다. (ii)에서는 삼차항들과 xy항의 차수가 서로 다르므로, 극좌표(polar coordinates)에서 인수 r^2이 약분되어 r이 θ의 명시적인 함수로 나타난다.

풀이



그림은 이 곡선(데카르트의 엽선(folium of Descartes))을 보여 준다. 제1사분면에 고리가 하나 있고, 제2사분면과 제4사분면에 있는 두 가지는 점근선(asymptote) $x+y=-1$에 가까워진다.

소문항 (i)

$x^3+y^3=3xy$를 x에 대하여 음함수 미분하면

$$3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{N}{D}, \quad N=y-x^2,\ D=y^2-x,$$

이고, 이는 $D\neq 0$인 모든 곳에서 성립한다. 이 몫을 미분하고, $y'=N/D$와 함께 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=y'-2x$, $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2yy'-1$을 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{(y'-2x)D-N(2yy'-1)}{D^2}=\frac{(N-2xD)-\left(2yN^2/D-N\right)}{D^2}\\&=\frac{2\left(ND-xD^2-yN^2\right)}{D^3}.\end{aligned}$$

이제 괄호 안을 전개한다.

$$\begin{aligned}ND&=x^3+y^3-x^2y^2-xy,\\xD^2&=xy^4-2x^2y^2+x^3,\\yN^2&=y^3-2x^2y^2+x^4y,\end{aligned}$$

따라서

$$ND-xD^2-yN^2=3x^2y^2-xy-xy^4-x^4y=-xy\left(1+x^3+y^3-3xy\right).$$

C 위에서는 $x^3+y^3-3xy=0$이므로 괄호는 그냥 1이 되고

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}.$$

> ? **생각해 보기** 이것이 0이 될 수 있는 곳은 어디인가? 그리고 이 공식이 성립하지 않는 점들은 어떻게 되는가?

이계도함수는 $x=0$ 또는 $y=0$일 때만 0이 된다. C 위에서 $x=0$이면 $y^3=0$이고, $y=0$이면 $x^3=0$이다. 어느 경우든 원점에 있게 되는데, 원점은 변곡점이 아니라고 가정해도 된다. 원점과 $y^2=x$인 점들을 제외하면 이계도함수는 연속이고 0이 아니므로 부호가 바뀔 수 없다. 따라서 그곳에는 변곡점이 없다.

남은 것은 $D=y^2-x=0$인 점들로, 이곳에서는 y가 x에 대하여 미분가능한 함수가 아니다. 만약 그곳에서 N도 0이라면 $x=y^2$이고 $y=x^2$이므로 $x=x^4$이 되어 $(0,0)$ 또는

$(1,1)$을 얻는다. 그런데 $1+1 \neq 3$이므로 $(1,1)$은 C 위에 있지 않다. 따라서 원점이 아닌 그러한 모든 점에서 $N \neq 0$이다. 즉 접선이 수직이므로 x를 y의 함수로 다루어야 한다. C의 방정식은 x와 y에 대하여 대칭이므로, 위의 계산에서 두 문자의 역할을 바꾸면

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{-2xy}{(x^2-y)^3},$$

을 얻고, 이는 정의되며 ($x^2 - y = -N \neq 0$이므로) 0이 아니다 (원점이 아닌 곳에서 $xy \neq 0$이므로). 따라서 이 점들에서도 곡선의 휘는 방향은 바뀌지 않는다.

그러므로 C에는 변곡점이 없다.

소문항 (ii)

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$로 놓는다. 그러면

$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2\cos\theta\sin\theta,$$

이고, $r \neq 0$이면 r^2으로 나눌 수 있다.

$$r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}.$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$에서 분자와 분모는 모두 음이 아니므로 (그리고 분모는 양수이므로) $r \geq 0$이며, $r = 0$인 것은 정확히 $\theta = 0$과 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때이다. 따라서 θ가 0부터 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때 점은 원점에서 출발하여 고리를 한 바퀴 돌고 원점에서 끝난다. 넓이는

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

분자와 분모를 $\cos^6\theta$ ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$에서 양수)로 나누면

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

$u = \tan\theta, \mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$로 치환하면 u는 0부터 ∞까지 변하고

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{9}{2}\left[-\frac{1}{3(1+u^3)}\right]_0^{\infty} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

$u \to \infty$일 때 부정적분이 0으로 가므로 이 이상적분(improper integral)은 수렴한다. 따라서 고리의 넓이는 $\frac{3}{2}$이다.

검산

- 고리의 끝은 $y = x$인 곳이다. $2x^3 = 3x^2$에서 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$를 얻고, 이 점은 원점에서 $\frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12$만큼 떨어져 있다. 이 정도 길이에 폭이 대략 1인 고리라면 넓이는 1에서 2 정도여야 하므로 결과와 잘 맞는다.

- 매개변수 표시(parametrisation) $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ (직선 $y = tx$가 C와 만나는 점)을 이용하여, 임의의 점들에서 $\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}$를 매개변수로 구한 이계도함수와 비교하였고, 어느 가지에서도 곡률이 부호를 바꾸지 않음을 확인하였다.
- $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$의 중점 수치적분과 매개변수로 나타낸 고리를 따라 계산한 신발끈 공식(shoelace) 합이 모두 1.500000을 준다.

흔한 실수

- 이계도함수를 완전히 전개하고도 그 안에 $x^3 + y^3 - 3xy$가 나타난다는 것을 끝내 알아차리지 못하는 것. 이 간단히 하기가 핵심이다.
- $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$가 0이 아니라 정의되지 않는, 수직 접선을 갖는 점들을 잊는 것.
- 넓이를 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 대신 $\frac{1}{2}\int r\,\mathrm{d}\theta$로 쓰는 것.

STEP 너머

음함수 미분은 음함수 정리(implicit function theorem)로 정당화된다. $\partial F/\partial y \neq 0$인 점 근처에서는 방정식 $F(x,y) = 0$이 실제로 y를 x의 매끄러운 함수로 정의한다. 두 편도함수가 모두 0이 되는 원점은 두 가지가 교차하는 특이점(singular point)이며, 그래서 따로 다루어야 했던 것이다. 엽선은 또한 유리곡선(rational curve)으로서, 이중점을 지나는 직선 $y = tx$로 매개변수 표시되는데, 이 아이디어는 대수기하학(algebraic geometry)으로 이어진다. 이 모든 것의 바탕이 되는 해석학에 대해서는 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 1993, 문제 3

순수수학 • 행렬의 LU 분해

> **STEP III 1993, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q3

핵심 아이디어

M을 하삼각행렬(lower-triangular matrix)과 상삼각행렬(upper-triangular matrix)의 곱으로 나타내면(이를 *LU* 분해(*LU decomposition*)라 한다) 모든 문제가 미지수가 하나뿐인 방정식들의 연쇄로 바뀐다. **AB**를 전개한 다음 성분을 적절한 순서로 비교하면, 새로 나오는 방정식마다 미지수가 하나만 들어 있으므로 값과 그 유일성(uniqueness)을 한꺼번에 얻는다. 또한 삼각행렬은 역행렬(inverse)을 구하기 쉽고, $\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$는 풀기 쉬운 두 개의 삼각 연립방정식으로 나뉜다.

먼저 주의할 점. 시험지에는 $e = 1$로 인쇄되어 있지만 이는 오식이고, 올바른 값은 $e = -1$이다. $e = 1$이면 **AB**의 맨 아래 행은 $(3, 8, 7)$이 아니라 $(3, 10, 1)$이 된다. 아래에서는 모두 $e = -1$을 사용한다.

풀이

A와 B 구하기

전개하면

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & ap & aq \\ b & bp + c & bq + cr \\ d & dp + e & dq + er + f \end{pmatrix}.$$

이것을 **M**과 같다고 놓고, 각 방정식에 미지수가 하나만 남도록 다음 순서로 성분을 비교한다.

- $(1,1)$ 성분: $a = 1$.
- $(1,2)$, $(1,3)$ 성분: $ap = 3$, $aq = 2$이므로 ($a = 1$이므로) $p = 3$, $q = 2$.

- $(2,1)$, $(3,1)$ 성분: $b = 4$, $d = 3$.
- $(2,2)$ 성분: $bp + c = 13$이므로 $c = 13 - 12 = 1$.
- $(2,3)$ 성분: $bq + cr = 5$이므로 ($c = 1$을 이용하면) $8 + r = 5$이고 $r = -3$.
- $(3,2)$ 성분: $dp + e = 8$이므로 $9 + e = 8$이고 $e = -1$.
- $(3,3)$ 성분: $dq + er + f = 7$이므로 $6 + 3 + f = 7$이고 $f = -2$.

각 미지수는 나머지가 모두 이미 알려진 방정식에 의해 **강제로** 결정되었고, 나눗셈은 0이 아닌 $a = 1$과 $c = 1$로만 했다. 따라서 $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$이면 미지수들은 반드시 이 값을 가져야 한다. 역으로 이 값들은 아홉 개의 방정식을 모두 만족한다. 그러므로 해가 존재하고 유일하다.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

이때 $a = 1, b = 4, c = 1, d = 3, e = -1, f = -2, p = 3, q = 2, r = -3$이다.

? **생각해 보기** 유일성은 어디에서 오는가? 우리는 해를 하나 찾았을 뿐이다.

유일성은 추론의 **순서**에서 나온다. 어느 단계에서도 선택을 한 적이 없다. 각 방정식은 계수가 0이 아닌 새 미지수 하나에 대한 일차방정식이었으므로 해가 정확히 하나였다. 따라서 주어진 꼴이면서 $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$을 만족하는 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$는 반드시 위의 쌍이어야 한다. ($\mathbf{B}$의 대각선에 있는 1이 중요하다. 이것이 없으면 $\mathbf{A}$를 몇 배 키우고 $\mathbf{B}$를 그만큼 줄일 수 있다.)

역행렬

$\mathbf{A}$의 역행렬을 구하기 위해 $\mathbf{Au} = \mathbf{v}$를 위에서부터 차례로 푼다.

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - 4u_1 = -4v_1 + v_2, \\ -2u_3 &= v_3 - 3u_1 + u_2 = -7v_1 + v_2 + v_3 \implies u_3 = \tfrac{1}{2}(7v_1 - v_2 - v_3). \end{aligned}$$

$\mathbf{B}$의 역행렬을 구하기 위해 $\mathbf{Bw} = \mathbf{u}$를 아래에서부터 차례로 푼다.

$$\begin{aligned} w_3 &= u_3, \\ w_2 &= u_2 + 3w_3 = u_2 + 3u_3, \\ w_1 &= u_1 - 3w_2 - 2w_3 = u_1 - 3u_2 - 11u_3. \end{aligned}$$

계수를 읽어 내면

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

곱을 계산해 보면 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$임을 확인할 수 있다. 하삼각(상삼각)행렬의 역행렬은 다시 하삼각(상삼각)행렬이라는 점에 주목하자.

연립방정식

주어진 방정식은 $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v} = (7, 18, 25)^{\mathrm{T}}$에 대하여 $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{v}$라는 뜻이다. $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{B}$이므로

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}.$$

순서에 주의하라: $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. 먼저

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -28 + 18 \\ \frac{1}{2}(49 - 18 - 25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix},$$

이고, 그다음

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 + 30 - 33 \\ -10 + 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

따라서 유일한 해는

$$x = 4, \qquad y = -1, \qquad z = 3.$$

$\mathbf{M}$이 가역(invertible)이므로 해는 유일하다: $\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = (1 \cdot 1 \cdot (-2))(1) = -2 \neq 0$.

검산

다시 대입하면 $4 - 3 + 6 = 7$, $16 - 13 + 15 = 18$, $12 - 8 + 21 = 25$이다. 세 방정식이 모두 성립한다. 또한 정확한 분수 계산으로 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{M}$임과 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$이 실제로 $\mathbf{M}^{-1}$임도 확인했다. 그 맨 아래 행은 $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$이다. 인쇄된 값 $e = 1$을 쓰면 곱 $\mathbf{A}\mathbf{B}$의 맨 아래 행이 $(3, 10, 1)$이 되므로 오식임이 확인된다.

흔한 실수

- 인쇄된 $e = 1$을 그대로 믿고 $(3, 2)$, $(3, 3)$ 성분을 억지로 맞추는 것. 구한 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$를 항상 다시 곱해 보라.
- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 대신 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$을 사용하는 것.
- 값이 성립함만 보이고 다른 값은 불가능하다는 논증을 하지 않는 것.

STEP 너머

이것이 바로 *LU* 분해이며, 컴퓨터가 실제로 연립일차방정식을 푸는 방법이다. 가우스 소거법(Gaussian elimination)은 사실 $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$로 인수분해하는 과정이다. 일단 분해하고 나면, 우변이 새로 주어질 때마다 전진 대입(forward substitution)과 후진 대입(back substitution)만 하면 되고 소거를 처음부터 다시 할 필요가 없다. 일반적으로는 먼저 행 교환이 필요할 수 있으며, 이때 $\mathbf{PM} = \mathbf{LU}$가 된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이 아이디어를 중심으로 한 장 전체를 구성한다.

풀이

STEP III 1993, 문제 4

순수수학 • 급수의 합

STEP III 1993, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q4

핵심 아이디어

각 급수(series)는 모두 익숙한 급수가 모습을 바꾼 것이다. 급수의 합을 구하는 일반적인 방법은 그 급수를 표준적인 전개(expansion), 즉 로그(logarithm), 등비급수(geometric series) 또는 그 도함수(derivative)의 전개를 특정한 점에서 계산한 것으로 알아보거나, 일반항을 쪼개어 합이 연쇄적으로 소거되게(telescoping) 만드는 것이다. 따라서 각 소문항마다 이 급수가 어떤 표준 급수일 수 있는지, 그리고 그 꼴로 만들려면 무엇을 곱하거나 미분하거나 재배열해야 하는지를 묻는다.

풀이

소문항 (i)

홀수 분모 $1, 3, 5, \ldots$를 보면 홀수 차수만 남은 로그 급수가 떠오른다. $|x| < 1$일 때

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \ln(1-x) = -x - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} - \cdots,$$

이고, 두 식을 빼면 짝수 차수가 사라진다.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

주어진 급수는 $x = \frac{1}{2}$일 때의 $\sum x^{2n}/(2n+1)$이다. 차수가 짝수이므로 x로 나눈다($x \neq 0$이므로 가능하다).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$x = \frac{1}{2}$는 수렴구간(interval of convergence) 안에 있고, 이때 $\frac{1+x}{1-x} = \frac{3/2}{1/2} = 3$, $\frac{1}{2x} = 1$이므로

$$1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = \ln 3.$$

이다.

소문항 (ii)

계수는 주기 4로 반복된다. 즉 $x^{4k}, x^{4k+1}, x^{4k+2}, x^{4k+3}$의 계수는 각각 $2, -1, 0, -1$이다. 따라서 네 항씩 묶으면

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}\,(2 - x - x^3) = \frac{2 - x - x^3}{1 - x^4},$$

이 되는데, 이는 공비가 x^4인 등비급수이고 $|x^4| < 1$이므로 수렴한다. 원래 급수는 $|x| < 1$에서 절대수렴(absolute convergence)하므로 이렇게 묶는 것은 정당하다. 각 항의 크기가 $2|x|^m$으로 유계이기 때문이다.

이제 식을 간단히 한다. 분자는 $x = 1$에서 0이 되므로 $1 - x$를 인수로 가진다.

$$2 - x - x^3 = (1 - x)(x^2 + x + 2), \qquad 1 - x^4 = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2).$$

$1 - x$를 약분하면($|x| < 1$이므로 0이 아니다)

$$\frac{x^2 + x + 2}{(1 + x)(1 + x^2)} = \frac{A}{1 + x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2}.$$

이다. $x = -1$을 대입하면 $2 = 2A$이므로 $A = 1$이다. 그러면 $x^2 + x + 2 - (1 + x^2) = x + 1 = (Bx + C)(1 + x)$이므로 $B = 0, C = 1$이다. 따라서

$$2 - x - x^3 + 2x^4 - \cdots = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

이다. 이는 쉽게 확인할 수 있다. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$와 $1 - x^2 + x^4 - \cdots$를 더하면 계수가 $2, -1, 0, -1, 2, \ldots$가 되어 원하는 결과와 같다.

소문항 (iii)

일반항을 다음과 같이 쓴다.

$$\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}} = \frac{1}{2}\,r\left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}.$$

? **생각해 보기** $\sum r y^{r-1}$을 어디에서 본 적이 있는가?

이것은 등비급수의 도함수이다. $|y| < 1$일 때 $\sum_{r=0}^{\infty} y^r = \frac{1}{1-y}$를 항별로 미분하면(수렴구간 안에서는 가능하다)

$$\sum_{r=1}^{\infty} r y^{r-1} = \frac{1}{(1 - y)^2}.$$

을 얻는다. $y = \frac{2}{3}$이면 이 값은 $\frac{1}{(1/3)^2} = 9$이다. 주어진 합은 $r = 2$부터 시작하므로 $r = 1$일 때의 항인 1을 뺀다.

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}} = \frac{1}{2}(9-1) = 4.$$

소문항 (iv)

$r(r^2-1) = (r-1)r(r+1)$은 연속한 세 정수의 곱이므로, 연속한 두 "쌍" 분수의 차를 찾아본다.

$$\frac{1}{(r-1)r} - \frac{1}{r(r+1)} = \frac{(r+1)-(r-1)}{(r-1)r(r+1)} = \frac{2}{r(r^2-1)}.$$

따라서 합은 연쇄적으로 소거된다. $r = 2$부터 N까지 더하면 처음 항과 마지막 항을 제외한 모든 항이 소거된다.

$$\sum_{r=2}^{N} \frac{2}{r(r^2-1)} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{N(N+1)}.$$

$N \to \infty$일 때 마지막 항은 0으로 수렴하므로

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{2}{r(r^2-1)} = \frac{1}{2}.$$

이다.

검산

- (i): 처음 네 항을 더하면 $1 + 0.0833 + 0.0125 + 0.0022 \approx 1.098$로, 이미 $\ln 3 \approx 1.0986$에 가깝다.
- (ii): $x = 0$에서 양변은 모두 2이다. $x = \frac{1}{2}$에서 닫힌 꼴은 $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$이고, 이는 부분합(partial sum)의 수치와 일치한다.
- (iii): 처음 몇 항은 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{16}{27}, \ldots$ 이고, 부분합은 천천히 4를 향해 증가한다.
- (iv): $N = 4$까지의 부분합은 $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{9}{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}$으로, 공식과 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 x로 나누는 것을 잊는 경우: $x = \frac{1}{2}$에서 $\sum x^{2n+1}/(2n+1)$의 값은 $\ln 3$이 아니라 $\frac{1}{2}\ln 3$이다.
- (iii)에서 $r = 1$부터 더하고 빠진 첫째 항을 빼는 것을 잊는 경우: 그러면 $\frac{9}{2}$가 나온다.
- (iv)에서 대신 $\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r+1}$로 소거하려는 경우: 이것은 $\frac{2}{r(r^2-1)}$이 아니라 $\frac{2}{r^2-1}$을 쪼갠 것이다.

STEP 너머

우리가 별다른 고민 없이 밟은 단계들, 즉 (ii)에서 항을 다시 묶은 것과 (iii)에서 거듭제곱급수(power series)를 항별로 미분한 것은 바로 첫 해석학(analysis) 강의에서 정당화하는 내용이다. 거듭제곱급수는 수렴반지름(radius of convergence) 안에서 절대수렴하며 항별로 미분할 수 있다. 그러나 조건수렴(conditional convergence)만 하는 급수를 재배열하면 합이 달라질 수 있다(리만(Riemann)의 재배열 정리(rearrangement theorem)). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 두 가지를 모두 꼼꼼히 다룬다.

풀이

STEP III 1993, 문제 5

순수수학 • 군과 사원수

> **STEP III 1993, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q5

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.7 절 **사원수군**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/quaternions.html

핵심 아이디어

이 연산은 임의로 정한 것처럼 보이지만, 첫 번째 부분의 네 가지 곱을 보면 그 구조가 드러난다. $(z,0)$ 꼴의 쌍은 보통의 복소수처럼 곱해지고, 두 번째 자리는 $j^2=-1$을 만족하는 새로운 기호 j처럼 행동한다. 이 기호는 자신이 지나가는 모든 것을 켤레(conjugate)로 바꾼다. 이 네 가지 곱을 구하고 나면, S_1의 여덟 원소는 $u\in\{1,i,-1,-i\}$에 대하여 $(u,0)$과 $(0,u)$일 뿐이다. 따라서 닫힘, 역원, 위수는 몇 줄의 일반적인 계산으로 얻어지며, 64칸짜리 표를 만들 필요가 없다.

풀이

결합법칙과 교환법칙

$z=(z_1,z_2)$, $w=(w_1,w_2)$, $u=(u_1,u_2)$라 하자. 풀이 전체에서 $(ab)^*=a^*b^*$, $(a\pm b)^*=a^*\pm b^*$, $a^{**}=a$를 사용한다. 먼저

$$z\circ w=(z_1w_1-z_2w_2^*,\ z_1w_2+z_2w_1^*),$$

이므로 $(z\circ w)\circ u$의 두 성분은 다음과 같다.

$$(z_1w_1-z_2w_2^*)u_1-(z_1w_2+z_2w_1^*)u_2^*=z_1w_1u_1-z_1w_2u_2^*-z_2w_1^*u_2^*-z_2w_2^*u_1,$$
$$(z_1w_1-z_2w_2^*)u_2+(z_1w_2+z_2w_1^*)u_1^*=z_1w_1u_2+z_1w_2u_1^*+z_2w_1^*u_1^*-z_2w_2^*u_2.$$

한편 $w \circ u = (w_1u_1 - w_2u_2^*,\ w_1u_2 + w_2u_1^*)$이므로 $z \circ (w \circ u)$의 두 성분은 다음과 같다.

$$z_1(w_1u_1 - w_2u_2^*) - z_2(w_1u_2 + w_2u_1^*)^* = z_1w_1u_1 - z_1w_2u_2^* - z_2w_1^*u_2^* - z_2w_2^*u_1,$$
$$z_1(w_1u_2 + w_2u_1^*) + z_2(w_1u_1 - w_2u_2^*)^* = z_1w_1u_2 + z_1w_2u_1^* + z_2w_1^*u_1^* - z_2w_2^*u_2.$$

우변이 항별로 일치하므로 $\circ$는 결합법칙(associativity)을 만족한다.

교환법칙(commutativity)은 성립하지 않는다. 예를 들어

$$(0,1) \circ (i,0) = (0-0,\ 0+1\cdot i^*) = (0,-i), \qquad (i,0) \circ (0,1) = (0-0,\ i\cdot 1+0) = (0,i).$$

네 가지 곱

정의에 $\circ$을 대입하면

$$(z,0) \circ (w,0) = (zw,\ 0), \qquad (z,0) \circ (0,w) = (0,\ zw),$$
$$(0,z) \circ (w,0) = (0,\ zw^*), \qquad (0,z) \circ (0,w) = (-zw^*,\ 0).$$

집합 S_1

$U = \{1, i, -1, -i\}$라 하자. 그러면

$$S_1 = \{(u,0) : u \in U\} \cup \{(0,u) : u \in U\},$$

이고, A, C, E, G는 첫 번째 종류, B, D, F, H는 두 번째 종류이다.

닫힘. 집합 U는 곱셈, 켤레복소수 취하기($i^* = -i$), 부호 바꾸기에 대하여 닫혀 있다. 네 가지 곱에 의해 S_1의 두 원소의 곱은 $z, w \in U$에 대하여 $(zw,0)$, $(0,zw)$, $(0,zw^*)$, $(-zw^*,0)$ 중 하나이다. zw와 $\pm zw^*$는 모두 U에 속하므로, 모든 곱은 S_1에 속한다. 즉 S_1은 닫혀(closure) 있다.

항등원. 임의의 $(w_1,w_2) \in S$에 대하여

$$(1,0) \circ (w_1,w_2) = (w_1,\ w_2), \qquad (w_1,w_2) \circ (1,0) = (w_1,\ w_2\cdot 1^*) = (w_1,w_2),$$

이므로 $A = (1,0)$은 양쪽 항등원(identity)이며, S_1에 속한다.

역원과 위수. 첫 번째 종류의 원소에 대해서는 $(z,0) \circ (w,0) = (zw,0)$이므로, 이들은 U의 복소수와 똑같이 행동한다. 따라서 A는 위수(order) 1이고 자기 자신이 역원(inverse)이며, $E = (-1,0)$은 위수 2이고 자기 자신이 역원이다. 또 $C = (i,0)$과 $G = (-i,0)$은 각각 위수 4이고 서로의 역원이다.

> ? **생각해 보기** 두 번째 종류의 원소를 제곱하면 무엇이 되는가?

네 가지 곱 중 마지막 것에 의해, $u \in U$에 대하여

$$(0,u) \circ (0,u) = (-uu^*,\ 0) = (-|u|^2,\ 0) = (-1,0) = E.$$

따라서 B, D, F, H는 모두 제곱하면 E가 된다. E의 위수가 2이므로, 이들은 각각 위수 4이다. 역원을 구하자. $(0,u)\circ(0,w) = (-uw^*, 0)$이 $(1,0)$과 같을 필요충분조건은 ($uu^* = 1$을 이용하면) $w^* = -1/u = -u^*$, 즉 $w = -u$이다. 반대 순서로 확인해 보면 $(0,-u)\circ(0,u) = (uu^*, 0) = (1,0)$도 성립한다. 따라서 $(0,u)$의 역원은 $(0,-u)$이다.

정리하면 다음과 같다.

원소	A	B	C	D	E	F	G	H
역원	A	F	G	H	E	B	C	D
위수	1	4	4	4	2	4	4	4

군. 이제 네 공리를 모두 확인했다. S_1은 $\circ$에 대하여 닫혀 있다. 연산은 S 전체에서 결합법칙을 만족하므로, 특히 S_1에서도 만족한다. $A \in S_1$은 항등원이고, 모든 원소는 S_1 안에 역원을 가진다. 따라서 S_1은 $\circ$에 대하여 위수 8인 군(group)이다. 이 군은 비아벨군(non-abelian group)이다. $B\circ C = H$이지만 $C\circ B = D$이기 때문이다.

부분군과 행렬

위의 곱을 이용하면 $B = (0,1)$의 거듭제곱은

$$B^2 = E, \qquad B^3 = E\circ B = (-1,0)\circ(0,1) = (0,-1) = F, \qquad B^4 = E\circ E = A.$$

따라서 $\{A, B, E, F\} = \{B^0, B^1, B^2, B^3\}$은 B가 생성하는 순환 부분군(cyclic subgroup)이다. $B^m \circ B^n = B^{m+n}$이고 지수를 법 4에 대하여 줄일 수 있으므로 이 집합은 닫혀 있으며, A와 각 B^k의 역원 B^{4-k}를 포함한다. 따라서 이것은 위수 4인 부분군이다.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이라 하자. 그러면

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \qquad M^3 = -M, \qquad M^4 = I,$$

이므로 M이 생성하는 군은 $\{I, M, -I, -M\}$이며, 이 역시 위수 4인 순환군이다. 위수가 같은 두 순환군은 항상 동형(isomorphic)이다. 여기서 사상

$$A \mapsto I, \quad B \mapsto M, \quad E \mapsto -I, \quad F \mapsto -M,$$

즉 $B^k \mapsto M^k$는 전단사(bijection)이고 $B^m \circ B^n = B^{m+n} \mapsto M^{m+n} = M^m M^n$을 만족한다. 따라서 두 군은 **동형이다.**

검산

- 원소의 위수는 군의 위수를 나눈다. 위수 1, 2, 4는 모두 8을 나누고, 부분군에서는 2와 4가 4를 나눈다.

- 복소수 관점: $(z,0)\circ(w,0) = (zw,0)$이므로 $C\circ C = (i^2,0) = E$이며, 이는 정확히 $i^2 = -1$과 같다.
- 짧은 컴퓨터 검사로 복소수 쌍의 무작위 세 쌍 10 000개에 대하여 결합법칙을 확인했고, 8×8 곱셈표 전체를 만들어 닫힘, 항등원, 위의 역원과 위수, 그리고 $B\circ C = H \neq D = C\circ B$를 확인했으며, $B^k \mapsto M^k$가 곱셈을 보존함을 확인했다.

흔한 실수

- 켤레를 빠뜨리는 것: $(0,z)\circ(w,0)$은 $(0,zw)$가 아니라 $(0,zw^*)$이다. 교환법칙이 성립하지 않는 이유가 바로 여기에 있다.
- 수치 예 하나로 결합법칙을 보이는 것. 예는 법칙이 **성립하지 않음**을 보일 수는 있지만, 법칙을 증명하려면 일반적인 전개가 필요하다.
- 한 군은 복소수의 쌍으로, 다른 군은 행렬로 이루어져 있다는 이유로 "동형이 아니다"라고 결론 내리는 것. 동형은 곱셈의 구조에 관한 것이지, 원소가 무엇인지에 관한 것이 아니다.

STEP 너머

이 연산은 해밀턴(Hamilton)의 **사원수**(*quaternion*) 곱셈이다. 쌍 (z_1,z_2)는 $z_1 + z_2 j$를 나타내며, 여기서 $j^2 = -1$이고 $jz = z^* j$이다. 군 S_1은 **사원수군**(*quaternion group*) $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$이다. 이 군은 모든 부분군이 정규부분군(normal subgroup)인 가장 작은 비아벨군이며, 위수 8인 또 다른 비아벨군(정사각형의 대칭군)과는 위수 2인 원소가 단 하나뿐이라는 점에서 다르다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 위수가 작은 군과 사원수를 다룬다.

풀이

STEP III 1993, 문제 6

순수수학 • 복소평면 위의 자취

> **STEP III 1993, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q6

핵심 아이디어

원은 $|z-k|=r$로 나타내는 것이 자연스럽다. 이 식을 $|u|^2=uu^*$를 이용해 제곱하면 제곱근 없이 z와 z^*로 이루어진 방정식이 된다. 자취(locus)를 이런 꼴로 써 두면 $w=z/(z-1)$ 같은 뫼비우스(Möbius) 사상은 쉽게 다룰 수 있다. 사상을 거꾸로 풀어 z를 w에 관한 식으로 나타내고, 대입한 뒤 분모를 없애고, 일반형과 비교하여 새로운 중심과 반지름을 읽어 내면 된다.

풀이

원의 방정식

P가 원 위에 있을 필요충분조건은 K로부터의 거리가 r인 것, 즉 $|z-k|=r$이다. 양변을 제곱하고 $|u|^2=uu^*$와 $(z-k)^*=z^*-k^*$를 이용하면

$$r^2=(z-k)(z^*-k^*)=zz^*-kz^*-k^*z+kk^*,$$

이므로 $zz^*-kz^*-k^*z+kk^*-r^2=0$이고, 이것이 보이려던 식이다.

역으로, 임의의 방정식 $ww^*-cw^*-c^*w+cc^*-s^2=0$ (단, $s>0$)은 $|w-c|^2=s^2$를 뜻하므로, 중심이 c이고 반지름이 s인 원이다. 아래에서는 이 사실을 이용해 원을 알아본다.

P의 자취

OA를 지름(diameter)으로 하는 원은 중심이 i(0과 $2i$의 중점)이고 반지름이 1이다. $k=i$, $k^*=-i$, $kk^*=1$, $r=1$로 두면 첫 번째 부분에 의해

$$zz^*+iz-iz^*=0. \qquad (*)$$

Q_1의 자취 L

$z = 1$은 원 위에 있지 않으므로(i로부터의 거리가 $\sqrt{2}$이다), 모든 P에 대해 $w_1 = z/(z-1)$이 정의된다. 편의상 w로 w_1을 나타내자. $w(z-1) = z$를 z에 대해 풀면

$$z = \frac{w}{w-1}, \qquad z^* = \frac{w^*}{w^*-1},$$

이고, $w \neq 1$이다. $w = 1$이려면 $z = z - 1$이어야 하기 때문이다. $(*)$에 대입하면

$$\frac{ww^*}{(w-1)(w^*-1)} + \frac{iw}{w-1} - \frac{iw^*}{w^*-1} = 0.$$

0이 아닌 $(w-1)(w^*-1)$을 양변에 곱하면

$$\begin{aligned} 0 &= ww^* + iw(w^*-1) - iw^*(w-1) \\ &= ww^* + iww^* - iw - iww^* + iw^* \\ &= ww^* - iw + iw^*. \end{aligned}$$

따라서 L의 방정식은

$$w_1 w_1^* - iw_1 + iw_1^* = 0.$$

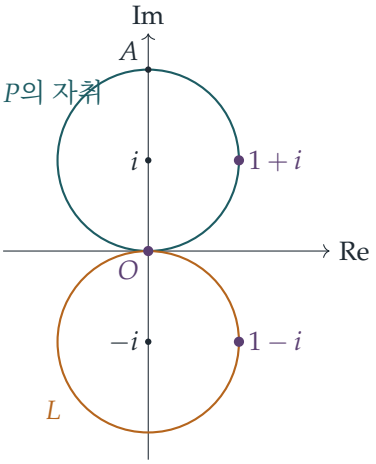
이것이 무엇인지 알아보기 위해 일반형과 비교하자. $-k^* = -i$이고 $-k = i$이어야 하므로 $k = -i$이다. 그러면 $kk^* = 1$이고, 상수항 $kk^* - r^2$이 0이므로 $r = 1$이다. 따라서 L은 중심이 $-i$이고 반지름이 1인 원, 즉 $|w_1 + i| = 1$이다. 이 원은 P의 원을 실수축에 대해 반사(reflection)한 것이며, 역시 원점을 지난다.

? **생각해 보기** 이 원의 모든 점에 실제로 도달하는가, 아니면 일부에만 도달하는가?

위의 모든 단계는 거꾸로 되짚을 수 있다. $w \neq 1$이 $|w+i| = 1$ 위에 있으면 $z = w/(w-1)$은 $(*)$를 만족하므로, 이는 원 위의 점 P로서 $w_1 = w$를 만족한다. 놓칠 수 있는 유일한 점은 $w = 1$인데, 이 점은 L 위에 있지 않다. $|1+i| = \sqrt{2}$이기 때문이다. 따라서 자취는 원 전체이다.

Q_2의 자취

$|z-i| = 1$의 켤레(conjugate)를 취하면, $|u^*| = |u|$이고 $(z-i)^* = z^* + i$이므로 $|z^* + i| = 1$을 얻는다. 따라서 $w_2 = z^*$는 $|w_2 + i| = 1$을 만족한다. z가 i를 중심으로 하는 원 전체를 움직이면, z^*는 $-i$를 중심으로 하는 원 전체를 움직인다. 같은 이야기를 달리 하면, $(*)$의 켤레를 취하면 $z^*z - iz^* + iz = 0$을 얻는데, 이는 $w = z^*$로 둔 L의 방정식이다. 따라서 Q_2의 자취도 L이다.



Q_1과 Q_2가 일치할 때

$\dfrac{z}{z-1} = z^*$, 즉

$$z = zz^* - z^*.$$

이어야 한다. 원 위에서는 $(*)$에 의해 $zz^* = iz^* - iz$이다. 이를 대입하면

$$z = iz^* - iz - z^* \quad \Longrightarrow \quad (1+i)z = (i-1)z^*.$$

한 해는 $z = 0$이다. 그렇지 않으면 $z^* \neq 0$이고

$$\frac{z}{z^*} = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

$z = \rho e^{i\theta}$ (단, $\rho > 0$)로 쓰면 이는 $e^{2i\theta} = i$를 뜻하므로 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5\pi}{4}$이다. 즉 P는 직선 $y = x$ 위에 있다. 이 직선은 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$, 즉 $x^2 + y^2 = 2y$와 $2x^2 = 2x$인 곳, 곧 $x = 0$ 또는 $x = 1$에서 만난다. O이 아닌 점은 $z = 1 + i$이다.

두 점을 모두 확인하자. $z = 0$이면 $w_1 = 0 = z^*$이고, $z = 1 + i$이면

$$w_1 = \frac{1+i}{i} = 1 - i = z^*.$$

따라서 Q_1과 Q_2가 일치하는 것은 정확히 P가 원점이거나 점 $1 + i$일 때이다. 이 두 점은 $y = x$가 원과 만나는 점이며, $Q_1 = Q_2$의 공통 위치는 0과 $1 - i$이다.

검산

- 표본 점: $P = 2i$(점 A)이면 $w_1 = \frac{2i}{2i-1} = \frac{4-2i}{5}$이고, $|w_1 + i| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$이므로 이 점은 L 위에 있다.

- 수치적으로, 10^4개의 임의의 점을 $|z-i|=1$ 위에서 택하여 $z/(z-1)$과 z^*가 모두 $|w+i|=1$을 10^{-9} 이내의 오차로 만족함을 확인했다. 원 둘레의 2×10^5개 점을 조사하여 $\left|z/(z-1)-z^*\right|<10^{-3}$인 점을 찾았더니 $z=0$과 $z=1+i$만 나왔다.

흔한 실수

- z^*로 나누면서 $z=0$인 경우를 먼저 따로 떼어 놓지 않아, 해 $P=O$를 잃는 것.
- $z/z^*=i$를 얻고 거기서 멈추는 것: 이는 P의 방향만 정할 뿐이며, 그 직선과 원의 교점을 여전히 구해야 한다.
- $ww^*-iw+iw^*=0$을 일반형에 맞출 때 k의 부호를 틀리는 것. w^*의 계수는 $-k$이므로 $k=-i$이며, i가 아니다.

STEP 너머

사상 $z\mapsto z/(z-1)$은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이며, 이러한 사상은 언제나 원과 직선을 원과 직선으로 보낸다. 여기서는 상(image)인 원이 마침 원래 원의 거울상이며, 그래서 켤레를 취해도 같은 자취가 나온다. 켤레 사상 자체는 방향을 뒤집으므로 뫼비우스 사상이 아니지만, 이를 뫼비우스 사상과 합성하면 "반뫼비우스(anti-Möbius)" 사상을 얻으며, 여기에는 원에 대한 반사(reflection in a circle)가 포함된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 뫼비우스 사상, 반전(inversion), 원을 보존하는 성질을 아름다운 기하학적 방식으로 다룬다.

풀이

STEP III 1993, 문제 7

순수수학 • 쌍곡선 함수 연립방정식

> **STEP III 1993, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q7

핵심 아이디어

두 배각 sinh를 모두 전개한다. 그러면 두 번째 방정식에서 $\cosh x$가 y로 바로 표현되고, 첫 번째 방정식을 이것으로 나누면 $\sinh x$도 y로 표현된다. 항등식 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$을 쓰면 x가 완전히 소거되어 $\sinh^2 y$만의 방정식이 남는다. 그다음은 삼차방정식의 올바른 근을 찾아 수치적으로 정확히 구하는 일이다.

풀이

x 소거하기

$\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u$를 이용하면 두 방정식은

$$2\sinh x \cosh x = \cosh y, \qquad 2\sinh y \cosh y = 2\cosh x.$$

가 된다. 두 번째 식에서

$$\cosh x = \sinh y \cosh y.$$

를 얻는다. $\cosh x \geq 1 > 0$이므로 첫 번째 방정식을 $2\cosh x$로 나눌 수 있다.

$$\sinh x = \frac{\cosh y}{2\sinh y \cosh y} = \frac{1}{2\sinh y},$$

여기서 $\cosh y > 0$이므로 $\cosh y$로 나누어도 되고, $\sinh y \cosh y = \cosh x \neq 0$이므로 $\sinh y \neq 0$이다.

이제 두 식을 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$에 대입한다. $t = \sinh^2 y$로 놓으면 $\cosh^2 y = 1 + t$이므로

$$t(1+t) - \frac{1}{4t} = 1.$$

이다. 양변에 $4t$(0이 아니다)를 곱하면 $4t^2 + 4t^3 - 1 = 4t$, 즉

$$4t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0,$$

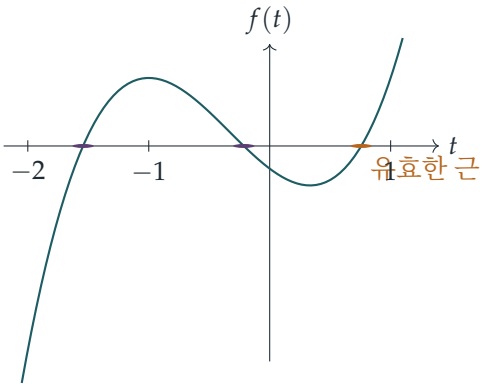
이므로 $t = \sinh^2 y$는 주어진 삼차방정식의 근이다. 이로써 요구된 결과가 증명된다.

유효한 해는 많아야 하나

$f(t) = 4t^3 + 4t^2 - 4t - 1$이라 하자. $t = \sinh^2 y$이고 $\sinh y \neq 0$이므로 유효한 근은 $t > 0$을 만족해야 한다. 이제

$$f(-2) = -9, \quad f(-1) = 3, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = 3,$$

이므로 사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의해 삼차방정식은 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$에 각각 근을 하나씩 가진다. 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이므로 이것이 전부이고, 양의 근은 정확히 하나이다.



생각해 보기 양수 t 하나는 두 값 $\sinh y = \pm\sqrt{t}$를 준다. 왜 그중 하나만 살아남는가?

$\cosh x = \sinh y \cosh y$이고 $\cosh x > 0$, $\cosh y > 0$이므로 $\sinh y > 0$이어야 한다. 따라서 $\sinh y = +\sqrt{t}$이고, sinh는 순증가하므로 이로부터 정확히 하나의 y, 곧 $y > 0$인 값이 정해진다. 그러므로 삼차방정식에서 얻는 유효한 y는 많아야 하나이다(그리고 sinh는 일대일(one-to-one)이므로 $\sinh x = 1/(2\sinh y)$에 의해 x도 유일하게 정해진다).

t의 위치 찾기와 계산

$$f(0.7) = 1.372 + 1.96 - 2.8 - 1 = -0.468 < 0,$$
$$f(0.8) = 2.048 + 2.56 - 3.2 - 1 = 0.408 > 0,$$

이므로 사잇값 정리에 의해 양의 근은 0.7과 0.8 사이에 있다.

중점 $t_0 = 0.75$에서 출발하여 뉴턴-랩슨(Newton–Raphson) 반복법

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \qquad f'(t) = 12t^2 + 8t - 4,$$

을 사용한다. $f(0.75) = -0.0625$, $f'(0.75) = 8.75$이므로

$$t_1 = 0.75 + \frac{0.0625}{8.75} = 0.7571429,$$
$$t_2 = 0.7570685,$$
$$t_3 = 0.75706846,$$

이고, t_4는 표시된 모든 자릿수에서 t_3와 일치한다. 소수점 아래 여섯째 자리까지 확정하기 위해 부호 변화

$$f(0.7570680) < 0 < f(0.7570690),$$

를 확인한다. 따라서 근은 이 구간에 있고

$$t = 0.757068 \quad (\text{소수점 아래 6자리}).$$

이다. (더 느리지만 충분히 쓸 만한 다른 방법도 있다. $t^2(4t+4) = 4t+1$, 즉 $t = \sqrt{(4t+1)/(4t+4)}$로 변형하는 것이다. 근 근처에서 우변의 도함수는 약 0.16이므로 이 반복은 수렴하며, 한 단계마다 소수 한 자리보다 조금 적게 정확도가 늘어난다.)

y와 x 구하기

양의 제곱근을 택하면 $\sinh y = \sqrt{0.7570685} = 0.870097$이므로

$$y = \operatorname{arsinh}(0.870097) = \ln\bigl(0.870097 + \sqrt{1.757068}\bigr) = 0.786474,$$

이고

$$\sinh x = \frac{1}{2\sinh y} = 0.574649, \qquad x = \ln\bigl(0.574649 + \sqrt{1.330221}\bigr) = 0.546965.$$

이다.

원래 방정식에 대입하여 확인하면

$$\sinh 2x = 1.325545 = \cosh y,$$
$$\sinh 2y = 2.306704 = 2\cosh x,$$

이므로 두 방정식이 모두 성립한다. 소수점 아래 넷째 자리까지 나타내면

$$x = 0.5470, \qquad y = 0.7865.$$

이다.

검산

- 삼차방정식의 나머지 두 근은 약 -0.2140과 -1.5431로, 논증에서 요구한 대로 둘 다 음수이다. 세 근의 곱은 $\frac{1}{4}$이며, 이는 $0.757068 \times 0.2140 \times 1.5431 \approx 0.250$과 일치한다.
- $y \in [-5, 5]$에서 두 번째 방정식으로부터 $x = \pm \operatorname{arcosh}(\frac{1}{2}\sinh 2y)$를 구하고 첫 번째 방정식을 검사하는 직접적인 수치 탐색을 해 보면, $y \approx 0.7865$이고 $x > 0$인 해 하나만 나온다.
- 음수 쪽 선택 $\sinh y = -\sqrt{t}$는 $\sinh y \cosh y < 0$이 되게 하므로 결코 $\cosh x$와 같을 수 없다. 이것이 정말 유효하지 않다는 것을 빠르게 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 일찍 제곱해 놓고(예를 들어 원래 두 방정식을 모두 제곱하고) 맞지 않는 부호를 버리는 것을 잊는 것.
- 두 반복값이 소수점 아래 여섯째 자리까지 일치하자마자 반올림 구간에서의 부호 변화를 확인하지 않고 반복을 멈추는 것.
- 제곱근과 로그를 취하기 전에 t를 여섯째 자리로 반올림하는 것. 여분의 자릿수를 유지하고 최종 x와 y만 반올림해야 한다.

STEP 너머

여기서 쓴 두 반복법은 수렴 속도가 매우 다르다. 고정점 반복(fixed-point iteration) $t \mapsto g(t)$는 선형으로 수렴하여 한 단계마다 오차가 약 $|g'(\text{근})|$배로 줄어드는 반면, 뉴턴-랩슨 방법은 이차로 수렴하여 한 단계마다 정확한 자릿수가 대략 두 배가 된다. 이를 엄밀하게 하려면 평균값 정리(mean value theorem)와 테일러 정리(Taylor's theorem)를 사용하며, 이것이 수치해석(numerical analysis)의 출발점이다. 그 배경이 되는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해)를 보라.

풀이

STEP III 1993, 문제 8

순수수학 • 3차원 공간의 평면과 직선

STEP III 1993, 8번 문제

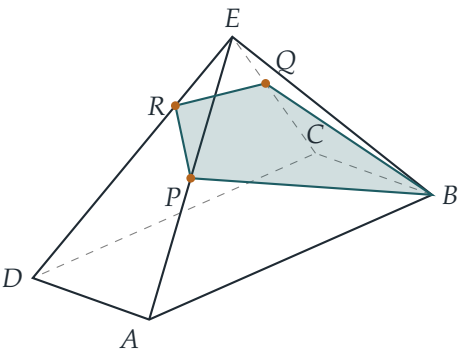
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q8

핵심 아이디어

각 옆모서리는 밑면의 꼭짓점과 E를 잇기 때문에, 옆모서리 위의 모든 점은 간단한 매개변수 표현(parametric form)으로 나타낼 수 있다. 따라서 P, Q, R를 한꺼번에 적을 수 있고, B, P, Q를 지나는 평면(plane)은 이 점들을 대입하여 계수를 정하는 일차방정식(linear equation)으로 구할 수 있다. 두 번째 부분에서 평행사변형(parallelogram)인지 판정하는 가장 깔끔한 방법은 두 대각선(diagonal)이 서로를 이등분(bisect)하는지 보는 것이다. 좌표 하나만 보아도 이것이 성립하지 않음을 보일 수 있다.

풀이



γ 구하기

모서리 AE 위에서는 $x+z=a$이므로, 이 모서리는 $0 \le t \le 1$인 점 $(ta, 0, (1-t)a)$들로 이루어진다. 마찬가지로 CE는 $\{(-ta, 0, (1-t)a)\}$이고 DE는 $\{(0, -ta, (1-t)a)\}$이다. 따라

서

$$P = \big(\lambda a,\, 0,\, (1-\lambda)a\big), \qquad Q = \big(-\mu a,\, 0,\, (1-\mu)a\big), \qquad R = \big(0,\, -\gamma a,\, (1-\gamma)a\big).$$

평면 BPQ를 다음 꼴로 찾는다.

$$px + qy + rz = a.$$

세 점 B, P, Q는 한 직선 위에 있지 않으므로(non-collinear) 평면을 하나로 결정한다. 세 조건을 모두 만족하는 p, q, r를 찾을 수 있다면, 그 방정식이 바로 구하는 평면이다. 각 점을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B: &\quad qa = a, && \text{따라서} q = 1,\\ P: &\quad p\lambda + r(1-\lambda) = 1,\\ Q: &\quad -p\mu + r(1-\mu) = 1. \end{aligned}$$

p를 소거하기 위해 P에 대한 식에 μ를, Q에 대한 식에 λ를 곱하여 더하면

$$r\big(\mu - \lambda\mu + \lambda - \lambda\mu\big) = \lambda + \mu, \qquad \text{따라서} \qquad r = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}.$$

분모는 $\lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$이므로 문제없다. (뒤에서 쓰지는 않지만, $p = (\lambda - \mu)/(\lambda+\mu-2\lambda\mu)$이다.)

이제 R가 이 평면 위에 있으므로

$$-\gamma + r(1-\gamma) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma(1+r) = r - 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma = \frac{r-1}{r+1}.$$

모두 공통분모 $\lambda+\mu-2\lambda\mu$로 나타내면

$$r - 1 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}, \qquad r + 1 = \frac{2(\lambda+\mu-\lambda\mu)}{\lambda+\mu-2\lambda\mu},$$

이고, 따라서

$$\gamma = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu},$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

$0 < \gamma < 1$이라는 점에 주목할 만하다. 즉 R는 실제로 모서리 DE 위에서 D와 E 사이(양 끝점 제외)에 놓인다. 양수라는 것은 분명하다. $\gamma < 1$인 것은 분모가 분자보다 $\lambda+\mu-2\lambda\mu = \lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$만큼 크기 때문이다.

$BPRQ$는 평행사변형이 아니다

생각해 보기 주어진 순서로 놓인 네 점이 평행사변형을 이루는지 판정하는 가장 빠른 방법은 무엇인가?

사각형 $BPRQ$가 평행사변형일 필요충분조건은 두 대각선 BR와 PQ가 서로를 이등분하는 것, 즉 다음이 성립하는 것이다.

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}.$$

(이는 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QR}$, 즉 한 쌍의 대변이 길이가 같고 평행하다는 것과 같다.) 양변의 y좌표를 비교하면

$$\text{좌변: } a - \gamma a = (1-\gamma)a, \qquad \text{우변: } 0 + 0 = 0.$$

이 둘이 같아야 하므로 $\gamma = 1$이어야 한다. 그러나 앞에서 $\gamma < 1$임을 보였다. 실제로 $\gamma = 1$이면 R가 E에 놓이게 된다. 따라서 두 대각선은 결코 서로를 이등분하지 않으며, $BPRQ$는 평행사변형일 수 없다. ■

빠짐없이 덧붙이자면, 평면이 네 옆모서리를 EB, EA, ED, EC의 순환 순서로 자르므로, 사각형의 꼭짓점은 실제로 B, P, R, Q 순서로 놓인다. 점을 다르게 짝지어도 소용없다. $B + P = Q + R$와 $B + Q = P + R$는 모두 y좌표에서 $a = -\gamma a$를 요구하는데, $\gamma > 0$이므로 이는 불가능하다.

같은 사실을 기하적으로 볼 수도 있다. BP는 면 ABE 위에 있고 QR는 면 CDE 위에 있다. 이 두 면은 E를 지나고 AB에 평행한 직선에서 만난다. 이 두 평면 위에 각각 놓인 두 평행한 직선은 그 공통 직선에 평행해야 한다. 따라서 $BP \parallel QR$이면 $BP \parallel AB$이어야 하는데, $P \neq A$이므로 이는 불가능하다.

검산

- 대칭인 경우 $\lambda = \mu$: 공식에서 $\gamma = \lambda/(2-\lambda)$를 얻는다. $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$이면 이 값은 $\frac{1}{3}$이다. 직접 계산하면 $p = 0, r = 2$이고 평면은 $y + 2z = a$이며, 이 평면은 DE와 $(0, -\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a)$에서 만나므로 예측과 일치한다.
- 극한 $\lambda, \mu \to 1$: $P \to A, Q \to C$이고 평면은 밑면이 되며, $\gamma \to 1$이므로 마땅히 $R \to D$이다.
- 깔끔하게 다시 쓰면 $\dfrac{1-\gamma}{\gamma} = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} + \dfrac{1-\mu}{\mu}$이고, 이는 수치로 확인하기 쉽다. 예를 들어 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{2}{5}$이면 $\gamma = \frac{2}{7} \approx 0.2857$이다.
- 무작위로 고른 2000개의 a, λ, μ에 대해 공식, $0 < \gamma < 1$, 그리고 평행사변형에 관한 주장을 (분수로) 정확히 확인했다. 이때 R는 외적(cross product)으로 구한 평면의 법선(normal)을 이용하여 독립적으로 구했다.

흔한 실수

- AE를 잘못 매개화하는 것: AE 위에서 좌표는 $x + z = a$와 $y = 0$을 만족하므로, P의 z좌표는 $(1 - \lambda)a$이지 λa가 아니다.
- 2차원 그림에서 기울기만으로 $BP \parallel QR$인지 확인하는 것. 이 사각형은 기울어진 평면 위에 있으므로 3차원 벡터로 다루어야 한다.
- $\gamma < 1$을 보이는 것을 잊는 것. 이것이 바로 평행사변형 논증에 필요한 사실이다.

STEP 너머

평면이 직선과 만나는 점을 찾는 것은 연립일차방정식(linear system)을 푸는 가장 간단한 경우이다. $EP : PA = (1 - \lambda) : \lambda$이고 다른 모서리에서도 마찬가지이므로, 이 결과는 다음을 말해 준다.

$$\frac{ER}{RD} = \frac{EP}{PA} + \frac{EQ}{QC},$$

이는 B를 지나는 임의의 평면에 대한, 좌표와 무관한 명제이다. 직선 위의 비만 사용하므로, 이 결과는 밑면이 평행사변형인 모든 각뿔에서 성립한다. 아핀 사상(affine map)이 그러한 각뿔을 모두 이 각뿔로 옮기기 때문이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 평면, 법선, 연립일차방정식을 제대로 전개한다.

풀이

STEP III 1993, 문제 9

순수수학 • 제곱합 부등식

> **STEP III 1993, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q9

핵심 아이디어

여기 나오는 모든 부등식은 제곱의 합이 음이 아니라는 사실을 다른 모습으로 나타낸 것이다. 소문항 (i)은 가장 단순한 경우인 $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$이고, 이후 소문항들에서는 **모든** 쌍에 대하여 $(a_i - a_j)^2$를 더한 다음 각 제곱항과 각 곱이 몇 번 나타나는지 세는 방식을 따른다. 일반적인 형태인 (iv)를 얻고 나면, $(\sum a_i)^2$을 제곱항과 교차항(cross term)으로 전개하여 (v)를 얻을 수 있다.

이 풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad P = \sum_{i<j} a_i a_j,$$

여기서 두 번째 합은 $1 \leq i < j \leq n$인 $\binom{n}{2}$개의 쌍 전체에 대한 합이다.

풀이

소문항 (i)

실수의 제곱은 음이 아니므로

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2,$$

이다. 따라서 $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2$이고, 등호는 정확히 $a_1 = a_2$일 때 성립한다.

소문항 (ii)

세 쌍 각각에 (i)을 적용하여 더한다.

$$a_2^2 + a_3^2 \geq 2a_2a_3,$$
$$a_3^2 + a_1^2 \geq 2a_3a_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2.$$

각 제곱항은 이 세 줄 중 정확히 두 줄에 나타나므로, 더하면

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 2(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2),$$

를 얻고, 양변을 2로 나누면 원하는 결과가 나온다. 같은 내용을 다음과 같이 쓸 수도 있다. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2) = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2\right] \geq 0$이고, 등호는 정확히 $a_1 = a_2 = a_3$일 때 성립한다.

소문항 (iii)

이제 $1 \leq i < j \leq 4$인 쌍 (i, j)는 여섯 개이다. 각각에 (i)을 적용하면

$$\sum_{1\leq i<j\leq 4} (a_i^2 + a_j^2) \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_ia_j.$$

이다. 좌변에서 a_1^2은 몇 번 나타날까? 첨자 1을 포함하는 쌍마다, 즉 나머지 세 첨자 각각과 짝지어질 때마다 한 번씩 나타난다. 모든 a_k^2에 대해서도 마찬가지이므로 좌변은 $3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$이고, 따라서

$$3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \geq 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4),$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iv)

(i)–(iii)에서 보이는 규칙은 좌변의 계수가 변수의 개수보다 하나 작다는 것이다. 즉 1, 다음은 2 (소문항 (ii)에 2를 곱한 것), 그다음은 3이다.

주장. 임의의 $n \geq 2$와 실수 $a_1, \ldots, a_n$에 대하여

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j, \qquad \text{즉} \qquad (n-1)S \geq 2P,$$

이고, 등호는 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$일 때 그리고 그때에만 성립한다.

생각해 보기 모든 쌍 $i<j$에 대하여 $a_i^2+a_j^2$를 더할 때, 특정한 a_k^2는 몇 번 나타나는가?

증명(proof). 모든 쌍에 대한 차의 제곱의 합을 생각하자.

$$D=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i^2+a_j^2\right)-2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j.$$

첨자 k는 정확히 $n-1$개의 쌍에 속하므로(나머지 $n-1$개의 첨자 각각과 짝지어진다), 첫 번째 합에서 a_k^2는 $n-1$번 나타난다. 그러므로

$$D=(n-1)S-2P.$$

이다. D의 각 항은 실수의 제곱이므로 $D\ge 0$이고, 이로부터 $(n-1)S\ge 2P$를 얻는다. 등호는 모든 $(a_i-a_j)^2$이 0일 때, 즉 모든 a_i가 같을 때 그리고 그때에만 성립한다. ■

$n=2,3,4$를 대입하면 각각 (i), (ii)의 두 배, (iii)이 다시 나온다.

소문항 (v)

여기서는 $n-1>0$이 되도록 $n\ge 2$이어야 한다. 합의 제곱을 전개하면 각 제곱항은 한 번씩, $i\ne j$인 각 곱 a_ia_j는 (a_ia_j와 a_ja_i로) 두 번씩 나타나므로

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=S+2P.$$

이다.

생각해 보기 S에 대한 부등식인 (iv)가 P만 등장하는 부등식에 어떻게 도움이 될 수 있을까?

$n-1>0$이므로 소문항 (iv)의 양변을 부등호 방향을 바꾸지 않고 $n-1$로 나눌 수 있고, 그러면 $S\ge\dfrac{2P}{n-1}$을 얻는다. S 대신 이 하한(lower bound)을 대입하면

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2&=S+2P\\&\ge\frac{2P}{n-1}+2P\\&=\frac{2P+2(n-1)P}{n-1}\\&=\frac{2n}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j,\end{aligned}$$

이 되어 원하는 부등식을 얻는다. 등호는 정확히 (iv)에서 등호가 성립할 때, 즉 모든 a_i가 같을 때 성립한다.

P가 양수일 필요는 전혀 없었다는 점에 주목하자. 이 논증은 $S \geq 2P/(n-1)$의 양변에 $2P$를 더하기만 하므로, P의 부호와 관계없이 성립한다.

검산

- 모두 같은 경우: 모든 $a_i = c$이면 $S = nc^2$이고 $P = \binom{n}{2}c^2 = \frac{1}{2}n(n-1)c^2$이므로 $(n-1)S = n(n-1)c^2 = 2P$이며, (v)에서는 양변이 모두 n^2c^2이다. 두 부등식 모두 예상대로 등호가 성립한다.
- (iii)의 수치 검산: $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, -3, 5)$이면 $S = 39$, $P = -7$이므로 $3S = 117 \geq -14 = 2P$이다. 또 (v)에서는 $(\sum a_i)^2 = 25 \geq \frac{8}{3}(-7) = -\frac{56}{3}$이다. (또한 $S + 2P = 39 - 14 = 25$로 예상과 일치한다.)
- 항등식 $D = (n-1)S - 2P$와 두 부등식을 유리수 연산으로 정확하게, 길이가 2에서 9인 무작위 목록 20 000개와 등호 조건에 매우 가깝게 몰려 있는 목록들에 대해서도 검사하였다. 반례는 나타나지 않았다.

흔한 실수

- 잘못 세기: $\sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2)$에서 각 a_k^2는 n번도, $\binom{n}{2}$번도 아닌 $n-1$번 나타난다.
- $(\sum a_i)^2 = S + P$라고 쓰기: 전개식에서 각 교차항은 두 번 나타난다.
- $n - 1 > 0$임을 언급하지 않고 (iv)를 $n-1$로 나누거나, 등호 조건을 밝히는 것을 잊는 경우.

STEP 너머

$D = (n-1)S - 2P$는 평균으로부터의 편차의 제곱의 합의 n배, 즉 $n\sum(a_i - \bar{a})^2$이므로, (iv)는 사실 분산(variance)이 음이 아니라는 명제이다. 소문항 (v)는 코시–슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality) $(\sum a_i \cdot 1)^2 \leq n\sum a_i^2$이 모습을 바꾼 것으로 읽을 수도 있다. 선형대수학에서 이는 이차형식(quadratic form) $(n-1)S - 2P$가 양의 준정부호(positive semi-definite)이고, 모든 성분이 1인 벡터가 그 핵(kernel)을 생성한다는 명제이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이차형식과 양의 정부호성을 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 형식의 부등식 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 1993, 문제 10

순수수학 • 행렬 변환

STEP III 1993, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

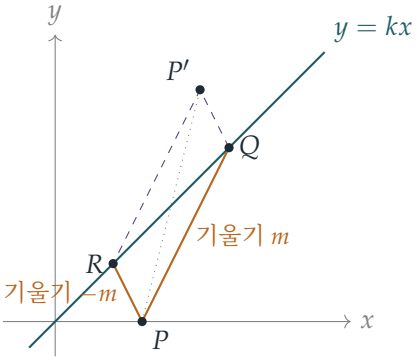
step.maths.org/questions/93-s3-q10

핵심 아이디어

여기서 다루는 것은 모두 두 직선의 교점(intersection)이므로, 좌표는 일차방정식(linear equation)을 하나씩 풀어서 얻는다. 평행사변형(parallelogram)을 이용하면 더 이상의 계산 없이 P'을 얻는다. 평행사변형 $PQP'R$에서 두 대각선(diagonal)은 서로를 이등분하므로, 위치벡터(position vector)로 $P + P' = Q + R$이다. P'을 행렬과 P의 곱으로 나타내고 나면, 넓이에 관한 질문은 행렬식(determinant) 계산일 뿐이다.

풀이

풀이 전체에서 $m^2 \neq k^2$이어야 한다. $m = \pm k$이면 P를 지나는 두 직선 중 하나가 $y = kx$와 평행하여 이 직선과 만나지 않거나 그 위에 놓이므로 작도가 성립하지 않는다.



(그림은 $m = 2, k = 1, P = (1, 0)$인 경우이다.)

점 Q

$P(x_1, y_1)$을 지나고 $y = mx$에 평행한 직선은 $y - y_1 = m(x - x_1)$이다. Q에서는 $y = kx$도 성립하므로

$$kx - y_1 = mx - mx_1 \quad \Longrightarrow \quad (m-k)x = mx_1 - y_1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{mx_1 - y_1}{m-k},$$

이다. 여기서 $m - k \neq 0$으로 나누었다. 그러면 $y = kx$로부터

$$Q = \left(\frac{mx_1 - y_1}{m-k}, \frac{k(mx_1 - y_1)}{m-k} \right),$$

를 얻으며, 이는 문제에서 요구한 결과이다.

점 R

P를 지나고 $y = -mx$에 평행한 직선에 대해서는 m을 $-m$으로 바꾸어 같은 계산을 하면 된다.

$$x = \frac{-mx_1 - y_1}{-m-k} = \frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \qquad R = \left(\frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \frac{k(mx_1 + y_1)}{m+k} \right).$$

점 P'

> **생각해 보기** 교차하는 직선을 더 그리지 않고 평행사변형의 네 번째 꼭짓점을 어떻게 찾을까?

꼭짓점은 P, Q, P', R의 순서로 돌아가므로 PP'과 QR이 대각선이다. 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 중점이 같다.

$$\tfrac{1}{2}(P + P') = \tfrac{1}{2}(Q + R) \quad \Longrightarrow \quad P' = Q + R - P.$$

(같은 말로, $\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PR}$이다.) Q와 R은 모두 $y = kx$ 위에 있으므로, 먼저 두 점의 x좌표를 더하는 것이 가장 쉽다. 공통분모 $m^2 - k^2$으로 통분하면

$$\begin{aligned} x_Q + x_R &= \frac{(mx_1 - y_1)(m+k) + (mx_1 + y_1)(m-k)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{(m^2x_1 + mkx_1 - my_1 - ky_1) + (m^2x_1 - mkx_1 + my_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2}, \end{aligned}$$

이고, $y_Q + y_R = k(x_Q + x_R)$이다. 따라서 $P' = (x', y')$이라 하면

$$x' = \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - x_1 = \frac{(m^2 + k^2)x_1 - 2ky_1}{m^2 - k^2},$$

$$y' = \frac{2k(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - y_1 = \frac{2km^2x_1 - (m^2 + k^2)y_1}{m^2 - k^2}.$$

행렬로 나타낸 T

두 좌표 모두 상수항 없이 x_1, y_1에 대해 일차이므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{m^2 - k^2} \begin{pmatrix} m^2 + k^2 & -2k \\ 2km^2 & -(m^2 + k^2) \end{pmatrix}.$$

넓이

행렬이 $\mathbf{M}$인 선형사상(linear map)은 모든 넓이를 $|\det \mathbf{M}|$배 한다. 각 행에서 인수 $\frac{1}{m^2-k^2}$을 꺼내면

$$\det \mathbf{M} = \frac{-(m^2+k^2)^2 + 4k^2m^2}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-\left(m^4 - 2m^2k^2 + k^4\right)}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-(m^2-k^2)^2}{(m^2-k^2)^2} = -1.$$

따라서 $|\det \mathbf{M}| = 1$이고, 모든 영역은 넓이가 같은 영역으로 옮겨지므로 요구한 결과가 성립한다. 음의 부호는 T가 반사(reflection)처럼 방향(orientation)을 뒤집는다는 것을 알려준다. 즉 시계 반대 방향으로 그린 도형의 상은 시계 방향으로 그려진다.

> **?** **생각해 보기** T가 하는 일을 그림으로 나타낼 수 있을까?

그렇다. PP'의 중점은 QR의 중점과 같고 이 점은 $y = kx$ 위에 있으며, $y = kx$ 위의 점은 고정된다(그곳에서는 $Q = R = P$이다). $\mathbf{Mv} = -\mathbf{v}$를 풀면 행 $2m^2x - 2ky = 0$을 얻으므로, T에 의해 방향이 반대로 되는 벡터는 (k, m^2)의 상수배이다. 따라서 T는 **비스듬한 반사**(*skew reflection*)이다. 즉 직선 $y = kx$에 대한 반사이되, 직선에 수직인 방향이 아니라 (k, m^2) 방향을 따라 반사한다. 다른 모든 반사와 마찬가지로 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$를 만족하며, 이는 작도와도 들어맞는다. P'에서 시작하면 같은 Q와 R을 얻고, 따라서 다시 P로 돌아온다.

검산

- $m = 2, k = 1, P = (1,0)$이면 $Q = (2,2)$, $R = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$이므로 $P' = (\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$이다. 행렬은 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$이고, 이 행렬은 $(1,0)$을 $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$으로 보내며, 행렬식은 $\frac{1}{9}(-25+16) = -1$이다.
- 직선 위의 점 (t, kt)는 고정되어야 한다. 실제로 $x' = \frac{(m^2+k^2)t - 2k^2t}{m^2-k^2} = t$이다. ✓
- $\mathbf{M}$의 대각합(trace)은 0이고 행렬식은 -1이므로, 고윳값(eigenvalue)은 ± 1이다. 이는 반사에서 기대되는 바와 같다.
- 이 모든 공식과 삼각형 넓이의 보존을, m, k, P를 무작위로 약 3000번 골라 유리수 산술로 정확하게 확인하였다.

흔한 실수

- $Q+R-P$ 대신 $P'=Q+R$ 또는 $P'=P+Q+R$로 놓는 실수. 문자의 순서 $PQP'R$이 어느 꼭짓점끼리 마주 보는지를 알려 준다.
- $\det\mathbf{M}=-1$로부터 넓이가 음수가 된다고 결론짓는 실수. 넓이의 배율은 $|\det\mathbf{M}|$이며, 부호는 방향만을 나타낸다.

STEP 너머

한 직선 위의 점을 모두 고정하고 다른 한 방향을 뒤집는 선형사상은 **대합**(*involution*), 즉 $T^2=I$인 사상이다. 보통의 직교 반사는 뒤집히는 방향이 직선에 수직인 특수한 경우이다. 여기서 그런 일은 (k,m^2)이 $(1,k)$에 수직일 때, 즉 $k=0$일 때에만 일어난다(직선 $y=\pm mx$는 $y=kx$가 아니라 x축에 대해 대칭이다). 대학에서는 이 내용이 고윳값과 대각화(diagonalisation)의 이론 안에 자리 잡는데, 여기서 T는 기저 $(1,k)$, (k,m^2)에 대해 $\mathrm{diag}(1,-1)$로 보인다. 또한 행렬식을 부호가 있는 부피 배율로 보는 관점과도 연결된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 두 개념을 모두 명료하게 다룬다.

풀이

STEP III 1993, 문제 11

역학 • 짝힘과 관성모멘트

> **STEP III 1993, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q11

핵심 아이디어

정육면체에 좌표를 붙이고 모든 힘을 벡터로 나타낸다. 여섯 힘의 합은 영이므로, 이 힘들이 하는 일은 **짝힘**(*couple*)을 가하는 것뿐이며, 짝힘의 모멘트(moment)는 모든 점에 대하여 같다. 그러면 소문항 (i)은 그 모멘트의 방향에 관한 문제가 된다. 소문항 (ii)는 그 모멘트의 OO' 방향 성분만을 사용하며, 여기에 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 막대 하나하나씩 쌓아 올려 구한 관성 모멘트(moment of inertia)를 함께 쓴다.

풀이

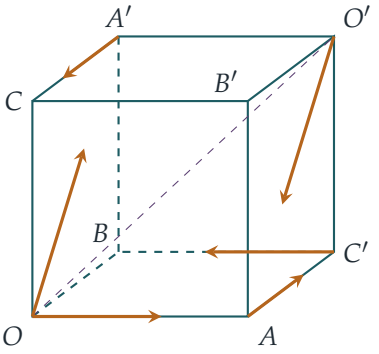
틀은 가늘고 균일한 막대로 이루어진 강체(rigid body)이고, 중력은 없다고 모형화한다. O를 원점으로 하고 OA, OB, OC 방향의 단위벡터를 잡으면

$$A = (a,0,0), \quad B = (0,a,0), \quad C = (0,0,a),$$

이고, 맞은편 꼭짓점들은

$$O' = (a,a,a), \quad A' = (0,a,a), \quad B' = (a,0,a), \quad C' = (a,a,0).$$

이다.



호박색 화살표는 여섯 개의 작용선(line of action)을 나타내고, 대각선 OO'은 자두색 점선으로 그려져 있다.

소문항 (i)

각 힘은 그 크기에 작용선 방향의 단위벡터를 곱한 것이다. 예를 들어 $O'A$는 길이가 $\sqrt{2}\,a$인 벡터 $(0,-a,-a)$이므로, 이를 따라 작용하는 크기 $\sqrt{2}\,mg$의 힘은 $mg(0,-1,-1)$이다. 여섯 힘 모두에 대해 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

작용선	작용선 위의 점	힘
OA	O	$mg(2,0,0)$
AC'	A	$mg(0,1,0)$
$O'A$	A	$mg(0,-1,-1)$
OA'	O	$mg(0,1,1)$
$C'B$	B	$mg(-2,0,0)$
$A'C$	C	$mg(0,-1,0)$

힘들의 합은 $\mathbf{0}$이다. 합력(resultant)이 영인 힘의 계는 하나의 짝힘과 동등하며, 그 모멘트는 모든 점에 대하여 같다. O에 대한 모멘트를 구하면 (OA와 OA'을 따라 작용하는 힘은 O를 지나므로 기여하지 않는다)

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= A\times mg(0,1,0) + A\times mg(0,-1,-1) + B\times mg(-2,0,0) + C\times mg(0,-1,0)\\ &= amg\big[(0,0,1)+(0,1,-1)+(0,0,2)+(1,0,0)\big]\\ &= amg\,(1,1,2).\end{aligned}$$

이다. O의 회전축 받침은 틀을 밀 수 있지만, 그 힘은 O를 지나 작용하므로 O에 대한 모멘트가 없다. 따라서 정지 상태에서 출발한 틀은 O를 지나고 짝힘의 축 방향인 직선을 중심으로

돌기 시작하며, 그 방향은

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

궁금한 독자를 위한 덧붙임. 이것이 문제가 의도한 답이며, 답안에도 이렇게 써야 한다. 그러나 엄밀히 말하면, 3차원에서 자유롭게 돌 수 있는 물체의 각가속도(angular acceleration)는 $\mathbf{I}^{-1}\mathbf{G}$이다. 여기서 $\mathbf{I}$는 O에 대한 관성 **텐서**(*tensor*)이다. 이 벡터는 $\mathbf{G}$가 주축(principal axis) 위에 놓일 때에만 $\mathbf{G}$와 같은 방향을 향한다. 이 틀의 경우, O에 대하여 관성 모멘트는 OO'을 축으로 할 때 $14ma^2/3$이고 (소문항 (ii)에서 구한다), O를 지나고 OO'에 수직인 모든 축에 대하여 $41ma^2/3$이다. 그러면 처음 회전축의 방향은 $(25, 25, 32)$가 되며, 이는 $(1, 1, 2)$와 약 12.6° 차이가 난다.

소문항 (ii)

OO' 방향의 단위벡터를 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$이라 하자. $\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$는 $\mathbf{p}$의 직선 방향 성분이므로, 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 점 $\mathbf{p}$와 직선 OO' 사이의 거리의 제곱은

$$d^2 = |\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})^2$$

이다.

막대 OA. O로부터 거리 x인 점은 $(x,0,0)$이므로 $d^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2$이다. 길이 $\mathrm{d}x$인 미소 부분의 질량은 $\frac{m}{a}\,\mathrm{d}x$이므로

$$I_{OA} = \int_0^a \frac{m}{a}\cdot\frac{2x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{2ma^2}{9}.$$

이다. 중점 $(\frac{a}{2},0,0)$과 OO' 사이의 거리의 제곱은 $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{6}$이다. 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해, 중점을 지나는 평행한 축에 대하여

$$I_{\text{중점}} = \frac{2ma^2}{9} - m\cdot\frac{a^2}{6} = \frac{ma^2}{18}.$$

이다.

막대 $B'C$. 이 막대는 $(a,0,a)$에서 $(0,0,a)$까지 이어지므로 OA와 평행하다. 또한 길이가 같고 축과 이루는 각도 같다. 따라서 자신의 중점을 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트도 역시 $ma^2/18$이다. 그 중점은 $\mathbf{p} = (\frac{a}{2},0,a)$이고,

$$d^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

이다. 평행축 정리에 의해

$$I_{B'C} = \frac{ma^2}{18} + \frac{ma^2}{2} = \frac{5ma^2}{9}.$$

이다.

생각해 보기 열두 개의 막대 모두에 대해 이 계산을 정말 해야 할까?

그렇지 않다. 대칭성이 대신 해 준다. OO'을 축으로 하는 120° 회전($x \to y \to z \to x$로 순환시키는 것)과 정육면체의 중심에 대한 점대칭(point reflection) $\mathbf{p} \mapsto (a,a,a) - \mathbf{p}$는 모두 틀과 직선 OO'을 각각 자기 자신으로 옮긴다. 따라서 이 변환들은 OO'에 대한 관성 모멘트를 바꾸지 않는다. 회전은 OA를 OB와 OC로 옮기고, 점대칭은 이들을 $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$으로 옮긴다. 이들이 O 또는 O'에 한 끝이 있는 여섯 막대이며, 각각의 관성 모멘트는 $2ma^2/9$이다. 같은 방법으로 $B'C$는 정육면체의 가운데를 한 바퀴 도는 "지그재그" AB', $B'C$, CA', $A'B$, BC', $C'A$의 나머지 다섯 막대로 옮겨지며, 이들 각각의 관성 모멘트는 $5ma^2/9$이다. 따라서

$$I_{\text{틀}} = 6 \cdot \frac{2ma^2}{9} + 6 \cdot \frac{5ma^2}{9} = \frac{42ma^2}{9} = \frac{14ma^2}{3},$$

이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

각가속도. 이제 틀은 고정된 직선 OO'을 축으로 해서만 돌 수 있다. 축받침이 그 직선에 수직인 방향으로 필요한 짝힘을 모두 공급하므로, 가해진 짝힘 가운데 OO' 방향 성분만이 틀을 돌린다. 힘들은 여전히 짝힘 $\mathbf{G} = amg(1,1,2)$를 이루며, 어떤 직선에 대한 짝힘의 모멘트는 그 직선 방향의 성분이다.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \frac{amg(1+1+2)}{\sqrt{3}} = \frac{4amg}{\sqrt{3}}.$$

고정축에 대한 회전의 방정식 $I\ddot{\theta} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}$로부터

$$\ddot{\theta} = \frac{4amg/\sqrt{3}}{14ma^2/3} = \frac{12g}{14\sqrt{3}\,a} = \frac{2\sqrt{3}\,g}{7a}.$$

를 얻는다. 회전 방향은 O'에서 O 쪽을 바라볼 때 시계 반대 방향, 즉 $\overrightarrow{OO'}$ 방향에 대한 오른손 방향의 회전이다.

검산

- 여섯 힘은 각각 "짝"이 있다. OA와 $C'B$, AC'과 $A'C$, 그리고 $O'A$와 OA'이다. 각 쌍은 평행한 직선 위에서 크기가 같고 방향이 반대이며, 그래서 합력이 영이 된다.
- 틀은 중심에 대하여 정육면체의 대칭성을 가지므로, 중심을 지나는 모든 축에 대하여 관성 모멘트가 같다. 중심을 지나고 OC에 평행한 축에 대하여, 네 개의 수직 막대는 $4m(a/\sqrt{2})^2 = 2ma^2$를 기여한다. 여덟 개의 수평 막대는 각각 $\frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} = \frac{ma^2}{3}$을 기여한다. 합은 $\frac{14ma^2}{3}$이며, OO'도 중심을 지나므로 위의 답과 일치한다.
- 수치적으로 $a = m = g = 1$로 두고 열두 막대에 대해 중점 합을 계산하면 $I = 4.66667$, $\ddot{\theta} = 0.494872$를 얻으며, 이는 $2\sqrt{3}/7 \approx 0.494872$와 일치한다.

흔한 실수

- 면대각선 방향의 힘 $\sqrt{2}\,mg$를 성분으로 바꿀 때 인수 $1/\sqrt{2}$를 빠뜨리는 실수. 각 힘의 성분의 크기는 $\sqrt{2}\,mg$가 아니라 mg이다.
- 소문항 (ii)에서 고정축 방향의 성분 대신 짝힘 전체 $|\mathbf{G}| = \sqrt{6}\,amg$를 사용하는 실수.
- 질량중심을 지나지 않는 축에서 출발하여 평행축 정리를 적용하는 실수. $2ma^2/9$에서 $ma^2/18$로 가는 단계에서처럼, 항상 질량중심을 **거쳐서** 옮겨야 한다.

STEP 너머

3차원에서의 회전에서는 관성 모멘트가 3×3 대칭행렬, 즉 관성 텐서가 되며, 각운동량(angular momentum)은 $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$이다. 이 행렬의 고유벡터(eigenvector)가 주축이다. 소문항 (i)의 덧붙임에서 보았듯이, 일반적으로 물체는 가해진 짝힘의 축을 중심으로 돌기 시작하지 않는다. 정육면체 틀은 좋은 예이다. 중심을 지나는 모든 축에 대하여 관성 모멘트가 같지만, 꼭짓점에 대해서는 그렇지 않다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 관성 텐서를 포함하여 3차원 강체 운동을 전개한다.

풀이

STEP III 1993, 문제 12

역학 • 탄성 끈과 에너지

STEP III 1993, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

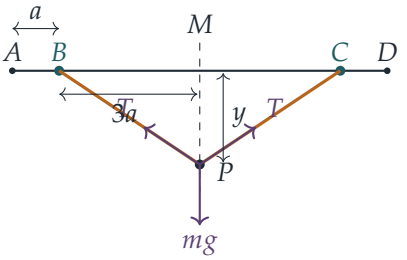
step.maths.org/questions/93-s3-q12

핵심 아이디어

못이 매끄럽고 입자가 줄의 중점에 놓여 있으므로, 줄은 똑같은 두 반쪽으로 나뉜다. 각 반쪽의 자연 길이(natural length)는 a이고, 각 반쪽의 모든 곳에서 장력(tension)이 같다. 각 반쪽은 고정된 끝점에서 출발하여 못을 지나 P까지 아래로(또는 위로) 이어지므로, 늘어난 상태의 길이는 거리 BP에만 의존한다. 늘어난 길이(extension)를 P의 높이로 나타내고 나면, 평형(equilibrium) 조건에서 k를 얻고 에너지 보존(conservation of energy)이 Q와 R를 연결해 준다.

풀이

P를 입자로, 줄을 가볍고 탄성이 있는 것으로, 못을 매끄러운 것으로 모형화한다. 대칭성에 의해 P는 BC의 중점 M을 지나는 연직선 위에서 움직인다. M 아래로 P까지의 깊이를 y라 하자. 이 값은 P가 BC보다 위에 있을 때 음수이다.



k 구하기

반쪽 $A \to B \to P$의 길이는 $a + BP = a + \sqrt{9a^2 + y^2}$이고 자연 길이는 a이므로, 늘어난 길이는

$$x = \sqrt{9a^2 + y^2}.$$

이다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 각 반쪽의 장력은

$$T = \frac{kmg\,x}{a}.$$

이다. BP가 수평선과 이루는 각을 θ라 하면 $\sin\theta = |y|/x$이다. P에서 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$2T\sin\theta = mg \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot \frac{kmg\,x}{a} \cdot \frac{y}{x} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{2ky}{a} = 1.$$

를 얻는다. 제곱근이 약분되었으므로, 지저분한 값 $BP = \frac{\sqrt{145}}{4}a$는 전혀 필요하지 않다. $y = a/4$를 대입하면 $k/2 = 1$이므로

$$k = 2.$$

이다.

Q에서 R까지의 에너지

각 반쪽에는 탄성 에너지(elastic energy) $\frac{kmg\,x^2}{2a}$가 저장되므로, $k = 2$일 때 두 반쪽에 저장된 에너지의 합은

$$E(y) = 2 \cdot \frac{2mg\,x^2}{2a} = \frac{2mg\,(9a^2 + y^2)}{a}.$$

이다.

> **생각해 보기** 왜 P는 R에서 멈추며, P가 못보다 위로 올라가도 괜찮은 이유는 무엇인가?

P는 Q에서 정지 상태로부터 놓이고, R는 입자가 올라가는 가장 높은 점이므로 그곳에서도 순간적으로 정지한다. BC보다 위에서도 두 반쪽은 여전히 늘어나 있으므로(각 반쪽에서 여전히 $x \geq 3a > 0$이다), E에 대한 같은 식이 그대로 성립한다. 줄은 결코 느슨해지지 않는다.

Q에서는 $y = pa$이고, R에서는 $y = -3a$이다. 입자는 $(p+3)a$만큼 올라간다. 못이 매끄럽고 다른 에너지 손실이 없으며, 양 끝에서 운동 에너지(kinetic energy)가 0이므로

$$\begin{aligned} E(pa) &= E(-3a) + mg(p+3)a \\ 2mga(9+p^2) &= 2mga(9+9) + mga(p+3) \\ 18 + 2p^2 &= 36 + p + 3, \end{aligned}$$

이고, 이로부터

$$2p^2 - p - 21 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad (2p+6)\left(p - \tfrac{7}{2}\right) = 0.$$

을 얻는다. $p > 0$이므로 $p = \frac{7}{2}$이다.

이 결과는 문제에 인쇄된 $2p^2 - p - 17 = 0$과 일치하지 **않는다**. 우리는 직접적인 수치 시뮬레이션을 포함하여 모형을 꼼꼼히 확인하였고(검산 참고), 주어진 조건에서 나오는 값은 -21이다. 깔끔한 근 $p = \frac{7}{2}$를 보면 원래 의도된 상수는 21이고 17은 오식으로 보인다. 마지막 소문항은 어느 상수가 옳은지와 무관하다.

P가 정말로 R에서 처음으로 멈추는지 확인하기 위해 $y = ta$로 놓자. 깊이 ta에서의 운동 에너지는

$$E(pa) - E(ta) - mg(p-t)a = mga\,(p-t)(2p+2t-1).$$

이다. $p = \frac{7}{2}$이면 이 값은 $mga\,(\frac{7}{2} - t)(2t+6)$이다. 이는 $-3 < t < \frac{7}{2}$에서 양수이고 $t = -3$에서 처음으로 0이 되는데, 이 점이 바로 R이다.

장력 비교하기

장력은 $T = 2mg\,x/a$이고 이는 x에 대해 증가하므로, x가 Q에서보다 R에서 더 작음을 보이면 된다. 에너지 방정식을 이용하면 p의 값을 쓰지 않고도 이를 보일 수 있다.

$$E(Q) - E(R) = mg(p+3)a > 0.$$

탄성 에너지는 $\dfrac{2mg\,x^2}{a}$이므로 $x_R^2 < x_Q^2$이고, 따라서 $x_R < x_Q$이며 $T_R < T_Q$이다. 말로 풀어 쓰면, 입자는 올라가는 동안 위치 에너지(potential energy)를 얻는데 그 에너지는 줄에서만 나올 수 있으므로, R에서는 줄이 덜 늘어나 있어야 한다.

구체적으로 $p = \frac{7}{2}$이면 $x_Q = \frac{\sqrt{85}}{2}a$이고 $x_R = 3\sqrt{2}\,a$이므로

$$T_Q = \sqrt{85}\,mg \approx 9.22\,mg, \qquad T_R = 6\sqrt{2}\,mg \approx 8.49\,mg.$$

이다.

검산

- **단진동 검산.** P에 작용하는 위쪽 방향의 힘은 $2T \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{4mg\,y}{a}$이고, 이는 BC의 아래에서뿐 아니라 위에서도 y에 대한 일차식이다. 따라서 P는 $y = a/4$(앞에서 구한 평형 위치)를 중심으로 단진동(simple harmonic motion)을 한다. $y = \frac{7}{2}a$에서 정지 상태로부터 놓이면 진폭(amplitude)은 $\frac{13}{4}a$이므로, 최고점은 $y = \frac{1}{4}a - \frac{13}{4}a = -3a$이다. 이는 정확히 R이며, $p = \frac{7}{2}$임을 독립적으로 확인해 준다.

- $a = 1, k = 2, p = 3.5$로 운동 방정식을 수치 적분하면 최고점은 $y = -3.0000$이다.
- 인쇄된 방정식을 따르면 $p = \frac{1+\sqrt{137}}{4} \approx 3.18$이 되는데, 이때 에너지 균형은 $4mga$만큼 어긋난다.

흔한 실수

- 각 반쪽의 길이를 계산할 때 선분 AB를 빠뜨리는 것. 반쪽의 길이는 $AB + BP = a + BP$이며, 늘어난 길이가 BP가 되는 것은 오직 AB가 자연 길이 a와 같기 때문이다.
- 줄 전체를 장력이 $kmg \cdot (\text{전체 늘어난 길이})/(2a)$인 하나의 용수철로 취급하는 것. 이렇게 해도 같은 답이 나오지만, 늘어난 길이를 **전체** 늘어난 길이 $2x$로 잡을 때만 그렇다.
- P가 BC보다 위에 있을 때에도 탄성 에너지가 여전히 존재한다는 것을 잊는 것. 그곳에서도 줄은 여전히 늘어나 있다.

STEP 너머

줄의 기하학적 구조는 비선형인데도, 연직 방향의 복원력(restoring force)은 변위에 정확히 비례하였다. 이는 길이에 비례하는 장력의 연직 성분이 연직 방향의 거리에 비례하기 때문인데, 자연 길이가 o인 용수철이 이상적인 현가장치가 되는 것도 같은 이유이다(이것이 LaCoste 장주기 지진계(seismometer)의 원리이다). 좌표에 대한 이차식인 위치 에너지는 선형 운동 방정식으로 이어지며, 이것이 미소 진동(small oscillations)과 정규 모드(normal modes) 이론의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 용수철, 에너지, 진동을 다룬다.

풀이

STEP III 1993, 문제 13

역학 • 질량이 변하는 사슬

> **STEP III 1993, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q13

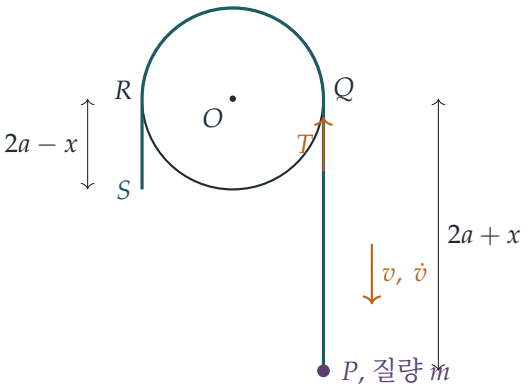
핵심 아이디어

사슬이 미끄러지지 않으므로 원판, 사슬 전체, 입자는 모두 같은 속력으로 움직인다. 따라서 미지수는 v 하나뿐이다. 그러면 운동 에너지(kinetic energy)는 $\frac{1}{2}$(유효 질량)v^2의 꼴이 된다. 위치 에너지(potential energy)에서는 매달린 두 부분만 변한다. 꼭대기를 감싼 호 부분은 똑같은 사슬로 계속 바뀌어 채워질 뿐이기 때문이다. 장력(tension)을 구할 때는 움직이는 부분 PQ와 입자를 함께 묶어서 본다. 그런 다음 Q에서 여기에 새로 합류하는 사슬이 이미 얼마나 빠르게 움직이고 있는지 곰곰이 생각해 본다.

풀이

모형

원판은 O를 지나는 매끄러운 고정축을 중심으로 회전하는 균일한 박판(lamina)이고, 관성 모멘트(moment of inertia)는 $\frac{1}{2}(4m)a^2 = 2ma^2$이다. 사슬은 단위 길이당 질량이 m/a인 균일한 사슬로, 늘어나지 않으며(inextensible) 테두리에서 미끄러지지 않는다. 입자는 질점이다. P가 x만큼 내려갔을 때 오른쪽 부분 QP의 길이는 $2a + x$, 왼쪽 부분 RS의 길이는 $2a - x$이고, 호 RQ는 길이가 πa인 반원이다. 사슬의 모든 점은 속력 v로 움직이고, 미끄러짐이 없으므로 테두리도 같은 속력으로 움직인다. 따라서 원판의 각속력(angular speed)은 $\omega = v/a$이다.



속력

운동 에너지. 원판의 몫은 $\frac{1}{2}(2ma^2)(v/a)^2 = mv^2$, 사슬의 몫은 $\frac{1}{2}(4+\pi)mv^2$, 입자의 몫은 $\frac{1}{2}mv^2$이다. 따라서

$$\mathrm{KE} = \tfrac{1}{2}mv^2\big(2+4+\pi+1\big) = \tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2.$$

위치 에너지. 호 RQ는 언제나 같은 반원 모양의 사슬이므로 그 위치 에너지는 변하지 않는다. O의 높이를 기준(o)으로 잡자. 그 아래로 매달린 길이 ℓ인 부분은 질량이 $m\ell/a$이고 질량 중심(centre of mass)이 깊이 $\frac{1}{2}\ell$에 있으므로, 위치 에너지는 $-\dfrac{mg\ell^2}{2a}$이다. 따라서 매달린 두 부분의 위치 에너지 감소량은

$$\frac{mg}{2a}\Big[(2a+x)^2+(2a-x)^2-(2a)^2-(2a)^2\Big] = \frac{mg}{2a}\cdot 2x^2 = \frac{mgx^2}{a}.$$

입자는 mgx만큼 잃는다.

에너지. 축은 매끄럽고, 미끄러짐이 없으므로 거친 접촉면은 일을 하지 않는다. 따라서 에너지가 보존(conservation of energy)되고, 정지 상태에서 출발하므로

$$\tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2 = \frac{mgx^2}{a} + mgx \quad\Longrightarrow\quad (\pi+7)av^2 = 2g(x^2+ax),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

가속도

시간에 대해 미분하고 $\dot{x} = v$를 이용하면

$$2(\pi+7)av\dot{v} = 2g(2x+a)v \quad\Longrightarrow\quad \dot{v} = \frac{g(2x+a)}{(\pi+7)a} \qquad (v \neq 0).$$

S는 $x = 2a$일 때 R에 도달하고, 이때

$$\dot{v} = \frac{5g}{\pi+7}, \qquad v^2 = \frac{2g(4a^2+2a^2)}{(\pi+7)a} = \frac{12ga}{\pi+7}.$$

Q에서의 장력

Q에서의 장력을 T라 하자. 우리가 볼 계는 입자와 Q 아래로 매달린 사슬을 합친 것이다. 이 계의 질량은

$$M = \frac{m}{a}(2a + x) + m,$$

이고, 사슬이 원판에서 풀려 나오면서 $\dot{M} = \frac{m}{a}v$의 비율로 증가한다. 이 계에 작용하는 외력은 아래쪽으로 작용하는 무게 Mg와 위쪽으로 작용하는 T이다. 계 전체가 속력 v로 아래쪽으로 움직인다.

> **생각해 보기** PQ에 합류하는 사슬은 합류하기 직전에 얼마나 빠르게 움직이고 있는가?

Q에서 테두리는 연직이므로, 그곳에 도착하는 사슬은 이미 연직 아래쪽으로 속력 v로 움직이고 있다. 이 사슬은 자신의 운동량(momentum) $v\,\delta M$을 함께 가지고 들어온다. 그러면 가변 질량(variable mass) 방정식(운동량의 변화율 = 힘 + 단위 시간당 들어오는 운동량)은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T + v\dot{M}, \qquad \text{즉,} \qquad M\dot{v} = Mg - T.$$

S가 R에 도달할 때 $M = 5m$이므로

$$T = 5m\left(g - \frac{5g}{\pi + 7}\right) = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}\,mg.$$

모멘트(*moments*)를 이용한 교차 검증. 원판과 사슬의 호 RQ를 함께 묶어서 보자. 축이 주는 힘은 O를 지나고, 호의 무게는 O에 대한 전체 모멘트가 0이며(호는 O를 지나는 연직선에 대해 대칭이다), 사슬과 원판 사이의 마찰은 내력이다. 호의 모든 입자는 O로부터 거리 a에서 속력 v로 움직인다. 따라서 각운동량(angular momentum)은 $(2ma^2 + \pi ma^2)(v/a)$이고,

$$(T - T_R)a = (2 + \pi)ma\,\dot{v}.$$

S가 R에 도달하면 왼쪽 부분은 길이가 0으로 줄어들었으므로 $T_R = 0$이다. 그러면 다시 $T = (2 + \pi)m \cdot \frac{5g}{\pi + 7} = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$를 얻는다.

인쇄된 답. 시험지의 값 $\frac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg$는 PQ에 합류하는 사슬이 정지 상태에서 들어오는 것처럼 취급하여 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T$로 쓸 때 얻는 값과 정확히 같다.

$$T = M(g - \dot{v}) - \frac{m}{a}v^2 = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg - \frac{12}{\pi + 7}mg = \frac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg.$$

이는 정지한 안개를 흡수하는 빗방울에는 맞는 방정식이다. 그러나 여기서는 맞지 않는다. 테두리를 돌아 나오는 사슬은 이미 PQ와 함께 움직이고 있기 때문이다. 우리의 두 방법 모두 $\frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$로 일치하므로, 인쇄된 답에 이 오류가 들어 있다고 본다. 인쇄된 값이 필요

하다면 "정지 상태에서 합류" 방정식을 쓰되, 이 방정식이 T를 mv^2/a만큼 작게 계산한다는 점을 알고 있어야 한다.

검산

- $x = 0$에서 공식은 $v = 0, \dot{v} = g/(\pi + 7)$을 준다. 불균형한 힘은 입자의 무게 mg뿐이고, 이것이 유효 질량(effective mass) $(\pi + 7)m$에 작용한다.
- 운동 방정식 $(\pi + 7)m\dot{v} = mg(2x + a)/a$를 정지 상태에서부터 수치적으로 단계별 계산하면 $(\pi + 7)av^2 = 2g(x^2 + ax)$가 10^{-11} 이내의 오차로 재현된다. $m = a = 1, g = 9.81$로 두면 운동량 방법과 모멘트 방법이 모두 $T/mg \approx 2.5349 = 5(\pi + 2)/(\pi + 7)$을 준다. "정지 상태에서 합류" 방식은 $1.3517 = (5\pi - 2)/(\pi + 7)$을 준다.
- 매달린 질량 $5m$이 아래쪽으로 가속되고 있으므로, 당연히 $T < 5mg$이다.

흔한 실수

- 원판의 운동 에너지를 빠뜨리거나, 원판의 관성 모멘트로 $\frac{1}{2}(4m)a^2$ 대신 ma^2를 쓰는 것.
- 사슬의 호 부분을 위치 에너지 변화에 포함하는 것. 호의 모양과 위치는 결코 변하지 않는다.
- 들어오는 질량이 이미 어떤 속도를 가지고 있었는지 따져 보지 않고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = F$를 쓰는 것.

STEP 너머

가변 질량 문제의 본질은 계를 선택하고, 그 경계를 넘나드는 운동량을 빠짐없이 추적하는 데 있다. 이것이 검사 부피(control volume)라는 개념이며, 로켓 운동과 유체역학(fluid mechanics)의 상당 부분이 이 개념에 바탕을 둔다. 여기서 흔히 저지르는 오류, 즉 질량이 변하는 어떤 경우에도 $F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$가 성립한다고 가정하는 것은 유명한 함정이다. 일반적으로 이 방정식은 기준틀(frame of reference)에 무관하지조차 않다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 가변 질량계를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1993, 문제 14

역학 • 연직 원운동

STEP III 1993, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

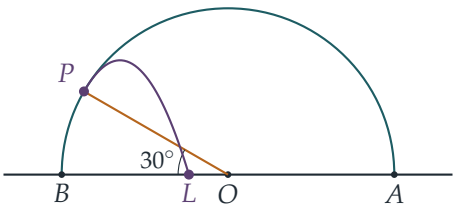
step.maths.org/questions/93-s3-q14

핵심 아이디어

실이 수평이고 입자를 연직 방향으로 쏘아 올리므로, 처음 속도는 실에 수직이다. 따라서 입자는 O를 중심으로 하는 반지름 c인 연직 원 위를 움직이고, A의 지름 반대편 점 B에 떨어진다. 매번 충돌(impact)할 때 속도는 연직 방향이므로, 충돌은 단순히 속력을 절반으로 줄인다. 입자가 더 이상 원의 꼭대기를 넘어가지 못하게 되는 첫 번째 튀어 오름을 찾고, 에너지와 지름 방향(radial) 운동 방정식을 이용해 장력(tension)이 0이 되는 위치를 구하면 된다. 그 이후는 평범한 포물체(projectile) 운동이다.

풀이

입자는 질량 m인 질점으로, 실은 가볍고 늘어나지 않는 것으로, 탁자는 매끄럽고 수평인 것으로 모형화한다. O를 원점으로 잡고 $A = (c, 0)$, $B = (-c, 0)$이라 하자. 입자가 올라가고 있는 쪽의 수평 반지름에서 위로 잰 각을 θ라 하자.



충돌 사이의 운동

입자가 A 또는 B에서 속력 V로 연직 위쪽으로 움직이며 탁자를 떠난다고 하자. 속도는 팽팽한 실에 수직이므로, 실이 팽팽하게 유지되는 동안 입자는 O를 중심으로 하는 반지름 c인

원 위를 움직인다. 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 각 θ에서의 속력 v는 다음을 만족한다.

$$v^2 = V^2 - 2gc\sin\theta.$$

장력을 T라 하고 O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면

$$T + mg\sin\theta = \frac{mv^2}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{T}{m} = \frac{V^2}{c} - 3g\sin\theta.$$

$0 \le \theta \le 90^\circ$에서 장력은 꼭대기에서 가장 작으므로, 실이 반원 전체에 걸쳐 팽팽하게 유지될 필요충분조건은 $V^2 \ge 3gc$이다. (꼭대기를 지나면 $\sin\theta$가 다시 감소하므로 T는 커지기만 한다.) 이 경우 에너지에 의해 입자는 지름의 반대쪽 끝에서 다시 속력 V로 연직 아래쪽으로 움직이며 탁자에 떨어진다.

그 충돌에서 속도는 탁자에 수직이므로, 튀어 오르는 운동은 속력 $\frac{1}{2}V$의 연직 운동이고 실은 여전히 수평이며 팽팽하다. 따라서 V가 절반이 된 채로 전체 과정이 되풀이된다.

실이 느슨해지는 위치

입자는 $V_0 = 64\sqrt{6gc}$로 출발하므로 $V_0^2 = 24576\,gc$이다. k번 충돌한 뒤의 속력은 $V_k = V_0/2^k$이므로

$$V_k^2 = \frac{24576}{4^k}\,gc: \qquad V_6^2 = 6gc, \qquad V_7^2 = \tfrac{3}{2}gc.$$

따라서 속력 $V_0, \dots, V_6$으로 시작하는 반원은 모두 완성되고(각각 $V_k^2 \ge 3gc$), 충돌은 B, A, B, A, B, A, B에서 일어난다. 일곱 번째 충돌은 B에서 일어나며, 입자는 $V_7^2 = \frac{3}{2}gc < 3gc$로 B에서 올라간다.

> **생각해 보기** 실이 먼저 느슨해지는 것이 아니라, 실이 느슨해지기 전에 입자가 다시 떨어질 수도 있을까?

그렇지 않다. 속력은 $V_7^2 = 2gc\sin\theta$, 즉 $\sin\theta = \frac{3}{4}$인 곳에서 0이 되지만, 장력은 그보다 먼저 다음 조건을 만족하는 곳에서 0이 된다.

$$\frac{V_7^2}{c} = 3g\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{2}gc = 3gc\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta = \tfrac{1}{2}.$$

따라서 실은 B 쪽의 점 P에서 $\theta = 30^\circ$일 때, 즉 탁자로부터 높이 $c\sin\theta = c/2$인 곳에서 느슨해지며, 이는 문제에서 요구한 결과이다.

A와 B 사이에서의 첫 번째 튀어 오름

P에서 $\theta = 30^\circ$이므로 $P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c,\ \frac{1}{2}c\right)$이고

$$v^2 = \tfrac{3}{2}gc - 2gc\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}gc.$$

속도는 접선 방향, 즉 OP에 수직이며 위쪽이면서 O를 향하는 방향이다. 이 속도는 수평과 60°를 이룬다. 따라서 성분은

$$v_x = \tfrac{1}{2}v, \qquad v_y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v, \qquad \text{이때} v_x^2 = \tfrac{1}{8}gc, \quad v_y^2 = \tfrac{3}{8}gc.$$

이제부터 입자는 포물체이다. 입자는 $\frac{1}{2}c + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$일 때 탁자에 닿으며, 양의 근을 택하면

$$t = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + gc}}{g} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

이 시간 동안의 수평 변위는

$$v_x t = \sqrt{\frac{gc}{8}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}\,c,$$

이므로, 입자는 다음을 만족하는 점 L에 떨어진다.

$$x_L = -\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}c = \frac{\sqrt{11}-3\sqrt{3}}{8}\,c \approx -0.235\,c.$$

(이 비행 내내 입자는 O로부터 거리 c 이내에 있으므로, L에 닿기 전에 실이 다시 팽팽해지지 않는다. 특히 $|x_L| < c$이다.)

$\sqrt{11} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$이므로 $x_L < 0$이다. 즉 떨어지는 점은 O에 대해 B와 같은 쪽에 있다. O가 AB의 중점이므로, A와 B 사이에서의 첫 번째 튀어 오름은 **B에 더 가깝고**, B로부터 약 $0.77c$, A로부터 약 $1.23c$ 떨어져 있다.

검산

- 판정 조건 $V_k^2 \geq 3gc$에 따르면 처음으로 완성되지 않는 반원은 $k = 7$일 때이고, $V_7^2 = \frac{3}{2}gc$이다. 실이 느슨해지는 조건에서 $\sin\theta = \frac{1}{2}$를 얻는다.
- P에서 중력의 지름 방향 성분 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$는 $v^2/c = \frac{1}{2}g$와 같으며, 이는 장력이 0이 되기 위한 조건과 정확히 일치한다.
- 수치적 단계별 시뮬레이션($g = 9.8$, $c = 1.3$)으로 확인한 결과, 실은 높이 $0.5000c$에서 느슨해지고, 떨어지는 점은 $x \approx -0.2349c$이며, 비행하는 동안 O로부터의 거리는 c를 넘지 않았다.

흔한 실수

- 반원을 완성하기 위한 조건으로 $V^2 \geq 4gc$(꼭대기에 겨우 도달하는 조건)를 쓰는 것. 막대와 달리 실은 $V^2 \geq 3gc$가 필요하다.

- 일곱 번째 충돌이 어느 쪽 끝에서 일어나는지 놓치는 것. 홀수 번째 충돌은 B에서 일어난다.
- P에서의 속도 방향을 잘못 잡는 것. 속도는 OP에 수직이며 수평과 $30°$가 아니라 $60°$를 이룬다.

STEP 너머

실이 느슨해지는 순간은 구속 조건(constraint)이 꺼지는 순간이다. 장력은 $|OP| = c$를 강제하는 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multiplier)이며, 장력이 음수가 되어야 하는 상황에서는 구속 조건이 더 이상 작용하지 않는다. 이와 같은 한쪽 방향 구속 조건이나 충돌이 있는 문제는 대학 학부 역학에서 체계적으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 에너지와 지름 방향 운동 방정식을 이런 방식으로 함께 사용하는 모습을 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 1993, 문제 15

확률과 통계 • 대기 시간의 분포

STEP III 1993, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q15

핵심 아이디어

마지막 던지기에 주목한다. 실험이 n번째 던지기에서 멈추는 것은 바로 그 던지기가 아직 모자랐던 면의 두 번째를 채워 줄 때이다. 따라서 처음 $n-1$번의 던지기에는 그 면이 정확히 한 번 나오고 나머지는 모두 다른 면이 나와야 한다. 그러면 분포는 간단한 두 항의 합이 된다. 이제 기댓값(expectation)은 $\sum n(n-1)x^{n-2}$ 꼴의 급수 두 개로 나타나며, 이는 등비급수(geometric series)를 두 번 미분하여 얻는다.

풀이

$0 < p < 1$이라고 가정하고(그렇지 않으면 실험이 끝나지 않는다), 각 던지기는 독립(independent)이라고 가정한다.

N의 분포(distribution)

앞면(head)이 적어도 두 번, 뒷면(tail)이 적어도 두 번 나와야 하므로 $N \geq 4$이다. $n \geq 4$를 고정한다. 사건 $N = n$에서 n번째 던지기는 앞면 또는 뒷면이고, 이 두 경우는 서로소(disjoint)이다.

n번째 던지기가 앞면인 경우. 그 직전까지는 목표에 도달하지 못했고, n번째 던지기에서 앞면이 더해져 목표에 도달했다. 따라서 처음 $n-1$번의 던지기에는 이미 뒷면이 적어도 두 번 있었지만 앞면은 한 번뿐이었다. 즉 앞면이 정확히 한 번, 뒷면이 $n-2$번이다(그리고 $n-2 \geq 2$인데, 이는 $n \geq 4$이기 때문이다). 역으로, 이러한 수열 뒤에 앞면이 나오면 정확히 n번째에서 멈춘다. 한 번 나온 앞면은 $n-1$개의 자리 중 어디에나 올 수 있으므로, 이 경우의 확률은

$$(n-1)\,p\,q^{n-2} \cdot p = (n-1)p^2q^{n-2}.$$

n번째 던지기가 뒷면인 경우. 앞면과 뒷면을 바꾸어 같은 논증을 하면, 확률은 $(n-1)q^2p^{n-2}$이다.

두 경우를 더하면

$$\boxed{\mathrm{P}(N=n)=(n-1)\left(p^2q^{n-2}+q^2p^{n-2}\right),\qquad n=4,5,6,\ldots}$$

이며, $\mathrm{P}(N=n)=0$이 되는 것은 $n\le 3$일 때이다.

> **생각해 보기** 마지막 던지기가 앞면일 때, 처음 $n-1$번의 던지기에 앞면이 두 번 있을 수 없는 이유는 무엇인가?

만약 그렇다면, 그 던지기들에는 이미 앞면 두 번과 (멈추는 데 필요한) 뒷면 두 번이 들어 있게 되므로 실험은 n번째 던지기 이전에 끝났을 것이다. 바로 이 때문에 앞면의 개수가 정확히 하나로 정해진다.

기댓값

$|x|<1$일 때 $\sum_{n\ge 0}x^n=(1-x)^{-1}$을 두 번 미분하면 다음을 얻는다.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

우리의 합은 $n=4$부터 시작하므로, $n=2$ 항과 $n=3$ 항, 즉 2와 $6x$를 빼면

$$\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}-2-6x.$$

이제

$$\mathrm{E}(N)=\sum_{n=4}^{\infty}n\,\mathrm{P}(N=n)=p^2\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)q^{n-2}+q^2\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)p^{n-2}.$$

이 급수에 $x=q$(따라서 $1-x=p$)를 대입하고, 그다음 $x=p$(따라서 $1-x=q$)를 대입한다. $0<p,q<1$이므로 둘 다 성립하며, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N)&=p^2\Big(\frac{2}{p^3}-2-6q\Big)+q^2\Big(\frac{2}{q^3}-2-6p\Big)\\&=\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-2(p^2+q^2)-6pq(p+q).\end{aligned}$$

$p+q=1$이므로 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}=\frac{1}{pq}$이고 $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1-2pq$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N)&=\frac{2}{pq}-2(1-2pq)-6pq\\&=\frac{2}{pq}-2-2pq=2\Big(\frac{1}{pq}-1-pq\Big),\end{aligned}$$

이 되어 요구한 식을 얻는다.

검산

- 확률의 합은 1이다. 인수가 하나 적은 같은 급수로부터 $\sum_{n\geq 4}(n-1)p^2q^{n-2} = 1 - p^2 - 2p^2q$를 얻고, 앞면과 뒷면을 바꾼 식을 더하면 $1-(p^2+q^2)-2pq(p+q) = 1-1+2pq-2pq = 1$이 남는다. 여기서 $p^2+q^2 = 1-2pq$를 이용하였다.
- 공정한 동전이면 $pq = \frac{1}{4}$이고 $\mathrm{E}(N) = 2(4-1-\frac{1}{4}) = \frac{11}{2}$이다. 직접 계산하면 $\mathrm{P}(N=4) = \frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(N=5) = \frac{1}{4}$, ...이고, $n\,\mathrm{P}(N=n)$의 부분합은 5.5에 가까워진다.
- $p \to 0$일 때 $\mathrm{E}(N) \approx 2/p$이다. 앞면이 두 번 나오기를 기다려야 하고, 각각 약 $1/p$번의 던지기가 걸리기 때문이다.
- 길이 10까지의 모든 수열을 나열하면 분포가 정확히 재현되고, $p = 0.3$으로 한 시뮬레이션에서는 평균이 7.10으로, 공식에서 얻은 7.1038과 맞았다.

흔한 실수

- $\binom{n}{2}$라고 쓰는 실수(올바른 값은 $n-1$이다). 마지막 던지기의 위치는 고정되어 있으므로, 처음 $n-1$번의 던지기 중 단 한 번 나온 앞면(또는 뒷면)의 위치만 자유롭다.
- 표준 급수를 사용할 때 $n=2$ 항과 $n=3$ 항을 빼는 것을 잊는 실수.

STEP 너머

N은 평행이동된 두 **음이항**(*negative binomial*) 대기 시간의 혼합이고, 등비급수를 미분하는 요령은 **확률생성함수**(*probability generating function*)를 손으로 만든 형태이다. $G(s) = \mathrm{E}(s^N)$으로 두면 평균은 $G'(1)$로, 분산은 $G''(1)$로부터 똑같이 빠르게 얻을 수 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 이와 같은 대기 시간 문제를 다룬다.

풀이

STEP III 1993, 문제 16

확률과 통계 • 절단정규분포

> **STEP III 1993, 16번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q16

핵심 아이디어

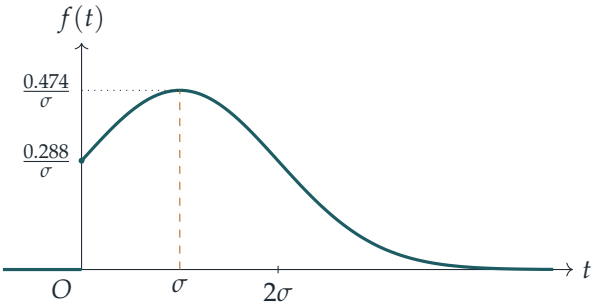
인수 $1/k$를 제외하면, 이 밀도(density)는 평균(mean)이 σ이고 표준편차(standard deviation)가 σ인 정규분포(normal distribution)의 밀도를 $t = 0$에서 잘라 낸 것과 정확히 같다. 따라서 T에 관한 모든 확률(probability)은 정규분포의 확률을, 잘라 내기 전의 확률변수가 음이 아닐 확률로 나눈 것이다. $z = (t - \sigma)/\sigma$로 표준화(standardising)하면 모든 것이 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$과 Φ의 표에 관한 명제로 바뀐다.

풀이

이 풀이 전체에서 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$이고, 그 밀도는 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$, 분포함수(distribution function)는 Φ이다.

그래프 그리기

$t \geq 0$에서 그래프는 $t = \sigma$를 중심으로 하는 정규분포의 종 모양 곡선을 $1/k$배만큼 확대한 것이다. 최댓값은 $t = \sigma$에서 갖고, 그 값은 $f(\sigma) = \frac{1}{k\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0.474}{\sigma}$이며, 변곡점(point of inflexion)은 $t = 2\sigma$에 있다. 잘린 지점에서 곡선은 양의 높이 $f(0) = \frac{e^{-1/2}}{k\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0.288}{\sigma}$에서 시작하고, $t < 0$에서는 0으로 뚝 떨어진다. $t \to \infty$일 때 $f(t) \to 0$이다.



k의 값

전체 확률은 1이어야 한다.

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{k\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{t-\sigma}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t.$$

$z = (t-\sigma)/\sigma$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}t = \sigma\,\mathrm{d}z$이고 $t = 0$은 $z = -1$이 되므로

$$1 = \frac{1}{k}\int_{-1}^\infty \phi(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1-\Phi(-1)}{k} = \frac{\Phi(1)}{k}.$$

따라서 $k = \Phi(1) \approx 0.8413$이고, 요구한 대로 $k \approx 0.841$이다.

평균

같은 치환을 쓰면 $t = \sigma(1+z)$이고

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{k}\int_{-1}^\infty \sigma(1+z)\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = \sigma\left[\frac{1}{k}\int_{-1}^\infty \phi(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{k}\int_{-1}^\infty z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z\right].$$

첫 번째 적분은 방금 보였듯이 k이다.

? **생각해 보기** $\phi(z)$ 자체는 적분할 수 없는데, $z\,\phi(z)$는 어떻게 적분할까?

$\phi'(z) = -z\,\phi(z)$라는 사실을 이용한다. 즉 $z\,\phi(z)$의 원시함수(antiderivative)는 $-\phi(z)$이다.

$$\int_{-1}^\infty z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = \Big[-\phi(z)\Big]_{-1}^\infty = \phi(-1) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.24197.$$

그러므로

$$\mathrm{E}(T) = \sigma\left(1 + \frac{e^{-1/2}}{k\sqrt{2\pi}}\right) \approx \sigma\left(1 + \frac{0.24197}{0.84134}\right) \approx 1.288\,\sigma.$$

이 값은 마땅히 σ보다 크다. 왼쪽 꼬리를 없애면 평균이 오른쪽으로 밀려나기 때문이다.

σ 구하기

문항 출제에 걸리는 평균 시간이 3시간이므로

$$\sigma = \frac{3}{1.2876} \approx 2.330\text{시간}.$$

임의의 $a \geq 0$에 대하여 같은 치환을 쓰면

$$\mathrm{P}(T > a) = \frac{1}{k}\int_{(a-\sigma)/\sigma}^{\infty} \phi(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}-1\right)}{\Phi(1)}. \qquad (*)$$

소문항 (i)

$a = 4$이면 $\frac{4}{\sigma} - 1 \approx \frac{4}{2.330} - 1 \approx 0.717$이고, $\Phi(0.717) \approx 0.7633$이다. $(*)$에 의해

$$\mathrm{P}(T > 4) \approx \frac{1-0.7633}{0.8413} \approx 0.2814, \qquad \mathrm{P}(T \leq 4) \approx 0.7186.$$

이제 16개 문항의 출제 시간이 서로 독립(independent)이고 각각 T의 분포를 따른다고 가정한다(이것이 사용할 수 있는 유일하게 합리적인 모형이다). 그러면

$$\mathrm{P}(4\text{시간보다 오래 걸리는 문항이 없음}) = \mathrm{P}(T \leq 4)^{16} \approx 0.7186^{16} \approx 0.0051.$$

따라서 모든 문항이 4시간 안에 출제될 가능성은 매우 낮다(약 200분의 1).

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 어떤 사건을 조건으로 하는가?

"2시간 후에도 만족스럽지 않다"는 것은 그 문항에 모두 합쳐 2시간보다 많이 필요하다는 뜻이므로, 이는 사건 $T > 2$이다. "2시간을 더 들인 후에도 여전히 받아들일 수 없다"는 $T > 4$이다. $\{T > 4\} \subseteq \{T > 2\}$이므로

$$\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2) = \frac{\mathrm{P}(T > 4)}{\mathrm{P}(T > 2)}.$$

$a = 2$이면 $\frac{2}{\sigma} - 1 \approx -0.142$이므로 $1 - \Phi(-0.142) = \Phi(0.142) \approx 0.5563$이다. 두 $(*)$ 식의 비에서 인수 $\Phi(1)$은 약분된다.

$$\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2) \approx \frac{1-0.7633}{0.5563} = \frac{0.2367}{0.5563} \approx 0.426.$$

검산

- 밀도를 직접 수치적분하면(심프슨 공식(Simpson's rule), $\sigma = 1$) k로 나누기 전의 전체 넓이는 0.84134이고, 평균은 1.2876σ이다.

- 평균과 표준편차가 $\sigma = 2.330$인 정규분포 값 4×10^5개를 모의실험(simulation)으로 만들어 음수인 값을 버리면, 표본평균은 3.004, $\mathrm{P}(T > 4) \approx 0.282$, $\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2) \approx 0.426$이다.
- 소문항 (i)은 반올림에 매우 민감하다. $0.719^{16} \approx 0.0051$이지만 $0.718^{16} \approx 0.0050$이다. 따라서 답은 약 0.005로 제시한다.
- 잘라 내지(truncation) 않았더라도 $\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2)$는 같았을 것이다. 인수 $1/k$가 약분되기 때문이다. k의 영향을 받는 것은 소문항 (i)과 평균뿐이다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(T > 4)$에서 k로 나누는 것을 잊는 실수. 그러면 0.281 대신 0.237을 얻고, (i)에서는 $0.7633^{16} \approx 0.013$을 얻어 올바른 값의 두 배가 넘는다.
- T의 평균을 σ(잘라 내기 전의 평균)로 보아 $\sigma = 3$을 얻는 실수.
- (ii)에서 조건부 확률(conditional probability) 대신 $\mathrm{P}(2 < T \leq 4)$나 $\mathrm{P}(T > 2)$를 구하는 실수.

STEP 너머

평균에 나타난 양 $\phi(1)/\Phi(1)$은 **역 밀스 비**(*inverse Mills ratio*)의 한 예이다. 일반적으로 정규분포 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$를 a 아래에서 잘라 낸 분포의 평균은 $\mu + \sigma\,\phi(\alpha)/(1 - \Phi(\alpha))$이며, 여기서 $\alpha = (a - \mu)/\sigma$이다. 절단 분포(truncated distribution)는 자료가 어떤 문턱값보다 클 때만 관측될 수 있는 곳이라면 어디에서나 나타난다. 예를 들어 생존 분석(survival analysis)이나 중도절단 자료(censored data)를 다루는 계량경제학 모형에서 볼 수 있다. 소문항 (ii)는 **생존 함수**(*survival function*) $\mathrm{P}(T > t)$에 관한 것이다. 지수분포(exponential distribution)는 $\mathrm{P}(T > s + t \mid T > s)$가 s에 의존하지 않는 유일한 경우이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 연속분포와 조건부 확률을 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1993년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

