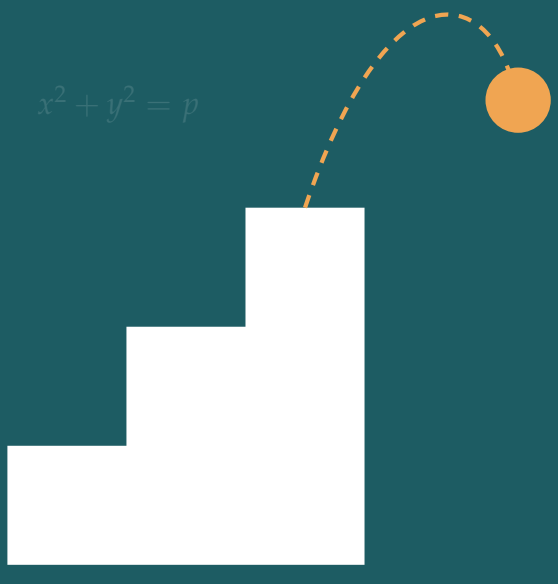
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1992년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1992년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1992년 풀이

1992년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 48개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 7을 법으로 하는 달력 계산 순수수학 3

Q2 마방진과 경우의 수 순수수학 6

Q3 홀함수와 짝함수 순수수학 10

Q4 복소평면 위의 자취 순수수학 14

Q5 다항식의 중복 인수 순수수학 18

Q6 작은 각 근사 순수수학 22

Q7 정숫값 다항식 순수수학 26

Q8 미적분학의 기본정리 순수수학 29

Q9 미분방정식 순수수학 33

Q10 반동과 운동량 역학 37

Q11 탄성 끈의 평형 역학 41

Q12 마찰이 있는 정역학 역학 45

Q13 탈출 속력과 지름 방향 낙하 역학 49

Q14 통계적 주장의 해석 확률과 통계 53

Q15 기대 대기 시간 확률과 통계 58

Q16 네트워크 신뢰도 확률과 통계 62

STEP II

Q1 수열의 극한 순수수학 66

Q2 클레로 미분방정식 순수수학 70

Q3 하이포사이클로이드와 넓이 순수수학 74

Q4 미분의 공리 순수수학 78

Q5 행렬군 순수수학 81

Q6 접선과 근의 개수 순수수학 85

Q7 삼차방정식의 중근 순수수학 89
Q8 적분 기법 순수수학 93
Q9 스칼라 삼중곱 순수수학 97
Q10 복소평면 위의 자취 순수수학 101
Q11 포물체 운동 역학 105
Q12 힘의 모멘트와 탄성 끈 역학 109
Q13 마찰과 연결된 입자 역학 113
Q14 연결된 입자와 도르래 역학 117
Q15 무작위 행보 확률과 통계 121
Q16 조건부 확률 확률과 통계 125

STEP III

Q1 매클로린 급수 순수수학 129
Q2 행렬의 거듭제곱과 수학적 귀납법 순수수학 133
Q3 곡선과 다항식의 근 순수수학 137
Q4 직교 궤적 순수수학 141
Q5 3차원 벡터 기하 순수수학 145
Q6 삼각함수 적분의 점화식 순수수학 149
Q7 벡터 기하 순수수학 152
Q8 근을 이용한 삼각함수의 합 순수수학 156
Q9 타원의 극방정식 순수수학 160
Q10 호의 길이와 넓이 순수수학 164
Q11 충돌과 반발계수 역학 168
Q12 운동량 보존 역학 172
Q13 고정축에 대한 회전 역학 176
Q14 풀리는 줄의 동역학 역학 181
Q15 기하학적 확률 확률과 통계 185
Q16 푸아송 솎아내기 확률과 통계 189

풀이

STEP I 1992, 문제 1

순수수학 • 7을 법으로 하는 달력 계산

> **STEP I 1992, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q1

핵심 아이디어

요일은 7일마다 반복되므로, 두 날짜 사이의 날수를 구해 7을 법으로(modulo) 줄이기만 하면 된다. 이 계산을 수월하게 만드는 요령은 $365 = 52 \times 7 + 1$이라는 사실이다. 평년은 요일을 하루 밀어내고, 윤년(leap year)은 이틀 밀어낸다. 따라서 먼저 온전한 해의 수와 윤일의 수를 세고, 남는 달들은 마지막에 처리한다. 문제에서 말하는 "주의 깊게"란 어느 2월 29일이 실제로 구간 안에 들어가는지, 그리고 우리를 넘어뜨릴 수도 있는 단 하나의 세기 연도에 대해 정확히 따지는 것을 뜻한다.

풀이

1905년 4월 3일부터 1992년 6월 26일까지의 구간을 두 부분으로 나눈다.

$$\text{1905년 4월 3일} \longrightarrow \text{1992년 4월 3일} \longrightarrow \text{1992년 6월 26일}.$$

온전한 해: 1905년 4월 3일부터 1992년 4월 3일까지

이는 $1992 - 1905 = 87$개의 온전한 해이다. 이러한 각 해(4월 3일부터 다음 해 4월 3일까지)는 365일이고, 그 안에 2월 29일이 들어 있으면 하루가 더해진다.

1905년 4월 3일과 1992년 4월 3일 사이에는 어느 2월 29일들이 있는가? 이 범위의 윤년은 4로 나누어떨어지는 해, 즉

$$1908,\ 1912,\ \ldots,\ 1988,\ 1992.$$

이다. 1904년의 2월 29일은 1905년 4월 3일보다 앞이므로 세지 않는다. 1992년의 2월 29일

은 1992년 4월 3일보다 앞이므로 센다. 따라서

$$\frac{1992-1908}{4}+1=21+1=22$$

개의 윤일이 있다.

생각해 보기 이 범위에서 4로 나누어떨어지는 해가 정말 모두 윤년인가?

그레고리력(Gregorian calendar)에서 세기 연도는 400으로 나누어떨어질 때에만 윤년이다. 따라서 1900년은 윤년이 **아니었다**(2000년은 윤년이었다). 그러나 이 두 해 모두 우리 구간 안에 있지 않으므로, 단순한 "4로 나누어떨어진다"는 규칙(운율 시에 나오는 규칙)이 여기서는 정확히 맞다. 만약 문제가 1900년 이전까지 거슬러 올라갔다면 1900년 2월 29일을 빼야 했을 것이다.

따라서 1905년 4월 3일부터 1992년 4월 3일까지의 날수는

$$87\times 365+22=31\,755+22=31\,777.$$

이다. 7을 법으로 계산하면 더 빠르다. $365\equiv 1 \pmod 7$이므로 이는

$$87+22=109=15\times 7+4\equiv 4 \pmod 7.$$

이다.

남는 달: 1992년 4월 3일부터 1992년 6월 26일까지

운율 시에 따르면 4월은 30일, 5월은 31일이므로

$$\begin{aligned}&4\text{월 }3\text{일}\to 5\text{월 }3\text{일}:30\text{일},\\&5\text{월 }3\text{일}\to 6\text{월 }3\text{일}:31\text{일},\\&6\text{월 }3\text{일}\to 6\text{월 }26\text{일}:23\text{일},\end{aligned}$$

합계 $30+31+23=84=12\times 7$일이고, 이는 $\equiv 0 \pmod 7$이다. 반갑게도 1992년 4월 3일과 1992년 6월 26일은 같은 요일이다.

종합하기

전체 간격은

$$31\,777+84=31\,861=4551\times 7+4\text{일},$$

이므로, 1905년 4월 3일은 1992년 6월 26일보다 요일로 4일 **앞선다**. 금요일에서 나흘을 거꾸로 세면 목요일, 수요일, 화요일, 월요일이다. 따라서

$$1905\text{년 }4\text{월 }3\text{일은 월요일이었다.}$$

검산

- 컴퓨터로 두 날짜 사이의 날수를 달마다 직접 세어 보면 31 861일이 나오고, 이는 4 (mod 7)이다. 컴퓨터 달력에서도 1905년 4월 3일은 월요일(1992년 6월 26일은 금요일)로 나온다.
- 방향에 대한 점검: 월요일에서 4일 **앞으로** 가면 금요일이 되니, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- 윤일의 수를 다른 방법으로 점검: 87년에는 대략 $87/4 \approx 21.75$개의 윤일이 있으므로 22는 그럴듯하다.

흔한 실수

- 1904년 2월 29일(시작 날짜보다 앞)을 포함하거나 1992년 2월 29일(끝 날짜보다 앞)을 빼는 것: 어느 쪽이든 답이 하루 어긋난다.
- 앞으로 세어야 할 것을 거꾸로 세거나, 그 반대로 하는 것: 나머지 4는 일주일 주기에서 1905년이 금요일보다 나흘 **앞**이라는 뜻이지, 뒤라는 뜻이 아니다.
- 이 방법을 더 이른 날짜로 확장할 때 1900년을 윤년으로 취급하는 것.

STEP 너머

이것은 7을 법으로 하는 산술이다. 핵심 사실 $365 \equiv 1 \pmod 7$이 큰 수의 셈을 작은 수의 셈으로 바꾸어 준다. 합동식(congruence)과, 임의의 날짜의 요일을 구하는 첼러(Zeller)의 합동식 같은 달력 퍼즐에서의 그 쓰임은 정수론(number theory) 첫 강좌의 표준적인 내용이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식을 비롯한 많은 내용을 다루는 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP I 1992, 문제 2

순수수학 • 마방진과 경우의 수

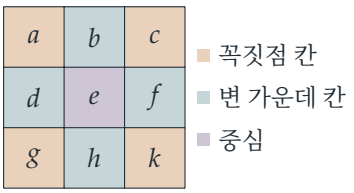
> **STEP I 1992, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q2

핵심 아이디어

모든 것은 선들을 영리하게 더하는 데서 나온다. 세 행을 모두 더하면 각 수를 정확히 한 번씩 쓰게 되므로 n이 나온다. 중심을 지나는 네 선을 더하면 모든 수를 한 번씩, 중심은 네 번 쓰게 되므로 e가 결정된다. 그다음에는 문제가 작고 꼼꼼한 경우 분석(case analysis)이 된다. e를 알고 나면 중심을 지나는 각 선은 합이 일정한 두 수를 짝짓게 되고, 그 때문에 큰 수가 들어갈 자리가 거의 남지 않는다. 그런 다음 정사각형의 대칭(symmetry), 즉 회전이 세는 일을 대신해 준다.

풀이

세 종류의 칸에 이름을 붙이면 편리하다. 네 개의 **꼭짓점 칸**(corner) a, c, g, k, 네 개의 **변 가운데 칸**(edge-middle) b, d, f, h, 그리고 **중심**(centre) e이다.



소문항 (i)

세 행을 합치면 아홉 개의 수가 각각 정확히 한 번씩 들어 있다. 따라서 세 행의 합을 더하면

$$3n = (a+b+c) + (d+e+f) + (g+h+k) = 1+2+\cdots+9 = 45,$$

이므로 $n = 15$이다.

소문항 (ii)

중심을 지나는 선은 가운데 행, 가운데 열, 그리고 두 대각선(diagonal)의 네 개이다. 이들을 더하면

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+k)+(c+e+g)=4n=60.$$

좌변에서 e를 제외한 모든 수는 정확히 한 번씩 나타나고 e는 네 번 나타나므로, 좌변은 $45+3e$이다. 따라서 $45+3e=60$이고, $e=5$이다.

여기서 유용한 결론을 하나 얻는다. 중심을 지나는 각 선의 합이 15이고 $e=5$이므로, 중심을 사이에 두고 서로 **마주 보는** 두 칸의 합은 항상 10이다.

$$a+k=c+g=b+h=d+f=10.$$

소문항 (iii)

$e=5$이므로 9는 중심에 올 수 없다. 따라서 9가 꼭짓점 칸에 올 수 없음을 보이면 된다.

모순을 이끌어 내기 위해(for contradiction) 9가 꼭짓점 칸에 있다고 가정하자. 논증은 어느 꼭짓점 칸에서나 같으므로 $a=9$라 하자. 그러면 마주 보는 꼭짓점 칸은 $k=10-9=1$이다. 맨 위 행과 왼쪽 열이 모두 a를 지나므로

$$b+c=15-9=6 \qquad \text{그리고} \qquad d+g=15-9=6.$$

네 수 b,c,d,g는 서로 다르며, 1, 5, 9를 쓰고 남은 수, 즉 $\{2,3,4,6,7,8\}$에서 골라야 한다. 이 집합에서 **서로 다른** 두 수의 합으로 6을 나타내는 방법은 $2+4$뿐이다($1+5$는 이미 놓인 수를 쓰고, $3+3$은 같은 수를 반복하기 때문이다). 따라서 $\{b,c\}=\{2,4\}$이고 $\{d,g\}=\{2,4\}$인데, 이렇게 되려면 2와 4를 각각 두 번씩 써야 한다. 이는 모든 수가 서로 다르다는 조건에 모순이다.

> ? **생각해 보기** 왜 꼭짓점 칸 a 하나만 다루어도 충분할까?

어느 꼭짓점 칸에 대해서도 같은 세 가지 사실이 성립한다. 마주 보는 꼭짓점 칸은 1이어야 하고, 그 꼭짓점 칸을 지나며 정사각형의 변을 따라가는 두 선은 각각 나머지 두 수의 합이 6이어야 한다. 따라서 같은 모순이 나타난다. (같은 말이지만, 마방진(magic square)을 4분의 1 바퀴 회전하면 또 다른 마방진이 되고, 회전은 a를 나머지 각 꼭짓점 칸으로 옮긴다.)

따라서 9는 중심도 꼭짓점 칸도 아니므로, b,d,f,h 중 하나여야 한다.

소문항 (iv)

$b=9$라 하자. 그러면 $h=10-9=1$이고, 맨 위 행에서 $a+c=6$이다. (iii)에서처럼 쓰지 않은 수는 $\{2,3,4,6,7,8\}$이고, 이 중 합이 6인 서로 다른 두 수의 쌍은 $\{2,4\}$뿐이다. 따라서 $a=2,\ c=4$이거나 $a=4,\ c=2$이다.

a와 c가 정해지면 나머지는 모두 마주 보는 쌍과 양옆의 열에 의해 결정된다.

- $a = 2, c = 4$: 이때 $k = 10 - a = 8, g = 10 - c = 6, d = 15 - a - g = 7, f = 15 - c - k = 3$이다.
- $a = 4, c = 2$: 이때 $k = 6, g = 8, d = 15 - 4 - 8 = 3, f = 15 - 2 - 6 = 7$이다.

값이 강제된다는 것은 이들이 **유일한** 후보라는 사실만 보여 줄 뿐이므로, 실제로 조건을 만족하는지 확인해야 한다. 각 경우 수 $1, \ldots, 9$가 한 번씩 쓰였고, 모든 행, 열, 대각선의 합이 15이다.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(예를 들어 첫 번째에서 행의 합은 15, 15, 15, 열의 합은 $2+7+6, 9+5+1, 4+3+8$, 대각선의 합은 $2+5+8, 4+5+6$이다.) 따라서 $b = 9$인 마방진은 정확히 두 개이고, 두 번째는 첫 번째를 가운데 열에 대해 대칭시킨 거울상이다.

소문항 (v)

마방진을 시계 방향으로 4분의 1 바퀴 돌리면 또 다른 마방진이 된다. 새 마방진의 행은 원래의 열이고, 열은 원래의 행(거꾸로 읽은 것)이며, 두 대각선은 서로 바뀐다. 4분의 1 바퀴 회전은 되돌릴 수 있으므로(반시계 방향으로 다시 돌리면 된다), 이 회전은 마방진들 사이의 일대일대응(one-to-one correspondence)을 준다.

시계 방향 4분의 1 바퀴 회전은 칸 b를 칸 f로 옮긴다. 따라서 $f = 9$인 마방진은 정확히 $b = 9$인 마방진을 4분의 1 바퀴 돌린 것들이며, 정확히 2개 있다. 다시 돌리면 $h = 9$인 것도 정확히 2개, $d = 9$인 것도 정확히 2개이다.

(iii)에 의해 모든 마방진은 b, f, h, d 중 정확히 한 자리에 9를 가지므로, 이 네 묶음은 서로소이고 모든 경우를 빠짐없이 덮는다. 따라서

$$4 \times 2 = 8$$

개의 서로 다른 3×3 마방진이 있다. 이들은 (iv)의 두 마방진과, 그것들을 4분의 1, 반, 4분의 3 바퀴 돌린 것들이다. 같은 말로, 하나의 마방진에 대한 여덟 가지 회전과 반사(reflection)이다.

검산

$1, \ldots, 9$의 모든 $9! = 362\,880$가지 배열을 컴퓨터로 간단히 탐색하면 마방진은 정확히 8개 나온다. 모두 선의 합이 15이고 중심이 5이며, 모두 변 가운데 칸에 9가 있고, $b = 9$인 두

개는 (iv)에서 찾은 마방진이다. 손으로는 모든 마방진에서 1이 9의 맞은편에 있고 짝수 2, 4, 6, 8이 꼭짓점 칸을 채운다는 것을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- (iv)에서 강제로 얻은 정사각형이 정말 마방진인지 확인하는 것을 잊는 실수. 이 추론은 다른 것은 될 수 없다는 사실만 보여 준다.
- (v)에서 회전이 왜 새롭고 실제로 서로 다른 정사각형을 만드는지 설명하지 않거나, (iii)을 이용해 네 경우가 겹치지 않고 모든 경우를 덮는다는 것을 보이지 않은 채 "2"나 "4"라고 답하는 실수.

STEP 너머

소문항 (v)는 **군의 작용**(group action)을 처음 맛보는 것이다. 정사각형의 여덟 가지 대칭(네 개의 회전과 네 개의 반사)은 군(group)을 이루고, 마방진들은 이 군 아래에서 하나의 궤도(orbit)를 이룬다. 이처럼 대칭을 고려하여 대상을 세는 방법은 번사이드 보조정리(Burnside's lemma)로 발전하는데, 이는 군론의 첫 강의에서 만나게 된다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 시작하기에 친절한 책이다.

풀이

STEP I 1992, 문제 3

순수수학 • 홀함수와 짝함수

STEP I 1992, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q3

핵심 아이디어

여기 나오는 모든 적분은 대칭 구간(symmetric interval) $[-\pi, \pi]$에서의 적분이므로, 각 피적분함수(integrand)에 대해 가장 먼저 물어야 할 것은 그것이 우함수(even function)인지 기함수(odd function)인지이다. 기함수를 대칭 구간에서 적분하면 0이 되고, 우함수를 적분하면 $[0, \pi]$에서의 적분의 두 배가 되는데, 이 구간에서는 절댓값(modulus) 기호가 사라진다. 대칭성을 알아차리면 네 소문항 모두 기껏해야 짧은 계산 하나씩으로 끝난다.

풀이

두 가지 표준적인 사실을 이용한다. $f(-x) = f(x)$(우함수)이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

이고, $f(-x) = -f(x)$(기함수)이면 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$이다. 두 사실 모두 $[-a, 0]$에서의 적분에 $x = -u$를 치환(substitution)하면 얻어지는데, 이 치환으로 그 적분은 $\int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u$가 된다.

또한 $\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$도 필요하다.

소문항 (i)

$|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$이므로 피적분함수는 우함수이다. $[0, \pi]$에서는 $\sin x \geq 0$이므로 그 구간에서 $|\sin x| = \sin x$이다. 따라서

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2 \times 2 = 4.$$

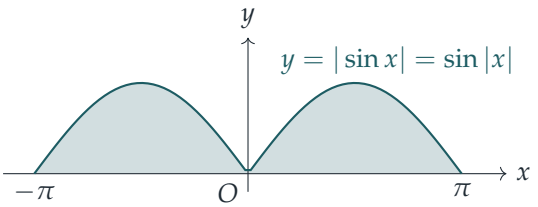
소문항 (ii)

$|-x| = |x|$이므로 함수 $\sin|x|$는 우함수이다. $[0, \pi]$에서 $|x| = x$이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 4.$$

? **생각해 보기** (i)과 (ii)의 답이 같은 것은 우연일까?

그렇지 않다. 이 구간에서 두 피적분함수는 같은 함수이다. $0 \le x \le \pi$에서는 둘 다 $\sin x$와 같다. $-\pi \le x \le 0$에서는 $\sin x \le 0$이므로 $|\sin x| = -\sin x$이고, $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$ 역시 성립한다. 두 곡선은 $[-\pi, \pi]$ 밖에서만 갈라진다. 예를 들어 $x = 3\pi/2$에서 $|\sin x| = 1$이지만 $\sin|x| = -1$이다.



색칠한 영역은 사인 곡선의 아치 두 개로 이루어져 있고, 각 아치의 넓이는 2이다.

소문항 (iii)

여기서는 $(-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x\sin x$이므로 피적분함수는 우함수이다(두 기함수의 곱). 그러므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

$u = x$, $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$(따라서 $v = -\cos x$)로 두고 부분적분(integration by parts)하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x &= \left[-x\cos x\right]_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\pi\cos\pi - 0\right) + \left[\sin x\right]_{0}^{\pi} \\ &= \pi + 0 = \pi.\end{aligned}$$

따라서

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

소문항 (iv)

이번에는 $(-x)^{10}\sin(-x) = x^{10}(-\sin x) = -x^{10}\sin x$이므로 피적분함수는 기함수이다(우함수와 기함수의 곱). 그러므로 대칭 구간에서의 적분은

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{10}\sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

부분적분을 열 번 할 필요가 없다! $[-\pi, 0]$과 $[0, \pi]$에서의 기여는 크기가 같고 부호가 반대여서 정확히 상쇄된다.

검산

- 넓이 감각: (i)에서 피적분함수는 음이 아니고 1 이하이므로 답은 0과 $2\pi \approx 6.28$ 사이에 있어야 하는데, 4는 그렇다.
- (iii)에서 $[-\pi, \pi]$ 위에서 $x\sin x \geq 0$이므로 답은 양수여야 하는데, 2π는 양수이다. $\sin x - x\cos x$를 미분하면 $x\sin x$가 되므로 원시함수(antiderivative)가 맞음을 확인할 수 있다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구간을 20 000개로 나누어 계산하면 네 적분의 값은 4.0000000, 4.0000000, 6.2831853, 0.0000000이다. (iv)에서 0은 단지 작은 수가 아니다. 같은 구간에서 $|x^{10}\sin x|$의 적분은 약 13 275이므로, 상쇄는 정확하고 완전하다.

흔한 실수

- 절댓값을 무시하고 $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$이라고 쓰는 것. 결코 음이 되지 않는 피적분함수는 거의 모든 곳(almost everywhere)에서 0이 아닌 한 적분값이 0일 수 없다.
- $\sin x$가 기함수이므로 $\sin|x|$도 기함수라고 가정하는 것. $|x|$와 합성(composition)하면 언제나 우함수가 된다.
- (iii)의 부분적분에서 부호를 틀리는 것. $\cos\pi = -1$이므로 $-\pi\cos\pi = +\pi$임을 기억하자.

STEP 너머

함수를 우함수 부분과 기함수 부분으로 나누는 것, 즉 $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big)$는 푸리에 급수(Fourier series)의 출발점이다. $[-\pi, \pi]$에서 우함수 부분은 코사인으로, 기함수 부분은 사인으로 전개되며, (iii)과 (iv) 같은 적분이 바로 계수(coefficient)를

계산하는 데 쓰이는 적분이다. 예를 들어 x의 푸리에 급수에서 $\sin x$의 계수는 (iii)의 적분에서 나온다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 푸리에 급수와 그것을 미분방정식 풀이에 활용하는 방법에 대한 읽기 쉬운 입문이 실려 있다.

풀이

STEP I 1992, 문제 4

순수수학 • 복소평면 위의 자취

STEP I 1992, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q4

핵심 아이디어

각 조건을 x와 y에 대한 명제($z = x + \mathrm{i}y$로 둔다)나 z의 절댓값(modulus)과 편각(argument)에 대한 명제로 바꾸면, 대개 영역이 한눈에 보인다. 소문항 (i)과 (ii)는 이것만으로 충분하다. 소문항 (iii)은 다르다. 이 소문항은 **합**들의 집합을 묘사하므로 두 가지를 보여야 한다. 모든 합이 우리가 주장하는 영역 안에 있다는 것, 그리고 그 영역의 모든 점이 실제로 그런 합이라는 것이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $z = x + \mathrm{i}y$이고 x, y는 실수이다.

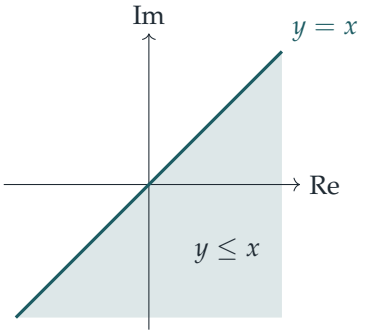
소문항 (i)

전개하면

$$(1+\mathrm{i})z = (1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (x-y) + \mathrm{i}(x+y),$$

이므로 $\mathrm{Re}\big((1+\mathrm{i})z\big) = x - y$이다. 조건은 $x - y \geq 0$, 즉 $y \leq x$이다. 이 집합은 직선 $y = x$ 위와 그 아래쪽으로 이루어진 닫힌 반평면(closed half-plane)이며, 직선 자신도 포함한다.

기하적으로, $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$를 곱하는 것은 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하고 $\sqrt{2}$배로 확대하는 것이다. 따라서 이 조건은 z를 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시킨 점이 오른쪽 반평면 $\mathrm{Re} \geq 0$에 놓인다는 뜻이다. 이는 $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$(또는 $z = 0$)라는 뜻이고, 같은 반평면이다.



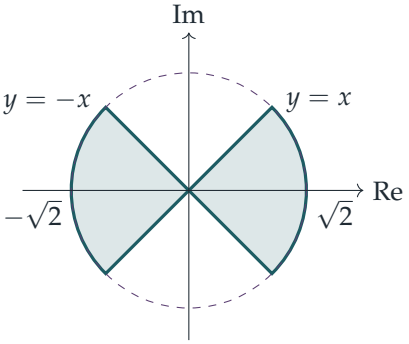
소문항 (ii)

$|z^2| = |z|^2$이므로 첫 번째 조건은 $|z|^2 \leq 2$, 즉 $|z| \leq \sqrt{2}$이다. 이는 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{2}$인 닫힌 원판(closed disc)이다.

두 번째 조건에 대해서는, $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$이므로 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$이고, 조건은 $x^2 \geq y^2$, 즉 $|y| \leq |x|$이다. 이는 직선 $y = x$와 $y = -x$ 사이에 있으면서 실수축을 포함하는, 서로 마주 보는 한 쌍의 닫힌 부채꼴(sector)이다.

극형식(polar form)으로 쓰면 같은 내용을 더 빨리 얻는다. $z = re^{i\theta}$이면 $z^2 = r^2e^{2i\theta}$이므로 $r \leq \sqrt{2}$이고 $\cos 2\theta \geq 0$이어야 하며, 이로부터 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$(또는 $z = 0$)를 얻는다.

구하는 집합은 이 둘의 교집합이다. 즉 두 개의 닫힌 사분원판(각각 중심각이 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름이 $\sqrt{2}$인 부채꼴)으로, 하나는 오른쪽으로, 다른 하나는 왼쪽으로 열려 있고 원점에서 만난다. 경계는 모두 포함된다.



소문항 (iii)

합들의 집합을 S라 하자. S가 닫힌 원환(closed annulus) $\{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$임을 보이겠다.

모든 합은 원환 안에 있다. $|z_1| = 2$이고 $|z_2| = 1$이면 삼각부등식(triangle inequality)에 의

해

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| = 3, \qquad |z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2| = 1.$$

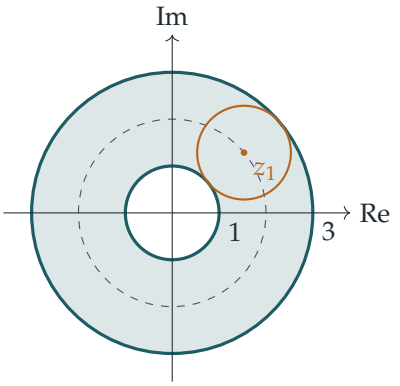
생각해 보기 이것으로 충분한가? 원환 안의 어떤 곡선만이 아니라 원환 전체가 채워진다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

이 부등식들은 S가 원환 안에 있다는 것만 보여 주므로, 반대 방향의 포함 관계를 여전히 보여야 한다. $1 \le |z| \le 3$인 임의의 z를 잡자. $|z - z_2| = 2$인 절댓값 1의 복소수 z_2를 찾고 싶다. 그러면 $z_1 = z - z_2$의 절댓값은 2이고 $z = z_1 + z_2$이기 때문이다.

기하적으로, z_2는 0을 중심으로 하는 단위원 위에 있으면서 동시에 z를 중심으로 하고 반지름이 2인 원 위에 있어야 한다. 반지름이 1과 2이고 중심 사이의 거리가 $d = |z|$인 두 원은 정확히 $2 - 1 \le d \le 2 + 1$일 때 만나며, 이것이 바로 우리의 조건 $1 \le |z| \le 3$이다.

원에 관한 이 사실을 인용하지 않고 확인하려면, $z = re^{i\alpha}$로 쓰고 φ에 대해 연속인 함수 $f(\varphi) = |z - e^{i\varphi}|$를 생각하자. $\varphi = \alpha$일 때 점 $e^{i\varphi}$는 z와 같은 방향을 가리키므로 $f(\alpha) = |r - 1| = r - 1 \le 2$이다. $\varphi = \alpha + \pi$일 때는 반대 방향을 가리키므로 $f(\alpha + \pi) = r + 1 \ge 2$이다. 사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의해 어떤 φ에 대해 $f(\varphi) = 2$이고, $z_2 = e^{i\varphi}$가 조건을 만족한다.

따라서 S는 정확히 두 원 $|z| = 1$과 $|z| = 3$ 사이의 닫힌 원환이며, 두 경계원을 모두 포함한다. 이렇게 그려 보면 좋다. 반지름이 2인 원 위에 z_1을 고정하면, $z_1 + z_2$는 z_1을 중심으로 하는 단위원을 그린다. z_1이 한 바퀴 돌면 이 작은 원들이 원환 전체를 쓸고 지나간다.



호박색 원은 점선 원 $|z_1| = 2$ 위의 고정된 한 z_1에 대한 합들을 나타낸다.

검산

- (i)에서 $z = 1$이면 $\mathrm{Re}(1 + i) = 1 \ge 0$이고, $z = i$이면 $\mathrm{Re}(-1 + i) = -1 < 0$이다. 이는 $y \le x$와 일치한다.

- (ii)에서 $z = 1$은 집합에 속하고 $z = \mathrm{i}$는 속하지 않으므로($\mathrm{i}^2 = -1$), 그림처럼 부채꼴들은 실수축을 포함해야 한다.
- (iii)에서 $z_1 = 2, z_2 = -1$이면 1이 되고 $z_1 = 2, z_2 = 1$이면 3이 되므로, 두 경계원에 모두 도달한다. 세 가지 묘사를 모두 무작위로 고른 200 000개의 점에서 시험해 보았다. 무작위 합들의 절댓값은 1.0000과 3.0000 사이에 있었고, 원환의 무작위 점 1000개에 대해 알맞은 z_2를 2×10^{-4} 이내의 오차로 찾을 수 있었다.

흔한 실수

- (ii)에서 부채꼴 $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$만 남기고 왼쪽 부채꼴을 잊는 것. z와 $-z$는 제곱이 같다.
- (iii)에서 삼각부등식까지만 하고 멈추는 것. 그것은 S가 원환 안에 있다는 것만 보여 줄 뿐, S가 원환 전체라는 것은 보여 주지 않는다.
- 경계가 포함되는지 여부를 빠뜨리는 것. 여기서 모든 부등식은 등호를 포함하므로 모든 경계가 포함된다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 두 집합의 **민코프스키 합**(Minkowski sum) $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$의 작은 예로, 이 개념은 기하학과 볼록 해석학(convex analysis) 전반에 걸쳐 등장한다. 두 방향의 포함 관계를 보이는 논법($S \subseteq T$를 보이고 이어서 $T \subseteq S$를 보이는 것)은 두 집합이 같음을 증명하는 표준적인 방법이며, 대학에서 끊임없이 쓰게 될 것이다. 복소수의 곱셈을 회전과 확대로 보는 기하적 관점을 알고 싶다면 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라. 이 관점을 쓰면 (i)과 (ii)는 거의 즉시 풀린다.

풀이

STEP I 1992, 문제 5

순수수학 • 다항식의 중복 인수

STEP I 1992, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q5

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.7 절 **같은 거듭제곱의 합**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/equal-power-sums.html

핵심 아이디어

다항식(polynomial)이 중복된 인수(factor) $(1-x)^m$을 가지면, 이를 미분하고 x를 곱해도 인수 $(1-x)^{m-1}$이 남는다. 따라서 1은 이 다항식의 근(root)일 뿐 아니라, 이렇게 이어지는 다음 몇 개의 다항식의 근이기도 하다. 이 다항식들 각각에 계수(coefficient)를 이용하여 $x=1$을 대입하면 $\sum k^r c_k$ 꼴의 합이 나온다. 모든 계수가 ± 1이면, 이 합들은 각각 두 정수 집합의 r제곱의 합이 같다는 것을 말해 준다.

풀이

인수 $(1-x)^3$

제곱의 차 공식(difference of two squares)을 두 번 쓰면

$$1-x^2=(1-x)(1+x), \qquad 1-x^4=(1-x^2)(1+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^2),$$

이므로

$$\mathrm{p}_0(x)=(1-x)^3(1+x)^2(1+x^2),$$

이다. 따라서 요구한 대로 $(1-x)^3$은 $\mathrm{p}_0(x)$의 인수이다.

$\mathrm{p}_0'(1)=0$**과** $\mathrm{p}_1'(1)=0$

작은 사실 하나를 증명하고 이를 반복해서 사용한다.

보조정리(*lemma*). $m \geq 1$이고 q가 다항식일 때 $\mathrm{p}(x) = (1-x)^m \mathrm{q}(x)$이면, $\mathrm{p}'(x)$는, 따라서 $x\mathrm{p}'(x)$도, 인수 $(1-x)^{m-1}$을 가진다.

증명(*proof*). 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\mathrm{p}'(x) = -m(1-x)^{m-1}\mathrm{q}(x) + (1-x)^m \mathrm{q}'(x) = (1-x)^{m-1}\big[(1-x)\mathrm{q}'(x) - m\,\mathrm{q}(x)\big],$$

이고, 대괄호 안은 다항식이다. x를 곱해도 이 인수는 없어지지 않는다. □

$m = 3$으로 이를 적용하면 $\mathrm{p}_0'(x)$는 인수 $(1-x)^2$을 가지므로 $\mathrm{p}_0'(1) = 0$이다. 또 $\mathrm{p}_1(x) = x\mathrm{p}_0'(x)$도 인수 $(1-x)^2$을 가진다. $m = 2$로 보조정리를 한 번 더 적용하면 $\mathrm{p}_1'(x)$는 인수 $1-x$를 가지므로 $\mathrm{p}_1'(1) = 0$이다.

> ? **생각해 보기** 세 괄호의 곱을 그냥 미분하고 $x = 1$을 대입하면 안 될까?

그렇게 할 수도 있지만, 문제는 인수를 이용해 논증하라고 요구하고 있으며, 일반화되는 것도 인수를 이용한 논증이다. 중복도(multiplicity)가 m인 근은 $m-1$번 미분해도 살아남으며, 마지막 소문항에서 필요한 것이 바로 이 사실이다.

두 항등식

전개하면

$$(1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3,$$

이고, 이어서

$$\mathrm{p}_0(x) = 1 - x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7.$$

이다. 따라서 $c_0 = c_3 = c_5 = c_6 = 1$이고 $c_1 = c_2 = c_4 = c_7 = -1$이다.

이제

$$\mathrm{p}_0'(x) = \sum_{k=1}^{7} k\,c_k x^{k-1}, \qquad \mathrm{p}_1(x) = \sum_{k=0}^{7} k\,c_k x^k, \qquad \mathrm{p}_1'(x) = \sum_{k=1}^{7} k^2 c_k x^{k-1}.$$

이다. $x = 1$을 대입하고 $\mathrm{p}_0'(1) = 0$을 이용하면

$$-1 - 2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7 = 0, \quad \text{즉} \quad 1 + 2 + 4 + 7 = 3 + 5 + 6.$$

이고, $\mathrm{p}_1'(1) = 0$을 이용하면

$$-1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 = 0, \quad \text{즉} \quad 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2.$$

이다. (양변은 각각 14이고, 제곱의 경우에는 70이다.) c_0항은 0 또는 0^2이 곱해지므로 아무 기여도 하지 않는다.

마지막 소문항

한 단계 더 나아가자.

$$\mathrm{P}_0(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8) = \mathrm{p}_0(x)(1-x^8).$$

이라 하자. $1-x^8 = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$이므로 $\mathrm{P}_0(x)$는 인수 $(1-x)^4$을 가진다. $j = 0, 1, 2$에 대하여 $\mathrm{P}_{j+1}(x) = x\mathrm{P}_j'(x)$로 정의한다. 보조정리에 의해 P_1, P_2, P_3은 각각 인수 $(1-x)^3$, $(1-x)^2$, $(1-x)$를 가지므로

$$\mathrm{P}_1(1) = \mathrm{P}_2(1) = \mathrm{P}_3(1) = 0.$$

이다.

$\mathrm{P}_0(x) = \sum_{k=0}^{15} d_k x^k$로 쓰자. $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$를 한 번 적용할 때마다 x^k의 계수에 k가 곱해지므로 $\mathrm{P}_r(x) = \sum_{k=0}^{15} k^r d_k x^k$이고,

$$\sum_{k=1}^{15} k^r d_k = 0 \qquad \text{단, } r = 1, 2, 3.$$

이다.

d_k를 구하기 위해 $\mathrm{p}_0(x)$에 $1-x^8$을 곱한다. 그러면

$$\mathrm{P}_0(x) = \mathrm{p}_0(x) - x^8\mathrm{p}_0(x).$$

이다. 둘째 항은 p_0의 부호를 반대로 한 $x^8, \ldots, x^{15}$의 항들을 준다. 겹치는 항이 없으므로 모든 d_k는 ± 1이다.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_k	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+

(사실 $d_k = (-1)^{s(k)}$이며, 여기서 $s(k)$는 k의 이진 전개(binary expansion)에 나타나는 1의 개수이다. x^k는 k의 이진 자릿수에 대응하는 괄호들에서 $-x^{2^i}$를 골라서 생기기 때문이다.)

$k = 0$을 제외하면, $k \in \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$(여덟 개의 수)에 대해서는 계수 $d_k = -1$이고, $k \in \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$(일곱 개의 수)에 대해서는 $d_k = +1$이다. 이 둘을 합치면 정확히 $1, 2, \ldots, 15$가 된다. 따라서

$$(a_1, \ldots, a_8) = (1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14), \qquad (a_9, \ldots, a_{15}) = (3, 5, 6, 9, 10, 12, 15).$$

로 잡자. 그러면 $\sum k^r d_k = 0$은 정확히

$$a_1^r + \cdots + a_8^r = a_9^r + \cdots + a_{15}^r \qquad (r = 1, 2, 3),$$

를 뜻하며, 이것이 보여야 할 내용이다.

? 생각해 보기 왜 한쪽에는 여덟 개, 다른 쪽에는 일곱 개의 수가 오도록 나뉠까?

$+1$ 쪽에는 $k = 0$도 들어 있는데, 이것은 $r \geq 1$일 때 $0^r = 0$을 기여하므로 빼도 된다. 그래서 양쪽의 항의 개수가 같을 필요가 없다. ($r = 0$이면 항등식에 0이 필요하며, 이때는 $8 = 8$이 된다.)

검산

직접 계산하면, 합은 $r = 1$일 때 $60 = 60$, $r = 2$일 때 $620 = 620$, $r = 3$일 때 $7200 = 7200$이다. 컴퓨터로 P_0를 전개하여 그 부호들과 근 $x = 1$의 중복도가 4임을 확인하였고, 세 등식을 모두 검증하였다. $r = 4$일 때는 등식이 성립하지 않는데(근의 중복도가 4뿐이므로), 이는 논증이 빈틈없이 정확하다는 좋은 신호이다.

흔한 실수

- $k = 0$항을 잊어버려서 양쪽의 크기가 같아야 한다고 생각하는 것.
- $\mathrm{p}_0''(1) = 0$만으로 $\mathrm{p}_1'(1) = 0$이라고 결론짓는 것. $\mathrm{p}_1' = \mathrm{p}_0' + x\mathrm{p}_0''$이므로 $\mathrm{p}_0'(1) = 0$과 $\mathrm{p}_0''(1) = 0$이 모두 필요하다.

STEP 너머

이것은 Prouhet–Tarry–Escott 문제이다. $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$을 이진 자릿수 합의 홀짝성(parity)에 따라 나누면(투에-모스 수열(Thue–Morse sequence)), $r < n$인 모든 r에 대하여 r제곱의 합이 같은 두 집합을 얻는다. 그 뒤에 있는 도구, 즉 중복도가 m인 근은 처음 $m - 1$개의 도함수의 근이기도 하다는 사실은 임의의 체(field) 위의 다항식 대수에서 핵심적이다. 다항식과 그 근의 대수에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라. 더 일반적인 정수론에 대해서는 Davenport, *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 참고하라.

풀이

STEP I 1992, 문제 6

순수수학 • 작은 각 근사

STEP I 1992, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q6

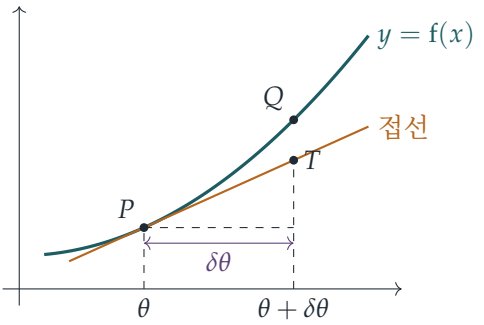
핵심 아이디어

$\theta + \phi$는 삼각형 ABC의 외각(exterior angle)이므로, 먼 점 C에서의 각은 정확히 ϕ이다. 그러면 사인법칙(sine rule)으로 AC를 정확히 구할 수 있다. C가 매우 멀리 있으므로 ϕ는 아주 작아야 하고, 작은 각 근사(small-angle approximation)를 쓰면 정확한 공식이 간단한 식으로 바뀐다. 작은 각 근사는 사실 첫 번째 소문항의 일차 근사가 모습을 바꾼 것이다. 오차에 관한 질문도 같은 일차 근사를 한 번 더 쓰는 것이며, 이번에는 ϕ를 변수로 본다.

풀이

일차 근사

점 $P = (\theta, \mathrm{f}(\theta))$ 근처에서 f의 그래프는 기울기(gradient)가 $\mathrm{f}'(\theta)$인 접선(tangent line)에 매우 가깝다.



오른쪽으로 $\delta\theta$만큼 이동해 보자. 접선을 따라가면 높이는 (기울기)$\times$(가로 이동 거리) $= \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta$만큼 올라가 T에 이른다. 곡선을 따라가면 높이 $\mathrm{f}(\theta + \delta\theta)$인 Q에 이른다.

$\delta\theta \to 0$일 때 간격 QT는 $\delta\theta$ 자체보다 빠르게 줄어드는데, 그 까닭은

$$\frac{\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)-\mathrm{f}(\theta)}{\delta\theta} \to \mathrm{f}'(\theta)$$

가 바로 도함수(derivative)의 정의이기 때문이다. 따라서 $\delta\theta$가 작으면

$$\mathrm{f}(\theta+\delta\theta) \approx \mathrm{f}(\theta) + \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta.$$

이다.

C까지의 거리

삼각형 ABC에서 A에서의 각은 θ이고, B에서의 외각은 $\theta+\phi$이다. 외각은 이웃하지 않은 두 내각의 합과 같으므로

$$\angle ACB = \phi.$$

이다. B에서의 내각은 $\pi-(\theta+\phi)$이고 $\sin(\pi-x)=\sin x$이므로, 사인법칙에서 다음의 정확한 결과를 얻는다.

$$AC = \frac{a\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}, \qquad h = AC\sin\theta = \frac{a\sin\theta\,\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}.$$

생각해 보기 "h가 a에 비해 매우 크다"는 조건은 실제로 어디에서 쓰이는가?

이 조건은 ϕ가 작다는 것을 알려 준다. 정확한 공식을 정리하면 $\sin\phi = a\sin\theta\sin(\theta+\phi)/h \le a/h$이므로, $h \gg a$이면 $\sin\phi$가, 따라서 ϕ가 아주 작을 수밖에 없다. (아주 먼 C에서 보면 기선 AB가 만드는 각은 거의 없다.) 이제 $\mathrm{f}=\sin$으로 두고 첫 번째 소문항의 결과를 쓰면

$$\sin(\theta+\phi) \approx \sin\theta + \phi\cos\theta \approx \sin\theta, \qquad \sin\phi \approx \sin 0 + \phi\cos 0 = \phi.$$

이다. 그러므로 구하는 대로

$$h \approx \frac{a\sin^2\theta}{\phi},$$

이고,

$$AC = \frac{h}{\sin\theta} \approx \frac{a\sin\theta}{\phi}.$$

이다. ($\phi\cos\theta$ 항을 남겨 두면 $AC \approx a\sin\theta/\phi + a\cos\theta$가 된다. 덧붙은 부분은 a 정도의 크기일 뿐이므로, h 정도의 크기인 거리에 비하면 무시할 수 있다.)

ϕ의 오차가 미치는 영향

θ는 정확히 측정되므로 고정하고, AC를 함수 $g(\phi) = a\sin\theta\,\phi^{-1}$로 보자. 첫 번째 소문항에 의해 오차 $\delta\phi$는 추정값을

$$\delta(AC) \approx g'(\phi)\,\delta\phi = -\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,\delta\phi.$$

만큼 바꾼다. 따라서 AC의 오차의 크기는 약 $\dfrac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi|$이며, ϕ를 크게 측정하면 거리는 작게 추정된다.

> **생각해 보기** a를 두 배로 하면, 공식의 분자에 a가 있으니 오차도 두 배가 되지 않는가?

그렇지 않다. ϕ는 고정된 값이 아니라 기선에 따라 달라지기 때문이다. 점 C(따라서 h)는 그대로이고, $h \approx a\sin^2\theta/\phi$에서 $\phi \approx a\sin^2\theta/h$를 얻으므로 a를 두 배로 하면 ϕ도 대략 두 배가 된다. (C가 매우 멀리 있으므로 θ는 아주 조금만 변한다.) 오차를 고정된 양 h로 나타내면

$$\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi| \approx a\sin\theta\cdot\frac{h^2}{a^2\sin^4\theta}\,|\delta\phi| = \frac{h^2}{a\sin^3\theta}\,|\delta\phi|.$$

이다. 같은 기기 오차 $\delta\phi$에 대해 AC의 오차는 a에 반비례한다. **두 망원경 사이의 거리를 두 배로 하면 오차는 대략 절반이 된다.**

검산

- $a = 1, \theta = \pi/6, \phi = 10^{-4}$로 두자. 정확한 공식으로는 $h \approx 2500.43$, $AC \approx 5000.87$이고, 근사식으로는 2500과 5000이다. AC의 차이는 약 $0.87 \approx a\cos\theta$로, 덧붙은 항이 예측하는 그대로이다.
- 무작위로 고른 수천 개의 a, θ와 작은 ϕ에 대해 두 시선의 교점으로 C를 직접 계산하면, 두 근사식 모두 0.1% 이내로 일치하고, 작은 $\delta\phi$로 인한 AC의 변화도 $-a\sin\theta\,\delta\phi/\phi^2$와 일치한다.
- 고정된 먼 점 C에 대해 기선이 a일 때와 $2a$일 때의 ϕ를 다시 계산하고 각각에 같은 $\delta\phi$만큼 섭동을 주면, 오차의 비는 2가 된다.
- 차원(dimension): 라디안(radian)으로 잰 각은 무차원이므로 $a\sin^2\theta/\phi$는 길이이다.

흔한 실수

- ϕ를 도(degree) 단위로 둔 채 $\sin\phi \approx \phi$를 쓰는 것. 이 근사는 sin의 f′와 마찬가지로 라디안이 필요하다.
- ϕ를 고정한 채 생각해서 오차가 a에 따라 두 배가 된다고 결론짓는 것. 대상이 고정하는 것은 ϕ가 아니라 h이다.
- $\angle ACB = \phi$임을 알아채지 못하고 좌표를 설정하는 것. 그래도 풀리지만 시간이 더 걸린다.

STEP 너머

이것은 시차(parallax)를 이용한 삼각측량(triangulation)으로, 천문학자들이 지구의 공전 궤도를 기선으로 삼아 가까운 별까지의 거리를 재는 방법이다. 오차 분석은 오차 전파(error propagation)를 처음 맛보는 것이다. 일차까지 보면, 측정값의 오차 δx는 그 값으로 계산한 모든 양에서 오차 $g'(x)\,\delta x$가 된다. 이 생각을 나머지항(remainder term)이 있는 테일러(Taylor) 정리로 엄밀하게 만드는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 중심 내용이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP I 1992, 문제 7

순수수학 • 정숫값 다항식

> **STEP I 1992, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q7

핵심 아이디어

계수(coefficient)가 정수(integer)임을 증명하려 해서는 안 된다. 이차함수(quadratic function)의 경우 계수가 정수일 필요가 없기 때문이다. 실제로 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$는 모든 정수에서 정숫값을 가진다. 그 대신 주어진 정숫값들로 계수를 나타낸 뒤 다시 대입하여, $\mathrm{f}(n)$이 $\mathrm{f}(-1)$, $\mathrm{f}(0)$, $\mathrm{f}(1)$의 정수 배의 결합으로 나타나게 한다. 그러면 마지막 부분은 원점을 옮긴(shift of origin) 뒤 가운데 부분을 다시 적용한 것에 지나지 않는다.

풀이

일차함수

$\mathrm{g}(0) = b$이고 $\mathrm{g}(1) = a + b$이므로 $b = \mathrm{g}(0)$, $a = \mathrm{g}(1) - \mathrm{g}(0)$이고, 둘 다 정수이다. 따라서 임의의 정수 n에 대하여

$$\mathrm{g}(n) = an + b = \mathrm{g}(0) + n\big(\mathrm{g}(1) - \mathrm{g}(0)\big),$$

이고, 이는 정수끼리의 곱의 합이므로 정수이다.

이차함수

$p = \mathrm{f}(-1)$, $q = \mathrm{f}(0)$, $r = \mathrm{f}(1)$로 놓으면, 이들은 모두 정수이다. 그러면

$$p = A - B + C, \qquad q = C, \qquad r = A + B + C,$$

이고, 이를 풀면

$$C = q, \qquad B = \frac{r - p}{2}, \qquad A = \frac{p + r - 2q}{2}.$$

따라서 A와 B는 정수일 필요가 없으며, 홀수의 절반일 수도 있다. 이 값들을 $\mathrm{f}(n) = An^2 + Bn + C$에 대입하고 p, q, r에 대한 항끼리 묶으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(n) &= \frac{p+r-2q}{2}\,n^2 + \frac{r-p}{2}\,n + q \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\,p + (1-n^2)\,q + \frac{n(n+1)}{2}\,r.\end{aligned}$$

생각해 보기 p와 r에 곱해진 수는 분모에 2가 있다. 이 수들은 왜 정수인가?

정수 n에 대하여 $n-1$과 n은 연속한 두 정수이므로 둘 중 하나는 짝수이고, 따라서 $n(n-1)$은 짝수이다. 마찬가지로 $n(n+1)$도 짝수이다. 그러므로 $\frac{1}{2}n(n-1)$과 $\frac{1}{2}n(n+1)$은 정수이고, $1-n^2$도 정수이다. 따라서 $\mathrm{f}(n)$은 정수끼리의 곱의 합이므로, 요구한 대로 모든 정수 n에 대하여 정수이다.

(곱해진 세 수는 $-1, 0, 1$ 중 하나에서 1이고 나머지 둘에서 0인 이차식이다. 이것이 라그랑주 보간법(Lagrange interpolation)이다.)

마지막 부분

α를 실수라 하고 $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(\alpha + x)$로 정의하자. 전개하면

$$\mathrm{h}(x) = A(\alpha+x)^2 + B(\alpha+x) + C = Ax^2 + (2A\alpha + B)x + (A\alpha^2 + B\alpha + C),$$

이므로 h도 실수 계수를 가진 $A'x^2 + B'x + C'$ 꼴의 함수이다. 가운데 부분에서는 A, B, C가 실수라는 사실 외에는 아무것도 사용하지 않았다. 이제

$$\mathrm{h}(-1) = \mathrm{f}(\alpha - 1), \qquad \mathrm{h}(0) = \mathrm{f}(\alpha), \qquad \mathrm{h}(1) = \mathrm{f}(\alpha + 1)$$

은 가정에 의하여 정수이다. 따라서 가운데 부분을 h에 적용하면, 모든 정수 n에 대하여 $\mathrm{h}(n) = \mathrm{f}(\alpha + n)$은 정수이다. 명시적으로 쓰면 다음과 같다.

$$\mathrm{f}(\alpha+n) = \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha-1) + (1-n^2)\,\mathrm{f}(\alpha) + \frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha+1).$$

검산

- $\mathrm{f}(n)$에 대한 식에 $n = -1, 0, 1$을 대입하면 곱해진 수들이 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$이 되어 p, q, r이 다시 나온다.
- 예 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$는 $p = 0, q = 0, r = 1$이고, 식에 의하여 $\mathrm{f}(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$, 즉 삼각수(triangular number)가 나온다.
- 수치적으로, $\alpha = \sqrt{2}$이고 $\mathrm{f}(\alpha - 1) = 3$, $\mathrm{f}(\alpha) = -7$, $\mathrm{f}(\alpha + 1) = 11$일 때 이 점들을 지나는 이차함수는 $\mathrm{f}(\alpha + 5) = 363.000\ldots$을 주며, 이는 $10 \cdot 3 - 24 \cdot (-7) + 15 \cdot 11 = 363$과 일치한다.

흔한 실수

- A, B, C가 반드시 정수라고 주장하는 것. 정수일 필요가 없으며, 이 사실에 기대는 논증은 틀린 것이다.
- 마지막 부분에서 α가 정수나 유리수(rational number)임을 보이려 하는 것. α는 어떤 실수여도 되며, 중요한 것은 평행이동뿐이다.

STEP 너머

모든 정수에서 정숫값을 가지는 다항식(polynomial)은 정확히 이항계수(binomial coefficient) $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$들의 정수 계수 결합이다. 이차식의 경우 이들은 1, x, $\frac{1}{2}x(x-1)$이며, 이 결과는 유한 차분(finite difference)으로 증명된다. 즉 차수(degree)가 d인 다항식이 연속한 $d+1$개의 정수에서 정숫값을 가지면, 그 다항식은 모든 정수에서 정숫값을 가진다. 같은 아이디어가 수치해석(numerical analysis)에서 뉴턴(Newton)의 전진 차분 공식(forward-difference formula)의 바탕에 깔려 있다. 정숫값 함수와 나누어떨어짐(divisibility)에 대해 더 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*을 참고하라.

풀이

STEP I 1992, 문제 8

순수수학 • 미적분학의 기본정리

STEP I 1992, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q8

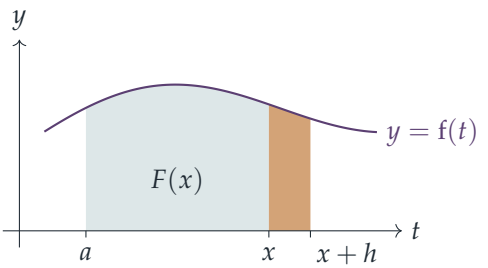
핵심 아이디어

위끝(upper limit)이 변수인 적분은 그 끝이 움직임에 따라 커지는 넓이이며, 그 넓이가 커지는 속도는 그 끝에서의 곡선의 높이와 같다. 이 한 가지 사실, 즉 미적분학의 기본정리(Fundamental Theorem of Calculus)를 쓰면 문제에 나오는 각 **적분방정식**을 **미분방정식**으로 바꿀 수 있다. 미분하면 상수에 대한 정보가 사라지므로, 원래 방정식에 편리한 x의 값, 대개 $x = 0$을 대입하여 그 정보를 항상 되찾는다.

풀이

적분의 도함수

$F(x) = \int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$라 하자. 이것은 $t = a$와 $t = x$ 사이에서 $y = \mathrm{f}(t)$ 아래의 넓이이다. x를 작은 양 h만큼 늘리면 폭이 h인 가느다란 띠가 더해진다.



이 띠의 넓이는 $F(x+h) - F(x)$이다. f가 연속(continuous)이면 $[x, x+h]$에서 곡선은 $\mathrm{f}(x)$로부터 작은 양 $\varepsilon(h)$ 이내에 머물고, $h \to 0$일 때 $\varepsilon(h) \to 0$이다. 따라서 띠는 높이가

$\mathrm{f}(x) \pm \varepsilon(h)$인 두 직사각형 사이에 놓인다.

$$\big(\mathrm{f}(x) - \varepsilon(h)\big)h \le F(x+h) - F(x) \le \big(\mathrm{f}(x) + \varepsilon(h)\big)h.$$

$h > 0$으로 나누고($h < 0$인 경우는 띠가 왼쪽에 있다는 점만 다르고 똑같다) $h \to 0$으로 보내면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \mathrm{f}(x).$$

a가 나타나지 않는다는 점에 주목하자. 아래끝을 바꾸면 F에 상수가 더해질 뿐이다.

방정식 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + 1$

위의 결과에 의해 우변은 미분가능하므로 f도 미분가능하고, 양변을 미분하면

$$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x).$$

원래 방정식에 $x = 0$을 대입하면 적분 구간의 길이가 0이므로 $\mathrm{f}(0) = 1$이다.

? **생각해 보기** $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$의 해가 e^x의 상수배뿐이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

$g(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$를 생각하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(x)\big) = 0,$$

이므로 g는 상수이고, $g(0) = \mathrm{f}(0) = 1$이다. 따라서 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x) = 1$, 즉 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^x$이며, 이것이 보이고자 한 것이다. (거꾸로 $\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + 1 = \mathrm{e}^x - 1 + 1 = \mathrm{e}^x$이므로 이것은 실제로 해이다.)

방정식 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$

앞에서와 똑같이 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$이므로 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$는 상수이다. 그런데 이번에는 $x = 0$을 대입하면 $\mathrm{f}(0) = 0$이므로 그 상수는 0이고, 유일한 해는

$$\mathrm{f}(x) = 0 \quad \text{모든 실수} x.$$

앞의 방정식에서 지수함수의 크기를 정해 준 것은 "+1"이었다. 그것이 없으면 영함수만 살아남는다.

마지막 부분

양변을 x에 대하여 미분한다. 우변에서는 이제 x가 아래끝이고,

$$\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^x t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{이므로} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{f}(x).$$

따라서

$$\mathrm{f}(x) = -x^2\mathrm{f}(x) + 1 - x^4,$$
$$(1+x^2)\,\mathrm{f}(x) = 1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2).$$

$1 + x^2 > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고,

$$\mathrm{f}(x) = 1 - x^2.$$

C를 구하기 위해 주어진 방정식에 $x = 0$을 대입한다. 좌변과 항 $x - \frac{x^5}{5}$가 사라지고

$$0 = \int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t + C = \left[\tfrac{t^3}{3} - \tfrac{t^5}{5}\right]_0^1 + C = \tfrac{2}{15} + C,$$

이 남으므로 $C = -\frac{2}{15}$이며, 이것이 보이고자 한 것이다.

생각해 보기 미분해서 알 수 있는 것은 두 변의 도함수가 같다는 것뿐이다. $C = -\frac{2}{15}$일 때 $\mathrm{f}(x) = 1 - x^2$가 정말로 모든 x에 대하여 방정식을 만족할까?

그렇다. 이 f에 대해 두 변은 모든 x에서 도함수가 같으므로 상수만큼 차이가 난다. 그리고 C는 바로 $x = 0$에서 두 변이 일치하도록 고른 것이다. 따라서 두 변은 모든 곳에서 일치한다. 거꾸로, 모든 해는 미분한 방정식을 만족해야 하므로 가능한 f는 $1 - x^2$뿐이다.

검산

- $x = 1$에서: 좌변은 $\int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$이고, 우변은 $0 + 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$이다. 둘이 일치한다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t \approx 0.133333 = \frac{2}{15}$이고, $x = -1.3,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.9,\ 2$에서 마지막 방정식의 두 변은 10^{-10} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 변수가 아래끝일 때 음의 부호를 빠뜨리는 것: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t = -g(x)$.
- $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$를 풀고 $A\mathrm{e}^x$에서 멈추는 것: A를 정해 주는 것은 $x = 0$에서의 원래 적분방정식이다.
- 적분 변수(dummy variable) t와 끝 x를 뒤섞은 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 같은 식을 쓰는 것.

STEP 너머

미지의 함수가 적분 안에 나타나는 방정식을 **적분방정식**(integral equation)이라 한다. 여기서 다룬 것처럼 끝이 변수인 것은 볼테라(Volterra) 방정식이며, 이는 미분방정식(differential equation)의 초기값 문제(initial-value problem)와 동치이다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 리만 적분(Riemann integral)의 정의로부터 미적분학의 기본정리를 엄밀하게 증명하며, 위의 띠 논증은 ε–δ 증명이 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*가 이를 매우 읽기 쉽게 다룬다.

풀이

STEP I 1992, 문제 9

순수수학 • 미분방정식

> **STEP I 1992, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q9

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 식에서 나온다. 물의 **부피**(volume)의 변화율은 (들어오는 비율)에서 (나가는 비율)을 뺀 것과 같다. 닮은 삼각형(similar triangles)에 의해 부피는 깊이 x의 간단한 함수가 되므로, 연쇄법칙(chain rule)을 쓰면 이 식은 x에 대한 미분방정식(differential equation)이 된다. 첫 번째 부분에서는 이 방정식의 변수가 깔끔하게 분리된다. 두 번째 부분에서는 방정식을 푸는 대신 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$의 부호와 그것이 0이 되는 깊이로부터 거동을 읽어 낸다.

풀이

원뿔 비우기

물의 깊이가 x cm일 때 물은 필터 전체와 닮은, 높이 x, 반지름 r인 더 작은 원뿔을 채운다. 닮은 삼각형에 의해 $r/x = a/H$이므로 $r = ax/H$이고, 물의 부피는

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi a^2 x^3}{3H^2}.$$

이다. 연쇄법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

이다. 물은 비율 Ax로 빠져나가기만 하므로 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -Ax$이다. 따라서

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Ax \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{AH^2}{\pi a^2},$$

이다. 여기서 x로 나누었는데, 원뿔에 아직 물이 남아 있는 동안($x > 0$)에는 이렇게 해도 된다. 좌변은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$이므로 $\frac{1}{2}x^2$은 **일정한** 비율 $AH^2/(\pi a^2)$로 감소한다. 이 값은 $\frac{1}{2}h^2$에서 시

작하고 0에 이르면 원뿔이 빈다. 따라서 걸리는 시간은

$$T = \frac{\frac{1}{2}h^2}{AH^2/(\pi a^2)} = \frac{\pi a^2 h^2}{2AH^2} \text{ 초},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (같은 방법으로, 변수분리(separation of variables)를 하면 $\int_h^0 x\,\mathrm{d}x = -\frac{AH^2}{\pi a^2}\int_0^T \mathrm{d}t$이다.)

물을 부어 넣기도 할 때

이제 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = B - Ax$이므로

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B - Ax, \qquad \text{즉} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{H^2(B-Ax)}{\pi a^2 x^2}.$$

이다. $x > 0$이므로 인수 $H^2/(\pi a^2 x^2)$은 양수이고, 따라서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$의 부호는 $B - Ax$의 부호와 같다. $c = B/A$라 하자. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0, \text{ 단} x < c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \text{ 단} x = c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0, \text{ 단} x > c.$$

이다. 따라서 $x = c$는 들어오는 양과 나가는 양이 정확히 균형을 이루는 평형(equilibrium) 깊이이고, 수면은 언제나 c를 **향해** 움직인다. 이것은 $c \le H$일 때에만 필터 안에서 물리적으로 가능하므로, 경우는 c를 h, H와 비교하여 나뉜다.

> **생각해 보기** 수면이 c를 향해 움직인다면, 실제로 c에 도달하는가, 아니면 지나쳐 버리는가?

지나칠 수는 없다. c를 지나려면 먼저 c와 같아져야 하는데, 그 지점에서는 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$이기 때문이다. 사실 수면은 유한한 시간 안에 c에 결코 도달하지 않는다. t를 x의 함수로 보면, h에서 h와 c 사이의 깊이 X까지 가는 데 걸리는 시간은

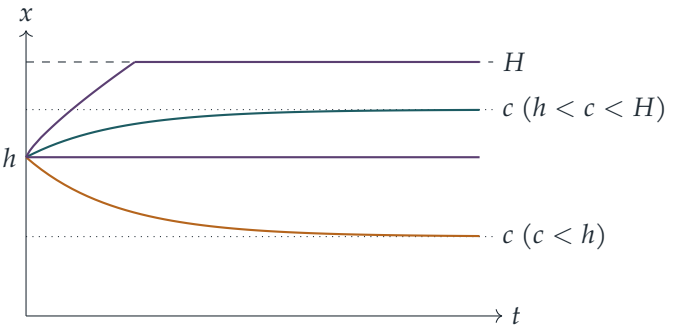
$$t = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{H^2(B-Ax)}\,\mathrm{d}x = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{AH^2(c-x)}\,\mathrm{d}x.$$

이다. $x = c$ 근처에서 피적분함수(integrand)는 $\frac{\pi a^2 c^2}{AH^2}\cdot\frac{1}{c-x}$처럼 행동하고, 그 적분은 $-\ln(c-x)$의 상수배이다. 이것은 $X \to c$일 때 무한대로 발산한다. 따라서 수면은 점점 더 느리게 c에 다가가며, "무한한 시간이 지난 뒤에야" 도달한다. 어느 쪽에서 다가가든 같은 논증이 성립한다.

따라서 경우는 다음과 같다.

- $B < Ah$ (즉 $c < h$). 처음에 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$이다. 수면은 점점 느려지면서 내려가고, 위쪽에서 $c = B/A$에 수렴(converge)하지만 도달하지는 않는다. 특히 첫 번째 부분과 달리 원뿔은 결코 비지 않는다($c > 0$이므로).

- $B = Ah$ (즉 $c = h$). 이때는 처음부터 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$이다. 물이 빠져나가는 속도만큼 들어오므로 수면은 h에 머문다.
- $Ah < B < AH$ (즉 $h < c < H$). 수면은 점점 느려지면서 올라가고, 아래쪽에서 B/A에 수렴한다. 수면은 H 아래에 머물므로 필터는 결코 넘치지 않는다.
- $B = AH$ (즉 $c = H$). 수면은 가장자리를 향해 올라가 H에 수렴하지만, 위의 논증에 의해 결코 정확히 도달하지는 않으므로 (이 모형에서는) 결코 넘치지 않는다.
- $B > AH$ (즉 $c > H$). 이제 모든 $x \le H$에 대해 $B - Ax \ge B - AH > 0$이고 $x^2 \le H^2$이므로
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ge \frac{H^2(B - AH)}{\pi a^2 H^2} = \frac{B - AH}{\pi a^2} > 0.$$
이다. 수면이 올라가는 속도가 양의 상수로 아래로 유계이므로, 수면은 유한한 시간, 많아야 $\pi a^2(H - h)/(B - AH)$초 안에 가장자리에 도달한다. 그 뒤로 필터는 넘친다. 수면은 H에 머물고, 초과분 $B - AH\ \mathrm{cm^3\,s^{-1}}$는 위로 흘러넘친다.



그림은 전형적인 거동을 보여 준다. c로 내려가는 경우(호박색), h에 머무르거나 유한한 시간 뒤에 넘치는 경우(자주색), c로 올라가는 경우(청록색)이다.

검산

- $B = 0$으로 두면 $c = 0$이다. 수면은 0을 향해 내려가며, 이는 첫 번째 부분과 일치한다(그 경우에는 0에 **실제로** 도달하는데, 유출량 Ax는 x에 비례하는 반면 부피는 x^3처럼 변하므로 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -AH^2/(\pi a^2 x)$가 0으로 가지 않기 때문이다).
- 수치적으로 $a = 3$, $H = 8$, $A = 0.7$, $h = 5$로 두면 공식은 $T \approx 7.889$초를 주며, x^2을 시간에 따라 단계별로 계산해도 같은 값이 나온다. 두 번째 방정식을 수치적으로 적분하면 각 경우가 확인된다. 예를 들어 $B/A = 9 > H$이면 수면은 약 41.5초 뒤에 H에 도달하고, $B/A = 7$이면 7과의 차이가 ε 이내가 되는 데 걸리는 시간이 ε을 10으로 나눌 때마다 약 71초씩 늘어나는데, 이것이 위에서 예측한 로그적 증가이다.

흔한 실수

- 높이 x인 닮은 원뿔의 부피 대신 원기둥의 부피 $\pi a^2 x$를 사용한다.
- 수면이 유한한 시간 안에 B/A에 도달한다거나, 지나쳐서 진동한다고 주장한다.
- 가장자리를 잊는다. 평형 B/A는 $B/A \leq H$일 때에만 도달하며, 그렇지 않으면 필터가 넘친다.

STEP 너머

두 번째 부분은 미분방정식의 **정성적** 이론(qualitative theory)을 처음 맛보는 것이다. $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x)$에 대해 평형점($f$의 영점)을 찾고, 양쪽에서의 f의 부호로 그 안정성(stability)을 판정하며, 해의 유일성(uniqueness of solutions)을 이용해 해가 평형점에 다가가기는 하지만 결코 가로지르지는 않음을 보일 수 있다. 이 모든 것을 아무것도 풀지 않고 할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)은 이러한 관점에서 자율 방정식(autonomous equations)과 안정성을 다룬다.

풀이

STEP I 1992, 문제 10

역학 • 반동과 운동량

STEP I 1992, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q10

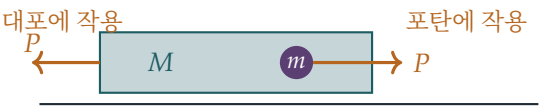
핵심 아이디어

힘 P는 포탄(projectile)을 앞으로 밀지만, 뉴턴(Newton)의 제3법칙(Newton's third law)에 따라 포탄도 같은 크기의 힘 P로 대포를 뒤로 민다. 그리고 수평 방향으로는 대포의 반동(recoil)을 막는 것이 아무것도 없다. 따라서 포탄이 포신 안에 있는 동안 지면에 대해 거리 l을 이동하는 것이 **아니라, 대포에 대해** l을 이동한다. 두 물체 모두 가속도가 일정하므로, 상대 운동(relative motion)을 다루는 것이 가장 깔끔한 방법이다.

풀이

모형

포탄과 대포를 같은 수평선 위를 움직이는 질점(particle)으로 보고, 바닥은 매끄럽다고(대포가 "자유롭게 미끄러진다") 하며, 포신을 따라 포탄과 포신 사이에 작용하는 힘은 상수 P라고 한다. 연직 방향으로는 무게가 수직항력(normal reaction)(대포에 작용하는 바닥의 힘, 포탄에 작용하는 포신의 힘)과 평형을 이루므로 수평 운동에는 아무 영향을 주지 않는다. 발사 방향을 양의 방향으로 잡는다.



두 가속도

포탄이 포신 안에 있는 동안 포탄에 작용하는 수평 방향의 힘은 앞쪽으로 향하는 P뿐이고, 대포에 작용하는 수평 방향의 힘은 뒤쪽으로 향하는 반작용 P뿐이다(뉴턴의 제3법칙; 바닥

은 매끄럽다). 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)에 따라 가속도는

$$a_{\text{포탄}} = \frac{P}{m}, \qquad a_{\text{대포}} = -\frac{P}{M}.$$

이다. 두 가속도는 모두 일정하고, 두 물체는 모두 정지 상태에서 출발한다.

? **생각해 보기** 포탄은 어떤 거리에 걸쳐 가속되는가? l인가, 아니면 다른 값인가?

포신의 길이는 l이지만 포신 자체가 뒤로 움직인다. 포탄은 **대포에 대한** 변위가 l에 이를 때 포신을 떠난다. 대포에 대해 포탄은 정지 상태에서 출발하여 일정한 가속도

$$a_{\text{rel}} = \frac{P}{m} - \left(-\frac{P}{M}\right) = \frac{P}{m} + \frac{P}{M} = \frac{P(M+m)}{mM}$$

로 움직인다.

포신 안에 있는 시간

상대 운동에 $s = \frac{1}{2}at^2$을 적용하면, 포탄이 포신을 빠져나오는 시각 T는

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(M+m)}{mM} T^2, \qquad \text{따라서} \qquad T^2 = \frac{2mMl}{P(M+m)}.$$

을 만족한다.

발사 속력

지면에 대해 포탄은 정지 상태에서 일정한 가속도 P/m으로 움직이므로, 시각 T에서의 속력 v는

$$\begin{aligned} v^2 = \left(\frac{P}{m}T\right)^2 &= \frac{P^2}{m^2} \cdot \frac{2mMl}{P(M+m)} \\ &= \frac{2PMl}{m(M+m)}. \end{aligned}$$

을 만족한다. $v > 0$이므로

$$v = \sqrt{\frac{2PMl}{m(M+m)}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

다른 방법: 에너지와 운동량

같은 답을 보존 법칙(conservation law)으로도 얻을 수 있다. 수평 방향의 외력이 없으므로 수평 방향의 운동량(momentum)이 보존된다. 포탄이 빠져나오는 순간 대포가 뒤쪽으로 속력 V를 가진다면 $mv = MV$이다. 포탄이 포신 안에 있는 동안 포탄이 앞으로 x, 대포

가 뒤로 X만큼 움직인다면 $x + X = l$이다. 포탄에 작용하는 힘이 하는 일(work)은 Px이고, 대포에 작용하는 반작용은 대포가 움직이는 방향과 같은 쪽을 향하므로 일 PX를 한다. 두 힘이 한 일을 합하면 $P(x + X) = Pl$이다. 따라서

$$Pl = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\,\frac{M+m}{M},$$

이고, 이로부터 다시 $v^2 = \dfrac{2PMl}{m(M+m)}$을 얻는다.

검산

- 무거운 대포: $M \to \infty$이면 인수 $M/(M+m) \to 1$이고 $v \to \sqrt{2Pl/m}$이다. 이는 고정된 대포에서의 속력이다(일 Pl이 모두 포탄에 전달된다). 반동하는 대포에서는 에너지의 일부가 반동에 쓰이므로, 마땅히 속력이 항상 조금 더 작다.
- 단위: Pl은 에너지이고 Pl/m의 단위는 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$이므로 v는 속력이다.
- 수치: $m = 0.1$, $M = 0.9$, $P = 9$, $l = 0.5$(SI 단위)이면 공식은 $v = 9\ \mathrm{m\,s^{-1}}$을 주고, 대포는 $1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$로 반동한다. 이때 운동량은 $0.1 \times 9 = 0.9 \times 1$이고 운동 에너지는 $4.05 + 0.45 = 4.5 = Pl$이다. 두 물체의 운동을 단계별로 수치 시뮬레이션하고 두 물체 사이의 간격이 l에 이를 때 멈추면, 여러 무작위 값의 m, M, P, l에 대해 결과가 공식과 일치한다.

흔한 실수

- $v^2 = 2(P/m)l$을 쓰는 것. 이는 l을 지면에 대한 포탄의 이동 거리로 보고 반동을 무시한 것이다.
- 뉴턴의 제3법칙을 잊고 대포를 정지한 채로 두는 것. 대포는 자유롭게 미끄러지므로 반드시 반동한다.
- 에너지 방법에서 한 일을 P와 포탄의 지면에 대한 변위의 곱으로만 잡는 것. 대포에 작용하는 반작용도 일을 한다.

STEP 너머

이것은 이체 문제(two-body problem)이고, 상대 가속도 $P(M+m)/(mM)$은 P를 **환산 질량**(reduced mass) $\mu = mM/(m+M)$으로 나눈 값이다. 서로에게만 상호작용하는 두 물체는, 서로에 대해서는 질량이 μ인 하나의 물체처럼 움직인다. 같은 아이디어로 행성의 궤도, 쌍성, 충돌하는 입자를 다룰 수 있으며, 이는 로켓 문제와 반동 문제의 바탕이 되기도 한

다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 여기서 다룬 환산 질량과 운동량의 아이디어를 모두 자세히 전개한다.

풀이

STEP I 1992, 문제 11

역학 • 탄성 끈의 평형

> **STEP I 1992, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q11

핵심 아이디어

각 입자는 평형(equilibrium) 상태에 있으므로, 입자 바로 위의 장력(tension)은 바로 아래의 장력보다 mg만큼 크다. 이것으로 세 장력이 서로 연결되고, 훅의 법칙(Hooke's law)은 장력을 늘어난 길이(extension)로 바꾸어 준다. 추가로 필요한 사실은 기하적인 것 하나뿐이다. 늘어난 세 줄의 길이를 더하면 방의 높이가 되어야 한다. 높이를 알고 나면, "$CD = a$"는 가장 아래 줄에 장력이 걸리지 않는다는 말일 뿐이다.

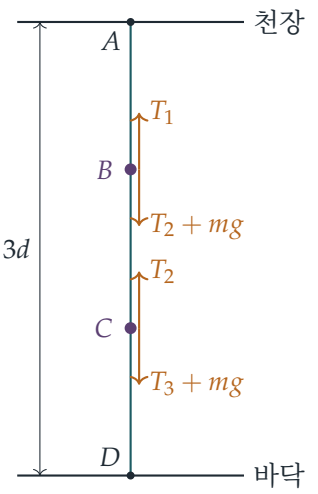
풀이

모형

줄은 가볍고 탄성(elastic)이 있으며, 늘어날 때 훅의 법칙(장력 $= \lambda \times$ 늘어난 길이$/a$)을 따른다. 입자들은 정지해 있다. AB, BC, CD의 장력을 T_1, T_2, T_3이라 하고 늘어난 길이를 x_1, x_2, x_3이라 하면 $T_i = \lambda x_i / a$이다. 무게 mg 하나만으로 생기는 늘어난 길이에 이름을 붙여 두면 편리하다.

$$e = \frac{mga}{\lambda}.$$

먼저 세 줄이 모두 팽팽하다(taut)고 가정하고, 이것이 언제 성립하는지는 나중에 확인한다. 바닥으로부터의 높이를 y_B, y_C로 잰다.



B와 C의 높이

각 입자에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면(위의 줄은 위로 당기고, 아래의 줄과 무게는 아래로 당긴다) 다음을 얻는다.

$$B: \quad T_1 = T_2 + mg, \qquad C: \quad T_2 = T_3 + mg.$$

λ/a로 나누면 이 식들은 늘어난 길이에 관한 식이 된다.

$$x_1 = x_2 + e, \qquad x_2 = x_3 + e, \qquad \text{따라서} \qquad x_2 = x_3 + e, \quad x_1 = x_3 + 2e.$$

세 줄의 전체 길이는 방의 높이와 같다.

$$3a + x_1 + x_2 + x_3 = 3d \quad \Longrightarrow \quad 3x_3 + 3e = 3d - 3a \quad \Longrightarrow \quad x_3 = d - a - e.$$

그러면 $x_2 = d - a$이고 $x_1 = d - a + e$이다. 높이는 아래쪽 줄들의 길이로부터 얻어진다.

$$y_C = CD = a + x_3 = d - e = d - \frac{mga}{\lambda},$$
$$y_B = y_C + BC = (d - e) + (a + d - a) = 2d - \frac{mga}{\lambda}.$$

AB로 검산하면 $3d - y_B = d + e = a + x_1$이 되어 예상대로이다.

? 생각해 보기 이 답들은 실제로 언제 유효한가?

모든 줄이 팽팽하다고 가정했으므로, 모든 늘어난 길이가 0 이상이어야 한다. 가장 까다로운 조건은 가장 아래 줄에 대한 것으로, $x_3 \geq 0$, 즉

$$\frac{mga}{\lambda} \leq d - a.$$

이다. (그러면 $x_2 = d - a \geq 0$이고 $x_1 > 0$은 저절로 성립한다.) CD가 가장 먼저 느슨해지는(slack) 것은 자연스럽다. 이 줄은 아무것도 받치고 있지 않으며, 방에 의해 늘어나 있다는 사실만이 이 줄을 팽팽하게 유지한다. $mga/\lambda > d - a$이면 줄 CD는 느슨해지고, 계는 A에 매달린 두 입자일 뿐이다. 이때 $T_2 = mg$, $T_1 = 2mg$이므로 $AB = a + 2e$, $BC = a + e$이고, 따라서 이 위치가 여전히 바닥보다 위에 있다면 $y_B = 3d - a - 2e$, $y_C = 3d - 2a - 3e$이다. 문제에서 의도한 것은 모든 줄이 팽팽한 주된 경우이다.

$CD = a$는 언제 가능한가?

줄 CD가 정확히 자연 길이(natural length)를 갖는 것은 장력 없이 막 팽팽해진 때, 즉 $T_3 = 0$, 다시 말해 $x_3 = 0$일 때이다. 이는 위의 두 경우의 경계이며, 어느 쪽 공식을 써도 다음을 얻는다.

$$y_C = a \iff d - \frac{mga}{\lambda} = a \iff m = \frac{\lambda(d-a)}{ga}.$$

물리적으로는, 이때 C에 있는 입자는 전적으로 BC에 의해 지탱되며 $T_2 = mg$, $T_1 = 2mg$이다.

알맞은 질량이 존재하는 것은 정확히 이 m의 값이 양수일 때이고, 이를 위해서는 $d > a$이어야 한다. 역으로 $d \leq a$이면 어떤 양수 m도 조건을 만족하지 않는다. 모든 줄이 팽팽하다면 $x_2 = d - a \geq 0$이면서 $x_3 = d - a - e < 0$이어야 하는데 이는 불가능하므로, CD는 느슨하고 C는 높이 $3d - 2a - 3e < 3a - 2a = a$에 매달리거나(또는 바닥에 놓이고), 따라서 $CD < a$이다. 그러므로 구하는 값의 집합은

$$\{\, d : d > a \,\}.$$

이다. 이러한 d에 대해 $y_C = a$, $y_B = d + a$, $AB = 2d - a$를 얻는다.

검산

- 단위: mga/λ는 힘 곱하기 길이를 힘으로 나눈 것이므로 길이이며, d에서 빼려면 당연히 그래야 한다.
- $m = 0$이면 세 줄이 늘어남을 똑같이 나누어 가진다. 각 줄의 길이가 d가 되어 C는 d에, B는 $2d$에 놓인다. 질량을 더하면 두 입자가 같은 양 e만큼 내려가는데, BC의 늘어난 길이가 $d - a$로 유지되기 때문이다.
- 수치적으로, a, λ, d, m을 무작위로 250번 골라 $0 \leq y_C \leq y_B \leq 3d$에서 위치 에너지(potential energy)(중력에 의한 것과 탄성에 의한 것의 합, 느슨한 줄도 허용)를 최소화했더니, 팽팽한 경우와 CD가 느슨한 경우 모두에서 높이가 10^{-14} 이내로 재현되었다. $a = 1$, $\lambda = 10$, $d = 2$, $m = \lambda(d-a)/(ga) \approx 1.020$으로 두면 $CD = 1.000000$, $y_B = 3.000000$을 얻었고, $d \leq a$일 때는 어떤 양수 m도 $CD = a$를 주지 않았다.

흔한 실수

- 장력을 $\lambda\times$ 늘어난 길이$/a$ 대신 $\lambda\times$ (늘어난 상태의 전체 길이) $/a$로 쓰는 것.
- 전체 길이가 방에 의해 고정된다는 것을 잊는 것. $\sum(a+x_i)=3d$가 없으면 평형 방정식만으로는 늘어난 길이가 결정되지 않는다.
- 모든 줄에 반드시 장력이 걸린다고 가정하는 것. 줄은 느슨해질 수 있으며, $CD=a$는 정확히 느슨해지는 경계에서 일어난다.

STEP 너머

이것은 작은 정역학적 부정정(statically indeterminate) 구조이다. 입자들의 평형만으로는 장력이 정해지지 않고, 적합 조건(compatibility condition)(길이의 합이 맞아야 한다는 조건)이 추가로 필요했다. 같은 아이디어를 행렬(matrix) 형태로 쓰면, 공학자들이 용수철과 막대로 이루어진 골조를 해석하는 방법이 된다. 또 다른 접근은 전체 위치 에너지를 최소화하는 것으로, 수치 검산이 바로 이 방식으로 이루어졌다. 이러한 변분(variational) 관점은 이후의 역학에서 핵심적이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 용수철, 평형, 위치 에너지를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1992, 문제 12

역학 • 마찰이 있는 정역학

> **STEP I 1992, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q12

핵심 아이디어

두 사다리는 가볍기 때문에, 그중 하나에 대해 쓸모 있는 식을 얻는 유일한 방법은 경첩(hinge) A에 대한 모멘트(moment)를 구하는 것이다. 그렇게 하면 다른 사다리가 가하는 미지의 힘과 A에 걸린 짐의 힘이 식에서 사라진다. 두 발은 서로 벌어지며 미끄러지려 하고, 이 바깥쪽으로 미는 힘은 일부는 마찰력(friction)이, 일부는 막대가 버틴다. 무너지는 순간에는 마찰력이 낼 수 있는 최대한을 내고 있으므로, 나머지는 막대가 감당해야 한다.

풀이

모형

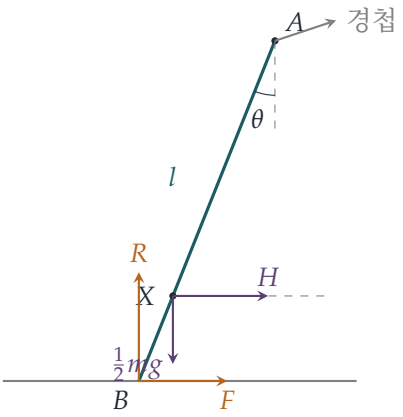
사다리는 가벼운 막대(light rod)이고 A에서 매끄러운 경첩으로 연결되어 있다. 나무 막대 XY는 질량이 m인 균일한(uniform) 막대이고 X와 Y에서 핀 접합(pin-jointed)되어 있다. 질량 M은 A에 놓인 질점(particle)이다. $t = \tan\theta$라 하자. 전체 구조의 좌우 대칭(symmetry)에 의해 두 발에는 같은 크기의 수직항력(normal reaction) R가 작용하고, 접사다리 전체에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$2R = (M+m)g \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{1}{2}(M+m)g.$$

사다리가 바깥쪽으로 기울어져 있으므로 두 발은 서로 벌어지며 미끄러지려 하고, 따라서 각 발에서의 마찰력 F는 안쪽으로 작용한다.

막대가 가하는 힘. 막대는 수평이고 자체 무게가 있으므로, 양 끝에 작용하는 힘은 막대 방향이 아니다. 대칭에 의해 각 끝이 무게의 절반씩을 지탱하므로, 사다리는 X에서 막대에 위쪽으로 $\frac{1}{2}mg$의 힘을 가하고, 이와 함께 바깥쪽으로 수평 방향의 힘 H(장력(tension))를 가

한다. 뉴턴 제3법칙(Newton's third law)에 의해, 막대는 X에서 사다리 AB를 수평 방향으로 안쪽으로 H의 힘으로, 연직 방향으로 아래쪽으로 $\frac{1}{2}mg$의 힘으로 당긴다.



사다리 AB에 대한 A 중심의 모멘트

A를 기준으로 재면, 발 B는 가로로 $l\sin\theta$, 아래로 $l\cos\theta$만큼 떨어져 있고, X는 가로로 $\frac{3}{4}l\sin\theta$, 아래로 $\frac{3}{4}l\cos\theta$만큼 떨어져 있다. A에 대한 모멘트를 구하면(A에 작용하는 힘들은 모두 모멘트가 0이다):

- R는 사다리를 한쪽 방향으로 돌리며, 그 모멘트는 $Rl\sin\theta$이다.
- F와 H(둘 다 안쪽 방향이고 A보다 아래에서 작용)는 사다리를 반대 방향으로 돌리며, 모멘트는 각각 $Fl\cos\theta$와 $H\cdot\frac{3}{4}l\cos\theta$이다.
- X에서 아래쪽으로 작용하는 $\frac{1}{2}mg$는 R와 같은 쪽에 있지만 방향이 반대이므로, 모멘트 $\frac{1}{2}mg\cdot\frac{3}{4}l\sin\theta$로 R에 맞선다.

따라서

$$Fl\cos\theta+\tfrac{3}{4}Hl\cos\theta=Rl\sin\theta-\tfrac{3}{8}mgl\sin\theta,$$

이고, 양변을 $l\cos\theta$로 나누고 R를 대입하면

$$F+\tfrac{3}{4}H=t\left(\tfrac{1}{2}(M+m)g-\tfrac{3}{8}mg\right)=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g. \qquad (*)$$

생각해 보기 마찰력과 막대가 모두 발을 안쪽으로 붙잡고 있다. F의 값으로 무엇을 써야 할까?

식 $(*)$는 마찰력과 장력이 정해진 양의 일을 나누어 맡는다는 뜻이다. 마찰력이 더 많이 맡을수록 막대는 덜 맡아도 된다. 따라서 허용되는 어떤 마찰력($F\le\mu R$)에 대해 $H\le T$가 되기만 하면 접사다리는 버티고, 가능한 가장 작은 장력은 가장 큰 마찰력 $F=\mu R$에서 얻어진

다. 이것이 문제에서 가정해도 된다고 한, 무너지는 순간의 한계 상태(limiting state)이다. $F = \mu R = \frac{1}{2}\mu(M+m)g$를 $(*)$에 대입하면

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{4}H &= t\left(\tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{8}m\right)g - \tfrac{1}{2}\mu(M+m)g \\ &= \tfrac{1}{2}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{8}(t-4\mu)mg,\end{aligned}$$

이므로

$$H = \tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg.$$

$t > \mu$이므로 H는 M에 대해 증가한다. 막대가 없으면 마찰력만으로는 짐조차 지탱할 수 없다($m = 0$이면 $t \le \mu$가 필요하다).

안전한 최대 질량

막대는 $H \le T$이면 견딘다. 즉

$$\tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg \le T - \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg,$$

이고, 양수인 $\frac{2}{3}(t-\mu)g$로 양변을 나누면

$$\boxed{M \le \frac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}}$$

따라서 A에 안전하게 놓을 수 있는 최대 질량은 $\dfrac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}$이다.

자체 무게로 인한 파손

A에 아무것도 없을 때($M = 0$) 필요한 장력은 $H = \frac{1}{6}(t-4\mu)mg$이므로, 막대가 부러질 조건은

$$\tfrac{1}{6}(\tan\theta - 4\mu)mg > T \iff \tan\theta > \frac{6T}{mg} + 4\mu,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. 이 경우 위에서 구한 M의 상한은 음수가 된다. 즉 접사다리가 자기 자신조차 지탱하지 못하므로, 어떤 짐도 안전하지 않다.

검산

- T가 매우 크면 안전한 질량도 매우 크다. 또 $\tan\theta$가 μ를 아주 조금만 넘으면 분모가 매우 작아져서, 역시 거의 어떤 짐이든 안전하다. 마찰력만으로도 거의 충분하기 때문이다.
- 전체 정역학 문제(두 사다리, 막대, A의 핀을 모두 포함하고, 미지의 힘 성분 12개와 두 발에서의 한계 마찰력을 고려한 것)를 무작위 배치 2000개에 대해 수치적으로 풀었더니, 장력 공식이 약 10^{-12}의 정밀도로 재현되었다. 예를 들어 $\theta = 45^\circ$, $\mu = 0.2$, $m = 2\,\mathrm{kg}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$일 때, $M = 0$에서 막대의 장력은 $\frac{1}{6}(0.2)(19.6) \approx 0.653\,\mathrm{N}$이다.

흔한 실수

- 막대를 가벼운 연결재로 취급해서 X에서의 힘이 순전히 XY 방향이라고 보는 것. 막대에는 무게가 있으므로 각 끝은 연직 방향으로 $\frac{1}{2}mg$도 지탱하며, $\frac{1}{8}m$과 4μ는 바로 여기서 나온다.
- 발에서의 마찰력을 바깥쪽으로 두는 것. $\tan\theta > \mu$이므로 발은 벌어지려 하고, 따라서 마찰력은 안쪽을 향하며 막대를 돕는다.

STEP 너머

이처럼 평형(equilibrium) 방정식만으로는 모든 힘이 정해지지 않는 구조물(여기서는 마찰력과 장력이 서로 주고받을 수 있다)을 **정역학적 부정정**(statically indeterminate) 구조라고 한다. 공학자들은 이런 경우를 추가 정보로 해결한다. 여기서처럼 한계 조건을 쓰거나, 부재의 탄성(elasticity)을 이용하는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 힘, 토크(torque), 평형에 대한 이해를 깊게 하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1992, 문제 13

역학 • 탈출 속력과 지름 방향 낙하

STEP I 1992, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

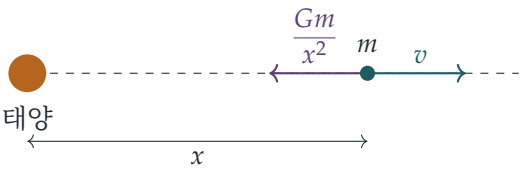
step.maths.org/questions/92-s1-q13

핵심 아이디어

힘이 거리 x에만 의존하므로, 운동 방정식(equation of motion)을 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 꼴로 쓰는 것이 자연스러운 도구이다. 이렇게 쓰면 곧바로 적분되어 속력과 거리를 잇는 에너지 방정식(energy equation)이 나온다. 첫 번째 부분에서는 v^2이 결코 음수가 될 수 없다는 사실 때문에 이 방정식이 x의 상한이 된다. 두 번째 부분에서는 에너지 방정식이 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$를 x의 함수로 주고, 변수 분리(separating the variables)를 하면 시간이 구해진다.

풀이

태양은 고정되어 있고 혜성은 질점(particle)이며, 주어진 인력 외에는 아무 힘도 작용하지 않는다고 모형화한다. 인력은 혜성과 태양을 잇는 직선을 따라 작용하므로, 태양으로부터 곧장 멀어지고 있는(또는 정지해 있는) 혜성은 계속 그 직선을 따라 움직인다. 따라서 x는 한 직선 위의 좌표이고, $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$로 두며 v가 양수이면 태양에서 멀어지는 방향을 뜻하도록 한다.



에너지 방정식

힘이 태양 쪽(x가 감소하는 방향)을 향하므로, 직선을 따라 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)을 적용하면

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm}{x^2}.$$

가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰고 m을 약분하면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{G}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} + C$$

이다. 여기서 C는 어떤 상수이다. 이 식은 혜성이 어느 쪽으로 움직이든 운동 내내 성립한다. (이것은 단위 질량당 에너지 보존(conservation of energy)이다. 운동 에너지(kinetic energy) $\frac{1}{2}v^2$과 퍼텐셜 에너지(potential energy) $-G/x$의 합이 보존된다.)

x가 한없이 커질 조건

주어진 순간에 $x = h, v = V$이므로 $C = \frac{1}{2}V^2 - \frac{G}{h}$이고, 그 이후의 모든 시각에서

$$v^2 = V^2 - \frac{2G}{h} + \frac{2G}{x}.$$

대우(contrapositive)를 증명한다. 즉 $V^2 < 2G/h$이면 x가 유계임을 보인다.

> **생각해 보기** 혜성은 원리적으로 나중에 온갖 방식으로 움직일 수 있다. 방정식 하나로 어떻게 모든 시각의 x를 제한할 수 있을까?

혜성이 무엇을 하든 매 순간 $v^2 \geq 0$이기 때문이다. $V^2 < 2G/h$라 하고 $k = \frac{2G}{h} - V^2 > 0$으로 두자. 그러면 에너지 방정식에 의해

$$\frac{2G}{x} = v^2 + k \;\geq\; k, \qquad \text{따라서} \qquad x \leq \frac{2G}{k} = \frac{2Gh}{2G - hV^2}$$

가 이후의 모든 시각에서 성립한다($x > 0, k > 0$이므로 양변에 곱해도 된다). 그러므로 x는 고정된 값 $2Gh/(2G - hV^2)$을 결코 넘을 수 없다. 혜성은 $v = 0$이 되는 그 거리까지 올라간 뒤 다시 떨어진다. 따라서 $V^2 \geq 2G/h$가 아니면 x는 한없이 커질 수 없으며, 이것이 보이려던 것이다.

(역(converse)도 참이다. $V^2 \geq 2G/h$이면 혜성이 바깥쪽으로 움직이는 동안 $v^2 \geq 2G/x > 0$이므로 혜성은 결코 멈추지 않는다. 또 $x \leq X$일 때마다 $v^2 \geq 2G/x \geq 2G/X$이므로, 어떤 거리 X 아래에 영원히 머물 수도 없다. 이것이 탈출 속도(escape speed)이다.)

태양으로 떨어지는 데 걸리는 시간

이제 혜성이 아주 먼 거리 D에서 정지 상태로 출발한다. 정지 상태에서 놓이면 혜성은 태양을 향해 곧장 떨어진다. $x = D$에서 $v = 0$이라는 조건을 에너지 방정식에 넣으면

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} - \frac{G}{D}.$$

생각해 보기 "아주 먼 거리"는 상수에 대해 무엇을 뜻할까?

$D \to \infty$로 보낸다는 뜻이다. 그러면 $G/D \to 0$이 되어 상수는 0이다. 즉 혜성의 총에너지는 0이다. (크지만 유한한 D를 쓰면 혜성이 조금 더 느려지고 시간이 조금 더 길어질 뿐이며, 그 차이는 $D \to \infty$일 때 0으로 수렴한다.) 따라서 거리 x에서 혜성의 속력은 $\sqrt{2G/x}$이고, x가 감소하므로

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2G}{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2G}\,\mathrm{d}t.$$

$x = h$에서 $x = 0$까지 가는 데 걸리는 시간을 T라 하자. 적분하면

$$\sqrt{2G}\,T = \int_0^h \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}h^{3/2},$$

이므로

$$T = \frac{2h^{3/2}}{3\sqrt{2G}} = \frac{h}{3}\sqrt{\frac{2h}{G}}.$$

(피적분함수 $\sqrt{x}$는 $x = 0$에서 아무 문제 없이 잘 정의되므로, 속력이 한없이 커지더라도 혜성은 실제로 유한한 시간 안에 태양에 도달한다.)

검산

- 단위: 힘 Gm/x^2은 질량 곱하기 가속도이므로 G의 단위는 $\mathrm{m^3\,s^{-2}}$이다. 그러면 V^2과 $2G/h$는 둘 다 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ 단위이고, $h^{3/2}/\sqrt{G}$는 초 단위이다.
- $x = h$에서 혜성의 속력은 $\sqrt{2G/h}$이다. 그 속력을 계속 유지한다면 $h/\sqrt{2G/h} = \frac{h}{2}\sqrt{2h/G}$만큼 걸릴 것이고, 이는 T보다 길다. 혜성은 점점 빨라지므로 당연히 그래야 한다. 실제로 T는 이 값의 3분의 2이다.
- 수치 검산, $G = h = 1$일 때: $x = 1$, $v = \sqrt{1.5}$에서 운동을 단계적으로 진행시키면 혜성은 $x = 4.000$에서 방향을 바꾸며, 이는 $2Gh/(2G - hV^2) = 4$의 예측과 같다. $x = 1$, $v = -\sqrt{2}$에서 출발하면 0.4714 뒤에 태양에 도달하며, 이는 $T = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.47140$과 일치한다. 무한대 대신 $D = 10^6$에서 정지 상태로 출발해도 T는 소수점 일곱째 자리에서만 달라진다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2G/x}$의 음의 부호를 빠뜨려 음수 시간을 얻거나, 이유를 말하지 않고 0부터 h까지 적분하는 것.
- 혜성이 느려진다는 것만 보이는 것: 멀어지는 혜성은 탈출하는 것이라도 모두 느려진다. 핵심은 $V^2 < 2G/h$일 때 어떤 거리를 넘어서면 v^2이 음수가 되어 버린다는 점이다.

STEP 너머

양 $\frac{1}{2}v^2 - G/x$는 뉴턴 중력장에서의 단위 질량당 에너지이며, 그 부호가 속박 궤도(bound orbit, 타원(ellipse))인지 탈출(포물선(parabola)과 쌍곡선(hyperbola))인지를 결정한다. 마지막 부분의 에너지가 0인 낙하는 포물선 궤도의 퇴화된 직선 경우이며, $T \propto h^{3/2}$는 케플러(Kepler) 제3법칙의 친척이다. 대학 1학년 궤도 역학 강의에서는 이 모든 것을 같은 에너지 방정식과 각운동량(angular momentum) 방정식에서 전개한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 중심력(central force)과 궤도를 철저히 다룬다.

풀이

STEP I 1992, 문제 14

확률과 통계 • 통계적 주장의 해석

STEP I 1992, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q14

이 문제는 *Beyond STEP*의 13.1 절 **신문 머리기사 읽기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch13/headlines.html

핵심 아이디어

모든 헤드라인은 숫자 하나를 가지고 곧바로 결론으로 비약한다. 각 헤드라인에 대해 두 가지를 물어야 한다. 첫째, 같은 것끼리 비교하고 있는가? 즉 같은 대상을 같은 방식으로 측정하고, 위험에 노출된 정도로 보정했는가? 둘째, 그 차이가 단지 우연일 수는 없는가? 둘째 질문에 대해서는 드물고 서로 독립인 사건의 횟수를 나타내는 푸아송 모형(Poisson model)이 자연스러운 기준이 되며, 이 모형의 표준편차(standard deviation)는 평균의 제곱근이다. 이 모형이 언제 들어맞고 언제 들어맞지 않는지 아는 것이 (ii)부터 (iv)까지의 핵심이다.

풀이

이 풀이 전체에서 "평균적으로"는 1974–1989년의 연평균, 즉 한 해에 보행자 사망 1080명, 항공 사망 180명을 뜻한다.

소문항 (i)

"여섯 배"라는 말은 비 $1080/180 = 6$에서 나왔지만, 이것은 위험이 아니라 단순 총계를 비교한 것이다. 위험이란 노출 단위당 사망자 수, 즉 이동 한 번당, 한 시간당, 또는 이동 거리 1킬로미터당 사망자 수이다. 폴다비아의 거의 모든 사람은 매일 도로 근처를 걷지만, 비행기를 타는 사람은 상대적으로 적고 그마저도 가끔이다. 안전성을 비교하려면 다음과 같은

것이 필요하다.

$$\frac{\text{보행자 사망자 수}}{\text{총 보행 시간(또는 거리)}} \quad \text{대} \quad \frac{\text{항공 사망자 수}}{\text{총 비행 시간(또는 거리)}},$$

그런데 헤드라인은 두 분모 중 어느 것도 알려 주지 않는다. 어떤 척도를 쓰느냐에 따라 결론이 반대로 나올 수도 있다. 킬로미터당으로 보면 비행은 매우 안전해 보이지만, 시간당이나 이동 한 번당으로 보면 그렇지 않을 수도 있다.

다른 문제도 있다. 여기서 "걷기"는 사실 걸어가다가 차량에 치이는 것을 뜻하며, 이 수치는 한적한 곳의 보행자에 대해서는 아무것도 말해 주지 않는다. 항공 사망자에는 승객뿐 아니라 승무원도 포함된다. 그리고 어떤 기간의 평균으로 1991년의 안전성에 대해 무언가를 "증명"할 수는 없다. 기껏해야 1974–1989년에 대한 증거일 뿐이다.

소문항 (ii)

얼핏 보면 125는 평균 180보다 한참 낮다. 이 감소가 우연 이상의 것인가?

사망이 한 번에 한 명씩 서로 독립적으로 일어난다면 평균이 180인 푸아송 모형이 적절할 것이다. 그 표준편차는 $\sqrt{180} \approx 13.4$이므로 125는 평균보다 표준편차의 약 4.1배만큼 낮고, 우연히 일어날 가능성은 매우 작다($P(X \leq 125) \approx 10^{-5}$).

그러나 항공 사망은 한 번에 한 명씩 일어나지 않는다. 사망은 무리 지어 일어난다. 추락 사고 한 번으로 수십 명이나 수백 명이 목숨을 잃을 수 있다. 자연스러운 모형은 **치명적 추락 사고**의 횟수가 푸아송 분포를 따르고, 각 사고의 사망자 수는 확률변수라는 것이다. 이렇게 하면 변동성이 크게 늘어난다. 예를 들어 치명적 사고가 한 해 평균 6번 일어나고 한 번에 30명씩 사망한다고 하자. 그러면 연간 사망자 수는 $N \sim \text{Po}(6)$일 때 $30N$이고, 그 표준편차는 $30\sqrt{6} \approx 73$이며,

$$P(\text{사망자 수} \leq 125) = P(N \leq 4) \approx 0.29.$$

이 (예시용) 수치에 따르면 사망자가 125명인 해는 전혀 이상하지 않다. 평소보다 사고가 한두 번만 적으면 된다. 사고마다 규모까지 달라지게 하면 퍼짐은 더 커진다.

따라서 한 해의 수치만으로는 알 수 있는 것이 거의 없다. 1990년에 비행이 얼마나 이루어졌는지(항공 교통량이 적었다면 어차피 사망자도 적을 것으로 예상된다), 그리고 실제 추세가 있는지 보기 위해 여러 해의 수치도 알아야 한다. 헤드라인의 주장은 뒷받침되지 않는다.

소문항 (iii)

여기에는 별개의 잘못이 두 가지 있다.

하루로는 증가를 보여 줄 수 없다. "증가하고 있다"는 것은 시간에 따른 추세에 대한 주장인데, 하루의 수치로는 아무런 비교도 할 수 없다. 오랜 기간에 걸친 일별(또는 연별) 수치가 필요하다.

일곱 명은 특이한 수치조차 아니다. 우리가 가진 도로 관련 수치는 보행자에 대한 것뿐이다. 한 해에 1080명, 즉

$$\lambda = \frac{1080}{365} \approx 2.96 \text{ 명/일}.$$

보행자 사망은 푸아송 분포로 꽤 잘 모형화된다. 드물고, 대부분 사고 한 건당 한 명이며, 대략 서로 독립이기 때문이다. 어느 하루에 사망한 보행자 수를 $X \sim \mathrm{Po}(2.96)$라 하자. 그러면

$$P(X \geq 7) = 1 - \sum_{k=0}^{6} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \approx 0.031,$$

이므로 보행자가 7명 이상 사망하는 날은 한 해에 약 $365 \times 0.031 \approx 11$일 있을 것으로 예상된다. 게다가 헤드라인은 "사망한 사람들"이라고 했으므로 운전자, 승객, 자전거 이용자도 포함된다. 하루 전체 도로 사망률은 2.96보다 높을 수밖에 없고, 그러면 7은 더욱 대수롭지 않은 수치가 된다.

> ? **생각해 보기** 평균의 두 배가 넘는 사망자가 나온 날이라면 걱정할 만하지 않은가?

작은 수에서는 그렇지 않다. 평균이 약 3일 때 푸아송 표준편차는 $\sqrt{3} \approx 1.7$로 평균에 비해 크므로, 날마다 비율상 큰 변동이 있는 것이 정상이다. 최악의 날을 골라내는 것은 선택 효과이기도 하다. 한 해에는 365일이 있으니 신문은 언제든 나쁜 날 하나쯤은 찾아낼 수 있다. 요일도 중요하다. 교통량과 걸어 다니는 사람 수는 요일과 계절에 따라 달라지기 때문이다. 비율이 일정한 푸아송 모형은 대략적인 일차 근사일 뿐이다.

소문항 (iv)

이것은 실제로 따져 볼 만한 근거가 있는 헤드라인이다. 먼저 통계를 보고, 그다음 해석을 보자.

1350은 우연 이상인가? 여기서는 (iii)에서 말한 이유로 푸아송 모형이 좋은 출발점이다. 평균이 1080이면 표준편차는 $\sqrt{1080} \approx 32.9$이고,

$$\frac{1350 - 1080}{32.9} \approx 8.2.$$

평균보다 표준편차의 8배만큼 높은 값이 나올 확률은 이 모형에서 10^{-15} 정도이다. 실제 연도별 퍼짐이 (예컨대 혹독한 겨울 때문에) 푸아송 값의 두세 배라 하더라도, 1350은 꾸준한 비율 1080에 비하면 여전히 매우 이례적이다. 그러니 무언가가 바뀌었을 가능성이 매우 높다. 문제는 그것이 무엇이냐이다.

무엇과 비교하는가? 헤드라인은 1990년을 1989년이 아니라 16년 평균과 비교한다. 보행자 사망이 이 기간 동안 꾸준히 늘어 왔다면 평균 1080은 기간의 중간(1981–82년 무렵)을 나타낼 것이고, 1990년은 그보다 훨씬 높아야 한다. 예를 들어 1974년의 약 855명에서 시작해 해마다 30명씩 꾸준히 늘었다면 평균은 1080이고 1990년에는 약 1335명이 된다. 이 경우

1990년은 전혀 "증가"가 아니라 오랜 추세가 이어진 것일 뿐이다. 그 추세는 헤드라인감일 수 있지만, 다른 헤드라인이어야 한다. 두 이야기를 구별하려면 연도별 수치가 필요하다.

노출이 달라졌는가? 인구가 늘거나, 차량이 늘거나, 걷는 일이 늘면 걷기가 이동 한 번당 더 위험해지지 않아도 사망자는 늘어난다. 공정한 비교는 인구 100 000명당 또는 보행 거리 1킬로미터당 사망자 수와 같은 비율로 해야 한다.

측정 방식이 달라졌는가? 사망을 기록하거나 분류하는 방식이 바뀌면 겉보기에 급증한 것처럼 보일 수 있다. 사고 후 얼마 뒤까지의 사망을 도로 사망으로 셀지, 누구를 보행자로 셀지가 바뀌거나, 보고가 더 충실해지는 경우가 그 예이다. 이러한 변화가 없었는지 확인해야 한다.

단어가 맞는가? "사상자"는 보통 사망자 **또는 부상자**를 뜻한다. 인용된 수치는 사망자만의 것이므로 헤드라인은 수치가 보여 주는 것을 과장한다. 부상자는 훨씬 많고, 전혀 다른 양상을 보일 수도 있다.

요약하면, 1350으로의 증가는 일정한 비율 1080 주위의 푸아송 변동으로 설명하기에는 너무 크다. 그러나 이를 "우려스럽다"고 하기 전에 최근의 연간 수치(갑작스러운 증가와 장기 추세를 구별하기 위해)와 인구 및 교통량 수치(횟수를 비율로 바꾸기 위해)가 필요하다. 또한 정의가 바뀌지 않았는지도 확인해야 한다.

검산

확률은 푸아송 급수를 정확히 더하는 방법과 2×10^5회 시행의 시뮬레이션으로 확인했다. (iii)에서는 $\lambda = 1080/365$일 때 $P(X \geq 7) = 0.0315$이다(시뮬레이션: 0.0317). (ii)에서는 한 해에 사고가 6번, 한 번에 사망자가 30명일 때 $P(N \leq 4) = 0.285$이다. 사고 규모가 1부터 59까지 균등하게 변하도록 하면 시뮬레이션에서 표준편차는 84, $P(\text{사망자 수} \leq 125) \approx 0.28$이었다. 푸아송 횟수에 대한 간단한 어림 규칙은, 평균에서 제곱근의 약 두 배 이내의 값은 대수롭지 않다는 것이다. 하루의 경우 $3 + 2 \times 1.7 \approx 6.4$이므로 7은 그 범위를 간신히 벗어날 뿐이며, 365일 가운데에서 고른다면 그런 날은 반드시 생긴다. 한 해의 경우 $1080 + 2 \times 33 = 1146$이고, 이는 1350에 한참 못 미친다.

흔한 실수

- (i)에서 비율 대신 총계를 비교하는 것. 위험에는 언제나 분모가 필요하다.
- (ii)에서 푸아송 표준편차 $\sqrt{180}$을 쓰는 것. 항공 사고의 사망은 무리 지어 일어나므로 퍼짐이 훨씬 크다.
- (iv)에서 16년 평균과의 비교, 인구, 정의가 그 증가를 설명하는지 묻지 않고 "표준편차의 8배이니 실제 증가이다"에서 멈추는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 **과대산포**(*overdispersion*)에 관한 것이다. 각각 크기가 무작위인 무리가 푸아송 분포를 따르는 개수만큼 모여 이루어진 총합은 **복합 푸아송**(*compound Poisson*) 확률변수이며, 그 분산은 λ가 아니라 $\lambda\,\mathrm{E}[S^2]$이다. 소문항 (iv)는 가설 검정(hypothesis testing)으로, 그리고 통계적으로 유의한 변화가 실제로 무엇을 의미하는가라는 훨씬 어려운 질문으로 이어진다. 두 주제 모두 대학 확률과 통계 과정의 초반에 나온다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 푸아송 모형과 그 한계에 대해 읽기 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1992, 문제 15

확률과 통계 • 기대 대기 시간

STEP I 1992, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q15

핵심 아이디어

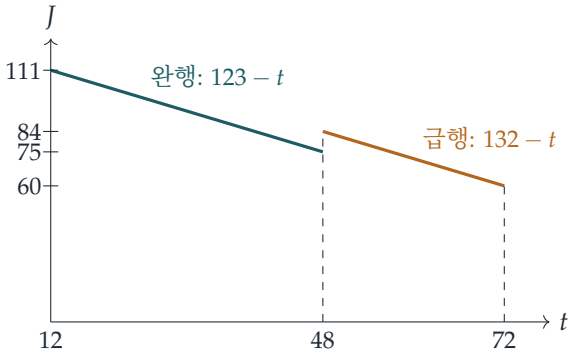
모든 것이 한 시간마다 반복되므로, 한 시간 동안 균등분포(uniform distribution)를 따르는 시각에 도착하는 승객 한 명만 살펴보면 충분하다. 그 한 시간은 두 개의 간격으로 나뉜다. 어떤 열차 직전의 간격에 도착한 승객은 모두 그 열차를 타고, 각 승객의 이동 시간은 "대기 시간 더하기 운행 시간"이다. 한 간격 안에서 대기 시간은 균등분포를 따르므로 그 평균은 간격의 절반이다. 이렇게 하면 문제 전체가 한 간격의 길이에 대한 이차식 문제로 바뀐다.

풀이

현재 시간표

시각 t를 정오로부터 지난 분 단위로 재고(어느 시각이든 상관없다), 승객의 도착 시각 T가 길이 한 시간인 구간 $(12, 72]$에서 균등분포를 따른다고 하자. 이 구간에 있는 열차는 48에 출발하여 런던에 $48 + 75 = 123$에 도착하는 완행열차와, 72(즉 다음 시의 12분)에 출발하여 $72 + 60 = 132$에 도착하는 급행열차이다.

- $12 < T \leq 48$이면 처음 탈 수 있는 열차는 완행이므로 이동 시간은 $J = 123 - T$이다.
- $48 < T \leq 72$이면 처음 탈 수 있는 열차는 급행이므로 $J = 132 - T$이다.



T는 $(12, 72]$에서 확률밀도(density) $\frac{1}{60}$을 가지므로

$$\mathrm{E}(J) = \frac{1}{60}\left[\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t + \int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t\right].$$

각 피적분함수는 일차식이므로, 각 적분은 구간의 길이에 구간 중점에서의 함숫값을 곱한 것과 같다.

$$\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t = 36\times(123-30) = 3348, \qquad \int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t = 24\times(132-60) = 1728.$$

따라서

$$\mathrm{E}(J) = \frac{3348+1728}{60} = \frac{5076}{60} = 84.6\text{분},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

급행열차 시각 조정하기

이제 급행열차가 매시 x분에 출발하고, 완행열차는 여전히 48분에 출발한다고 하자. 급행열차 출발부터 다음 완행열차 출발까지의 시간을 d분이라 하면 $0 \le d < 60$이고 $d \equiv 48 - x \pmod{60}$이다. (원래 시간표에서는 $d = 36$이다.) 그러면 한 시간은 다음과 같이 나뉜다.

- 각 완행열차 직전의 길이 d인 간격: 이 승객들은 $[0, d)$에서 균등분포를 따르는 시간 W만큼 기다린 뒤 75분 동안 이동한다.
- 각 급행열차 직전의 길이 $60-d$인 간격: 이 승객들은 $[0, 60-d)$에서 균등하게 기다린 뒤 60분 동안 이동한다.

승객이 첫 번째 간격에 도착할 확률은 $\frac{d}{60}$, 두 번째 간격에 도착할 확률은 $\frac{60-d}{60}$이고, 길이 g인 간격에서 균등분포를 따르는 대기 시간의 평균은 $\frac{g}{2}$이다. 따라서 승객이 어느 간격에 도착

하는지에 대해 조건부로 나누어(conditioning) 계산하면

$$\begin{aligned} 60\,\mathrm{E}(J) &= d\left(\frac{d}{2}+75\right)+(60-d)\left(\frac{60-d}{2}+60\right) \\ &= \frac{d^2}{2}+75d+\frac{3600-120d+d^2}{2}+3600-60d \\ &= d^2-45d+5400. \end{aligned}$$

검산해 보면, $d=36$일 때 $1296-1620+5400=5076$이 되어 앞부분의 결과와 일치한다.

? **생각해 보기** 왜 한 시간을 똑같이 나누는 $d=30$이 가장 좋은 간격이 아닐까?

완행열차 간격에 있는 승객은 모두 더 느린 운행 때문에 15분의 손해를 본다. 그러므로 그 간격에 있는 승객 수를 줄이고 싶고, 이는 그 간격을 30분보다 짧게 만드는 것을 뜻한다. 그러나 너무 짧게 하면 급행열차의 간격이(따라서 그 승객들의 대기 시간이) 길어진다. 이차식이 이 두 효과 사이의 균형을 잡아 준다.

완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$d^2-45d+5400=\left(d-\tfrac{45}{2}\right)^2+5400-\tfrac{2025}{4},$$

이고, 이는 $d=22.5$일 때 최소이며 이 값은 $[0,60)$ 안에 있다. 이때 $60\,\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{4}$이므로 평균 이동 시간의 최솟값은

$$\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{240}=\frac{1305}{16}=81\tfrac{9}{16}\approx 81.56\text{분}.$$

급행열차는 완행열차보다 22.5분 먼저 출발해야 하므로

$$x=48-22.5=25.5,$$

즉 급행열차는 매시 $25\frac{1}{2}$분에 출발해야 한다. 출발 시각이 정수 분이어야 한다면 $x=25$와 $x=26$($d=23$과 $d=22$)이 같은 값을 주며, 둘 다 $\frac{2447}{30}\approx 81.57$분이다.

검산

- $d=0$이면 두 열차가 함께 출발한다. 모두가 급행을 타고 평균 30분을 기다리므로 $\mathrm{E}(J)=90$이다. 공식도 $\frac{5400}{60}=90$을 준다.
- $d\to 60$이면 완행열차가 급행열차 직전에 출발하여 거의 모든 승객을 태운다. 평균 대기 시간 30분, 이동 75분, 합계 105분이다. 공식도 $\frac{3600-2700+5400}{60}=105$를 준다.
- 간격 0.1의 격자 위의 모든 x에 대해 한 시간 동안의 이동 시간을 수치 적분하면 $x=12$에서 84.6, $x=25.5$에서 최솟값 81.5625를 얻는다.

흔한 실수

- 매시 48분과 60분 사이에 도착한 승객을 한 시간을 더하지 않고 "12분" 급행열차에 태우는 실수. 이들이 타는 열차는 **다음** 시의 12분에 출발한다.
- 두 이동 시간을 간격의 길이가 아니라 열차의 수로 가중 평균하는 실수. 열차가 태우는 승객 수를 결정하는 것은 그 열차 직전 간격의 길이이다.

STEP 너머

여기서 계산한 양은 주기적인 시간표에서의 평균 대기 시간이며, 긴 간격이 더 많은 승객을 잡는다는 관찰은 **검사 역설**(inspection paradox)의 한 형태이다. 무작위로 도착하는 승객은 짧은 간격보다 긴 간격에 떨어질 가능성이 더 크다. 이는 무작위 도착과 서비스를 연구하는 재생 이론(renewal theory)과 대기행렬 이론(queueing theory)의 핵심 아이디어이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 그 바탕이 되는 조건부 확률과 기댓값(expectation)의 도구를 접하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1992, 문제 16

확률과 통계 • 네트워크 신뢰도

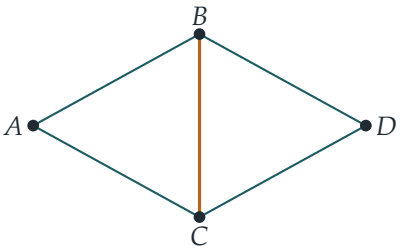
STEP I 1992, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q16

핵심 아이디어

이 도로망은 하나의 "다리(bridge)" 구조이다. A에서 D로 가는 두 경로가 있는데, 하나는 B를 거치고 다른 하나는 C를 거치며, 도로 CB가 그 가운데에서 두 경로를 잇는다. 이 다리 구조를 다루는 가장 깔끔한 방법은 CB가 열려 있는지 아닌지에 따라 조건을 나누는 것(conditioning)이다. 그것만 알고 나면 모든 것이 직렬(series)과 병렬(parallel)로 연결된 도로 문제로 바뀌기 때문이다. 어떤 도로에 제설 대책을 세우는 것은 그 도로의 두 끝을 하나의 마을로 합치는 것과 같은 효과를 낸다. 따라서 두 제안을 비교하려면 각 제안이 만들어 내는 더 작은 도로망을 살펴보면 된다.



풀이

풀이 전체에서 어떤 도로가 열려 있을 확률(probability)을 $q = 1 - p$로 쓴다. 각 도로는 독립적으로(independently) 막히므로, 열린 도로와 막힌 도로의 특정한 배치가 일어날 확률은 p와 q들의 곱이다. 같은 마을을 다시 지나지 않는 A에서 D로의 경로는 다음 네 가지이다.

$$ABD, \qquad ACD, \qquad ABCD, \qquad ACBD.$$

열린 경로가 $ABCD$뿐인 경우

$ABCD$가 열려 있으려면 AB, BC, CD가 모두 열려 있어야 한다. 이것이 **유일한** 열린 경로이려면 ABD가 막혀 있어야 하는데, AB가 열려 있으므로 BD가 막혀 있어야 한다. 마찬가지로 ACD가 막혀 있어야 하고, CD가 열려 있으므로 AC가 막혀 있어야 한다. 그러면 $ACBD$도 저절로 막힌다(AC와 BD를 모두 쓰기 때문이다).

따라서 이 사건은 정확히 "AB, BC, CD는 열려 있고 AC, BD는 막혀 있다"는 사건이다. 독립성에 의해 그 확률은

$$q^3p^2 = p^2(1-p)^3,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

현재 상태에서 통행할 수 있을 확률

A와 D가 막히지 않은 도로로 이어져 있는 사건을 E라 하고, 도로 CB에 대해 조건을 나눈다.

CB가 열려 있으면, B와 C는 하나의 마을처럼 행동한다. AB와 AC가 둘 다 막히지 않는 한 A에서 그 마을로 갈 수 있고, BD와 CD가 둘 다 막히지 않는 한 그 마을에서 D로 갈 수 있다. 이 두 조건은 서로 다른 도로에 관한 것이므로

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 열림}) = (1-p^2)^2.$$

CB가 막혀 있으면, 가능한 경로는 ABD와 ACD뿐이다. 각각 확률 q^2로 열려 있고, 공유하는 도로가 없으므로 서로 독립이다. 따라서

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 막힘}) = 1-(1-q^2)^2.$$

A가 D로부터 단절될 확률을 다루는 편이 더 쉽다. $1-(1-p^2)^2 = p^2(2-p^2)$이고 $1-q^2 = p(2-p)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{단절}) &= q\,p^2(2-p^2) + p\cdot p^2(2-p)^2 \\ &= p^2[(1-p)(2-p^2) + p(4-4p+p^2)] \\ &= p^2\,(2+2p-5p^2+2p^3).\end{aligned}$$

어느 도로에 제설 대책을 세울 것인가

CB에 제설 대책을 세우는 경우. 이제 CB는 항상 열려 있으므로, 언제나 위의 첫 번째 경우에 해당한다.

$$\mathrm{P}(\text{단절}) = 1-(1-p^2)^2 = 2p^2-p^4.$$

AB에 제설 대책을 세우는 경우. 이제 A와 B는 하나의 마을처럼 행동하며, BD가 막혀 있고 동시에 C를 거쳐 가는 길도 없을 때에만 D로부터 단절된다. C를 거쳐 가려면 CD가 열려 있

고 AC, CB 중 적어도 하나가 열려 있어야 하므로, 이 길이 막힐 확률은 $p + q\,p^2$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{단절}) = p\,(p + qp^2) = p^2 + p^3 - p^4.$$

> **생각해 보기** 두 답 모두 p^2 항으로 시작한다. 모든 p에 대해 어느 쪽이 더 작은지 어떻게 판단할까?

두 식을 빼 보자.

$$(2p^2 - p^4) - (p^2 + p^3 - p^4) = p^2 - p^3 = p^2(1-p) > 0 \quad \text{단, } 0 < p < 1.$$

따라서 p의 값이 무엇이든, AB에 제설 대책을 세우는 쪽이 항상 단절될 확률을 더 작게 만든다. 정부는 AB를 골라야 하며, 두 선택이 똑같이 좋은 경우는 없다.

이는 직관과도 맞는다. CB를 보강하는 것은 그 도로가 우회로의 일부로 필요할 때에만 도움이 된다. 반면 AB를 보강하면 A와 B가 하나의 마을이 되고, 이 마을은 직통 도로 BD와 C를 거치는 길, 두 가지로 D와 이어진다.

마지막 소문항

$p = \frac{1}{10}$일 때, 현재 단절될 확률은

$$\frac{1}{100}\left(2 + \frac{2}{10} - \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}\right) = \frac{1}{100} \times 2.152 = 0.02152.$$

이 값은 $\frac{1}{100}$보다 크므로 정부는 계획을 실행할 것이다(그리고 앞 소문항에 의해 AB에 제설 대책을 세울 것이다).

주요 항 $2p^2 = 0.02$만으로도 결론이 난다. 단 두 도로가 막혀서 단절되는 경우가 두 가지, 즉 $\{AB, AC\}$와 $\{BD, CD\}$ 있기 때문이다.

검산

- $p \to 0$일 때 단절될 확률은 약 $2p^2$인데, 이는 막히면 A나 D를 고립시키는 도로 쌍 두 개를 센 것이다. AB에 제설 대책을 세우면 쌍 $\{BD, CD\}$만 남아 약 p^2가 되며, 이는 우리 공식과 일치한다. CB에 제설 대책을 세우면 두 쌍이 모두 남아 약 $2p^2$가 된다.
- $p = 1$일 때 현재 상태의 공식은 $1 \cdot (2 + 2 - 5 + 2) = 1$을 준다. 모든 도로가 막히면 반드시 단절된다.
- 열린 도로와 막힌 도로의 2^5가지 배치를 모두 열거(enumeration)하여 정확히 계산하면, 여러 p값에 대해 위의 모든 공식이 확인된다. $p = \frac{1}{10}$일 때 현재 상태는 0.02152, AB에 제설 대책을 세운 후에는 0.0109, CB에 제설 대책을 세운 후에는 0.0199이다. 2×10^5번의 겨울을 시뮬레이션(simulation)한 결과는 0.0215였다.

흔한 실수

- 네 경로가 열려 있을 확률을 더하는 것. 경로들이 도로를 공유하므로 이 사건들은 서로 겹치고, 합은 중복해서 센다.
- 첫 번째 소문항에서 "유일한 열린 경로"라는 조건 때문에 AC와 BD가 막혀 있어야 한다는 점을 잊고 $(1-p)^3$만 답하는 것.
- 두 제안을 $p = \frac{1}{10}$에서만 비교하는 것. 차 $p^2(1-p)$를 보면 모든 p에 대해 AB가 더 낫다는 것을 알 수 있다.

STEP 너머

이것은 **네트워크 신뢰도**(*network reliability*)의 작은 예이며, 한 변에 대해 조건을 나누는(또는 그 양 끝을 합치는) 기법은 그래프 이론(graph theory) 전반에 걸쳐 나타나는 삭제–축약(deletion–contraction) 아이디어이다. 큰 무작위 네트워크에서는 같은 질문이 **스미기 이론**(*percolation theory*)으로 이어지는데, 여기에는 장거리 연결이 갑자기 사라지는 뚜렷한 p의 임계값이 존재한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 여기서 사용한 조건부 확률 도구를 익히기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 1992, 문제 1

순수수학 • 수열의 극한

> **STEP II 1992, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q1

핵심 아이디어

각 극한(limit)마다 표준적인 방법이 하나씩 필요하고, 관건은 알맞은 방법을 골라내는 것이다. 유리함수(rational function)라면 분자와 분모를 n의 최고차 거듭제곱으로 나눈다. 유계인 것을 커지는 것으로 나눈 꼴이라면 조임 정리(squeeze theorem)를 쓴다. 알려진 극한이 모습을 바꾸어 숨어 있다면, 치환을 해서 그 겉모습을 벗겨 낸다. 그리고 제곱근의 차라면 켤레(conjugate)를 곱한다. 그러면 거의 같은 두 양의 차가 한눈에 파악할 수 있는 몫으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

분자와 분모를 n으로 나누면

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1,$$

이다. $\frac{1}{n} \to 0$이기 때문이다. 극한은 1이다.

소문항 (ii)

최고차 거듭제곱은 n^2이고, 이것은 분모에만 나타난다. 분자와 분모를 n^2으로 나누면

$$\frac{5n+1}{n^2-3n+4} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

극한은 0이다. 분모는 n^2처럼 커지지만 분자는 n처럼만 커지기 때문이다.

소문항 (iii)

큰 정수 n에 대해 $\sin n$에 관해 쓸모 있게 아는 것은 유계(bounded)라는 사실, 곧 $|\sin n| \leq 1$이라는 것뿐이다. 그런데 그것으로 충분하다.

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

이기 때문이다. 따라서 $\dfrac{\sin n}{n}$은 $-\frac{1}{n}$과 $\frac{1}{n}$ 사이에 끼어 있고, 이 둘은 모두 0으로 수렴(converge)하므로 극한은 0이다.

소문항 (iv)

? **생각해 보기** 이것은 (iii)과 같은 문제가 아닌가?

그렇지 않다. 여기서는 각 $1/n$이 커지는 것이 아니라 0으로 줄어든다. $x = 1/n$으로 놓자. $n \to \infty$일 때 $x \to 0^+$이고, 식은 $\dfrac{\sin x}{x}$가 된다. $x \to 0$일 때 이 식의 극한은 다음과 같은 표준적인 결과이다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(이를 이해하는 한 가지 방법은, 이것이 0에서 sin의 미분계수(derivative), 곧 $\cos 0 = 1$이라는 것이다. 또는 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$를 이용하면 $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$이다.) 극한은 1이다.

소문항 (v)

$n \to \infty$일 때 $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$이다. $\theta \to \frac{\pi}{2}$일 때(아래쪽에서 접근할 때) $\tan\theta \to +\infty$이고, arctan은 연속(continuous)이며 증가하기 때문이다. 극한 $\frac{\pi}{2}$는 0이 아니므로 역수를 취할 수 있다.

$$(\arctan n)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$(\arctan n)^{-1}$은 $1/\arctan n$을 뜻하며, arctan의 역함수(inverse function)(그것은 그냥 tan이 된다)가 아님에 주의한다.

소문항 (vi)

분자와 분모가 모두 0으로 수렴하므로, 극한을 따로따로 구할 수는 없다. 각각에 켤레를 곱하자.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

따라서 분자와 분모를 $\sqrt{n}$으로 나누면

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)},$$

이다. $n \to \infty$일 때 두 제곱근은 모두 1로 수렴하므로($\sqrt{\ }$가 연속이기 때문이다) 극한은

$$\frac{1+1}{2(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

? **생각해 보기** 왜 답이 이를테면 1이 아니라 $\frac{1}{2}$이어야 하는가?

큰 n 근처에서 $\sqrt{x}$의 그래프는 기울기(gradient)가 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$인 직선에 가깝다. 따라서 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$(폭 1만큼 이동)이고 $\sqrt{n+2}-\sqrt{n} \approx \frac{2}{2\sqrt{n}}$(폭 2만큼 이동)이다. 그러므로 그 비는 이동 폭의 비인 약 $\frac{1}{2}$이다.

검산

큰 n을 대입해 보자. $n = 10^6$일 때 (i)은 0.999999, (ii)는 5×10^{-6}, (iii)은 약 -3.5×10^{-7}, (iv)는 소수점 아래 일곱째 자리까지 1.0000000, (v)는 0.636620으로 $2/\pi \approx 0.636620$과 일치하며, (vi)은 유리화(rationalise)한 식으로 계산하면 0.50000012이다. (vi)에서는 작은 n에서 유리화한 식과 원래 식을 비교해 보는 것도 좋다. $n = 1$에서 둘 다 $(\sqrt{2}-1)/(\sqrt{3}-1) \approx 0.5658$이다.

흔한 실수

- (iii)과 (iv)를 같은 것으로 취급하는 것. (iii)에서는 사인이 유계인 채로 분모가 커지고, (iv)에서는 분자와 분모가 모두 0으로 줄어들며 그 비가 1로 수렴한다.
- (v)의 $(\arctan n)^{-1}$을 역함수로 읽는 것.
- (vi)을 아주 큰 n에서 원래 식 그대로 계산기로 계산하는 것. 거의 같은 수끼리 빼면 정확도가 떨어진다. 먼저 유리화하라.

STEP 너머

대학에서는 "$a_n \to L$"을 엄밀하게 정의한다. 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 어떤 N이 존재하여, $n > N$인 모든 n에 대해 $|a_n - L| < \varepsilon$이 성립한다는 것이다. 위에서 쓴 모든 방법, 이를테면 (iii)의 조임 정리, (v)에서 0이 아닌 극한의 역수를 취하는 것, (vi)에서 연속함수를 통해 극

한을 옮기는 것은 첫 해석학(analysis) 강의에서 이 정의로부터 증명하는 정리(theorem)가 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 개념들을 꼼꼼하고 읽기 쉽게 전개한다.

풀이

STEP II 1992, 문제 2

순수수학 • 클레로 미분방정식

> **STEP II 1992, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q2

핵심 아이디어

이 방정식은 $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$에 대하여 $y = xp - f(p)$ 꼴이며, 이를 클레로(Clairaut) 방정식(Clairaut equation)이라 한다. 한 번 미분하면 다루기 까다로운 p 항들이 소거되고, 남은 식은 훨씬 간단한 두 방정식으로 인수분해된다. 다만 미분하면 정보가 사라지므로(상수가 없어진다), 후보가 되는 해는 모두 $(*)$에 다시 대입하여 상수를 결정해야 한다.

풀이

$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$로 두면 $(*)$는 $y = xp - \cosh p$가 된다.

미분하기

양변을 x에 대하여 미분한다. 이때 xp에는 곱의 미분법(product rule)을, $\cosh p$에는 연쇄법칙(chain rule)을 쓴다.

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \sinh p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

양변의 p가 소거되어 다음이 남는다.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x - \sinh p\right) = 0, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(x - \sinh\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때뿐이므로, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$이거나 $x - \sinh\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$이다. 이것이 보이려던 것이다.

두 방정식

첫째 방정식. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$을 두 번 적분하면 일반해(general solution)

$$y = Ax + B, \qquad A, B \text{ 는 임의의 상수.}$$

를 얻는다.

둘째 방정식. 이 경우 $\sinh p = x$이다. sinh는 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 전단사(bijection)이므로, 모든 x에 대하여 $p = \sinh^{-1} x$이다. $u = \sinh^{-1} x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\begin{aligned} y &= \int \sinh^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C, \qquad C \text{ 는 임의의 상수.} \end{aligned}$$

$(*)$의 해

$(*)$의 해는 모두 유도된 두 방정식 중 하나를 만족하지만, 그 역은 성립하지 않는다. 미분하는 과정에서 조건 하나를 버렸기 때문이다. 따라서 각 해의 족을 $(*)$에 다시 대입한다.

> **생각해 보기** 유도된 방정식들은 각각 두 개, 한 개의 임의의 상수를 갖는다. 이것들이 모두 $(*)$와 같은 일계 방정식의 해가 될 수 없는 이유는 무엇인가?

일계 방정식(first-order equation)은 매개변수가 하나인 해의 족을 가져야 하는데, 위의 각 족은 상수가 너무 많거나 확인되지 않은 상수를 하나 가지고 있다. $(*)$를 미분해서 알 수 있는 것은 $y - xp + \cosh p$가 **상수**라는 사실뿐이며, 우리는 그 상수가 0이어야 한다.

직선. $y = Ax + B$이면 $p = A$이고, $(*)$는 다음이 된다.

$$Ax + B = Ax - \cosh A \iff B = -\cosh A.$$

따라서 매개변수가 하나인 직선의 족

$$y = Ax - \cosh A, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

를 얻는다.

다른 곡선. $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$이면 $p = \sinh^{-1} x$이므로 $\sinh p = x$이고 $\cosh p = \sqrt{1+\sinh^2 p} = \sqrt{1+x^2}$이다($\cosh p > 0$이므로 양의 제곱근을 택한다). 그러면 $(*)$의 우변은

$$xp - \cosh p = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2},$$

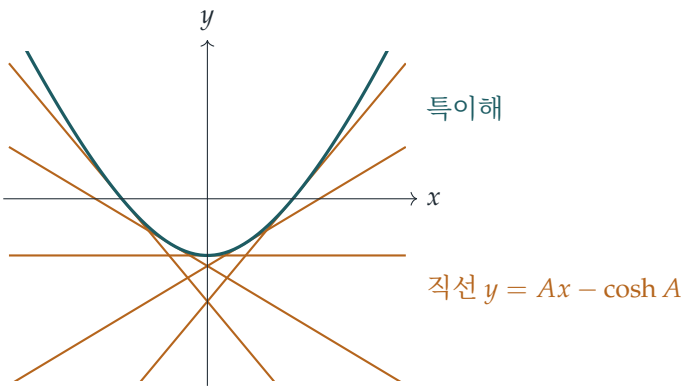
이고, 이것은 정확히 $C = 0$일 때 y와 같다. 이로써 임의의 상수를 포함하지 않는 해가 하나 더 생긴다.

$$y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2}.$$

따라서 $(*)$의 해는 직선 $y = Ax - \cosh A$(각 실수 A에 대하여)와 하나의 곡선 $y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2}$이다.

두 해의 관계

기울기가 A인 직선은 $x = \sinh A$에서 곡선에 접한다. 그 점에서 곡선의 기울기는 $\sinh^{-1}(\sinh A) = A$이고, 높이는 $A\sinh A - \cosh A$로 직선의 높이와 같다. 곡선은 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$이므로 아래로 볼록(convex)하고, 이 접선들은 모두 곡선의 아래쪽에 놓인다. 이 곡선은 직선족의 **포락선**(envelope)이며, **특이해**(singular solution)라 부른다.



이것으로 미묘한 점 하나도 설명된다. 조건 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x - \sinh p) = 0$은 각 점마다 성립하는 조건이므로, 해가 두 유형 사이를 오갈 수 있다. 예를 들어 $x = \sinh A$까지는 곡선을 따라가다가 그 점의 접선을 따라 이어 가면, 도함수가 연속이면서 모든 곳에서 $(*)$를 만족하는 함수가 된다. 이런 조각 함수들은 위에서 구한 해들로 만들어지며, 기대하는 답은 직선족과 특이 곡선이다.

검산

- $A = 0$일 때 직선은 $y = -1$이고, 곡선은 $y(0) = 0 - 1 = -1$, 기울기 $\sinh^{-1}0 = 0$이다. 예상대로 두 그래프는 $(0, -1)$에서 접한다.
- 수치적으로 $x = 0.7$이면 $\sinh^{-1}0.7 \approx 0.6527$이므로 곡선에서 $y \approx 0.4569 - 1.2207 = -0.7638$이고, $xp - \cosh p \approx 0.4569 - 1.2207$과 일치한다. y에 $C \neq 0$을 더하면 정확히 C만큼 어긋난다.
- 임의의 점들에서 유한 차분(finite differences)으로 $(*)$를 확인하면, 모든 직선 $y = Ax - \cosh A$와 특이 곡선에 대하여 잔차(residual)가 반올림 오차 수준이다.

흔한 실수

- $y = Ax + B$나 $y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2} + C$에서 멈추는 것. 이것들은 미분한 방정식의 해이며, $(*)$ 자체에서 $B = -\cosh A$와 $C = 0$이 강제된다.
- 인수 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$를 "약분"하여 특이해를 아예 놓치는 것.

STEP 너머

$y = xp - f(p)$ 꼴의 방정식은 클레로 방정식이다. 그 일반해는 언제나 직선족 $y = cx - f(c)$이고, 특이해는 그 직선족의 포락선이다. 여기서는 $f = \cosh$이며, 포락선 $y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2}$는 cosh의 르장드르(Legendre) 변환(Legendre transform)이다. 이 구성은 역학(라그랑지안(Lagrangian)에서 해밀토니안(Hamiltonian)으로 넘어갈 때)과 열역학에서 등장한다. 또한 이 예는 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)의 조건이 성립하지 않으면 일계 방정식의 해가 유일하지 않을 수 있음을 보여 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 일계 방정식과 그 유일성 정리를 다룬다.

풀이

STEP II 1992, 문제 3

순수수학 • 하이포사이클로이드와 넓이

STEP II 1992, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 **미끄러지지 않고 구르기**(*rolling without slipping*)에서 나온다. 작은 원이 큰 원을 따라 굴러간 호의 길이는, 작은 원에서 접촉했던 호의 길이와 같다. 이로부터 작은 원이 얼마나 회전했는지가 정해지고, 그러면 B는 그저 "중심 P에 올바른 방향의 단위벡터를 더한 것"이다. 그래프를 그릴 때는 삼배각 공식(triple-angle formulae)을 쓰면 좌표가 아주 깔끔하게 정리된다는 점에 주목하면 도움이 된다.

풀이

B의 좌표 구하기

작은 원(반지름 1)은 큰 원(반지름 4)의 안쪽에 계속 접해 있으므로, 그 중심은 언제나 O로부터 거리 $4-1=3$에 있다. ϕ를 각 AOP라 하면

$$P = (3\cos\phi,\ 3\sin\phi).$$

T를 현재의 접점(point of contact)이라 하자. 이 점은 반직선 OP의 연장선 위에 있으므로 $T = (4\cos\phi, 4\sin\phi)$이고, P에서 T로 향하는 방향은 x축과 각 ϕ를 이룬다.

처음에 B는 접점인 A에 있었다. 미끄러짐이 없으므로, 큰 원의 호 AT의 길이는 작은 원의 호 BT의 길이와 같다.

$$4\phi = 1 \times \angle BPT \quad \Longrightarrow \quad \angle BPT = 4\phi.$$

생각해 보기 P에서 잰 B의 각은 $\phi + 4\phi$인가, $\phi - 4\phi$인가?

P가 O를 중심으로 시계 반대 방향으로 움직이면, 작은 원은 큰 원의 안쪽을 따라 구르므로 **시계 방향**으로 회전한다(그림의 화살표). 점 B는 이전의 접점이었으므로 새로운 접점 T보다 뒤에 남겨져 있다. 즉 작은 원을 따라 T에서 B로 가는 것은 시계 방향으로 4ϕ만큼 회전하는 것이다. 따라서 방향 $\overrightarrow{PB}$는 x축과 각 $\phi - 4\phi = -3\phi$를 이루고, $PB = 1$이므로

$$\begin{aligned} B &= P + (\cos(-3\phi),\ \sin(-3\phi)) \\ &= (3\cos\phi + \cos 3\phi,\ 3\sin\phi - \sin 3\phi), \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (확인: $\phi = 0$이면 $(4,0) = A$이다.)

C 그리기

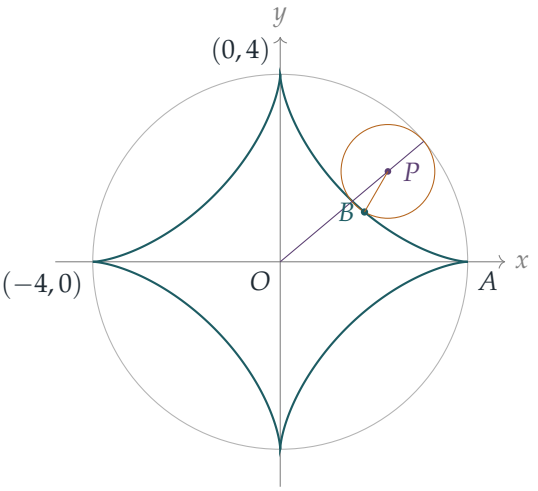
$\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$와 $\sin 3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$를 이용하면

$$x = 4\cos^3\phi, \qquad y = 4\sin^3\phi.$$

따라서 C는 곡선 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$, 즉 **아스트로이드**(*astroid*)이다. 몇 가지 특징은 다음과 같다.

- B가 큰 원 위에 있을 필요충분조건은 $\cos^6\phi + \sin^6\phi = 1$, 즉 $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$이고, 이때 점 $(\pm 4, 0)$, $(0, \pm 4)$를 얻는다. 여기서 B는 접점이므로 순간적으로 정지하며, 곡선은 첨점(cusp)을 가진다.
- 곡선은 두 축에 대해 모두 대칭이다(ϕ를 $-\phi$ 또는 $\pi - \phi$로 바꾸어 보라).
- 제1사분면(first quadrant)에서 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{12\sin^2\phi\cos\phi}{-12\cos^2\phi\sin\phi} = -\tan\phi$이므로, 곡선은 $(4,0)$에서 x축을 따라 출발하여 $(0,4)$에 y축을 따라 도착한다. 곡선은 **안쪽으로** 휘어 있다. $\phi = \frac{\pi}{4}$에서 곡선은 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$를 지나는데, 이는 직선 $x + y = 4$보다 한참 안쪽이다.

P가 한 바퀴 돌고 나면(ϕ가 0에서 2π까지) 작은 원은 OP에 대해 상대적으로 3번 회전하고 B는 다시 A로 돌아온다. 따라서 C는 첨점이 네 개인 닫힌곡선이다.



넓이

$x = 3\cos\phi + \cos 3\phi$이고

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 3\cos\phi - 3\cos 3\phi,$$

이므로

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 9\cos^2\phi - 6\cos\phi\cos 3\phi - 3\cos^2 3\phi.$$

한 주기 전체에 걸쳐, 임의의 정수 $k \neq 0$에 대해 $\int_0^{2\pi} \cos^2 k\phi \,\mathrm{d}\phi = \pi$이고($\frac{1}{2}(1 + \cos 2k\phi)$로 써 보라),

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi\cos 3\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 4\phi + \cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = 0.$$

따라서

$$\text{넓이} = \int_0^{2\pi} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\,\mathrm{d}\phi = 9\pi - 0 - 3\pi = 6\pi.$$

답이 양수인 것은 당연하다. ϕ가 증가할 때 B는 C를 시계 반대 방향으로 돌기 때문이다.

검산

- C는 안쪽으로 휘어 있으므로, 그 영역은 네 첨점을 꼭짓점으로 하는 넓이 32인 정사각형 안에 있다. 실제로 $6\pi \approx 18.85 < 32$이다.
- 수치적으로, 이 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값과 C에 내접하는 200 000각형의 넓이를 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구한 값이 모두 $18.8496\ldots = 6\pi$이다.
- 아스트로이드의 표준 넓이 공식 $\frac{3}{8}\pi a^2$에 $a = 4$를 대입해도 6π를 얻는다.

- 각 첨점에서 B의 수치적 속력은 0이며, 이는 구르기 조건이 요구하는 대로 B가 큰 원에 닿을 때 정지해 있음을 확인해 준다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{PB}$의 각을 $+5\phi$나 $+3\phi$로 잡는 것. 작은 원은 P가 O 주위를 도는 방향과 **반대** 방향으로 회전한다.
- P의 경로의 반지름으로 3 대신 4를 쓰는 것.
- 뾰족한 첨점 대신 둥근 끝을 그리거나, 바깥쪽으로 불룩한 호를 그리는 것.

STEP 너머

한 원이 다른 원의 안쪽을 따라 구를 때 그 원 위의 한 점이 그리는 곡선을 **하이포사이클로이드**(*hypocycloid*)라 하고, 바깥쪽을 따라 구르면 **에피사이클로이드**(*epicycloid*)가 된다. 반지름의 비가 $4:1$이면 아스트로이드를, $3:1$이면 첨점이 세 개인 델토이드(deltoid)를 얻는다. 넓이 공식 $\int x\,\mathrm{d}y$는 그린 정리(Green's theorem)의 특수한 경우로, 이 정리는 닫힌곡선을 따라 도는 적분을 그 내부 영역에서의 이중적분(double integral)과 연결해 준다. 이는 대학 1학년 벡터 미적분학(vector calculus)의 백미 중 하나이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 $z = 3e^{i\phi} + e^{-3i\phi}$를 이용하여 이러한 구르는 곡선들을 우아하게 다룬다.

풀이

STEP II 1992, 문제 4

순수수학 • 미분의 공리

> **STEP II 1992, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.5 절 **공리에서 출발하는 미분**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/derivations.html

핵심 아이디어

네 가지 규칙은 바로 미분(differentiation)의 익숙한 성질들, 즉 곱의 법칙(product rule), 선형성(linearity), 그리고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$이다. 이 문제는 이 성질들만으로 다항식(polynomial) 위에서 이 연산이 완전히 결정됨을 보이라는 것이다. 상수에 대한 요령은 답을 이미 알고 있는 곱, 예를 들어 $1 \times 1 = 1$을 곱의 법칙에 넣어 보는 것이다. 그다음에는 곱의 법칙으로 x의 모든 거듭제곱을 한 단계씩 쌓아 올리고, 나머지는 선형성이 처리한다.

풀이 전체에 걸쳐 주어진 네 가지 규칙만을 사용해야 한다. $\Diamond$가 미분처럼 보인다는 이유만으로 그것에 대해 무엇인가를 가정해서는 안 된다. 그것이 바로 우리가 증명하려는 것이기 때문이다.

풀이

상수

> **생각해 보기** $\Diamond 1$에 대해서는 아무것도 알지 못한다. 규칙들로부터 그 값을 어떻게 알아낼 수 있을까?

곱의 법칙 (i)을 다항식 $f(x) = g(x) = 1$에 적용한다. 두 다항식의 곱은 다시 1이므로

$$\Diamond 1 = \Diamond(1 \cdot 1) = 1 \cdot \Diamond 1 + 1 \cdot \Diamond 1 = 2\,\Diamond 1.$$

양변에서 $\lozenge 1$을 빼면 $\lozenge 1 = 0$, 즉 영다항식(zero polynomial)을 얻는다.

이제 $\mathrm{f}(x) = c$를 임의의 상수 다항식(constant polynomial)이라 하자. 그러면 $\mathrm{f}(x) = c \cdot 1$이고 c는 상수이므로, 규칙 (iv)에 의해

$$\lozenge c = \lozenge(c \cdot 1) = c \lozenge 1 = c \cdot 0 = 0.$$

이는 $c = 0$인 경우도 포함하므로, 모든 상수 다항식에 대하여 $\lozenge \mathrm{f}(x) = 0$이고, 이것이 보여야 할 것이었다.

($\lozenge 1 = 0$에 이르는 또 다른 방법: $x = x \cdot 1$로 쓰면 규칙 (i)과 규칙 (iii)에 의해 $1 = 1 \cdot 1 + x \lozenge 1$이므로 $x \lozenge 1 = 0$이다. 그런데 x를 곱해서 0이 되는 다항식은 영다항식뿐이다.)

거듭제곱 x^2과 x^3

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = x$로 두고 곱의 법칙을 쓴 다음 규칙 (iii)을 쓰면

$$\lozenge x^2 = \lozenge(x \cdot x) = x \lozenge x + x \lozenge x = x + x = 2x.$$

다음으로 $x^3 = x^2 \cdot x$이므로, 곱의 법칙, 규칙 (iii), 그리고 방금 얻은 결과에 의해

$$\lozenge x^3 = x \lozenge x^2 + x^2 \lozenge x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

임의의 다항식

*1*단계: x의 거듭제곱. 수학적 귀납법(induction)으로 다음을 증명한다.

$$\lozenge x^n = nx^{n-1} \qquad \text{모든 정수} n \geq 1.$$

$n = 1$일 때 이것은 규칙 (iii)이다. 어떤 $n = k \geq 1$에 대하여 성립한다고 가정하자. $x^{k+1} = x^k \cdot x$로 쓰고 곱의 법칙, 규칙 (iii), 귀납 가정(induction hypothesis)을 차례로 쓰면

$$\lozenge x^{k+1} = x \lozenge x^k + x^k \lozenge x = x \cdot kx^{k-1} + x^k = (k+1)x^k,$$

이므로 $n = k + 1$일 때도 결과가 성립한다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다. $n = 0$일 때 $x^0 = 1$은 상수이므로 첫 번째 부분에 의해 $\lozenge x^0 = 0$이다. 모든 경우에 $\lozenge x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n$이다.

*2*단계: 합. 규칙 (ii)는 두 다항식에 대해 진술되어 있지만, 항의 개수에 대한 귀납법으로 임의의 유한 합으로 확장된다. $\lozenge(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) = \lozenge \mathrm{f}_1 + \cdots + \lozenge \mathrm{f}_m$이면, $(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) + \mathrm{f}_{m+1}$에 규칙 (ii)를 적용하여 $m + 1$개의 항에 대한 같은 명제를 얻는다.

*3*단계: 종합하기. 모든 다항식은 상수 계수(coefficient) a_k를 써서 $\mathrm{h}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots +$

$a_n x^n$ 꼴로 쓸 수 있다. 2단계, 각 항에 대한 규칙 (iv), 그리고 1단계를 차례로 쓰면

$$\begin{aligned}\lozenge \mathrm{h}(x) &= \lozenge(a_0) + \lozenge(a_1 x) + \cdots + \lozenge(a_n x^n) \\ &= a_0 \lozenge 1 + a_1 \lozenge x + \cdots + a_n \lozenge x^n \\ &= 0 + a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{h}(x)),\end{aligned}$$

이고, 이것이 증명해야 할 것이었다.

검산

미분이 실제로 네 가지 규칙을 모두 만족하는지 확인해 둘 가치가 있다. 그렇지 않다면 이 결과는 공허한(vacuous) 것이 되기 때문이다. 실제로 만족한다(곱의 법칙, 선형성, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x = 1$). 또한 풀이에서처럼 네 가지 규칙만을 써서 컴퓨터로 $\lozenge$를 구현하고, 무작위 다항식 500개(차수 7 이하, 분수 계수)에 대해 보통의 도함수(derivative)와 비교하였다. 둘은 항상 일치했고, 수치적인 차분몫(difference quotient)과도 일치했다. 예를 들어 규칙들로부터 $\lozenge x^3 = 3x^2$를 얻는다.

흔한 실수

- "상수의 도함수는 영이므로 $\lozenge c = 0$이다"라고 말하는 것. 이는 증명하려는 것을 가정하는 것이다. 영이라는 값은 규칙들로부터 나와야 한다.
- 마지막 부분에서 상수항을 빠뜨리는 것. 귀납법은 $n = 1$에서 시작하므로, a_0에는 상수에 대한 결과가 필요하다.
- 여러 항의 합에 규칙 (ii)를 쓰면서, 그것이 귀납법에 의해 두 항에서 확장된다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

규칙 (i), (ii), (iv)를 만족하는 연산을 **대수적 미분**(*derivation*)이라 하며, 대수적 미분은 대수학과 기하학 전반에서 연구된다. 이 문제는 다항식 위에서 대수적 미분이 x에서의 값만으로 완전히 결정됨을 보여 준다. 더 일반적으로 $\lozenge \mathrm{h} = \mathrm{p}(x)\,\mathrm{h}'(x)$이며, 여기서 $\mathrm{p} = \lozenge x$이다. 미분기하학(differential geometry)에서는 이 아이디어가 벡터장(vector field)의 정의가 된다. 다항식환(polynomial ring)이라는 대수적 맥락에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*를 참고하라.

풀이

STEP II 1992, 문제 5

순수수학 • 행렬군

> **STEP II 1992, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q5

핵심 아이디어

이 문제의 모든 것은 조건 $wz - xy = 1$에 달려 있으며, 이 조건 덕분에 S에 속한 행렬의 역행렬(inverse)이 특히 간단해진다. 위수(order)가 3인 원소에 관한 부분은 모든 2×2 행렬이 자신의 대각합(trace)과 행렬식(determinant)으로 만들어지는 이차방정식을 만족한다는 사실에 주목하면 가장 잘 다룰 수 있다. S에 속한 행렬에 대해서는 이를 이용하여 $\mathbf{A}^2$를, 그리고 이어서 $\mathbf{A}^3$을 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{I}$로 나타낼 수 있으므로, 조건 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$는 대각합 $w + z$에 대한 조건이 된다.

(시험지에는 $\mathbf{A}$의 오른쪽 아래 성분이 x로 인쇄되어 있지만, 마지막 부분에서 z를 언급하므로 의도한 행렬은 분명히 그 자리에 z가 있는 것이며, 이 풀이에서는 줄곧 그렇게 사용한다.)

풀이

원소의 위수

$g \in G$의 위수는 $g^n = e$를 만족하는 가장 작은 양의 정수 n이다. 여기서 e는 G의 항등원(identity)이다. g의 어떤 양의 거듭제곱도 e와 같지 않으면 g의 위수는 무한이다. 위수가 1인 원소는 항등원뿐이다.

역행렬

다음과 같이 두자.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, \qquad wz - xy = 1.$$

2×2 행렬의 역행렬에 대한 일반적인 공식은 행렬식으로 나누는데, 여기서는 행렬식이 1이므로 다음과 같다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} z & -x \\ -y & w \end{pmatrix}.$$

직접 곱해 보면 이를 확인할 수 있다. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} wz - xy & 0 \\ 0 & wz - xy \end{pmatrix} = \mathbf{I}$이고, 마찬가지로 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$이다.

S는 군이다

군(group)의 네 가지 공리를 확인한다.

- **닫힘**(*closure*). $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S$이면 $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B} = 1 \times 1 = 1$이므로 $\mathbf{AB} \in S$이다.
- **결합법칙**(*associativity*). 행렬의 곱셈에 대해서는 이것이 성립한다고 가정해도 된다.
- **항등원**. $\det\mathbf{I} = 1$이므로 $\mathbf{I} \in S$이고, 모든 $\mathbf{A}$에 대해 $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$이다.
- **역원**(*inverse element*). 위에서 구한 행렬 $\mathbf{A}^{-1}$의 행렬식은 $wz - (-x)(-y) = wz - xy = 1$이므로 이 행렬은 S에 속한다.

따라서 S는 행렬의 곱셈에 대하여 군이다.

자기 역원인 원소와 위수가 2인 원소

$\mathbf{A}^{-1}$과 $\mathbf{A}$를 성분별로 비교하면, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$z = w, \qquad -x = x, \qquad -y = y,$$

즉 $x = y = 0$이고 $z = w$이다. 그러면 행렬식 조건은 $w^2 = 1$이 되므로 $w = \pm 1$이다. 따라서 자기 역원(self-inverse)인 원소는 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{그리고} \quad \mathbf{A} = -\mathbf{I}.$$

원소의 위수가 2인 것은 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$(즉 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$)이고 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$일 때이다. 따라서 위수가 2인 원소는 $-\mathbf{I}$뿐이다.

위수가 3인 원소

$\mathbf{A}$의 대각합을 $t = w + z$라 하자. 제곱하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} w^2 + xy & x(w+z) \\ y(w+z) & xy + z^2 \end{pmatrix}.$$

$xy = wz - 1$이므로 왼쪽 위 성분은 $w^2 + wz - 1 = tw - 1$이고, 오른쪽 아래 성분은 $tz - 1$이다. 따라서

$$\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}. \qquad (*)$$

생각해 보기 $(*)$는 $\mathbf{A}^3$을 구하는 데 어떻게 도움이 되는가?

$(*)$에 $\mathbf{A}$를 곱하고, 다시 $(*)$를 이용하여 $\mathbf{A}^2$를 없앤다.

$$\mathbf{A}^3 = t\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = t(t\mathbf{A} - \mathbf{I}) - \mathbf{A} = (t^2 - 1)\mathbf{A} - t\mathbf{I}.$$

따라서 $\mathbf{A}$의 모든 거듭제곱은 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{I}$의 일차결합이고, 계수를 비교할 수 있다.

$w + z + 1 = 0$인 경우: 이때 $t = -1$이므로 $t^2 - 1 = 0$이고 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$이다. 또한 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$인데, $\mathbf{I}$의 대각합은 $2 \neq -1$이기 때문이다. $\mathbf{A}$의 위수는 3의 약수이고 1이 아니므로 3이다.

역으로, $\mathbf{A}$의 위수가 3이라고 가정하자. 그러면 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$이고 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$이므로 다음이 성립한다.

$$(t^2 - 1)\mathbf{A} = (1 + t)\mathbf{I}.$$

- $t^2 \neq 1$이면 $\mathbf{A} = \dfrac{1+t}{t^2-1}\mathbf{I} = \dfrac{1}{t-1}\mathbf{I}$이고, 이는 항등행렬의 스칼라배 $\lambda\mathbf{I}$이다. 그 행렬식은 $\lambda^2 = 1$이므로 $\lambda = \pm 1$이다. 그런데 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$는 제외되고, $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$는 위수가 2이지 3이 아니다. 따라서 이 경우는 일어날 수 없다.
- $t = 1$이면 식은 $\mathbf{0} = 2\mathbf{I}$가 되어 거짓이다.

남은 가능성은 $t = -1$, 즉 $w + z + 1 = 0$뿐이다. 이로써 "필요충분조건(if and only if)"이 증명되었다.

예. $w = 0, z = -1$로 두고, $wz - xy = 0 + 1 = 1$이 되도록 $x = -1, y = 1$을 택한다.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{I}.$$

검산

- 위의 예를 직접 곱해서 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$임을 확인해 보라.
- 120° 회전 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$는 행렬식이 1이고 대각합이 -1이며, 당연히 위수가 3이다.
- S에 속하는 무작위 유리수 행렬 20 000개에 대해 $\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}$임을 컴퓨터로 확인하였다. 또한 성분이 -4와 4 사이에 있는 $\frac{1}{2}$의 배수인 S의 모든 행렬을 탐색하였다. 대각합이 -1인 48개가 정확히 위수가 3인 행렬이며, 위수가 2인 것은 $-\mathbf{I}$뿐이다.

흔한 실수

- $\mathbf{I}$를 위수가 2인 원소에 포함하는 것. 이것은 자기 역원이지만 위수는 1이다.
- 위수 3에 관한 결과의 한쪽 방향만 증명하는 것. 역을 보이려면 $t^2 \neq 1$인 경우와 $t = 1$인 경우를 배제해야 한다.
- 군의 공리를 확인할 때 역행렬 자체의 행렬식이 1인지 확인하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

군 S는 **특수선형군**(special linear group) SL_2로, 수학에서 가장 중요한 군 중 하나이다. 항등식 $\mathbf{A}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{A} + (\det\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}$은 케일리(Cayley)–해밀턴(Hamilton) 정리(Cayley–Hamilton theorem)의 2×2인 경우이다. 즉 모든 정사각행렬은 자신의 특성방정식(characteristic equation)을 만족한다. 이 항등식은 또한 대각합 하나만으로도 SL_2의 원소에 대해 얼마나 많은 것을 알 수 있는지 보여 준다. 위의 논증을 일반화하면, 유한 위수 n을 갖는 원소의 대각합은 어떤 정수 k에 대해 $2\cos(2\pi k/n)$임을 보일 수 있다. 행렬군에 대해 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*를, 케일리–해밀턴 정리와 고윳값(eigenvalue)에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*를 보라.

풀이

STEP II 1992, 문제 6

순수수학 • 접선과 근의 개수

> **STEP II 1992, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q6

핵심 아이디어

$kx = \ln(2\sec x)$의 해는 원점을 지나는 직선 $y = kx$가 곡선 $y = \ln(2\sec x)$와 만나는 점이다. 이 곡선은 원점보다 위에서 시작하고, 볼록(convex)하며, 무한대로 치솟는다. 따라서 원점을 지나는 직선은 이 곡선과 만나지 않거나, 접하거나, 두 번 만난다. 특별한 값 k_0은 **원점에서 그은 접선**(*tangent from the origin*)의 기울기이다. 접한다는 것은 두 곡선의 높이와 기울기가 같다는 뜻이며, 이 두 방정식에서 나머지가 모두 나온다.

풀이

두 그래프

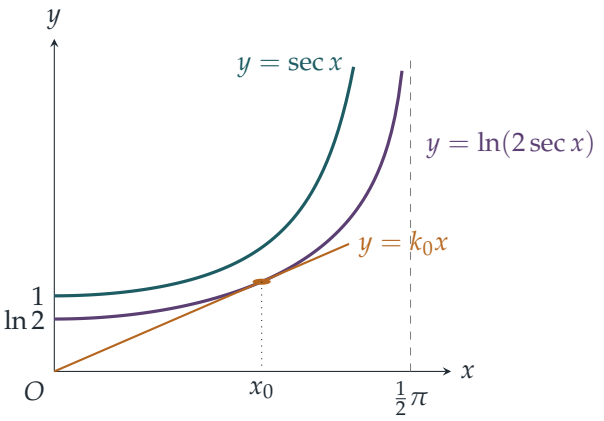
$f(x) = \ln(2\sec x) = \ln 2 - \ln\cos x$라 하자. 그러면

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \qquad f''(x) = \sec^2 x > 0.$$

따라서 $f(0) = \ln 2 \approx 0.69$, $f'(0) = 0$이고, f는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하며, 볼록(아래로 볼록)하다. 또 $x \to \frac{1}{2}\pi^-$일 때 $\cos x \to 0^+$이므로 $f(x) \to \infty$이다.

마찬가지로 $y = \sec x$는 $\sec 0 = 1$이고 기울기는 $\sec x \tan x$인데, 이 기울기는 $x = 0$에서 0이고 그 뒤로는 양수이며, $x \to \frac{1}{2}\pi^-$일 때 $\sec x \to \infty$이다. 두 곡선 모두 수직 점근선(vertical asymptote) $x = \frac{1}{2}\pi$를 가지며, 둘 다 그곳에서는 정의되지 않는다.

로그 곡선은 항상 시컨트 곡선보다 아래에 있다. $u = \sec x \geq 1$로 두면 $\ln(2u) < u$인데, $\ln(2u) - u$의 도함수가 $\frac{1}{u} - 1 \leq 0$이므로 이 함수는 $u = 1$에서의 값인 $\ln 2 - 1 < 0$ 이하이기 때문이다. 또한 로그 곡선은 훨씬 더 느리게 증가한다. $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 이 곡선은 시컨트의 ln처럼 행동한다.



작은 k에서는 해가 없고, 큰 k에서는 해가 둘이다

f가 증가하므로 $[0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $f(x) \geq \ln 2$이고, 한편 그 구간에서 $kx < \frac{1}{2}\pi k$이다. $k \leq 2\ln 2/\pi \approx 0.44$이면 구간 전체에서 $kx < \ln 2 \leq f(x)$이므로, 직선은 곡선 아래로 지나가고 해는 없다.

큰 k에 대해서도 직선은 곡선 아래에서 시작하지만($x = 0$에서 직선의 높이는 $0 < \ln 2$), 어딘가에서 곡선 위로 올라갈 만큼 가파르다. $x = \frac{1}{4}\pi$에서 곡선의 높이는 $\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1.04$이고, $k > \frac{6}{\pi}\ln 2 \approx 1.32$이기만 하면 그곳에서 직선이 더 높다. $\frac{1}{2}\pi$ 근처에서 곡선은 무한대로 달아나지만 직선의 높이는 많아야 $\frac{1}{2}\pi k$에 머무르므로, 결국 곡선이 다시 직선보다 위로 온다. 직선은 올라가면서 곡선을 한 번 가로지르고, 다시 내려오면서 한 번 더 가로지른다. 즉 해가 두 개이다.

해가 셋 이상일 수는 없다. 함수 $f(x) - kx$의 이계도함수는 $\sec^2 x > 0$이므로 이 함수는 볼록하고, 볼록함수의 영점은 많아야 두 개이다.

k_0이 존재하는 이유

$f(0) = \ln 2 \neq 0$이므로 모든 해는 $x > 0$을 만족한다. 따라서 x로 나누어 방정식을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$k = g(x), \qquad \text{여기서} g(x) = \frac{\ln(2\sec x)}{x}, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

그러므로 해의 개수는 g의 그래프가 높이 k에 도달하는 횟수와 같다. 이제

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}, \qquad h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x),$$

이고 $h'(x) = \tan x + x\sec^2 x - \tan x = x\sec^2 x > 0$이다. $h(0) = -\ln 2 < 0$이고 $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 $h(x) \to \infty$이므로, h의 영점은 정확히 하나이며 이를 x_0이라 한다. 따라서 g는 $(0, x_0)$에서 감소하고 $(x_0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하며, 양 끝에서 $g \to \infty$이다($x \to 0$일 때 분자는

$\ln 2$로 수렴하고, $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 분자는 ∞로 발산한다). 그러므로 g의 최솟값을 $k_0 = g(x_0)$이라 하면 다음이 성립한다.

- $k < k_0$: 해가 없다.
- $k = k_0$: 해가 정확히 하나, $x = x_0$이다.
- $k > k_0$: 해가 두 개이다.

그래프로 보면 $y = k_0 x$는 원점을 지나는 $y = \ln(2\sec x)$의 접선이다. 이로써 개형을 이용한 논증이 확인되고, 경계값이 정확히 결정된다.

? **생각해 보기** 왜 "해가 정확히 하나"라는 것이 직선이 접선이라는 뜻일까?

직선이 x_0에서 곡선을 횡단적으로(transversally) 가로지른다면, 직선을 O를 중심으로 조금 회전시켜도(k를 조금 작게 하거나 크게 해도) 근처에서 여전히 교점이 생기고, 위의 볼록성 논증에 의해 두 번째 교점도 생긴다. 고립된 단 하나의 만나는 점이 k가 줄어들 때 만나는 점이 없는 상태로 바뀐다면, 그것이 바로 접점이다. 대수적으로 이것은 $h(x_0) = 0$, 즉 $g'(x_0) = 0$이다.

x_0에 대한 방정식

접점에서 직선과 곡선은 높이와 기울기가 같다.

$$k_0 x_0 = \ln(2\sec x_0), \qquad k_0 = f'(x_0) = \tan x_0.$$

(두 번째 방정식은 앞에서 본 $h(x_0) = 0$과도 같다.) 두 번째 식을 첫 번째 식에 대입하면 $x_0 \tan x_0 = \ln(2\sec x_0)$이고, $0 < x_0 < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\tan x_0 \neq 0$이다. 따라서

$$x_0 = \cot x_0 \, \ln(2\sec x_0),$$

이며, 이것이 보이려던 식이다.

x_0과 k_0 구하기

$x_{n+1} = \cot x_n \ln(2\sec x_n)$을 그대로 반복하고 싶어질 수 있다. 이 방법도 통하기는 하지만 느리다. x_0에서 우변의 도함수는 $1 - 2x_0/\sin 2x_0 \approx -0.89$이므로, 반복값은 진동하면서 한 단계에 약 11%씩밖에 가까워지지 않는다. $h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x)$에 뉴턴 방법(Newton's method)을 적용하는 편이 훨씬 낫고, $h'(x) = x\sec^2 x$도 매우 간단하다.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \tan x_n - \ln(2\sec x_n)}{x_n \sec^2 x_n}.$$

$x_1 = 1$에서 시작하면(모든 계산은 라디안으로 한다)

$$x_2 \approx 0.9274, \qquad x_3 \approx 0.9147, \qquad x_4 \approx 0.91440.$$

소수 둘째 자리까지 확정하려면 부호 변화를 확인한다. $h(0.905) \approx -0.023 < 0$이고 $h(0.915) \approx +0.0015 > 0$이므로 $0.905 < x_0 < 0.915$이고

$$x_0 \approx 0.91.$$

그러면 $k_0 = \tan x_0 \approx \tan 0.9144 \approx 1.30$이다. $k_0 = \ln(2\sec x_0)/x_0$으로 계산해도 같은 값이 나온다.

검산

- k_0에 대한 두 식이 일치한다: $\tan(0.91440) \approx 1.2981$이고 $\ln(2\sec 0.91440)/0.91440 \approx 1.2981$이다.
- $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $g(x) = \ln(2\sec x)/x$를 수치적으로 훑어보면 $x \approx 0.914$에서 최솟값 1.2981을 가진다.
- $kx - \ln(2\sec x)$의 부호 변화를 세어 보면, $k = 1.29$일 때는 근이 없고 $k = 1.31$일 때는 근이 두 개이다.
- 답이 앞에서 구한 대략적인 범위 $0.44 < k_0 < 1.32$에 들어맞는다.

흔한 실수

- 도(degree) 단위를 쓰는 것. 뉴턴 방법의 반복값과 $\tan x_0$을 포함하여 여기서 쓰는 모든 x 값은 라디안이어야 한다.
- 접할 조건으로 방정식을 하나만 쓰는 것. 곡선과 만나는 것만으로는 부족하다. 기울기도 같아야 하며, k_0을 결정하는 것은 바로 이 두 번째 조건이다.
- 확인 없이 소수 둘째 자리까지 맞다고 주장하는 것. $[0.905, 0.915]$에서 h의 부호가 바뀜을 보이거나, 소수 둘째 자리가 변하지 않을 때까지 반복해야 한다.

STEP 너머

$f(x)/x$의 치역을 살펴 $kx = f(x)$의 근의 개수를 세는 것은 큰 아이디어의 작은 조각이다. 원점을 지나는 접선들과 f의 볼록성은 해석학과 역학에서 **르장드르 변환**(*Legendre transform*)과 볼록 쌍대성(convex duality)의 바탕이 된다. 여기서 뉴턴 방법이 이렇게 빨리 수렴하는 것은 단순근(simple root) 근처에서 이차 수렴(quadratic convergence)하기 때문이고, 반면 고정점 반복(fixed-point iteration)은 비율 $|\varphi'(x_0)|$로 선형 수렴할 뿐이다. 두 사실 모두 해석학이나 수치해석의 첫 강의에서 증명된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 볼록함수와 뉴턴 방법의 오차 분석을 다룬다.

풀이

STEP II 1992, 문제 7

순수수학 • 삼차방정식의 중근

> **STEP II 1992, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q7

핵심 아이디어

$(x-a)(x-b)(x-c)$와 주어진 삼차식(cubic)의 계수를 비교(comparing coefficients)하면 p, q, r를 근(root)들의 대칭함수(symmetric function)로 나타낼 수 있다. (i)에서는 중근(repeated root)이 있다는 조건과 "근의 합이 0"이라는 조건으로부터 근이 $\alpha, \alpha, -2\alpha$ 꼴로 정해지고, 나머지는 모두 여기서 따라 나온다. (ii)의 식은 (i)의 답에서 q와 r를 더 복잡한 식으로 바꾼 것처럼 보인다. 이는 x를 평행이동하여 x^2항을 없앤 다음, 새로운 삼차식에 (i)을 적용하라는 암시이다.

풀이

a, b, c가 근이고 최고차항의 계수가 1이므로, 모든 x에 대하여

$$x^3 - px^2 + qx - r = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

이다. 계수를 비교하면

$$p = a+b+c, \qquad q = ab+bc+ca, \qquad r = abc.$$

소문항 (i)

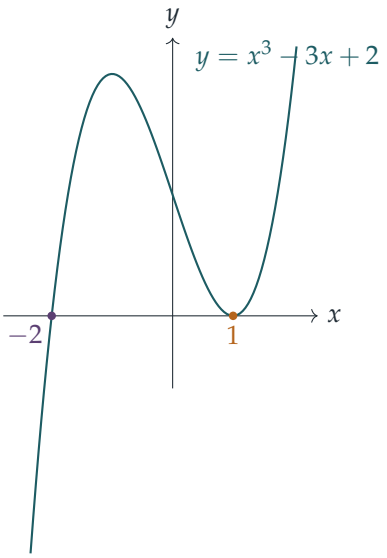
중근이 $a = b = \alpha$가 되도록 근에 이름을 붙이자. 그러면 $p = 0$에서 $c = -(a+b) = -2\alpha$이므로 근은 $\alpha, \alpha, -2\alpha$이다. 따라서

$$q = \alpha^2 + \alpha(-2\alpha) + (-2\alpha)\alpha = -3\alpha^2,$$
$$r = \alpha \cdot \alpha \cdot (-2\alpha) = -2\alpha^3.$$

그러므로

$$4q^3 + 27r^2 = 4(-27\alpha^6) + 27(4\alpha^6) = -108\alpha^6 + 108\alpha^6 = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 여기서는 α가 실수일 필요가 전혀 없으며, 삼중근(triple root)인 경우($\alpha = 0$, 모든 계수가 0)도 포함된다.



예를 들어 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$는 $\alpha = 1, q = -3, r = -2$이고, $4(-27) + 27 \cdot 4 = 0$이다. 이중근은 그래프가 축에 접하는 모습으로 나타난다.

소문항 (ii)

이제 p가 0일 필요는 없다. 원래 삼차식의 근의 합은 p이므로 근의 평균은 $p/3$이다. 평균만큼 평행이동하여

$$x = y + \tfrac{p}{3}.$$

로 놓자. 그러면 $y = x - \frac{p}{3}$이므로, y에 대한 새 삼차식의 근은 $a - \frac{p}{3}, b - \frac{p}{3}, c - \frac{p}{3}$이다. 이들의 합은 $p - p = 0$이고, a, b, c 중 두 개가 같으면 이들 중 두 개도 같다.

생각해 보기 y에 대한 삼차식은 정확히 무엇인가?

각 항을 전개하면

$$\begin{aligned}
\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^3 &= y^3 + py^2 + \tfrac{p^2}{3}y + \tfrac{p^3}{27}, \\
-p\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^2 &= -py^2 - \tfrac{2p^2}{3}y - \tfrac{p^3}{9}, \\
q\left(y + \tfrac{p}{3}\right) &= qy + \tfrac{pq}{3},
\end{aligned}$$

이고, 이들과 $-r$를 모두 더하면 y^2항이 소거되어(이것이 평행이동의 목적이다)

$$x^3 - px^2 + qx - r = y^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)y - \left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right),$$

를 얻는다. 여기서 $\frac{p^3}{27} - \frac{p^3}{9} = -\frac{2p^3}{27}$을 이용하였다. 이 y에 대한 삼차식은 $y^3 - Py^2 + Qy - R$ 꼴이고

$$P = 0, \qquad Q = q - \frac{p^2}{3}, \qquad R = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

이다. 이 삼차식은 y^2의 계수가 0이고 두 근이 같으므로 소문항 (i)을 적용할 수 있고, $4Q^3 + 27R^2 = 0$, 즉

$$4\left(q - \frac{p^2}{3}\right)^3 + 27\left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right)^2 = 0,$$

을 얻는다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $p = 0$이면 (ii)의 결과는 $4q^3 + 27r^2 = 0$이 되어 소문항 (i)과 같다.
- $(x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$에 대하여 $p = 4, q = 5, r = 2$이므로 $Q = -\frac{1}{3}$이고 $R = \frac{128}{27} - \frac{20}{3} + 2 = \frac{2}{27}$이다. 그러면 $4Q^3 + 27R^2 = -\frac{4}{27} + \frac{4}{27} = 0$이다.
- 또한 중근을 갖는 무작위 삼차식 수백 개에 대하여 두 항등식을 정확한 유리수 연산으로 확인하였고, 평행이동 항등식도 무작위 점에서 확인하였다.

흔한 실수

- 비에트 공식(Vieta's formulae)에서 부호를 틀리는 것: 이 문제에서 택한 부호 $-p$, $+q$, $-r$에서는 p, q, r 세 개가 모두 근에 대하여 양의 부호로 나타난다.
- $p/3$만큼 반대 방향으로 평행이동하는 것. 새 삼차식의 근은 $a - \frac{p}{3}$ 등이며, 그래서 근의 합이 0이 된다.
- (ii)에서 모든 것을 a, a, c로 무작정 전개하는 것. 이 방법도 되기는 하지만 길고 실수하기 쉽다. 평행이동을 이용하면 (i)을 공짜로 다시 쓸 수 있다.

STEP 너머

일반적인 삼차식에서 (ii)의 좌변은 $-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$, 즉 **판별식**(discriminant)의 음수와 같다. 이 값은 두 근이 일치할 때 정확히 0이 되며, 그 부호를 보면 실계수 삼차식이

세 실근을 갖는지 하나의 실근만 갖는지 알 수 있다. 평행이동 $x = y + \frac{p}{3}$은 삼차방정식을 푸는 카르다노(Cardano) 공식의 첫 단계이기도 하다. 근의 대칭함수, 판별식, 그리고 어떤 방정식이 거듭제곱근(radical)으로 풀리는가 하는 문제는 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 시작하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 1992, 문제 8

순수수학 • 적분 기법

> **STEP II 1992, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q8

핵심 아이디어

세 소문항에 각각 하나씩, 모두 세 가지 표준 기법을 쓴다. (i)에서는 분모를 완전히 인수분해하고 **중복된** 인수가 있음을 알아차리므로, 부분분수(partial fractions)에 제곱항이 필요하다. (ii)에서는 치환(substitution) $t = \tan\frac{x}{2}$를 쓰면 $\sin x$와 $\cos x$의 임의의 유리함수(rational function)가 t의 유리함수로 바뀌는데, 여기서는 그 결과로 나온 이차식이 깔끔하게 인수분해된다. (iii)에서는 $\sinh x$를 지수함수로 나타내고 $u = \mathrm{e}^x$로 치환하면, 이번에도 부분분수가 남는다.

풀이

소문항 (i)

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$이므로 분모는 $(x-1)^2(x+1)$이다. 인수 $x-1$이 중복되므로

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

즉

$$x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2.$$

꼴을 찾는다. $x=1$을 대입하면 $1=2B$이므로 $B=\frac{1}{2}$이다. $x=-1$을 대입하면 $-1=4C$이므로 $C=-\frac{1}{4}$이다. x^2의 계수를 비교하면 $0=A+C$이므로 $A=\frac{1}{4}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}-\tfrac{1}{4}\ln|x+1|+c\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x-1)}+c.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

$t=\tan\frac{x}{2}$라 하자. 그러면

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

이고, 마지막 식은 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+t^2)$이기 때문이다. 따라서

$$3\cos x+4\sin x=\frac{3-3t^2+8t}{1+t^2}=\frac{(1+3t)(3-t)}{1+t^2},$$

이고, 인수 $1+t^2$가 약분된다.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos x+4\sin x}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+3t)(3-t)}.$$

생각해 보기 이차식 $3+8t-3t^2$이 인수분해된다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

이 이차식의 판별식(discriminant)은 $64+36=100=10^2$으로 완전제곱수이므로, 두 근 $t=3$과 $t=-\frac{1}{3}$은 유리수이다. (이는 우연이 아니다. $3^2+4^2=5^2$이기 때문이며, 아래의 합성(harmonic form)에서 진폭이 정수가 되는 것도 같은 이유이다.)

이제 $\dfrac{2}{(1+3t)(3-t)}=\dfrac{a}{1+3t}+\dfrac{b}{3-t}$로 놓으면 $2=a(3-t)+b(1+3t)$이다. $t=3$을 대입하면 $b=\frac{1}{5}$이고, $t=-\frac{1}{3}$을 대입하면 $\frac{10}{3}a=2$이므로 $a=\frac{3}{5}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos x+4\sin x}&=\int\left(\frac{3}{5(1+3t)}+\frac{1}{5(3-t)}\right)\mathrm{d}t=\tfrac{1}{5}\ln|1+3t|-\tfrac{1}{5}\ln|3-t|+c\\ &=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+3\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+c.\end{aligned}$$

다른 방법으로, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$인 β에 대하여 $3\cos x+4\sin x=5\sin(x+\beta)$로 쓸 수 있다. 그러면 적분은 $\frac{1}{5}\int\operatorname{cosec}(x+\beta)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{1}{2}(x+\beta)\right|+c$이다. 두 답은 일치한다. $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$이므로($\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{3/5}{9/5}$이기 때문이다), 덧셈정리에 의해

$$\tan\tfrac{1}{2}(x+\beta)=\frac{t+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}t}=\frac{1+3t}{3-t}.$$

이다.

소문항 (iii)

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$이므로, 분자와 분모에 e^x를 곱하면

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}.$$

이다. $u = e^x$로 치환하면 $du = e^x\,dx$이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sinh x} = \int \frac{2\,du}{u^2 - 1} = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c \\ = \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + c = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + c,\end{aligned}$$

이다. 여기서 마지막 단계는 분자와 분모를 $e^{x/2}$로 나눈 것이다. 즉 $\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} = \tanh\frac{x}{2}$이다. (ii)의 다른 방법에서 쓴 $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c$와 깔끔하게 대응한다는 점에 주목하자.

검산

각 답을 미분해 본다. 예를 들어 (iii)에서는 $\frac{d}{dx}\ln\tanh\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}}{\tanh\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sinh x}$이다. 수치적으로는 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 (i)의 피적분함수의 $\int_2^5$는 0.548287, (ii)의 피적분함수의 $\int_0^1$는 0.234276, $\int_{1/2}^2 \operatorname{cosech} x\,dx$는 1.134488이며, 각각 부정적분(antiderivative)으로 구한 값과 소수점 아래 12자리 이상까지 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 중복된 인수를 놓치고 $\frac{A}{x-1} + \frac{C}{x+1}$만으로 시도하거나, $x^2 - 1$이 인수분해된다는 사실 자체를 잊는 것.
- 로그 안의 절댓값 기호를 빠뜨리는 것. 피적분함수는 $x - 1$, $1 + 3t$, $\tanh\frac{x}{2}$가 음수인 경우에도 정의된다.
- (ii)에서 dx에서 나오는 인수 $\frac{2}{1+t^2}$를 잊는 것.

STEP 너머

치환 $t = \tan\frac{x}{2}$(바이어슈트라스 치환(Weierstrass substitution)이라고도 한다)는 $\sin x$와 $\cos x$의 **모든** 유리함수가 초등함수인 부정적분을 가진다는 것을 보여 준다. t의 모든 유리함수는 부분분수로 처리할 수 있기 때문이다. 그 배경에는 단위원을 유리함수로 매개화(parametrisation)하는 방법이 있으며, 이는 모든 피타고라스 세 쌍(Pythagorean

triples)을 만들어 내는 바로 그 매개화이다. 도대체 어떤 함수가 초등함수인 부정적분을 가지는가 하는 질문은 리우빌(Liouville)의 정리와 미분대수(differential algebra)로 이어진다. 적분의 해석학적 기초에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP II 1992, 문제 9

순수수학 • 스칼라 삼중곱

> **STEP II 1992, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q9

핵심 아이디어

$\mathbf{r}$에 대한 식을 $\mathbf{a}$에 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$의 일차결합을 더한 꼴로 정리하면, 이것이 A, B, C를 지나는 평면임을 알 수 있다. 그 평면의 법선(normal)은 평면 위에 놓인 두 벡터의 외적(cross product)이고, 이 외적을 전개하면 문제에 나오는 세 개의 삼중곱(triple product)이 정확히 나타난다. 그다음에는 항등식이 **모든** λ와 μ에 대해 성립하므로, 편리한 값을 골라 대입하면 된다.

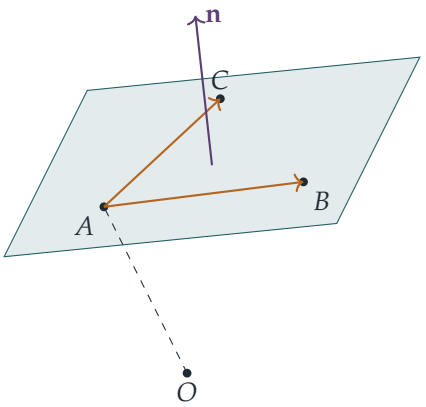
풀이

자취

방정식을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

이는 점 A에 두 벡터 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$와 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}-\mathbf{a}$의 임의의 일차결합을 더한 것이다. 이 두 벡터는 평행하지 않다. 만약 평행하다면 A, B, C가 한 직선 위에 놓이게 되고, 직선과 O는 항상 어떤 평면 위에 함께 놓이는데, 이는 가정에 의해 배제된다. 따라서 λ와 μ가 모든 실수 값을 가질 때 $\mathbf{r}$는 A, B, C**를 지나는 평면**을 그린다. $(\lambda,\mu) = (0,0), (1,0), (0,1)$로 놓으면 각각 A, B, C 자신이 된다. O는 평면 ABC 위에 있지 않으므로, 이 평면은 원점을 지나지 않는다.



방정식 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$

평면의 법선은 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$에 모두 수직이므로 다음과 같이 잡는다.

$$\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

두 벡터가 평행하지 않으므로 이 벡터는 영벡터가 아니다. $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$과 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$를 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}\mathbf{n}&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{a}\\&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned}$$

평면 위의 모든 점은 A와 $\mathbf{n}$에 수직인 벡터만큼 차이가 나므로 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$이다. $\mathbf{a}$는 $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$와 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$에 모두 수직이므로

$$p=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

따라서 평면의 방정식은 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$이다.

생각해 보기 $\mathbf{r}$의 매개변수 표현을 대입하면 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$은 무엇이 되는가?

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}$이 필요하다. 벡터는 자신을 포함하는 외적과 항상 수직이므로, 각각에서 세 항 중 두 항이 사라진다.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\qquad\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\qquad\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

점 $\mathbf{r}=(1-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$는 모든 λ, μ에 대해 평면 위에 있으므로, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$로부터

$$(1-\lambda-\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

양변에서 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$를 빼면, 모든 스칼라 λ, μ에 대해

$$-(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

이 성립하고, 이것이 보이려던 식이다.

결론 이끌어 내기

항등식이 모든 λ와 μ에 대해 성립하므로, 항을 분리해 내는 값을 고른다.

- $\lambda = 1, \mu = 0$: $-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = 0$.
- $\lambda = 0, \mu = 1$: $-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$.

두 식을 합치면

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

(같은 말이지만, 좌변은 λ와 μ에 대한 일차식이고 항등적으로 0이므로 λ의 계수와 μ의 계수가 모두 0이어야 한다.)

A, B, C, O가 한 평면 위에 있을 때

이때 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$는 모두 O를 지나는 한 평면 위에 놓인다. 그러면 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$는 그 평면에 수직(또는 영벡터)이므로 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$이고, 마찬가지로 나머지 두 삼중곱도 0이 된다. 기하적으로 보면 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$가 만드는 평행육면체(parallelepiped)가 납작해져서 부피가 0이다. 결과는 여전히 참이지만, $0 = 0 = 0$이라는 자명한 형태로 성립한다. A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으면 자취는 여전히 평면이지만 원점을 지나므로 $p = 0$이고, 그 방정식은 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0$이다. A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$이고 자취는 직선(세 점이 모두 일치하면 한 점)일 뿐이므로, 이 논증으로는 아무런 정보도 얻을 수 없다.

검산

- $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = \mathbf{j}, \mathbf{c} = \mathbf{k}$로 놓으면 세 삼중곱은 모두 1이고, $\mathbf{n} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $p = 1$이다. 즉 평면 $x + y + z = 1$이 되고, 이 평면은 실제로 세 점을 포함한다.
- 무작위 정수 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$의 순서쌍 2000개를 정확한 분수 계산으로 시험하였다. $\mathbf{n}$의 전개식, p의 값, 무작위 λ, μ에 대한 방정식 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$, 세 삼중곱의 상등이 모두 정확히 성립하였다. 한 평면 위에 있는 순서쌍에서는 모든 삼중곱이 0이었다.

흔한 실수

- $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$를 전개할 때의 부호 실수: 항 $-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$는 $+\mathbf{a}\times\mathbf{b}$가 되고, $-\mathbf{a}\times\mathbf{c}$는 $+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$가 된다.
- $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$인 이유를 밝히지 않는 것. 바로 이 부분에서 (세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않다는 사실을 통해) 네 점이 한 평면 위에 있지 않다는 조건이 쓰인다.

STEP 너머

스칼라 삼중곱(scalar triple product) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$는 행이 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$인 3×3 행렬식(determinant)이며, 여기서 증명한 순환 대칭성은 행을 순환 치환(cyclic permutation)하면(두 번의 자리바꿈) 행렬식이 변하지 않는다는 사실이다. 그 값은 세 벡터가 만드는 평행육면체의 부호 있는 부피이고, 세 벡터가 일차종속(linearly dependent)일 때, 즉 한 평면 위에 있을 때 정확히 0이 된다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 부피의 배율로서의 행렬식이라는 일반 이론으로 발전한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이를 명료하게 전개한다.

풀이

STEP II 1992, 문제 10

순수수학 • 복소평면 위의 자취

> **STEP II 1992, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q10

핵심 아이디어

$\dfrac{z-1}{z} = \dfrac{1-z}{0-z}$로 쓰자. 이 값의 편각(argument)은 방향 $z \to 0$에서 방향 $z \to 1$까지 시계 반대 방향으로 잰 각이다. 따라서 편각을 고정하면 0에서 1까지의 선분이 z에서 이루는 각이 고정되고, 그다음은 원에 관한 정리(circle theorems)들(같은 호에 대한 원주각, 원에 내접하는 사각형의 대각)이 해결해 준다. 마지막 소문항도 같은 아이디어인데, 0에서 1까지의 선분 대신 현 z_4z_2를 쓴다는 점만 다르다.

풀이

(문제의 진술에 오타가 있다. 조건은 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$여야 한다.)

두 가지 사실이 모든 일을 해 준다. 첫째, $\arg\dfrac{z-1}{z} = \arg(1-z) - \arg(0-z)$이므로, 이 편각은 z에서 직선 $z0$으로부터 직선 $z1$까지 시계 반대 방향으로 잰 각이다. 둘째, 이 값을 보면 z가 실수축의 어느 쪽에 있는지 알 수 있다.

$$\operatorname{Im}\frac{z-1}{z} = \operatorname{Im}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

따라서 $\arg\frac{z-1}{z} \in (0,\pi)$인 것은 정확히 $\operatorname{Im} z > 0$일 때이고, $(-\pi,0)$에 속하는 것은 정확히 $\operatorname{Im} z < 0$일 때이다. 실수축 위의 점에서는 몫이 실수가 되고(편각 0 또는 π), $z = 0, 1$에서는 편각이 아예 정의되지 않는다.

소문항 (i)

여기서 $\operatorname{Im} z > 0$이고, 0에서 1까지의 선분이 z에서 이루는 각은 α이다. 고정된 현(chord)이 고정된 각을 이루는 실수축 위쪽의 점들은 그 현의 양 끝점을 지나는 원의 한 호를 이룬다(같

은 호에 대한 원주각은 서로 같다). 거꾸로, 그 호 위의 모든 점에서 현을 보는 각은 α이며, 점이 현의 위쪽에 있으므로 이 각은 시계 반대 방향이다. 따라서 호 전체가 자취(locus)에 속한다.

원을 구체적으로 정해 보자. 중심각은 2α이므로, 길이가 1인 현에 대해 반지름은 $\dfrac{1}{2\sin\alpha}$이고, 중심은 직선 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 위의 높이 $\frac{1}{2}\cot\alpha \geq 0$인 곳에 있다. 자취는 원

$$\left|z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\cot\alpha\right| = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

중 실수축 위쪽에 있는 호이며, 끝점 0과 1은 제외한다. $\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$이므로 이 호는 우호(major arc)이다. $\alpha = \frac{1}{2}\pi$일 때에는 0에서 1까지를 지름으로 하는 위쪽 반원이 된다(반원에 대한 원주각).

소문항 (ii)

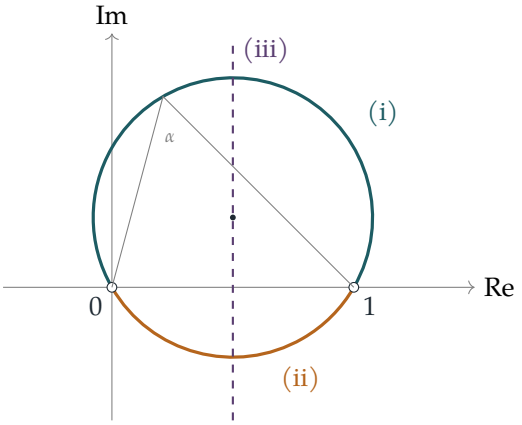
이번에는 편각 $\alpha - \pi$가 $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$에 속하므로 $\operatorname{Im} z < 0$이고, 현이 z에서 이루는 각의 크기는 $\pi - \alpha$이며 시계 방향이다.

? **생각해 보기** 현이 실수축 아래쪽에서 $\pi - \alpha$의 각을 이루는 원은 어느 원인가?

(i)과 같은 원이다. P가 (i)의 호 위에 있고 Q가 그 원의 다른 호 위에 있으면, $0PQ1$(적절한 순서로 잡은 것)은 P와 Q가 마주 보는 꼭짓점인 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)이므로, P와 Q에서의 각의 합은 π이다. 따라서 실수축 아래쪽의 열호(minor arc)가 바로 각이 $\pi - \alpha$인 곳이다. 자취는 (i)의 원 중 실수축 아래쪽에 있는 호이며, 이번에도 0과 1은 제외한다. 소문항 (i)과 (ii)를 합치면 0과 1을 뺀 원 전체가 된다. ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$이면 (ii)는 아래쪽 반원이다.)

소문항 (iii)

$\left|\frac{z-1}{z}\right| = 1$은 $z \neq 0$이면서 $|z-1| = |z|$라는 뜻이다. 즉 z는 0과 1에서 같은 거리에 있다. 자취는 수직이등분선(perpendicular bisector), 곧 직선 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$이다.



그림은 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$인 경우이다. 청록색 우호가 (i), 호박색 열호가 (ii), 자주색 점선이 (iii)이며, 속이 빈 동그라미는 제외되는 점 0과 1을 나타낸다.

마지막 소문항

$f(z) = \dfrac{z - z_2}{z - z_4}$라 하자. $(z_1 - z_4)(z_3 - z_2) = (z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$이므로

$$\frac{f(z_1)}{f(z_3)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)} = w,$$

이고, 따라서 $\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3) \pmod{2\pi}$이다.

함수 f는 소문항 (i)과 (ii)의 함수를 새로운 좌표로 나타낸 것이다. $z = z_4 + (z_2 - z_4)u$로 놓자. 이것은 회전과 확대 다음에 평행이동을 한 것으로, $u = 0, 1$을 각각 z_4, z_2로 보낸다. 그러면

$$f(z) = \frac{(z_2 - z_4)(u - 1)}{(z_2 - z_4)u} = \frac{u - 1}{u}.$$

네 점을 지나는 원은 u평면에서 0과 1을 지나는 원에 대응한다.

> **생각해 보기** z_1과 z_3은 왜 서로 다른 호 위에 있는가?

네 점은 원을 따라 z_1, z_2, z_3, z_4의 순서로 놓여 있으므로, 현 z_2z_4는 원을 두 호로 나누고, 한 호에는 z_1이, 다른 호에는 z_3이 들어 있다. u평면에서 이 두 호 중 하나는 실수축 위쪽에, 다른 하나는 아래쪽에 있다.

(i)과 (ii)에 의해, $\frac{u-1}{u}$의 편각은 위쪽 호에서 일정한 값 $\beta \in (0, \pi)$를, 아래쪽 호에서 값 $\beta - \pi$를 갖는다. 여기서는 $\beta \le \frac{1}{2}\pi$를 가정하지 않는다. 위의 원에 관한 정리를 이용한 논증은 그 제한을 한 번도 쓰지 않았기 때문이다. 따라서

$$\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3) = \pm\big(\beta - (\beta - \pi)\big) = \pm\pi \pmod{2\pi},$$

이므로 w는 실수이며, 사실 음수이다. ■

검산

정사각형 $z_1 = 1, z_2 = \mathrm{i}, z_3 = -1, z_4 = -\mathrm{i}$에 대해 $w = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-(1-\mathrm{i})^2}{-(1+\mathrm{i})^2} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = -1$을 얻으며, 이는 음의 실수이다. (i)에 대해서는 $\alpha = \frac{1}{2}\pi, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$로 잡자. 그러면 $\frac{z-1}{z} = \frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$이고, 그 편각은 $\frac{1}{2}\pi$이다. 또한 여러 α 값에 대해 각 호가 앞에서 말한 편각을 갖는다는 것과, 무작위로 잡은 원 위에 순서대로 놓인 네 점의 무작위 집합 10^4개에 대해 w가 음의 실수라는 것을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- (i)의 답으로 원 전체를 제시하는 것. 올바른 편각을 갖는 것은 한 호뿐이며, 다른 호에서는 편각이 $\alpha - \pi$가 되는데, 이것이 바로 소문항 (ii)이다.
- 편각이 정의되지 않는 0과 1을 제외하는 것을 잊는 것.
- $(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$의 음의 부호들을 잘못 다루어 $\arg w$의 부호를 틀리는 것. 위와 같이 부호를 짝지어 처리하면 이를 피할 수 있다.

STEP 너머

양 w는 (부호와 순서를 제외하면) 네 점의 **복비**(*cross-ratio*)이다. 복비는 모든 뫼비우스 변환(Möbius transformation) $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$에 대해 변하지 않으며, 네 점이 한 원 또는 한 직선 위에 있는 것은 정확히 그 복비가 실수일 때이다. 뫼비우스 변환은 원과 직선을 원과 직선으로 보내므로, 이로부터 네 점이 한 원 위에 있음(concyclicity)을 깔끔하게 증명하는 방법을 얻는다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP II 1992, 문제 11

역학 • 포물체 운동

> **STEP II 1992, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q11

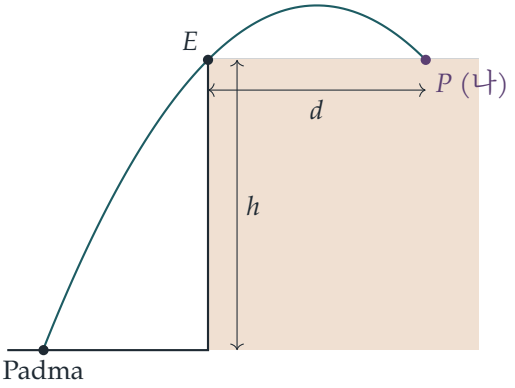
핵심 아이디어

이 던지기에서 까다로운 부분은 지갑을 높이 h까지 올리는 것이 아니라 절벽 꼭대기를 가로질러 보내는 것이다. 지갑은 절벽 가장자리에서 나에게 이르기까지, 즉 수평 거리로 적어도 d만큼, 줄곧 높이 h 이상에 있어야 한다. 그러므로 지갑이 처음으로 높이 h에 도달하는 순간부터의 운동만 살펴보자. 그때부터 지갑은 평지(절벽 꼭대기의 높이) 위의 평범한 포물체(projectile)이고, 그 속력은 에너지 보존(energy conservation)으로 알 수 있으며, 나머지는 익숙한 최대 도달 거리(maximum range) u^2/g가 해결해 준다.

풀이

모형

지갑을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(particle)으로 보고, 지면 높이에서 던진다고 하자(Padma의 키는 무시한다). 절벽의 위쪽 가장자리를 E, 내가 서 있는 지점을 P라 하면, P는 높이 h에 있고 E에서 수평 거리 d만큼 더 떨어져 있다. 절벽 면은 수직이고 해변은 절벽을 사이에 두고 나와 반대쪽에 있으므로, Padma가 어디에 서든 지갑은 E 위를 지나간 뒤(최악의 경우 E를 살짝 스친 뒤) P로 내려와야 한다.



풀이 내내 한 가지 사실을 사용한다. 어떤 높이에서 질점의 속력이 u이고 수평선 위로 각 α를 이루며 움직이면, 질점은 시간 $2u\sin\alpha/g$ 뒤에 같은 높이로 돌아오고, 그동안 수평으로

$$\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \le \frac{u^2}{g},$$

만큼 이동한다. 등호는 정확히 $\alpha = 45^\circ$일 때 성립한다.

조건은 필요조건이다

어떤 던지기로 지갑이 P에 도달한다고 하자. 지갑은 높이 h에 도달해야 하므로, 경로에서 처음으로 높이 h가 되는 점을 Q라 하자. 절벽 아래를 위치 에너지(potential energy)의 기준으로 잡으면, 에너지 보존에 의해 Q에서의 속력 u는

$$u^2 = V^2 - 2gh.$$

이다.

생각해 보기 왜 Q는 P에서 수평 거리로 적어도 d만큼 떨어져 있어야 할까?

지갑의 수평 위치가 절벽 면의 위치와 같아질 때, 지갑은 높이 h 이상에 있어야 한다. 그렇지 않으면 절벽 면에 부딪히기(또는 가장자리 아래로 지나가기) 때문이다. 지갑의 높이는 0에서부터 연속적으로 올라가므로, 그 시점에는 이미 높이 h에 도달해 있다. 즉 Q는 E의 해변 쪽에 있거나 E와 일치한다. P는 E에서 수평 거리 d만큼 더 떨어져 있으므로, Q에서 P까지의 수평 거리는 적어도 d이다.

Q와 P 사이에서 지갑은 속력 u로 출발하여 높이 h에서 다시 높이 h로 돌아온다. 도달 거리에 관한 사실에 의해, 이 구간에서 이동하는 수평 거리는 많아야 u^2/g이다. 따라서

$$d \le \frac{u^2}{g} = \frac{V^2 - 2gh}{g}, \qquad \text{즉,} \qquad V^2 \ge g(2h + d).$$

조건은 충분조건이다

이제 $V^2 \geq g(2h+d)$라 하자. 그러면 $u^2 = V^2 - 2gh \geq gd > 0$이므로 $gd/u^2 \leq 1$이고, $0 < \alpha \leq 45°$이면서

$$\sin 2\alpha = \frac{gd}{u^2}.$$

을 만족하는 각 α를 고를 수 있다. 속력 u로 E를 지나면서 해변에서 멀어지는 방향으로 수평선 위로 각 α를 이루며 움직이는 포물선 경로를 생각하자. 도달 거리에 관한 사실에 의해, 이 경로는 E에서 수평 거리 $u^2 \sin 2\alpha / g = d$만큼 떨어진 곳에서 다시 높이 h로 내려오는데, 그곳이 바로 P이다. E와 P 사이에서 경로는 높이 h보다 위에 있으므로 절벽 꼭대기에 걸리지 않는다.

이 경로를 E에서부터 시간을 거슬러 따라가 보자. 더 이른 시각일수록 지갑은 더 낮고 해변 위로 더 멀리 나가 있다(연직 속도가 더 컸고 위쪽을 향했기 때문이다). 따라서 경로는 절벽 아래에서 양의 수평 거리만큼 떨어진 해변의 어떤 점에서 지면과 만난다. E에 이르기 전까지 경로는 전부 절벽 면의 해변 쪽에 있으므로 가로막는 것이 없고, 해변이 넓으므로 Padma는 그 점에 설 수 있다. 에너지 보존에 의해 그 점에서의 속력은 $\sqrt{u^2 + 2gh} = V$이다. 그러므로 Padma가 그 점에서 경로의 방향으로 속력 V로 던지면, 지갑은 이 경로를 따라 움직여 나에게 도달한다.

(정확히 $V^2 = g(2h+d)$이면 $\alpha = 45°$이고 지갑은 가장자리 E를 살짝 스친다. V가 더 크면 $(0°, 90°)$에서 가능한 각이 두 개 있고, 두 경우 모두 지갑은 가장자리보다 확실히 위로 지나간다.)

두 부분을 합하면, Padma가 지갑을 나에게 던질 수 있을 필요충분조건은 $V^2 \geq g(2h+d)$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $d = 0$이면 조건은 $V^2 \geq 2gh$가 되는데, 이는 연직으로 던져서 높이 h에 도달하는 데 꼭 필요한 조건이다.
- $h = 0$이면 조건은 $V^2 \geq gd$가 되는데, 이는 평지에서의 통상적인 최대 도달 거리이다.
- 절벽 가장자리를 무시하면 Padma가 할 수 있는 최선은 절벽 아래에 서는 것이고, 모든 궤적의 경계 포물선(bounding parabola)은 $V^2 \geq g\left(h + \sqrt{h^2 + d^2}\right)$만을 주는데, $\sqrt{h^2 + d^2} \leq h + d$이므로 이는 더 약한 조건이다. 따라서 실제로 결정적인 제약은 가장자리이다.
- 수치로 확인해 보면, $g = 9.8$, $h = 20$, $d = 15$일 때 임계 속력은 $\sqrt{539} \approx 23.2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$이다. Padma는 절벽 아래에서 약 11.4 m 떨어진 곳에 서고, 던지기를 단계별로 시뮬레이션하면 지갑은 E를 스치며 가장자리에서 15.0 m 떨어진 곳에 떨어진다. 임의의 h, V에

대해 모든 발사각을 훑어본 결과, 경로에서 높이가 h인 두 점 사이의 수평 간격의 최댓값은 $(V^2 - 2gh)/g$임이 확인되었다.

흔한 실수

- 절벽 아래에서 본 점 P에 대한 경계 포물선만 사용하는 것. 이는 절벽 가장자리를 무시하므로, 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 조건을 준다.
- 한 방향만 증명하는 것. "충분" 방향을 보이려면 구체적인 던지기를 제시해야 하며, 그 던지기가 해변에서 시작하고 절벽에 부딪히지 않는다는 확인도 포함해야 한다.

STEP 너머

높이 h에서 운동을 새로 시작하는 기법이 통하는 이유는 운동 방정식이 시간이 흐르거나 수평으로 평행이동해도 변하지 않으므로, 궤적 위의 어느 점이든 새로운 발사점으로 볼 수 있기 때문이다. "어떤 목표에 도달할 수 있는가?" 꼴의 문제는 곡선족의 포락선(envelope)에 관한 문제이며, 장애물이 있을 때는 가장 먼저 걸리는 제약이 답을 결정한다. 이 아이디어는 최적화(optimisation)와 변분법(calculus of variations)에서 다시 등장한다. 포물체 운동과 에너지 방법을 더 공부하려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP II 1992, 문제 12

역학 • 힘의 모멘트와 탄성 끈

> **STEP II 1992, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q12

핵심 아이디어

각 바퀴는 자유롭게 회전할 수 있으므로, 바퀴가 평형(equilibrium)을 이루기 위한 유일한 조건은 바퀴 중심에 대한 모멘트(moment)가 균형을 이루는 것이다. 매달린 입자는 바퀴를 한쪽 방향으로 돌리려 하고, 탄성줄(elastic string)은 반대 방향으로 바퀴를 되돌리려 한다. 기하학적 관계로부터 탄성줄의 늘어난 길이(extension)를 θ로 나타낼 수 있으므로, 후크의 법칙(Hooke's law)으로 장력(tension)을 구하고, 모멘트를 계산하면 θ에 대한 방정식 하나를 얻는다. 따라서 평형 위치의 개수를 세는 것은 실제로 의미가 있는 각도 범위에서 이 방정식의 해의 개수를 세는 것과 같다.

풀이

모형 세우기

입자는 질점으로, 입자를 매단 줄은 가볍고 늘어나지 않는 것으로, 탄성줄은 가볍고 후크의 법칙을 따르는 것으로 모형화한다. 축은 매끄러우므로 각 중심에서의 반력은 그 중심에 대한 모멘트를 갖지 않는다.

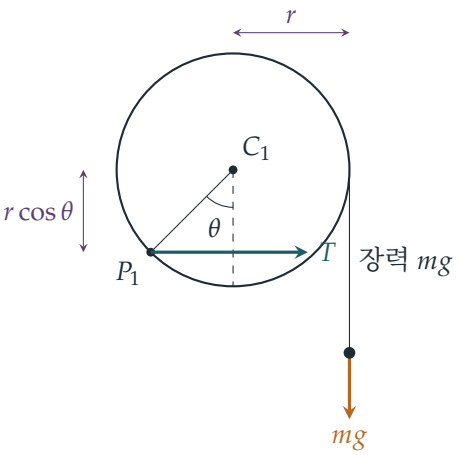
C_1C_2를 수평으로 둔다. 그림에서 P_1은 C_1보다 바깥쪽(왼쪽)으로 $r\sin\theta$만큼, 아래로 $r\cos\theta$만큼 떨어져 있고, P_2는 이와 대칭인 위치에 있다. 따라서 P_1과 P_2는 같은 높이에 있고 탄성줄은 수평이며, 그 길이는

$$P_1P_2 = d + 2r\sin\theta.$$

이다. 탄성줄의 자연 길이(natural length)는 d이므로 늘어난 길이는 $2r\sin\theta$이고, 후크의 법칙에 의해 장력은

$$T = \frac{\lambda\,(2r\sin\theta)}{d}.$$

이다.



W_1에 매달린 입자는 평형 상태로 매달려 있으므로 그 줄의 장력은 mg이다. 이 줄은 W_2에 가까운 쪽에서 바퀴의 접선 방향으로 떨어져 나오며, C_1로부터의 수평 거리는 r이다. 탄성줄은 P_1을 W_2 쪽으로 힘 T로 수평하게 당기고, 그 작용선은 C_1보다 $r\cos\theta$만큼 아래에 있다.

평형 조건

C_1에 대한 모멘트를 구하자. 무게는 W_1을 (그림에서) 시계 방향으로 모멘트 mgr만큼 돌리고, 장력은 반시계 방향으로 모멘트 $Tr\cos\theta$만큼 돌린다. 따라서 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$를 이용하면

$$mgr = Tr\cos\theta = \frac{2\lambda r\sin\theta}{d}\, r\cos\theta = \frac{\lambda r^2 \sin 2\theta}{d},$$

이다. 양변을 λr^2으로 나누면

$$\sin 2\theta = \frac{mgd}{\lambda r},$$

를 얻어 원하는 결과가 나온다. 대칭성에 의해 C_2에 대한 모멘트를 구해도 같은 방정식이 나온다.

어떤 각도가 허용되는가?

> **생각해 보기** 왜 θ는 아무 각도나 될 수 없어서 $\sin 2\theta = k$가 무한히 많은 해를 갖지 않는 것일까?

장력의 모멘트는 무게의 모멘트와 반대 방향이어야 한다. $\sin\theta \le 0$이면 점 P_1과 P_2 사이의 거리가 d 이하이므로 탄성줄이 느슨해져 $T = 0$이 되고, mgr과 균형을 이룰 것이 없다. $\cos\theta \le 0$이면 줄이 C_1과 같은 높이이거나 그보다 위를 지나므로, C_1에 대한 줄의 모멘트는

o이거나 바퀴를 무게와 같은 방향으로 돌린다. 어느 경우든 평형은 없다. 따라서 평형이 되려면

$$0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}, \qquad \text{즉,} \qquad 0 < 2\theta < \pi.$$

이어야 한다. (두 바퀴가 **서로 다른** 각도에 있을 수 있을까? 각 중심에 대한 장력의 모멘트는 T에 그 중심에서 직선 P_1P_2까지의 수직 거리를 곱한 것이며, 두 모멘트 모두 mgr과 같아야 한다. 따라서 C_1과 C_2는 이 직선으로부터 같은 거리에 있고, 직선에 대해 같은 쪽, 즉 직선이 중심들보다 아래에 있다. 그러므로 이 직선은 C_1C_2와 평행하고, P_1과 P_2는 같은 깊이에 있으며 두 각도는 같다. 두 각도의 부호가 반대라면 줄의 길이가 정확히 d가 되어 느슨해지기 때문이다. 따라서 모든 평형은 그림과 같은 대칭적인 형태이다.)

$k = \dfrac{mgd}{\lambda r} > 0$이라 하자. $0 < 2\theta < \pi$에서 $\sin 2\theta$는 0에서 증가하여 $2\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 1이 되고 다시 0으로 감소하므로, $(0, 1)$의 모든 값을 정확히 두 번, 값 1을 정확히 한 번 취한다. 따라서 방정식 $\sin 2\theta = k$는

- $k > 1$이면 해가 없다.
- $k = 1$이면 정확히 하나의 해 $\theta = \frac{\pi}{4}$를 갖는다.
- $0 < k < 1$이면 정확히 두 개의 해 $\theta = \alpha$와 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$를 갖는다. 여기서 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k \in (0, \frac{\pi}{4})$이다.

$k > 1 \iff \lambda < \dfrac{mgd}{r}$이므로 답은 다음과 같다.

소문항 (i)

$\lambda < \dfrac{mgd}{r}$일 때 평형 위치는 없다. 탄성줄이 너무 약해서 어떤 각도에서도 입자를 붙잡아 둘 수 없다.

소문항 (ii)

$\lambda = \dfrac{mgd}{r}$일 때 평형 위치는 단 하나이며, $\theta = \frac{\pi}{4}$이다.

소문항 (iii)

$\lambda > \dfrac{mgd}{r}$일 때 평형 위치는 정확히 두 개이며, $\theta = \alpha$와 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$이다.

소문항 (iv)

θ가 $(0, \frac{\pi}{2})$로 제한되므로, 평형 위치가 두 개보다 많아지는 λ의 값은 없다.

검산

- 차원(dimensions): λ는 힘이고 mg도 힘이며, d/r은 길이의 비이므로 $mgd/(\lambda r)$은 사인 값이 그래야 하듯 무차원이다.
- 극한의 경우: $\lambda \to \infty$이면 줄은 늘어나지 않게 되고, 두 해는 각각 $\theta \to 0$ (아주 작은 늘어남, 큰 장력)과 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ (줄이 중심과 거의 같은 높이에 있어 모멘트 팔이 아주 짧음)로 다가간다. 둘 다 타당하다.
- 수치적으로, $m = 1$, $d = 4$, $r = 1$, $g = 9.8$, $\lambda = 3mgd/r$로 두어 $k = \frac{1}{3}$이 되게 하면, 두 바퀴 전체를 (두 각도가 달라질 수 있도록) 모형화했을 때 평형은 정확히 두 개이며 $\theta \approx 0.1699$와 $\theta \approx 1.4009$에 있다. 이는 각각 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$과 $\frac{\pi}{2}$에서 그 값을 뺀 것이다.

흔한 실수

- 늘어난 길이를 $2r\sin\theta$가 아니라 $r\sin\theta$로 잡는 것. 줄의 양 끝이 모두 바깥쪽으로 움직인다.
- 장력의 모멘트 팔(moment arm)로 $r\sin\theta$를 쓰는 것. 장력은 수평이므로 그 팔은 **수직** 거리 $r\cos\theta$이다.
- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$만이 물리적으로 가능하다는 것을 잊고 (iv)에 "무한히 많다"라고 답하는 것.

STEP 너머

매개변수가 변할 때 평형의 개수를 세는 것은 **분기 이론**(*bifurcation theory*)의 출발점이다. 여기서는 $\lambda > mgd/r$일 때의 두 평형이 $\lambda = mgd/r$에서 합쳐진 뒤 사라지는데, 이를 안장-마디(saddle-node) 분기(또는 접힘(fold) 분기)라고 한다. 위치 에너지(potential energy)를 살펴보면 두 평형 중 하나는 안정(stable)하고 다른 하나는 불안정(unstable)하다는 것이 드러나는데, 이는 접힘 분기의 전형적인 특징이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 모멘트, 강체의 평형, 그리고 위치 에너지를 이용한 안정성을 다룬다.

풀이

STEP II 1992, 문제 13

역학 • 마찰과 연결된 입자

STEP II 1992, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

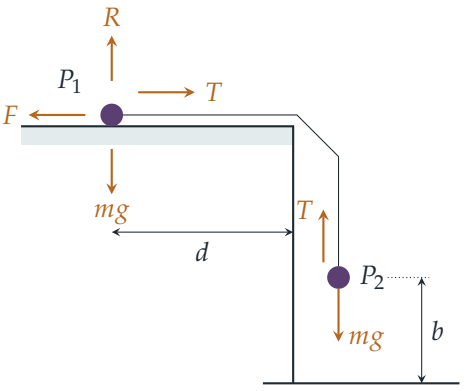
step.maths.org/questions/92-s2-q13

핵심 아이디어

운동은 두 단계로 이루어진다. P_2가 떨어지는 동안에는 줄이 팽팽하고, 두 입자는 하나의 공통 가속도(acceleration)로 함께 움직인다. P_2가 바닥에 닿으면 줄이 느슨해지고, P_1은 마찰(friction)을 받아 미끄러지다가 멈출 뿐이다. 모든 것은 충돌 순간의 속력에서 나온다. 첫 번째 부분에서는 정지 거리를 모서리까지 남은 거리와 비교하고, 두 번째 부분에서는 두 시간을 비교한다.

풀이

P_1과 P_2를 입자로, 줄을 가볍고(light) 늘어나지 않으며(inextensible) 매끄러운(smooth) 모서리 위를 지나는 것으로 모형화한다. 따라서 장력(tension) T는 줄 전체에서 같다. 탁자는 P_1에 대하여 거칠다(rough). $b < d$라고 가정하여 P_1이 모서리에 닿기 전에 P_2가 바닥에 닿도록 한다(줄의 길이는 이후 아무 역할도 하지 않는다).



첫 번째 부분

1단계: 줄이 팽팽한 경우. P_1에 대하여 연직 방향으로 힘을 분해하면 $R = mg$이다. P_1은 미끄러지고 있으므로 마찰은 한계 마찰(limiting friction)이다. 즉 $F = \mu R = \mu mg$이고, 운동을 방해하는 방향으로 작용한다. 공통 가속도를 a라 하면

$$\begin{aligned} P_2 \text{ (아래쪽)}: &\quad mg - T = ma, \\ P_1 \text{ (모서리 쪽)}: &\quad T - \mu mg = ma. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 $2ma = mg(1-\mu)$이므로 $a = \frac{1}{2}g(1-\mu)$이고, $\mu < 1$이므로 이 값은 양수이다. 즉 계는 실제로 움직이기 시작한다. P_2는 정지 상태에서 거리 b만큼 떨어지므로, 바닥에 닿을 때의 속력 V는 다음을 만족한다.

$$V^2 = 2ab = gb(1-\mu).$$

이 순간 P_1도 같은 속력 V를 가지며, 거리 b만큼 움직였으므로 모서리로부터 $d-b$만큼 떨어져 있다.

2단계: 줄이 느슨한 경우. 충돌 후 P_2는 바닥에 있거나 위로 튀어 오르고, P_1은 계속 모서리 쪽으로 움직이므로 줄은 느슨해지고 $T = 0$이다.

> **생각해 보기** P_2가 튀어 오르는 동안 줄이 다시 팽팽해질 수 없는 이유는 무엇인가?

충돌 순간에 줄은 정확히 팽팽했다. 그 뒤 P_1은 모서리에 더 가까워지므로 모서리 너머로 줄이 더 풀려 나가고, P_2는 바닥보다 아래로 내려가지 않으므로 충돌 순간보다 더 많은 줄을 필요로 하지 않는다. 따라서 그 이후로 줄은 계속 느슨하다.

그러므로 P_1은 오직 μg의 크기로 감속하며, 모서리에 먼저 닿지 않는다면 다음 거리만큼 더 움직인 뒤 정지한다.

$$s = \frac{V^2}{2\mu g} = \frac{b(1-\mu)}{2\mu},$$

따라서 P_1이 떨어질 필요충분조건은 $s > d - b$이다.

$$\begin{aligned} \frac{b(1-\mu)}{2\mu} > d - b &\iff b - b\mu > 2\mu d - 2\mu b \qquad (\text{양변에 곱함: } 2\mu > 0) \\ &\iff b > \mu(2d - b) \\ &\iff \mu < \frac{b}{2d-b}, \end{aligned}$$

마지막 단계에서는 $2d - b$로 나누었는데, $d > b$이므로 이 값은 양수이다. 모든 단계는 거꾸로도 성립하므로, 이것이 요구된 "필요충분조건"이다. (μ가 $b/(2d-b)$와 같으면 P_1은 정확히 모서리에서 멈추고 떨어지지 않는다.)

두 번째 부분

이제 $\mu > b/(2d-b)$이므로 P_1은 탁자 위에서 멈춘다. P_2가 처음 바닥에 닿는 순간부터 시간을 잰다. 이 순간 두 입자의 속력은 모두 V이다.

P_1**:** 속력 V에서 μg의 크기로 감속하므로, 다음 시간 후에 멈춘다.

$$t_1 = \frac{V}{\mu g}.$$

P_2**:** 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 의해 P_2는 속력 eV로 튀어 오른다. 줄이 느슨하므로 중력만 받으며 자유롭게 움직이고, $eVt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$일 때, 즉 다음 시간 후에 바닥으로 돌아온다.

$$t_2 = \frac{2eV}{g}.$$

(충돌은 순간적이므로 첫 번째 튐에서 시간이 소모되지 않는다.)

P_1이 두 번째 튐 전에 정지하는 것은 정확히 $t_1 < t_2$일 때이다.

$$\frac{V}{\mu g} < \frac{2eV}{g} \iff \frac{1}{\mu} < 2e \iff e > \frac{1}{2\mu},$$

여기서 $V/g > 0$으로 나누었다. 따라서 $e > 1/(2\mu)$이면, 요구된 대로 P_2가 두 번째로 튀기 전에 P_1이 정지한다. 사실 그 역도 성립한다.

검산

- 극한의 경우: $\mu \to 0$이면 경계값 $b/(2d-b)$보다 당연히 작아지고, 매끄러운 탁자에서 P_1은 확실히 미끄러져 떨어진다. $b = d$이면 경계값은 1이 되므로 $\mu < 1$일 때 항상 떨어지는데, P_2가 바닥에 닿을 때 P_1은 이미 모서리에 있으면서 여전히 움직이고 있으므로 옳다.
- $\mu < 1$이므로 두 번째 조건이 성립하려면 $e > \frac{1}{2}$이어야 한다. 거의 튀지 않는 바닥에서는 짧게 튀어 오르므로, 예상대로 P_2가 먼저 다시 바닥에 닿는다.
- 수치적으로 $d = 2$, $b = 1$, $\mu = 0.5$, $e = 0.8$($g = 9.8$로 둠)일 때 운동을 단계별로 계산하면 $t_1 \approx 0.452\,\text{s}$, $t_2 \approx 0.361\,\text{s}$이고, 이는 $V^2 = 4.9$일 때의 $V/(\mu g)$와 $2eV/g$에 일치한다. 이때 $e = 0.8 < 1/(2\mu) = 1$이므로 P_2가 먼저 다시 튄다. 단계별 시뮬레이션으로 두 판정 기준을 무작위로 검사한 결과 모든 경우에 일치하였다.

흔한 실수

- 두 번째 단계에서도 장력을 남겨 두는 것: P_2가 바닥에 닿으면 줄은 느슨해지고 P_1은 마찰만으로 감속한다.

- P_1이 이미 거리 b만큼 움직였다는 것을 잊고, s를 $d - b$가 아닌 d와 비교하는 것.
- 힘 $mg(1 - \mu)$가 두 질량 모두를 가속해야 한다는 것을 잊고, 계의 가속도를 $g(1 - \mu)$로 쓰는 것.

STEP 너머

여기서 줄은 **일방향** 구속(unilateral constraint)이다. 당길 수는 있지만 밀 수는 없으므로, 줄이 느슨해지면 운동 방정식이 바뀐다. 충돌이 일어나거나 접촉이 끊길 때 지배 방정식이 바뀌는 계를 구분적으로 매끄러운 계(piecewise-smooth system) 또는 혼성계(hybrid system)라고 하며, 공학 동역학과 로봇공학에서 본격적으로 연구된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 줄, 마찰, 충돌을 꼼꼼하게 다루므로 다음 단계로 읽기에 좋다.

풀이

STEP II 1992, 문제 14

역학 • 연결된 입자와 도르래

> **STEP II 1992, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q14

핵심 아이디어

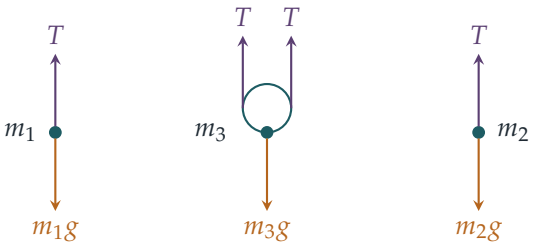
움직이는 물체는 셋이지만 줄은 하나뿐이므로, 줄 전체에 걸쳐 장력(tension) T는 하나이고 세 가속도(acceleration)를 잇는 구속 조건(constraint)도 하나이다. 각 입자에 대해 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)을 쓰고(도르래(pulley) P_3과 그에 달린 입자는 함께 움직인다), 줄의 길이 조건을 쓰면 미지수 네 개에 대한 일차방정식 네 개를 얻는다. 그러면 정지 조건은 단지 P_3의 가속도가 0이라는 뜻이 된다.

풀이

모형

도르래는 매끄럽고(smooth) 가벼우며 줄은 가볍고 늘어나지 않으므로(inextensible), 장력은 줄 전체에서 같은 값 T를 가진다. P_3이 가벼우므로 P_3과 질량 m_3인 입자는 질량 m_3인 하나의 물체를 이루며, 이 물체는 연직 방향의 줄 **두** 가닥에 매달려 있고 각 가닥은 크기 T의 힘으로 위로 당긴다.

모든 변위는 **아래쪽**을 기준으로 잰다. 고정 도르래로부터 입자 m_1, 입자 m_2, 도르래 P_3까지 아래로 잰 깊이를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하고, 가속도를 a_1, a_2, a_3(아래쪽이 양의 방향)이라 하자.



운동 방정식

각 물체에 대해 연직 방향(아래쪽이 양)으로 힘을 분해하면 다음과 같다.

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$
$$m_2 a_2 = m_2 g - T,$$
$$m_3 a_3 = m_3 g - 2T.$$

줄의 구속 조건

도르래에 감긴 고정된 길이를 무시하면, 줄은 P_1에서 m_1까지 내려가는 가닥(길이 x_1), 고정 도르래에서 P_3까지 내려가는 두 가닥(각각 길이 x_3), P_2에서 m_2까지 내려가는 가닥(길이 x_2)으로 이루어진다. 줄이 늘어나지 않으므로

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{상수}, \qquad \text{따라서} \qquad a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

이다. 여기서 뒤의 식은 두 번 미분하여 얻는다.

> **생각해 보기** x_3의 계수가 왜 1이 아니라 2인가?

P_3이 거리 d만큼 내려가면 이를 받치는 두 가닥이 모두 d만큼 길어지므로, 줄이 $2d$만큼 소모된다. 이 길이는 바깥쪽 가닥에서 와야 하므로 $x_1 + x_2$는 $2d$만큼 줄어든다. 이 인수를 놓치는 것이 이 문제를 틀리는 가장 흔한 원인이다.

장력

각 운동 방정식을 해당 질량으로 나누면

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \qquad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \qquad a_3 = g - \frac{2T}{m_3}.$$

이를 $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$에 대입하면

$$4g - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) = 0.$$

양변에 $m_1 m_2 m_3$을 곱하고 T에 대해 풀면

$$\boxed{T = \frac{4m_1 m_2 m_3\, g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1 m_2}}$$

이다. 방정식의 어떤 것도 위치에 의존하지 않으므로, 이 식은 운동하는 동안 내내(입자가 도르래에 닿을 때까지) 성립한다.

P_3이 정지해 있을 때

계는 정지 상태에서 출발하므로, P_3이 계속 정지해 있을 필요충분조건은 $a_3 = 0$, 즉 $2T = m_3 g$이다. 앞에서 구한 T의 값을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{8m_1 m_2 m_3\, g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1 m_2} &= m_3 g \\ \iff \quad 8m_1 m_2 &= m_3(m_1+m_2)+4m_1 m_2 \\ \iff \quad 4m_1 m_2 &= m_3(m_1+m_2), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $m_3 g > 0$으로 나누고 양수인 분모를 곱하였다. 따라서 $4m_1 m_2 = m_3(m_1+m_2)$이면 $a_3 = 0$이고, 요구한 대로 P_3은 정지해 있다. (각 단계는 거꾸로도 성립하므로, 이 조건은 충분조건일 뿐 아니라 필요조건이기도 하다.)

바깥쪽 입자들은 정지해 있을 필요가 없다는 점에 주의하자. 이때 $T = \frac{1}{2} m_3 g$이고 $a_1 = g - T/m_1 = -a_2$인데, 이는 $m_1 = m_2$가 아닌 한 0이 아니다. 한 입자는 올라가고 다른 입자는 같은 빠르기로 내려가며, 줄은 P_3을 움직이지 않은 채 그 아래로 미끄러진다.

검산

- 대칭인 경우 $m_1 = m_2 = m$: 조건은 $4m^2 = 2mm_3$, 즉 $m_3 = 2m$이 된다. 이는 바로 정적 평형 $2T = 2mg = m_3 g$로, 당연하면서도 안심이 되는 결과이다.
- $m_3 \to \infty$이면 $T \to \dfrac{4m_1 m_2 g}{m_1+m_2}$인데, 이는 익숙한 애트우드 기계(Atwood machine)의 장력 $\dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1+m_2}$의 두 배이다. 이것이 옳다. 무거운 P_3은 $a_3 \to g$로 자유낙하하므로 가닥들이 빠르게 가속된다. $m_3 \to 0$이면 $T \to 0$인데, 질량이 없는 도르래는 어떤 알짜힘도 지탱할 수 없기 때문이다.
- 수치로 확인해 보면, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$, $g = 9.8$(SI 단위)일 때 공식은 $T \approx 21.38\,\mathrm{N}$을 준다. 에너지(라그랑주(Lagrangian)) 방법으로 문제를 독립적으로 풀어도 같은 가속도 $a_1 \approx -0.891$, $a_2 \approx 2.673$, $a_3 \approx -0.891\,\mathrm{m\,s^{-2}}$를 얻는다. $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = 3$이면 정지 조건이 성립하며, 실제로 $a_3 = 0$이고 $a_1 = -a_2 = -4.9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이다.

흔한 실수

- P_3이 두 가닥에 매달려 있다는 것을 잊고 구속 조건을 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$으로 쓰는 것.
- P_3에 작용하는 힘이 T가 아니라 $2T$라는 것을 잊는 것.
- P_3이 정지해 있으면 계 전체가 정지해야 한다고 가정하는 것. $m_1 = m_2$가 아니라면 그렇지 않다.

STEP 너머

구속 조건 $x_1 + x_2 + 2x_3 =$ 상수는 계의 자유도(degrees of freedom)를 둘로 줄이며, 이런 계를 다루는 가장 깔끔한 방법은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)이다. 에너지를 독립 좌표로 나타내기만 하면 장력은 전혀 필요하지 않다(장력은 "구속력"이다). 앞의 수치 검산도 이 방법으로 한 것이다. 이 내용은 대학 1학년 동역학에서 만나게 된다. 도르래 같은 구속된 계에 뉴턴의 법칙을 꼼꼼히 적용하는 모습을 보기에 좋은 책으로 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 있다.

풀이

STEP II 1992, 문제 15

확률과 통계 • 무작위 행보

> **STEP II 1992, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q15

핵심 아이디어

점이 s번의 이동 중 R번을 양의 방향으로 움직이면 최종 위치는 $x = R - (s - R) = 2R - s$이고, R는 이항분포(binomial distribution)를 따른다. 따라서 여기서 다루는 확률은 모두 이항계수(binomial coefficient)의 합이다. 홀짝성(parity)이 많은 일을 해 준다. 짝수 번 이동한 뒤에는 $x = 2$와 $x = 4$만 가능하고, 홀수 번 이동한 뒤에는 $x = 3$과 $x = 5$만 가능하므로, 각 $\mathrm{P}(s)$는 이웃한 이항계수 단 두 개의 합이다. 그러면 파스칼의 법칙(Pascal's rule)에 의해 그 합이 하나의 이항계수로 줄어든다. 최댓값을 구할 때는 짝수 s와 홀수 s를 따로 나누어 연속한 두 항의 비(ratio)를 살펴본다.

풀이

처음 s번의 이동 중 양의 방향으로 움직인 횟수를 R라 하자. 각 이동은 독립이고 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 양의 방향이므로 $R \sim \mathrm{B}(s, \frac{1}{2})$이고

$$\mathrm{P}(R = r) = \binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s}.$$

s번 이동한 뒤의 위치는 $X = 2R - s$이므로, $X = x$일 필요충분조건은 $R = \frac{1}{2}(s + x)$이다. 특히 X는 s와 홀짝이 같다.

$\mathrm{P}(5)$와 $\mathrm{P}(6)$의 값

$s = 5$일 때는 $x = 3$과 $x = 5$만 가능하며, 각각 $R = 4$와 $R = 5$가 필요하다.

$$\mathrm{P}(5) = \left[\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right]\frac{1}{2^5} = \frac{5+1}{32} = \frac{3}{16}.$$

$s = 6$일 때는 $x = 2$와 $x = 4$만 가능하며, 각각 $R = 4$와 $R = 5$가 필요하다.

$$\mathrm{P}(6) = \left[\binom{6}{4} + \binom{6}{5}\right]\frac{1}{2^6} = \frac{15+6}{64} = \frac{21}{64}.$$

일반적인 짝수의 경우

$s = 2k$일 때 가능한 목표 지점은 $x = 2$와 $x = 4$이고, 각각 $R = k+1$과 $R = k+2$가 필요하다. 파스칼의 법칙 $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$에 의해

$$\mathrm{P}(2k) = \left[\binom{2k}{k+1} + \binom{2k}{k+2}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \binom{2k+1}{k+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \binom{2k+1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

이다. 마지막 단계에서는 $(2k+1) - (k+2) = k-1$이므로 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$을 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다. 이 식은 $k = 1$일 때도 성립한다. 이때 $\binom{2}{3} = 0$이므로 $x = 4$에 해당하는 항이 그냥 없어지고, 공식은 양의 방향으로 두 번 이동할 확률인 $\frac{1}{4}$를 준다.

홀수의 경우

$s = 2k+1$일 때 목표 지점은 $x = 3$과 $x = 5$이고, 각각 $R = k+2$와 $R = k+3$이 필요하다. 같은 방법으로

$$\mathrm{P}(2k+1) = \left[\binom{2k+1}{k+2} + \binom{2k+1}{k+3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \binom{2k+2}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}.$$

$k = 2$이면 이 식은 $\binom{6}{1}/32 = \frac{3}{16}$이 되어 $\mathrm{P}(5)$와 일치한다.

최댓값

$k \geq 1$에 대하여 $a_k = \mathrm{P}(2k)$, $k \geq 1$에 대하여 $b_k = \mathrm{P}(2k+1)$이라 하자($b_0 = \mathrm{P}(1) = 0$임에 주의한다). 이 값들은 모두 양수이므로 연속한 두 항을 그 비로 비교할 수 있다.

> **생각해 보기** 두 이항계수의 비는 어떻게 간단히 할까?

둘 다 계승(factorial)으로 쓰고 약분한다. 짝수 항에 대해서는

$$\frac{\binom{2k+3}{k}}{\binom{2k+1}{k-1}} = \frac{(2k+3)!}{k!\,(k+3)!}\cdot\frac{(k-1)!\,(k+2)!}{(2k+1)!} = \frac{(2k+3)(2k+2)}{k(k+3)},$$

이므로

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+3)(2k+2)}{4k(k+3)} = \frac{4k^2+10k+6}{4k^2+12k}.$$

분모가 양수이므로 이 비가 1보다 클 필요충분조건은 $10k+6 > 12k$, 즉 $k < 3$이다. $k = 3$일 때 비는 1과 같고, $k > 3$일 때는 1보다 작다. 따라서

$$a_1 < a_2 < a_3 = a_4 > a_5 > a_6 > \cdots,$$

이고, 짝수 번 이동했을 때의 최댓값은 $a_3 = a_4 = \mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64}$이다. (확인: $\mathrm{P}(8) = \binom{9}{3}/2^8 = 84/256 = 21/64$.)

홀수 항에 대해서도 같은 방식으로 약분하면

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k+4)(2k+3)}{4k(k+4)} = \frac{4k^2+14k+12}{4k^2+16k},$$

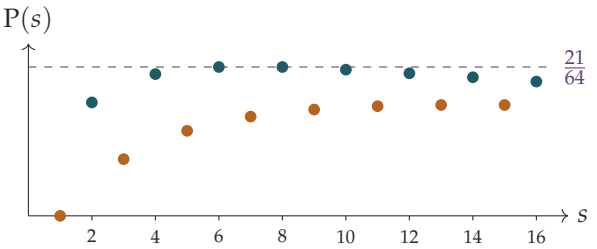
이고, 이 비는 $k < 6$일 때 1보다 크고, $k = 6$일 때 1과 같으며, $k > 6$일 때 1보다 작다. 따라서 홀수 번 이동했을 때의 최댓값은

$$b_6 = b_7 = \mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \binom{14}{5}\frac{1}{2^{13}} = \frac{2002}{8192} = \frac{1001}{4096}.$$

마지막으로 $\frac{21}{64} = \frac{1344}{4096} > \frac{1001}{4096}$이므로, 어떤 홀수의 경우도 짝수의 경우의 최댓값을 넘지 못한다. 그러므로 $\mathrm{P}(s)$는

$$s = 6 \quad \text{그리고} \quad s = 8.$$

일 때 최댓값 $\frac{21}{64}$을 가진다.



청록색 점은 짝수 s, 호박색 점은 홀수 s에 해당한다. 두 수열은 서로 별개이며 각각 증가했다가 감소하고, 짝수 쪽이 항상 위에 있다.

검산

- 작은 경우를 손으로 계산하기: $\mathrm{P}(2) = \frac{1}{4}$(오른쪽으로 두 번), $\mathrm{P}(3) = \frac{1}{8}$(오른쪽으로 세 번)이고, $k = 1$을 대입하면 공식은 마땅히 그래야 하듯 $\binom{3}{0}/2^2 = \frac{1}{4}$와 $\binom{4}{0}/2^3 = \frac{1}{8}$을 준다.
- 컴퓨터로 이 보행을 정확히 열거해 보면(분수 계산, $s \le 60$) 두 공식이 모두 맞고, 전체 최댓값이 $\mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64} \approx 0.328$, 홀수의 경우 최댓값이 $\mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \frac{1001}{4096} \approx 0.244$임이 확인된다.

흔한 실수

- 모든 s에 대해 목표 지점 네 개를 전부 더하는 것. 그중 절반은 홀짝성 때문에 불가능하다.
- 짝수의 경우 최댓값을 구하고 멈추는 것. 홀수 값들은 별개의 수열을 이루므로, 그 최댓값이 더 작다는 것을 확인해야 한다.
- "$k < 3$이면 비 > 1"에서 멈추고 $s = 6$만 답하는 것. $k = 3$일 때 비가 1이므로 $s = 8$에서도 같은 값이 나온다.

STEP 너머

이것은 확률론의 핵심 대상 가운데 하나인 단순 대칭 무작위 행보(simple symmetric random walk)이다. s번 이동한 뒤의 위치는 $\sqrt{s}$ 정도로 퍼져 나가므로, 고정된 유한 구간 안에 있을 확률은 처음에는 증가하다가 결국 0으로 줄어든다. $s = 7$ 근처의 최고점은 퍼진 정도가 구간의 크기와 비슷해지는 곳이다. 같은 이항 세기는 반사 원리(reflection principle)로 이어지고, 1차원 무작위 행보가 확률 1로 원점으로 돌아온다는 사실로도 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에 무작위 행보를 다룬 좋은 장이 있다.

풀이

STEP II 1992, 문제 16

확률과 통계 • 조건부 확률

> **STEP II 1992, 16번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q16

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.17 절 **바나흐의 성냥갑**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/matchboxes.html

핵심 아이디어

이 문제는 바나흐(Banach)의 성냥갑 문제(matchbox problem)의 한 변형이다. 부족함을 언제 발견했는지(시도 N에서) 주어져 있으므로, 이것은 조건부 확률(conditional probability)이다. 따라서 두 개의 결합 확률(joint probability)을 계산한다. 하나는 첫 실패가 시도 N에서 일어나고 그것이 토피일 확률이고, 다른 하나는 첫 실패가 시도 N에서 일어나고 그것이 박하사탕일 확률이다. 각각은 "처음 $N-1$번의 시도에 각 종류가 정확히 몇 번씩 들어 있고, 그다음에 특정한 한 종류가 나온다"는 계산이며, 이는 이항(binomial) 계산이다.

풀이

각 시도는 독립(independent)이고, 매번 확률 p로 토피를, 확률 q로 박하사탕을 집으려 한다고 가정한다. 단, $0 < p < 1$이다. T를 N번째 시도에서 그녀가 토피를 집으려다 토피 봉지가 비어 있음을 발견하고, 그 이전 시도에서는 빈 봉지를 발견한 적이 없는 사건(event)이라 하자. M을 토피 대신 박하사탕으로 바꾼 같은 사건이라 하자. 구하려는 것은

$$\mathrm{P}(\text{토피} \mid \text{첫 발견 시점이 시도} N) = \frac{\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}(M)}.$$

이다.

T의 확률

T가 일어나려면 $N-1$번의 시도 후에 토피 봉지가 비어 있어야 한다. 지금까지 실패한 시도가 없으므로, 그 시도들은 모두 사탕 하나씩을 꺼냈다. 따라서 처음 $N-1$번의 시도 중 정확히 n번은 토피를 집으려 한 것이고(한 번 더 있었다면 실패였을 것이다), 나머지 $N-1-n$번은 박하사탕을 집으려 한 것이다. 그리고 시도 N은 토피를 집으려 한 것이다.

역으로, 처음 $N-1$번의 시도에 토피 시도가 정확히 n번, 박하사탕 시도가 $N-1-n \leq m$번 순서에 관계없이 들어 있다고 하자. 그러면 이전의 어떤 시도도 실패했을 수 없다. 어느 단계에서도 그녀는 n개보다 많은 토피나 m개보다 많은 박하사탕을 집으려 한 적이 없기 때문이다. 이때 시도 N이 토피이면 T가 일어난다.

> **생각해 보기** 처음 $N-1$번의 시도의 순서가 중요하지 않을까? 일찍 다 떨어지는 일이 없도록 말이다.

그렇지 않다. 그녀는 봉지가 빈 상태에서 그 봉지에 손을 넣을 때에만 봉지가 비었음을 **발견한다**. 토피 봉지를 일찍(즉 n번째 토피에서) 비우더라도, 시도 N 전에 다시 토피를 집으려 하지만 않으면 괜찮다. 처음 $N-1$번의 시도에는 토피 시도가 n번뿐이므로 이것은 저절로 성립한다. 따라서 $\binom{N-1}{n}$가지 순서가 모두 허용되고,

$$\mathrm{P}(T) = \binom{N-1}{n} p^n q^{N-1-n} \cdot p = \binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n}, \qquad n \leq N-1 \leq n+m,$$

이며, 그 밖의 경우에는 $\mathrm{P}(T) = 0$이다. $N-1 < n$이면 토피를 다 써 버렸을 수 없다. $N-1 > n+m$이면 m개보다 많은 박하사탕이 필요했을 것이다.

M의 확률

역할을 바꾸어 똑같이 하면

$$\mathrm{P}(M) = \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}, \qquad m \leq N-1 \leq n+m,$$

이며, 그 밖의 경우에는 $\mathrm{P}(M) = 0$이다.

답

발견은 시도 $\min(n,m)+1$부터 $n+m+1$ 사이 어딘가에서 일어나야 한다. 시도 $n+m+2$는 불가능하다. 그때쯤이면 두 봉지가 모두 비어 있을 것이므로 이미 어떤 시도가 실패했을 것이기 때문이다.

- $N \leq m$이면($\mathrm{P}(M) = 0$이지만 $\mathrm{P}(T) > 0$이므로) 그녀는 확실히 토피를 집으려 한 것이다. 확률은 1이다.
- $N \leq n$이면($\mathrm{P}(T) = 0$이므로) 확률은 0이다.

- $\max(n,m)+1 \le N \le n+m+1$이면 두 경우가 모두 가능하고,

$$\mathrm{P}(\text{토피}) = \frac{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n}}{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n} + \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}}.$$

  이다.

마지막 경우에는 분자와 분모를 $\mathrm{P}(T)$로 나누어 식을 정리할 수 있다. 이항계수(binomial coefficient)에서 공통인수 $(N-1)!$이 약분되고, 거듭제곱들은 $(q/p)^{n+m+2-N}$으로 합쳐진다. 그러면

$$\mathrm{P}(\text{토피}) = \left[1 + \frac{n!\,(N-1-n)!}{m!\,(N-1-m)!}\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m+2-N}\right]^{-1}.$$

을 얻는다.

검산

- 대칭성(symmetry): $n=m$이고 $p=q=\frac{1}{2}$이면 두 식이 같으므로 답은 당연히 $\frac{1}{2}$이다.
- $n=2$, $m=3$, $p=\frac{1}{2}$, $N=5$로 놓자. 그러면 $\mathrm{P}(T) = \binom{4}{2}/2^5 = \frac{3}{16}$이고 $\mathrm{P}(M) = \binom{4}{3}/2^5 = \frac{1}{8}$이므로, 답은 $\frac{3/16}{5/16} = \frac{3}{5}$이다. 토피가 더 적으므로 토피가 떨어질 가능성이 더 크다.
- 결국에는 어떤 시도가 반드시 실패하므로 $N = 1, \ldots, n+m+1$에 대하여 $\sum_N \big(\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}(M)\big) = 1$이다. 이 사실과 공식을 모든 $n, m \le 6$와 여러 p 값에 대하여 한 단계씩 정확히 열거한 결과와 대조하여 확인하였다. $n=4$, $m=3$, $N=7$, $p=0.55$로 2×10^5회 시뮬레이션(simulation)한 결과는 0.527로, 정확한 값 0.528과 비교된다.

흔한 실수

- N번째 시도 자체에 해당하는 마지막 인수 p(또는 q)를 빠뜨린다.
- 조건부 확률 $\mathrm{P}(T)/(\mathrm{P}(T)+\mathrm{P}(M))$ 대신 $\mathrm{P}(T)$를 답으로 쓴다. 발견이 시도 N에서 일어났다는 것이 주어져 있다.
- 사건을 "토피가 시도 N에서 떨어진다"로 생각한다. 마지막 토피를 꺼내는 것은 발견이 아니다. 발견은 그다음 시도에서 일어난다.

STEP 너머

첫 실패의 시점은 두 **음이항** 분포(negative binomial distribution)의 혼합(mixture)이다. 음이항 분포는 주어진 횟수의 성공을 얻는 데 필요한 시행 횟수를 센다. 바나흐의 원래 성냥갑 문제($n = m, p = \frac{1}{2}$)는 발견하는 순간 다른 상자에 성냥이 몇 개 남아 있는지를 묻는다. 그 답은 스털링 공식(Stirling's formula)으로 근사할 수 있으며, 평균(mean)은 약 $2\sqrt{n/\pi}$이다. 음이항 분포에 대해서는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 참고하라. 펠러(Feller)의 고전 *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*(확률론과 그 응용 입문) 제1권에는 성냥갑 문제에 대한 유명한 논의가 실려 있다.

풀이

STEP III 1992, 문제 1

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 1992, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 두 항등식(identity)은 도함수(derivative)를 만들어 내는 장치이다. 일단 f''을 f'으로 나타내고 나면, 더 높은 계의 도함수는 모두 다시 미분하기만 하면 얻어지고, $x = 0$에서는 모든 값이 $f'(0) = \frac{1}{2}$으로부터 만들어진다. 소문항 (ii)에서 문제가 되는 것은 원점에서 0이 되는 인수 $\sinh x$이다. x를 곱하면 이 영점이 상쇄되고, 그러면 전개식은 손으로 구할 수 있는 두 급수(series)의 곱이 된다. 대칭성(홀함수(odd function)와 짝함수(even function))을 이용하면 어떤 거듭제곱이 나타날 수 있는지 미리 알 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = \ln(1 + e^x)$를 연쇄법칙(chain rule)으로 미분하면

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0,$$

이므로 그 로그가 정의되고,

$$\ln[f'(x)] = \ln e^x - \ln(1 + e^x) = x - f(x),$$

이다. 이것이 첫 번째 결과이다. 이 항등식을 미분하면 좌변은 $f''(x)/f'(x)$가 되므로

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - f'(x) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = f'(x) - [f'(x)]^2,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. 이를 $f'' = f'(1 - f')$으로 쓰면 편리하다.

? **생각해 보기** $\ln(1+e^x)$를 네 번 미분하지 않고 f'''과 f''''을 어떻게 구할 수 있을까?

항등식 $f'' = f' - (f')^2$ 자체를 미분하되, $(f')^2$에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다.

$$f''' = f'' - 2f'f'' = f''(1-2f'),$$
$$f'''' = f'''(1-2f') - 2(f'')^2.$$

이제 $f(0) = \ln 2$이고 $f'(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$인 $x = 0$에서 값을 구하면

$$f''(0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$f'''(0) = \tfrac{1}{4}\left(1 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\right) = 0,$$
$$f''''(0) = 0 - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = -\tfrac{1}{8}.$$

매클로린 정리(Maclaurin's theorem)에 의해 $f(x) = \sum f^{(n)}(0)\, x^n/n!$이므로

$$f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots,$$

이고, x^3항은 0이다(또한 $-\frac{1}{8} \div 24 = -\frac{1}{192}$이다).

소문항 (ii)

g가 그러한 전개식을 갖지 않는 이유. 음이 아닌 거듭제곱으로 이루어진 급수 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$는 $x = 0$에서 유한한 값 a_0을 가지며, 그 점에서 연속(continuous)이다. 그런데 $\sinh 0 = 0$이고 $\cosh 0 = 1$이므로, $x \to 0$일 때 분모 $\sinh x \cosh 2x$는 0으로 다가간다. 실제로 작은 x에 대해 $\sinh x \approx x$이므로 $g(x) \approx 1/x$이고, 이는 0 근처에서 유계가 아니다. 따라서 원점 근처에서 $g(x)$는 그러한 급수와 같을 수 없다.

$xg(x)$가 그러한 전개식을 갖는 이유. 다음과 같이 쓴다.

$$x\,g(x) = \frac{x}{\sinh x} \cdot \frac{1}{\cosh 2x}.$$

$\sinh x = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right)$이므로 인수 x가 약분되어

$$\frac{x}{\sinh x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots},$$

이 된다. 이것은 상수항이 1인 급수로 1을 나눈 것이며, 이러한 역수는 음이 아닌 거듭제곱으로 이항전개(binomial expansion)할 수 있다. 마찬가지로 $\cosh 2x \geq 1$은 결코 0이 되지 않으므로 $1/\cosh 2x$도 같은 방식으로 전개된다. 그러한 두 급수의 곱도 다시 그러한 급수이다.

짝수 거듭제곱만 나타나는 이유. sinh는 홀함수이고 cosh는 짝함수이므로 $g(-x) = -g(x)$, 즉 g는 홀함수이다. 따라서 $h(x) = x\,g(x)$는 $h(-x) = (-x)(-g(x)) = h(x)$를 만족하므로 h는 짝함수이다. $h(x) = \sum a_n x^n$이라 하면 $h(x) - h(-x) = 2\sum_{n\text{ 홀수}} a_n x^n$은 항등적으로 0이고, 항등적으로 0인 거듭제곱급수(power series)는 모든 계수가 0이므로, 모든 홀수 n에 대해 $a_n = 0$이다. (직접 확인할 수도 있다. 위의 두 인수는 모두 x^2에 관한 급수이다.)

전개식. $u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$으로 놓고 $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - \cdots$를 이용하여 x^4까지의 항을 남기면

$$\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \cdots,$$

이다. 여기서 $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10-3}{360}$이다. 다음으로 ($\frac{(2x)^2}{2}$와 $\frac{(2x)^4}{24}$로부터) $\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$이므로, $v = 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$으로 놓으면

$$\frac{1}{\cosh 2x} = 1 - v + v^2 - \cdots = 1 - 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^4 + 4x^4 + \cdots = 1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4 + \cdots.$$

두 급수를 곱하고 거듭제곱별로 정리하면

$$\begin{aligned} x\,g(x) &= \left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4\right)\left(1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4\right) + \cdots \\ &= 1 - \left(2 + \tfrac{1}{6}\right)x^2 + \left(\tfrac{10}{3} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{7}{360}\right)x^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = \frac{1320}{360}$이다.

검산

- (i)에서 x^3항이 없는 것은 우연이 아니다. $f(x) - \frac{x}{2} = \ln(e^{-x/2} + e^{x/2}) = \ln(2\cosh\frac{x}{2})$는 짝함수이므로, $\frac{x}{2}$ 다음에는 짝수 거듭제곱만 나타난다.
- 수치적으로 $x = 0.1$에서 $\ln(1+e^x) \approx 0.7443966600$과 사차식 $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192}$은 약 3.5×10^{-10} 이내로 일치한다.
- $x = 0.05$에서 $x\,g(x)$와 $1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4$은 약 9×10^{-8}만큼, 즉 대략 $6x^6$만큼 차이가 난다. 다음 항이 x^6항이므로 예상대로이다.

흔한 실수

- $1/(1+u)$를 $1-u$까지만 전개하는 것: u^2항도 x^4에 기여한다(위의 $\frac{1}{36}$과 $4x^4$).
- $2x$의 4제곱이 $16x^4$임을 잊고 $\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{x^4}{24}\cdots$로 쓰는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 **극**(*pole*)을 갖는 함수에 관한 것이다. g는 $1/x$처럼 발산하며, x를 곱하면 특이점(singularity)이 제거된다. 복소해석학(complex analysis)에서 이러한 함수는 **로랑 급수**(*Laurent series*) $\frac{1}{x}\left(1-\frac{13}{6}x^2+\cdots\right)$를 가지며, $1/x$의 계수(**유수**(*residue*)라 하며, 여기서는 1이다)는 많은 실수 적분을 계산하는 열쇠가 된다. 이 급수의 수렴반지름(radius of convergence)은 분모의 가장 가까운 다른 영점, 곧 $x=\pm\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$에서 $\cosh 2x=0$이 되는 점에 의해 정해진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 개념들을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 1992, 문제 2

순수수학 • 행렬의 거듭제곱과 수학적 귀납법

> **STEP III 1992, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q2

핵심 아이디어

모든 것은 $\mathbf{J}^2 = 2\mathbf{J}$라는 한 가지 사실에 달려 있다. 이 사실 때문에 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ 꼴의 행렬끼리의 곱은 다시 같은 꼴이 되므로, 우리는 언제나 수 하나만 추적하면 된다. 다루기 어려워 보이는 식 $\frac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]$도 곱셈에 대해 좋은 성질을 보이는 것이 p가 아니라 $1+2p$라는 점을 알아차리면 명쾌해진다.

풀이

곱셈 규칙

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}$$

이고 $\mathbf{I}$는 모든 행렬과 교환(commute)하므로, 임의의 실수 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

$$(\mathbf{I} + p\mathbf{J})(\mathbf{I} + q\mathbf{J}) = \mathbf{I} + (p+q)\mathbf{J} + pq\mathbf{J}^2 = \mathbf{I} + (p+q+2pq)\mathbf{J}. \qquad (*)$$

여기서

$$1 + 2(p+q+2pq) = (1+2p)(1+2q)$$

임에 주목하자. 따라서 행렬 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$에 수 $1+2p$를 대응시키면, 행렬의 곱셈은 이 수들의 곱셈에 대응한다. $\mathbf{A} = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$에 대응하는 수는 $1+2a$이다.

제곱과 세제곱

$(*)$에 $p = q = a$를 대입하면

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + (2a + 2a^2)\mathbf{J}, \qquad \text{그리고} \qquad \tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^2 - 1\right] = \tfrac{1}{2}(4a + 4a^2) = 2a + 2a^2,$$

이므로 요구한 대로 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]\mathbf{J}$이다.

세제곱은 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}$로 쓰고 $(*)$에 $p = 2a + 2a^2$, $q = a$를 대입한다.

$$\begin{aligned} p + q + 2pq &= 2a + 2a^2 + a + 2a(2a + 2a^2) \\ &= 3a + 6a^2 + 4a^3 \\ &= \tfrac{1}{2}(6a + 12a^2 + 8a^3) = \tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^3 - 1\right], \end{aligned}$$

여기서 $(1+2a)^3 = 1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$을 이용하였다. 따라서 요구한 대로 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^3 - 1]\mathbf{J}$이다.

네제곱은 $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$로 계산하는 것이 가장 빠르다. $p = q = \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]$이라 하면 $1 + 2p = (1+2a)^2$이므로, $\mathbf{A}^4$에 대응하는 수는 $(1+2a)^2(1+2a)^2 = (1+2a)^4$이다. 따라서

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^4 - 1\right]\mathbf{J} = \mathbf{I} + (4a + 12a^2 + 16a^3 + 8a^4)\mathbf{J}.$$

일반적인 거듭제곱

지금까지의 규칙으로부터 다음과 같이 추측할 수 있다.

$$p_k = \tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^k - 1\right], \qquad \text{동치로} \qquad 1 + 2p_k = (1+2a)^k.$$

모든 정수 $k \geq 1$에 대하여 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다.

기저 단계(*base case*). $k = 1$일 때 $p_1 = \frac{1}{2}(1 + 2a - 1) = a$이고 $\mathbf{A}^1 = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$이다. (이 공식은 $p_0 = 0$도 주는데, 이는 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$와 일치한다.)

귀납 단계(*inductive step*). 위와 같은 p_k에 대하여 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$라고 가정하자. 그러면 $(*)$에 의해

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \mathbf{I} + (p_k + a + 2ap_k)\mathbf{J},$$

이고

$$\begin{aligned} p_k + a + 2ap_k &= (1+2a)p_k + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)\left[(1+2a)^k - 1\right] + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)^{k+1} - \tfrac{1}{2}(1+2a) + a \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^{k+1} - 1\right] = p_{k+1}. \end{aligned}$$

따라서 $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{I} + p_{k+1}\mathbf{J}$이고, 수학적 귀납법에 의해

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^k - 1\right]\mathbf{J} \qquad \text{모든 정수} k \geq 1.$$

생각해 보기 $\mathbf{A}^2$과 $\mathbf{A}^3$이 주어지지 않았다면, p_k에 대한 추측은 어디서 얻을 수 있었을까?

점화식 자체에서 얻을 수 있다. 귀납 단계는 $p_{k+1} = (1+2a)p_k + a$임을 보여 주는데, 이는 1계 선형 점화식(first-order linear recurrence)이다. 양변에 $\frac{1}{2}$을 더하면 $p_{k+1} + \frac{1}{2} = (1+2a)(p_k + \frac{1}{2})$이므로, $p_k + \frac{1}{2}$은 공비가 $1+2a$이고 첫째항이 $a + \frac{1}{2}$인 등비수열(geometric sequence)이다. 이것이 바로 $p_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+2a)^k$이다.

음의 거듭제곱(덤). $a \neq -\frac{1}{2}$이면 이 공식은 $k = -1$일 때도 성립한다. $p_{-1} = -\dfrac{a}{1+2a}$이고, $(*)$에 의해 $a + p_{-1} + 2ap_{-1} = a - \dfrac{a(1+2a)}{1+2a} = 0$이므로 $(\mathbf{I} + a\mathbf{J})(\mathbf{I} + p_{-1}\mathbf{J}) = \mathbf{I}$이다. $a = -\frac{1}{2}$이면 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$는 특이행렬(singular matrix)이고, 공식은 모든 $k \geq 1$에 대하여 $p_k = -\frac{1}{2}$을 준다. 실제로 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$이다.

검산

- $a = 1$로 두면 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이고, 직접 곱해 보면 $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$이다. 공식은 $p_2 = \frac{1}{2}(9-1) = 4$와 $p_4 = \frac{1}{2}(81-1) = 40$을 준다.
- $\mathbf{A}$는 고윳값(eigenvalue) $1+2a$에 대한 고유벡터(eigenvector) $(1,1)$과 고윳값 1에 대한 고유벡터 $(1,-1)$을 가진다. 따라서 $\mathbf{A}^k$의 고윳값은 $(1+2a)^k$과 1이다. 행렬 $\mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$의 고윳값은 $1 + 2p_k$과 1이므로 서로 일치한다.
- $0 \leq k \leq 12$와 $a = -\frac{1}{2}$을 포함한 마흔 개의 무작위 a 값에 대하여, 정확한 유리수 연산으로 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$임을 확인하였다.

흔한 실수

- $(\mathbf{I} + a\mathbf{J})^k$을 이항정리(binomial theorem)로 전개하는 것은 ($\mathbf{I}$와 $\mathbf{J}$가 교환하므로) 정당하지만, $\mathbf{J}^r = 2^{r-1}\mathbf{J}$이지 $\mathbf{J}$가 아니라는 점을 잊으면 계수가 틀리게 된다.
- 귀납 단계에서 p_{k+1}에 대한 결론을 먼저 써 놓고 거꾸로 거슬러 올라가는 것은 증명이 아니다. $\mathbf{A}^k\mathbf{A}$에서 출발해야 한다.

STEP 너머

우리가 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$에 대응시킨 수 $1 + 2p$는 벡터 $(1,1)$에 대한 그 행렬의 고윳값이다. 이런 꼴의 행렬은 모두 고유벡터 $(1,1)$과 $(1,-1)$을 공유하므로, 모두 같은 기저 변환(change of basis)으로 대각화되고, 거듭제곱은 고윳값을 단순히 k제곱하여 계산할 수 있다. 이것이 대각화(diagonalisation)의 바탕에 있는 아이디어이며, 대각화는 행렬의 거듭제곱, 행렬 지수함수(matrix exponential), 선형 점화식을 스칼라 계산으로 바꾸어 준다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 많은 예제와 함께 이 아이디어를 전개한다.

풀이

STEP III 1992, 문제 3

순수수학 • 곡선과 다항식의 근

STEP III 1992, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q3

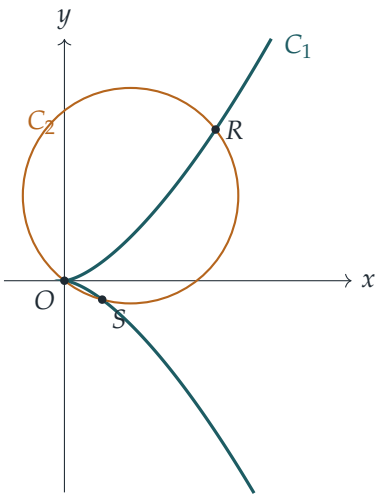
핵심 아이디어

매개변수 표현(parametrisation)을 원점을 지나는 원의 일반 방정식에 그대로 대입한다. 그러면 t에 대한 다항방정식을 얻는데, 그 근(root)은 교점들의 매개변수이고 원점은 인수 t^2로 나타난다. 남는 것은 t^3 항이 없는 사차식(quartic)이므로, 그 근들의 합과 두 근씩 곱한 것의 합이 정해져 있다. 따라서 두 근 r와 s를 알면 나머지 두 근이 완전히 결정된다.

풀이

개형 그리기

$x = t^2 \geq 0$이므로 곡선은 반평면 $x \geq 0$에 놓인다. t를 $-t$로 바꾸면 (x, y)가 $(x, -y)$로 옮겨지므로 곡선은 x축에 대하여 대칭(symmetric)이다. t를 소거하면 $y^2 = x^3$, 즉 $y = \pm x^{3/2}$를 얻는다. $t = 0$에서 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$이고, 원점 근처에서 $|y| = x^{3/2}$는 x보다 훨씬 작다. 따라서 두 가지는 모두 x축에 접하면서 O를 떠나고, 곡선은 O에서 **첨점**(*cusp*)을 가진다. t가 클 때는 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t}{2}$이므로 두 가지가 가파르게 증가한다.



청록색 곡선이 C_1이다. 호박색 원은 C_2의 한 예로, $r = 1$, $s = -\frac{1}{2}$일 때 O, R, S를 지나는 원이다.

사차방정식

원점을 지나는 원의 방정식에는 상수항이 없다:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0,$$

여기서 g와 f는 둘 다 0은 아닌 실수 상수이다. 매개변수가 t인 점이 이 원 위에 있을 필요충분조건은

$$t^4 + t^6 + 2gt^2 + 2ft^3 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad t^2\left(t^4 + t^2 + 2ft + 2g\right) = 0.$$

인수 t^2는 원점에 해당하는 $t = 0$을 준다. O가 아닌 모든 교점은 $t \neq 0$이므로, 그 매개변수는

$$t^4 + t^2 + at + b = 0, \qquad a = 2f, \quad b = 2g.$$

를 만족한다. 특히 r와 s는 이 방정식의 근이고, a, b는 요구된 대로 실수 상수이다.

$x \neq 0$일 때 $t = y/x$이고 ($x = 0$일 때 $t = 0$이므로) C_1의 각 점은 매개변수를 정확히 하나 가진다. 따라서 서로 다른 점 R와 S는 서로 다른 매개변수를 가지며 $r \neq s$이고, C_1과 C_2의 교점은 방정식 $t^2(t^4 + t^2 + at + b) = 0$의 실근과 정확히 대응한다.

나머지 두 근

사차방정식의 네 근(실수 또는 복소수)을 r, s, p, q라 하자.

$$(t - r)(t - s)(t - p)(t - q) = t^4 + 0 \cdot t^3 + 1 \cdot t^2 + at + b$$

의 계수를 비교하면

$$r+s+p+q=0,$$
$$rs+(r+s)(p+q)+pq=1.$$

를 얻는다. (여기서는 두 근씩의 곱 여섯 개를 rs, pq와 네 개의 교차항 $rp+rq+sp+sq=(r+s)(p+q)$로 묶었다.)

> **생각해 보기** 네 근 가운데 두 개만 알고 있다. a와 b를 모르면서 어떻게 나머지 두 근에 접근할 수 있을까?

값이 정해지지 않은 계수가 아닌 t^3과 t^2의 계수는 원과 전혀 관계가 없다. 첫째 식에서 $p+q=-(r+s)$이다. 이를 둘째 식에 대입하면

$$pq=1-rs+(r+s)^2=r^2+rs+s^2+1.$$

따라서 p와 q는 이차방정식

$$t^2+(r+s)\,t+\left(r^2+rs+s^2+1\right)=0,$$

의 근이고, 이 방정식의 계수는 r와 s에만 의존한다. C_1과 C_2의 교점이 더 있다면, 그 매개변수는 이 이차방정식의 실근이어야 한다.

(부산물로 $a=-(r+s)(r^2+s^2+1)$이고 $b=rspq=rs(r^2+rs+s^2+1)$이므로, O, R, S를 지나는 원은 r와 s에 의해 결정된다.)

다른 실수 교점은 없다

이 이차방정식의 판별식(discriminant)은

$$\begin{aligned}\Delta&=(r+s)^2-4\left(r^2+rs+s^2+1\right)\\&=-3r^2-2rs-3s^2-4\\&=-\left[2(r^2+s^2)+(r+s)^2+4\right].\end{aligned}$$

이다. $2(r^2+s^2)$와 $(r+s)^2$이 각각 음이 아니므로 대괄호 안의 값은 4 이상이다. 따라서 $\Delta\le -4<0$이고 이차방정식은 실근을 갖지 않는다. 즉 p와 q는 실수가 아닌 켤레복소수(complex conjugates) 쌍이다.

그러므로 $t^2(t^4+t^2+at+b)=0$의 실근은 0, r, s뿐이다. 각 실근은 C_1의 점 하나에 정확히 대응하므로, C_1과 C_2의 실수 교점은 O, R, S뿐이다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

검산

$r = 1, s = -\frac{1}{2}$로 두자. 공식에 의해 $a = -\frac{9}{8}, b = -\frac{7}{8}$이므로 $f = -\frac{9}{16}, g = -\frac{7}{16}$이다. 원의 중심은 $(\frac{7}{16}, \frac{9}{16})$이고, $R = (1,1)$과 $S = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$은 모두 중심으로부터 거리의 제곱이 $\frac{130}{256}$이며, O도 마찬가지이다. 남은 이차식은 $t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{4}$이고 판별식은 $\frac{1}{4} - 7 < 0$이다. 이것이 그림 속의 원이며, C_1과 O, R, S에서만 만나는 것을 볼 수 있다. 또한 무작위로 고른 400개의 쌍 (r,s)에 대해 수치적으로 확인하였다. 각 쌍마다 O, R, S를 지나는 원을 구하고, 인수분해(factorisation)를 확인한 뒤 $-30 \leq t \leq 30$ 범위를 훑었더니, 원의 방정식은 $t = r$와 $t = s$에서만 부호가 바뀌었다.

흔한 실수

- O를 지나는 원에는 상수항이 없다는 사실을 잊는 것. 일반적인 원에는 상수가 세 개 있으며, 상수항이 없어지는 것이 바로 인수 t^2이 나타나는 이유이다.
- 중근(double root) $t = 0$이 원이 O에서 C_1에 접한다는 뜻이라고 생각하는 것. 이것은 첨점에서 비롯된다. O를 지나는 모든 원이 인수 t^2을 준다.
- 판별식을 제곱의 합에 양의 상수를 더한 것에 음의 부호를 붙인 꼴로 쓰지 않고 "분명히 음수"라고만 말하는 것.

STEP 너머

곡선 $y^2 = x^3$은 특이 삼차곡선(singular cubic curve)의 대표적인 예이다. 여기서처럼 중복도(multiplicity)를 고려하여 교점을 세는 것은 베주(Bézout) 정리의 출발점이다. 이 정리에 따르면 차수가 m과 n인 두 곡선은 제대로 세었을 때 mn개의 점에서 만난다. 삼차곡선과 원은 6개의 교점을 가지며, 이는 O에서의 두 개, R, S, 그리고 두 복소수 점과 일치한다. 같은 비에트(Vieta)식 셈법이 타원곡선(elliptic curve) 위의 군 법칙(group law)을 이끌어낸다. Reid의 *Undergraduate Algebraic Geometry*(학부 대수기하학)와 Silverman과 Tate의 *Rational Points on Elliptic Curves*(타원곡선 위의 유리점)는 모두 이러한 아이디어를 더 깊이 다룬다.

풀이

STEP III 1992, 문제 4

순수수학 • 직교 궤적

> **STEP III 1992, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q4

핵심 아이디어

S_1의 각 곡선을 $y = 1 + \dfrac{a}{x-a}$ 꼴로 쓴다. 이것은 점근선(asymptote)이 $x = a$와 $y = 1$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이며, 모든 곡선이 원점을 지난다. 곡선족 전체가 만족하는 미분방정식(differential equation)을 구하려면, 미분한 다음 곡선 자신의 방정식을 이용해 a를 소거한다. 두 곡선은 기울기(gradient)의 곱이 -1일 때, 그리고 그때에만 직교하므로, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 $-1/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$로 바꾸면 S_1의 방정식이 S_2의 방정식으로 바뀌고, 이 방정식은 변수분리(separation of variables)가 가능하다.

풀이

S_1의 곡선

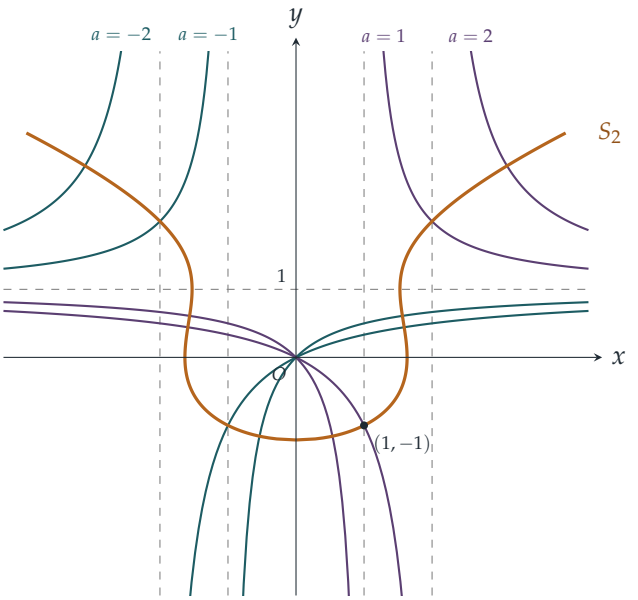
$x = (x-a) + a$이므로

$$y = \frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x-a}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2}.$$

따라서 $a \neq 0$이면 이 곡선은 수직점근선이 $x = a$, 수평점근선이 $y = 1$인 직각쌍곡선이고, 원점을 지난다.

- $a > 0$이면 기울기는 항상 음수이다. $x < a$인 가지는 ($x \to -\infty$일 때) $y = 1$에서 내려와 O를 지나고, $x \to a^-$일 때 $-\infty$로 떨어진다. $x > a$인 가지는 $+\infty$에서 내려와 $y = 1$에 가까워진다.
- $a < 0$이면 기울기는 항상 양수이다. $x > a$인 가지는 $-\infty$에서 올라와 O를 지나 $y = 1$에 가까워진다. $x < a$인 가지는 $y = 1$보다 위에 있다.

x를 $-x$로 바꾸면 $\frac{x}{x-a}$가 $\frac{x}{x+a}$로 바뀌므로, $-a$에 대한 곡선은 a에 대한 곡선을 y축에 대해 대칭이동한 것이다. 그래프를 그릴 때 편리한 점: $x = \frac{3}{2}a$일 때 $y = 3$이다.



점선은 점근선이다. 호박색 곡선은 $(1, -1)$을 지나는 S_2의 곡선이며, 그 모양이 왜 이러한지는 아래에서 설명한다.

S_1의 미분방정식

$y(x-a) = x$에서 $x - a = \dfrac{x}{y}$이고 $a = x - \dfrac{x}{y} = \dfrac{x(y-1)}{y}$이다. ($S_1$의 곡선 위에서 $y = 0$인 곳은 원점뿐이므로, 그 점을 제외하면 y로 나눌 수 있다.) 이것을 기울기에 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2} = -\frac{x(y-1)}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2} = -\frac{y(y-1)}{x},$$

이므로 S_1의 모든 곡선은 다음을 만족한다.

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1-y).$$

S_2의 미분방정식

두 곡선은 만나는 점에서의 기울기의 곱이 -1일 때, 그리고 그때에만 직각으로 만난다. 따라서 공통점에서 S_1 곡선의 기울기를 p_1, S_2 곡선의 기울기를 p_2라 하면 $p_1 p_2 = -1$, 즉 $p_1 = -1/p_2$이다.

생각해 보기 방금 구한 방정식은 S_1에 관한 것이다. 그런데 왜 이것이 S_2에 대해서도 무언가를 알려 주는가?

$(x, y \neq 0$인$)$ 각 점 (x, y)를 지나는 S_1의 곡선은 정확히 하나, 곧 $a = x(y-1)/y$인 곡선뿐이며, 그 점에서의 기울기는 $-y(y-1)/x$이다. 같은 점을 지나는 S_2의 곡선은 기울기가 $p_2 = -1/p_1$이어야 하므로, S_2 위에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{-y(y-1)/x} = \frac{x}{y(y-1)}, \qquad \text{즉,} \qquad x = y(y-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

가 되어 요구한 식을 얻는다.

$(1, -1)$을 지나는 S_2의 곡선

이 방정식은 변수분리형이다.

$$\int (y^2 - y)\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

$(1, -1)$에서 $-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C$이므로 $C = -\frac{4}{3}$이다. 양변에 6을 곱하면, 그리려는 곡선은 다음과 같다.

$$3x^2 = 2y^3 - 3y^2 + 8.$$

곡선을 그리기 위해 $g(y) = 2y^3 - 3y^2 + 8$이라 하면 $x = \pm\sqrt{g(y)/3}$이고, 곡선은 y축에 대해 대칭이다. $g'(y) = 6y(y-1)$이므로 g는 극댓값(local maximum) $g(0) = 8$과 극솟값(local minimum) $g(1) = 7$을 갖는다. 둘 다 양수이므로 g의 실근은 -2와 -1 사이에 하나뿐이다($g(-2) = -20$, $g(-1) = 3$이므로). 수치적으로 이 근은 $y_0 \approx -1.214$이다. 따라서 이 곡선은

- $(0, y_0)$에서 최저점을 가지며, 그 점에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$이다.
- $y = 0$인 곳$(x = \pm\sqrt{8/3} \approx \pm 1.63)$과 $y = 1$인 곳$(x = \pm\sqrt{7/3} \approx \pm 1.53)$에서 수직접선(vertical tangent)을 갖는다. 그곳에서 $y(y-1) = 0$이기 때문이다.
- $y = 0$과 $y = 1$ 사이에서는 축 쪽으로 약간 되돌아 휘고($x > 0$일 때 그 구간에서 기울기 $x/(y(y-1))$는 음수이다), 그 뒤로는 $y \approx (\frac{3}{2}x^2)^{1/3}$의 꼴로, $|x|$가 클수록 커진다.

그림을 검산해 보자. $(1, -1)$을 지나는 S_1 곡선은 $-1 = \frac{1}{1-a}$이므로 $a = 2$이고, 그 점에서 기울기는 -2이다. S_2의 기울기는 $\frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}$이며, 실제로 $(-2) \cdot \frac{1}{2} = -1$이다. $y = 1$에서의 수직접선도 이치에 맞는다. 그곳에서 곡선은 $y = 1$, 곧 S_1에서 $a = 0$인 곡선과 직각으로 교차하기 때문이다.

검산

- $(1, -1)$에서: $3(1)^2 = 3$이고 $2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 8 = 3$이다. ✓
- S_2 곡선은 $a = 1$인 곡선과 $(2, 2)$에서 만난다. 그 점에서 S_1의 기울기는 $-1/(2-1)^2 = -1$이고 S_2의 기울기는 $2/(2 \cdot 1) = 1$이므로, 곱은 -1이다.
- 수치적으로, 호박색 곡선과 그림의 네 쌍곡선의 교점 열두 개를 모두 구했으며(곡선마다 세 개씩, 예를 들어 $a = -2$인 곡선과는 $(1.5901, 0.4429)$에서 만난다), 모든 교점에서 기울기의 곱은 -1.00000000이었다.

흔한 실수

- 미분방정식에 a를 남겨 두는 것: 핵심은 $y = x/(x-a)$ 자체를 이용해 그것을 소거하는 데 있다.
- $p_2 = -p_1$이나 $p_2 = 1/p_1$을 $p_1 p_2 = -1$ 대신 쓰는 것.
- S_2 곡선을 단순한 U자 모양으로 그리는 것: 이 곡선은 $y = 0$과 $y = 1$에서 수직접선을 가지며, 그 사이에서 살짝 뒤로 휜다.

STEP 너머

S_2의 곡선들은 S_1의 **직교궤적**(orthogonal trajectories)이다. 직교궤적은 물리학에서 등전위선과 교차하는 역선, 또는 속도 퍼텐셜이 일정한 선과 교차하는 유선으로 나타난다. 여기서 쓴 기법(매개변수를 소거한 다음 y'을 $-1/y'$로 바꾸기)은 표준적인 방법이며, 그 결과 얻는 1계 방정식은 처음 배우는 상미분방정식(ODE) 강의의 단골 소재이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

풀이

STEP III 1992, 문제 5

순수수학 • 3차원 벡터 기하

STEP III 1992, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q5

핵심 아이디어

대칭성이 거의 모든 일을 해 준다. 평면 $y+z=2$에 대한 반사(reflection)는 사면체(tetrahedron)를 자기 자신으로 옮기고 A와 D를 고정하므로, B와 C를 서로 바꾸어야 한다. 이로부터 BC가 평면에 수직이고 그 중점 N이 평면 위에 있음을 알 수 있다. 그 뒤로는 네 꼭짓점이 모두 중심 Y로부터 같은 거리에 있다는 사실을 이용하여 피타고라스(Pythagoras) 정리와 스칼라곱(scalar product)만으로 모든 것이 해결된다.

풀이

N과 반지름 구하기

$\overrightarrow{AY} = (3,-2,4)-(0,4,-2) = (3,-6,6)$이므로 구(sphere)의 반지름은 다음과 같다.

$$YA = \sqrt{9+36+36} = 9.$$

$\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$이므로 $\overrightarrow{YN} = (1,-2,2)$이고, 따라서 $N=(4,-4,6)$, $YN=3$이다.

A, Y, N이 모두 $y+z=2$를 만족한다는 점에 주목하자. 즉 세 점 모두 대칭면(plane of symmetry) 위에 있다.

왜 BC가 평면에 수직인가

Π를 평면 $y+z=2$라 하자. Π에 대한 반사는 사면체를 자기 자신 위로 옮기므로 꼭짓점들을 치환(permute)한다. 이 반사는 A와 D를 고정하는데, 이 두 점은 Π 위에 있다. B와 C는 어느 것도 Π 위에 있지 않다. 만약 하나가 그렇다면 반사가 그 점을 고정하게 되고, 그러면 네 번째 꼭짓점도 고정해야 하므로 네 꼭짓점이 모두 Π 위에 놓여 사면체가 만들어지지 않

는다. 따라서 반사는 B와 C를 서로 바꾸며, 이는 C가 B의 거울상이라는 뜻이다. 그러므로

- BC는 Π에 수직이므로 법선(normal) $(0,1,1)$에 평행하다;
- BC의 중점 N은 Π 위에 있다(앞에서 구한 결과와 일치한다).

? 생각해 보기 왜 삼각형 YNB는 N에서 직각인가?

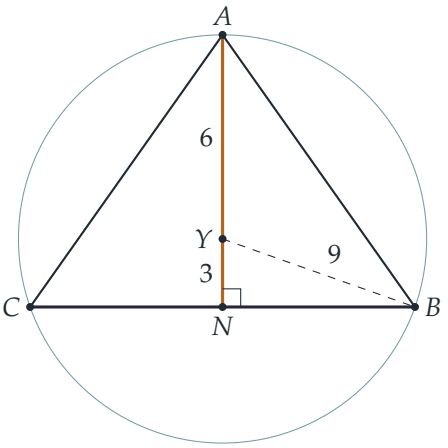
Y와 N이 모두 Π 위에 있으므로 YN은 Π 안의 직선이다. 그런데 NB는 Π의 법선 방향이다. 법선은 평면 안의 모든 직선에 수직이므로 $\angle YNB = 90°$이다.

BN과 B, C의 좌표

B는 구 위에 있으므로 $YB = 9$이다. 삼각형 YNB에서 피타고라스 정리에 의해

$$BN^2 = YB^2 - YN^2 = 81 - 9 = 72, \qquad \text{따라서} \qquad BN = 6\sqrt{2},$$

이고, 이것이 요구한 결과이다.



그림은 평면 ABC를 축척에 맞게 그린 것으로, 이 평면은 Y를 포함한다(Y가 AN 위에 있기 때문이다). 호박색 선 AN은 이 평면이 Π와 만나는 곳이고, 원은 이 평면이 구를 자르는 곳이다.

BC 방향의 단위벡터(unit vector)는 $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$이므로 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{NB} = \pm 6\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \pm(0,6,6).$$

$N = (4,-4,6)$이므로 현(chord)의 두 끝점은 $(4,2,12)$와 $(4,-10,0)$이다. 따라서

$$B = (4,2,12),\ C = (4,-10,0) \qquad \text{또는} \qquad B = (4,-10,0),\ C = (4,2,12).$$

검산해 보면, $(4,2,12) - (3,-2,4) = (1,4,8)$의 길이는 $\sqrt{1+16+64} = 9$이므로 B는 실제로 구 위에 있다.

D의 좌표

$\overrightarrow{YD} = (p, q, r)$라 하자. 조건은 세 가지이다.

- D와 Y가 모두 Π 위에 있으므로 $\overrightarrow{YD}$는 법선 $(0, 1, 1)$에 수직이다. 즉 $q + r = 0$이다.
- D는 구 위에 있다. 즉 $p^2 + q^2 + r^2 = 81$이다.
- 각에 대한 조건: $\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = YA \cdot YD \cos \angle AYD = 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} = 27$.

> **생각해 보기** 미지수 세 개에 대한 방정식이 세 개 있지만, 그중 하나는 이차식이다. 해가 몇 개일 것으로 예상할 수 있는가?

마지막에 이차방정식(quadratic equation)이 나오므로 많아야 두 개이다. 기하학적으로 보면 D는 Π가 구를 자르는 원(곧 $Y \in \Pi$이므로 대원(great circle)) 위에 있고, 그 원 위에서 YA와 주어진 각을 이루는 점은 A의 양쪽에 거울상으로 놓인 두 점이다.

$\overrightarrow{YA} = (-3, 6, -6)$이고 $r = -q$이므로 각에 대한 조건으로부터 다음을 얻는다.

$$-3p + 6q + 6q = 27 \quad \Longrightarrow \quad p = 4q - 9.$$

$r^2 = q^2$임을 이용하여 이를 구의 방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (4q - 9)^2 + 2q^2 &= 81 \\ 18q^2 - 72q &= 0 \\ 18q(q - 4) &= 0. \end{aligned}$$

- $q = 0$: 이때 $p = -9, r = 0$이므로 $\overrightarrow{YD} = (-9, 0, 0)$이고 $D = (-6, -2, 4)$이다.
- $q = 4$: 이때 $p = 7, r = -4$이므로 $\overrightarrow{YD} = (7, 4, -4)$이고 $D = (10, 2, 0)$이다.

두 경우 모두 진짜 사면체를 이룬다. D는 Π 위에 있지만 직선 AN(평면 ABC 가운데 Π 안에 있는 유일한 부분) 위에는 없으므로, D는 평면 ABC 위에 있지 않다. 따라서

$$D = (-6, -2, 4) \qquad \text{또는} \qquad D = (10, 2, 0).$$

검산

- 각 D는 $y + z = 2$를 만족하고, 두 경우 모두 $|\overrightarrow{YD}|^2 = 81$이다($81$과 $49 + 16 + 16$).
- $D = (10, 2, 0)$인 경우: $\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = -21 + 24 + 24 = 27 = 81 \cdot \frac{1}{3}$. ✓
- B와 C는 서로의 거울상이다. (x, y, z)를 $y + z = 2$에 대해 반사하면 $(x, 2 - z, 2 - y)$가 되며, 이 변환은 $(4, 2, 12)$를 $(4, -10, 0)$으로 보낸다.

- 컴퓨터로 좌표의 크기가 20 이하인 Π의 모든 정수점 가운데 구 위에 있으면서 $\cos\angle AYD = \frac{1}{3}$인 점을 찾아보았더니, 정확히 $(-6,-2,4)$와 $(10,2,0)$만 나왔다. 사면체의 부피는 두 경우 모두 $1728/6 = 288$이므로 납작하지 않다.

흔한 실수

- N을 잘못 구하기. $\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$이면 Y는 AN을 따라 4분의 3 지점에 있으므로 $N = Y + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$이고, $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$가 아니다.
- 반지름을 YN이나 AN으로 잡기. 반지름은 $YA = 9$이고, $YN = 3$은 중심에서 현 BC까지의 거리일 뿐이다.
- D가 Π 위에 있어야 함을 잊기. $q + r = 0$이 없으면 가능한 점이 원 하나 전체만큼 있다.

STEP 너머

반사가 B와 C를 서로 바꾸어야 한다는 논증은 작은 군론(group theory)이다. 도형의 대칭은 꼭짓점들을 치환하는 방식으로 작용하고, 반사의 고정점은 반드시 그 거울면 위에 있어야 한다. 반사 자체는 선형대수(linear algebra)의 사상 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-d)}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$이며, 행렬식(determinant)이 -1인 직교변환(orthogonal transformation)이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*는 반사와 직교행렬을 다루고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 대칭군(symmetry group)을 전개한다.

풀이

STEP III 1992, 문제 6

순수수학 • 삼각함수 적분의 점화식

> **STEP III 1992, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q6

핵심 아이디어

두 점화식 모두 삼각함수의 차를 $\sin x$를 인수로 갖는 곱으로 바꾸는 데서 출발한다. 그러면 이 인수가 다루기 까다로운 분모와 약분된다. I_n에 대해서는 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$를 쓰고, J_n에 대해서는 $\sin P - \sin Q$에 대한 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)을 쓴다. 분모가 사라지고 나면 남는 것은 기본적인 적분이며, 두 점화식(reduction formula)은 연쇄적으로 소거(telescope)된다.

풀이

먼저 피적분함수(integrand)에 대해 짚고 넘어가자. 각 피적분함수의 분모에는 $\sin x$가 있고, 이는 $x = 0$과 $x = \pi$에서 0이 된다. 그러나 이 특이점은 제거 가능한 특이점(removable singularity)이다. $x \to 0$일 때 $\sin(nx)/\sin x \to n$이고 $x \to \pi$일 때 $\sin(nx)/\sin x \to \pm n$이므로 두 피적분함수는 모두 유계로 남는다. 따라서 아래의 모든 적분은 연속함수의 보통의 적분이다.

관계식 $I_n - I_{n-1} = J_n$

$\sin^2 A - \sin^2 B = (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)$와 합을 곱으로 바꾸는 공식을 이용하면

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \left(2\cos\tfrac{A+B}{2}\sin\tfrac{A-B}{2}\right)\left(2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}\right) = \sin(A+B)\sin(A-B).$$

이다. $A = nx$, $B = (n-1)x$로 두면

$$\sin^2(nx) - \sin^2\big((n-1)x\big) = \sin\big((2n-1)x\big)\sin x.$$

를 얻는다. 따라서 $n \geq 1$에 대하여

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{x\left[\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x)\right]}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{x\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = J_n,$$

이므로 요구된 결과가 성립한다. ($n = 1$일 때 I_0은 $x\sin^2 0/\sin^2 x = 0$의 적분으로 읽으므로 $I_0 = 0$이다.)

J_n에 대한 점화식

이제 J_{n+1}과 J_n을 비교하자. 합을 곱으로 바꾸는 공식 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$에 의해

$$\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\cos(2nx)\sin x,$$

이므로 이번에도 $\sin x$가 약분된다.

$$J_{n+1} - J_n = 2\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x.$$

$u = x$, $\mathrm{d}v = \cos(2nx)\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x\sin(2nx)}{2n}\right]_0^\pi - \frac{1}{2n}\int_0^\pi \sin(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{4n^2}\left[\cos(2nx)\right]_0^\pi = \frac{1}{4n^2}(1-1) = 0,\end{aligned}$$

이다. 정수 n에 대하여 $\sin(2n\pi) = 0$이고 $\cos(2n\pi) = 1$이기 때문이다. 따라서 점화식은

$$J_{n+1} = J_n \qquad (n \geq 1).$$

이다.

> **생각해 보기** $J_{n+1} = J_n$이라는 점화식은 의심스러울 만큼 자명해 보인다. 정말 이것이 답일까?

그렇다. 새로 나타난 $2\cos(2nx)$에 x를 곱해 정수 개의 주기에 걸쳐 적분하면 0이 되므로, n이 하나 바뀌어도 달라지는 것이 없다. 값을 확정하려면 첫째 항만 구하면 된다.

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2},$$

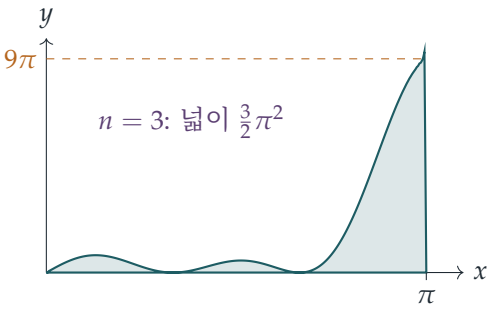
따라서 모든 양의 정수 n에 대하여 $J_n = \frac{1}{2}\pi^2$이다.

C 아래의 넓이

$(0, \pi)$에서 $x \geq 0$이고 $\sin^2(nx)/\sin^2 x \geq 0$이므로 곡선은 x축 아래로 내려가지 않는다. 따라서 C 아래의 넓이는 정확히 I_n이다. 첫 번째 관계식을 더하고(연쇄적으로 소거된다) $I_0 = 0$을 이용하면

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} J_k = n\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

이다. 따라서 C 아래의 넓이는 요구된 대로 $\frac{1}{2}n\pi^2$이다.



검산

- $n = 1$: 곡선은 $y = x$이고, 이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi^2$이다. ✓
- $n = 1, \ldots, 8$에 대하여 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 적분을 계산하면 매번 $J_n \approx 4.9348022 = \frac{1}{2}\pi^2$를 얻고, 예를 들어 $I_3 \approx 14.8044066 = \frac{3}{2}\pi^2$이다.
- 곡선은 $x = \pi$에서 $y = n^2\pi$까지 올라가지만 넓이는 n에 대해 선형으로만 증가한다. 봉우리는 높아지지만 폭이 좁아지므로(폭은 약 π/n) 이는 모순이 없다.

흔한 실수

- $I_0 = 0$임을 잊어버려(또는 I_0이 무엇을 뜻하는지 확인하지 않아) 연쇄 소거되는 합의 시작값이 없게 되는 경우.
- $\int x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$에서 부호를 틀리는 경우. 경계항이 0이 되고 $[0, \pi]$에서 $\sin(2nx)$의 나머지 적분이 0임을 확인하는 편이 더 깔끔하다.

STEP 너머

함수 $\sin^2(nx)/\sin^2 x$는 $1/n$배를 제외하면 푸리에 해석(Fourier analysis)의 **페예르 핵**(*Fejér kernel*)이고, $\sin\big((2n-1)x\big)/\sin x$는 본질적으로 **디리클레 핵**(*Dirichlet kernel*)이다. 여기서 발견한 사실, 즉 이 함수들이 구간의 양 끝에 집중되면서도 그 적분은 n에 의존하지 않는다는 사실이 바로 푸리에 급수(Fourier series)가 수렴함을 증명하는 데 이 함수들을 유용하게 만드는 성질이다. Stein과 Shakarchi의 *Fourier Analysis: An Introduction*(푸리에 해석 입문)이 이 내용을 아름답게 전개한다. 실해석학의 배경 지식은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP III 1992, 문제 7

순수수학 • 벡터 기하

STEP III 1992, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q7

핵심 아이디어

이 문제의 모든 것은 평행사변형과, 주어진 비로 변을 나누는 점들로 이루어져 있다. 이런 상황은 바로 위치벡터(position vector)가 잘 다루는 것이다. 원점을 A에 두고, 모든 점을 두 변 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AD}$로 나타낸다. 그런 다음 두 직선의 교점을 구하고, 이 점이 세 번째 직선 위에 있는지 확인한다.

풀이

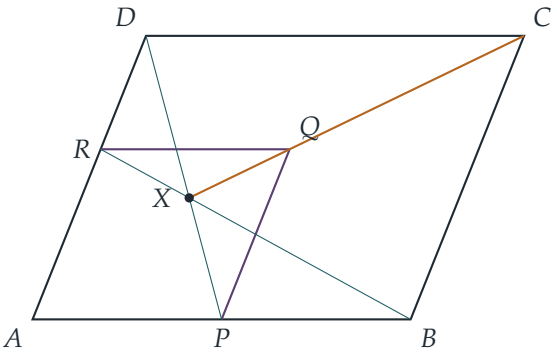
A를 원점으로 잡고 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$라 하자. $ABCD$는 진짜 평행사변형이므로 이 두 벡터는 평행하지 않다. 따라서 평면 위의 모든 점은 단 하나의 실수 쌍 (λ, μ)에 대하여 $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$로 나타나며, 계수를 비교할 수 있다.

$ABCD$가 평행사변형이므로 C의 위치벡터는 $\mathbf{b} + \mathbf{d}$이다. P는 변 AB 위에, R는 변 AD 위에 있으므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{p} = p\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r} = r\,\mathbf{d}, \qquad 0 \le p, r \le 1.$$

$APQR$가 평행사변형이므로 $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}$이고, 따라서

$$\mathbf{q} = p\,\mathbf{b} + r\,\mathbf{d}.$$



BR와 DP의 교점

직선 BR 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b}+s(r\mathbf{d}-\mathbf{b})=(1-s)\,\mathbf{b}+sr\,\mathbf{d},$$

이고, 직선 DP 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{d}+t(p\mathbf{b}-\mathbf{d})=tp\,\mathbf{b}+(1-t)\,\mathbf{d}.$$

이다. 공통인 점에서는 $\mathbf{b}$의 계수와 $\mathbf{d}$의 계수가 각각 같아야 한다.

$$1-s=tp, \qquad sr=1-t.$$

$s=1-tp$를 두 번째 식에 대입하면 $r-rpt=1-t$이므로 $t(1-pr)=1-r$이다.

생각해 보기 $1-pr$로 나눌 수 있는가?

$0\le p,r\le 1$이므로 $pr=1$인 것은 $p=r=1$일 때, 즉 $P=B$이고 $R=D$일 때뿐이다. 이때 $Q=C$가 되어 "직선" CQ가 정의되지 않으므로 증명할 것이 없다. 따라서 이 경우를 제외하면 $1-pr>0$이다. 이것은 또한 BR와 DP가 평행하지 않아 정확히 한 점에서 만난다는 것도 보여 준다. 그러면

$$t=\frac{1-r}{1-pr}, \qquad s=1-tp=\frac{1-pr-p+pr}{1-pr}=\frac{1-p}{1-pr},$$

이고, 교점 X는

$$\mathbf{x}=tp\,\mathbf{b}+sr\,\mathbf{d}=\frac{p(1-r)\,\mathbf{b}+r(1-p)\,\mathbf{d}}{1-pr}.$$

이다.

X는 CQ 위에 있다

직선 CQ 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{c}+u(\mathbf{q}-\mathbf{c})=(\mathbf{b}+\mathbf{d})+u\big((p-1)\mathbf{b}+(r-1)\mathbf{d}\big)=\big(1-u(1-p)\big)\mathbf{b}+\big(1-u(1-r)\big)\mathbf{d}.$$

이다. $u = \dfrac{1}{1-pr}$을 대입해 보자. $\mathbf{b}$의 계수는

$$1 - \frac{1-p}{1-pr} = \frac{1-pr-1+p}{1-pr} = \frac{p(1-r)}{1-pr},$$

이 되고, $\mathbf{d}$의 계수는

$$1 - \frac{1-r}{1-pr} = \frac{1-pr-1+r}{1-pr} = \frac{r(1-p)}{1-pr}.$$

이 된다. 이는 정확히 $\mathbf{x}$의 계수이다. 따라서 X는 CQ 위에도 있고, 세 직선 BR, CQ, DP는 모두 X를 지난다. 즉 요구한 대로 세 직선은 한 점에서 만난다. ■

(대칭성도 이 결과를 뒷받침한다. B, P, p와 D, R, r의 역할을 서로 바꾸면 BR와 DP가 서로 바뀌고, CQ는 그대로이며, $\mathbf{x}$의 식도 변하지 않는다.)

검산

- $P = A$ $(p = 0)$이면 $Q = R$이고 $\mathbf{x} = r\mathbf{d}$, 즉 R이다. 실제로 DP는 직선 DA이고 이는 BR와 R에서 만나며, CQ는 CR이므로 R를 지난다.
- P와 R가 각각 AB와 AD의 중점이면 $\mathbf{x} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$, 즉 A에서 C까지 가는 길의 3분의 1 지점이다. BR와 DP는 삼각형 ABD의 두 중선이므로, 이 점은 당연히 삼각형 ABD의 무게중심(centroid)이다.
- 무작위로 만든 평행사변형 5000개와 무작위로 잡은 P, R의 위치에 대하여 분수로 정확하게 계산하여 세 직선이 한 점에서 만나는지 확인했다. 모든 경우가 $\mathbf{x}$의 식과 일치했다.

흔한 실수

- 두 계수를 비교할 수 있는 것은 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{d}$가 평행하지 않기 때문이라는 사실을 잊는다.
- 서로 다른 두 직선에 같은 매개변수를 쓴다. 직선마다 각자의 매개변수(s, t, u)가 필요하다.
- $Q = C$가 되어 직선 CQ가 정의되지 않는 퇴화된 경우 $P = B$, $R = D$를 언급하지 않는다.

STEP 너머

이 풀이에서는 길이나 각을 전혀 쓰지 않았고, 평행선과 직선 위의 비만 썼다는 점에 주목하자. 따라서 이 결과는 **아핀 기하학**(affine geometry)에 속한다. 아핀 사상(affine map, 선형

사상 다음에 평행이동을 한 것)은 어떤 평행사변형이든 정사각형으로 보내면서 세 직선이 한 점에서 만나는 성질(concurrency)을 보존하므로, 정사각형에 대해서만 결과를 증명해도 충분하다. 직선들이 만나는지에 관한 질문은 사영기하학(projective geometry)에서도 자연스러운데, 체바(Ceva)의 정리와 데자르그(Desargues)의 정리 같은 정리들이 바로 그곳에 속한다. 이러한 아이디어를 폭넓고 읽기 쉽게 둘러보고 싶다면 Coxeter의 *Introduction to Geometry*(기하학 입문)나 Brannan, Esplen, Gray의 *Geometry*(기하학)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 1992, 문제 8

순수수학 • 근을 이용한 삼각함수의 합

STEP III 1992, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q8

핵심 아이디어

드 무아브르 정리(de Moivre's theorem)를 쓰면 $\sin(2n+1)\theta$를 $\cos\theta$와 $\sin\theta$에 대한 다항식(polynomial)으로 바꿀 수 있고, 여기서 $\sin^{2n+1}\theta$를 나누어 내면 $\cot^2\theta$에 대한 다항식이 남는다. 각 $k\pi/(2n+1)$에서는 좌변이 0이 되므로, 이 각들의 코탄젠트의 제곱은 이미 알고 있는 다항식의 근(root)이 된다. 근을 **모두** 알고 나면, 세 합은 모양만 바꾼 비에트 공식(Vieta's formulas), 곧 근의 합과 근의 역수의 합에 지나지 않는다.

풀이

항등식

$c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$, $N = 2n+1$이라 하자. 드 무아브르 정리와 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$\cos N\theta + \mathrm{i}\sin N\theta = (c+\mathrm{i}s)^N = \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}c^{N-j}(\mathrm{i}s)^j.$$

허수인 항은 j가 홀수인 항이다. $j = 2m+1$로 두면 $\mathrm{i}^{2m+1} = \mathrm{i}(-1)^m$이므로

$$\sin N\theta = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{2n+1}{2m+1}c^{2n-2m}s^{2m+1}.$$

이제 $r = n - m$으로 두어 합의 순서를 뒤집는다. 그러면 $2m + 1 = 2n + 1 - 2r$이고, 이항계수(binomial coefficient)의 대칭성에 의해 $\binom{2n+1}{2n+1-2r} = \binom{2n+1}{2r}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\theta &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}c^{2r}s^{2n+1-2r}\\ &= \sin^{2n+1}\theta\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta,\end{aligned}$$

이다. 여기서 s^{2n+1}을 묶어 내고 $c^{2r}/s^{2r} = \cot^{2r}\theta$를 이용하였다. 이 식은 $\sin\theta \neq 0$일 때마다 성립하며, 이것이 보이라고 한 것이다.

다항식의 근

$$p(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{2n+1}{2r}x^{r},$$

라 하고, $k = 1, \ldots, n$에 대하여 $\theta_k = k\pi/(2n+1)$로 두자. 그러면 $(2n+1)\theta_k = k\pi$이므로 $\sin(2n+1)\theta_k = 0$이고, 한편 $0 < \theta_k < \pi/2$이므로 $\sin\theta_k \neq 0$이다. 항등식을 $\sin^{2n+1}\theta_k$로 나누고 $(-1)^n$을 곱하면

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta_k = 0, \qquad \text{즉,} \qquad p\left(\cot^2\theta_k\right) = 0.$$

> **생각해 보기** 이것들이 근의 **전부**라는 것을 어떻게 알 수 있을까? 아래의 합은 모두 이 사실에 기대고 있다.

각 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$은 모두 $(0, \pi/2)$에 있고, 이 구간에서 cot은 양수이며 순감소한다. 따라서 n개의 수 $\cot^2\theta_k$는 서로 다르다. p의 최고차항 계수(leading coefficient)는 $(-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1) \neq 0$이므로 p의 차수는 정확히 n이고, 따라서 근은 많아야 n개이다. 그러므로 $p(x) = 0$의 근은 정확히 $k = 1, \ldots, n$에 대한 $\cot^2\theta_k$이며, 각각 단순근(simple root)이다.

필요한 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[x^n]:\ &(-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1),\\ [x^{n-1}]:\ &(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} = (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3},\\ [x^1]:\ &-\binom{2n+1}{2} = -n(2n+1), \qquad [x^0]:\ 1.\end{aligned}$$

소문항 (i)

근의 합은 x^{n-1}의 계수와 x^n의 계수의 비에 음의 부호를 붙인 것이다.

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\theta_k = -\frac{(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3}}{(-1)^n(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

소문항 (ii)

$\tan^2\theta_k = 1/\cot^2\theta_k$이므로, 구하는 것은 근 x_k의 역수의 합이다. 상수항이 1이므로 어느 근도 0이 아니며,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} = \frac{\sum_k \prod_{j\neq k} x_j}{\prod_k x_k},$$

이다. 비에트 공식에 의해 이 식의 분자와 분모는 각각 $(-1)^{n-1}\cdot[x^1]/[x^n]$과 $(-1)^n\cdot[x^0]/[x^n]$이다. 그 비는 $-[x^1]/[x^0]$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\tan^2\theta_k = -\frac{-n(2n+1)}{1} = n(2n+1).$$

(같은 이야기를 이렇게 할 수도 있다. 역수 $1/x_k$는 계수의 순서를 뒤집은 다항식 $x^n p(1/x)$의 근이므로, 그 다항식의 근의 합을 읽어 내면 된다.)

소문항 (iii)

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1+\cot^2\theta$와 소문항 (i)을 이용하면

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec}^2\theta_k = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{3n+2n^2-n}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

검산

$n=1$일 때 다항식은 $1-3x$이고, 그 근은 $\frac{1}{3} = \cot^2(\pi/3)$이다. 이때 (i)은 $\frac{1}{3}$, (ii)는 $3 = \tan^2(\pi/3)$, (iii)은 $\frac{4}{3} = \operatorname{cosec}^2(\pi/3)$을 주며, 모두 옳다. $n=3$일 때 각은 $\pi/7, 2\pi/7, 3\pi/7$이고, 계산기로 구한 세 합은 $5, 21, 8$로 $\frac{3\cdot5}{3}, 3\cdot7, \frac{2\cdot3\cdot4}{3}$과 일치한다. 또한 임의의 θ와 n에서 항등식을, $n\le 29$에 대해 세 합을 모두 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- $\cot^2\theta_k$가 서로 다르고 p의 차수가 정확히 n이라는 논증을 빠뜨리는 것. 이것이 없으면 $\cot^2\theta_k$에 비에트 공식을 적용할 수 없다.
- 계수의 부호 실수. 소문항 (i)에서 인수 $(-1)^n$은 약분되지만, 두 계수 모두에 그 인수가 붙어 있을 때에만 그렇다.

- k를 $2n$까지 쓰는 것. $k > n$일 때 각 $k\pi/(2n+1)$은 같은 $\cot^2$ 값을 되풀이하므로, 서로 다른 근을 주는 것은 $k \le n$뿐이다.

STEP 너머

소문항 (iii)과 $0 < \theta < \pi/2$에서 성립하는 $\cot^2\theta < 1/\theta^2 < \operatorname{cosec}^2\theta$를 함께 쓰면, $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$를 여기서 구한 합의 두 상수배 사이에 끼워 넣을 수 있다. $n \to \infty$로 보내면 오일러(Euler)의 유명한 결과 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$을 얻는데, 이는 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서 자주 소개하는 아름다운 초등적 증명이다. 다항식의 계수에서 합을 읽어 내는 이 아이디어는 대칭함수(symmetric functions)와 뉴턴 항등식(Newton's identities)의 바탕이 된다. 해석학 쪽으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 이런 결의 문제를 더 원한다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)를 보라.

풀이

STEP III 1992, 문제 9

순수수학 • 타원의 극방정식

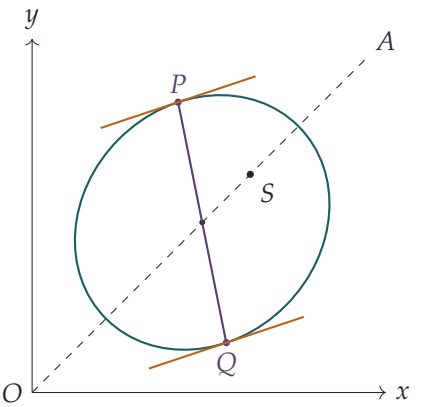
STEP III 1992, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q9

핵심 아이디어

극좌표(polar coordinates)는 S를 기준으로 하고 시초선(initial line)이 $y = x$ 방향을 향하도록 잡으므로, 극각이 θ인 점은 S에서 보아 데카르트 좌표계의 방향각이 $\theta + \frac{\pi}{4}$이다. x와 y를 θ의 함수로 쓰고 미분하면 기울기(gradient)를 얻는다. 두 번째 부분에서 실제로 쓸 수 있는 지름(diameter)의 성질은 타원(ellipse)이 그 중심에 대하여 대칭이라는 것이다. 즉 지름의 양 끝에서의 접선(tangent)은 **평행**하다. 그러므로 두 기울기를 같다고 놓고, 나머지는 반각(half-angle) 삼각함수 공식에 맡긴다.



그림($e = \frac{1}{2}$)에서 PQ는 중심을 지나는 지름이고, P와 Q에서의 접선은 평행하다.

풀이

접선의 기울기

S는 제1사분면에서 직선 $y=x$ 위에 있으므로, S를 점 (s,s) (단, $s>0$)라 하자. SA 방향의 단위벡터(unit vector)는 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$이고, 이는 x축과 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이룬다. 따라서 S에 대한 극좌표가 (r,θ)인 점은

$$x = s + r\cos\phi, \qquad y = s + r\sin\phi, \qquad \text{단, } \phi = \theta + \tfrac{\pi}{4}.$$

E 위에서는 $r = \ell/(1+e\cos\theta)$이므로

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{r\,e\sin\theta}{1+e\cos\theta}.$$

$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$를 r'으로 쓰고 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta = 1$을 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'\cos\phi - r\sin\phi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r'\sin\phi + r\cos\phi.$$

중요한 것은 비뿐이므로, 두 식에 양수 $(1+e\cos\theta)/r$를 곱한다.

$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\cos\phi - (1+e\cos\theta)\sin\phi = e\sin(\theta-\phi) - \sin\phi = -\tfrac{e}{\sqrt{2}} - \sin\phi,$$
$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\sin\phi + (1+e\cos\theta)\cos\phi = e\cos(\theta-\phi) + \cos\phi = \tfrac{e}{\sqrt{2}} + \cos\phi,$$

여기서 $\theta-\phi = -\frac{\pi}{4}$임을 이용하였다. 이제 $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)$이고 $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\sin\theta)$이다. 전체에 $\sqrt{2}$를 곱하면, $\theta=\alpha$에서의 접선 벡터(tangent vector)는

$$\mathbf{d}(\alpha) = \big(-(\sin\alpha+\cos\alpha+e),\ \cos\alpha-\sin\alpha+e\big). \qquad (*)$$

따라서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha+e}{-(\sin\alpha+\cos\alpha+e)} = \frac{\sin\alpha-\cos\alpha-e}{\sin\alpha+\cos\alpha+e}$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. ($\sin\alpha+\cos\alpha+e=0$인 곳에서는 접선이 수직이며, 그곳에서도 $(*)$는 여전히 성립한다.)

지름의 양 끝

> **생각해 보기** 중심을 구하지 않은 상태에서 "PQ가 중심을 지난다"는 조건을 어떻게 α와 β에 관한 방정식으로 바꿀 수 있을까?

첫 번째 부분을 이용한다. 타원은 중심 C에 대한 반바퀴 회전(점대칭)에 대하여 대칭이다. P와 Q가 지름의 양 끝이면, 이 반바퀴 회전은 두 점을 서로 바꾸고 P에서의 접선을 Q에서의 접선으로 옮긴다. 반바퀴 회전은 모든 직선을 그와 평행한 직선으로 옮기므로, P와 Q에서의 접선은 평행하다.

따라서 P에서 $\theta = \alpha$, Q에서 $\theta = \beta$라 하면, $(*)$의 벡터 $\mathbf{d}(\alpha)$와 $\mathbf{d}(\beta)$는 평행하다. 기울기 대신 벡터를 다루면 접선이 수직일 때에도 0으로 나누는 일이 생기지 않는다. $s_\alpha = \sin\alpha$, $c_\alpha = \cos\alpha$ 등으로 쓰자. 조건은

$$(s_\alpha + c_\alpha + e)(c_\beta - s_\beta + e) = (s_\beta + c_\beta + e)(c_\alpha - s_\alpha + e).$$

전개하면 $c_\alpha c_\beta$, $-s_\alpha s_\beta$, ec_α, ec_β, e^2 항이 양변에 모두 나타나 소거되고,

$$s_\alpha c_\beta - c_\alpha s_\beta + es_\alpha - es_\beta = s_\beta c_\alpha - c_\beta s_\alpha + es_\beta - es_\alpha,$$

즉

$$\sin(\alpha - \beta) + e(\sin\alpha - \sin\beta) = 0$$

이 남는다. 이제 $\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$와 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$를 이용하면

$$2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

? 생각해 보기 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$를 약분해도 될까?

그렇다. P와 Q는 서로 다른 점이므로 α와 β의 차는 2π의 배수가 아니고, 따라서 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$이다. 그러므로

$$\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

$\frac{\alpha}{2}$와 $\frac{\beta}{2}$로 전개하면

$$(1+e)\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} + (1-e)\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2} = 0.$$

$(1-e)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$로 나누면 ($E$가 타원이므로 $1-e>0$이다)

$$\tan\tfrac{\alpha}{2}\tan\tfrac{\beta}{2} = -\frac{1+e}{1-e}$$

를 얻고, 이것이 증명하려던 식이다. 이 나눗셈은 $\cos\frac{\alpha}{2}$나 $\cos\frac{\beta}{2}$가 0이 아닌 한 유효하다. 예를 들어 $\alpha = \pi$이면 위 방정식에서 $\sin\frac{\beta}{2} = 0$이어야 하므로 $\beta = 0$이다. 이 지름은 OSA를 따라 놓인 장축(major axis)이며, 이 경우 탄젠트의 곱은 정의되지 않는다. 그 밖의 모든 지름은 이 결과를 만족한다.

검산

- $\alpha = 0$ (S에 더 가까운 꼭짓점(vertex))에서 공식은 기울기 $\frac{-1-e}{1+e} = -1$을 준다. 옳은 값이다. 장축의 끝에서의 접선은 $y = x$에 수직이기 때문이다.
- $e = \frac{1}{2}$이면 곱은 -3이어야 한다. $\alpha = \frac{\pi}{2}$로 잡으면 $\tan\frac{\alpha}{2} = 1$이다. 그러면 $\tan\frac{\beta}{2} = -3$이므로 $\sin\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{4}{5}$이다. $(*)$로부터 $\mathbf{d}(\alpha) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $\mathbf{d}(\beta) = (\frac{9}{10}, \frac{3}{10})$이고, 두 벡터는 평행하다. ✓

- 수치적으로, ℓ, e, S, α를 무작위로 2000번 골라 확인한 결과, 기울기 공식은 유한 차분(finite-difference) 도함수와 일치하였고, P를 중심(S에서 AS 방향으로 거리 $\ell e/(1-e^2)$인 곳)에 대하여 대칭이동하여 얻은 E 위의 점 Q의 β는 10^{-13} 이내의 오차로 항등식을 만족하였다.

흔한 실수

- $\frac{\pi}{4}$ 회전을 잊고 $x = r\cos\theta$를 사용하여, 잘못된 좌표계에서의 기울기를 구하는 실수.
- $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 그것으로 나누는 실수.
- 중심을 직접 구해서 "C는 PQ의 중점이다"라는 조건을 바로 부과하려는 시도. 가능은 하지만 평행한 접선을 이용하는 것보다 훨씬 번거롭다.

STEP 너머

지름의 양 끝에서 접선이 평행하다는 사실은 **공액지름**(*conjugate diameters*) 이론의 일부이다. 평행한 현(chord)들의 중점은 한 지름 위에 있고, 그 지름의 양 끝에서의 접선은 그 현들과 평행하다. 타원을 원으로 바꾸는 아핀 사상(affine map)을 적용하면 이 모든 것이 초보적인 원의 기하가 되는데, 이것이 아핀 기하학과 사영기하학(projective geometry)이 그토록 강력한 이유 중 하나이다. 여기서 쓴 반각 탄젠트는 천체역학(celestial mechanics)에서 궤도를 나타낼 때 쓰는 표준적인 매개변수화(parametrisation)이기도 하다. 이 기하학으로 들어가는 좋은 대학 1학년 수준의 길잡이로는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)나 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 읽어 보기 바란다.

풀이

STEP III 1992, 문제 10

순수수학 • 호의 길이와 넓이

> **STEP III 1992, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q10

핵심 아이디어

두 둘레(perimeter)는 모두 호의 길이(arc length)를 나타내는 적분인데, 이 적분들은 초등함수로 계산할 수 없다(이들은 **타원 적분**(*elliptic integral*)이다). 따라서 둘이 같음을 보이는 유일한 방법은 한 적분을 다른 적분으로 바꾸는 것이다. 각 곡선에 대해 호의 길이 요소를 쓰고, $\cos^2 + \sin^2 = 1$을 이용하여 각 피적분함수(integrand)를 간단히 한 다음, 치환(substitution)과 약간의 대칭성을 이용하면 두 적분이 같은 적분임을 알 수 있다. 넓이는 둘 다 직접 계산할 수 있으므로 더 쉽다.

(시험지에 인쇄된 범위는 $\frac{1}{4}\theta$로 끝난다. 이는 분명히 $\frac{1}{4}\pi$의 오식이므로, $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$로 본다.)

풀이

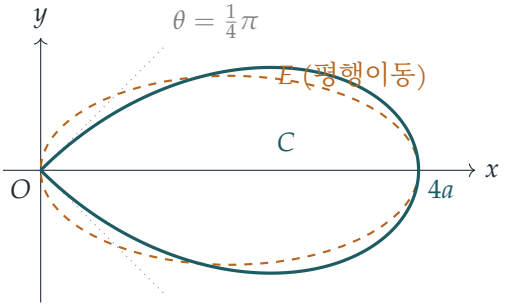
C의 개형 그리기

$-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$이면 $-\frac{1}{2}\pi < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$이므로, 이 범위 전체에서 $r = 4a\cos 2\theta > 0$이다($a > 0$으로 둔다). 몇 가지 특징은 다음과 같다.

- $r(-\theta) = r(\theta)$이므로 C는 시초선(initial line)에 대하여 대칭이다.
- 최댓값 $r = 4a$는 $\theta = 0$, 즉 점 $(4a, 0)$에서 나타난다.
- $\theta \to \pm\frac{1}{4}\pi$일 때 $r \to 0$이므로 곡선은 원점으로 들어가며, 원점에서 직선 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$에 접한다.

따라서 C는 하나의 닫힌 고리로, 네 잎 장미 곡선(rose curve) $r = 4a\cos 2\theta$의 잎 하나이며 양의 x축을 따라 놓여 있다. 그림은 C와 함께, 같은 구간 $0 \le x \le 4a$에 걸치도록 $2a$만큼 평

행이동한 E를 보여 준다.



C의 둘레

극곡선(polar curve)에서 호의 길이 요소는 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$를 만족한다. 여기서 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -8a\sin 2\theta$이므로

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= 16a^2\cos^2 2\theta + 64a^2\sin^2 2\theta \\ &= 16a^2\left(1 + 3\sin^2 2\theta\right). \end{aligned}$$

따라서 θ가 $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$를 움직일 때 고리가 한 번 그려지므로

$$\text{둘레}C = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4a\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

$\phi = 2\theta$로 치환하면 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$이고 적분 구간의 끝은 $\pm\frac{1}{2}\pi$가 된다.

$$\text{둘레}C = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

마지막 단계는 피적분함수가 ϕ에 대한 우함수(even function)이기 때문이다.

E의 둘레

$x = 2a\cos\phi$, $y = a\sin\phi$이면

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = 4a^2\sin^2\phi + a^2\cos^2\phi = a^2\left(1 + 3\sin^2\phi\right),$$

이고, ϕ가 0부터 2π까지 움직일 때 E가 한 번 그려지므로

$$\text{둘레}E = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi.$$

? **생각해 보기** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$는 왜 $[0,\frac{1}{2}\pi]$에서의 적분의 네 배인가?

$g(\phi)=\sqrt{1+3\sin^2\phi}$라 하자. $\sin^2(\pi-\phi)=\sin^2\phi$이므로 $[\frac{1}{2}\pi,\pi]$에서 g의 그래프는 $[0,\frac{1}{2}\pi]$에서의 그래프를 거울에 비춘 모양이고, 따라서 $\int_0^{\pi}g=2\int_0^{\pi/2}g$이다. 또 $\sin^2(\phi+\pi)=\sin^2\phi$이므로 g는 주기(period)가 π이고, 따라서 $\int_{\pi}^{2\pi}g=\int_0^{\pi}g$이다. (기하학적으로는 타원의 네 사분면 부분의 길이가 모두 같다는 뜻이다.) 그러므로

$$\text{둘레}E=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

이고, 이는 C의 둘레에 대해 구한 식과 정확히 같다. 따라서 두 둘레는 같으며, 적분값을 계산할 필요는 전혀 없었다.

넓이

극곡선으로 둘러싸인 넓이는 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$이다. $\cos^2 2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)$를 이용하면

$$\begin{aligned}\text{넓이}C&=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}16a^2\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=4a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=4a^2\Big[\theta+\tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}=4a^2\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi a^2.\end{aligned}$$

타원의 경우, 시계 반대 방향으로 그려지는 닫힌 곡선으로 둘러싸인 넓이는 $\frac{1}{2}\oint\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)\mathrm{d}\phi$이므로

$$\text{넓이}E=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2a^2\cos^2\phi+2a^2\sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2\pi=2\pi a^2.$$

(마찬가지로, 이는 잘 알려진 공식 $\pi\times$ 반축 $\times$ 반축 $=\pi(2a)(a)$이다.) 따라서 두 넓이는 모두 $2\pi a^2$로 같다.

검산

- $a=1.7$일 때 각 곡선을 변이 200 000개인 다각형으로 근사하면 두 둘레가 모두 16.470362로 나오며, 이는 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산한 $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$의 값과 같다. 따라서 각 둘레는 약 $9.6884a$이다.
- 같은 다각형으로 구한 두 넓이는 모두 $18.158406=2\pi(1.7)^2$이었다.
- C의 넓이에 대한 타당성 검사: C는 넓이가 약 $8.8a^2$인 직사각형 $0\le x\le 4a$, $|y|\le 1.1a$ 안에 놓이며, $2\pi a^2\approx 6.3a^2$는 그 넓이에 대해 합리적인 비율이다.

흔한 실수

- $\phi = 2\theta$로 치환할 때 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}$를 빠뜨리는 것. C에 대한 인수 $4a$는 $2a$가 되고, 우함수 단계를 거친 뒤에야 다시 $4a$가 된다.
- 극곡선의 넓이에 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 대신 $\int r\,\mathrm{d}\theta$를 쓰는 것.
- $0 \leq \theta < 2\pi$에서의 장미 곡선 $r = 4a\cos 2\theta$ 전체를 C로 취급하는 것. 주어진 범위는 잎 하나만을 골라낸다.

STEP 너머

적분 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$는 **제2종 완전 타원 적분**(*complete elliptic integral of the second kind*)이며, 초등함수인 원시함수(antiderivative)를 갖지 않는다. 문제에서 적분값의 계산을 금지한 것도 이 때문이다. 타원의 둘레는 닫힌 꼴로 나타낼 수 없다. 우리의 적분은 $k^2 = -3$인 경우이다. 이 적분은 $\sin^2\phi$를 $1 - \cos^2\phi$로 바꾼 다음 ϕ를 $\frac{1}{2}\pi - \phi$로 바꾸면 $0 < k < 1$인 표준형으로 다시 쓸 수 있다. 타원 적분은 타원 함수(elliptic function)와 타원 곡선(elliptic curve)으로 이어졌으며, 이들은 현대 정수론(number theory)의 중심에 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이처럼 극곡선과 매개변수 곡선의 호의 길이와 넓이를 비교하는 STEP 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 1992, 문제 11

역학 • 충돌과 반발계수

STEP III 1992, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

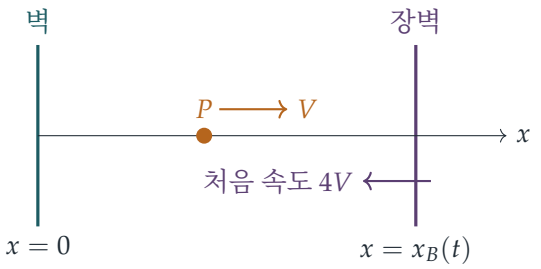
step.maths.org/questions/92-s3-q11

핵심 아이디어

모든 위치를 벽으로부터 측정하면, 입자와 장벽이 각각 벽까지의 거리를 간단한 식으로 나타낼 수 있다. 충돌(collision)이란 이 식들 중 두 개가 같아지는 순간일 뿐이므로, 시각을 묻는 각 질문은 이차방정식(quadratic)이 된다. 충돌할 때 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)은 상대 속도(relative velocity)에 적용되므로, 그 순간 장벽 자체의 속도가 중요하다.

풀이

P를 매끄러운(smooth) 탁자 위에서 O를 지나고 벽에 수직인 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. x를 벽 AB로부터의 거리로 잡고 장벽 쪽을 양의 방향으로 하며, 시각 t는 발사한 순간부터 잰다. 속도는 벽에서 멀어지는 방향일 때 양으로 한다.



첫 번째 충돌

장벽은 거리 $\frac{75}{32}VT$에서 속도 $-4V$로 출발하고 일정한 가속도 $+4V/T$를 가지므로, 등가속도 공식(constant-acceleration formulae)에 의해

$$x_B(t) = \tfrac{75}{32}VT - 4Vt + \frac{2Vt^2}{T}, \qquad v_B(t) = -4V + \frac{4Vt}{T}.$$

이다. 처음으로 무언가에 부딪히기 전까지 P는 일정한 속력으로 움직이므로(탁자가 매끄럽기 때문이다) $x_P = Vt$이다. 둘은 $x_P = x_B$일 때 만난다. $s = t/T$로 두면

$$2s^2 - 5s + \tfrac{75}{32} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 64s^2 - 160s + 75 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (8s-5)(8s-15) = 0.$$

이다. 첫 만남은 작은 근에서 일어나므로, 충돌은 문제에서 요구한 대로 $t = 5T/8$에 일어난다. (그 전까지 간격 $x_B - x_P$는 양수이다. $s = 0$에서 양수이고 그 사이에 근이 없기 때문이다.)

이 순간 P는 $x = \frac{5}{8}VT$에 있고 장벽의 속도는

$$v_B\left(\tfrac{5}{8}T\right) = -4V + \tfrac{5}{2}V = -\tfrac{3}{2}V,$$

이므로, 장벽은 여전히 속력 $\frac{3}{2}V$로 벽을 향해 움직이고 있다.

충돌 직후의 속력

장벽의 운동은 영향을 받지 않으므로 뉴턴의 실험 법칙만 있으면 된다. 접근 속력은 $V - (-\frac{3}{2}V) = \frac{5}{2}V$이다. 충돌 직후 P의 속도를 w라 하면 분리 속력은 $-\frac{3}{2}V - w$이고,

$$-\tfrac{3}{2}V - w = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{2}V \quad\Longrightarrow\quad w = -\tfrac{11}{4}V.$$

이다. 따라서 P는 속력 $\dfrac{11V}{4}$로 벽을 향해 튕겨 나간다.

> **?** **생각해 보기** 튕겨 나가는 속력이 왜 P가 원래 가지고 있던 속력 V보다 클까?

충돌하는 순간 장벽은 P를 향해 움직이고 있는데, 이는 배트가 공을 치는 것과 같다. 반발은 장벽에 대한 P의 속력에 작용한다. 장벽에 대해 P는 $\frac{5}{2}V$로 다가와서 $\frac{5}{4}V$로 떠난다. 여기에 벽을 향하는 장벽 자체의 속력 $\frac{3}{2}V$를 다시 더하면 $\frac{11}{4}V$가 된다.

벽에서 튕기기와 두 번째 충돌

P는 거리 $\frac{5}{8}VT$를 속력 $\frac{11}{4}V$로 이동해야 하므로, 시간 $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}T = \frac{5}{22}T$가 걸린다. 따라서 P가 AB에 부딪히는 시각은

$$t_1 = \tfrac{5}{8}T + \tfrac{5}{22}T = \tfrac{75}{88}T.$$

이다. 장벽이 그 사이에 끼어들 수는 없다. 이 구간 내내 장벽은 P보다 느리게 벽을 향해 움직이며(속력이 $\frac{3}{2}V$에서 줄어든다), 벽에 아예 도달하지 않는다. 장벽이 벽에 가장 가까워지는 때는 $t = T$이며, 이때 $v_B = 0$이고 $x_B = \frac{75}{32}VT - 4VT + 2VT = \frac{11}{32}VT > 0$이다.

벽은 고정되어 있으므로 $e = \frac{1}{2}$에 의해 입자는 속력 $\frac{11}{8}V$로 튕겨 나가고, 그 이후

$$x_P = \tfrac{11}{8}V\left(t - \tfrac{75}{88}T\right) = \tfrac{11}{8}Vt - \tfrac{75}{64}VT.$$

이다. 장벽과의 다음 충돌은 t_1 이후 처음으로 $x_P = x_B$가 되는 시각에 일어난다. $s = t/T$로 나타내면

$$\tfrac{75}{32} - 4s + 2s^2 = \tfrac{11}{8}s - \tfrac{75}{64} \iff 128s^2 - 344s + 225 = 0 \iff (8s-9)(16s-25) = 0.$$

이다. 근은 $s = \frac{9}{8}$과 $s = \frac{25}{16}$이다. $\frac{75}{88} < 1 < \frac{9}{8}$이므로 두 근 모두 t_1보다 나중이다. t_1에서 간격 $x_B - x_P = x_B(t_1)$은 양수이므로, 간격이 처음으로 0이 되는 때는 작은 근이다. 따라서 문제에서 요구한 대로 장벽과의 다음 충돌은 처음부터 시각 $9T/8$에 일어난다. (검산으로, 그 때 둘 다 $x = \frac{3}{8}VT$에 있다.)

? 생각해 보기 왜 아무 근이나가 아니라 작은 근을 택해야 할까?

이 이차방정식은 두 운동이 마치 서로를 통과할 수 있는 것처럼 기술한다. 두 번째 근 $\frac{25}{16}T$는 실제 충돌 이후, 즉 운동이 이미 바뀐 뒤의 "만남"이 된다. 물리적인 충돌은 간격이 처음으로 0이 되는 때이다.

검산

- $t = \frac{5}{8}T$에서: $x_B = \frac{75}{32} - \frac{80}{32} + \frac{25}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$ (VT 단위)이며, x_P와 같다.
- $t = \frac{9}{8}T$에서: $x_B = \frac{75}{32} - \frac{144}{32} + \frac{81}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$이고, $x_P = \frac{11}{8} \cdot \frac{24}{88} = \frac{3}{8}$이다.
- $V = T = 1$(시간 간격 10^{-6})로 한 시간 단계별 시뮬레이션에서 충돌은 $t \approx 0.6250$(튕겨 나간 속도 -2.750), $0.8523 \approx \frac{75}{88}$, 그리고 1.1250에서 나타났다.

흔한 실수

- 반발을 P의 속력에만 적용하여 $\frac{11}{4}V$ 대신 $\frac{1}{2}V$를 얻는 실수. 장벽이 움직이고 있으므로 상대 속도를 사용해야 한다.
- 가속도의 부호를 잘못 잡는 실수. 장벽은 벽을 향해 움직이기 **시작**하지만 감속하고 있으며, $t = T$에서 방향을 바꾼다.
- P가 AB에서 튕겨 나오기 전에 장벽이 P(또는 벽)에 도달하지 않는지 확인하는 것을 잊는 실수.

STEP 너머

여기서의 멋진 요령은 충돌하는 순간 장벽의 기준틀(frame)에서 생각하는 것이다. 장벽의 질량이 매우 크기 때문에, 반발은 고정된 벽에서와 똑같이 상대 속도의 방향을 뒤집고 크기를 일정 비율로 바꾼다. 이렇게 기준틀을 바꾸는 것은 대학 1학년 역학의 핵심이며, 갈릴레이 불변성(Galilean invariance)과 이체 충돌에서의 질량중심 기준틀(centre-of-mass frame)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 1992, 문제 12

역학 • 운동량 보존

STEP III 1992, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

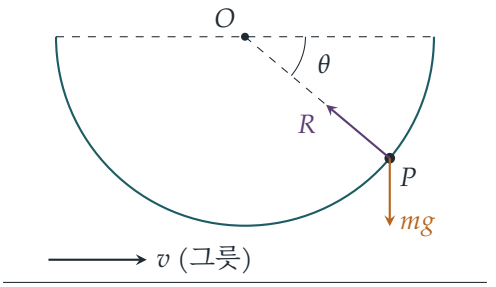
step.maths.org/questions/92-s3-q12

핵심 아이디어

그릇과 입자로 이루어진 계에는 외부에서 수평 방향으로 작용하는 힘이 없고, 중력 말고는 일을 하는 힘도 없다. 따라서 두 가지 보존 법칙(conservation law), 곧 수평 운동량(horizontal momentum) 보존과 에너지(energy) 보존을 쓸 수 있다. 운동량 보존은 그릇의 속력과 $\dot{\theta}$를 연결하고, 이어서 에너지 보존으로 v^2을 구한다. 반작용(reaction)을 구할 때 가장 깔끔한 방법은 그릇의 (가속하는) 좌표계에서 생각하는 것이다. 이 좌표계에서 입자는 단순히 O를 중심으로 원운동을 한다. 또한 반작용이 그릇에 작용하는 유일한 수평 방향의 힘이라는 사실도 기억해 두자.

풀이

모형. 그릇은 매끄러우므로 P에 작용하는 반작용 R은 법선 방향, 곧 PO 방향으로 작용한다. 받침대는 가볍고 탁자는 매끄러우므로, (받침대를 포함한) 그릇에 작용하는 수평 방향의 힘은 입자가 미는 힘의 수평 성분뿐이다. P가 테두리의 오른쪽 끝에서 출발한다고 하자. 그러면 P가 미끄러져 내려가면서 θ는 0부터 증가하고, 그릇은 오른쪽으로 움직인다.



수평 운동량 보존

그릇의 수평 위치를 X라 하면 $\dot{X} = v$이다. O에 대한 입자의 상대 위치는 $(a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$이므로, 입자의 위치는 $(X + a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$이고 속도는

$$\big(v - a\dot{\theta}\sin\theta,\ -a\dot{\theta}\cos\theta\big).$$

이다. 계에는 외부의 수평 방향 힘이 없고 계는 정지 상태에서 출발하므로, 전체 수평 운동량은 계속 0이다.

$$2mv + m\big(v - a\dot{\theta}\sin\theta\big) = 0 \quad\Longrightarrow\quad 3v = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 이때 입자의 수평 속도는 $v - 3v = -2v$임에 주목하자. 입자는 그릇 속력의 두 배로 왼쪽으로 움직이는데, 그릇의 운동량 $2mv$를 상쇄하려면 당연히 그래야 한다.

에너지

반작용은 알짜 일을 하지 않고(내력이며 면이 매끄럽기 때문이다) 탁자도 일을 하지 않으므로, 에너지가 보존된다. OP가 각 θ를 이룰 때 입자는 $a\sin\theta$만큼 내려왔다. $a\dot{\theta} = 3v/\sin\theta$를 쓰면 입자의 연직 방향 속력은 $a\dot{\theta}\cos\theta = 3v\cot\theta$이므로

$$\begin{aligned} mga\sin\theta &= \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + \tfrac{1}{2}m\big[(2v)^2 + 9v^2\cot^2\theta\big] \\ &= mv^2\Big(3 + \tfrac{9}{2}\cot^2\theta\Big). \end{aligned}$$

양변에 $2\sin^2\theta/m$을 곱하면

$$2ga\sin^3\theta = v^2\big(6\sin^2\theta + 9\cos^2\theta\big) = v^2\big(9 - 3\sin^2\theta\big),$$

이므로

$$v^2 = \frac{2ga\sin^3\theta}{3(3 - \sin^2\theta)},$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다.

반작용

> **생각해 보기** 그릇은 가속하고 있다. PO 방향으로 입자의 운동 방정식을 어떻게 세울까?

두 개의 방정식을 쓴다. 먼저 그릇에 대하여 생각하자. 입자는 O에서 P 방향으로 크기 R인 힘으로 그릇을 밀고, 이 힘의 수평 성분은 오른쪽으로 $R\cos\theta$이다. 따라서 그릇의 가속도 A는

$$2mA = R\cos\theta. \tag{1}$$

를 만족한다. 다음으로 입자에 대해서는 그릇의 좌표계에서 생각한다. 이 좌표계에서 입자는 O를 중심으로 하는 반지름 a인 원 위를 속력 $a\dot{\theta}$로 움직이고, R과 mg 외에 왼쪽으로 크기 mA인 가상의 힘(fictitious force)을 받는다. O를 향하는 방향(방향 $(-\cos\theta, \sin\theta)$)으로 분해하면 중력은 $-mg\sin\theta$, 가상의 힘은 $+mA\cos\theta$를 기여하므로

$$R - mg\sin\theta + mA\cos\theta = ma\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

이다. (같은 내용을 지면 좌표계에서 보면, 입자의 가속도는 그릇의 가속도 A에 그릇에 대한 입자의 원운동 가속도를 더한 것이다. 이를 PO 방향으로 분해하면 같은 방정식을 얻는다.)

앞의 두 결과로부터

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{9v^2}{a\sin^2\theta} = \frac{6g\sin\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

이다. (1)에서 얻은 $mA = \frac{1}{2}R\cos\theta$를 (2)에 대입하고 R이 있는 항을 모으면

$$R\left(1+\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right) = mg\sin\theta + \frac{6mg\sin\theta}{3-\sin^2\theta} = mg\sin\theta\,\frac{9-\sin^2\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

이다. $1+\frac{1}{2}\cos^2\theta = \frac{1}{2}(3-\sin^2\theta)$이므로

$$\boxed{R = \frac{2mg\sin\theta\,(9-\sin^2\theta)}{(3-\sin^2\theta)^2} = \frac{2mg\sin\theta\,(8+\cos^2\theta)}{(2+\cos^2\theta)^2}.}$$

검산

- 처음에 $\theta = 0$이면 $R = 0$이다. 마땅히 그래야 한다. 입자는 테두리에 정지해 있고, 입자를 그릇 쪽으로 누르는 것은 아무것도 없다.
- 바닥에서 $\theta = \frac{1}{2}\pi$이다. 이때 (1)에 의해 그릇의 가속도는 0이고, $a\dot{\theta}^2 = 3g$이며 $R - mg = 3mg$이므로 $R = 4mg$이다. 이는 공식에서 얻는 값 $2mg\cdot 8/2^2$과 일치한다.
- 그릇이 고정되어 있다면(무한히 무겁다면) 잘 알려진 결과는 $v_p^2 = 2ga\sin\theta$, $R = 3mg\sin\theta$이다. 그릇이 반동으로 움직이면 테두리 근처에서는 R이 더 작아지고(작은 θ에 대하여 $3mg\sin\theta$가 아니라 약 $2mg\sin\theta$이다. 그릇이 P에서 멀어지기 때문이다), 바닥에서는 더 커진다($3mg$가 아니라 $4mg$이다).
- 전체 운동 방정식을 수치적으로 단계별로 풀어 보면($m = 1.3$, $a = 0.7$, $g = 9.81$로 두고) 테두리에서 바닥까지 전 구간에서 $3v = a\dot{\theta}\sin\theta$, v^2에 대한 공식, R에 대한 공식이 모두 10^{-7} 이내의 오차로 재현되었다.

흔한 실수

- 그릇이 고정된 것처럼 $R - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2$이라고 쓰는 것. 그릇이 가속하므로, 입자의 가속도는 그릇에 대한 원운동 가속도만이 아니다.
- 입자의 운동 에너지로 $\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2$을 쓰는 것. $a\dot{\theta}$는 그릇에 대한 입자의 상대 속력이지, 탁자에 대한 속력이 아니다.

STEP 너머

이 계는 자유도(degree of freedom)가 2인 계이며, 가장 깔끔하고 체계적으로 다루는 방법은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)이다. 운동 에너지와 위치 에너지를 X와 θ로 나타내면, X가 라그랑지안에 나타나지 않으므로(즉 X는 "순환(cyclic)" 좌표이므로) 운동량 보존이 저절로 따라 나온다. 우리가 사용한 가상의 힘은 비관성 좌표계(non-inertial frame)에서의 역학 가운데 가장 간단한 경우이며, 대학 1학년 과정에서는 이를 원심력과 코리올리(Coriolis) 힘이 나타나는 회전 좌표계로 확장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 비관성 좌표계와 상호작용하는 물체들의 계를 모두 매우 잘 다룬다.

풀이

STEP III 1992, 문제 13

역학 • 고정축에 대한 회전

STEP III 1992, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q13

핵심 아이디어

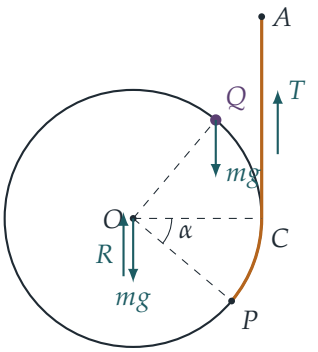
축이 고정되어 있으므로 원판과 입자는 하나의 강체(rigid body)를 이루고, 좌표는 돌아간 각 하나뿐이다. 에너지 보존(conservation of energy)(탄성, 중력, 운동 에너지)으로부터 모든 위치에서의 각속력(angular speed)을 얻을 수 있고, "P가 C에 도달한다"는 것은 가는 도중에 운동 에너지(kinetic energy)가 한 번도 0으로 떨어지지 않는다는 뜻일 뿐이다. C에서의 각속력을 구하고 나면, 축에 작용하는 반작용(reaction)은 전체 계의 질량중심(centre of mass)에 뉴턴(Newton) 제2법칙(Newton's second law)을 적용하여 얻는다.

풀이

모형과 기하

Q는 입자로, 줄은 가볍다고 본다. 테두리는 매끄럽다고 보므로 장력(tension) T는 줄 전체에서 같고, 줄이 테두리에 가하는 수직 접촉력은 O를 지난다. 따라서 O에 대한 줄의 모멘트(moment)는 P에서 접선 방향으로 당기는 장력의 모멘트뿐이며, 그 크기는 $2bT$이다. (장력이 줄이 테두리를 떠나는 점 C에서 AC를 따라 연직 위로, O로부터 거리 $2b$인 곳에 작용한다고 보아도 정확히 같은 모멘트가 나온다.)

$\alpha = \angle POC$라 하고, P는 OC 아래에 있다고 하자. 놓는 순간 $\alpha = \frac{\pi}{2}$이고, P는 $\alpha = 0$일 때 C에 도달한다. $\angle POQ = 90^\circ$이므로 OQ는 OC 위로 각 $\frac{\pi}{2} - \alpha$를 이루고, 따라서 Q는 O보다 $2b\cos\alpha$만큼 높이 있다. 특히 Q는 처음에 O와 같은 높이(C)에서 출발하고, P가 C에 도달할 때 O의 바로 위에 있다.



줄의 전체 길이는 $AC + \text{호}CP = \pi b + 2b\alpha$이고 자연 길이(natural length)는 πb이므로, 늘어난 길이(extension)는 $2b\alpha$이다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해

$$T = \frac{kmg \cdot 2b\alpha}{\pi b} = \frac{2kmg\alpha}{\pi},$$

이고, 저장된 탄성 에너지(elastic energy)는

$$E(\alpha) = \frac{kmg\,(2b\alpha)^2}{2\pi b} = \frac{2kmgb\,\alpha^2}{\pi}.$$

이다.

축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 원판의 관성 모멘트에 테두리 위의 Q의 관성 모멘트를 더한 것이다.

$$I = \tfrac{1}{2}m(2b)^2 + m(2b)^2 = 6mb^2.$$

P가 C에 도달한다

원판이 돌아 P가 C를 향해 올라가면(α가 감소하면) 줄이 짧아지면서 탄성 에너지를 내놓고, 그동안 Q는 올라간다. 축은 고정되어 있고 매끄러우므로 에너지가 보존된다. 계는 $\alpha = \frac{\pi}{2}$에서 정지 상태로 출발하며, 이때 Q의 높이는 O를 기준으로 0이고 $E = \frac{1}{2}\pi kmgb$이므로

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 &= E\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - E(\alpha) - mg \cdot 2b\cos\alpha \\ &= \frac{2kmgb}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) - 2mgb\cos\alpha.\end{aligned}$$

이다. 원판은 실제로 올바른 방향으로 돌기 시작한다. 놓는 순간 줄은 반지름 $2b$에서 $T = kmg$로 당기고, Q의 무게는 수평 거리 $2b$에서 반대 방향으로 작용하므로, 알짜 모멘트는 $2(k-1)mgb > 0$이다. $k > \frac{4}{\pi} > 1$이기 때문이다.

$[0, \frac{\pi}{2})$의 모든 α에서 운동 에너지가 양수로 유지되면, 즉

$$\frac{k}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) > \cos\alpha \qquad \text{단, } 0 \le \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

이면 P는 C에 도달한다. $k > \frac{4}{\pi}$이고 $\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2 > 0$이므로 좌변은

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) = 1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2},$$

보다 크다. 따라서 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $g(\alpha) = 1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2} - \cos\alpha \geq 0$임을 보이면 충분하다.

? **생각해 보기** 구간 전체에서 이차식과 $\cos\alpha$를 어떻게 비교할 수 있을까?

이계도함수(second derivative)를 살펴보자. $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$, $g'(\alpha) = -\frac{8\alpha}{\pi^2} + \sin\alpha$이므로 $g'(0) = 0$이고, $g''(\alpha) = \cos\alpha - \frac{8}{\pi^2}$이다. $\frac{8}{\pi^2} < 1$이고 $\cos\alpha$는 1에서 0으로 감소하므로, $[0, \alpha_0)$에서 $g'' > 0$이고 $(\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$에서 $g'' < 0$인 α_0가 단 하나 존재한다.

- $[0, \alpha_0]$에서 g'는 $g'(0) = 0$에서부터 증가하므로 $g' \geq 0$이고 $g \geq g(0) = 0$이다.
- $[\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$에서 g는 오목(concave)하므로, 그 그래프는 양 끝값 $g(\alpha_0) \geq 0$과 $g(\frac{\pi}{2}) = 0$을 잇는 현(chord)보다 위에 있다. 따라서 여기서도 $g \geq 0$이다.

그러므로 구간 전체에서 $g \geq 0$이고, 엄격한 부등식 $k > \frac{4}{\pi}$ 때문에 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$에서 운동 에너지는 엄격하게 양수이다. 원판은 $\alpha = 0$이 되기 전에 결코 멈추지 않으므로 P는 C에 도달한다. 특히 C에서($\alpha = 0$을 대입하면)

$$3mb^2\dot{\alpha}^2 = \frac{\pi k m g b}{2} - 2mgb \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{(\pi k - 4)g}{6b},$$

이다. 여기서 ω는 P가 C에 있을 때의 각속력이다. (조건 $k > \frac{4}{\pi}$가 어디서 나오는지 여기서 알 수 있다. 이 조건은 정확히 $\omega^2 > 0$이 되게 하는 조건이다.)

축에 작용하는 반작용

P가 C에 있을 때 두 가지 일이 동시에 일어난다.

- 줄이 자연 길이가 되므로($AC = \pi b$이고 호는 사라진다) $T = 0$이다.
- Q가 O의 연직 위에 있으므로, 그 무게는 O에 대한 모멘트를 갖지 않는다.

따라서 그 순간 축에 대한 모멘트는 없고, 각가속도(angular acceleration)는 0이다. 원판의 중심 O는 고정되어 있고 Q는 반지름 $2b$인 원 위를 각가속도 0으로 움직이므로, Q의 가속도는 순수하게 구심(centripetal) 가속도이다. 즉 크기는 $2b\omega^2$이고 방향은 Q에서 O를 향하는, 곧 연직 아래 방향이다.

? **생각해 보기** 반작용을 구하는 식에는 어떤 힘들이 들어가는가?

전체 계(원판과 Q)에 연직 방향으로 뉴턴 제2법칙을 적용하자. 외력은 아래로 향하는 두 무게 $2mg$, 축에 위로 작용하는 반작용 R, 그리고 이 순간 0인 줄의 장력이다. Q와 원판 사이의

내력은 서로 상쇄된다. 가속하는 것은 Q뿐이므로

$$R - 2mg = m\left(-2b\omega^2\right),$$

이고, 따라서

$$R = 2mg - 2mb \cdot \frac{(\pi k - 4)g}{6b} = 2mg - \frac{mg(\pi k - 4)}{3} = \frac{mg(10 - \pi k)}{3},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (이 순간 Q는 수평 가속도가 없으므로 반작용의 수평 성분은 0이다.)

검산

- 경계값 $k = \frac{4}{\pi}$에서는 계가 $\omega = 0$으로 겨우 C까지 기어 올라가게 되고, 공식은 정지 상태의 값인 $R = 2mg$를 준다. 이는 앞뒤가 맞는다.
- 컴퓨터로 운동 방정식(equation of motion) $6mb^2\ddot{\psi} = 2bT - 2mgb\cos\psi$ (단, $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$)를 수치적으로 적분한다. $m = g = b = 1$, $k = 2$로 두면 $\omega^2 = 0.38053$으로 C에 도달하는데, 이는 $(2\pi - 4)/6$과 일치하고, $R = 1.23894 = (10 - 2\pi)/3$이다. $k = 1.29$, 1.5, 3에서도 소수점 아래 여섯째 자리까지 일치한다.
- $k > \frac{10}{\pi}$이면 공식은 $R < 0$을 준다. 즉 축이 아래로 당겨야 한다. Q가 꼭대기를 충분히 빠르게 돌아 넘어가므로, 구심력으로 계의 무게보다 큰 힘이 필요하기 때문이다.

흔한 실수

- 늘어난 길이를 처음부터 끝까지 πb로 보는 것. 실제로는 P가 C에 도달하면서 0으로 줄어들며, 그래서 그곳에서 장력이 사라진다.
- 원판 자체의 관성 모멘트 $\frac{1}{2}m(2b)^2$을 잊고 Q의 관성 모멘트만 쓰는 것.
- C에서의 운동 에너지가 양수라는 것만 보이는 것. "P가 C에 도달한다"는 것은 그곳까지 가는 내내 운동 에너지가 양수로 유지되어야 한다는 뜻이다.

STEP 너머

마지막 단계는 "전체 외력은 전체 질량과 질량중심의 가속도의 곱과 같다"는 법칙의 강체 버전이며, 회전축에서의 반작용은 그 고전적인 응용이다. 대학 1학년 강체 동역학 과정에서는 이것을 각운동량(angular momentum) 방정식 $\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\tau}$와 함께 다룬다. 부등식 $\cos\alpha \le 1 - 4\alpha^2/\pi^2$은 요르당 부등식(Jordan's inequality) $\sin x \ge 2x/\pi$의 사촌 격이며, 여기서는 표준적인 볼록성(convexity) 논증으로 증명하였다. Kleppner와 Kolenkow의 *An*

Introduction to Mechanics(역학 입문)는 고정축 회전과 회전축 반작용을 매우 명료하게 다룬다.

풀이

STEP III 1992, 문제 14

역학 • 풀리는 줄의 동역학

> **STEP III 1992, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q14

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 각 θ에 의해 결정된다. 줄의 풀린 부분은 Q에서 원판에 접하고, 그 길이는 원판에서 풀려 나온 줄의 호의 길이와 같다. 따라서 P의 위치를 θ로 쉽게 나타낼 수 있다(이때 그려지는 곡선은 원의 **신개선**(*involute*)이다). 미분해 보면 P의 속도는 줄에 수직임을 알 수 있다. 따라서 줄의 장력(tension)은 일을 하지 않고, 운동 방향으로는 마찰력(friction)만 작용한다. 그러면 PQ 방향과 그에 수직인 방향으로 분해하는 것만으로 문제가 깔끔하게 두 부분으로 나뉜다.

풀이

P의 위치

P를 수평인 탁자 위의 입자로, 저항은 주어진 마찰력뿐이라고 모형화하고, 줄은 가볍고 늘어나지 않는다고 하자. 중력과 수직항력은 서로 상쇄되므로, 수평 방향의 힘은 PQ 방향의 장력 T와 마찰력뿐이다.

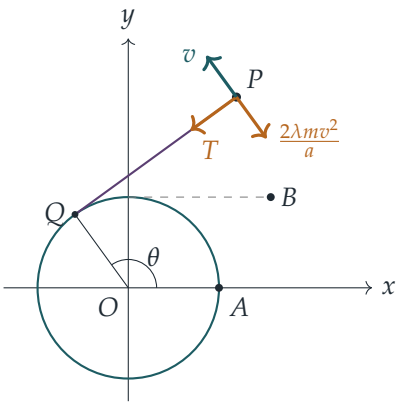
$A = (a, 0)$을 x축 위에 잡으면 접점은 $Q = (a\cos\theta, a\sin\theta)$이다. P가 A에 있을 때는 줄 전체가 원판 위에 감겨 있었다. 줄이 늘어나지 않으므로, 풀린 부분 QP의 길이는 풀려 나온 호 AQ의 길이, 즉 $a\theta$와 같다. 줄은 Q에서 접하므로 QP는 OQ에 수직이고, 단위벡터 $(\sin\theta, -\cos\theta)$의 방향이다($\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 이는 $(1, 0)$으로, 그림에서처럼 원판의 꼭대기에서 B를 향한다). 따라서

$$\overrightarrow{OP} = a(\cos\theta, \sin\theta) + a\theta(\sin\theta, -\cos\theta),$$

이므로

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta.$$

첫째 식이 구하는 x좌표이다. B에서 풀린 줄은 OA에 평행하고 원판의 꼭대기에서 접하므로, 그곳에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 $B = (\frac{\pi a}{2}, a)$이다.



속도와 가속도

OQ 방향의 단위벡터를 $\mathbf{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$, P에서 Q를 향하는 단위벡터(위에서 쓴 줄 방향의 반대)를 $\mathbf{f} = (-\sin\theta, \cos\theta)$라 하자. $\dot{\mathbf{e}} = \dot\theta\,\mathbf{f}$이고 $\dot{\mathbf{f}} = -\dot\theta\,\mathbf{e}$임에 주목한다.

x와 y를 미분하면

$$\dot x = (-a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = (a\cos\theta - a\cos\theta + a\theta\sin\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\sin\theta,$$

이므로 속도는 $a\theta\dot\theta\,\mathbf{e}$이다. 즉 속도는 OQ에 평행하고, 따라서 줄에 수직이다. 곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하면

$$\ddot{\mathbf{r}} = a\left(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta\right)\mathbf{e} + a\theta\dot\theta\,\dot{\mathbf{e}} = a\left(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta\right)\mathbf{e} + a\theta\dot\theta^2\,\mathbf{f}.$$

따라서 가속도의 PQ 방향(Q를 향하는) 성분은 $a\theta\dot\theta^2$이고, PQ에 수직인 방향($\mathbf{e}$ 방향) 성분은 $a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta$이다. 이것이 보여야 할 결과이다.

운동 방정식

B에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 속도는 $a\cdot\frac{\pi}{2}\,\dot\theta\,(0,1)$이다. OA에 수직이면서 OA에서 멀어지는 방향으로 쏘아 보낸다는 것은 양의 y 방향으로 속도 V를 준다는 뜻이므로

$$\dot\theta = \frac{2V}{\pi a} > 0 \quad \text{(처음에)}.$$

$\dot\theta > 0$인 동안 속력은 $v = a\theta\dot\theta$이고 운동 방향은 $+\mathbf{e}$이므로, 크기가 $2\lambda mv^2/a = 2\lambda ma\theta^2\dot\theta^2$인 마찰력이 $-\mathbf{e}$ 방향으로 작용한다. 장력은 $\mathbf{f}$ 방향으로 작용하므로 $\mathbf{e}$ 성분이 없다.

생각해 보기 θ만의 방정식을 얻으려면 두 가속도 성분 중 어느 것을 써야 할까?

수직 성분이다. 장력 T는 미지수이고, PQ 방향 성분에만 나타나기 때문이다. PQ에 수직인 방향으로 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙을 쓰면

$$m\left(a\dot{\theta}^2 + a\theta\ddot{\theta}\right) = -2\lambda ma\theta^2\dot{\theta}^2.$$

$ma\theta\dot{\theta}$로 나누면($\theta > 0$이고 $\dot{\theta} > 0$이므로 나눌 수 있다)

$$\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\left(\frac{1}{\theta} + 2\lambda\theta\right)\dot{\theta},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

$\dot{\theta}$ 구하기

좌변은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dot{\theta}$이고, 연쇄법칙(chain rule)에 의해 우변은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\ln\theta - \lambda\theta^2\right)$이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\left(\theta\dot{\theta}\right) + \lambda\theta^2\right) = 0, \qquad \text{그러므로} \qquad \theta\dot{\theta}\,\mathrm{e}^{\lambda\theta^2} = \text{상수}.$$

B에서 이 상수는 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2V}{\pi a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4} = \frac{V}{a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4}$이다. 따라서

$$\dot{\theta} = \frac{V}{a\theta}\exp\left(\lambda\left(\frac{\pi^2}{4} - \theta^2\right)\right).$$

이 값은 모든 θ에 대하여 양수이므로 $\dot{\theta}$는 결코 0이 되지 않고, 위에서 사용한 가정 $\dot{\theta} > 0$은 운동 내내 성립한다. (답에는 θ, λ, a뿐 아니라 V도 반드시 들어간다.) 같은 말로, 속력은 $v = a\theta\dot{\theta} = V\mathrm{e}^{\lambda(\pi^2/4 - \theta^2)}$이다.

$\theta = \pi$에서의 장력

PQ 방향의 힘은 Q를 향하는 T뿐이므로 $T = ma\theta\dot{\theta}^2$이다. $\theta = \pi$에서

$$\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{2\lambda(\pi^2/4 - \pi^2)} = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2},$$

이므로

$$T = ma\pi\cdot\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2} = \frac{mV^2}{\pi a}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2}.$$

검산

- 풀린 줄 PQ의 길이는 $a\theta$이고 이는 신개선의 곡률 반지름(radius of curvature)이다. 따라서 Q는 곡률 중심이고, Q를 향하는 성분은 $v^2/(a\theta) = a\theta\dot{\theta}^2$이어야 한다. 실제로 그렇다.

- $\lambda = 0$(마찰 없음)이면 속력은 V로 유지된다. 장력이 운동에 수직이어서 일을 하지 않으므로 당연한 결과이다. $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 $T = mV^2/(\frac{\pi}{2}a)$이고, 이는 B에서의 줄 길이 $r = \frac{\pi a}{2}$에 대한 mv^2/r이다.
- 수치적으로 $a = 1.3, m = 0.7, V = 2.1, \lambda = 0.25$로 놓고 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 θ에 대한 방정식을 풀었더니, $\dot{\theta}$에 대한 공식과 10^{-14}까지 일치하였다. (x, y)의 유한 차분 가속도도 두 성분과 마찰력 모두와 일치하였고, $\theta = \pi$에서 $T \approx 0.018667$을 주어 공식과 맞았다.

흔한 실수

- 초깃값으로 $\theta = 0$을 쓰는 것. 입자는 A가 아니라 $\theta = \frac{\pi}{2}$인 B에서 출발한다.
- $\dot{\theta}$를 구하려고 PQ 방향으로 분해하는 것. 그 방정식에는 미지의 장력이 들어 있고, 마찰력은 그 방향 성분이 없다.
- 마찰력이 줄 방향이 아니라 OQ 방향인 속도의 반대 방향으로 작용한다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

P의 경로는 원의 신개선이다. 이는 실패에서 팽팽하게 풀려 나오는 줄의 끝이 그리는 곡선이며, 대부분의 톱니바퀴 이의 모양에 쓰이는 곡선이다. 여기서 사용한 사실들(속도가 줄에 수직이라는 것, 줄의 길이가 곡률 반지름이라는 것)은 곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 축폐선(evolute)과 신개선 사이의 관계의 특수한 경우이다. 역학적으로 보면, 이 문제는 고유 성분(intrinsic components, 접선 성분과 법선 성분)을 사용하여 알려진 힘과 미지의 구속력(constraint force)을 분리하는 좋은 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 극좌표와 고유 좌표에서의 운동, 그리고 구속 운동을 이러한 관점에서 다룬다.

풀이

STEP III 1992, 문제 15

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP III 1992, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q15

핵심 아이디어

염소의 위치는 들판 전체에서 균등(uniform)하게 분포하므로, 모든 확률은 넓이를 a^2으로 나눈 값일 뿐이다. 따라서 문제 전체는 정사각형 가운데 꼭짓점 O로부터 거리 r 이내에 있는 부분의 넓이를 구하는 일로 귀결된다. r이 a를 넘어서면 사분원이 정사각형 밖으로 넘쳐 나가는데, 안쪽에 남은 넓이를 구하는 깔끔한 방법은 그 부분을 직각삼각형 두 개와 부채꼴(sector) 하나로 자르는 것이다. 그다음 밀도는 미분으로 얻어지고, 묶인 염소 문제도 영역만 다를 뿐 같은 아이디어이다.

풀이

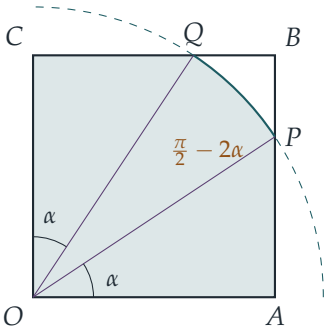
O를 원점에 두고 OA를 x축 위에, OC를 y축 위에 놓아 들판이 $0 \le x \le a, 0 \le y \le a$가 되도록 한다. $F(r) = \mathrm{P}(R < r)$라 두면, 이는 들판 가운데 $x^2 + y^2 < r^2$인 부분의 넓이를 a^2으로 나눈 값이다.

R의 분포

$0 < r \le a$일 때. O를 중심으로 하는 반지름 r인 사분원판은 들판 안에 완전히 들어 있으므로

$$F(r) = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi r^2}{4a^2}.$$

$a \le r \le a\sqrt{2}$일 때. 이제 호는 변 AB(직선 $x = a$)와 $P = \left(a, \sqrt{r^2 - a^2}\right)$에서, 변 CB(직선 $y = a$)와 $Q = \left(\sqrt{r^2 - a^2}, a\right)$에서 만난다. $\alpha = \cos^{-1}(a/r)$라 두면, 이는 각 AOP이다($\cos \angle AOP = a/r$이기 때문이다). 대칭성에 의해 각 COQ도 α이다.



색칠한 영역(들판 가운데 O로부터 거리 r 이내인 부분)은 세 조각으로 나뉜다.

- 삼각형 OAP: A에서 직각이고 두 직각변이 a와 $\sqrt{r^2-a^2}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}a\sqrt{r^2-a^2}$이다.
- 삼각형 OCQ: 앞의 삼각형과 합동이므로 넓이가 같다.
- 반지름 r, 중심각 $\frac{\pi}{2}-2\alpha$인 부채꼴 OPQ: 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) = \frac{\pi r^2}{4} - r^2\alpha$이다.

이들을 더하고 a^2으로 나누면

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{a\sqrt{r^2-a^2}}{a^2} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\,\alpha \\ &= \left(\frac{r^2}{a^2}-1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($r \geq a\sqrt{2}$이면 들판 전체가 O로부터 거리 r 이내에 있으므로 $F(r)=1$이다. 실제로 $r=a\sqrt{2}$에서 위 공식은 마땅히 그래야 하듯 $1+\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{4}=1$을 준다.)

중앙값

$r=a$에서 $F(a)=\pi/4 \approx 0.785 > \frac{1}{2}$이므로, 중앙값(median) m은 간단한 공식이 성립하는 범위 $0<m<a$에 있다.

$$\frac{\pi m^2}{4a^2} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad m = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798a.$$

확률밀도함수

밀도는 $f(r)=F'(r)$이다. $0<r<a$에서는 $f(r)=\dfrac{\pi r}{2a^2}$이다.

$a<r<a\sqrt{2}$에서는 $\cos^{-1}(a/r)$의 도함수(derivative)가 필요하다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2/r^2}}\cdot\left(-\frac{a}{r^2}\right) = \frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}}.$$

그러면 F의 각 항을 미분하여(마지막 항에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다)

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{\pi r}{2a^2} - \frac{2r}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}} \\ &= \frac{r}{a^2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)\right), \end{aligned}$$

을 얻는다. 첫째 항과 마지막 항이 상쇄되기 때문이다. 따라서

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi r}{2a^2}, & 0 < r \le a, \\ \dfrac{r}{a^2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{r}\right)\right), & a < r \le a\sqrt{2}, \\ 0, & \text{그 밖의 경우.} \end{cases}$$

이는 기하적으로도 납득이 된다. $f(r)\,\mathrm{d}r$은 (들판 안에 있는 반지름 r인 원의 호의 길이) $\times\, \mathrm{d}r/a^2$이고, 그 호의 중심각은 $r \le a$일 때 $\frac{\pi}{2}$, $r > a$일 때 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$이다. 두 식은 $r = a$에서 일치하며(둘 다 $\pi/(2a)$를 준다), f는 $\alpha = \pi/4$가 되는 $r = a\sqrt{2}$에서 0으로 떨어진다.

묶인 염소

묶이고 나면 염소는 들판 가운데 $R \le a$인 점들, 즉 O를 중심으로 하는 반지름 a인 사분원판에만 닿을 수 있고, 그 넓이는 $\frac{1}{4}\pi a^2$이다. 염소의 위치는 여전히 균등하게 분포하지만, 이제는 이 사분원판 위에서이다. 이것은 바로 원래 모형을 사건 $R \le a$로 조건화한 것이다.

? **생각해 보기** 울타리 OC로부터의 거리를 재는 좌표는 무엇인가?

OC가 y축 위에 있으므로 OC로부터의 거리는 x이다. 따라서 사분원판 가운데 $x > a/2$인 부분의 넓이가 필요하다.

$$\begin{aligned} \int_{a/2}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{a/2}^{a} \\ &= \frac{\pi a^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}\,a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{12}\right) = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}\,a^2}{8}. \end{aligned}$$

(기하적으로 보면, 직선 $x = a/2$가 OA로부터 각 $\pi/3$인 곳에서 호와 만나므로, 이 넓이는 중심각 $\pi/3$인 부채꼴에서 두 변이 $a/2$와 $\sqrt{3}a/2$인 삼각형을 뺀 것이다.) 이를 넓이 $\frac{1}{4}\pi a^2$으로 나누면

$$\mathrm{P}\left(\text{울타리와의 거리} OC > \tfrac{a}{2} \,\middle|\, R \le a\right) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.391.$$

검산

- 연속성(continuity): F의 두 공식 모두 $r = a$에서 $\pi/4$를 주고, $F(a\sqrt{2}) = 1$이다.

- 단위정사각형 안의 균등한 점 4×10^5개로 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)을 해 보니 $r = 0.3, 0.7, 1.1, 1.25, 1.4$에서 $F(r)$과 소수점 아래 셋째 자리 정도까지 일치했다. 표본 중앙값은 0.7986으로 $\sqrt{2/\pi} = 0.7979$와 비교되고, 조건부 비율은 0.3914로 $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.3910$과 비교된다.
- 밀도를 $[0, a\sqrt{2}]$에서 수치적분하면 1이 되고, 여러 점에서 F의 수치 미분값과 일치한다.
- 묶인 염소의 답은 마땅히 그래야 하듯 $\frac{1}{2}$보다 작다. 사분원판은 OC에서 멀어질수록 가늘어지기 때문이다.

흔한 실수

- 중앙값을 구할 때 $r > a$에서는 F에 다른 공식이 필요하다는 점을 잊는 것. 먼저 $F(a) > \frac{1}{2}$임을 확인해 두면 좋은데, 이로써 중앙값이 쉬운 범위에 있음을 알 수 있다.
- 부채꼴의 중심각으로 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ 대신 $\frac{\pi}{2} - \alpha$를 쓰는 것. 양쪽에서 하나씩, 모서리 조각 두 개가 잘려 나간다.
- 묶인 염소 부분에서 a^2으로 나누는 것. 조건부 확률(conditional probability)은 사분원판의 넓이 $\frac{1}{4}\pi a^2$으로 나눈다.

STEP 너머

여기서 R은 어떤 영역에서 균등하게 고른 점의 함수이고, 그 분포는 $R < r$인 영역의 넓이를 재어 얻었다. 이것이 확률변수(random variable)의 함수의 분포를 구하는 일반적인 방법이며, 밀도 공식 $f(r) = (\text{호의 길이})/a^2$은 영역을 등위집합(level set)으로 잘라 내는 "공면적(coarea)" 아이디어를 처음 맛보는 것이다. 뷔퐁의 바늘(Buffon's needle)이나 정사각형 안의 두 무작위 점 사이의 거리 같은 문제도 같은 기하적 추론에 바탕을 둔다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문) 두 책 모두 연속 확률변수에 대한 이러한 기하적 접근을 전개한다.

풀이

STEP III 1992, 문제 16

확률과 통계 • 푸아송 솎아내기

STEP III 1992, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s3-q16

핵심 아이디어

오탈자(misprint)의 총개수가 정해지면, 각 오탈자는 내가 찾아내거나 놓치는 하나의 독립 시행(independent trial)이 된다. 따라서 소문항 (i)은 이항 확률(binomial probability)이다. 소문항 (ii)는 조건부 확률(conditional probability)인데, 분모인 "내가 정확히 m개의 오탈자를 찾아낼 확률"을 구하려면 놓친 오탈자의 개수로 가능한 모든 경우에 대해 더해야 한다. 이 합은 지수급수(exponential series)가 되고, 바로 이 덕분에 모든 것이 깔끔한 푸아송(Poisson) 꼴로 정리된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $q = 1 - p$로 쓴다. 신문 한 호에 있는 오탈자의 총개수를 N, 내가 찾아낸 개수를 S, 내가 찾지 못한 개수를 $U = N - S$라 하자. 문제에서 다음이 주어졌다.

$$\mathrm{P}(N = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

소문항 (i)

$N = m + n$이 주어지면, $m + n$개의 오탈자 각각은 다른 것들과 독립적으로 확률 p로 발견된다. 그러므로 $N = m + n$이라는 조건 아래에서 발견된 개수는 이항분포(binomial distribution) $\mathrm{B}(m + n, p)$를 따른다. 발견된 오탈자 m개와 놓친 오탈자 n개를 특정하게 고르는 각 경우의 확률은 $p^m q^n$이고, 이런 선택은 $\binom{m+n}{m}$가지이므로

$$\mathrm{P}(S = m \mid N = m + n) = \binom{m+n}{m} p^m (1-p)^n.$$

소문항 (ii)

구하려는 것은 $\mathrm{P}(U = n \mid S = m)$이다. 사건 $\{S = m,\ U = n\}$은 사건 $\{N = m+n,\ S = m\}$과 같으므로, 소문항 (i)에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S = m,\ U = n) &= \mathrm{P}(N = m+n)\,\mathrm{P}(S = m \mid N = m+n)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{m+n}}{(m+n)!}\cdot\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,p^m q^n\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^m}{m!}\cdot\frac{(\lambda q)^n}{n!}.\end{aligned}$$

인수 $(m+n)!$이 약분되는데, 이것이 이 문제가 풀리는 핵심이다.

? 생각해 보기 오탈자가 몇 개였는지 모를 때 $\mathrm{P}(S = m)$은 어떻게 구할까?

내가 정확히 m개를 찾아냈다면, 놓친 개수는 $0, 1, 2, \ldots$ 중 어느 것이든 될 수 있고, 이 경우들은 서로 배반(mutually exclusive)이다. 따라서 결합확률(joint probability)을 U의 모든 값 j에 대해 더한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S = m) &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^m}{m!}\cdot\frac{(\lambda q)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{\lambda q}\\ &= \frac{(\lambda p)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

여기서 $\sum_{j\ge 0} x^j/j! = \mathrm{e}^x$와 $-\lambda + \lambda q = -\lambda p$를 사용했다. (즉 내가 찾아낸 오탈자의 개수 자체도 평균이 λp인 푸아송 분포를 따른다.) 이 값은 양수이므로 이것으로 나눌 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U = n \mid S = m) &= \frac{\mathrm{P}(S = m,\ U = n)}{\mathrm{P}(S = m)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{(\lambda p)^m}{m!}\cdot\dfrac{(\lambda q)^n}{n!}}{\mathrm{e}^{-\lambda p}\,\dfrac{(\lambda p)^m}{m!}}\\ &= \frac{(\lambda q)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda+\lambda p} = \frac{(1-p)^n\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda},\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

답은 m에 전혀 의존하지 않는다. 즉 내가 오탈자를 몇 개 찾아냈는지 알아도, 몇 개를 놓쳤는지에 대해서는 아무것도 알 수 없다. m이 무엇이든 놓친 개수는 평균이 $(1-p)\lambda$인 푸아송 분포를 따른다.

검산

- 최종 답을 $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대해 모두 더하면 $\mathrm{e}^{(1-p)\lambda}\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda} = 1$이 되어, 조건부 분포가 만족해야 할 성질을 만족한다.

- $p \to 1$이면 나는 모든 오탈자를 찾아내고, 답은 $n = 0$일 때 1로, $n \geq 1$일 때 0으로 수렴한다. 맞다.
- $\lambda = 3$, $p = 0.6$, $m = 2$, $n = 1$일 때 공식은 $1.2\,\mathrm{e}^{-1.2} \approx 0.3614$를 준다. 신문 400 000부를 시뮬레이션하여 정확히 두 개의 오탈자가 발견된 경우만 남겼더니 0.360이 나왔다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 이항계수 $\binom{m+n}{m}$를 빠뜨리는 것: 발견된 m개의 오탈자는 $m+n$개 중 어느 m개라도 될 수 있다.
- 놓친 오탈자의 개수로 가능한 모든 경우에 대해 더하지 않고, $\mathrm{P}(S = m)$을 $\mathrm{P}(N = m)$으로 보거나 소문항 (i)의 답으로 보는 것.

STEP 너머

이것은 푸아송 분포의 **솎아내기**(thinning, 또는 분할(splitting)) 성질이다. 개수가 푸아송(λ) 분포를 따르는 대상들을 각각 확률 p로 남긴다면, 남은 개수와 버려진 개수는 평균이 각각 λp와 $\lambda(1-p)$인 **독립인** 푸아송 확률변수이다. 우리가 구한 결합확률은 정확히 이 두 조각으로 인수분해된다. 솎아내기는 푸아송 과정(Poisson process) 이론의 핵심 도구로, 하나의 무작위 사건의 흐름을 서로 독립인 하위 흐름들로 나눌 수 있게 해 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 이 내용을 다루며, 이를 한 줄로 증명하는 생성함수(generating function) 방법도 함께 소개한다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1992년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

