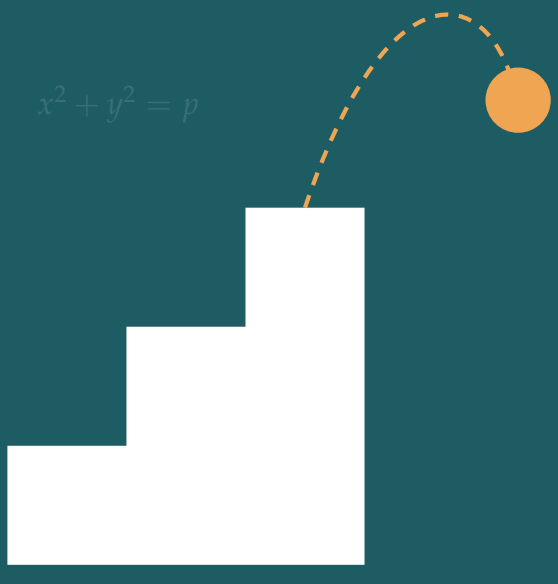
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1991년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1991년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1991년 풀이

1991년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 48개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 삼각함수 항등식 순수수학 . . . 3

Q2 변화율 순수수학 . . . 6

Q3 복소 등비급수 순수수학 . . . 10

Q4 기하에서의 최적화 순수수학 . . . 14

Q5 정규 벡터 집합 순수수학 . . . 18

Q6 정류점과 이상적분 순수수학 . . . 22

Q7 변수분리형 미분방정식 순수수학 . . . 26

Q8 치환적분 순수수학 . . . 30

Q9 부등식과 조화급수 순수수학 . . . 34

Q10 매달린 사슬의 평형 역학 . . . 37

Q11 도르래와 충격 역학 . . . 41

Q12 마찰이 있는 평형 역학 . . . 45

Q13 운동량 보존 역학 . . . 50

Q14 삼각형의 개수 세기 확률과 통계 . . . 54

Q15 정규근사 확률과 통계 . . . 59

Q16 조건부 확률 확률과 통계 . . . 63

STEP II

Q1 이차식과 판별식 순수수학 . . . 67

Q2 쌍곡선의 점근선 순수수학 . . . 71

Q3 대칭 연립방정식 순수수학 . . . 76

Q4 코사인의 합 순수수학 . . . 79

Q5 적분의 점화 공식 순수수학 . . . 83

Q6 적분의 상계와 하계 순수수학 . . . 87

Q7 함수방정식 순수수학 91
Q8 비선형 1계 상미분방정식 순수수학 95
Q9 행렬군 순수수학 99
Q10 공간에서의 직선과 평면 순수수학 103
Q11 발사점으로부터 포물체까지의 거리 역학 107
Q12 강제 탄성 진동 역학 111
Q13 강체의 회전 역학 115
Q14 상대 속도와 추격 역학 119
Q15 기댓값의 선형성 확률과 통계 123
Q16 이항분포의 정규근사 확률과 통계 127

STEP III

Q1 급수와 전개 순수수학 131
Q2 기하에서의 복소수 순수수학 135
Q3 구간별로 정의된 함수와 역함수 순수수학 140
Q4 공간에서의 직선과 평면 순수수학 144
Q5 극곡선과 상미분방정식 순수수학 148
Q6 쌍곡 일차변환 순수수학 152
Q7 대칭성을 이용한 적분 순수수학 157
Q8 점화 공식과 합 순수수학 161
Q9 타원의 호의 길이 순수수학 165
Q10 뉴턴 항등식 순수수학 169
Q11 강체의 평형 역학 172
Q12 곡선 위의 운동 역학 176
Q13 천장과 충돌하는 포물체 역학 180
Q14 용수철이 있는 원운동 역학 184
Q15 표본 속 쌍의 개수 세기 확률과 통계 188
Q16 결합 분포와 주변 분포 확률과 통계 192

풀이

STEP I 1991, 문제 1

순수수학 • 삼각함수 항등식

> **STEP I 1991, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q1

핵심 아이디어

각에 대한 조건을 쓰면 각 하나를 없앨 수 있다. $\psi = \frac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)$이므로 $\sin\psi = \cos(\theta + \phi)$이고, 따라서 항등식(identity)은 자유로운 두 각에 대한 명제가 된다. 그다음에는 곱 $\sin\theta\sin\phi$와 $\cos(\theta + \phi)$가 합쳐져 $\cos(\theta - \phi)$가 되고, 곱 $\cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)$는 아주 깔끔한 꼴을 가진다. 둘째 부분에서는 각을 특별하게 고르면 ψ가 θ의 절반이 되는데, 바로 여기에서 $\frac{1}{10}\pi$에 대한 정보가 나온다.

풀이

항등식

$\theta + \phi + \psi = \frac{1}{2}\pi$이므로

$$\sin\psi = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)) = \cos(\theta + \phi).$$

따라서 항등식의 좌변은

$$L = \sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos(\theta + \phi)[\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi].$$

대괄호 안에서 $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$이므로

$$\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta - \phi).$$

이제 곱 $\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)$를 구해야 한다. 덧셈정리(compound-angle formulae)를 써서 전개하면

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi) &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)\\ &= \cos^2\theta\cos^2\phi - \sin^2\theta\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta\,(1-\sin^2\phi) - (1-\cos^2\theta)\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta - \sin^2\phi.\end{aligned}$$

그러므로

$$L = \sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos^2\theta - \sin^2\phi = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

이고, 이것이 증명하려던 항등식이다.

$\sin\frac{1}{10}\pi$에 대한 삼차방정식

$\theta = \phi = \frac{1}{5}\pi$로 놓자. 그러면 $\psi = \frac{1}{2}\pi - \frac{2}{5}\pi = \frac{1}{10}\pi$이다. 이제

$$x = \sin\tfrac{1}{10}\pi, \qquad s = \sin\tfrac{1}{5}\pi.$$

라 하자. 항등식으로부터

$$2s^2 + x^2 + 2s^2x = 1, \qquad \text{즉} \qquad 2s^2(1+x) = 1 - x^2. \tag{$*$}$$

> **생각해 보기** 그냥 $\sin\psi = \cos 2\theta = 1 - 2s^2$를 써서 s를 소거하면 왜 안 될까?

이 관계식은 $\psi = \frac{1}{2}\pi - 2\theta$인 **모든** θ에 대해 성립하므로, $s^2 = \frac{1}{2}(1-x)$를 $(*)$에 대입하면 $(1-x)(1+x) = 1-x^2$를 얻는다. 참이지만 아무 정보도 없다. $\frac{1}{5}\pi$만의 특별한 성질을 써야 한다. 그 특별한 사실은 $\frac{1}{5}\pi = 2\cdot\frac{1}{10}\pi$, 즉 $\theta = 2\psi$라는 것이고, 배각 공식(double-angle formula)이 s와 x를 이어 준다.

$$s = \sin 2\psi = 2\sin\psi\cos\psi, \qquad \text{따라서} \qquad s^2 = 4x^2(1-x^2).$$

이것을 $(*)$에 대입하면

$$8x^2(1-x^2)(1+x) = 1 - x^2.$$

$0 < \frac{1}{10}\pi < \frac{1}{2}\pi$이므로 $0 < x < 1$이고, 따라서 $1 - x^2 \neq 0$이므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$8x^2(1+x) = 1, \qquad \text{즉} \qquad 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0.$$

따라서 $\sin\frac{1}{10}\pi$는 주어진 삼차방정식(cubic)을 만족한다.

검산

항등식은 $\theta = \frac{1}{2}\pi, \phi = \psi = 0$으로 확인해 볼 수 있다. 이때 좌변은 $1+0+0+0 = 1$이다. $\theta = \phi = \psi = \frac{1}{6}\pi$이면 좌변은 $3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 1$이다.

삼차방정식의 경우 $\sin\frac{1}{10}\pi = \sin 18^\circ \approx 0.309017$이고, 이 값에서 $8x^3 + 8x^2 - 1$을 계산하면 반올림 오차 범위 안에서 0이 된다. 실제로 이 삼차식은 $(2x+1)(4x^2+2x-1)$로 인수분해(factorise)되고, 근(root)은 $-\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5})$이며, $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \approx 0.309017$은 잘 알려진 $\sin 18^\circ$의 정확한 값이다.

흔한 실수

- $\sin\psi = \cos 2\theta$만으로 s를 소거하여 항등식 $0 = 0$을 얻는 것. 위의 상자를 보라.
- $1 - x^2$가 왜 0이 아닌지 말하지 않고 그것으로 나누는 것. 여기서 $x = \sin\frac{1}{10}\pi$는 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다.

STEP 너머

삼차방정식의 나머지 두 근도 우연이 아니다. $-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$이고 $\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) = -\sin\frac{3}{10}\pi$이다. 이런 방정식은 π의 유리수배에서의 sin과 cos 값 사이의 대수적 관계를 기록하며, 이는 1의 거듭제곱근(roots of unity)을 통해 이해하는 것이 가장 좋다. $\cos\frac{1}{5}\pi$는 1의 다섯제곱근, 즉 $z^5 = 1$의 해와 밀접하게 연결되어 있다. 자와 컴퍼스(ruler and compasses)로 정오각형(regular pentagon)을 작도하는 문제가 결국 $\sqrt{5}$로 귀결되는 것도 이 때문이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 기하학적으로 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1991, 문제 2

순수수학 • 변화율

> **STEP I 1991, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q2

핵심 아이디어

녹는 법칙을 반지름으로 나타낸다. 구에서는 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$이고 표면적(surface area) 역시 $4\pi r^2$이다. 따라서 "부피가 표면적에 비례하는 비율로 줄어든다"는 말은 곧 반지름이 일정한 비율로 줄어든다는 뜻이다. 두 눈덩이는 같은 상수를 공유하므로, 어떤 시간 동안이든 두 반지름은 같은 양만큼 줄어든다. 그러면 모든 것이 하나의 변수, 곧 각 반지름이 줄어든 양 x의 함수가 된다.

풀이

반지름은 같은 일정한 비율로 줄어든다

눈덩이의 반지름을 r, 부피를 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 표면적을 $S = 4\pi r^2$이라 하자. 녹는 법칙은 상수 $k > 0$에 대하여 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kS$이고, 이 상수는 두 눈덩이에서 같다. 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k \cdot 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k,$$

이다. 여기서 $4\pi r^2$으로 나누었는데, 눈덩이가 아직 남아 있는 동안($r > 0$)에는 이것이 정당하다. 따라서 시간 t가 지난 뒤 각 반지름은 같은 양 $x = kt$만큼 줄어든다. 머리의 반지름은 $2R - x$, 몸통의 반지름은 $3R - x$이며, 이는 $0 \le x \le 2R$에서 성립한다(머리는 $x = 2R$에서 사라진다).

키가 절반일 때의 부피

머리가 몸통 위에 얹혀 있으므로 프로스티(Frosty)의 키는 두 지름의 합이다.

$$h = 2(2R - x) + 2(3R - x) = 10R - 4x.$$

처음에는 $h = 10R$이므로, 키가 절반이라는 것은 $10R - 4x = 5R$, 곧 $x = \frac{5}{4}R$이라는 뜻이다. 이 값은 $2R$보다 작으므로 머리는 아직 남아 있고, 이때 반지름은 $\frac{3}{4}R$와 $\frac{7}{4}R$이다. 비에서 인수 $\frac{4}{3}\pi$는 약분되므로

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{7}{4}\right)^3}{2^3 + 3^3} = \frac{(27 + 343)/64}{35} = \frac{370}{2240} = \frac{37}{224}.$$

따라서 키가 절반이 되었을 때 프로스티에게는 처음 부피의 $\frac{37}{224} \approx 0.165$만 남는다. 부피는 길이의 세제곱에 비례하기 때문이다.

$\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$의 최댓값

$a = 2R - x$, $b = 3R - x$라 하자. $0 \le x < 2R$에서

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(a^3 + b^3), \qquad S = 4\pi(a^2 + b^2),$$

이고, $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} = -1$이므로

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -4\pi(a^2 + b^2), \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -8\pi(a + b).$$

> **생각해 보기** V와 S는 둘 다 시간(또는 x)의 함수이다. 그렇다면 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$는 무엇을 뜻하는가?

x가 증가하면 S는 순감소하므로($\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} < 0$이기 때문에) V를 S의 함수로 볼 수 있다. 연쇄법칙에 의하여 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \Big/ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}.$$

이제 결코 변하지 않는 $b - a = R$을 이용한다. $s = a + b = 5R - 2x$라 놓자. 그러면 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\left((a + b)^2 + (b - a)^2\right) = \frac{1}{2}(s^2 + R^2)$이므로

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{s^2 + R^2}{4s} = \frac{s}{4} + \frac{R^2}{4s} = f(s), \text{ 라 하자.}$$

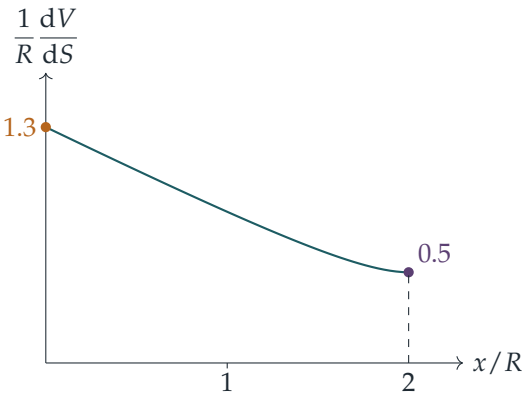
x가 0에서 $2R$까지 변할 때 s는 $5R$에서 R까지 줄어든다. 이제

$$f'(s) = \frac{1}{4} - \frac{R^2}{4s^2} = \frac{s^2 - R^2}{4s^2} > 0 \quad \text{단, } s > R,$$

이므로 f는 $[R, 5R]$에서 증가하고, 최댓값은 $s = 5R$, 곧 맨 처음($x = 0$)에서 얻는다.

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}\right)_{\max} = \frac{5R}{4} + \frac{R}{20} = \frac{13R}{10}.$$

(직접 계산하면 $\frac{4R^2 + 9R^2}{2 \cdot 5R} = \frac{13}{10}R$이다.) 그 뒤 이 값은 꾸준히 줄어들어, 머리가 사라지는 순간 $f(R) = \frac{1}{2}R$이 된다.



검산

- 각 눈덩이에 대하여 $\frac{dV}{dt} = -kS$를 단계별로 수치 모의실험하면($R = k = 1$) $t \approx 1.25$에서 키가 절반이 되고, 이때 부피의 비는 0.16518로 $\frac{37}{224} = 0.165178\ldots$와 일치한다.
- 모의실험으로 얻은 V와 S의 유한차분(finite difference)은 전 구간에서 $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$와 일치하며, 결코 $1.3R$을 넘지 않는다.
- 단위: dV/dS는 부피를 넓이로 나눈 것이므로 길이이고, $\frac{13}{10}R$도 길이이다.

흔한 실수

- 키를 지름의 합이 아니라 반지름의 합으로 잡는 것. (이 문제에서는 우연히 x가 달라지지 않지만, 틀린 것이다.)
- dV/dS 대신 V/S를 계산하는 것. 구 하나에 대해서 $V/S = r/3$이지만 $dV/dS = r/2$이다.
- 정류점(stationary point)을 찾으려 드는 것. f의 극점은 끝점(endpoint)인 $s = R$에 있으므로, 최댓값은 구간의 반대쪽 끝에서 나타난다.

STEP 너머

이 문제의 핵심은 "표면적에 비례하는 비율"이라는 법칙이 반지름의 일정한 변화율로 바뀐다는 점으로, 기하가 미분방정식(differential equation)을 자명하게 만들 수 있음을 보여 주는 첫 번째 예이다. 후반부는 곡선 $(S(t), V(t))$를 따라가는 dV/dS, 곧 매개변수 미분(parametric derivative)을 다루며, 닫힌구간(closed interval)에서 최댓값을 찾을 때 그 값이 정류점이 아니라 끝점에 있을 수 있으므로 주의해야 함을 보여 준다. Bartle과

Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 그러한 최댓값이 왜 반드시 존재하는지 설명한다. 미분방정식을 이용한 모델링에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 1991, 문제 3

순수수학 • 복소 등비급수

STEP I 1991, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q3

핵심 아이디어

아르강 도표(Argand diagram)에서 $re^{i\phi}$를 곱하면 벡터(vector)의 길이가 r배가 되고 시계 반대 방향으로 ϕ만큼 회전한다. 경로의 각 선분은 바로 앞 선분을 같은 비율로 늘리고 같은 각만큼 돌린 것이므로, 각 선분 벡터는 바로 앞 선분 벡터에 일정한 복소수를 곱한 것이다. 따라서 선분들은 등비수열(geometric progression)을 이루고, 이들을 더하면 모든 꼭짓점의 위치를 구할 수 있다.

풀이

연속한 두 선분의 비

P_n에서 P_{n+1}로 가는 벡터는 $z_{n+1} - z_n$으로, P_{n-1}에서 P_n으로 가는 벡터는 $z_n - z_{n-1}$로 나타난다. 두 복소수의 몫에서는 절댓값(modulus)끼리 나누고 편각(argument)끼리 뺀다.

$$\left|\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}}\right| = \frac{P_nP_{n+1}}{P_{n-1}P_n} = d, \qquad \arg\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}} = \arg(z_{n+1} - z_n) - \arg(z_n - z_{n-1}) = \theta,$$

이는 두 번째 선분의 길이가 첫 번째 선분의 d배이고, 한 유향 선분의 방향에서 다음 유향 선분의 방향까지 시계 반대 방향으로 잰 각이 θ이기 때문이다. (편각은 2π의 정수배 차이를 무시하고서만 정해지지만, 이는 복소수 자체에는 영향을 주지 않는다.) 따라서 모든 $n \geq 2$에 대하여

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}} = d\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = d(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

z_{n+1}에 대한 식

$w = de^{i\theta}$라 하자. 첫 번째 선분은 $z_2 - z_1 = 1$이고, 이후의 각 선분은 바로 앞 선분의 w배이므로 수학적 귀납법(induction)에 의해

$$z_{k+1} - z_k = w^{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

이 식들을 $k = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 더하면 좌변은 연쇄적으로 소거되어(telescoping) $z_{n+1} - z_1 = z_{n+1}$이 된다.

$$z_{n+1} = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = \frac{w^n - 1}{w - 1} = \frac{d^n e^{in\theta} - 1}{de^{i\theta} - 1}.$$

등비급수(geometric series)의 합을 구하려면 $w \neq 1$이어야 하는데, $|w| = d$이므로 바로 여기서 $d \neq 1$이라는 조건이 쓰인다.

$\theta = \frac{1}{3}\pi, d = 2$인 경우

이제 $w = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$이므로 분모가 매우 간단해진다. 즉 $w - 1 = i\sqrt{3}$이다. $\frac{1}{i} = -i$이므로

$$z_{n+1} = \frac{w^n - 1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\left(2^n \cos\tfrac{n\pi}{3} - 1 + i\,2^n \sin\tfrac{n\pi}{3}\right),$$

이고, 따라서

$$\operatorname{Re} z_{n+1} = \frac{2^n \sin\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{Im} z_{n+1} = \frac{1 - 2^n \cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}.$$

생각해 보기 $\operatorname{Im} z_{n+1}$의 부호로부터 경로가 실수축을 가로지른다는 사실을 어떻게 알 수 있는가?

경로는 끊어지지 않고 이어져 있다. 즉 선분들이 연속적으로 연결된 사슬이다. 어떤 꼭짓점이 실수축보다 엄격히 아래에 있고 그 뒤의 어떤 꼭짓점이 실수축보다 엄격히 위에 있다면(또는 그 반대라면), 두 꼭짓점 사이의 경로는 반드시 실수축을 가로질러야 한다. 그러므로 서로 반대쪽에 있는 꼭짓점들을 거듭해서 찾으면 된다.

$\cos\frac{n\pi}{3}$의 값은 주기 6으로 반복된다. 임의의 정수 $k \geq 1$을 잡자.

- $n = 6k$이면 $\cos\frac{n\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1$이므로, $2^{6k} > 1$에서 $\operatorname{Im} z_{6k+1} = \dfrac{1 - 2^{6k}}{\sqrt{3}} < 0$이다.
- $n = 6k + 3$이면 $\cos\frac{n\pi}{3} = \cos(2k\pi + \pi) = -1$이므로 $\operatorname{Im} z_{6k+4} = \dfrac{1 + 2^{6k+3}}{\sqrt{3}} > 0$이다.

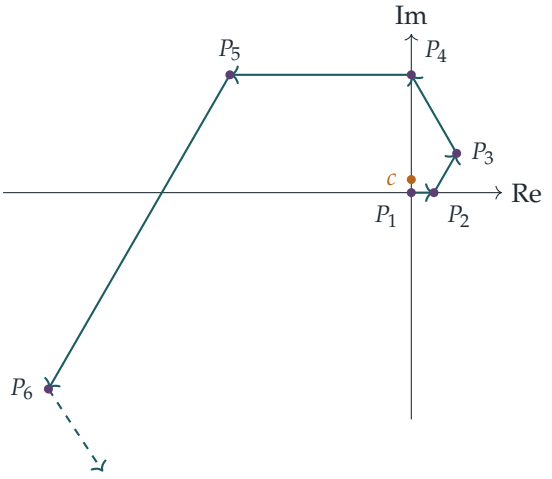
따라서 모든 $k \geq 1$에 대하여 P_{6k+1}은 실수축 아래에, P_{6k+4}는 실수축 위에 있다. 그러므로 각 $k = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여 P_{6k+1}에서 P_{6k+4}까지의 경로는 실수축을 아래에서 위로 가로지

른다. 이 부분들은 k마다 하나씩인 서로 다른 경로 부분이므로, 경로는 실수축을 무한히 여러 번 가로지른다. (같은 논리로 P_{6k+4}와 P_{6k+7} 사이에서는 위에서 아래로도 가로지른다.) 이로써 증명이 끝난다.

사실 꼭짓점들은 세 개씩 묶여서 돌아간다. $\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2, \ldots$의 부호는 $0, 0, +, +, +, -, -, -, +, +, +, \ldots$의 꼴이다. 여기에는 깔끔한 기하학적 이유가 있다.

$$z_{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} w^n,$$

으로 쓰면, P_{n+1}은 고정점 $c = \mathrm{i}/\sqrt{3}$로부터 거리 $2^n/\sqrt{3}$만큼 떨어져 있고, 한 단계마다 c를 중심으로 $60°$씩 회전함을 알 수 있다. 꼭짓점들은 한 단계마다 크기가 두 배가 되는 c 둘레의 나선 위에 있고, c는 실수축 바로 위에 있으므로 나선은 계속해서 실수축을 휩쓸고 지나간다.



그림은 $P_1, \ldots, P_6$을 보여 준다. 다음 꼭짓점은 $P_7 = -21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$로, 훨씬 아래에 있다. 경로는 P_5P_6에서 처음으로 실수축을 가로지르고, 그 뒤로 실수축 아래에 머물다가 $P_8 = 64 - 21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$에서 $P_9 = 128 + 43\sqrt{3}\,\mathrm{i}$로 가는 P_8P_9에서 위로 가로지른다.

검산

- 기하적으로 직접 구하면 $z_3 = 1 + w = 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$이고, 공식으로는 $\operatorname{Im} z_3 = (1 - 4\cos\frac{2\pi}{3})/\sqrt{3} = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$이다. 마찬가지로 $w^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$와 $w^3 = -8$을 더하면 $z_5 = -8 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$이고, $n = 4$를 대입한 공식은 $\operatorname{Re} z_5 = 16\sin\frac{4\pi}{3}/\sqrt{3} = -8$, $\operatorname{Im} z_5 = (1+8)/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$을 준다.
- $d = 1$이면 꼭짓점들은 정다각형 위에 놓이고 경로는 닫힌다. 등비급수 공식이 바로 이 때 성립하지 않는 것은 당연하다.

- 길이와 회전각으로부터 경로를 수치적으로 구성하여(임의의 d, θ, 시작점에 대하여) 비 $de^{i\theta}$, z_{n+1}의 닫힌 형태, 그리고 $\theta = \frac{1}{3}\pi$, $d = 2$일 때 위의 부호 패턴을 확인하였다. $z_1, \ldots, z_{41}$ 중에서 $\operatorname{Im} z$의 부호가 바뀌는 횟수는 13번이다.

흔한 실수

- 비를 $\frac{1}{d}e^{-i\theta}$로 쓰는 실수: 분자에 있는 것은 **나중** 선분이므로, d배 더 길고 $+\theta$만큼 회전한 것이 바로 이 선분이다.
- 합에서 하나 차이가 나는 실수: P_1에서 P_{n+1}까지는 선분이 n개 있으므로 급수는 w^{n-1}까지이다.
- 축 위에 있는 꼭짓점 하나로 가로지름을 주장하는 실수: 꼭짓점들이 서로 반대쪽에 **엄격히** 놓여 있어야 한다(여기서 z_1과 z_2는 축 위에 있으므로 $k \geq 1$부터 시작한다).

STEP 너머

규칙 $z_{n+1} - z_n = w(z_n - z_{n-1})$은 선형 점화식(linear recurrence)이고, 각 꼭짓점을 다음 꼭짓점으로 보내는 사상 $z \mapsto c + w(z - c)$는 고정점 c를 중심으로 하는 **나선 닮음 변환**(spiral similarity), 즉 회전과 확대를 결합한 것이다. 이러한 사상은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 가장 간단한 예이며, 이를 반복하면 조개껍데기에서 볼 수 있는 등각 나선(로그 나선, equiangular/logarithmic spiral)이 만들어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈을 이렇게 기하적으로 생각하는 방식을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP I 1991, 문제 4

순수수학 • 기하에서의 최적화

> **STEP I 1991, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q4

핵심 아이디어

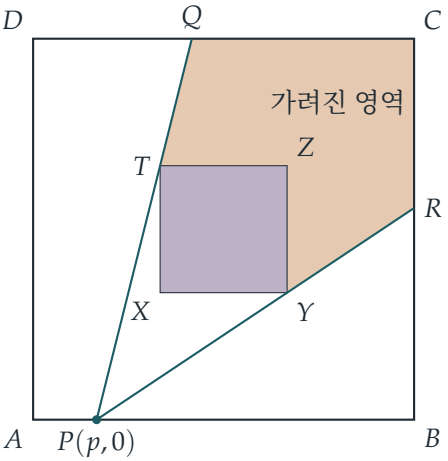
경비병은 탑 뒤에 가려진 점을 제외한 안뜰의 모든 점을 볼 수 있다. 그러므로 힌트에 따라 그의 위치 $P = (p, 0)$에서 본 탑의 "그림자" 넓이를 구한다. 그림자는 P에서 나와 탑을 아슬아슬하게 스치는 두 반직선으로 둘러싸인다. 이 반직선들이 벽과 만나는 점을 찾고, 그림자의 넓이를 다각형(polygon)의 넓이로 계산하면, 문제는 $[0, 4]$에서 일변수 함수를 최대화하는 문제가 된다. 끝점(endpoint)을 확인하는 것을 잊지 말자.

풀이

설정하기

안뜰은 큰 정사각형에서 탑을 뺀 부분이고, 넓이는 $144 - 16 = 128$이다. 경비병이 $0 \le p \le 4$인 $P = (p, 0)$에 있다고 하고, 그가 볼 **수 없는** 넓이를 $H(p)$라 하자. 보이는 넓이는 $128 - H(p)$이므로, 보이는 넓이는 H가 가장 클 때 가장 작고, 그 반대도 성립한다.

$p \le 4$이므로 P는 직선 $y = 4$의 아래쪽에, 그리고 직선 $x = 4$의 왼쪽(또는 그 위)에 있다. 따라서 P에서 보면 탑은 아랫면 XY와 왼쪽 면 XT를 드러내고, 그 윤곽은 꼭짓점 $T(4, 8)$과 $Y(8, 4)$로 정해진다. 꼭짓점 $Z(8, 8)$은 각 TPY 안에 있어 가려진다. 가려진 영역은 반직선 PT와 PY 사이에서 경로 $T \to Z \to Y$ 너머에 있다.



스치는 반직선이 벽과 만나는 점

P에서 $T(4,8)$을 지나는 반직선은 가로로 $4-p$만큼 갈 때마다 8만큼 올라가므로, $y=12$에 도달하는 점은

$$x = p + \tfrac{12}{8}(4-p) = 6 - \tfrac{p}{2}, \qquad \text{따라서} Q = \left(6-\tfrac{p}{2},\ 12\right).$$

$4 \le 6 - \frac{p}{2} \le 6$이므로 이 점은 실제로 위쪽 벽 DC 위에 있다.

P에서 $Y(8,4)$를 지나는 반직선은 가로로 $8-p$만큼 갈 때마다 4만큼 올라가므로, $x=12$에 도달하는 점은

$$y = \frac{4(12-p)}{8-p}, \qquad \text{따라서} R = \left(12,\ \frac{4(12-p)}{8-p}\right).$$

이 값은 p가 0에서 4로 갈 때 6에서 8로 증가하므로, R은 오른쪽 벽 BC 위에 있다.

가려진 넓이

가려진 영역은 다각형 $TQCRYZ$이다. 그 넓이는 다음과 같이 구하는 것이 가장 쉽다.

$$H = [PRCQ] - [PYZT],$$

여기서 $[\cdots]$는 넓이를 나타낸다. 즉 두 반직선 사이에서 벽까지 이르는 쐐기 전체에서, 탑의 먼 면들 앞쪽에 있는 쐐기 부분(탑 앞의 보이는 땅과 탑 자체)을 뺀 것이다.

$P(p,0)$, $R(12,q)$, $C(12,12)$, $Q(r,12)$에 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용한다. 여기서 $q = \frac{4(12-p)}{8-p}$, $r = 6 - \frac{p}{2}$이다.

$$\begin{aligned}[PRCQ] &= \tfrac{1}{2}\big(pq + (144-12q) + (144-12r) - 12p\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(288 - 12p - 12r - (12-p)q\big) = 108 - 3p - \frac{2(12-p)^2}{8-p},\end{aligned}$$

여기서 $12r = 72 - 6p$를 이용했다. 마찬가지로 $P(p,0)$, $Y(8,4)$, $Z(8,8)$, $T(4,8)$에 대해

$$[\,PYZT\,] = \tfrac{1}{2}\big(4p + 32 + 32 - 8p\big) = 32 - 2p.$$

그러므로

$$H(p) = 76 - p - \frac{2(12-p)^2}{8-p}.$$

생각해 보기 이것을 최적화하기 쉽게 만드는 치환(substitution)이 있을까?

다루기 불편한 분모를 보면 $u = 8 - p$로 놓고 싶어진다. 그러면 u는 $[4,8]$ 위를 움직이고 $12 - p = u + 4$이다. 이때

$$H = 76 - (8-u) - \frac{2(u+4)^2}{u} = 68 + u - \frac{2u^2 + 16u + 32}{u} = 52 - \left(u + \frac{32}{u}\right).$$

소문항 (i): 보이는 넓이의 최솟값

H가 가능한 한 커야 하므로, $u + \frac{32}{u}$가 가능한 한 작아야 한다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해 $u > 0$일 때

$$u + \frac{32}{u} \;\geq\; 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2},$$

이고, 등호는 정확히 $u = \frac{32}{u}$, 즉 $u = 4\sqrt{2}$일 때 성립한다. 이 값은 $[4,8]$에 속하므로 ($4\sqrt{2} \approx 5.66$) 허용된다. 그러면 $p = 8 - u$이고, 보이는 넓이는 경비병이 다음 위치에 있을 때 가장 작다.

$$\boxed{p = 8 - 4\sqrt{2} \;\approx 2.34 \text{ 단위, 기준점 } A}$$

이 점에서 그는 $52 - 8\sqrt{2}$를 볼 수 없으므로, $76 + 8\sqrt{2} \approx 87.3$ 제곱단위를 본다.

소문항 (ii): 보이는 넓이의 최댓값

이제 H가 가능한 한 작아야 하므로, $[4,8]$에서 $f(u) = u + \frac{32}{u}$가 가능한 한 커야 한다. $f'(u) = 1 - \frac{32}{u^2}$이므로 f는 $[4, 4\sqrt{2}]$에서 감소하고 $[4\sqrt{2}, 8]$에서 증가한다. 따라서 최댓값은 끝점에서 나타난다. 계산하면

$$f(4) = 4 + 8 = 12, \qquad f(8) = 8 + 4 = 12,$$

로 두 값이 같다. 따라서 H는 $u = 8$과 $u = 4$, 즉 $p = 0$과 $p = 4$ 두 곳에서 최솟값 $52 - 12 = 40$을 갖는다. 보이는 넓이는 경비병이 다음 위치에 설 때 최대 $128 - 40 = 88$ 제곱단위가 된다.

$$\boxed{\text{점 } A\ (p = 0) \text{ 또는 점 } E\ (p = 4)}$$

그리고 AE의 다른 어떤 점에서도 최대가 되지 않는다.

검산

- $p = 0$일 때는 그림자를 손으로 구할 수 있다. 반직선은 $(6, 12)$와 $(12, 6)$에서 벽과 만나고, 가려진 육각형의 넓이는 40으로 $H(0)$과 일치한다.
- $p = 4$일 때 T를 지나는 반직선은 직선 $x = 4$를 따라 곧게 올라가며, 이번에도 $H(4) = 40$이다. 두 끝점의 값이 같다는 것은 좋은 신호이다. 공식이 한쪽으로 치우쳐 있지 않다는 뜻이다.
- 600×600 격자 위에서 P로부터의 시선이 탑을 통과하는지 검사하여 가려진 점을 세어 보았다. $p = 8 - 4\sqrt{2}$에서는 40.687이 나와 $52 - 8\sqrt{2} = 40.686$과 비교된다. $p = 1$에서는 40.429가 나와 $H(1) = \frac{283}{7} \approx 40.429$와 비교된다.

흔한 실수

- 스치는 점으로 T나 Y 대신 Z를 사용하는 것. 왼쪽 아래에서 보면 탑의 윤곽은 먼 꼭짓점이 아니라 두 꼭짓점 T와 Y로 정해진다.
- 소문항 (ii)에서 정류점(stationary point)에서 멈추는 것. 정류점은 보이는 넓이의 **최솟값**을 주므로, 최댓값은 끝점에서 나와야 하며, 여기서는 그런 점이 두 개이다.

STEP 너머

이것은 **가시성**(visibility) 문제의 작은 예로, 계산 기하학(computational geometry)에서 연구하는 종류의 문제이다 ("미술관 문제(art gallery problem)"는 다각형 모양의 방의 모든 점을 지켜보는 데 경비병이 몇 명 필요한지를 묻는다). 최적화 단계는 해석학의 기본적인 사실 하나를 보여 준다. 닫힌구간에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 가지며, 그 값은 정류점 또는 끝점에서 나타난다. 이것이 최대·최소 정리(extreme value theorem)이며, Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)에 자세히 증명되어 있다.

풀이

STEP I 1991, 문제 5

순수수학 • 정규 벡터 집합

> **STEP I 1991, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q5

핵심 아이디어

조건 (ii)는 벡터들의 합이 $\mathbf{0}$이라는 뜻이다. 벡터 방정식을 수에 관한 식으로 바꾸는 가장 간단한 방법은 양변에 벡터 하나를 내적(dot product)하는 것이다. 그 내적의 값은 조건 (i)이 알려 준다. 그다음부터 문제는 개수 세기로 바뀐다. 고정된 몇 개의 벡터와의 내적이 모두 정해진 벡터는 놓일 수 있는 위치가 매우 적다. 따라서 집합에 들어갈 수 있는 벡터도 몇 개뿐이다.

풀이

항등식 $(n-1)\beta = -\alpha^2$

(ii)에 의해 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$이다. 양변에 $\mathbf{a}_1$을 내적한다. (i)에 의해 항 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1$은 α^2이고, 나머지 $n-1$개의 항 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_j$ $(j \neq 1)$는 각각 β이다. 따라서

$$\alpha^2 + (n-1)\beta = 0, \qquad \text{즉,} \qquad (n-1)\beta = -\alpha^2,$$

이므로 원하는 식이 성립한다. 특히 $\beta = -\alpha^2/(n-1) < 0$이다.

2차원

이제 $\alpha^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$이므로 모든 $\mathbf{a}_i$는 단위벡터(unit vector)이고,

$$\beta = -\frac{1}{n-1}.$$

이다. $i \geq 2$에 대하여 $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$라 하자. 조건 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta$는 $x_i = \beta$를 뜻하고, 그러면 $|\mathbf{a}_i| = 1$에서 $y_i = \pm\sqrt{1-\beta^2}$일 수밖에 없다. 따라서 $\mathbf{a}_1$이 아닌 모든 벡터는

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \beta \\ -\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}.$$

중 하나이다.

? **생각해 보기** 후보를 안다는 사실이 n을 어떻게 제한하는가?

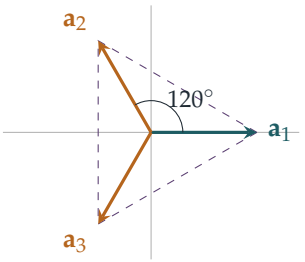
집합의 벡터들은 서로 다르므로(distinct) $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$은 $n-1$개의 **서로 다른** 후보이다. 후보는 많아야 두 개이므로 $n - 1 \leq 2$, 즉 $n \leq 3$이다. $n \geq 2$이므로 $n = 2$ 또는 $n = 3$이다.

$n = 2$. 이때 $\beta = -1$이므로 두 후보가 일치하고 $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$이다. 이것은 조건을 만족한다. $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1 = \beta$이고 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$이다.

$n = 3$. 이때 $\beta = -\frac{1}{2}$이고 $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이며, $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$은 서로 다른 두 후보

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{와} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

이어야 한다(순서는 상관없다). 확인해 보면 $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} = \beta$이고, 세 벡터의 합은 $\mathbf{0}$이다. 세 벡터는 원점을 중심으로 하는 정삼각형(equilateral triangle)의 꼭짓점을 가리킨다.



(β를 결정하는 다른 방법도 있다. $n \geq 3$이면 $-1 < \beta < 0$이므로 두 후보는 실제로 서로 다르고, $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$은 두 후보 모두여야 한다. 그러면 $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \beta^2 - (1-\beta^2) = 2\beta^2 - 1$이고, 이것을 β와 같다고 놓으면 $(2\beta+1)(\beta-1) = 0$이다. 따라서 $\beta = -\frac{1}{2}$이고, 이 역시 $n = 3$을 뜻한다.)

3차원

이번에도 $\alpha = 1$이고 $\beta = -1/(n-1)$이다. $n = 2$인 경우는 앞과 같다. $\beta = -1$이고, $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1$을 만족하는 단위벡터는 $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$뿐이며, 이 벡터는 x-y 평면 위

에 있다. 따라서 $\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$이 답 하나이다.

이제 $n \geq 3$이라 하자. 그러면 $-\frac{1}{2} \leq \beta < 0$이다. $\mathbf{a}_2$는 x-y 평면 위에 있으므로 2차원에서와 같은 논증으로

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \varepsilon\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

을 얻고, $\beta \neq \pm 1$이므로 y성분 $y_2 = \varepsilon\sqrt{1-\beta^2}$은 0이 아니다.

? 생각해 보기 $i \geq 3$일 때 조건들은 $\mathbf{a}_i$에 대해 무엇을 말해 주는가?

$i \geq 3$에 대하여 $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies x_i = \beta, \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies \beta^2 + y_2 y_i = \beta \implies y_i = \frac{\beta(1-\beta)}{y_2}, \\ |\mathbf{a}_i| = 1 &\implies z_i^2 = 1 - \beta^2 - y_i^2. \end{aligned}$$

이다. 따라서 x_i와 y_i는 모든 $i \geq 3$에 대해 같고, z_i는 두 제곱근 중 하나일 수밖에 없다. 벡터들은 서로 다르므로 $\mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$은 많아야 두 개이고, $n - 2 \leq 2$, 즉 $n \leq 4$이다.

$n = 3$. (ii)에 의해 $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$이고, 이 벡터는 x-y 평면 위에 있다. 따라서 이 집합은 평면 $z = 0$ 위의 정규 집합(regular set)이고, 2차원의 결과에 의해

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

이며, $\mathbf{a}_2$는 뒤의 두 벡터 중 어느 것이어도 된다. (위의 공식과도 일치한다. $\beta = -\frac{1}{2}$이면 $y_3 = -y_2$이고 $z_3^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$이다.)

$n = 4$. 이제 $\beta = -\frac{1}{3}$이므로 $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$이고 $y_2 = \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다. 그러면

$$y_i = \frac{(-\frac{1}{3})(\frac{4}{3})}{\varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\varepsilon\frac{2}{3\sqrt{2}} = -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad z_i^2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

이다. $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{a}_4$이므로 두 벡터는 서로 반대인 두 값 $z = \pm\sqrt{2/3} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$을 가져야 한다. 따라서

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$$

를 얻으며, $\varepsilon = \pm 1$의 각 선택마다 집합이 하나씩 있다. 지금까지는 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{a}_2$가 관련된 조건만 사용했으므로 나머지 조건도 확인해야 한다. 먼저 $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{1}{3} = \beta$이다.

다음으로 합을 보자. x성분의 합은 $1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$, y성분의 합은 $\varepsilon\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0$이고, z성분은 서로 상쇄된다. 따라서 두 집합 모두 정규 집합이다. 기하학적으로 네 벡터는 원점을 중심으로 하는 정사면체(regular tetrahedron)의 꼭짓점을 가리킨다.

정리. 정규 집합은 다음과 같다. $\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$ $(n = 2)$, x-y 평면 위의 정삼각형 $(n = 3)$, 그리고 위의 두 정사면체 $(n = 4, \varepsilon = \pm 1, x$-$z$ 평면에 대해 서로 거울상)이다. $n \geq 5$인 정규 집합은 없다.

검산

각 집합에서 벡터들의 합은 영벡터여야 하고, 모든 두 벡터 사이의 내적은 같아야 한다. 정사면체의 경우 임의의 두 벡터 사이의 각은 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$로, 잘 알려진 메테인(methane)의 결합각(bond angle)이며, 항등식은 $(4-1)(-\frac{1}{3}) = -1 = -\alpha^2$을 준다. 다섯 집합 모두를 수치적으로 확인했고(그람 행렬과 무게중심을 10^{-12}까지), 평면에서의 전수 탐색(brute-force search)으로 n이 11 이하일 때 정규 집합은 $n = 2$와 $n = 3$에서만 존재함을 확인했다.

흔한 실수

- 벡터들이 **서로 달라야** 한다는 것을 잊는 실수. 이 조건이 있어야 "후보가 많아야 두 개"라는 사실이 n에 대한 상계가 된다.
- $n = 4$인 경우 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$와의 내적으로부터 $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$를 구한 뒤, $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \beta$와 무게중심 조건을 확인하지 않는 실수.
- $n = 2$인 경우나 3차원에서 부호 ε의 선택을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

이 집합들은 정단체(regular simplex)의 꼭짓점이다. 즉 $(n-1)$차원 공간에서 서로 간의 거리가 모두 같은 n개의 점이다. 내적들로 이루어진 행렬 $G = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$(**그람 행렬**(Gram matrix))는 $(\alpha^2 - \beta)I + \beta J$이며, 여기서 J는 모든 성분이 1인 행렬이다. 이 행렬의 계수(rank)는 $n - 1$이고, 그람 행렬의 계수는 공간의 차원을 넘을 수 없으므로, d차원에서 $n \leq d + 1$이 곧바로 나온다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 계수, 내적, 그람 행렬을 다룬다.

풀이

STEP I 1991, 문제 6

순수수학 • 정류점과 이상적분

STEP I 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.1 절 **오류 찾기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/spot-the-flaw.html

핵심 아이디어

아무것도 그대로 믿지 않는다. 모든 계산을 직접 다시 해 보고, "따라서"나 "그러므로"가 나올 때마다 그 단계가 정말로 성립하는지 묻는다. (i)에서는 도함수(derivative)가 잘못 계산되었고, 설령 정류점(stationary point)을 올바르게 구했더라도 극대, 극소, 그리고 전역적인 범위에 대한 추론에 결함이 있다. (ii)에서는 원시함수(antiderivative)가 틀렸고, 더 심각하게는 피적분함수(integrand)가 구간 안에서 발산하므로 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 아예 적용할 수 없다.

풀이

소문항 (i)

1단계: 정류점. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$g'(x) = \frac{6x^2(x^4+4) - 4x^3(2x^3+3)}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^6 - 12x^3 + 24x^2}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^2\,(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

따라서 $g'(x) = 0$인 것은 정확히 $x = 0$이거나 $h(x) = 0$일 때이다. 여기서 $h(x) = x^4 + 6x - 12$이다. 그런데 $h(1) = -5$이고 $h(-1) = -17$이므로 $x = \pm 1$은 정류점이 아니다. 실제로 $g'(1) = \frac{2}{5}$이고 $g'(-1) = \frac{34}{25}$이다. 주장은 첫 단계에서부터 틀렸다.

h의 근은 몇 개인가? $h'(x) = 4x^3 + 6$은 $x_0 = -(3/2)^{1/3}$에서만 0이 되므로, h는 감소하다가 증가한다. 따라서 h는 0을 많아야 두 번 지난다. 또한 $h(0) = -12 < 0$이고 $x \to \pm\infty$일

때 $h(x) \to +\infty$이므로 적어도 두 번 지난다. 그러므로 h는 정확히 두 개의 실근 $\beta < 0 < \alpha$를 가진다. $h(1) < 0 < h(2) = 16$이고 $h(-3) = 51 > 0 > h(-2) = -8$이므로

$$1 < \alpha < 2, \qquad -3 < \beta < -2,$$

이고, 수치적으로 $\alpha \approx 1.386$, $\beta \approx -2.247$이다.

2단계: 정류점에서의 함숫값. $\mathrm{g}(0) = \frac{3}{4}$는 맞고 $\mathrm{g}(1) = 1$도 맞지만, $\mathrm{g}(-1) = \frac{1}{5}$이지 1이 아니다(게다가 ± 1의 두 점은 어차피 정류점이 아니다). h의 근 t에서는 $t^4 = 12 - 6t$이므로 $t^3 = (12 - 6t)/t$이고

$$\mathrm{g}(t) = \frac{2(12-6t)/t + 3}{16 - 6t} = \frac{24 - 9t}{t(16-6t)} = \frac{3(8-3t)}{2t(8-3t)} = \frac{3}{2t},$$

이다. 여기서 $8 - 3t \neq 0$으로 약분하였다($t = \frac{8}{3}$은 h의 근이 아니기 때문이다). 따라서 정류점에서의 함숫값은 $\mathrm{g}(0) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{g}(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} \approx 1.083$, $\mathrm{g}(\beta) = \frac{3}{2\beta} \approx -0.668$이다.

> **생각해 보기** 한 정류점에서의 함숫값이 다른 정류점에서의 함숫값보다 작다면, 작은 쪽이 반드시 극소인가?

3단계: 정류점의 성질. 그렇지 않다. 정류점에서의 **함숫값**을 비교하는 것만으로는 그 성질에 대해 아무것도 알 수 없다. 양쪽에서 g'의 부호를 살펴보거나 g''을 살펴보아야 한다. 인수분해된 꼴에서 $x^2 > 0$이고 $(x^4+4)^2 > 0$이므로, $x \neq 0$일 때 $\mathrm{g}'(x)$의 부호는 $-h(x)$의 부호와 같다. (β, α)에서 $h < 0$이고 $[\beta, \alpha]$ 밖에서 $h > 0$이므로 다음이 성립한다.

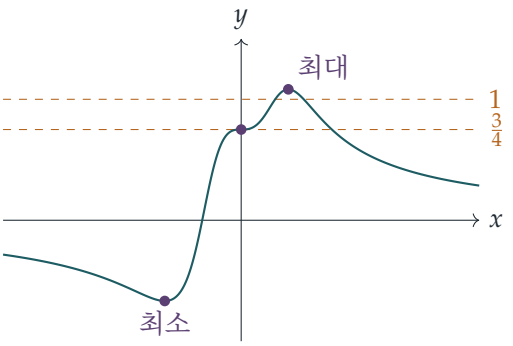
- g는 $x < \beta$에서 감소하고, (β, α)에서 증가하며, $x > \alpha$에서 감소한다.
- $x = \beta$는 극소이고 $x = \alpha$는 극대이다.
- $x = 0$에서는 양쪽 모두 $\mathrm{g}' > 0$이므로, $x = 0$은 극소가 아니라 정류 변곡점(stationary point of inflection)이다.

4단계: 전역적인 범위. 극대와 극소를 올바르게 구했더라도, "모든 x에 대하여" 성립하는 범위를 말하려면 더 많은 것이 필요하다. 함수가 다른 곳, 예를 들어 $x \to \pm\infty$에서 극댓값보다 커질 수도 있기 때문이다. 여기서는 $x \to \pm\infty$일 때 $\mathrm{g}(x) \to 0$이고(분모의 차수가 더 높다), $x^4 + 4 > 0$이므로 g는 모든 곳에서 연속이다. 이것을 3단계의 단조성과 함께 생각하면, g는 0 근처의 값에서 $\mathrm{g}(\beta)$까지 내려갔다가 $\mathrm{g}(\alpha)$까지 올라간 뒤 다시 0을 향해 내려간다. 그러므로 올바른 명제는

$$\frac{3}{2\beta} \le \mathrm{g}(x) \le \frac{3}{2\alpha} \quad \text{모든} x, \qquad \text{즉 대략} -0.668 \le \mathrm{g}(x) \le 1.083,$$

이며, 두 경계값 모두 실제로 달성된다.

판정. 결론 $\frac{3}{4} \le \mathrm{g}(x) \le 1$은 양쪽 끝 모두에서 거짓이다. $\mathrm{g}(-1) = \frac{1}{5} < \frac{3}{4}$이고(실제로 $2x^3 + 3 < 0$이면 언제나 $\mathrm{g}(x) < 0$이다), $\alpha < \frac{3}{2}$이므로 $\mathrm{g}(\alpha) > 1$이다(확인: $h(\frac{3}{2}) = \frac{81}{16} - 3 > 0$이므로 $\alpha < \frac{3}{2}$이고 $\frac{3}{2\alpha} > 1$이다).



소문항 (ii)

1단계: 부정적분. 주어진 답은 틀렸다. $-3(1-x)^{-4}$를 미분하면 $-12(1-x)^{-5}$가 되지 $(1-x)^{-3}$이 되지 않는다. 지수는 -3에서 -2로 하나 **올라가야** 한다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^{-2} = -2(1-x)^{-3}\cdot(-1) = 2(1-x)^{-3},$$

이므로 올바른 결과는

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + c, \qquad x \neq 1.$$

이다.

> ? **생각해 보기** 올바른 원시함수로 계산해도 -1에서 3까지 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0$이 나온다. 그렇다면 결국 답은 0인가?

2단계: 정적분. 그렇지 않다. $[F(x)]_{-1}^{3}$을 계산하는 것은 구간 전체에서 $F' = f$이고 f가 그 구간에서 연속일 때에만 정당하다. 여기서 $(1-x)^{-3}$은 $[-1,3]$ 안에 있는 $x=1$에서 정의되지 않고 그 근처에서 유계가 아니므로, 이 적분은 이상적분(improper integral)이며 두 부분 각각의 극한으로 정의해야 한다.

$$\int_{-1}^{1-\varepsilon} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon^{-2} - \tfrac{1}{4}\right) \to +\infty \quad (\varepsilon \to 0^{+}),$$
$$\int_{1+\delta}^{3} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \delta^{-2}\right) \to -\infty \quad (\delta \to 0^{+}).$$

두 부분 모두 발산(diverge)하므로 이 적분은 존재하지 않는다. "$\infty - \infty$"에는 값이 없다. 이는 기하적으로도 납득이 된다. 피적분함수는 $x<1$에서 양수이고 $x>1$에서 음수이며, 각 쪽이 둘러싸는 넓이가 무한하다.

판정. 두 단계 모두 틀렸고, 결론도 그대로는 거짓이다. $\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x$는 정의되지 않는다. "0"이 일말의 진실을 갖는 것은 **대칭적인** 틈 $\varepsilon = \delta$를 잘라낼 때뿐이다. 그때는 두 부분이 정확히 상쇄되어 극한이 0이 된다(코시 주요값(Cauchy principal value)). 그러나 예를 들

어 $\delta = 2\varepsilon$으로 잡으면 합은 $\frac{1}{2}(\varepsilon^{-2} - \frac{1}{4}\varepsilon^{-2}) \to \infty$가 되므로, 답은 $x = 1$에 어떻게 다가가느냐에 따라 달라진다. 바로 이 때문에 이 적분은 정의되지 않는 것이다.

검산

g의 수치 미분은 임의의 점들에서 인수분해된 식과 일치하며, $g'(1) = 0.4 \neq 0$이다. 이분법(bisection)으로 $\alpha \approx 1.3856$, $\beta \approx -2.2467$을 얻고, $g(\alpha) = 1.0825 = 3/(2\alpha)$, $g(\beta) = -0.6676 = 3/(2\beta)$이다. $[-100, 100]$에서 g를 표본 추출해 보면 이 값들이 전역 최댓값과 최솟값임이 확인된다. (ii)의 경우, $[-1, 0.99]$에서 중점 수치적분을 하면 약 4999.87이 나와 $\frac{1}{2}(10^4 - \frac{1}{4})$와 일치하고, 대응하는 $[1.01, 3]$ 부분에서는 -4999.87이 나온다.

흔한 실수

- 정류점에서의 함숫값을 비교하여 정류점의 성질을 판단하는 것.
- 전역적인 범위를 주장하면서 $x \to \pm\infty$일 때의 행동을 잊는 것.
- 피적분함수가 무한대가 되는 점을 가로질러 $[F(x)]_a^b$를 적용하는 것. 항상 먼저 피적분함수가 $[a, b]$에서 연속인지 확인한다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 이상적분에 관한 것이다. 특이점(singularity)을 포함하는 구간에서의 적분은 극한으로 정의되며, 한쪽 극한 각각이 따로 존재할 때에만 수렴(converge)한다. 대칭적인 극한인 코시 주요값은 복소해석학(complex analysis)과 물리학에서 정말로 유용한 개념이지만, 이것은 다른 대상이다. 소문항 (i)은 극값(local extremum)과 전역 최대·최소(global extremum) 사이의 간극에 관한 것으로, 해석학에서는 최대·최소 정리(extreme value theorem)를 통해 이를 엄밀하게 다룬다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 두 주제를 모두 꼼꼼히 다룬다.

풀이

STEP I 1991, 문제 7

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

STEP I 1991, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q7

핵심 아이디어

두 변화율 모두 $(1+V/V_0)^2$의 상수배이므로, 자연스러운 변수는 $u = 1 + V/V_0$이며, 이 변수는 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \pm c\,u^2$를 만족한다. 변수분리(separation of variables)를 하면 **역수**(reciprocal) $w = 1/u$가 단순히 선형으로 변한다는 것을 알 수 있다. 성장하는 해에는 비율 a로 감소하고, 쇠퇴하는 해에는 비율 b로 증가한다. 그러면 모든 것은 직선 그래프 하나를 추적하면서 두 가지 질문을 던지는 문제로 귀결된다. w가 0에 도달하는가(돈이 무한대가 된다), 아니면 1에 도달하는가(국고(Treasury)가 빈다)?

풀이

식 세우기

t를 년 단위로 재고 $V = kV_0$로 쓰면, $u = 1 + k$이고 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = V_0\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$이다. 성장하는 해에는

$$V_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = aV_0u^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = -a,$$

이고, 같은 방법으로 쇠퇴하는 해에는($V > 0$인 동안) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = +b$이다. 따라서

$$w = \frac{1}{1+V/V_0},$$

로 두면, w는 성장기에는 비율 a로 선형 감소하고 쇠퇴기에는 비율 b로 선형 증가한다. $V \geq 0$은 $0 < w \leq 1$에 대응한다는 점에 유의하라. 국고는 정확히 $w = 1$일 때 비고, $V \to \infty$는 정확히 $w \to 0^+$일 때 일어난다.

부등식의 의미

처음에는 $w = w_0 = \frac{1}{1+k_0}$이고, 첫해 동안 $w = w_0 - at$이다. 그러면 다음이 성립한다.

- $k_0 \geq 0$은 단지 국고가 음의 금액을 가질 수 없다는 뜻이다.
- 첫해 내내 돈이 유한하게 유지되는 것은 정확히 w가 $t = 1$까지 양수로 유지될 때, 즉 $w_0 - a > 0$일 때이며, 이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{1+k_0} > a \iff 1 + k_0 < \frac{1}{a} \iff k_0 < a^{-1} - 1.$$

  이 조건이 성립하지 않으면 V는 시각 $t = w_0/a \leq 1$, 즉 바로 첫해 안에 무한대가 되는데, 이는 실제 국고를 나타내는 어떤 모형으로서도 터무니없다.

두 부등식을 함께 쓰면 $a^{-1} - 1 > 0$, 즉 $a < 1$이어야 한다. 이 사실은 마지막에 사용한다.

두 번째 해 버티기

첫해가 지나면 $w_1 = \frac{1}{1+k_1}$이다(실제로 $w_1 = w_0 - a$이다). 쇠퇴하는 해 동안에는 $w < 1$인 한 $w = w_1 + bt$이다. 그 해가 끝날 때에도 국고가 비어 있지 않은 것은 정확히 $t = 1$까지 w가 1에 도달하지 않을 때이다.

$$\frac{1}{1+k_1} + b < 1 \iff b < \frac{k_1}{1+k_1}.$$

특히 $b < 1$이어야 하며, 그러면 이 식은 다음과 같이 정리된다.

$$k_1 > \frac{b}{1-b}.$$

반대로 $b \geq \frac{k_1}{1+k_1}$이면, 돈은 시각 $t = (1 - w_1)/b \leq 1$에 바닥나고 그 해의 남은 기간 내내 비어 있는 상태로 남는다.

세 번째 해의 무한한 증가

> **생각해 보기** 국고가 두 번째 해에 비어 버리면 어떻게 될까? 그래도 세 번째 해에 폭발(blow-up)할 수 있을까?

두 번째 해가 끝날 때 국고가 비어 있다면, 세 번째 해는 $w = 1$에서 시작하고 $w = 1 - at$인데, $a < 1$이므로 이 값은 그 해 내내 양수로 유지된다. 따라서 빈 국고는 세 번째 해에 폭발할 수 없으며, 돈이 두 번째 해를 버티는 경우만 생각하면 된다.

그 경우 $w_2 = w_1 + b = \frac{1}{1+k_0} - a + b$이고, 세 번째 해에는 $w = w_2 - at$이다. 세 번째 해 동안 돈이 무한해지는 것은 정확히 $t = 1$까지 w가 0에 도달할 때, 즉 $w_2 \leq a$일 때이다.

$$\frac{1}{1+k_0} - a + b \leq a \iff b \leq 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

이것이 "그러나 그 전에는 아님"이라는 조건과 모순되지 않는지 확인해야 한다.

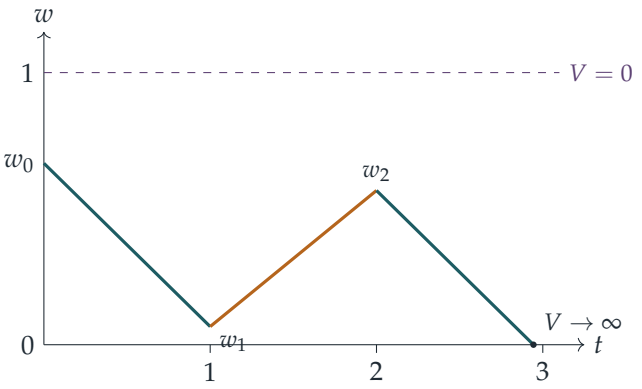
- 첫해에 폭발하지 않는다는 것은 $k_0 < a^{-1} - 1$이 보장하며, 돈이 감소하는 두 번째 해에는 폭발이 일어날 수 없다.
- 돈은 두 번째 해를 버틴다. $w_2 \le a$이면 $a < 1$이므로 $w_2 < 1$이고, 따라서 생존 조건 $w_2 < 1$은 자동으로 성립한다.

따라서 이 모형이 그 전이 아니라 세 번째 해에 무한한 증가를 예측하는 것은 정확히 다음 조건이 성립할 때이다.

$$b \le 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

등호가 없는 부등식이 성립하면 V는 세 번째 해에 들어선 뒤 시각 $t = w_2/a < 1$에 무한대가 되고, 등호인 경우에는 세 번째 해가 끝나는 바로 그 순간 $V \to \infty$이다. ($b > 0$이므로 이는 $2a > \frac{1}{1+k_0}$, 즉 $k_0 > \frac{1}{2a} - 1$일 때에만 일어날 수 있다.)

아래 그림은 조건이 성립하는 경우인 $a = 0.6$, $b = 0.5$, $k_0 = 0.5$에 대하여 t에 따른 w의 그래프를 보여 준다.



검산

위의 예에서 $k_1 = 14$이고 생존 조건 $14 > \frac{0.5}{0.5} = 1$이 성립한다. 그러면 $k_2 = \frac{13}{17} \approx 0.765$이고, 세 번째 해의 폭발은 $t = w_2/a \approx 0.944$에서 일어나는데, 이는 $2a - \frac{1}{1+k_0} - b = \frac{1}{30} > 0$과 일치한다. 또한 a, b, k_0를 무작위로 300번 골라 미분방정식(differential equation)을 수치적으로 적분하였다(4차 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법). k_1과 k_2의 닫힌 형태는 약 10^{-11}까지 일치했고, 생존 판정 기준과 폭발 판정 기준 모두 모든 경우에 수치적 거동을 정확히 예측했다.

흔한 실수

- 두 번째 해에 국고가 빌 수 있다는 것을 잊는 것. 이 문제에서는 $a < 1$이므로 문제가 되지 않지만, 반드시 언급해야 한다.
- 폭발 조건을 거꾸로 생각하는 것. 폭발은 $1/(1+k)$가 0에 도달하는 것에 대응하며, k가 0에 도달하는 것이 아니다.
- $\frac{1}{1+k_1} + b < 1$을 k_1에 관한 조건으로 정리할 때 $b < 1$이라는 조건을 무시하는 것.

STEP 너머

방정식 $\dot{u} = au^2$는 **유한 시간 폭발**(finite-time blow-up)의 표준적인 예이다. 지수적 증가와 달리 해가 유한한 시각에 무한대가 될 수 있으므로, 미분방정식의 해가 모든 시간에 대해 존재한다는 보장은 없다. 상미분방정식(ODE)의 첫 강좌에서 해의 국소 존재성(local existence)과 대역 존재성(global existence)의 구분이 등장하는 곳이 바로 여기이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 비선형 1계 방정식을 다룰 때 이 내용을 논의한다.

풀이

STEP I 1991, 문제 8

순수수학 • 치환적분

STEP I 1991, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q8

핵심 아이디어

치환(substitution) $y = \pi - x$는 $[0, \pi]$를 자기 자신으로 보내고 $\sin x$를 바꾸지 않지만, 다루기 까다로운 인수 x를 $\pi - y$로 바꾸어 놓는다. 적분을 그 대칭(reflected) 복사본과 더하면 x가 완전히 사라진다. (ii)에서는 피적분함수(integrand)가 어떤 함수와 그 도함수(derivative)로 이루어져 있으므로, 잘 고른 치환 하나가 모든 일을 해 준다.

풀이

소문항 (i)

$I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$라 하자. $[0, \pi]$의 양 끝을 서로 바꾸면서 $\sin x$는 그대로 두는 치환이 필요하므로 $k = \pi$로 잡는다. 즉 $x = \pi - y$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$, $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$이고, $x = 0, \pi$는 각각 $y = \pi, 0$에 대응한다. 그러면

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^\pi (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - I, \end{aligned}$$

이다. 여기서 y는 적분변수(dummy variable)일 뿐이므로 마지막 적분은 다시 I이다. 따라서

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

? **생각해 보기** $\frac{\pi}{2}\int_0^\pi$에서 $\pi \int_0^{\pi/2}$로는 어떻게 넘어가는가?

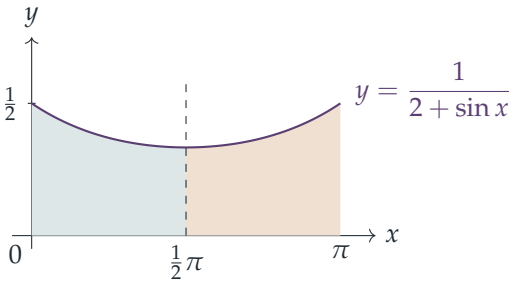
$\sin(\pi - x) = \sin x$이므로 $[0, \pi]$에서 $\mathrm{f}(\sin x)$의 그래프는 $x = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭이다. 이를 엄밀하게 보이기 위해 적분을 $\frac{1}{2}\pi$에서 나누고, 뒤쪽 절반에 같은 치환 $x = \pi - y$를 쓴다.

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y.$$

그러므로 $\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$이고, 따라서

$$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.



이제 $u \in [-1, 1]$에서 연속(continuous)인 $\mathrm{f}(u) = \dfrac{1}{2+u}$를 택하자. 그러면

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}.$$

남은 적분에는 $t = \tan\frac{1}{2}x$를 쓴다. 그러면

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

이고, $x = 0, \frac{1}{2}\pi$는 각각 $t = 0, 1$에 대응한다. 따라서

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2(1+t^2)+2t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

그러므로

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{9}.$$

소문항 (ii)

? **생각해 보기** $(\sin^{-1} t)^2$의 도함수는 무엇인가?

연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sin^{-1} t\right)^2 = \frac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}},$$

이고, 이것은 코사인에 곱해진 인수의 정확히 (2배)이다. 그러므로 $u = (\sin^{-1} t)^2$으로 치환하면 $\mathrm{d}u = \dfrac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$이다. $t = 0$일 때 $u = 0$이고, $t = 1$일 때 $\sin^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$이므로 $u = \frac{1}{4}\pi^2$이다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} t)\cos\left[(\sin^{-1} t)^2\right]}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2/4} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi^2}{4}.$$

피적분함수가 $t = 1$에서 무한히 커지므로, 엄밀히 말하면 이것은 이상적분(improper integral)이다. 치환을 쓰면 이 문제가 깔끔하게 해결된다. $\theta = \sin^{-1} t$로 나타내면 적분은 $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$가 되고, 그 피적분함수는 연속이므로 적분은 수렴(converge)하며 위의 값이 옳다. (먼저 $\theta = \sin^{-1} t$, 다음에 $u = \theta^2$으로 두 단계에 걸쳐 치환하는 것도 충분히 좋은 다른 방법이다.)

답 $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\pi^2$은 정확한 값이며 더 이상 간단해지지 않는다. $\frac{1}{4}\pi^2$은 "좋은" 각이 아니며, 아마 이 때문에 출제자들이 계산기에 손을 뻗지 말라고 경고했을 것이다.

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^{\pi} x/(2+\sin x)\,\mathrm{d}x \approx 1.899406$이고, $\pi^2/(3\sqrt{3}) \approx 1.899406$이다.
- 간단한 타당성 확인: $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin x} \le \frac{1}{2}$이므로 적분값은 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 1.64$와 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 2.47$ 사이에 있다.
- (i)의 항등식은 $\mathrm{f}(u) = 1$로 확인할 수 있다. 양변이 모두 $\frac{1}{2}\pi^2$이다.
- (ii)에서 $\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{4}\pi^2) \approx 0.312133$이며, 이는 $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$를 수치적으로 계산한 값과 일치한다.

흔한 실수

- 적분 구간을 절반으로 줄이는 것을 정당화하지 않고 $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$에서 멈추는 것.
- $t = \tan\frac{1}{2}x$로 치환할 때 적분 구간을 바꾸는 것을 잊는 것 (위끝은 ∞가 아니라 1이 된다).

► (ii)에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 것. du에는 2가 붙어 있다.

STEP 너머

(i)의 기법, 즉 구간의 대칭성을 이용하여 원시함수(antiderivative)를 전혀 구하지 않고 $\int x\,g(x)\,\mathrm{d}x$의 값을 구하는 방법은 큰 주제의 작은 예이다. 대칭성은 계산보다 훨씬 적은 수고로 적분값을 알려 주는 경우가 많다. (ii)는 이상적분의 이론과 맞닿아 있는데, 이 이론에서는 변수변환을 통해 유계가 아닌 피적분함수를 연속인 함수로 바꿀 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 변수변환 정리(change-of-variables theorem)를 엄밀하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 이런 유형의 적분이 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 1991, 문제 9

순수수학 • 부등식과 조화급수

STEP I 1991, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q9

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 각 부등식(inequality)은 x를 두 k제곱근(kth root) 사이에 가둔다. 요령은 서로 모순되는 하한 하나와 상한 하나를 찾는 것이다. 계산기 없이 세제곱근과 다섯제곱근을 비교하려면 양변을 열다섯제곱하면 된다. 소문항 (ii)에서는 긴 합을 (항의 개수) $\times$ (가장 작은 항)으로 아래에서 어림한다. 그다음 이런 꼴의 서로 겹치지 않는 묶음들을 이어 붙여 조화급수(harmonic series)를 원하는 만큼 크게 만든다.

풀이

소문항 (i)

$x > 1$이므로 x의 모든 거듭제곱은 양수이고, 양수 사이의 부등식은 양변을 양의 지수로 거듭제곱해도 방향이 유지된다. 이 사실을 풀이 내내 사용한다.

모순을 이끌어 내기 위해(귀류법, proof by contradiction) $n \geq 5$라고 가정하자. 그러면 특히 세 번째와 다섯 번째 부등식이 성립한다.

$$x^3 > 3 \qquad \text{그리고} \qquad x^5 < 6.$$

첫 번째 식의 양변을 다섯제곱하고, 두 번째 식의 양변을 세제곱하면

$$x^{15} > 3^5 = 243 \qquad \text{그리고} \qquad x^{15} < 6^3 = 216.$$

이로부터 $243 < x^{15} < 216$이 되는데, 이는 불가능하다. 따라서 $n \geq 5$일 수 없고, 그러므로 $n \leq 4$이다.

생각해 보기 세 번째와 다섯 번째 부등식을 골라야 한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

각 부등식은 $k^{1/k} < x < (k+1)^{1/k}$를 뜻한다. 하한 $k^{1/k}$는 1, 1.41, 1.44, 1.41, 1.38, ...로 변하며 $k = 3$일 때 가장 크다. 상한 $(k+1)^{1/k}$는 감소하며, $3^{1/3} \approx 1.44$보다 처음으로 작아지는 것이 $6^{1/5} \approx 1.43$이다. 대략적인 암산으로 이 쌍을 짚어 내고, 열다섯제곱으로 이를 정확히 증명하는 것이다. ($n = 4$인 경우는 실제로 일어날 수 있다. 예를 들어 $x = 1.45$이면 $x^2 = 2.1025$, $x^3 \approx 3.05$, $x^4 \approx 4.42$이다.)

소문항 (ii)

$n \geq 2$라 하자. 합 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$은 $n^2 - n$개의 항으로 이루어져 있고, 각 항은 마지막 항인 $\frac{1}{n^2}$ 이상이다. $n \geq 2$이므로 항이 $n^2 - n \geq 2$개 있고, 따라서 첫 항 $\frac{1}{n+1}$은 $\frac{1}{n^2}$보다 엄격히 크다. 그러므로

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > (n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

양변에 $\frac{1}{n}$을 더하면

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

조화급수의 합이 10을 넘게 만들기 $m \geq 2$일 때 각 묶음 $\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m^2}$은 1보다 큰 값을 보탠다. 이런 묶음을 여러 개 쓰려면 묶음끼리 겹치지 않아야 하므로, 새 묶음은 직전 묶음이 끝난 바로 다음에서 시작한다. 다음과 같이 정의하자.

$$a_1 = 2, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + 1,$$

그러면 $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 26$, $a_4 = 677, \ldots$이다. k번째 묶음은 $\frac{1}{a_k}$부터 $\frac{1}{a_k^2}$까지이고, 다음 묶음은 $\frac{1}{a_k^2+1} = \frac{1}{a_{k+1}}$에서 시작한다. 따라서 $k = 1, \ldots, 9$에 대한 묶음들은 서로 겹치지 않고 연달아 이어지며, 모두 합쳐 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{a_9^2}$을 빠짐없이 덮는다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{a_9^2} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{9} \left(\frac{1}{a_k} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) > 1 + 9 = 10.$$

생각해 보기 a_9^2은 어마어마하게 큰 수이다. 대신 N을 명시적으로 제시할 수 있을까?

그렇다. a_k의 크기를 어림하면 된다. $a_k < 2^{2^k}$임을 보이자. $k = 1$일 때는 $2 < 4$이므로 성립한다. $a_k < 2^{2^k}$이면 $a_k \leq 2^{2^k} - 1$이므로

$$a_{k+1} = a_k^2 + 1 \leq \left(2^{2^k} - 1\right)^2 + 1 = 2^{2^{k+1}} - 2^{2^k+1} + 2 < 2^{2^{k+1}}.$$

따라서 수학적 귀납법(induction)에 의해 $a_9 < 2^{512}$이고 $a_9^2 < 2^{1024}$이다. 양수인 항을 더 더하면 합은 커지기만 하므로

$$N = 2^{1024} \quad \text{이면} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 10.$$

이보다 큰 N도 모두 조건을 만족한다.

다른 방법: 항들을 $\frac{1}{2^j+1} + \cdots + \frac{1}{2^{j+1}}$ 꼴의 묶음으로 나누면, 각 묶음은 모두 $\frac{1}{2^{j+1}}$ 이상인 2^j개의 항으로 이루어지므로 $j \geq 1$이면 $\frac{1}{2}$보다 크고 $j = 0$이면 $\frac{1}{2}$과 같다. 따라서 $\sum_{n=1}^{2^{18}} \frac{1}{n} > 1 + \frac{18}{2} = 10$이고, $N = 2^{18} = 262\,144$는 훨씬 작은 답이 된다.

검산

- 소문항 (i): 수치로 확인하면 $n = 4$일 때 부등식들이 허용하는 범위는 $x \in (3^{1/3}, 5^{1/4}) \approx (1.442, 1.495)$이다. 다섯 번째 부등식을 더하면 $x < 6^{1/5} \approx 1.431$이어야 하므로 남는 값이 없다.
- 소문항 (ii): 정확한 분수로 계산하면 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$이고, 2부터 39까지의 모든 n에 대해 묶음의 합이 1을 넘는다.
- 조화급수의 합은 $N = 12\,367$에서 처음으로 10을 넘으므로, 올바른 답은 모두 이 값 이상이어야 한다. 2^{18}(이때 합은 약 13.05)과 2^{1024}은 모두 이보다 넉넉히 크다.

흔한 실수

- 양변이 양수라는 점(여기서는 $x > 1$이 보장한다)을 언급하지 않고 부등식을 거듭제곱하는 것.
- 끝점을 공유하는 묶음 $[2, 4]$, $[4, 16]$, $[16, 256]$, ...을 사용해 일부 항을 두 번 세는 것.
- 소문항 (ii)에서 적어도 한 항이 $\frac{1}{n^2}$보다 엄격히 크다는 것을 확인하지 않고 $>$ 대신 $\geq$를 쓰는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 코시(Cauchy) 응집(condensation) 아이디어의 한 형태이다. 이는 조화급수가 발산(diverge)함을 증명하는데, 그 속도는 놀라울 만큼 느리다. 조화급수의 부분합(partial sum)은 $\ln N + \gamma$처럼 증가하며, 여기서 $\gamma \approx 0.5772$는 오일러-마스케로니 상수(Euler–Mascheroni constant)이다. 합을 적분과 비교하면 이 증가 속도를 얻을 수 있고, 가장 작은 N도 쉽게 어림할 수 있다($e^{10-\gamma} \approx 12\,367$). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 응집과 급수의 수렴(convergence)을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1991, 문제 10

역학 • 매달린 사슬의 평형

> **STEP I 1991, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.14 절 **현수선이 아니라 포물선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/bridge-parabola.html

핵심 아이디어

사슬의 각 이음점은 세 힘을 받아 평형(equilibrium)을 이룬다. 그 세 힘은 이웃한 두 고리의 장력(tension)과 그 이음점에 매달린 무게 w이다. 수평 방향으로 힘을 분해하면 모든 고리의 장력의 수평 성분이 **같다**는 것을 알 수 있다. 이어서 수직 방향으로 분해하면 각 이음점에서 수직 성분이 정확히 w만큼 줄어든다는 것을 알 수 있고, 수평 간격이 일정하므로 고리들의 기울기는 등차수열(arithmetic progression)을 이룬다. 기울기가 등차수열을 이룬다는 것은 포물선(parabola)의 이산적인 흔적이다.

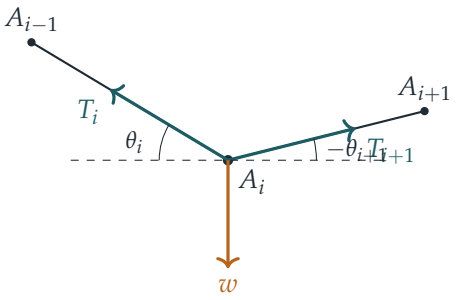
풀이

평형 방정식

사슬을 가볍고 유연하며 늘어나지 않는 것으로 모형화하여, 각 고리 $A_{i-1}A_i$의 장력이 고리를 따라 작용하도록 한다. θ_i를 $A_{i-1}A_i$가 수평선과 이루는 각으로 두되, x가 증가하는 방향으로 갈 때 **아래쪽**으로 재어 다음이 성립하게 한다.

$$\tan\theta_i = \frac{y_{i-1} - y_i}{h}.$$

(다리의 오른쪽 절반에서는 θ_i가 음수이지만, 아래의 논의는 그 부호와 무관하다.) 이음점 A_i는 A_iA_{i-1} 방향으로 T_i, A_iA_{i+1} 방향으로 T_{i+1}의 힘을 받고, 버팀대에 의해 아래로 크기 w의 힘을 받는다.



$1 \le i \le n+1$에 대하여(사실은 모든 $1 \le i \le 2n+1$에 대하여) A_i에서 수평 방향과 수직 방향으로 힘을 분해하면 다음을 얻는다.

$$T_i \cos\theta_i = T_{i+1}\cos\theta_{i+1},$$
$$T_i \sin\theta_i - T_{i+1}\sin\theta_{i+1} = w.$$

이것이 문제에서 요구한 방정식이다.

비

첫 번째 방정식은 $T_i\cos\theta_i$가 모든 고리에서 같다는 뜻이다. 이 공통의 수평 성분을 H라 하자. 사슬은 당기기만 할 수 있으므로 H는 양수이다. 두 번째 방정식을 H로 나누고 $\tan\theta_i = (y_{i-1}-y_i)/h$를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\frac{H}{h}(y_{i-1}-y_i) - \frac{H}{h}(y_i - y_{i+1}) = w.$$

따라서 고리 i의 장력의 수직 성분을 $V_i = H(y_{i-1}-y_i)/h$로 쓰면 다음이 성립한다.

$$V_i - V_{i+1} = w \quad (1 \le i \le 2n+1), \qquad \text{따라서} \qquad V_i = V_1 - (i-1)w \quad (1 \le i \le 2n+2).$$

생각해 보기 미지수 V_1 하나가 남았다. 다리에 관한 어떤 사실이 이 값을 정해 주는가?

두 지지점의 높이가 같다. 사슬 전체를 따라 낙차를 모두 더하면 다음과 같다.

$$0 = y_0 - y_{2n+2} = \sum_{i=1}^{2n+2}(y_{i-1}-y_i) = \frac{h}{H}\sum_{i=1}^{2n+2} V_i$$
$$= \frac{h}{H}\Big[(2n+2)V_1 - w\big(0+1+\cdots+(2n+1)\big)\Big].$$

대괄호 안은 $(2n+2)V_1 - w(2n+1)(n+1)$이므로 $V_1 = \frac{1}{2}(2n+1)w$이다. (이는 전체의 수직 평형에서 예상되는 결과이기도 하다. 두 지지점이 전체 하중 $(2n+1)w$를 똑같이 나누어 받는다.) 그러므로 다음이 성립한다.

$$V_i = \tfrac{1}{2}(2n+3-2i)\,w, \qquad \text{즉,} \qquad y_{i-1}-y_i = \frac{(2n+3-2i)\,wh}{2H}.$$

$i = n+1, n, \ldots, 1$을 대입하면 낙차는 각각 $wh/(2H)$의 $1, 3, \ldots, 2n+1$배가 된다.

$$\frac{h}{y_n - y_{n+1}} = \frac{3h}{y_{n-1} - y_n} = \cdots = \frac{(2n+1)h}{y_0 - y_1} = \frac{2H}{w},$$

이것이 구하려던 연속된 등식이다. (마지막 분자는 시험지에 $(2n+1)y$로 인쇄되어 있지만, 규칙성으로 보나 다른 비들처럼 무차원(dimensionless)이 되어야 한다는 점으로 보나 $(2n+1)h$여야 한다.)

포물선

$k = wh/(2H)$라 하자. A_0에서부터 낙차를 더하면 다음을 얻는다.

$$y_i = y_0 - k\sum_{j=1}^{i}(2n+3-2j) = y_0 - k\big[(2n+3)i - i(i+1)\big] = y_0 - k\,i\,(2n+2-i).$$

$m = n+1$로 쓰면 $i(2m-i) = m^2 - (i-m)^2$이므로

$$y_i = (y_0 - km^2) + k(i-m)^2 = y_{n+1} + k(i-n-1)^2,$$

이다. 여기서 $i = m$을 대입하면 $y_0 - km^2 = y_{n+1}$임을 알 수 있다. 이제 $x_i = x_0 + ih$이므로 $(i-n-1)h = x_i - x_{n+1}$이고, $0 \le i \le 2n+2$인 모든 점 A_i는 다음을 만족한다.

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}(x - x_{n+1})^2.$$

이것은 가장 낮은 점 A_{n+1}을 지나는 수직인 축을 가진 하나의 포물선이므로, 점 $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+2}$는 모두 이 포물선 위에 있다. 양 끝점도 포함된다. $i = 0$과 $i = 2n+2$는 마땅히 그래야 하듯이 둘 다 y_0을 준다.

검산

- $n = 0$이면 가운데에 버팀대가 하나 있다. 공식은 $V_1 = \frac{1}{2}w$를 주므로, 당연히 그래야 하듯이 사슬의 각 절반이 하중의 절반을 지탱한다.
- 이 결과는 연속적인 모형과도 일치한다. 수평 장력이 H인 케이블에 수평 단위 길이당 균일한 하중 w/h가 매달려 있으면 $y'' = (w/h)/H$가 되는데, 우리의 포물선도 $y'' = w/(Hh)$이다.
- 수치 검산에서는 무작위로 200개의 다리($1 \le n \le 8$, 무작위 H, w, h)를 잡아 이음점 방정식을 정확한 분수 연산으로 연립일차방정식(linear system)으로서 직접 풀고, 비의 등식, 공식 $y_i = y_0 - k\,i(2n+2-i)$, 포물선, 그리고 모든 이음점에서의 완전한 힘의 평형을 확인하였다. 예를 들어 $n = 2$, $w = 2$, $H = 5$, $h = 1$이면 내려가는 쪽의 낙차는 1.0, 0.6, 0.2이고, 각 비는 $2H/w = 5$와 같다.

흔한 실수

- 대칭성을 들어 아무 설명 없이 $y_n = y_{n+2}$라고 쓰는 것. 이는 참이지만 지지점의 높이가 같다는 사실에서 나오는 것이다. 위의 합산 논법은 이를 가정하지 않고 증명한다.
- 장력의 수평 성분이 일정하다는 것을 잊고 각 T_i를 따로 구하려 하는 것. 이 문제에서는 T_i 자체가 전혀 필요하지 않다(그 값은 $\sqrt{H^2 + V_i^2}$이다).
- 사슬의 올라가는 절반에서 θ_i의 부호를 혼동하는 것. 처음부터 끝까지 $\tan\theta_i = (y_{i-1} - y_i)/h$로 계산하면 이를 피할 수 있다.

STEP 너머

자기 무게로 늘어진 사슬은 현수선(catenary) $y = c\cosh(x/c)$를 이루지만, 도로 상판처럼 **수평** 방향으로 고르게 분포된 하중을 지탱하는 사슬은 포물선을 이룬다. 이 문제는 그 사실의 이산적인 판이다. 이계차분 방정식(second-difference equation) $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} =$ 상수는 $y'' =$ 상수의 유한차분(finite-difference) 꼴이며, 같은 아이디어가 미분방정식의 수치해법의 바탕에 깔려 있다. 변분법(calculus of variations)은 현수선과 그와 관련된 곡선들을 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 줄과 케이블의 정역학(statics)이 꼼꼼하게 다루어지는 것을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1991, 문제 11

역학 • 도르래와 충격

> **STEP I 1991, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q11

핵심 아이디어

한 주기는 두 단계로 이루어진다. 추가 말뚝(pile)에 부딪히면 그 자리에서 멈추고 줄이 느슨해지므로, 평형추(counterweight)는 위로 날아올랐다가 중력만 받으며 자유롭게 다시 떨어진다. 그다음 줄이 갑자기 팽팽해지면서 두 물체가 운동량(momentum)을 나누어 가지고, 추가 다시 말뚝에 닿을 때까지 첫 부분에서 구한 일정한 가속도로 함께 움직인다. 등가속도(constant acceleration) 운동이므로 각 단계는 시간에 대해 대칭이다. 따라서 한 주기의 모든 속력은 바로 앞 주기의 속력에 일정한 수를 곱한 것이 되고, 곧바로 등비수열(geometric progression)이 얻어진다.

풀이

일정한 가속도

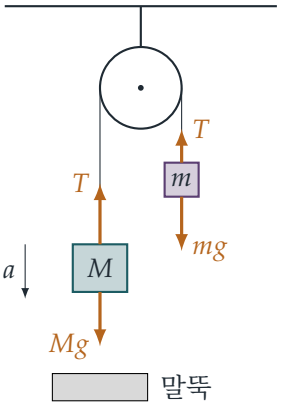
추와 평형추를 질점으로, 줄을 매끄럽고 가벼운 도르래에 걸린 가볍고 늘어나지 않는 줄로 모형화한다. 줄이 팽팽한 동안 두 질점은 같은 속력 v로 움직이며, 추는 아래로, 평형추는 위로 움직인다. 정지 상태에서 거리 x만큼 움직인 뒤 속력이 v가 되었다고 하자. 추는 위치 에너지(potential energy) Mgx를 잃고 평형추는 mgx를 얻는다. 도르래가 매끄럽고 줄이 가볍고 늘어나지 않으므로 에너지 손실이 없고,

$$\tfrac{1}{2}(M+m)v^2 = (M-m)gx.$$

이다. 양변을 시간에 대해 미분하고 $\dot{x} = v$를 이용하면, $v \neq 0$일 때

$$(M+m)v\dot{v} = (M-m)gv \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = g\,\frac{M-m}{M+m}$$

이다. 이것은 상수이다. 이를 a라 하자. 뉴턴(Newton)의 제2법칙으로도 같은 결과를 얻는다. T를 장력(tension)이라 하면 $Mg - T = Ma$이고 $T - mg = ma$이며, 두 식을 더하면 $(M - m)g = (M + m)a$가 된다.



한 충돌에서 다음 충돌까지

충돌 직전에 추는 속력 v로 아래로 움직이고, 평형추는 같은 속력 v로 위로 움직인다. 운동을 세 단계로 나누어 따라가 보자.

충돌. 충돌은 완전 비탄성(completely inelastic)이고 말뚝은 고정되어 있으므로 추는 멈춘다. 평형추는 여전히 속력 v로 위로 움직이므로 줄이 느슨해진다. 그러면 장력은 평형추에 아무 작용도 하지 못하고, 중력만이 추를 말뚝 쪽으로 누르므로 추는 그대로 머문다.

자유 비행. 줄이 느슨한 동안 평형추는 연직으로 움직이는 포물체(projectile)이다. 평형추는 올라갔다가 줄이 다시 팽팽해지는 지점, 곧 충돌 순간에 있던 지점으로 돌아온다. 일정한 가속도 g 아래에서 운동은 대칭이므로, 평형추는 시간

$$\frac{2v}{g}.$$

이 지난 뒤 속력 v로 **아래로** 움직이며 그 지점에 도착한다.

줄이 팽팽해지는 순간. 평형추가 속력 v로 아래로 움직이고 추가 정지해 있을 때 줄이 갑자기 팽팽해진다. 그러면 두 물체는 공통 속력 u로, 평형추는 아래로, 추는 위로 움직여야 한다. 주어진 가정에 따라 평형추가 잃은 운동량은 추가 얻은 운동량과 같다.

$$m(v - u) = Mu \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{mv}{M + m}.$$

? **생각해 보기** 여기서 왜 계 전체에 대해 그냥 운동량 보존을 쓸 수 없을까?

두 물체는 서로 반대 방향으로 움직이고 도르래가 충격량(impulse)을 가하므로, 전체 운동량이 보존되는 하나의 방향이 없다. 성립하는 것은, 줄이 가볍고 도르래가 매끄러우므로 충

격적 장력이 두 물체에 같은 크기 J로 작용한다는 사실이다. 따라서 평형추는 줄을 따라 운동량 J를 잃고, 추는 줄을 따라 J를 얻는다. 이것이 바로 우리가 가정해도 된다고 한 내용이다.

다시 함께. 이제 줄이 팽팽하고 추는 속력 u로 위로 움직인다. 첫 부분에 의해 가속도의 크기는 일정한 값 a이고, 방향은 더 무거운 물체 M이 내려가는 쪽이다. 따라서 추는 느려져서 멈춘 뒤 다시 말뚝으로 떨어진다. 이 운동도 등가속도이므로 대칭이다. 추는 시간

$$\frac{2u}{a}.$$

이 지난 뒤 속력 u로 말뚝에 닿는다. 따라서 다음 충돌 직전에 평형추의 속력은

$$u = \frac{mv}{M+m},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

시간 간격은 등비수열을 이룬다

$k = \dfrac{m}{M+m}$이라 두면 $0 < k < 1$이다. v_0을 첫 번째 충돌 직전의 속력이라 하자. 앞 부분에 의해 $(n+1)$번째 충돌 직전의 속력은 $v_n = k^n v_0$이다. 두 단계를 더하면, $(n+1)$번째 충돌에서 다음 충돌까지의 시간은

$$t_n = \frac{2v_n}{g} + \frac{2kv_n}{a} = \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) k^n v_0.$$

이다. 이는 상수에 k^n을 곱한 것이므로, 연속한 충돌 사이의 시간 간격은 공비가 $k = m/(M+m)$인 등비수열을 이룬다.

전체 시간

T_0을 놓은 순간부터 첫 번째 충돌까지의 시간이라 하자. 추는 정지 상태에서 가속도 a로 출발하므로 $v_0 = aT_0$이다. $0 < k < 1$이므로 등비급수(geometric series)는 수렴(converge)하고, 전체 시간은

$$T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} t_n = T_0 + \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k}.$$

이다. 이제 $1 - k = \dfrac{M}{M+m}$이고 $\dfrac{k}{a} = \dfrac{m}{M+m} \cdot \dfrac{M+m}{g(M-m)} = \dfrac{m}{g(M-m)}$이다. 따라서

$$\frac{2}{g} + \frac{2k}{a} = \frac{2}{g}\left(1 + \frac{m}{M-m}\right) = \frac{2M}{g(M-m)},$$

$$\left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k} = \frac{2M}{g(M-m)} \cdot \frac{M+m}{M} v_0 = \frac{2v_0}{a} = 2T_0.$$

이다. 그러므로 충돌은 무한히 많이 일어나지만, 걸리는 전체 시간은 유한하다. 추는 결국 시간

$$T_0 + 2T_0 = 3T_0,$$

이 지난 뒤 정지하며, 이는 출발부터 첫 번째 충돌까지 걸린 시간의 세 배이다.

검산

- 극한 $m \to 0$을 생각하자. 그러면 $k \to 0$이고 $a \to g$이므로, 첫 번째 충돌 이후 추는 다시는 들어 올려지지 않는다. 남은 시간은 평형추의 비행 시간 $2v_0/g = 2gT_0/g = 2T_0$뿐이고, 전체 시간은 일반 공식이 예측하는 대로 $3T_0$이다.
- 임의의 M, m과 낙하 높이(예를 들어 $M = 2.403$, $m = 1.571$이면 $k = 0.3953$)에 대해 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보았다. 속력의 비와 시간 간격의 비는 모두 0.3953으로 나왔고, 등비 꼬리 부분까지 포함한 전체 시간은 $2.99998\,T_0$으로 나왔다.

흔한 실수

- 자유 비행 단계를 빠뜨린다. 평형추는 충돌 후에도 계속 위로 올라가며, 한 주기에는 평형추가 포물체로 보내는 시간 $2v/g$가 포함된다.
- 느슨한 단계에서 g 대신 a를 쓴다. 줄이 느슨해지면 평형추에는 중력만 작용한다.
- 줄이 팽팽해지는 순간에 두 속도를 같은 방향으로 두고 "전체 운동량이 보존된다"라고 쓴다. 도르래가 줄의 방향을 바꾸므로, 나누어 가지는 것은 **줄을 따르는** 운동량이다.

STEP 너머

이 말뚝 박는 기계(piledriver)나 튀는 공처럼 유한한 시간 안에 무한히 많은 사건이 일어나는 현상을 제논(Zeno) 행동이라 한다. 이런 현상은 매끄러운 운동이 갑작스러운 도약으로 끊기는 혼합 시스템(hybrid system) 이론에서 나타난다. 줄이 팽팽해지는 순간은 간단한 충격적 구속(impulsive constraint)이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 대학 1학년 과정에서 이런 구속을 체계적으로 다룬다. 충격량, 충돌, 구속 운동에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP I 1991, 문제 12

역학 • 마찰이 있는 평형

> **STEP I 1991, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q12

핵심 아이디어

가벼운 판자 AB는 양 끝에서만, 매끄러운 경첩(smooth hinge)을 통해 힘을 받는다. 따라서 이 판자가 CD에 작용하는 힘은 AB 방향이어야 한다. 이로써 문제는 미지의 힘 세 개가 작용하는 하나의 강체(rigid body) CD에 관한 문제로 줄어든다. C에 대한 모멘트(moment)를 취하면 AB의 추력(thrust)이 나오고, 이어서 힘을 성분으로 분해하면(resolving) C에서의 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)을 얻는다. 기하학적 조건(두 판자가 B에서 만난다)이 x를 α, β와 연결하며, 바로 이 때문에 답에서 l과 x가 사라진다.

풀이

모형

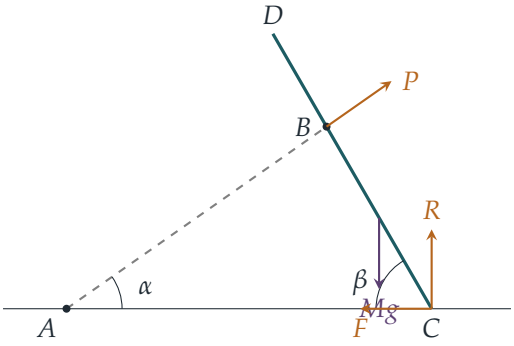
판자를 가벼운 강체 막대로, 화가를 질량 M인 입자로, A와 B의 경첩을 매끄러운 것으로 본다. 지면은 C에서 거칠고, 마찰계수(coefficient of friction)는 μ이다.

> **생각해 보기** 왜 B에서 두 판자 사이의 힘은 AB 방향이어야 할까?

판자 AB는 무게가 없고, 여기에 작용하는 힘은 A와 B의 매끄러운 경첩에서 오는 것뿐이다. A에 대한 모멘트를 취하면, B에서의 힘은 A에 대한 모멘트가 없으므로 BA 방향으로 작용한다. 그러면 A에서의 힘은 이와 크기가 같고 방향이 반대여야 한다. 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 AB는 B에서 CD를 AB 방향의 힘 P로 민다. P의 방향을 A에서 B로 향하는 쪽(추력)으로 잡는데, 계산 결과 $P > 0$임이 확인된다.

따라서 CD에 작용하는 힘은 다음과 같다. B에서의 추력 P는 수평선 위로 각 α를 이루며 A에서 멀어지는 방향을 향한다. 화가의 무게 Mg는 판자를 따라 C에서 거리 x인 곳에 작용

한다. C에서는 위쪽으로 수직항력 R, A 쪽으로 마찰력 F가 작용한다. 추력이 C를 A로부터 밀어내므로 마찰력은 A 쪽을 향해야 한다.



기하학적 조건

점 B는 AB의 꼭대기이므로 높이가 $2l\sin\alpha$이다. 또한 이 점은 CD를 따라 C에서 거리 $2x$에 있으므로 높이가 $2x\sin\beta$이기도 하다. 따라서

$$x\sin\beta = l\sin\alpha, \qquad \text{즉,} \qquad x = \frac{l\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

수평 거리 AC는 AB와 BC의 수평 정사영(projection)의 합이다.

$$AC = 2l\cos\alpha + 2x\cos\beta.$$

CD에 대한 모멘트와 힘의 분해

C에 대한 모멘트를 취한다. P의 작용선(line of action)은 직선 AB이고, C에서 이 직선까지의 수직 거리는 $AC\sin\alpha$이다. 무게는 C에서 수평 거리 $x\cos\beta$인 곳에 작용한다. 두 모멘트의 방향이 반대이므로

$$P\cdot AC\sin\alpha = Mg\,x\cos\beta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{Mg\,x\cos\beta}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha} > 0.$$

수평 방향과 수직 방향으로 분해하면

$$F = P\cos\alpha, \qquad R = Mg - P\sin\alpha.$$

P를 대입하면,

$$R = Mg\left(1 - \frac{x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta}\right) = Mg\,\frac{2l\cos\alpha + x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta},$$

$$F = Mg\,\frac{x\cos\beta\cos\alpha}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha}.$$

특히 $R > 0$이므로 끝 C는 지면에서 떨어지지 않는다. 나누면,

$$\frac{F}{R} = \frac{x\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + x\cos\beta)}.$$

이제 기하학적 조건 $x = l\sin\alpha/\sin\beta$를 이용한다. 그러면 $x\cos\beta = l\sin\alpha\cot\beta$이고,

$$\frac{F}{R} = \frac{l\sin\alpha\cot\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + l\sin\alpha\cot\beta)} = \frac{\cos\alpha\cot\beta}{2\cos\alpha + \sin\alpha\cot\beta} = \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

이다. 여기서 마지막 단계에서는 분자와 분모를 $\sin\alpha$로 나누었다.

판자 CD는 마찰력이 이 힘을 공급할 수 있을 때, 즉 $F \le \mu R$일 때에만 평형(equilibrium)을 이룬다. $R > 0$이므로 이 조건은

$$\mu \ge \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. (판자 AB는 A에서 경첩으로 고정되어 있으므로 필요한 힘이 얼마이든 제자리에 유지된다.)

마지막 부분

B가 D와 일치하면 $2x = 2l$이므로 $x = l$이다. 기하학적 조건에서 $\sin\beta = \sin\alpha$이고 두 각이 모두 예각이므로 $\beta = \alpha$이다. 두 판자와 지면은 $AC = 4l\cos\alpha$인 이등변삼각형을 이룬다. 마찰 조건은 다음과 같이 된다.

$$\mu \ge \frac{\cot^2\alpha}{3\cot\alpha} = \tfrac{1}{3}\cot\alpha, \qquad \text{즉,} \qquad \tan\alpha \ge \frac{1}{3\mu}.$$

따라서 평형은 정확히 $\alpha \ge \alpha_0$일 때 가능하다. 여기서 $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$이다.

? 생각해 보기 화가는 어디에 있으며, α가 변할 때 거리는 어느 방향으로 변할까?

화가는 CD의 중점, 즉 C에서 거리 l인 곳에 서 있다. A를 원점으로 잡으면 C는 $(4l\cos\alpha, 0)$에 있고, 화가의 위치는 다음과 같다.

$$(4l\cos\alpha - l\cos\alpha,\ l\sin\alpha) = (3l\cos\alpha,\ l\sin\alpha).$$

따라서 A에서 화가까지 거리의 제곱은

$$d^2 = 9l^2\cos^2\alpha + l^2\sin^2\alpha = l^2\left(1 + 8\cos^2\alpha\right).$$

이다. 이 값은 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 α가 증가하면 감소한다. 따라서 최대 거리는 허용되는 가장 작은 각 $\alpha = \alpha_0$에서 나타난다. 이때 $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$이므로

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha_0} = \frac{9\mu^2}{1 + 9\mu^2},$$

이고

$$d_{\max}^2 = l^2\left(1+\frac{72\mu^2}{1+9\mu^2}\right) = l^2\,\frac{1+81\mu^2}{1+9\mu^2}.$$

이다. 따라서 A에서 화가까지의 최대 거리는

$$l\sqrt{\frac{1+81\mu^2}{1+9\mu^2}},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 이 값은 마찰이 정확히 한계 상태(limiting friction)일 때 실제로 달성된다.

검산

- 최종 답의 극한 경우: $\mu \to 0$이면 거리는 l로 수렴하며, 이는 두 판자가 모두 수직인 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$에 해당한다. $\mu \to \infty$이면 거리는 $3l$로 수렴하며, 이는 판자가 바닥에 평평하게 놓이고 화가가 $(3l, 0)$에 있는 경우에 해당한다. 둘 다 타당하다.
- $\beta \to \frac{\pi}{2}$, 즉 CD가 수직이면 $\cot\beta \to 0$이고 필요한 μ는 0으로 수렴한다. 수직인 판자에는 마찰이 필요 없으므로 이와 일치한다.
- 수치적으로, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$로 두고 CD에 대한 세 평형 방정식을 직접 풀면 $F/R = 0.13837$을 얻는데, 이는 공식과 일치한다. $\mu = 0.5$로 두고 α를 훑어 보면 최대 거리가 $2.55704\,l$이고, 공식으로는 $l\sqrt{21.25/3.25} = 2.55704\,l$이다.

흔한 실수

- B에서의 힘이 수평이거나 수직이라고 가정하는 것. AB는 가볍고 양 끝이 매끄러운 경첩으로 연결되어 있으므로 힘은 AB 방향이어야 한다.
- R에서 추력의 수직 성분을 빠뜨리는 것. 이 성분은 수직항력을 줄이므로 마찰력을 공급하기 더 어렵게 만든다.
- 마지막 부분에서 평형이 가능한 각에 대해서만이 아니라 모든 α에 대해 최댓값을 구하는 것.

STEP 너머

양 끝에 매끄러운 핀이 있는 가벼운 막대를 **이력 부재**(*two-force member*)라고 한다. 이를 알아보는 것은 공학 정역학(engineering statics)에서 핀 접합 골조(트러스, truss)를 분석하는 첫걸음이며, 이런 부재는 각각 순수한 인장력 또는 추력만을 전달한다. 마지막 부분은 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 목적함수가 단조이므로 최적값은 실현

가능 집합(feasible set)의 경계에서 나타난다. 이는 선형계획법(linear programming)과 최적화 전반에 걸쳐 되풀이되는 주제이다. 강체의 평형에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*를 보라.

풀이

STEP I 1991, 문제 13

역학 • 운동량 보존

> **STEP I 1991, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q13

핵심 아이디어

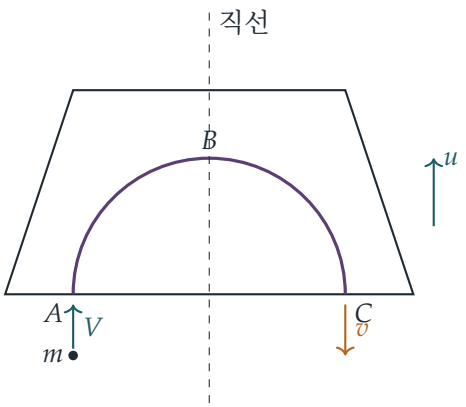
탁자도 매끄럽고 홈도 매끄러우므로, 계 바깥의 어떤 것도 직선 방향으로 밀지 않으며 어떤 힘도 일을 하지 않는다. 따라서 두 가지 보존 법칙(conservation law)을 얻는다. 직선 방향의 운동량(momentum) 보존과 운동 에너지(kinetic energy) 보존이다. 출구에서 홈의 접선(tangent)은 직선과 평행하므로, 출구에서는 두 속도가 모두 직선 방향이고, 그러면 두 법칙은 1차원 탄성 충돌(elastic collision)과 똑같이 작동한다. 고정된 박판(lamina)의 경우, 평균 힘은 단순히 전체 충격량(impulse)을 걸린 시간으로 나눈 것이다.

문제의 표현에 대해 한마디 하자. 문제에서는 A와 B에서의 접선이 직선과 평행하다고 했지만, 그림을 보면 직선과 평행한 것은 양 끝 A와 C에서의 접선이다(B에서 홈은 직선과 직각을 이룬다). 의도가 분명하므로 여기서는 A와 C를 사용한다.

풀이

움직이는 박판

입자는 질점(point mass)으로, 박판은 직선을 따라 평행이동만 할 수 있는 강체(rigid body)로 모형화하고, 모든 접촉은 매끄럽다고 하자. 직선을 축으로 잡고, 입자가 A로 들어올 때의 운동 방향을 양의 방향으로 한다.



입자가 직선 방향의 속도 v(V의 방향을 양으로 한다)로 C를 떠나고, 그때 박판의 직선 방향 속도를 u라 하자.

? 생각해 보기 C에서 입자의 속도가 왜 반드시 직선 방향이어야 하는가?

박판에 대해 상대적으로 보면 입자는 홈을 따라 움직이므로, C에서의 상대 속도(relative velocity)는 그 점에서의 접선 방향이고, 이는 직선과 평행하다. 박판 자체는 직선을 따라서만 움직인다. 이 둘을 더하면, C에서 입자의 실제 속도도 직선 방향이다. 따라서 출구에서는 각 물체마다 수 하나씩만 있으면 된다.

운동하는 동안 계(입자와 박판) 바깥에서 작용하는 힘은 연직 방향인 탁자의 수직항력(normal reaction)과, 박판을 직선 위에 붙잡아 두는 힘인데, 후자는 직선에 수직이다(직선이 매끄럽기 때문이다). 홈이 입자에 작용하는 힘과 입자가 홈에 작용하는 힘은 내력이므로 쌍으로 상쇄된다. 따라서 직선 방향의 운동량이 보존된다.

$$mV = mv + Mu. \tag{1}$$

모든 접촉이 매끄럽고 탁자가 수평이므로, 일은 전혀 이루어지지 않고 운동 에너지가 보존된다. (홈의 수직항력은 입자와 박판에 각각 따로 일을 하지만, 수직항력이 상대 속도에 수직이므로 이 두 양은 상쇄된다.) 따라서

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}Mu^2. \tag{2}$$

(1)과 (2)를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$m(V - v) = Mu, \qquad m(V - v)(V + v) = Mu^2.$$

한 가지 해는 $v = V, u = 0$이다. 이것은 아무 일도 일어나기 전인 A에서의 상황이다. C에서 입자는 박판에 대해 뒤로 움직이고 있으므로 $v \neq V$이고 $u \neq 0$이며, 따라서 두 번째 식을 첫 번째 식으로 나누어

$$V + v = u.$$

를 얻는다. (이는 박판에 대한 입자의 상대 속력이 양 끝에서 모두 V라는 뜻이며, 탄성 충돌과 꼭 같다.) $u = V + v$를 (1)에 대입하면

$$mV = mv + MV + Mv \quad \Longrightarrow \quad v = -\frac{M-m}{M+m}V, \qquad u = V + v = \frac{2m}{M+m}V.$$

$m < M$이므로 v는 음수이다. 즉 입자는 왔던 방향으로 되돌아가며 C에서 나온다. 따라서 입자가 홈을 떠날 때

$$\text{입자의 속력} = \frac{M-m}{M+m}V, \qquad \text{박판의 속력} = \frac{2m}{M+m}V,$$

이고, 박판은 입자의 처음 운동 방향으로, 입자는 그 반대 방향으로 움직인다.

입자는 실제로 홈을 끝까지 돌아 나온다. 입자가 박판에 대해 멈추는 점이 있다면 그 점에서 입자는 박판과 같은 속도를 가지게 되고, 그러면 운동 에너지는 $\frac{1}{2}(mV)^2/(M+m) < \frac{1}{2}mV^2$가 되는데, 이는 에너지 보존에 어긋난다. 따라서 상대 속력은 결코 0으로 떨어지지 않는다.

박판을 고정한 경우

이제 박판은 움직일 수 없다. 홈이 입자에 작용하는 반작용은 입자의 속도에 수직이므로 일을 하지 않고, 입자는 일정한 속력 V로 반원을 돈다. 반원의 길이는 πr이므로 홈 안에 머무는 시간은

$$T = \frac{\pi r}{V}.$$

이다. 입자의 운동량은 앞쪽으로 mV에서 뒤쪽으로 mV로 바뀌므로, 박판이 입자에 준 전체 충격량은 직선을 따라 뒤쪽으로 $2mV$이다. 직선에 수직인 방향의 운동량은 양 끝에서 모두 0이므로, 충격량의 수직 성분은 0이다.

뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 따라 입자는 박판에 직선을 따라 앞쪽으로 충격량 $2mV$를 준다. 박판은 정지해 있으므로 고정핀(peg)이 반대 방향의 충격량을 공급해야 하고, 박판은 입자의 처음 운동 방향으로 전체 충격량 $2mV$로 고정핀을 민다. (직선에서 오는 옆 방향의 힘은 앞 문단에 의해 평균이 0이다.) T로 나누면 고정핀에 작용하는 평균 힘은

$$\frac{2mV}{\pi r/V} = \frac{2mV^2}{\pi r},$$

이고, 방향은 입자가 홈에 들어온 방향이다. (문제의 "단위 시간당 평균 힘"은 바로 이것, 즉 단위 시간당 충격량을 뜻한다.)

이를 직접 확인할 수도 있다. 입자에는 중심 쪽으로 mV^2/r의 힘이 필요하므로, 입자는 박판을 바깥쪽으로 mV^2/r로 민다. 입자로 향하는 반지름이 CA와 이루는 각을 θ라 하면(θ는 일정한 비율로 0에서 π까지 변한다), 이 힘의 직선 방향 성분은 $(mV^2/r)\sin\theta$이고, $[0, \pi]$에서 $\sin\theta$의 평균은 $2/\pi$이다.

검산

- $M \to \infty$이면 박판은 거의 움직이지 않는다. $u \to 0$이고 입자의 속력은 V로 수렴하며, 고정된 홈의 경우와 같다.
- $m = M$이면 입자는 정지한 채로 나오고 박판이 속력 V를 모두 가져간다. 같은 질량 사이의 탄성 충돌과 같다.
- $M = 3, m = 1, V = 2$이면 $v = -1, u = 1$이다. 운동량: $1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 2 = mV$. 에너지: $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2$. 운동 방정식을 수치 시뮬레이션해 보면(반원 모양의 홈과 반타원 모양의 홈 모두에 대해) 소수점 아래 여섯째 자리까지 같은 값이 나왔고, 고정된 박판에 대해 $(mV^2/r)\sin\theta$를 수치 적분하면 평균 힘 $2mV^2/(\pi r)$이 나왔다. 예를 들어 $m = 0.7, r = 1.3, V = 2.1$일 때 1.5117이다.

흔한 실수

- 근 $v = V, u = 0$을 택하는 것. 이 근은 두 식을 모두 만족하지만 출구가 아니라 들어오는 순간을 나타낸다.
- 직선 방향의 평균 힘 대신 최대 힘 mV^2/r을 쓰는 것. 옆 방향 성분은 상쇄되고, 직선 방향 성분은 B에서만 mV^2/r에 이른다.

STEP 너머

첫 번째 부분은 숨어 있는 충돌이다. 홈의 모양이 어떻든 보존되는 양과 출구의 방향만이 중요하며, 이것은 힘을 모르고도 보존 법칙으로 산란(scattering) 문제를 다루는 발상의 바탕이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 직선 방향의 좌표가 라그랑지안에 나타나지 않으므로, 그 켤레 운동량(conjugate momentum)이 자동으로 보존된다. 이것이 대칭과 보존 법칙 사이의 연결, 즉 뇌터 정리(Noether's theorem)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 운동량, 충격량, 충돌을 다룬다.

풀이

STEP I 1991, 문제 14

확률과 통계 • 삼각형의 개수 세기

> **STEP I 1991, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q14

핵심 아이디어

세 길이 $a > b > c$가 퇴화하지 않은 삼각형(non-degenerate triangle)을 이루는 것은 가장 긴 변이 나머지 두 변의 합보다 **엄격하게** 짧을 때, 즉 $b + c > a$일 때와 정확히 같다. 나머지 두 삼각부등식(triangle inequality)은 저절로 성립한다. 따라서 a를 고정하고, 각 b에 대하여 $a - b$와 b 사이에 들어가는 c의 값의 개수를 센다. 이 개수는 2씩 증가하며, 바로 여기에서 홀수(또는 짝수)의 합이 나온다. 그다음 가능한 모든 a에 대하여 더할 때에는 $\sum k^2$에 대한 표준 공식만 있으면 된다.

풀이

삼각형은 언제 존재하는가?

$a > b > c > 0$이라 하자. 퇴화하지 않은 삼각형에 대한 세 삼각부등식은

$$b + c > a, \qquad a + c > b, \qquad a + b > c.$$

이다. 뒤의 두 부등식은 a가 이미 b보다도, c보다도 크므로 저절로 성립한다. 따라서 세 막대가 퇴화하지 않은 삼각형을 이루기 위한 필요충분조건은 $b + c > a$이다. ($b + c = a$이면 그 "삼각형"은 넓이가 0인 납작한 도형이 되므로 제외한다.)

가장 긴 막대의 길이가 짝수인 경우

a를 고정한다. 다음을 만족하는 정수 b, c가 필요하다.

$$a - b < c < b, \qquad b < a.$$

주어진 b에 대하여 $a-b+1 \le c \le b-1$을 만족하는 정수 c의 개수는

$$(b-1)-(a-b+1)+1 = 2b-a-1,$$

이다. 단, 이 값이 양수일 때에 한하며, 그렇지 않으면 그러한 c는 없다. (여기서 $c \ge a-b+1 \ge 2$이므로 c는 자동으로 실제 막대의 길이가 된다는 점에 주의한다.)

이제 a가 짝수라 하자. 그러면 $2b-a-1$은 홀수이고, 이 값이 1 이상인 것은 $b \ge \frac{a}{2}+1$일 때와 정확히 같다. 따라서 b는 $\frac{a}{2}+1$부터 $a-1$까지 움직이며, 다음을 얻는다.

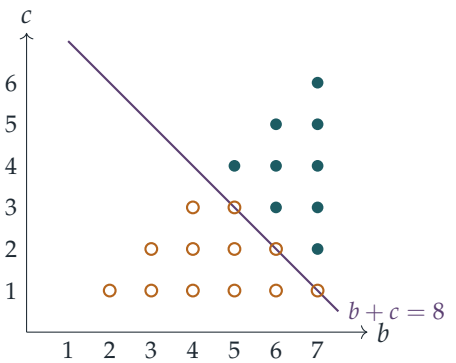
$$\begin{aligned} b = \tfrac{a}{2}+1 &: \quad 2b-a-1 = 1, \\ b = \tfrac{a}{2}+2 &: \quad 2b-a-1 = 3, \\ &\vdots \\ b = a-1 &: \quad 2b-a-1 = a-3. \end{aligned}$$

b가 1 증가할 때마다 개수는 2씩 늘어나므로, 이 막대를 가장 긴 막대로 하는 삼각형의 개수는

$$1+3+5+\cdots+(a-3),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($a=2$이면 이 합은 빈 합인데, 가장 긴 변이 2인 삼각형은 없으므로 옳다.) 처음 k개의 홀수의 합은 k^2이고 여기서는 항이 $\frac{a-2}{2}$개이므로, 이 개수는 $\left(\frac{a-2}{2}\right)^2$이다.

아래 그림은 $a=8$인 경우를 나타낸다. 각 점은 $8>b>c$인 순서쌍 (b,c)이고, 색칠된 점은 직선 $b+c=8$보다 위에 있는 점이다. 각 열에는 색칠된 점이 1개, 3개, 5개 있다.



가장 긴 막대의 길이가 홀수인 경우

이제 a가 홀수라 하자. 그러면 $2b-a-1$은 짝수이고, 이 값이 양수인 것은 $b \ge \frac{a+3}{2}$일 때와 정확히 같다. b가 $\frac{a+3}{2}$부터 $a-1$까지 움직일 때 개수는 $2,4,\ldots,a-3$이므로, 삼각형의 개수는

$$2+4+6+\cdots+(a-3) = 2\left(1+2+\cdots+\tfrac{a-3}{2}\right) = \frac{a-3}{2}\cdot\frac{a-1}{2} = \frac{(a-1)(a-3)}{4}.$$

이다. (이번에도 $a = 3$이면 올바르게 0이 나온다.)

삼각형의 총 개수

가장 긴 막대는 $3, 4, \ldots, 2N+1$ 중 어느 것이든 될 수 있다(그보다 작은 값에서는 어차피 삼각형이 생기지 않는다).

짝수 $a = 2m$, $m = 1, \ldots, N$인 경우: 개수는 $(m-1)^2$이므로, 이들의 기여는

$$\sum_{m=1}^{N} (m-1)^2 = \sum_{k=1}^{N-1} k^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}.$$

이다.

홀수 $a = 2m+1$, $m = 1, \ldots, N$인 경우: 개수는 $\frac{(2m)(2m-2)}{4} = m(m-1)$이므로, 이들의 기여는

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N} (m^2 - m) &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N(N+1)}{2} \\ &= \frac{N(N+1)(2N-2)}{6} = \frac{(N-1)N(N+1)}{3}.\end{aligned}$$

이다.

이 둘을 더하면, 퇴화하지 않은 삼각형을 이루는 선택의 수는

$$T_N = \frac{N(N-1)}{6}\left[(2N-1) + 2(N+1)\right] = \frac{N(N-1)(4N+1)}{6}.$$

이다.

> **생각해 보기** 왜 하나의 공식으로 합하지 않고 a의 홀짝성(parity)에 따라 합을 나누는가?

주어진 a에 대한 개수는 a가 짝수이면 $\frac{(a-2)^2}{4}$이지만, a가 홀수이면 $\frac{(a-1)(a-3)}{4} = \frac{(a-2)^2-1}{4}$이다. 이 둘은 a에 대한 서로 다른 다항식이므로, $a = 2m$ 또는 $a = 2m+1$로 놓으면 각각이 m에 대한 간단한 다항식이 되어 표준 공식으로 합할 수 있다.

$N = 3$일 때 확인하기

공식에 따르면 $T_3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 13}{6} = 13$이다. 막대 $1, \ldots, 7$로 직접 나열해 보자. 삼각형은 (a, b, c)로 쓴다.

- $a = 4$ (1개): $(4, 3, 2)$;
- $a = 5$ (2개): $(5, 4, 2)$, $(5, 4, 3)$;
- $a = 6$ (4개): $(6, 4, 3)$, $(6, 5, 2)$, $(6, 5, 3)$, $(6, 5, 4)$;

- $a = 7$ (6개): $(7,5,3)$, $(7,5,4)$, $(7,6,2)$, $(7,6,3)$, $(7,6,4)$, $(7,6,5)$.

즉 삼각형은 $1+2+4+6=13$개로, 공식과 일치한다(또한 짝수 a에 대해 $1=1^2, 4=2^2$이고, 홀수 a에 대해 $2=2\cdot 1, 6=3\cdot 2$인 것과도 일치한다).

확률

세 막대를 비복원추출(without replacement)로 무작위로 뽑을 때, 순서를 고려하지 않은 $\binom{2N+1}{3}$가지 선택은 모두 같은 정도로 일어날 수 있다.

$$\binom{2N+1}{3} = \frac{(2N+1)(2N)(2N-1)}{6},$$

이므로, 퇴화하지 않은 삼각형이 될 확률(probability)은

$$\frac{T_N}{\binom{2N+1}{3}} = \frac{N(N-1)(4N+1)}{(2N+1)\,2N\,(2N-1)} = \frac{(N-1)(4N+1)}{2(4N^2-1)},$$

이다. 여기서 인수 N을 약분하고 $(2N+1)(2N-1) = 4N^2-1$을 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $N=3$이면 확률은 $\frac{2\cdot 13}{2\cdot 35} = \frac{13}{35}$이고, 이는 $\binom{7}{3} = 35$가지 선택 중 삼각형 13개와 일치한다.
- $N \to \infty$일 때 확률은 $\frac{4N^2}{8N^2} = \frac{1}{2}$로 수렴(converge)한다. 이는 연속적인 경우와 일치한다. $[0,1]$에서 서로 독립인 균등분포(uniform distribution)를 따르는 세 길이에 대하여, 가장 긴 것이 나머지 두 개의 합보다 작을 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
- 2부터 29까지의 모든 N에 대하여 모든 세 쌍을 전수 조사(brute force)로 센 결과는 T_N 및 확률 공식과 정확히 일치하였다.

흔한 실수

- $b+c \geq a$를 사용하는 것: 등호가 성립하면 문제에서 제외하는 납작한 삼각형이 되며, 모든 개수가 너무 크게 나온다.
- 세 삼각부등식을 모두 따로 확인하거나, a가 가장 크면 $b+c>a$만 중요하다는 것을 잊는 것.
- b의 범위를 하나씩 어긋나게 잡는 것: $a=6$과 같은 작은 경우로 확인해 보자(삼각형은 $(6,4,3)$, $(6,5,2)$, $(6,5,3)$, $(6,5,4)$, 즉 $1+3$개).

STEP 너머

그림에서처럼 영역 안의 격자점(lattice point)을 세는 것은 넓이 계산의 이산적인 형태이며, N이 커지면 그 개수를 $\binom{2N+1}{3}$로 나눈 값은 단위 정육면체 안의 부피의 비에 가까워진다. 이처럼 이산 균등분포에서 연속 균등분포로 넘어가는 것과, 막대 자르기 문제(broken-stick problem) 같은 "기하학적 확률(geometric probability)" 문제는 대학 1학년의 고전적인 주제이다. 더 읽어 보려면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 좋은 출발점이다.

풀이

STEP I 1991, 문제 15

확률과 통계 • 정규근사

> **STEP I 1991, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q15

핵심 아이디어

각 X_j의 평균(mean)은 0, 분산(variance)은 1이고 각 던지기는 독립(independent)이므로, S_n의 평균은 0, 분산은 n이다. n이 클 때는 중심극한정리(central limit theorem)에 의해 S_n을 근사적으로 정규분포(normal distribution)를 따른다고 볼 수 있다. 마지막 부분은 비슷해 보이지만 함정이 있다. 모든 Y_k에 **같은** 첫 번째 던지기 X_1이 들어 있으므로 Y_k들은 독립이 아니며, 이 하나의 공통된 던지기가 결국 전체 합을 지배하게 된다.

풀이

각 X_j는 ± 1의 값을 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 가지므로

$$\mathrm{E}(X_j) = 0, \qquad \mathrm{E}(X_j^2) = 1, \qquad \mathrm{Var}(X_j) = 1.$$

이다. 각 던지기는 독립이므로 $\mathrm{E}(S_n) = 0$이고 $\mathrm{Var}(S_n) = n$이다. 중심극한정리에 의해 n이 클 때

$$S_n \approx \mathrm{N}(0,\, n).$$

이다. (같은 말로, 앞면의 개수를 H라 하면 $H \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$이고 $S_n = H - (n - H) = 2H - n$이다.)

소문항 (i)

$n = 10\,000$일 때 S_n의 표준편차(standard deviation)는 $\sqrt{10\,000} = 100$이므로

$$\mathrm{P}(S_n > 100) \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{100}{100}\right) = 1 - \Phi(1) \approx 0.16.$$

이다. 조금 더 신중하게 하고 싶다면 H에 연속성 보정(continuity correction)을 적용한다. $S_n > 100$은 $2H - 10\,000 > 100$, 즉 $H \geq 5051$을 뜻한다. H의 평균은 5000, 표준편차는 50이므로

$$\mathrm{P}(H \geq 5051) \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{5050.5 - 5000}{50}\right) = 1 - \Phi(1.01) \approx 0.156.$$

이다. 어느 쪽이든 답은 약 0.16이다.

소문항 (ii)

표준화(standardising)하면

$$\mathrm{P}(S_n > 0.01n) \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{0.01n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(0.01\sqrt{n}\right).$$

이다. 이 값은 n이 커질수록 감소하며, $\Phi(0.01\sqrt{n}) > 0.99$일 때 정확히 0.01보다 작다. 표에서 $\Phi(2.326) = 0.99$이므로

$$0.01\sqrt{n} > 2.326 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} > 232.6 \quad \Longleftrightarrow \quad n > 54\,100 \text{ (근사적으로)}.$$

이어야 한다. 따라서 이러한 n 중 가장 작은 값은 대략 54 000이다. (2.33을 대신 쓰면 약 54 300이 나온다. 이 정도의 근사에서는 5.4×10^4에 가까운 답이면 모두 맞는 답이다.)

새로운 점수 방식

$2 \leq k \leq n$에 대하여 첫 번째 던지기와 k번째 던지기에는 네 가지 경우가 있다.

첫 번째 던지기	k번째 던지기	점수 Y_k	$X_1 + X_k$
H	H	2	$1+1=2$
T	T	-2	$-1-1=-2$
H	T	0	$1-1=0$
T	H	0	$-1+1=0$

모든 경우에 마지막 두 열이 일치하므로, 요구한 대로 $Y_k = X_1 + X_k$이다.

평균과 분산. 선형성(linearity)에 의해 $\mathrm{E}(Y_k) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_k) = 0$이다. $k \geq 2$이므로 X_1과 X_k는 서로 다른 던지기이고, 따라서 독립이다. 그러므로

$$\mathrm{Var}(Y_k) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_k) = 2.$$

이다. (직접 계산하면, Y_k는 2, -2, 0을 각각 확률 $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$로 가지므로 $\mathrm{E}(Y_k^2) = 2$이다.)

극한. $m = n-1$, $T = Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n$이라 하자. 그러면

$$T = \sum_{k=2}^{n} (X_1 + X_k) = mX_1 + S', \qquad \text{여기서} S' = X_2 + X_3 + \cdots + X_n.$$

이다.

> **생각해 보기** 각 Y_k의 평균은 0, 분산은 2로, 마치 상수배한 X_j와 같다. 그런데 왜 소문항 (ii)의 논증을 그대로 가져다 쓸 수 없을까?

소문항 (ii)의 논증에는 각 항이 독립이라는 조건이 필요했는데, Y_k들은 모두 X_1을 공유하므로 독립이 아니기 때문이다. 실제로 $j \neq k$이면 $\mathrm{Cov}(Y_j, Y_k) = \mathrm{Var}(X_1) = 1$이고, $\mathrm{Var}(T) = m^2 + m$이며 $2m$이 아니다. 따라서 X_1의 두 값을 따로 살펴본다. S'은 각각 ± 1인 m개 항의 합이므로 $-m \le S' \le m$임에 주목하자.

- 첫 번째 던지기가 뒷면이면 $X_1 = -1$이고 $T = -m + S' \le 0$이다. 따라서 $T > 0.01m$은 불가능하다.
- 첫 번째 던지기가 앞면이면 $X_1 = 1$이고 $T = m + S'$이므로, $T > 0.01m$은 $S' > -0.99m$일 때 정확히 성립한다. 소문항 (ii)와 같은 정규 근사를 $S' \approx \mathrm{N}(0, m)$으로 적용하면

  $$\mathrm{P}(S' \le -0.99m) \approx \Phi\left(-0.99\sqrt{m}\right) \to 0 \quad \text{단, } m \to \infty.$$

  이다. (근사가 없어도 된다. 체비쇼프 부등식(Chebyshev's inequality)에 의해 이 확률은 많아야 $m/(0.99m)^2 \to 0$이다.)

S'은 X_1과 독립이므로

$$\mathrm{P}(T > 0.01m) = \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(S' > -0.99m) \;\to\; \tfrac{1}{2} \quad \text{단, } n \to \infty.$$

이다. 따라서 주어진 명제는 **거짓**이다. 확률은 0이 아니라 $\frac{1}{2}$로 수렴한다. 말로 하면, n이 클 때 합은 사실상 첫 번째 던지기가 앞면일 때 양수이고, 그렇지 않으면 양수가 아니다.

검산

- 소문항 (i): $H \sim \mathrm{B}(10\,000, \frac{1}{2})$에 대한 정확한 이항(binomial) 확률 $\mathrm{P}(H \ge 5051)$은 0.15625로, 연속성 보정을 한 값 0.156과 일치한다.
- 소문항 (ii): $\mathrm{P}(S_n > 0.01n)$의 정확한 이항 확률값은 $n = 50\,000$에서 0.0125, $n = 54\,000$ 근처에서 약 0.0100, $n = 55\,000$에서 0.0094이므로, 경계값은 실제로 54 000에 가깝다.
- 마지막 부분: $n \le 14$에 대해 2^n가지 결과를 모두 나열하면 $\frac{1}{2}\,\mathrm{P}(S' > -0.99m)$와 정확히 일치한다. $n = 14$에서 확률은 이미 0.49994이고, $n = 100$인 시뮬레이션에서는 0.497이 나왔다.

흔한 실수

- $Y_2, \ldots, Y_n$을 독립으로 보고 $\mathrm{Var}(T) = 2(n-1)$이라고 결론 내리는 것. 이렇게 하면 확률이 0으로 수렴하는 것처럼 보인다.
- 점수의 분산으로 n 대신 $\mathrm{Var}(S_n) = n/4$ (앞면 개수의 분산)를 쓰는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 대수의 약법칙(weak law of large numbers)을 정량적으로 나타낸 것이다. 즉 n이 크면 S_n/n이 0에서 멀리 떨어질 가능성은 매우 작다. 마지막 부분은 각 항이 강하게 종속되어 있을 때 이 법칙이 어떻게 깨지는지를 보여 준다. 여기서는 모든 항이 첫 번째 던지기를 공유하므로, 평균 $T/m = X_1 + S'/m$은 평균값 0이 아니라 확률변수인 X_1로 수렴한다. 종속된 수열에 대한 대수의 법칙(에르고딕 정리(ergodic theorems), 교환 가능한 수열(exchangeable sequences))은 학부 확률론에서 풍부한 주제이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 대수의 약법칙과 체비쇼프 부등식을 다룬다.

풀이

STEP I 1991, 문제 16

확률과 통계 • 조건부 확률

STEP I 1991, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q16

핵심 아이디어

모든 것을 각 파충류가 처음 길을 살핀 뒤 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 분에 길을 확인하는 시점(inspection time)에 따라 정리한다. 두꺼비의 대기 시간은 기하분포(geometric distribution)를 따르므로 두꺼비는 반드시 길을 건넌다. 개구리는 다르다. 개구리의 규칙에 따르면 늦어도 $n = 3$에서는 결정을 내려야 하므로, 개구리의 이야기는 네 단계뿐이고 각 단계에서 개구리가 무사히 건널 확률을 나열할 수 있다. 이 목록만 얻으면 두꺼비와의 비교와 조건부확률(conditional probability)은 몇 번의 합 계산에 지나지 않는다.

풀이

풀이 전체에서 서로 다른 확인 시점의 길 상태는 독립(independent)이고 각각 확률 0.1로 안전하며, 두꺼비와 개구리는 서로 독립적으로 행동한다고 가정한다. 개구리는 "나중에", 즉 다른 시각에 건너므로 이는 합리적인 가정이다. 건너는 데 걸리는 시간은 무시할 수 있으므로, 확인 시점 n에 건너는 파충류는 n분에 도착한다.

두꺼비

두꺼비는 안전할 때만 건너므로 결코 차에 치이지 않는다. 확인 시점 $0, 1, \ldots, k$가 지난 뒤에도 여전히 기다리고 있을 확률은 0.9^{k+1}이고, 이는 0으로 수렴한다. 따라서 두꺼비가 결국 안전하게 건널 확률은

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k(0.1) = \frac{0.1}{1 - 0.9} = 1.$$

두꺼비가 건너는 시각을 T라 하자. 그러면 $P(T = k) = 0.9^k(0.1)$이고, 뒤에서 쓰기 위해 적어 두면 $P(T > k) = 0.9^{k+1}$이다.

개구리

확인 시점 n에 개구리가 아직 기다리고 있다면,

- 확률 0.1로 길이 안전하고 개구리는 안전하게 건넌다.
- 확률 $0.9 \cdot \frac{n}{3}$로 길이 안전하지 않지만 그래도 건너며, 이때 확률 0.2로 무사히 도착하고 확률 0.8로 차에 치인다.
- 확률 $0.9\left(1 - \frac{n}{3}\right)$로 다음 확인 시점까지 기다린다.

$n = 0$에서는 개구리가 결코 위험을 무릅쓰지 않고, $n = 3$에서는 안전하지 않을 때 건널 확률이 1이므로, 그때까지 출발하지 않았다면 $n = 3$에서 반드시 출발한다. 특히 $n > 3$인 경우는 생기지 않는다.

확인 시점 n에 개구리가 아직 기다리고 있을 확률은

$$w_0 = 1, \quad w_1 = 0.9, \quad w_2 = 0.9 \cdot 0.9 \cdot \tfrac{2}{3} = 0.54, \quad w_3 = 0.54 \cdot 0.9 \cdot \tfrac{1}{3} = 0.162.$$

확인 시점 n에 개구리가 무사히 도착할 확률은 $w_n\left(0.1 + 0.9 \cdot \frac{n}{3} \cdot 0.2\right) = w_n(0.1 + 0.06n)$이다. 이 확률을 s_n이라 쓰면

$$s_0 = 1 \times 0.1 = 0.1, \qquad s_1 = 0.9 \times 0.16 = 0.144,$$
$$s_2 = 0.54 \times 0.22 = 0.1188, \qquad s_3 = 0.162 \times 0.28 = 0.04536.$$

따라서

$$P(\text{개구리가 안전하게 건넘}) = 0.1 + 0.144 + 0.1188 + 0.04536 = \boxed{0.40816 = \tfrac{2551}{6250}}.$$

개구리가 차에 치일 확률은 나머지인 $1 - 0.40816 = 0.59184$이다.

둘 다 안전하고 개구리가 더 빠른 경우

개구리가 무사히 도착하는 시각을 F라 하자. 둘 다 무사히 도착하고 $F < T$이어야 한다. 두꺼비는 반드시 안전하므로 독립성에 의해

$$P(\text{개구리가 시점}n\text{에서 안전하고}T > n) = s_n\, P(T > n) = s_n(0.9)^{n+1}.$$

? **생각해 보기** 왜 $T \geq n$이 아니라 $T > n$일까?

둘이 같은 확인 시점 n에 건너면 걸린 시간이 같으므로, 개구리가 엄밀하게 더 빠른 것이 아니다. 따라서 두꺼비는 시각 n의 확인이 끝난 뒤에도 여전히 기다리고 있어야 하고, 그 확률은 0.9^{n+1}이다. 개구리의 가능한 네 시각에 대해 더하면

$$\begin{aligned} P &= 0.1(0.9) + 0.144(0.81) + 0.1188(0.729) + 0.04536(0.6561) \\ &= 0.09 + 0.11664 + 0.0866052 + 0.029760696 \\ &= 0.323005896 \approx \boxed{0.323}. \end{aligned}$$

정확한 분수로 나타내면 $\frac{40375737}{125000000}$이다.

마지막 문항

개구리가 첫 확인 후 2분이 지났을 때 아직 건너편에 도착하지 못한 사건을 A, 개구리가 차에 치이는 사건을 R이라 하자. 건너는 것은 순간적으로 이루어지므로, $n = 2$의 확인 시점에 무사히 건넌 개구리는 2분까지 도착한 **것이다**. 따라서 A는 "$n = 0, 1$ 또는 2에서 안전하게 건넘"의 여사건(complement)이다.

$$P(A) = 1 - (s_0 + s_1 + s_2) = 1 - 0.3628 = 0.6372.$$

차에 치인 개구리는 어느 시각에도 도착하지 못하므로 $R \subseteq A$이고 $P(R \cap A) = P(R) = 0.59184$이다. 그러므로

$$P(R \mid A) = \frac{0.59184}{0.6372} = \frac{59184}{63720} = \boxed{\frac{274}{295} \approx 0.929}.$$

여기에는 이미 ($n = 1$ 또는 $n = 2$에서) 차에 치인 개구리와, 아직 기다리다가 $n = 3$에서 차에 치이는 개구리가 모두 포함되며, 이는 "어느 단계에서든"이라는 조건이 요구하는 바이다.

(어떤 독자는 이 조건을 $n = 0$과 $n = 1$의 확인 뒤에, 즉 $n = 2$에서 살피기 **전에** 도착하지 못했다는 뜻으로 받아들인다. 이렇게 해석하면 $0.59184/(1 - 0.244) = \frac{137}{175} \approx 0.783$을 얻는다. 정확히 2분에 도착한 것도 출발한 지 "2분 후"에 도착한 것이므로, 우리는 위의 해석을 택한다.)

검산

- 개구리의 결과들을 모두 합하면 전체가 되어야 한다. $n = 1, 2, 3$에서 차에 치일 확률은 $0.9(0.24)$, $0.54(0.48)$, $0.162(0.72)$, 즉 $0.216 + 0.2592 + 0.11664 = 0.59184$이고, 이는 정확히 $1 - 0.40816$이다.
- 개구리가 안전할 확률은 두꺼비의 확실한 1보다 훨씬 작은데, 참을성 없는 쪽이니 당연히 그래야 한다.
- 분수를 이용한 정확한 열거와 파충류 10^6쌍에 대한 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)으로 0.4087, 0.3234, 0.9286을 얻었으며, 이는 0.40816, 0.32301, 0.92881과 일치한다.

흔한 실수

- 개구리가 $n = 0$에서 위험을 무릅쓰게 하는 것. 그 시점에서는 규칙에 따라 $n/3 = 0$이다.

- 개구리의 과정이 $n = 3$에서 끝난다는 것을 잊고, 두꺼비처럼 개구리에 대해서도 기하급수를 더하는 것.
- 마지막 문항에서 P(안전하지 않음, $n \leq 2$)로 나누면서 분자에는 $n = 2$**까지** 차에 치인 경우만 넣는 것. 문제는 $n = 3$을 포함하여 어느 단계에서든 차에 치일 확률을 묻는다.

STEP 너머

개구리의 여정은 흡수 상태(absorbing state)("안전"과 "치임")를 가진 작은 **마르코프 연쇄**(Markov chain)이고, 두꺼비의 대기 시간은 무기억성(memoryless)을 가진 지수분포(exponential distribution)의 이산 버전인 기하분포이다. 마르코프 연쇄의 흡수 확률(absorption probability)과 도달 시간(hitting time)은 대학 첫 확률론 강의의 핵심 주제이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 두 가지를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 1991, 문제 1

순수수학 • 이차식과 판별식

> **STEP II 1991, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q1

핵심 아이디어

이차식(quadratic)이 완전제곱식(perfect square)의 상수배가 되는 것은 정확히 중근(repeated root)을 가질 때, 즉 판별식(discriminant)이 0일 때이다. 이후의 모든 소문항은 계수가 λ에 의존하는 이차식에 이 하나의 조건을 적용한 것이다. 판별식을 0으로 만드는 λ를 구하면 λ에 대한 이차방정식이 나오고, 분해는 f와 g에 대한 두 일차방정식을 풀어서 얻는다.

풀이

$(*)$ 꼴이 될 조건

전개하면

$$a(x+k)^2 = ax^2 + 2akx + ak^2.$$

$\mathrm{h}(x)$가 이 꼴이면 계수를 비교(comparing coefficients)하여 $b = 2ak$, $c = ak^2$이므로

$$b^2 = 4a^2k^2 = 4a \cdot ak^2 = 4ac.$$

역으로 $b^2 = 4ac$이면 $k = \dfrac{b}{2a}$로 잡는다($a \neq 0$이므로 가능하다). 그러면 $2ak = b$이고 $ak^2 = \dfrac{b^2}{4a} = c$이므로 $\mathrm{h}(x) = a(x+k)^2$이다. 따라서 구하는 조건은

$$b^2 = 4ac,$$

이고, 이는 판별식이 0이라는 뜻이다.

λ의 두 값

다음이 성립한다.

$$f(x) + \lambda g(x) = (3+\lambda)x^2 + 4x - 2\lambda.$$

$\lambda = -3$이면 이 식은 $4x+6$이다. 이는 x^2의 계수가 0이 아니어야 하는 $(*)$ 꼴이 아니다. 따라서 $3+\lambda \neq 0$이고, 위의 조건에 의해 다음이 필요하다.

$$16 = 4(3+\lambda)(-2\lambda) \iff \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda+2) = 0.$$

그러므로 $\lambda = -1$ 또는 $\lambda = -2$이고, 어느 것도 -3이 아니다. 구체적으로 쓰면

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2,$$
$$f(x) - 2g(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

분해

> **생각해 보기** $f-g$와 $f-2g$에 대한 두 사실로부터 어떻게 f와 g를 각각 알아낼 수 있을까?

위에 나타낸 두 항등식을 미지수 $f(x)$와 $g(x)$에 대한 연립일차방정식(simultaneous linear equations)으로 본다. 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면

$$g(x) = 2(x+1)^2 - (x+2)^2,$$

이고, 그러면 $f(x) = (f(x) - 2g(x)) + 2g(x) = (x+2)^2 + 4(x+1)^2 - 2(x+2)^2$, 즉

$$f(x) = 4(x+1)^2 - (x+2)^2.$$

전개하여 확인하면 $4(x^2+2x+1) - (x^2+4x+4) = 3x^2+4x$이고 $2(x^2+2x+1) - (x^2+4x+4) = x^2 - 2$이다. 따라서 한 가지 선택은 다음과 같다.

$$A = 4, \quad B = -1, \quad C = 2, \quad D = -1, \quad m = 1, \quad n = 2.$$

m과 n의 역할을 바꾸면 동등한 답 $m=2, n=1, A=-1, B=4, C=-1, D=2$를 얻는다.

마지막 소문항

이제

$$f(x) + \lambda g(x) = (3+\lambda)x^2 + 4x + \lambda\alpha.$$

앞에서와 마찬가지로 $\lambda = -3$이면 일차식 $4x - 3\alpha$가 되고, 이는 결코 $(*)$ 꼴이 아니다. $\lambda \neq -3$일 때 조건 $b^2 = 4ac$는 다음과 같이 된다.

$$16 = 4(3+\lambda)\lambda\alpha \iff \alpha\lambda^2 + 3\alpha\lambda - 4 = 0. \qquad (\dagger)$$

$\lambda \neq -3$이면서 (†)를 만족하는 λ의 값이 정확히 하나이기를 원한다.

? **생각해 보기** (†)가 두 근을 가지고, 그중 하나가 금지된 값 $\lambda = -3$일 수 있을까?

그렇지 않다. (†)의 좌변에 $\lambda = -3$을 대입하면 $9\alpha - 9\alpha - 4 = -4 \neq 0$이므로 $\lambda = -3$은 결코 근이 아니다. 따라서 조건을 만족하는 λ의 값은 정확히 (†)의 근들이다.

- $\alpha = 0$이면 (†)는 $-4 = 0$이 되어 해가 없다. 따라서 $\alpha \neq 0$이다.
- $\alpha \neq 0$이면 (†)는 λ에 대한 진짜 이차방정식이다. 이 방정식이 정확히 하나의 근을 가지는 것은 판별식이 0일 때이고, 그때에 한한다.

$$9\alpha^2 + 16\alpha = 0 \iff \alpha(9\alpha + 16) = 0 \iff \alpha = -\tfrac{16}{9},$$

  여기서 $\alpha \neq 0$을 사용하였다.

그러므로

$$\alpha = -\frac{16}{9}.$$

중근은 $\lambda = -\frac{3\alpha}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$이고, 실제로

$$\mathrm{f}(x) - \tfrac{3}{2}\left(x^2 - \tfrac{16}{9}\right) = \tfrac{3}{2}x^2 + 4x + \tfrac{8}{3} = \tfrac{3}{2}\left(x + \tfrac{4}{3}\right)^2.$$

검산

분해한 식을 시험값에서 계산해 본다. $x = 1$에서 $4(2)^2 - (3)^2 = 7 = \mathrm{f}(1)$이고 $2(2)^2 - 3^2 = -1 = \mathrm{g}(1)$이다. 마지막 소문항에서 $\frac{3}{2}(x + \frac{4}{3})^2$의 $x = 0$에서의 값은 $\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{3}$이며, 이는 $\lambda\alpha = (-\frac{3}{2})(-\frac{16}{9})$와 일치한다. $|p| \leq 60$, $q \leq 12$인 모든 유리수 $\lambda = p/q$를 컴퓨터로 시험해 보면, 가운데 소문항에서는 정확히 $\lambda = -1, -2$만, $\alpha = -\frac{16}{9}$일 때는 $\lambda = -\frac{3}{2}$만 나온다.

흔한 실수

- (∗)에서 $a \neq 0$이라는 조건을 잊는 것. $\lambda = -3$에서는 식이 일차식이 되므로, 그 값이 왜 제외되는지 밝혀야 한다.
- 마지막 소문항에서 "(†)의 판별식이 0"이라는 데서 멈추고 $\alpha = 0$인 경우를 다루지 않는 것. 이때 (†)는 아예 이차방정식이 아니며 근이 없다.

STEP 너머

f와 g를 일차형식 두 개의 제곱의 결합으로 나타내는 것은 이차형식(quadratic form) 한 쌍의 동시 대각화(simultaneous diagonalisation)이다. $\mathrm{f} + \lambda\mathrm{g}$를 퇴화시키는 λ의 값들은

대응하는 대칭행렬(symmetric matrix)에 대하여 $\det(F + \lambda G) = 0$의 근들이며, 이는 "일반화된 고윳값(generalised eigenvalue)" 문제이다. 두 λ 값이 일치하는 마지막 소문항은 바로 이러한 대각화가 실패할 수 있는 경우이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점에서 이차형식과 고윳값을 다룬다.

풀이

STEP II 1991, 문제 2

순수수학 • 쌍곡선의 점근선

> **STEP II 1991, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q2

핵심 아이디어

이차 부분 $3y^2 - 10xy + 3x^2$는 $(3y - x)(y - 3x)$로 인수분해(factorisation)되며, 이것이 문제의 전부이다. 일차항까지 포함하도록 인수분해를 완성하면 곡선은 "두 일차식의 곱 $= 1$"의 꼴이 된다. 곡선을 따라 멀리 나아가면 한 인수는 한없이 커져야 하므로 다른 인수는 0으로 가야 하고, 그 인수를 0으로 놓은 것이 점근선(asymptote)이다. 이것이 바로 힌트에서 요구하는 "극한에서 s와 t 사이의 관계"이다.

풀이

접선

$(\dagger)$를 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$6y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 10y - 10x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6x + 16\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 16 = 0,$$

이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{10y - 6x + 16}{6y - 10x + 16} = \frac{5y - 3x + 8}{3y - 5x + 8}.$$

점 (s, t)에서의 기울기(gradient)는 $m = \dfrac{5t - 3s + 8}{3t - 5s + 8}$이고, 접선(tangent)은 $y = mx + (t - ms)$이다. 절편(intercept)을 통분하면

$$t - ms = \frac{t(3t - 5s + 8) - s(5t - 3s + 8)}{3t - 5s + 8} = \frac{3t^2 - 10st + 3s^2 + 8t - 8s}{3t - 5s + 8}.$$

(s,t)가 곡선 위에 있으므로 $3t^2-10st+3s^2 = -16t+16s-15$이고, 따라서 분자는 $-8t+8s-15=-(8t-8s+15)$이다. 그러므로 접선은

$$y=\left(\frac{5t-3s+8}{3t-5s+8}\right)x-\left(\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}\right),$$

이며, 이것이 보이려던 것이다. ($3t-5s+8=0$인 곳에서는 접선이 수직이므로, 이 식은 분모를 없앤 꼴로 읽어야 한다.)

점근선

(†)를 $(3y-x+a)(y-3x+b)+k=0$의 꼴로 써 보자. 전개하면

$$(3y-x+a)(y-3x+b)=3y^2-10xy+3x^2+(3b+a)y-(b+3a)x+ab,$$

이므로 $3b+a=16$, $b+3a=16$이어야 하고, 이로부터 $a=b=4$, $ab=16$을 얻는다. 따라서 (†)는

$$(3y-x+4)(y-3x+4)=1.$$

이다. 점 (s,t)에 대하여

$$u=3t-s+4, \qquad v=t-3s+4, \qquad \text{이라 두면} \qquad uv=1.$$

이다. 접선의 식에 나오는 모든 식은 u, v와 상수의 결합으로 나타낼 수 있다. t와 s의 계수를 비교하면

$$\begin{aligned}5t-3s+8&=\tfrac{1}{2}(3u+v),\\ 3t-5s+8&=\tfrac{1}{2}(u+3v),\\ 8t-8s+15&=2(u+v)-1=2(u+v)-uv,\end{aligned}$$

이며, 마지막 식에서는 $uv=1$을 이용하였다. 따라서 접선의 기울기와 절편은

$$m=\frac{3u+v}{u+3v}, \qquad c=\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}=\frac{2(2u+2v-uv)}{u+3v}.$$

이다.

? **생각해 보기** $s\to\infty$일 때 u와 v는 어떻게 되는가?

t를 소거하면 $u-3v=8s-8$이므로 $u-3v\to\infty$이다. $uv=1>0$이므로 u와 v는 부호가 같다.

- 둘 다 양수이면 $u-3v\to\infty$에서 $u\to\infty$일 수밖에 없고, 그러면 $v=1/u\to 0$이다.
- 둘 다 음수이면 $u-3v=3|v|-|u|\to\infty$에서 $|v|\to\infty$일 수밖에 없고, 그러면 $u=1/v\to 0$이다.

이것이 힌트가 원하는 관계이다. 한 가지(branch)에서는 $t-3s+4\to 0$이고, 다른 가지에서는 $3t-s+4\to 0$이다.

$v\to 0, u\to\infty$인 경우. 분자와 분모를 u로 나누면

$$m=\frac{3+v/u}{1+3v/u}\to 3,\qquad c=\frac{2(2+2v/u-v)}{1+3v/u}\to 4,$$

이므로 극한(limit)에서의 접선은 $y=3x-4$이다.

$u\to 0, v\to\infty$인 경우. 분자와 분모를 v로 나누면

$$m=\frac{3u/v+1}{u/v+3}\to \tfrac{1}{3},\qquad c=\frac{2(2u/v+2-u)}{u/v+3}\to \tfrac{4}{3},$$

이므로 극한에서의 접선은 $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$, 즉 $3y=x-4$이다.

따라서 점근선은 $y=3x-4$와 $3y=x-4$이다. (대신 $s\to-\infty$로 보내면 두 경우의 역할이 바뀔 뿐 같은 두 직선을 얻는다.) 이 직선들이 정확히 $v=0$과 $u=0$이라는 점에 주목하자. 인수분해된 꼴을 보면 곧바로 알 수 있다.

각과 축

직선 $y=3x-4$의 기울기는 3이므로, 이 직선이 x축과 이루는 각 θ는 $\tan\theta=3$을 만족한다. 그러면 이 직선이 y축과 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}-\theta$이고, $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta=\frac{1}{3}$이다. 직선 $3y=x-4$의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 이 직선이 x축과 이루는 각은 $\arctan\frac{1}{3}$이고, 이는 첫 번째 점근선과 y축 사이의 각과 같다.

? 생각해 보기 이것으로부터 왜 이등분선을 알 수 있는가?

직선 $y=x$에 대한 대칭이동은 x축과 y축을 맞바꾸고, 방금 보인 것에 따르면 두 점근선의 방향도 맞바꾼다. 즉 방향 $(1,3)$은 $(3,1)$로 옮겨진다. 따라서 두 점근선이 이루는 각은 $y=x$의 방향에 대하여 대칭이고, $y=x$가 그 각을 이등분한다. 실제로 점근선의 방향은 x축으로부터 $\arctan 3$과 $\arctan\frac{1}{3}$만큼 기울어져 있고, 이는 $\frac{\pi}{4}\pm(\arctan 3-\frac{\pi}{4})$이다. 다른 이등분선은 첫 번째 이등분선에 수직이다. 따라서 이등분선(bisector)의 기울기는 1과 -1이다.

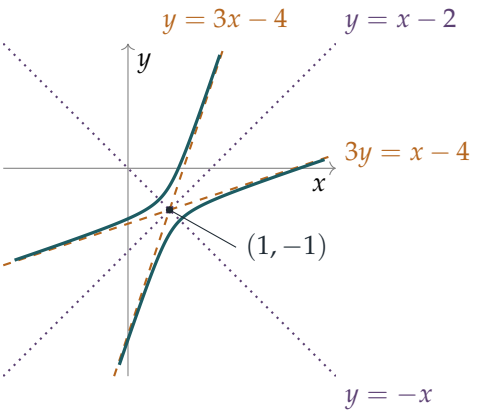
쌍곡선(hyperbola)의 축은 점근선들이 만나는 점인 중심(centre)을 지나는, 점근선이 이루는 각의 이등분선이다. $y=3x-4$와 $3y=x-4$를 연립하면 $9x-12=x-4$이므로 $x=1$, $y=-1$이다. 중심은 $(1,-1)$이고, 축은

$$y+1=x-1\iff y=x-2,\qquad y+1=-(x-1)\iff y=-x.$$

이다.

어느 것이 어느 축인지 알아보자. $y=-x$ 위에서는 $u=v=4-4x$이므로 $uv=1$에서 $x=1\pm\frac{1}{4}$를 얻고, 꼭짓점(vertex)은 $(\frac{5}{4},-\frac{5}{4})$와 $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$이다. 따라서 $y=-x$가 주축(transverse

axis)이다. $y = x - 2$ 위에서는 $u = 2x - 2 = -v$이므로 $uv = -(2x-2)^2 \le 0$이고, 이 직선(켤레축(conjugate axis))은 곡선과 만나지 않는다.



검산

- 점 $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$는 (†)를 만족한다. $3 \cdot \frac{25}{16} + 10 \cdot \frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{25}{16} - 20 - 20 + 15 = 25 - 25 = 0$.
- 수치적으로 $u = 10^8$로 두면($s \approx 1.25 \times 10^7$) 접선 공식에서 기울기 3.0000000과 절편 항 3.99999998을 얻고, $u = -10^{-8}$로 두면 0.33333333과 1.33333334를 얻는다.
- 중심 $(1, -1)$에서는 $u = v = 0$이므로 중심은 곡선 위에 있지 않다. 접선 공식이 결코 $0/0$이 되지 않는 이유가 바로 이것이다.

흔한 실수

- ($t \approx ks$로 두고) $3k^2 - 10k + 3 = 0$에서 기울기 3과 $\frac{1}{3}$만 구하고, 절편을 구하려면 그다음 항이 필요하다는 것을 잊는 것. 단지 $t \approx 3s$가 아니라 $t = 3s - 4 + o(1)$이다.
- 이등분선을 중심 $(1, -1)$이 아니라 원점을 지나도록 잡는 것.

STEP 너머

모든 이차곡선(conic) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$은 대칭행렬(symmetric matrix) $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$를 써서 $\mathbf{x}^\mathsf{T} A \mathbf{x} + \ldots$의 꼴로 쓸 수 있고, 그 축은 A의 고유벡터(eigenvector) 방향을 향한다. 여기서 $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$의 고유벡터는 $(1, 1)$과 $(1, -1)$이

고, 고윳값(eigenvalue)은 부호가 서로 반대인 -2와 8이며, 이 때문에 곡선이 쌍곡선이 된다. 이처럼 이차형식(quadratic form)을 대각화(diagonalisation)하는 것은 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)의 핵심 주제이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 1991, 문제 3

순수수학 • 대칭 연립방정식

> **STEP II 1991, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q3

핵심 아이디어

서로 같은 세 식에서는 방정식이 두 개 나오는데, 미지수가 세 개이므로 x, y, z 자체를 구하기는 기대할 수 없다. 대신 할 수 있는 것은 순환 대칭(cyclic symmetry)을 활용하는 것이다. 식을 두 개씩 짝지어 빼면 각 차 $x-y$가 다음 차 $y-z$의 배수로 바뀌고, 이렇게 얻은 세 관계식을 모두 곱하면 거의 모든 것이 약분된다. 두 번째 결과를 위해서는 공통값에 k라는 이름을 붙이고 분모를 없애면 순환적인 일차 관계식 세 개가 나오며, 이 식들이 xyz를 세 가지 다른 방식으로 결정한다.

풀이

$x^2y^2z^2 = 1$임을 보이기

처음 두 식을 같다고 놓으면

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz}.$$

같은 방법으로 두 번째와 세 번째 식, 그리고 세 번째와 첫 번째 식을 같다고 놓으면

$$y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z-x}{zx}, \qquad z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}.$$

이 세 방정식을 모두 곱하면

$$(x-y)(y-z)(z-x) = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{x^2y^2z^2}.$$

x, y, z가 서로 다르므로 곱 $(x-y)(y-z)(z-x)$는 0이 아니고, 따라서 양변을 이것으로 나눌 수 있다. 그러면 $1 = 1/(x^2y^2z^2)$, 즉

$$x^2y^2z^2 = 1,$$

이 되어 증명이 끝난다.

> **생각해 보기** x, y, z가 서로 다르고 0이 아니라는 조건은 정확히 어디에서 쓰였는가?

0이 아니라는 조건은 분수 $1/x, 1/y, 1/z$가 애초에 의미를 갖기 위해 필요하다. 서로 다르다는 조건은 $(x-y)(y-z)(z-x)$를 약분할 수 있게 해 준다. 이 조건이 없으면 결과가 성립하지 않는다. 예를 들어 $x=y=z=2$는 방정식을 만족하지만 $x^2y^2z^2=64$이다.

공통값은 ±1이다

공통값을 k라 하면

$$x+\frac{1}{y}=k, \qquad y+\frac{1}{z}=k, \qquad z+\frac{1}{x}=k.$$

각 식에 차례로 y, z, x를 곱하면(모두 0이 아니다)

$$xy=ky-1, \qquad yz=kz-1, \qquad zx=kx-1. \tag{$*$}$$

이제 이 중 첫 번째 식에 z를 곱하고, 두 번째 식을 이용해 yz를 바꾸어 넣는다.

$$\begin{aligned} xyz &= kyz-z \\ &= k(kz-1)-z \\ &= (k^2-1)z-k. \end{aligned}$$

관계식 $(*)$는 $x\to y\to z\to x$로 바꾸어도 변하지 않으므로, 두 번째와 세 번째 관계식에서 시작하여 같은 계산을 하면

$$xyz=(k^2-1)x-k, \qquad xyz=(k^2-1)y-k.$$

xyz에 대한 처음 두 식을 빼면

$$(k^2-1)(z-x)=0.$$

$z\neq x$이므로 $k^2=1$이어야 하고, 따라서 $x+\frac{1}{y}$의 값은 $+1$ 또는 -1이다. 이로써 증명이 끝난다.

덤으로, $k^2=1$을 다시 대입하면 $xyz=-k$를 얻는다. 이때 $x^2y^2z^2=k^2=1$이므로, 이것은 첫 번째 결과에 이르는 또 다른 경로이기도 하다.

검산

두 값 모두 실제로 나타난다. $k=1$일 때, 0과 1이 아닌 임의의 $x\neq 0,1$에서 시작하여 $y=\frac{1}{1-x}, z=\frac{1}{1-y}=\frac{x-1}{x}$로 놓는다. 그러면 $z+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}=1$이므로 세 식이 모두 1이

된다. 예를 들어 $x = 2$이면 $y = -1, z = \frac{1}{2}$이고, 실제로 $2 - 1 = -1 + 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$이며 $xyz = -1 = -k$이다. (x, y, z)를 $(-x, -y, -z)$로 바꾸면 $(-2, 1, -\frac{1}{2})$처럼 $k = -1$인 해를 얻는다. 이 경우 세 수는 항상 서로 다른데, $x = \frac{1}{1-x}$이려면 $x^2 - x + 1 = 0$이어야 하고 이 방정식은 실근을 갖지 않기 때문이다. 이러한 세 수의 쌍 약 4000개를 정확한 분수로 확인하였으며, 매번 $x^2y^2z^2 = 1$과 $xyz = -k$가 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- $(x - y)(y - z)(z - x)$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 것. 서로 다르다는 조건은 바로 이를 위해 주어진 것이다.
- $xyz = \pm 1$ 대신 $xyz = 1$이라고 결론짓는 것. 실제로는 $xyz = -k$이므로, 공통값이 1이면 $xyz = -1$이다.

STEP 너머

사상 $t \mapsto \dfrac{1}{k - t}$는 x를 y로, y를 z로, z를 다시 x로 보낸다. 이것은 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$에 대응하는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이며, 이러한 사상의 합성은 행렬의 곱에 대응한다. 이 문제가 실제로 묻는 것은 이 사상이 언제 3-주기(cycle)를 갖는가이며, 그 답 $k^2 = 1$은 정확히 행렬의 세제곱이 단위행렬(identity matrix)의 상수배가 되는 경우이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 뫼비우스 변환과, 행렬의 대각합(trace)에 따른 그 분류를 다룬 아름다운 장이 있다.

풀이

STEP II 1991, 문제 4

순수수학 • 코사인의 합

> **STEP II 1991, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.2 절 **가우스의 정17각형**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/gauss-17gon.html

핵심 아이디어

$5\phi = 2\pi$이고 $17\theta = 2\pi$이므로, 각의 큰 배수에 대한 코사인은 작은 배수의 코사인으로 되접힌다. 즉 $n\phi = 2\pi$이면 $\cos(n-k)\phi = \cos k\phi$이다. 따라서 코사인들의 합을 곱을 합으로 바꾸는 공식(product formula)으로 제곱하거나 서로 곱하면, 모든 것이 다시 같은 몇 개의 코사인으로 모인다. 후반부에서는 여덟 개의 코사인 $\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$를 네 개씩 두 묶음으로 나누고, 두 묶음의 합과 곱을 구하여 z를 근(root)으로 갖는 이차방정식(quadratic equation)을 얻는다.

풀이

정오각형(pentagon): $\phi = 2\pi/5$

곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$와 $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$를 함께 사용한다. $5\phi = 2\pi$이므로

$$\cos 3\phi = \cos(2\pi - 2\phi) = \cos 2\phi, \qquad \cos 4\phi = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi.$$

따라서

$$\begin{aligned} y^2 &= \cos^2\phi + 2\cos\phi\cos 2\phi + \cos^2 2\phi \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 3\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\phi) \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 2\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos\phi) \\ &= 1 + \tfrac{3}{2}(\cos\phi + \cos 2\phi) = 1 + \tfrac{3}{2}y. \end{aligned}$$

양변에 2를 곱하면 요구한 대로 $2y^2 = 3y + 2$를 얻는다.

이 식은 $(2y+1)(y-2) = 0$으로 인수분해되므로 $y = -\frac{1}{2}$ 또는 $y = 2$이다. 그런데 $2\phi = \frac{4\pi}{5}$는 $\frac{\pi}{2}$와 π 사이에 있으므로 $\cos 2\phi < 0$이고, 한편 $\cos\phi \le 1$이다. 따라서 $y < 1$이 되어 $y = 2$는 제외되고,

$$y = \cos\tfrac{2\pi}{5} + \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\tfrac{1}{2}.$$

$\theta = 2\pi/17$일 때 코사인들의 합

$\omega = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$라 하자. 드무아브르 정리(de Moivre's theorem)에 의해 $\omega^k = \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta$이고, $\omega^{17} = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1$이며, $\omega \neq 1$이다. 등비급수(geometric series)의 합을 구하면

$$\sum_{k=0}^{16} \omega^k = \frac{\omega^{17} - 1}{\omega - 1} = 0.$$

실수부(real part)를 취하면 요구한 대로 $\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta = 0$을 얻는다.

z의 값

$c_k = \cos k\theta$라 쓰자. $17\theta = 2\pi$이고 코사인은 우함수(even function)이므로

$$c_{17-k} = c_k \quad \text{이고} \quad c_{-k} = c_k,$$

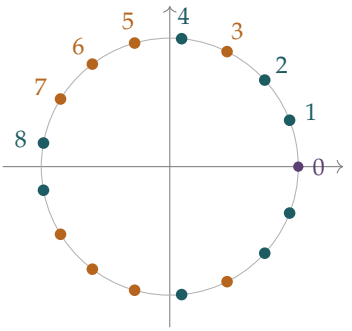
따라서 모든 c_k는 $c_1, c_2, \ldots, c_8$ 중 하나와 같다. 특히 방금 증명한 합에서 $c_0 = 1$을 빼면 $2(c_1 + c_2 + \cdots + c_8) = -1$이 되므로

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_8 = -\tfrac{1}{2}. \qquad (*)$$

z에 들어 있는 각은 $1, 2, 4, 8$이다(각각 앞의 것의 두 배이며, 위와 같이 줄이면 $16 \to 1$이 된다). 나머지 네 개 $3, 5, 6, 7$은 짝이 되는 합

$$w = c_3 + c_5 + c_6 + c_7.$$

을 준다. 그림은 단위원(unit circle) 위의 열일곱 개의 점 ω^k를 보여 준다. 청록색 점(과 그 대칭점)은 z에 들어 있는 코사인을, 호박색 점은 w에 들어 있는 코사인을 나타낸다.



합. $(*)$에 의해 $z+w = c_1 + c_2 + \cdots + c_8 = -\frac{1}{2}$이다.

곱. zw를 전개하면 $a \in \{1,2,4,8\}, b \in \{3,5,6,7\}$인 열여섯 개의 곱 $c_a c_b$가 나오고, 각각은 $\frac{1}{2}(c_{a+b} + c_{a-b})$이다. 각 첨자를 1부터 8까지의 범위로 줄이면($c_{-k} = c_k$와 $c_{17-k} = c_k$를 이용한다) 첨자의 쌍은 다음과 같다.

	$b=3$	$b=5$	$b=6$	$b=7$
$a=1$	4, 2	6, 4	7, 5	8, 6
$a=2$	5, 1	7, 3	8, 4	8, 5
$a=4$	7, 1	8, 1	7, 2	6, 3
$a=8$	6, 5	4, 3	3, 2	2, 1

(예를 들어 $a=8, b=7$이면 c_{15}와 c_1이 나오고, $c_{15} = c_2$이다.)

> **생각해 보기** 어떤 코사인이 나타나는지 알아야 할까, 아니면 몇 번 나타나는지만 알면 될까?

몇 번 나타나는지만 알면 된다. 표를 세어 보면 첨자 $1, 2, \ldots, 8$ 각각이 32개의 항목 가운데 정확히 네 번씩 나타난다. 따라서 $(*)$를 다시 이용하면

$$zw = \tfrac{1}{2} \cdot 4\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_8) = 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1,$$

이다.

이차방정식. $z+w = -\frac{1}{2}$이고 $zw = -1$이므로, z와 w는

$$t^2 + \tfrac{1}{2}t - 1 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad 2t^2 + t - 2 = 0,$$

의 두 근이다. 따라서 $\{z, w\} = \left\{ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \right\}$이다. 첫 번째 근은 양수이고 두 번째 근은 음수이다.

근 고르기. $z > 0$임을 보이자. $\frac{4}{17} < \frac{1}{4}$이므로 θ와 2θ는 모두 $(0, \frac{\pi}{4})$에 속하고, 따라서 c_1과 c_2는 모두 $\frac{1}{\sqrt{2}}$보다 크며 $c_1 + c_2 > \sqrt{2} > 1$이다. 또한 $4\theta = \frac{8\pi}{17} < \frac{\pi}{2}$이므로 $c_4 > 0$이고, $c_8 \geq -1$이다. 그러므로

$$z = (c_1 + c_2) + c_4 + c_8 > 1 + 0 - 1 = 0,$$

이고, z는 양수인 근이어야 한다.

$$z = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} = -\frac{1 - \sqrt{17}}{4}.$$

검산

수치로 계산하면 $\cos 72^\circ + \cos 144^\circ = 0.30902 - 0.80902 = -0.5$이다. $\theta = 2\pi/17$일 때 계산기로 구하면 $z = 0.932472 + 0.739009 + 0.092268 - 0.982973 = 0.780776$이고, $(\sqrt{17} - 1)/4 = 0.780776$이다. 또한 $w = -1.280776 = (-1 - \sqrt{17})/4$이므로, 앞에서 구한 대로 $z + w = -0.5$이고 $zw = -1$이다.

흔한 실수

- 첫 부분에서 $y = 2$를, 또는 두 번째 부분에서 w에 해당하는 근을 제외하는 것을 잊는 경우. 이차방정식은 두 후보를 주므로, 하나를 고르려면 부호에 대한 별도의 논증이 필요하다.
- $(*)$에 $k = 0$을 포함하는 경우. 전체 합은 0이지만 $c_0 = 1$이므로 $c_1 + \cdots + c_{16} = -1$이고, 이를 반으로 나누어야 $-\frac{1}{2}$가 된다.
- 곱의 표에서 첨자를 잘못 줄이는 경우. 예를 들어 c_9를 c_8로 보지 않고 새로운 항으로 취급하는 것이다.

STEP 너머

이것은 정십칠각형(regular 17-gon)을 자와 컴퍼스(ruler and compasses)로 작도할 수 있음을 보인 가우스(Gauss)의 유명한 계산이다. 코사인들을 3(17을 법으로 하는 생성원(generator))의 거듭제곱에 따라 8개, 4개, 2개, 1개짜리의 포개진 묶음으로 나누면 이차방정식의 사슬이 얻어지고, 따라서 $\cos \frac{2\pi}{17}$는 제곱근만을 사용하여 나타낼 수 있다. z와 w는 그 사슬의 첫 단계로, 가우스 주기(Gaussian periods)라고 부른다. 전체 이야기는 갈루아 이론(Galois theory)에 속한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하고, 1의 거듭제곱근(roots of unity)의 산술에 대해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 참고하라.

풀이

STEP II 1991, 문제 5

순수수학 • 적분의 점화 공식

> **STEP II 1991, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q5

핵심 아이디어

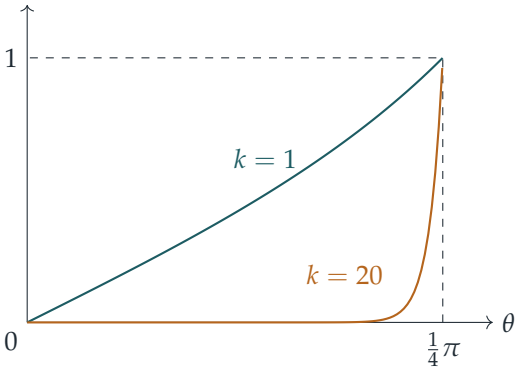
$I_k = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,\mathrm{d}\theta$로 놓는다. tan의 홀수 거듭제곱이나 짝수 거듭제곱은 그 자체로는 바로 적분되지 않지만, 두 개를 더하면 적분된다. $\tan^k\theta + \tan^{k+2}\theta = \tan^k\theta\sec^2\theta$이고, 이는 $\tan^{k+1}\theta/(k+1)$의 도함수(derivative)이기 때문이다. 이 점화식(reduction formula)을 수학적 귀납법(induction)으로 풀어 나가면 원하는 공식을 얻는다. 또 k가 클 때의 그래프 개형을 보면 적분값이 0으로 줄어든다는 것을 알 수 있고, 바로 이 사실이 공식을 무한급수(infinite series)의 합으로 바꾸어 준다.

풀이

그래프 개형

$[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $0 \le \tan\theta \le 1$이고, $\tan 0 = 0$, $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이다. $k = 1$일 때 그래프는 $(0,0)$에서 $(\frac{1}{4}\pi, 1)$까지 올라가며 완만하게 아래로 볼록하다(기울기 1에서 시작하여 기울기 $\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$로 끝난다).

$k \gg 1$이면, 1보다 작은 $\tan\theta$의 값은 모두 높은 거듭제곱을 하면서 0 쪽으로 짓눌리고, 양 끝값 0과 1은 그대로 남는다. 따라서 $\tan^k\theta$는 구간의 대부분에서 축에 바짝 붙어 있다가 $\theta = \frac{1}{4}\pi$에 아주 가까운 곳에서 1까지 치솟는다. 실제로 u가 작을 때 $\theta = \frac{1}{4}\pi - u$로 쓰면 $\tan\theta \approx 1 - 2u$이므로 $\tan^k\theta \approx (1-2u)^k \approx \mathrm{e}^{-2ku}$이다. 즉 이 뾰족한 부분의 폭은 약 $1/(2k)$이고, 그 아래의 넓이도 약 $1/(2k)$이다.



점화식

$k \geq 0$에 대하여

$$I_k + I_{k+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\tan^{k+1}\theta}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{k+1}.$$

두 개의 초깃값도 필요하다.

$$I_0 = \tfrac{1}{4}\pi, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \Big[-\ln\cos\theta\Big]_0^{\pi/4} = -\ln\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

홀수 거듭제곱

$J_n = I_{2n+1}$이라 하자. 점화식에서 $k = 2n-1$로 놓으면

$$J_n = \frac{1}{2n} - J_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

요구된 공식을 귀납법으로 증명한다. $n = 1$일 때 $J_1 = \frac{1}{2} - J_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = (-1)^1\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$이고, 이는 $n = 1$일 때의 공식이다.

$n - 1 \geq 1$일 때 공식이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2n} - (-1)^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n} \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right), \end{aligned}$$

여기서 $(-1)^n(-1)^n = 1$을 이용하여 $\frac{1}{2n}$을 괄호 안의 $m = n$인 항으로 썼다. 따라서 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 공식이 성립한다.

첫 번째 급수

> **생각해 보기** "그래프에서 작아 보인다"는 것만이 아니라, $J_n \to 0$임을 어떻게 알 수 있는가?

제대로 된 상계가 필요하다. $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\tan\theta \geq 0$이고 $\sec^2\theta \geq 1$이므로

$$0 \leq J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+2}.$$

따라서 $n \to \infty$일 때 $J_n \to 0$이고, 이는 정확히 k가 클 때의 그래프 개형이 암시한 바이다(상계 $1/(2n+2)$도 뾰족한 부분의 넓이 약 $1/(2k)$와 맞아떨어진다). $|J_n|$은 공식에서 괄호 부분의 절댓값이므로

$$\left|\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}\right| = J_n \leq \frac{1}{2n+2} \to 0,$$

이고, 따라서 부분합(partial sum) $\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}$은 $-\frac{1}{2}\ln 2$로 수렴(converge)한다. 양변에 -1을 곱하면

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

두 번째 급수

이제 짝수 거듭제곱에 대해서도 같은 일을 한다. $K_n = I_{2n}$이라 하자. 점화식에서 $k = 2n-2$로 놓으면

$$K_n = \frac{1}{2n-1} - K_{n-1} \qquad (n \geq 1), \qquad K_0 = \tfrac{1}{4}\pi.$$

완전히 같은 귀납법(이번에는 $K_1 = 1 - \frac{1}{4}\pi$에서 시작한다)으로

$$K_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \,\mathrm{d}\theta = (-1)^n\left(\tfrac{1}{4}\pi + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1}\right):$$

을 얻는다. 귀납 단계는 앞에서와 마찬가지로 $K_n = \frac{1}{2n-1} - (-1)^{n-1}(\cdots) = (-1)^n(\cdots) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n-1}$이다. 같은 상계로

$$0 \leq K_n \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta\sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

이므로 $\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1} \to -\frac{1}{4}\pi$이다. 즉

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

검산

- $n = 1$일 때 $\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \, d\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.15343$이고, 이 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열째 자리까지 같은 값이 나온다. 이 방법으로 $n = 1, \ldots, 11$에 대하여 I_{2n+1}과 I_{2n}의 공식을 확인하였다.
- k가 클 때 수치적으로 $I_{100} \approx 0.0049995$, $I_{1000} \approx 0.00049999996$이며, 그래프 개형이 예측한 대로 $1/(2k)$에 매우 가깝다.
- 두 급수의 항을 백만 개 더하면 $0.346573\ldots$과 $0.785398\ldots$을 얻으며, 이를 $\frac{1}{2}\ln 2 = 0.346574$, $\frac{1}{4}\pi = 0.785398$과 비교할 수 있다. 위의 상계가 암시하듯 오차는 대략 다음 항의 크기이다.

흔한 실수

- 상계 없이 "$\tan^{2n+1}\theta \to 0$이므로 적분은 0으로 간다"고 말하는 것. 피적분함수(integrand)는 $\theta = \frac{1}{4}\pi$에서 0으로 가지 **않으므로**, $\sec^2\theta \geq 1$을 이용한 상계와 같은 근거가 필요하다.
- 귀납법에서의 부호 실수. $(-1)^n$을 괄호 밖에 두고, $n = 1$인 경우를 직접 계산한 값과 대조해 보아야 한다.

STEP 너머

첫 번째 급수는 교대 조화급수(alternating harmonic series) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$의 절반이고, 두 번째 급수는 π에 대한 라이프니츠(Leibniz) 급수이다. 두 급수 모두 **조건수렴**(*conditionally convergent*)할 뿐이다. 즉 항의 순서를 바꾸면 합이 달라질 수 있는데, 이는 해석학(analysis) 첫 강의에서 일찍 만나는 놀라운 사실(리만(Riemann)의 재배열 정리)이다. 여기서 쓴 논증, 즉 정확한 오차항을 0으로 조여 가는 방법은 나머지항이 있는 테일러(Taylor) 정리와 같은 아이디어이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 두 주제를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1991, 문제 6

순수수학 • 적분의 상계와 하계

STEP II 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s2-q6

핵심 아이디어

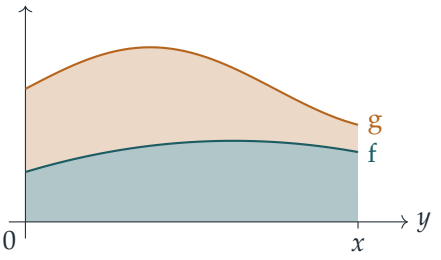
0부터 x까지의 적분(integral)은 넓이이고, 더 작은 음이 아닌 함수는 더 작은 넓이를 둘러싼다. 이 한 가지 사실을 거듭 사용하면 이미 알고 있는 부등식(inequality)에서 새로운 부등식을 얻을 수 있다. $0 \le \cos y \le 1$을 적분하면 $\sin x$에 대한 한계를 얻고, 그것을 적분하면 $\cos x$에 대한 한계를 얻으며, 다시 적분하면 $\sin x$에 대한 더 정밀한 한계를 얻는다. 그런 다음 각 적분의 한계는 피적분함수(integrand)를 정확히 적분할 수 있는 두 함수 사이에 가두어 얻는다.

풀이

적분의 비교

$[0, x]$에서 $\mathrm{f}(y) \ge 0$이므로 f의 그래프는 y축 위 또는 그보다 위쪽에 있다. 따라서 $\int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y$는 그래프와 축 사이의 넓이이고, 이는 음이 아니다. 또 $\mathrm{f}(y) \le \mathrm{g}(y)$이므로 f 아래의 영역은 g 아래의 영역 안에 들어 있고, 따라서 그 넓이는 더 크지 않다.

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y \le \int_0^x \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y.$$



(해석적으로 보면, $g - f \geq 0$이므로 $\int_0^x (g-f)\,dy \geq 0$이고, 적분은 선형(linear)이다.)

$\sin x$와 $\cos x$에 대한 한계

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$라 하자. $0 \leq y \leq x$이면 $0 \leq \cos y \leq 1$이므로, 위의 결과를 $f = \cos$, $g = 1$로 적용하면

$$0 \leq \int_0^x \cos y\,dy \leq \int_0^x 1\,dy, \qquad \text{즉} \qquad 0 \leq \sin x \leq x.$$

이 식은 $[0, \frac{1}{2}\pi]$의 모든 x에 대해 성립하므로, 특히 $0 \leq y \leq x$에 대해 $0 \leq \sin y \leq y$이다. 위의 결과를 $f = \sin$, $g(y) = y$로 다시 적용하면

$$\int_0^x \sin y\,dy \leq \int_0^x y\,dy \quad \Longrightarrow \quad 1 - \cos x \leq \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad \cos x \geq 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

첫 번째 적분

$[0, \frac{1}{10}]$에서($[0, \frac{1}{2}\pi]$ 안에 충분히 들어 있다) 이제 $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1$이므로

$$3 - \tfrac{1}{2}x^2 \leq 2 + \cos x \leq 3.$$

생각해 보기 그냥 제곱하고 역수를 취해도 될까?

그렇다. 여기 나오는 모든 양이 양수이기 때문이다. $3 - \frac{1}{2}x^2 \geq 3 - \frac{1}{200} > 0$이다. 양수에 대해서는 제곱하면 대소 관계가 유지되고, 역수를 취하면 대소 관계가 뒤집힌다. 그런 다음 $x \geq 0$을 곱하면

$$\frac{x}{9} \leq \frac{x}{(2+\cos x)^2} \leq \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2} \qquad (0 \leq x \leq \tfrac{1}{10}).$$

세 함수 모두 음이 아니므로 0부터 $\frac{1}{10}$까지 적분할 수 있다. 왼쪽은

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{9}\,dx = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1800}.$$

오른쪽의 경우, 분자 x는 부호를 제외하면 $3 - \frac{1}{2}x^2$의 도함수(derivative)이고, $\frac{d}{dx}\left(3 - \frac{1}{2}x^2\right)^{-1} = x\left(3 - \frac{1}{2}x^2\right)^{-2}$이다. 따라서

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2}\,dx = \left[\frac{1}{3 - \frac{1}{2}x^2}\right]_0^{1/10} = \frac{200}{599} - \frac{1}{3} = \frac{600 - 599}{1797} = \frac{1}{1797}.$$

그러므로

$$\frac{1}{1800} \leq \int_0^{1/10} \frac{x}{(2+\cos x)^2}\,dx \leq \frac{1}{1797}.$$

$\sin x$에 대한 더 정밀한 한계

$0 \le y \le x \le \frac{1}{2}\pi$이면 $\cos y \ge 1 - \frac{1}{2}y^2$, 즉 $0 \le 1 - \cos y \le \frac{1}{2}y^2$이다(왼쪽 부등식은 $\cos y \le 1$이기 때문이다). 0부터 x까지 적분하면

$$\int_0^x (1 - \cos y)\,\mathrm{d}y \le \int_0^x \tfrac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}y \quad\Longrightarrow\quad x - \sin x \le \tfrac{1}{6}x^3 \quad\Longrightarrow\quad \sin x \ge x - \tfrac{1}{6}x^3.$$

두 번째 적분

$[0, \frac{1}{10}]$에서 $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x$이므로

$$1 - \tfrac{1}{6}x^3 \le 1 - x + \sin x \le 1.$$

? **생각해 보기** 왜 하필 이 조합을 살펴보는 것이 맞을까?

분모의 $-x$는 $\sin x$의 최고차항이 아닌 첫째 항, 즉 주요항을 상쇄하기 위해 있는 것이고, 그 결과 1에 x^3 정도 크기의 항이 더해진 꼴이 남는다. 아래 한계 $1 - \frac{1}{6}x^3 \ge 1 - \frac{1}{6000}$은 양수이므로, 앞에서처럼 제곱하고, 역수를 취하고(대소 관계가 뒤집힌다), $x^2 \ge 0$을 곱하면

$$x^2 \le \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2} \le \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}.$$

적분하면 왼쪽은 $\int_0^{1/10} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{1}{3000}$이다. 오른쪽의 경우 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{1}{6}x^3\right)^{-1} = \frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{1}{6}x^3\right)^{-2}$이므로

$$\int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^3}\right]_0^{1/10} = 2\left(\frac{6000}{5999} - 1\right) = \frac{2}{5999}.$$

그러므로

$$\frac{1}{3000} \le \int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{5999}.$$

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^{1/10} x(2 + \cos x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.00055648$이고, 이는 $1/1800 \approx 0.00055556$과 $1/1797 \approx 0.00055648$ 사이에 있다(위 한계는 매우 정밀해서 약 5×10^{-10} 이내로 일치한다).
- 마찬가지로 $\int_0^{1/10} x^2(1 - x + \sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.000333389$이고, 이는 $1/3000 \approx 0.000333333$과 $2/5999 \approx 0.000333389$ 사이에 있다.
- 세 개의 점별 부등식은 $[0, \frac{1}{2}\pi]$의 무작위로 고른 10^5개의 점에서 모두 성립했고, $x = 0$에서 등호가 성립했다.

흔한 실수

- 부호를 확인하지 않고 역수를 취하는 것. $a \le b$에서 $1/a \ge 1/b$를 얻는 것은 a와 b의 부호가 같을 때뿐이다.
- 비교 결과의 왼쪽 부등식에는 f ≥ 0이 필요하다는 것을 잊는 것. 여기서는 $\sin y \ge 0$과 $1 - \cos y \ge 0$이 이 조건을 보장한다.
- 적분의 위 한계를 구하는 데 $\cos x \le 1$을 사용하는 것. $\cos x \le 1$이면 분모가 9**보다 작아지므로**, 이로부터 얻는 것은 위 한계가 아니라 아래 한계 $1/1800$이다.

STEP 너머

$0 \le \cos y \le 1$을 반복해서 적분하면 번갈아 나타나는 테일러(Taylor) 한계의 사슬 $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \le \cdots$ 전체를 얻게 되며, 이는 sin과 cos의 테일러 급수(Taylor series)가 각각 그 함수로 수렴(converge)함을 증명하는 한 가지 방법이다. 적분의 단조성(monotonicity)과 피적분함수의 비교는 실해석학(real analysis)의 기본 도구로, 나머지항, 오차, 극한의 한계를 구하는 데 쓰인다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 적분과 나머지항이 있는 테일러 정리를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 1991, 문제 7

순수수학 • 함수방정식

> **STEP II 1991, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q7

핵심 아이디어

함수방정식(functional equation)은 **모든** x와 y에 대하여 성립하므로, 한 변수를 고정한 채 다른 변수에 대하여 미분할 수 있다. 그러면 함수방정식은 서로 다른 두 점에서의 g' 값을 잇는 미분방정식(differential equation)으로 바뀐다. 이때 한 변수를 영리하게 고르면 모든 곳에서 g'이 결정되고, 적분하면 풀이가 끝난다. 문제에서처럼 전체에 걸쳐 g와 f는 미분가능(differentiable)하다고 가정한다.

풀이

도함수 사이의 관계

$y > 0$을 고정하고 $g(x) + g(y) = g(z)$를 x에 대하여 미분한다. 이제 $g(y)$는 상수이므로, 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$g'(x) = g'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}.$$

몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x+y+1) - xy}{(x+y+1)^2} = \frac{y^2+y}{(x+y+1)^2},$$

이고, 이것이 첫 번째 꼴이다. 두 번째 꼴을 얻으려면 $z+1$이 깔끔하게 인수분해된다는 점에 주목한다.

$$z+1 = \frac{xy+x+y+1}{x+y+1} = \frac{(x+1)(y+1)}{x+y+1}, \qquad \text{따라서} \qquad z(z+1) = \frac{xy(x+1)(y+1)}{(x+y+1)^2}.$$

이를 $x(x+1)$로 나누면 정확히 $\dfrac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}$이 되므로

$$g'(x) = \frac{y^2+y}{(x+y+1)^2}\,g'(z) = \frac{z(z+1)}{x(x+1)}\,g'(z),$$

이고, 이것이 보이려던 식이다. 이 식을 다음과 같은 대칭적인 꼴로 써 두면 유용하다.

$$x(x+1)\,g'(x) = z(z+1)\,g'(z). \qquad (\dagger)$$

$2g'(1) = (u^2+u)g'(u)$ 이끌어 내기

> **생각해 보기** 우리는 $(0,1)$에 속하는 모든 u에 대한 명제를 원한다. 어느 변수를 어떤 값으로 고정해야 할까?

$(\dagger)$에 $x=1$을 대입하면 좌변은 $2g'(1)$이 되고 $z = \dfrac{y}{y+2}$이다. y가 $(0,\infty)$ 전체를 움직일 때 $\dfrac{y}{y+2} = 1 - \dfrac{2}{y+2}$는 0에서 1을 향해 연속적으로 증가하므로, $0<u<1$인 모든 값 u를 취한다(구체적으로 $y = \frac{2u}{1-u}$). 따라서

$$2g'(1) = (u^2+u)\,g'(u) \qquad \text{모든} 0<u<1.$$

적분하기

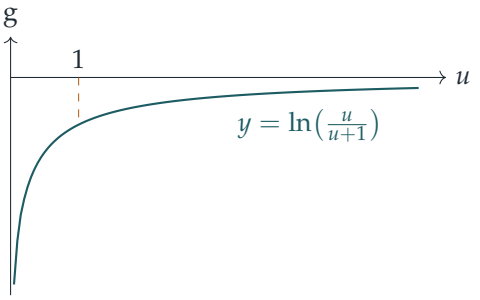
상수 $A = 2g'(1)$로 놓는다. 그러면 $0<u<1$에 대하여 부분분수(partial fractions)를 이용하면

$$g'(u) = \frac{A}{u(u+1)} = A\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right),$$

이고, 이를 적분하면(모든 양이 양수이므로 절댓값 기호는 필요 없다)

$$g(u) = A\big(\ln u - \ln(u+1)\big) + B = A\ln\left(\frac{u}{u+1}\right) + B.$$

사실 이 공식은 $u<1$일 때뿐 아니라 **모든** $u>0$에 대하여 성립한다. x를 고정하면 y가 0에서 ∞로 갈 때 $z = \dfrac{xy}{x+y+1}$은 0에서 x를 향해 증가하므로, $z<1$이 되도록 y를 고를 수 있다. 그러면 $(\dagger)$와 위의 결과로부터 $x(x+1)g'(x) = z(z+1)g'(z) = A$이다. 따라서 같은 적분이 $(0,\infty)$ 전체에서 통하며, $(0,\infty)$는 구간이므로 상수 B는 하나뿐이다.



(그림의 곡선은 $A = 1$, $B = 0$인 경우이다. 이 곡선은 음수이고 증가하며, $u \to \infty$일 때 0으로 다가간다.)

$(*)$ 확인하고 B 구하기

$g(u) = A \ln \frac{u}{u+1} + B$를 대입한다. $(*)$의 좌변은

$$g(x) + g(y) = A \ln \frac{xy}{(x+1)(y+1)} + 2B.$$

우변에 대해서는, 앞에서 구한 $z+1$의 인수분해로부터

$$\frac{z}{z+1} = \frac{xy}{x+y+1} \cdot \frac{x+y+1}{(x+1)(y+1)} = \frac{xy}{(x+1)(y+1)},$$

이므로

$$g(z) = A \ln \frac{xy}{(x+1)(y+1)} + B.$$

두 변이 모든 $x, y > 0$에 대하여 일치할 필요충분조건은 $2B = B$, 즉 $B = 0$이다. 따라서 $g(u) = A \ln \dfrac{u}{u+1}$은 $(*)$를 만족한다.

A를 결정할 수 있는가?

그럴 수 없다. 위의 확인 과정은 $A = 0$(영함수)을 포함하여 **모든** A 값에 대하여 성립한다. 정의 $A = 2g'(1)$도 도움이 되지 않는다. 우리가 구한 해에 대하여 $g'(1) = A\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{A}{2}$이므로 $A = 2g'(1)$은 저절로 참이 되어 새로운 정보를 주지 않는다. 방정식 $(*)$는 g에 대하여 선형(linear)이므로 해의 상수배는 다시 해가 되며, A는 바로 그 배율일 뿐이다.

함수 f

같은 방법이 통한다. $y > 0$을 고정하고 $f(x) + f(y) = f(xy)$를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x) = y\, f'(xy).$$

? **생각해 보기** 여기서 $x = 1$을 대입하는 것에 해당하는 것은 무엇일까?

$x = 1$을 대입하면 모든 $y > 0$에 대하여 $f'(1) = y\,f'(y)$이므로, $C = f'(1)$로 놓으면

$$f'(y) = \frac{C}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) = C\ln y + D \quad (y > 0).$$

이를 다시 대입하면 $f(x) + f(y) = C\ln(xy) + 2D$이고 $f(xy) = C\ln(xy) + D$이므로 $D = 0$이다. (같은 이야기로, 방정식에 $x = y = 1$을 대입하면 $2f(1) = f(1)$이므로 $f(1) = 0$이다.) 따라서 보이려던 대로 $f(x) = C\ln x$이고, 이번에도 C는 임의의 값이다.

검산

- $x = 1, y = 2$로 놓으면 $z = \frac{1}{2}$이고, 두 도함수 인수는 $\frac{6}{16}$과 $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}$으로 일치한다.
- $A = 1$일 때: $g(1) + g(2) = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{1}{3}$이고, $g(\frac{1}{2}) = \ln\frac{1/2}{3/2} = \ln\frac{1}{3}$이다. ✓
- 컴퓨터로 무작위로 고른 1000개의 점에서 유한차분(finite differences)을 이용해 도함수 항등식을 확인하였고, 여러 A 값에 대하여 $g(x) + g(y) - g(z)$가 정확히 B와 같음(따라서 $B = 0$일 때에만 0이 됨)을 확인하였다.

흔한 실수

- x에 대하여 미분할 때 $g(y)$가 상수라는 점을 잊거나, 연쇄법칙의 인수 $\partial z/\partial x$를 빠뜨린다.
- $x = 1$을 대입하고서 z가 정말로 $(0, 1)$ 전체를 덮는지 확인하지 않는다. 바로 이 확인이 하나의 등식을 모든 u에 대한 명제로 바꾸어 준다.
- "적분상수(constant of integration)는 중요하지 않으니까" B가 0이어야 한다고 가정한다. $B = 0$을 강제하는 것은 방정식 $(*)$이며, 이는 반드시 보여야 한다.

STEP 너머

두 번째 방정식은 코시(Cauchy)의 로그 함수방정식이다. $x = e^s$로 놓으면 이 방정식은 $h(s + t) = h(s) + h(t)$로 바뀐다. 여기서는 미분가능성을 가정했지만, 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 한 점에서의 연속성(continuity)만으로도 $h(s) = cs$가 강제된다는 것을 배운다. 반면 아무런 정칙성 조건이 없으면 (해멜 기저(Hamel basis)를 이용해 만든) 기괴한 비선형 해가 존재한다. 첫 번째 방정식도 모습만 바꾼 같은 방정식이다. $w = \ln\frac{u}{u+1}$로 치환하면 $(*)$는 덧셈꼴 방정식으로 바뀐다. 이런 종류의 연속성 논증에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보면 좋다.

풀이

STEP II 1991, 문제 8

순수수학 • 비선형 1계 상미분방정식

STEP II 1991, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s2-q8

핵심 아이디어

두 미분방정식(differential equation)은 모두 $\frac{dy}{dx}$에 대한 이차식(quadratic)이므로, 먼저 도함수(derivative)를 대수적으로 구한 뒤에야 적분하면 된다. 각 이차방정식은 근이 두 개이므로 후보가 되는 일계(first-order) 방정식이 두 개 나오고, $x = 0$에서의 조건이 어느 가지(branch)가 허용되는지를 결정한다. 쌍곡선 함수 항등식(hyperbolic identities), 특히 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$과 반각 공식(half-angle formulae)을 쓰면 근이 깔끔하게 정리된다.

풀이

이차방정식

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$u = \frac{-2\sinh x \pm \sqrt{4\sinh^2 x + 4}}{2} = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

이다. 여기서 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$과 $\cosh x > 0$을 이용하였다. $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$이고 $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^{x}$이므로 두 근은

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{또는} \qquad u = -\mathrm{e}^{x}.$$

이다. (검산: 두 근의 곱은 -1이고 합은 $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} = -2\sinh x$이므로, 마땅히 그래야 하는 값과 같다.)

첫 번째 미분방정식

$u = \frac{dy}{dx}$로 두면 이 방정식은 정확히 위의 이차방정식이므로, 각 x에서 $y' = e^{-x}$이거나 $y' = -e^{x}$이다.

> **생각해 보기** x의 어떤 값에서는 y'이 한 근을 따르고, 다른 곳에서는 다른 근을 따를 수 있을까?

그럴 수 없다. 첫 번째 근은 항상 양수이고 두 번째 근은 항상 음수이므로 두 근은 결코 만나지 않는다. 도함수는 중간값 성질(intermediate value property)을 가지므로(다르부 정리(Darboux's theorem); y'이 연속이라고 가정한다면 보통의 중간값 정리(intermediate value theorem)), y'은 0을 거치지 않고는 양수 값에서 음수 값으로 건너뛸 수 없는데, 두 근 모두 그 값을 갖지 않는다. 따라서 y'은 처음부터 끝까지 한 근 위에 머문다.

$x = 0$에서 두 근은 1과 -1이고, $y' > 0$이어야 하므로 $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$이다. 적분하면 $y = -e^{-x} + c$이고, $x = 0$에서 $y = 0$이므로 $c = 1$이다.

$$\boxed{y = 1 - e^{-x}}$$

두 번째 미분방정식

$p = \frac{dy}{dx}$로 쓰면 $p^2 \sinh x + 2p - \sinh x = 0$이다.

$x = 0$에서, $\sinh 0 = 0$이므로 방정식은 $2p = 0$이 되고, 따라서 반드시 $y'(0) = 0$이어야 한다.

$x \neq 0$일 때, $\sinh x \neq 0$이므로 근의 공식에 의해

$$p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\sinh^2 x}}{2\sinh x} = \frac{-1 \pm \cosh x}{\sinh x}.$$

이다. $\cosh x = 1 + 2\sinh^2 \frac{x}{2} = 2\cosh^2 \frac{x}{2} - 1$과 $\sinh x = 2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}$를 이용하면 두 근은 다음과 같이 간단해진다.

$$\frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}} = \tanh \tfrac{x}{2},$$
$$\frac{-1 - \cosh x}{\sinh x} = -\frac{2\cosh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}} = -\coth \tfrac{x}{2}.$$

가지 고르기. 두 번째 근 $-\coth \frac{x}{2}$는 $x \to 0$일 때 유계가 아니며, 이를 적분하면 $y = -2\ln\left|\sinh \frac{x}{2}\right| + c$가 되는데, 이는 $x \to 0$일 때 어느 쪽에서 다가가든 $+\infty$로 발산한다. 따라서 원점의 어느 쪽에서도 이 가지로는 $x = 0$에서 연속이면서 $y(0) = 0$인 해를 얻을 수 없다. 그러므로 $x = 0$ 근처에서는 (각각의 쪽에서) 첫 번째 근을 택해야 하며, $\tanh 0 = 0$이므로 이는 $y'(0) = 0$과도 일치한다. 두 근은 결코 일치하지 않으므로(하나는 x와 같은 부호, 다른

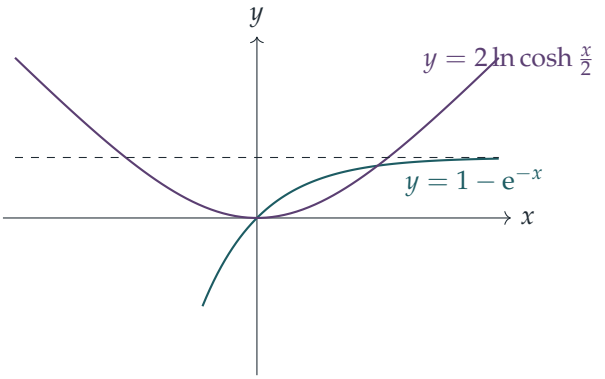
하나는 반대 부호를 가지며, $x \neq 0$에서 어느 것도 0이 되지 않는다), 앞에서와 같은 중간값 논증에 의해 해는 모든 x에 대해 이 가지 위에 머문다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh\tfrac{x}{2} \quad \text{모든} x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}$이므로 $\tanh\frac{x}{2} = 2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}$이고, 이는 $2f'/f$ 꼴이다. 따라서 적분하면 $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2} + c$이다($\cosh > 0$이므로 절댓값은 필요 없다). 조건 $y(0) = 0$에서 $c = 0$이므로

$$\boxed{y = 2\ln\cosh\tfrac{x}{2} = \ln\left(\frac{1+\cosh x}{2}\right)}$$

이다. 두 번째 형태는 $2\cosh^2\frac{x}{2} = 1 + \cosh x$에서 나온다.



검산

- $y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$인 경우: $y'^2 + 2y'\sinh x = \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = 1$이므로 요구 조건을 만족하고, $y'(0) = 1 > 0$이다.
- $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2}$인 경우, $t = \tanh\frac{x}{2}$로 두면 $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$이므로 $\sinh x\,(t^2 - 1) + 2t = -2t + 2t = 0$이다. 방정식이 $x \mapsto -x, y \mapsto y$에 대해 변하지 않으므로, 마땅히 그래야 하듯 이 해는 우함수(even function)이다.
- 수치적으로, $x = 1$에서 두 해의 값은 $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.6321$과 $2\ln\cosh\frac{1}{2} \approx 0.2402$이다. 무작위로 고른 여러 점에서 유한차분(finite-difference)으로 구한 도함수를 대입하면 두 방정식이 모두 10^{-6} 이내로 성립한다.

흔한 실수

- 두 번째 방정식을 $\sinh x$로 나누면서, 이것이 $x = 0$에서 0이 된다는 사실을 놓치는 것. 그 곳이 바로 초기 조건이 주어진 곳이다. 원래 방정식은 $y'(0) = 0$을 강제한다.

- 두 번째 부분에서 두 가지를 모두 남겨 두는 것. $-\coth\frac{x}{2}$ 가지는 그 적분이 원점에서 발산하므로 $y(0)=0$을 만족할 수 없다.

STEP 너머

$F(x,y,y')=0$과 같이 y'에 대해 선형이 아닌 방정식은 한 점을 지나는 해가 여러 개일 수도 있고, 어느 한 가지로도 기술되지 않는 "특이해(singular solution)"를 가질 수도 있다. 그래서 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)(피카르–린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리)는 이미 $y'=f(x,y)$ 꼴로 풀린 방정식에 대해 진술된다. 여기서는 두 근이 서로 떨어져 있었으므로 각 가지가 잘 행동했다. 판별식(discriminant)이 0이 될 수 있으면 가지들을 이어 붙일 수 있고 유일성이 깨진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 존재성, 유일성, 그리고 이러한 비선형 일계 방정식을 다룬다.

풀이

STEP II 1991, 문제 9

순수수학 • 행렬군

> **STEP II 1991, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q9

핵심 아이디어

모든 것은 한 가지 사실에 기초한다. 5를 법으로 하는 정수는 체(field)를 이룬다. 즉 0이 아닌 모든 나머지(residue)는 곱셈에 대한 역원을 가지며, 0이 아닌 나머지들의 곱은 결코 0이 되지 않는다. 바로 이 성질 덕분에 대각 성분이 제대로 행동하므로, 닫힘성과 역원은 거의 공짜로 얻어진다. 마지막 부분에서는 $M^2 = I$를 풀어 위수(order)가 1 또는 2인 원소를 명시적으로 구한 다음, 그중 두 원소를 곱했을 때 여전히 그 집합 안에 머무르는지 확인한다.

풀이

이하 모든 계산은 5를 법으로 하며, 편의상 4를 -1로 쓰기도 한다. 일반적인 원소를 다음과 같이 쓴다.

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad a,c \in \{1,2,3,4\},\ b \in \{0,1,2,3,4\}.$$

G는 군이다

닫힘성(closure). 두 원소를 곱하면 다음을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}.$$

이것은 성분이 5를 법으로 하는 상삼각행렬(upper triangular matrix)이다. 대각 성분 ad와 cf는 0이 아니다. 5가 소수(prime)이므로 $5 \mid ad$이면 $5 \mid a$ 또는 $5 \mid d$인데, 어느 쪽도 성립하지 않기 때문이다. 따라서 곱은 G에 속한다.

결합법칙(associativity)은 행렬 곱셈이 결합적이므로 주어진 것이다.

항등원(identity). $I = M(1,0,1)$은 G에 속하고, 모든 M에 대하여 $IM = MI = M$이다.

역원(inverse). 5를 법으로 하는 0이 아닌 모든 나머지는 역원을 가진다($1^{-1} = 1, 2^{-1} = 3, 3^{-1} = 2, 4^{-1} = 4$). 따라서 $M(a,b,c) \in G$가 주어지면 다음 행렬을 만들 수 있다.

$$N = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bc^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix},$$

$a^{-1}, c^{-1} \neq 0$이므로 이 행렬은 G에 속한다. 곱셈 공식을 이용하면

$$MN = \begin{pmatrix} aa^{-1} & -aa^{-1}bc^{-1} + bc^{-1} \\ 0 & cc^{-1} \end{pmatrix} = I, \qquad NM = \begin{pmatrix} a^{-1}a & a^{-1}b - a^{-1}bc^{-1}c \\ 0 & c^{-1}c \end{pmatrix} = I.$$

따라서 모든 원소는 G 안에 역원을 가지며, G는 군(group)이다.

G의 위수

a를 고르는 방법은 4가지, b는 5가지, c는 4가지이고, 서로 다른 선택은 서로 다른 행렬을 준다. 따라서

$$|G| = 4 \times 5 \times 4 = 80.$$

G는 가환인가?

아니다. $A = M(1,1,1), B = M(2,0,1)$로 두면

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

이므로 $AB \neq BA$이고, G는 가환(commutative)이 아니다.

위수가 1 또는 2인 원소

원소 M의 위수가 1 또는 2일 필요충분조건은 $M^2 = I$이다. 곱셈 공식에 의해

$$M(a,b,c)^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix},$$

이므로 $a^2 = 1, c^2 = 1, b(a+c) = 0$이어야 한다.

5를 법으로 $1, 2, 3, 4$의 제곱은 $1, 4, 4, 1$이므로, $a^2 = 1$이면 반드시 $a = \pm 1$이고, 마찬가지로 $c = \pm 1$이다.

- $a = c$이면 $a + c = \pm 2 \neq 0$이다. $\mathbb{Z}_5$에는 영인자(zero divisor)가 없으므로 $b(a+c) = 0$이면 $b = 0$이다. 이로부터 I와 $-I$를 얻는다.

- $c = -a$이면 $a + c = 0$이므로 b는 아무 값이어도 된다. 이로부터 $b = 0, 1, \ldots, 4$에 대한 10개의 행렬 $M(1, b, -1)$과 $M(-1, b, 1)$을 얻는다.

따라서 위수가 1 또는 2인 원소들의 집합 H는 정확히 12개의 원소를 가진다.

? 생각해 보기 자기 자신이 역원인 원소들의 집합은 자동으로 닫혀 있을까?

아니다. 이 집합은 I를 포함하고 각 원소가 자기 자신의 역원이므로, 항등원과 역원 공리는 자동으로 성립한다. 실패할 수 있는 것은 닫힘성뿐이며, 비가환군에서는 대개 실패한다. $X^2 = Y^2 = I$이면 $(XY)^2 = XYXY$인데, X와 Y가 교환되지 않는 한 이것이 I로 정리될 필요는 없다.

여기서도 닫힘성이 실패한다. H의 두 원소 $X = M(1, 1, -1)$과 $Y = M(1, 0, -1)$을 택하면

$$XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

이 행렬은 $a = c = 1$이지만 $b = -1 \neq 0$이므로, 앞의 분류에 의해 H에 속하지 않는다. (실제로 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로 이 행렬의 위수는 5이다.) 따라서 H는 닫혀 있지 않으며, G의 부분군(subgroup)이 아니다.

라그랑주(Lagrange) 정리를 알고 있다면 더 빠른 논증이 있다. 부분군의 위수는 군의 위수를 나누어야 하는데, $12 \nmid 80$이다.

검산

80개의 행렬 전체를 컴퓨터로 간단히 나열해 보면 닫힘성, 역원 공식, 그리고 위의 쌍에 대해 $AB \neq BA$임이 확인된다. 모든 원소를 제곱해 보면 $M^2 = I$의 해는 예측한 대로 정확히 12개이고, $XY = M(1, 4, 1)$의 위수는 5이다. 손으로는 $M(-1, 3, 1)^2 = I$임을 확인해 보자. 비대각 성분은 $3(-1 + 1) = 0$이다.

흔한 실수

- 역원이 G에 속함을 보이는 것을 잊는 경우. 역원의 대각 성분 a^{-1}, c^{-1}이 0이 아니어야 한다.
- $M^2 = I$이면 M이 반드시 대각행렬이라고 가정하여, $b \neq 0$인 원소 $M(1, b, -1)$과 $M(-1, b, 1)$을 빠뜨리는 경우.
- H에 대해 항등원과 역원 공리만 확인하는 경우. 실패하는 공리는 닫힘성이다.

STEP 너머

G는 유한체(finite field) $\mathbb{F}_5$ 위의 가역 2×2 상삼각행렬들의 군으로, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$의 **보렐 부분군**(*Borel subgroup*)이다. $a = c = 1$인 행렬들은 위수가 5인 정규부분군(normal subgroup)을 이루며, G는 이 부분군과 대각행렬들로부터 반직접곱(semidirect product)으로 만들어진다. 유한체 위의 행렬군은 군론 입문 강의에서 풍부한 예의 원천이 된다. 더 알고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

풀이

STEP II 1991, 문제 10

순수수학 • 공간에서의 직선과 평면

> **STEP II 1991, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q10

핵심 아이디어

데이터베이스 태그와는 달리, 이 문제는 3차원 공간의 직선(line)과 평면(plane)에 관한 문제이다. 그림자의 끝은 막대의 꼭대기를 스치고 지나가는 햇빛 광선이 지면과 만나는 점이다. 따라서 광선을 태양과 막대 꼭대기를 지나는 직선으로 나타내고, 지면을 막대의 밑동을 지나면서 막대에 수직인 평면으로 나타낸 다음, 둘의 교점을 구한다. 모든 위치를 막대 방향의 단위벡터(unit vector)로 나타내기만 하면 나머지는 모두 쉽다.

풀이

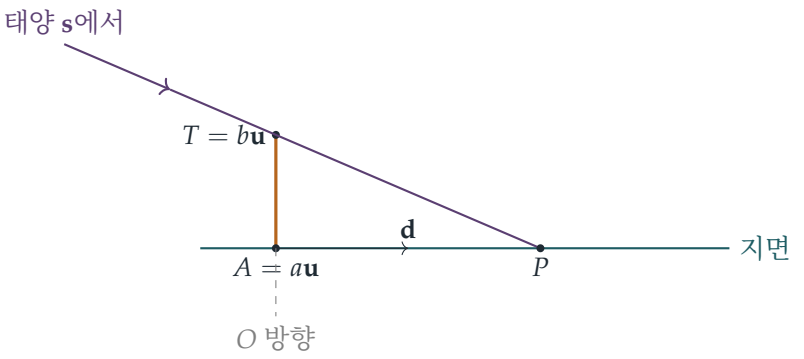
O를 지구의 중심이라 하고,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s} = R\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

로 놓는다. 그러면 $\mathbf{u}$는 막대 방향의 단위벡터이고, 밑동은 $A = a\mathbf{u}$, 꼭대기는 $T = b\mathbf{u}$이며, 태양은 $\mathbf{s}$에 있다. 필요한 내적(dot product)은 단 하나로,

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = R\sin\theta\cos\phi.$$

이다. 간단히 $c = R\cos\phi\sin\theta$라 쓴다.



꼭대기를 지나는 광선

그림자의 끝 P에 닿는 빛은 막 막대의 꼭대기를 지나온 빛이다. 따라서 P는 $\mathbf{s}$와 $b\mathbf{u}$를 지나는 직선 위에 있다. 즉 어떤 실수 t에 대하여

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + t\,(b\mathbf{u} - \mathbf{s}) = (1-t)\,\mathbf{s} + tb\,\mathbf{u}$$

이다.

지면

지면은 수평, 즉 막대에 수직이고 밑동 $a\mathbf{u}$를 지난다. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$이므로 지면은 평면 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$이다.

교점 구하기

직선의 식을 평면의 식에 대입하고 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$과 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = c$를 이용하면

$$(1-t)c + tb = a \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{c-a}{c-b}.$$

이다. 태양이 막대를 비추고 있으므로 $c-b$로 나눌 수 있다. 꼭대기에서 태양이 지평선 위에 있다는 것은 태양이 그 점의 접평면(tangent plane) 바깥쪽에 있다는 것, 즉 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} > b$와 같으므로 $c > b$이다.

> ? **생각해 보기** 이 P가 정말로 막대 너머의 지면 위에 있고, 태양 뒤쪽 어딘가에 있는 것이 아닌가?

$c > b > a$이므로 $c-a > c-b > 0$이고, 따라서 $t > 1$이다. $t = 0$인 점은 태양이고 $t = 1$인 점은 막대의 꼭대기이므로, $t > 1$은 꼭대기를 지나 태양에서 멀어지는 쪽에 있다. 당연히 그래야 한다.

t의 값으로부터

$$1-t=\frac{(c-b)-(c-a)}{c-b}=\frac{a-b}{c-b}=-\frac{h}{c-b},$$
$$tb-a=\frac{b(c-a)-a(c-b)}{c-b}=\frac{c(b-a)}{c-b}=\frac{ch}{c-b}.$$

이다. 따라서 밑동에서 그림자 끝까지의 변위(displacement)는

$$\begin{aligned}\mathbf{d}=\mathbf{p}-a\mathbf{u}&=(1-t)\,\mathbf{s}+(tb-a)\,\mathbf{u}\\&=\frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u}-\mathbf{s})\\&=\frac{Rh}{c-b}\left[\cos\phi\sin\theta\begin{pmatrix}0\\\cos\phi\\\sin\phi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}\right]\\&=\frac{Rh}{c-b}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-(1-\cos^2\phi)\sin\theta\\\cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

이다. $1-\cos^2\phi=\sin^2\phi$이고 $c-b=R\cos\phi\sin\theta-b$이므로, 이것은

$$\mathbf{d}=Rh\,(R\cos\phi\sin\theta-b)^{-1}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-\sin^2\phi\sin\theta\\\cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

가운데 줄의 $\mathbf{d}=\frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u}-\mathbf{s})$는 눈여겨볼 만하다. 벡터 $c\,\mathbf{u}$는 $\mathbf{s}$의 막대 방향 성분(component)이므로, $c\,\mathbf{u}-\mathbf{s}$는 태양의 위치벡터의 수평 부분에 마이너스를 붙인 것이다. 경험으로 알듯이, 그림자는 태양의 수평 방향과 정반대 쪽을 향한다.

검산

- $\mathbf{d}\cdot\mathbf{u}=\frac{Rh}{c-b}\left(-\sin^2\phi\sin\theta\cos\phi+\cos\phi\sin^2\phi\sin\theta\right)=0$이므로 그림자는 지면 위에 놓인다.
- $\phi=0$으로 놓으면 막대는 y축 방향을 향한다. 이때 $\mathbf{d}=\frac{Rh}{R\sin\theta-b}(-\cos\theta,0,0)$이다. $\theta=\frac{\pi}{2}$이면 태양이 바로 머리 위에 있고 그림자는 사라진다. R가 매우 크면 그림자의 길이는 $h\cot\theta$에 가까워진다. 이것은 고도 θ에 있는 태양에 대한, 평평한 지구에서의 익숙한 답이다.
- 수치적으로, 태양이 지평선 위에 있도록 R,a,h,θ,ϕ를 무작위로 수천 번 골라 광선과 지면 평면의 교점을 직접 구하여 그림자 끝의 위치를 찾았다. 결과는 언제나 공식과 일치했으며, 가장 큰 상대오차(relative error)는 약 10^{-13}이었다.

흔한 실수

- 지면을 평면 $y = a\cos\phi$나 다른 좌표평면으로 잡는 것. "수평"이란 $\mathbf{u}$에 수직이라는 뜻이며, 그 평면은 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$이다.
- 처음부터 모든 것을 성분으로 전개하는 것. 마지막 줄까지 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{s}$를 벡터로 유지하면 계산이 훨씬 줄어든다.

STEP 너머

여기서 햇빛은 한 점, 곧 태양을 지나는 직선들의 모임이므로, 그림자는 막대를 지면 평면에 **중심사영**(*central projection*)한 것이다. 태양이 아주 멀리 있으면 광선들이 거의 평행해지고, 사영은 평행사영(parallel projection)이 된다. 이것이 선형대수학(linear algebra)이 연구하는 종류의 사상이며, 벡터 $c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}$는 $\mathbf{s}$를 막대 위로 사영(projection)한 것에서 $\mathbf{s}$ 자신을 뺀 것이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 직선과 평면 위로의 사영을 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 1991, 문제 11

역학 • 발사점으로부터 포물체까지의 거리

> **STEP II 1991, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q11

핵심 아이디어

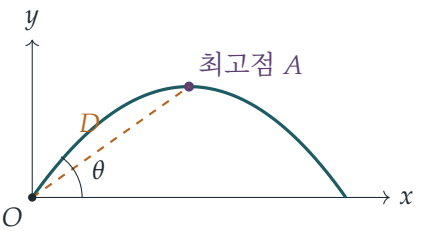
포탄과 포 사이 거리의 제곱을 다룬다. 이렇게 하면 제곱근을 피할 수 있고, 두 부분 모두 다항식 문제가 된다. 첫 번째 부분에서는 최고점까지 거리의 제곱이 $\sin^2\theta$에 대한 이차식이므로, 완전제곱식(completing the square)으로 고치거나 미분하여 가장 좋은 각을 찾는다. 두 번째 부분에서는 거리의 제곱이 감소할 때 정확히 포탄이 가까워지므로, 비행 전체에 걸쳐 그 시간 도함수(derivative)의 부호를 살펴본다.

풀이

모형

포탄을 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(particle)으로 보고, 원점 O(포수들이 서 있는 곳)에서 속력 u, 발사각(elevation) θ로 발사한다고 하자. 여기서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다. x축은 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. 시각 t에서

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



발사각

최고점에 도달하는 것은 $\dot{y} = u\sin\theta - gt = 0$일 때, 곧 $t = u\sin\theta/g$일 때이다. 이때

$$x_A = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \qquad y_A = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

거리 OA를 D라 하고 $s = \sin^2\theta$로 놓으면 $\cos^2\theta = 1 - s$이다. 그러면

$$\begin{aligned} D^2 = x_A^2 + y_A^2 &= \frac{u^4}{g^2}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^4\theta\right) \\ &= \frac{u^4}{g^2}\left(s(1-s) + \tfrac{1}{4}s^2\right) = \frac{u^4}{g^2}\left(s - \tfrac{3}{4}s^2\right). \end{aligned}$$

피해는 거리가 멀수록 줄어들므로 포수들은 D를 가능한 한 크게 하려 하고, 이는 D^2를 가능한 한 크게 하는 것과 같다. 완전제곱식으로 고치면

$$s - \tfrac{3}{4}s^2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\left(s - \tfrac{2}{3}\right)^2,$$

이고, 이 값은 정확히 $s = \frac{2}{3}$일 때 최댓값 $\frac{1}{3}$을 가진다. $s = \sin^2\theta$는 $(0,1)$의 모든 값을 가지므로 이 값은 가능하다. 따라서 $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$, $\cos^2\theta = \frac{1}{3}$이고,

$$\boxed{\tan\theta = \sqrt{2}, \qquad \theta = \arctan\sqrt{2} \approx 54.7^\circ}$$

이며, 이때 최고점과 포 사이의 거리는 $D = \dfrac{u^2}{\sqrt{3}\,g}$이다.

포탄은 내려오는 동안 더 가까워지는가?

$r^2 = x^2 + y^2$을 시각 t에서 포까지 거리의 제곱이라 하자. 포탄은 r^2이 감소할 때 정확히 가까워지므로, 다음 식의 부호를 알아야 한다.

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = x\dot{x} + y\dot{y}.$$

생각해 보기 그냥 최고점에서의 거리와 그 뒤 몇몇 점에서의 거리를 비교하면 안 되는 이유는 무엇일까?

몇 개의 점만으로는 그 사이에서 거리가 잠깐 줄어드는 경우를 배제할 수 없다. 도함수는 비행의 모든 순간에 대한 정보를 한꺼번에 알려 준다. $\dot{x} = u\cos\theta$, $\dot{y} = u\sin\theta - gt$이므로

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} &= u^2 t\cos^2\theta + \left(ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(u\sin\theta - gt) \\ &= u^2 t - \tfrac{3}{2}ugt^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}g^2t^3 \\ &= \tfrac{1}{2}t\left[(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2\right], \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하였다. $t > 0$일 때 부호는 괄호 안의 식, 곧 gt에 대한 이차식의 부호와 같다. 완전제곱식으로 고치면

$$(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2 = \left(gt - \tfrac{3}{2}u\sin\theta\right)^2 + u^2\left(2 - \tfrac{9}{4}\sin^2\theta\right).$$

선택한 각에서는 $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$이므로 상수항은 $u^2\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}u^2 > 0$이다. 따라서 괄호 안의 식은 모든 t에 대하여 항상 양수이고, r^2은 비행 내내 순증가(strictly increasing)한다.

따라서 답은 **아니다**: 포탄은 내려오는 내내 포수들로부터 꾸준히 멀어지며, 하강 경로에서 가장 가까운 점은 최고점 자체이다. 이로써 최고 높이에서의 폭발만 고려한 포수들의 지름길이 정당했음을 알 수 있다. 이 각에서는 최고점이 실제로 하강 경로에서 가장 가까운 점이며, 그 거리는 $u^2/(\sqrt{3}\,g)$이다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때 최고점은 $(u^2/2g,\ u^2/4g)$이므로 $D^2 = \frac{5}{16}u^4/g^2$이다. 이는 우리가 구한 최댓값 $\frac{1}{3}u^4/g^2$보다 조금 작으며, 마땅히 그래야 한다.
- 일반적인 계산에 따르면 포탄이 처음으로 가까워지는 것은 $\frac{9}{4}\sin^2\theta \geq 2$, 곧 $\sin\theta \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때뿐이며, 이 각은 약 $70.5°$로 $54.7°$보다 넉넉히 크다. ($\theta \to \frac{\pi}{2}$인 극한도 이치에 맞는다. 똑바로 위로 쏜 포탄은 포를 향해 똑바로 다시 떨어진다.)
- 수치적으로 $u = g = 1$로 두고 θ에 대해 탐색하면 최고점까지의 최대 거리는 $\theta \approx 54.736°$에서 $0.57735 \approx 1/\sqrt{3}$이고, 그 각에서 궤적을 따라 조금씩 나아가 보면 O로부터의 거리가 한 번도 감소하지 않는다. $70.5° \pm 0.6°$에서는 단조에서 단조가 아닌 상태로 바뀐다.

흔한 실수

- 최고점과 포 사이의 직선거리 대신 최고점의 수평 거리나 높이를 최대화하는 것.
- 포탄이 수평 방향으로 계속 멀어지므로 최고점 이후 포로부터의 거리가 당연히 증가한다고 가정하는 것. 포탄은 동시에 떨어지고 있으며, 충분히 가파르게 쏘면 실제로 다시 가까워진다.

STEP 너머

r 대신 r^2을 미분하여 $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$의 부호를 읽어 내는 요령은 움직이는 점이 다가오는지 멀어지는지를 판단하는 표준적인 방법이며, 벡터 역학과 궤도 연구 전반에 걸쳐 등장한다. 문턱각 $\arcsin(2\sqrt{2}/3)$은 고전적인 결과이다. 이보다 작은 각에서는 포물체(projectile)와 발사 지

점 사이의 거리가 항상 증가한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 논증을 자연스럽게 만들어 주는 운동에 대한 벡터적 접근을 전개한다.

풀이

STEP II 1991, 문제 12

역학 • 강제 탄성 진동

> **STEP II 1991, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.1 절 **공명**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/resonance.html

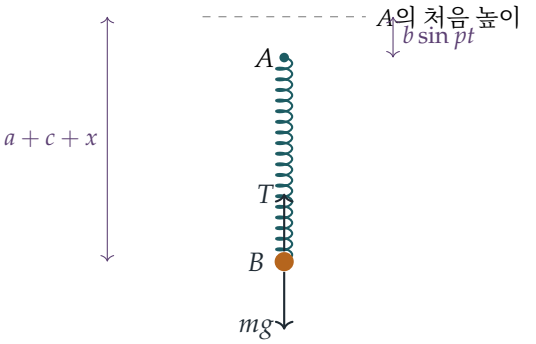
핵심 아이디어

장력은 오직 **늘어난 길이**(extension)에만 의존한다. 늘어난 길이는 입자의 위치에서 움직이는 끝점의 위치를 빼고, 다시 자연 길이(natural length)를 뺀 값이다. 이것을 x와 $b\sin pt$로 나타내고, 처음 평형(equilibrium) 상태를 이용해 탄성 계수(modulus of elasticity)를 c가 들어간 식으로 바꾸면 운동 방정식이 바로 나온다. 그 결과는 강제 단순 조화 진동자(forced simple harmonic oscillator)이다. 여함수(complementary function)에 특수해(particular solution)를 더해서 풀고, "팽팽하다(taut)"는 것이 "늘어난 길이가 결코 음수가 되지 않는다"는 뜻임을 기억하자.

풀이

운동 방정식

입자를 질량 m인 점으로, 줄을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 탄성 계수 λ의 가벼운 탄성 줄로 모형화한다. 모든 위치는 A의 처음 위치에서부터 아래쪽으로 잰다.



처음 평형 상태에서 늘어난 길이는 c이고 장력이 무게와 균형을 이룬다.

$$\frac{\lambda c}{a} = mg, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2.$$

시각 t에서 입자는 깊이 $a + c + x$에 있고 끝점 A는 깊이 $b\sin pt$에 있다. 줄이 팽팽한 동안 줄의 길이는 $a + c + x - b\sin pt$이므로 늘어난 길이는

$$e = c + x - b\sin pt,$$

이고 장력은 $T = \lambda e/a$이다. 입자에 대해 아래 방향으로 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= mg - \frac{\lambda}{a}(c + x - b\sin pt) \\ &= mg - \frac{\lambda c}{a} - \frac{\lambda}{a}(x - b\sin pt) \\ &= -\frac{\lambda}{a}(x - b\sin pt), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\lambda c/a = mg$를 이용했다. 양변을 m으로 나누고 $\lambda/(ma) = n^2$을 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -n^2(x - b\sin pt),$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. 이 식은 $e \geq 0$일 때에만 성립한다. 줄이 느슨해지면 장력은 $\lambda e/a$가 아니라 0이 되기 때문이다.

$x(t)$ 구하기

방정식을 $\ddot{x} + n^2x = n^2b\sin pt$로 다시 쓴다. 여함수는 $C\cos nt + D\sin nt$이다. 특수해로 $x = K\sin pt$를 시도하면

$$-p^2K + n^2K = n^2b \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{n^2b}{n^2 - p^2},$$

이다. $p < n$이므로 $n^2 - p^2 \neq 0$이어서 이것은 타당하다. 따라서

$$x = \frac{n^2b}{n^2 - p^2}\sin pt + C\cos nt + D\sin nt.$$

$t = 0$에서 입자는 평형 위치에 정지해 있으므로 $x(0) = 0$이고 $\dot{x}(0) = 0$이다. 첫 번째 조건에서 $C = 0$을 얻는다. 두 번째 조건에서

$$\frac{n^2bp}{n^2 - p^2} + nD = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{nbp}{n^2 - p^2}.$$

을 얻는다. 그러므로

$$x(t) = \frac{bn}{n^2 - p^2}\,(n \sin pt - p \sin nt),$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

줄이 팽팽하게 유지되는 조건

생각해 보기 양수로 유지되어야 하는 것은 정확히 무엇인가? x인가, 장력인가, 아니면 다른 무엇인가?

그것은 늘어난 길이 $e = c + x - b \sin pt$이다. $x(t)$에 대한 식은 $e \geq 0$인 동안에만 운동을 나타내므로, 줄이 내내 팽팽하게 유지될 필요충분조건은 모든 $t \geq 0$에 대해 이 부등식이 성립하는 것이다. x를 대입하면

$$\begin{aligned} x - b \sin pt &= b \sin pt \left(\frac{n^2}{n^2 - p^2} - 1 \right) - \frac{bnp}{n^2 - p^2} \sin nt \\ &= \frac{bp}{n^2 - p^2}\,(p \sin pt - n \sin nt). \end{aligned}$$

따라서 필요충분조건은

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}\,(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \quad \text{모든} t \geq 0,$$

이고, $n^2 - p^2 > 0$이므로 이는 다음과 동치이다.

$$bp\,(n \sin nt - p \sin pt) \leq c\,(n^2 - p^2) \quad \text{모든} t \geq 0.$$

(e가 고립된 순간에만 0에 닿는다면 장력은 그 순간 0이 되지만, 운동 방정식은 여전히 성립하고 줄이 실제로 느슨해지지는 않는다. 그래서 부등식이 등호를 포함한다.)

이제 $pb < (n - p)c$라고 가정하자. 모든 t에 대해 $\sin nt \leq 1$, $-\sin pt \leq 1$이고 $n, p > 0$이므로

$$n \sin nt - p \sin pt \leq n + p.$$

이다. $b > 0$(진폭)으로 잡으면 $bp > 0$이므로

$$bp\,(n \sin nt - p \sin pt) \leq bp\,(n + p) < (n - p)c\,(n + p) = c\,(n^2 - p^2).$$

이다. 조건이 성립하고, 사실은 등호 없는 부등식으로 성립하므로 줄은 내내 팽팽하게 유지된다. (b가 음수일 수도 있다면, $|n \sin nt - p \sin pt| \leq n + p$이므로 b 대신 $|b|$를 써서 같은 논증이 성립한다.)

검산

- $t = 0$을 대입하면 $x(0) = 0$이고 $\dot{x}(0) = \frac{bn}{n^2-p^2}(np - pn) = 0$이 되어 마땅히 그래야 하는 값이 나온다.
- $p \to 0$이면 끝점 A가 거의 움직이지 않고, $x(t) \approx \frac{bn}{n^2}(npt - pnt) \to 0$이다. 예상대로 아무 일도 일어나지 않는다.
- 늘어난 길이의 최솟값은 $c - bp(n+p)/(n^2-p^2) = c - bp/(n-p)$보다 작아질 수 없으며, 이 값은 정확히 $pb < (n-p)c$일 때 양수이다.
- 수치적으로, 임의의 m, λ, a, c, b, p에 대해 훅의 법칙을 그대로 쓴 방정식을 단계별(RK4) 적분으로 풀었더니 $x(t)$에 대한 식과 4×10^{-10} 이내로 일치했다. $n = 1$, $p = 1/\sqrt{2}$, $c = 1$이고 b가 $(n-p)c/p$보다 겨우 5% 클 때, $t = 20\,000$까지 가면 늘어난 길이가 실제로 음수(약 -0.05)가 된다.

흔한 실수

- x 자체를 늘어난 길이로 쓰는 것. 위쪽 끝점이 움직이므로 늘어난 길이는 $c + x - b\sin pt$이다.
- $\dot{x}(0) = 0$ 때문에 해에 $\sin nt$ 항이 반드시 들어가야 한다는 것을 잊는 것. 이 항이 없으면 입자는 속도 $n^2bp/(n^2-p^2)$로 출발하게 된다.
- 팽팽함의 조건을 $x \geq -c$로 쓰는 것. 이것은 A가 고정되어 있을 때에만 맞다.

STEP 너머

이것은 감쇠(damping)가 없는 강제 진동자이다. 응답은 구동 진동수 p와 고유 진동수 n이 섞인 것이며, $p \to n$일 때 인수 $1/(n^2-p^2)$이 발산하는데, 이것이 공명(resonance)이다. n/p가 무리수이면 2π를 법으로 한 (nt, pt)의 값들이 조밀하게 채워지므로, $n\sin nt - p\sin pt$는 $n+p$에 얼마든지 가까워진다. 그러면 충분조건 $pb < (n-p)c$는 사실상 필요조건이기도 하다(등호는 여전히 허용된다). 강제 진동, 공명, 감쇠는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다루고, 미분방정식 측면은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

풀이

STEP II 1991, 문제 13

역학 • 강체의 회전

> **STEP II 1991, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q13

핵심 아이디어

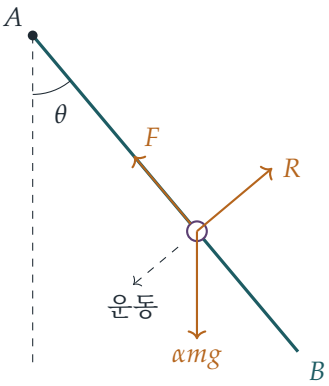
고리가 미끄러지기 전까지 막대와 고리는 A를 축으로 하는 하나의 강체(rigid body)처럼 함께 움직인다. 따라서 결합된 물체의 각속도(angular speed)는 에너지로부터, 각가속도(angular acceleration)는 모멘트(moments)로부터 구할 수 있다. 그런 다음 이를 이용하여 고리가 막대와 함께 움직이도록 막대가 고리에 가해야 하는 힘을 계산한다. 고리는 필요한 마찰력이 수직항력의 μ배 이하인 동안에만 제자리에 있으며, 이 조건이 처음으로 깨지는 각에서 미끄러지기 시작한다.

풀이

모형

고리는 A로부터 거리 x에 있는 질점(particle)으로, 회전축은 매끄러운 것으로, 막대는 강체로 다룬다. 막대와 연직 아래 방향 사이의 각을 θ라 하면, 놓는 순간 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 막대가 아래로 흔들려 내려감에 따라 θ는 감소한다. 각속도를 $\omega = |\dot{\theta}|$, 각가속도의 크기를 $\beta = |\ddot{\theta}|$로 쓴다.

막대는 고리에 두 힘을 가한다. 하나는 막대에 수직인 수직항력(normal reaction) R로, 고리가 움직이는 방향을 양으로 잡는다. 다른 하나는 막대를 따라 작용하는 마찰력(friction force) F로, A를 향하는 방향을 양으로 잡는다. 고리는 막대에 꿰어져 있으므로 R의 부호는 양과 음 어느 쪽이든 될 수 있다.



그림에서 R는 운동과 반대 방향으로 그려져 있는데, $k^2 > xd$일 때 실제로 그렇게 되기 때문이다. 그러나 식 계산에서는 부호를 일반적으로 둔다.

강체의 운동

고리가 막대에 고정되어 있을 때 A에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $mk^2 + \alpha m x^2 = m(k^2 + \alpha x^2)$이다. 놓은 순간부터 막대의 질량 중심(centre of mass)은 $d\cos\theta$만큼, 고리는 $x\cos\theta$만큼 내려왔으므로, 에너지 보존(conservation of energy)에 의해

$$\tfrac{1}{2}m(k^2 + \alpha x^2)\,\omega^2 = mg(d + \alpha x)\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{2g(d + \alpha x)\cos\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

A에 대한 모멘트를 취하면(회전축의 힘은 모멘트가 없다) 무게들의 모멘트의 합은 $mg(d + \alpha x)\sin\theta$이므로

$$\beta = \frac{g(d + \alpha x)\sin\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

고리에 작용하는 힘

고리는 반지름 x인 원 위를 움직인다. 그 가속도는 막대를 따라 A를 향하는 성분 $x\omega^2$와, 막대에 수직이며 운동 방향을 향하는 성분 $x\beta$로 이루어진다. 막대를 따라 바깥으로 향하는 방향은 연직 아래 방향과 각 θ를 이루므로, 무게는 막대를 따라 바깥쪽으로 성분 $\alpha mg\cos\theta$를, 운동 방향으로 성분 $\alpha mg\sin\theta$를 가진다.

막대를 따라 A를 향하는 방향으로: $F - \alpha mg\cos\theta = \alpha m x\omega^2$이므로

$$\begin{aligned} F &= \alpha mg\cos\theta\left(1 + \frac{2x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2}\right) \\ &= \frac{\alpha mg\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd)}{k^2 + \alpha x^2}. \end{aligned}$$

막대에 수직이며 운동 방향으로:

$$R + \alpha mg\sin\theta = \alpha m x\beta \quad \Longrightarrow \quad R = \alpha mg\sin\theta\left(\frac{x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2} - 1\right) = \frac{\alpha mg\sin\theta\,(xd - k^2)}{k^2 + \alpha x^2}.$$

R에서 αx^2 항들이 상쇄된다는 점에 주목하자. 이 때문에 $k^2 - xd$만 나타난다.

? **생각해 보기** 고리는 어느 쪽으로 미끄러지려 하며, R의 부호는 무엇을 뜻하는가?

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $F > 0$이다. 즉 막대는 고리를 A **쪽으로** 당겨야 하므로, 마찰이 충분하지 않으면 고리는 바깥쪽, 곧 B 쪽으로 미끄러진다. $k^2 > xd$이면 $R < 0$이므로 막대가 고리를 붙잡고 있는 셈이다. 고리만 따로 있다면 막대의 이 지점보다 더 빨리 떨어질 것이므로, 막대가 고리를 밀어 막아야 한다.

언제 미끄러지는가?

고리는 $|F| \le \mu|R|$인 동안 막대에 고정되어 있다. $k^2 > xd$일 때 F와 $|R|$는 같은 양의 인수 $\alpha mg/(k^2 + \alpha x^2)$를 가지므로, 조건은

$$\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd) \le \mu \sin\theta\,(k^2 - xd), \quad \text{즉,} \quad \mu \tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}.$$

놓는 순간 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 $F = 0$이므로 고리는 곧바로 미끄러지지 않는다. θ가 $\frac{\pi}{2}$에서 0으로 감소함에 따라 $\mu\tan\theta$는 $+\infty$에서 0으로 단조 감소하고, 우변은 고정된 양수이다. 따라서 부등식은 다음을 만족하는 유일한 각에서 처음으로 깨지고, 고리는 바깥쪽으로 미끄러지기 시작한다.

$$\boxed{\mu \tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}}$$

이로써 요구된 결과를 얻는다. 고리는 막대가 연직 위치에 이르기 전에 항상 미끄러진다.

소문항 (i): $k^2 = xd$

이제 모든 각에서 $R = 0$이므로 낼 수 있는 최대 마찰력 $\mu|R|$는 0이다. 그런데 $\theta < \frac{\pi}{2}$가 되자마자 $F > 0$이다. 따라서 μ의 값에 관계없이 고리는 **막대를 놓자마자** 막대를 따라 바깥쪽으로 미끄러지기 시작한다. 물리적으로 보면, 놓는 순간 A로부터 거리 $x = k^2/d$에 있는 막대의 지점은 정확히 가속도 g로 떨어지기 시작한다($\theta = \frac{\pi}{2}$에서 $x\beta = g$이므로). 그래서 고리는 막대의 어느 쪽 면도 누르지 않으며, 마찰이 작용할 통로가 없다.

소문항 (ii): $k^2 < xd$

이제 $R > 0$이다. 놓는 순간 막대의 이 지점은 g보다 빨리 떨어지려 하므로, 막대가 고리를 운동 방향으로 밀어 준다. 고리는 이번에도 바깥쪽으로 미끄러지려 하며, 조건 $F \le \mu R$는

$$\mu \tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2}.$$

가 된다. 앞과 같은 논증으로, 고리는 처음에는 버티다가

$$\mu \tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2},$$

일 때 바깥쪽으로 미끄러지기 시작한다. 이는 주어진 결과에서 $k^2 - xd$를 $|k^2 - xd|$로 바꾼 것이다. 유일한 차이는 이제 수직항력이 고리의 반대쪽 면에 작용한다는 것이다.

검산

- $k^2 > xd$일 때 $\mu \to \infty$이면 미끄러지는 각은 $\theta \to 0$이다. 즉 매우 거친 막대는 고리를 거의 맨 아래까지 붙잡아 둔다. $k^2 - xd \to 0$이면 그 각은 $\frac{\pi}{2}$로 가며, 이는 소문항 (i)과 일치한다.
- 길이가 $2a$인 균일한 막대는 $d = a, k^2 = \frac{4}{3}a^2$이므로, 임계 위치 $x = k^2/d = \frac{4}{3}a$는 타격 중심(centre of percussion), 곧 막대를 놓았을 때 자유 낙하로 출발하는 점이다.
- 수치적으로, 강체 운동을 적분하고 유한 차분(finite differences)으로 고리의 가속도를 계산하여, 임의의 매개변수 값에 대해 F와 R를 10^{-5} 이내로 재현하였다. 예를 들어 $k^2 - xd \approx 2.87$일 때 고리는 $\theta \approx 1.3270$에서 처음으로 $\mu|R|$보다 큰 힘을 필요로 했으며, 이는 공식과 일치한다. $k^2 < xd$인 경우들도 같은 방식으로 (ii)의 공식과 일치하였다.

흔한 실수

- 관성 모멘트와 무게의 모멘트에 대한 고리 자신의 기여를 빠뜨리는 것. 고리는 미끄러지기 전까지 강체의 일부이다.
- 마찰 법칙에 실제 수직항력 R 대신 무게의 수직 성분을 쓰는 것. 여기서 R는 각가속도에도 의존한다.
- 막대를 따르는 방정식에서 구심(centripetal) 항 $x\omega^2$를 빠뜨리는 것. $3\alpha x^2$의 인수 3은 바로 여기서 나온다.

STEP 너머

회전축으로부터 거리 k^2/d에 있는 점이 **타격 중심**이다. 그 점을 치면 회전축에 충격 반작용(impulsive reaction)이 생기지 않으며, 이 때문에 크리켓 배트나 테니스 라켓에 "스위트 스폿(sweet spot)"이 있다. 이 거리는 또한 복진자(compound pendulum)와 주기가 같은 단진자(simple pendulum)의 길이이기도 하다. 여기서 쓴 방법, 즉 강체의 운동을 먼저 구한 뒤 그 운동을 유지하는 데 필요한 내력이 무엇인지 묻는 방법은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서 구속력을 분석하는 기초이다. 강체의 회전과 복진자에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보자.

풀이

STEP II 1991, 문제 14

역학 • 상대 속도와 추격

STEP II 1991, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

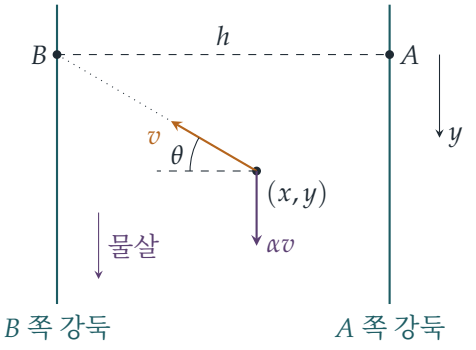
step.maths.org/questions/91-s2-q14

핵심 아이디어

배의 지면에 대한 속도(ground velocity)는 물에 대한 배의 속도에 물의 속도를 더한 것이다. "항상 B를 향한다"는 것은 기하학적 조건 $y = x\tan\theta$이고, 이를 미분하면 같은 속도에 대한 두 번째 표현을 얻는다. 두 표현을 맞추면 x와 θ를 잇는 변수분리형(separable) 방정식이 나온다. 치환(substitution) $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$를 택하는 까닭은 이 치환이 $\sec\theta + \tan\theta$를 지수함수로 만들어 주어, 모든 것이 s의 간단한 지수함수로 바뀌기 때문이다.

풀이

배를 질점(particle)으로 모형화한다. B를 원점으로 잡고, x는 B 쪽 강둑에서 A 쪽으로 재고 y는 하류 방향으로 재어, A가 $(h, 0)$에 있고 배가 거기서 출발하도록 한다.



θ로 나타낸 속도

배는 B 쪽 강둑을 향하되, (떠밀림을 상쇄하기 위해) 상류 쪽으로 기울어 방향 AB와 각 θ를 이룬다. 따라서 물에 대한 배의 속도는 우리의 (x, y) 성분으로 단위벡터(unit vector) $-(\cos\theta, \sin\theta)$ 방향으로 크기 v이다. 여기에 y 방향으로 αv인 물살을 더하면

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v\cos\theta \\ \alpha v - v\sin\theta \end{pmatrix}.$$

B를 향하기

(x, y)에 있는 배에서 B로 향하는 방향은 $(-x, -y)$ 방향이고, 이것이 AB와 각 θ를 이루는 것은 정확히 $\tan\theta = y/x$일 때이다. 따라서 운동하는 내내

$$y = x\tan\theta.$$

곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙(chain rule)으로 t에 대해 미분하면

$$\dot{y} = \tan\theta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

이므로 속도 벡터 $(\dot{x}, \dot{y})$는 요구된 꼴을 가진다.

x와 θ에 대한 미분방정식

이제 두 표현을 맞춘다. x 성분에서 $\dot{x} = -v\cos\theta$를 얻는다. 이를 y 성분에 대입하면

$$\begin{aligned} \tan\theta\,(-v\cos\theta) + x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v - v\sin\theta \\ x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v, \qquad (*) \end{aligned}$$

인데, $\tan\theta\cos\theta = \sin\theta$이므로 $-v\sin\theta$ 항이 소거되기 때문이다. 특히 $\dot{\theta} > 0$이므로 θ는 0에서부터 꾸준히 증가하고, 따라서 x를 θ의 함수로 다룰 수 있다. 나누면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} = \frac{-v\cos\theta\cdot x\sec^2\theta}{\alpha v} = -\frac{x\sec\theta}{\alpha}, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -x\sec\theta,$$

로 요구된 식을 얻는다.

x 구하기

이 방정식은 변수분리가 된다(배가 도착할 때까지 $x > 0$이다).

$$\alpha\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \alpha\ln x = -\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C,$$

여기서 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 성립하는 표준 적분 $\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$를 사용하였다. 출발할 때 배는 A에 있고 거기서 $x = h, \theta = 0$이므로 $C = \alpha\ln h$이다. 따라서

$$\alpha\ln\frac{x}{h} = -\ln(\sec\theta + \tan\theta), \qquad \text{즉,} \qquad \left(\frac{x}{h}\right)^{\alpha} = (\sec\theta + \tan\theta)^{-1}.$$

치환 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$

> **?** **생각해 보기** $\sec\theta$를 s로 나타내면 무엇인가?

$\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\sinh^2(\alpha s) = \cosh^2(\alpha s)$이고, $(0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$이므로$)$ $\sec\theta$와 $\cosh(\alpha s)$가 모두 양수이므로 $\sec\theta = \cosh(\alpha s)$를 얻는다. 그러면

$$\sec\theta + \tan\theta = \cosh(\alpha s) + \sinh(\alpha s) = \mathrm{e}^{\alpha s},$$

이므로 $(x/h)^\alpha = \mathrm{e}^{-\alpha s}$이고, α제곱근을 취하면 $x = h\mathrm{e}^{-s}$이다.

변화율에 대한 식을 얻기 위해 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$를 t에 대해 미분하면

$$\sec^2\theta\,\dot\theta = \alpha\cosh(\alpha s)\,\dot s.$$

이것과 $x = h\mathrm{e}^{-s}$를 $(*)$에 대입하면 $h\mathrm{e}^{-s}\cdot\alpha\cosh(\alpha s)\,\dot s = \alpha v$이고, α로 나누면

$$h\mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v,$$

로 요구된 식을 얻는다.

건너는 데 걸리는 시간

A에서 $\theta = 0$이므로 $s = 0$이다. $\dot s > 0$이므로 s는 증가하고, 배는 $x = h\mathrm{e}^{-s} \to 0$일 때, 즉 $s \to \infty$일 때 B에 도달한다. (배는 실제로 B에 도착한다. $\alpha < 1$이므로 $y = x\tan\theta = h\mathrm{e}^{-s}\sinh(\alpha s) \to 0$이기 때문이다.) 변수를 분리하면 건너는 데 걸리는 시간은

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{v}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\,\mathrm{d}s = \frac{h}{2v}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-(1-\alpha)s} + \mathrm{e}^{-(1+\alpha)s}\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{h}{2v}\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{h}{2v}\cdot\frac{2}{1-\alpha^2} = \frac{h}{v(1-\alpha^2)}, \end{aligned}$$

이며, $1-\alpha > 0$이므로 두 적분은 모두 수렴(converge)한다. 따라서 건너는 데 걸리는 시간은 $hv^{-1}(1-\alpha^2)^{-1}$이다.

검산

- 물살이 없으면$(\alpha = 0)$ 배는 곧장 건너가고 $T = h/v$이며, 당연히 그래야 한다. $\alpha \to 1$이면 시간이 한없이 커진다. 물살보다 빠르지 않은 배는 B 근처에서 곧장 상류를 향하게 되는데, 그곳에서는 물살을 거슬러 결코 나아갈 수 없다.
- 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보았다(4차 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법, 매 단계마다 B를 향해 방향을 잡음). $h = v = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$일 때 배는 $t \approx 1.33333$에 도착하며, 이는 $1/(1-\frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$과 일치한다. 경로를 따라 $(x/h)^\alpha(\sec\theta+\tan\theta)$는 약 10^{-13} 이내로 1을 유지하였다.

흔한 실수

- 배가 향하는 방향의 y 성분 부호를 틀리는 것. 배는 하류로 떠밀리므로 B를 향한다는 것은 부분적으로 상류를 향한다는 뜻이다. $\theta > 0$일 때 그 성분은 $-v\sin\theta$이다.
- $\sec\theta = +\cosh(\alpha s)$임을 정당화하지 않는 것. 이를 위해서는 θ가 $\frac{\pi}{2}$보다 작게 유지되어야 하는데, θ는 B에서 $x > 0$인 점으로 가는 직선의 각이므로 이 조건이 성립한다.

STEP 너머

이것은 고전적인 **추적 곡선**(*pursuit curve*) 문제이다. 한 물체가 끊임없이 목표를 향해 방향을 잡고, 그 경로는 운동 방향에 대한 미분방정식(differential equation)으로부터 구해진다. 같은 아이디어로 움직이는 주인을 쫓는 개나 목표물을 추적하는 미사일을 기술할 수 있으며, 이는 자연스럽게 트랙트릭스(tractrix)와 같은 곡선으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 속도(relative velocity)와 움직이는 좌표계에서 운동 방정식(equations of motion)을 세우는 일에 익숙해지기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 1991, 문제 15

확률과 통계 • 기댓값의 선형성

> **STEP II 1991, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q15

핵심 아이디어

순서쌍 (n_1, n_2)를 $m \times m$ 격자의 한 칸으로 생각하자. m^2개의 칸은 모두 같은 확률로 나온다. $|n_1 - n_2| = k$인 칸들은 주대각선과 평행한 두 대각선 위에 놓이므로 세기 쉽다. 그다음은 모두 **기댓값의 선형성**(*linearity of expectation*)에서 나온다. 이웃한 항들이 변수를 공유하여 독립(independent)이 아니더라도, 차들의 합의 기댓값은 각 기댓값의 합과 같다. 감독관이 걷는 거리도 같은 종류의 합이다. 다만 첫 구간은 무작위 책상이 아니라 정해진 책상에서 출발한다는 점이 다르다.

풀이

$|n_1 - n_2|$의 분포

n_1과 n_2는 서로 독립이고 각각 $\{1, \dots, m\}$ 위에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로, m^2개의 순서쌍 (n_1, n_2)는 각각 확률 $1/m^2$를 가진다.

$1 \le k \le m-1$인 k를 고정하자. $n_1 - n_2 = k$인 순서쌍은 $(k+1, 1), (k+2, 2), \dots, (m, m-k)$로 $m-k$개이다. 대칭성에 의해 $n_2 - n_1 = k$인 순서쌍도 $m-k$개 있고, $k \neq 0$이므로 두 집합은 겹치지 않는다. 따라서

$$\mathrm{P}\big(|n_1 - n_2| = k\big) = \frac{2(m-k)}{m^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($k = 0$일 때는 순서쌍이 m개이므로 $\mathrm{P}(|n_1 - n_2| = 0) = 1/m$이다. 검산하면 $\frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2(m-k)}{m^2} = \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{m^2} = 1$이다.)

$|n_1 - n_2|$의 기댓값

$k = 0$인 값은 기댓값(expected value)에 아무것도 더하지 않으므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|n_1 - n_2| &= \sum_{k=1}^{m-1} k \cdot \frac{2(m-k)}{m^2} = \frac{2}{m^2}\left(m\sum_{k=1}^{m-1} k - \sum_{k=1}^{m-1} k^2\right) \\ &= \frac{2}{m^2}\left(\frac{m \cdot m(m-1)}{2} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\right) \\ &= \frac{2}{m^2} \cdot \frac{m(m-1)\big(3m-(2m-1)\big)}{6} = \frac{(m-1)(m+1)}{3m} = \frac{m^2-1}{3m},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $n = m-1$로 두고 잘 알려진 합 공식 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$과 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$을 사용하였다.

$m = 2$이고 정수가 세 개인 경우

$m = 2$이면 같은 확률로 나오는 세 수의 순서쌍 (n_1, n_2, n_3)이 $2^3 = 8$개 있다. $S = |n_1 - n_2| + |n_2 - n_3|$라 하면 다음과 같다.

(n_1, n_2, n_3)	111	112	121	122	211	212	221	222
S	0	1	2	1	1	2	1	0

합계가 8이므로 $\mathrm{E}(S) = 8/8 = 1$이다. 주어진 값은 $2(m^2-1)/(3m) = 2 \cdot 3/6 = 1$이므로 일치한다.

> **생각해 보기** $|n_1 - n_2|$와 $|n_2 - n_3|$는 둘 다 n_2를 포함한다. 그래도 그냥 기댓값을 더해도 될까?

그렇다. 기댓값의 선형성 $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$에는 독립성이 전혀 필요하지 않다. 각 순서쌍 (n_i, n_{i+1})만 따로 보면 서로 독립인 두 균등분포 정수로 이루어져 있으므로, 각 항의 기댓값은 $(m^2-1)/(3m)$이다. 항이 $r-1$개이므로

$$\mathrm{E}\big(|n_1 - n_2| + |n_2 - n_3| + \cdots + |n_{r-1} - n_r|\big) = \frac{(r-1)(m^2-1)}{3m}.$$

$r = 3$인 경우가 바로 앞에서 $m = 2$에 대해 확인한 결과이다.

감독관

줄을 따라 책상에 $1, 2, \ldots, m$의 번호를 붙이면, 책상 i와 j 사이의 거리는 $d|i-j|$이다. $j = 1, \ldots, N+1$에 대하여 j번째로 부른 책상의 번호를 c_j라 하자. 부르는 사람들은 서로 독립이고 각각 $\{1, \ldots, m\}$ 위에서 균등분포를 따른다고 모형화한다. 이것이 "m명의 수험생 중 누구에게나 같은 확률로 불린다"를 해석한 방식이다. 수험생들은 동시에 부르거나 다른

호출 중에 부르지 않으므로, 감독관은 호출을 하나씩 차례로 처리하며 $j+1$번째 호출이 들어올 때 책상 c_j에 서 있다. (같은 수험생이 연달아 두 번 부르면 그 구간의 길이는 0이며, 공식은 이 경우도 포함한다.)

따라서 걸은 거리의 합은

$$D = d\,|c_1 - 1| + d\sum_{j=1}^{N} |c_{j+1} - c_j|.$$

첫 구간. 감독관은 책상 1에서 출발하고 c_1은 균등분포를 따르므로

$$\mathrm{E}|c_1 - 1| = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(i-1) = \frac{m-1}{2}.$$

이 값이 $(m^2-1)/(3m)$보다 크다는 점에 주목하자. 줄의 끝에서 출발하기 때문에 첫 번째 걸음이 평균보다 길어진다.

나머지 N개의 구간. 여기서는 $c_1, \ldots, c_{N+1}$이 $r = N+1$일 때의 $n_1, \ldots, n_r$ 역할을 하므로, 앞의 결과에서

$$\mathrm{E}\sum_{j=1}^{N} |c_{j+1} - c_j| = \frac{N(m^2-1)}{3m}.$$

합치기. 다시 선형성에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(D) &= d\left(\frac{m-1}{2} + \frac{N(m-1)(m+1)}{3m}\right)\\ &= \frac{d(m-1)}{6m}\big(3m + 2N(m+1)\big) = \frac{d(m-1)}{6m}\big[2N(m+1) + 3m\big],\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $m = 1$이면 책상이 하나뿐이므로 감독관은 전혀 움직이지 않는다. 공식도 마땅히 0을 준다.
- $N = 0$이면 첫 호출만 있고, 공식은 첫 구간의 기댓값인 $d(m-1)\cdot 3m/(6m) = \frac{1}{2}d(m-1)$로 줄어든다.
- 부르는 사람의 가능한 모든 순서를 정확히 열거하면 $m \le 4$, $N \le 3$인 모든 경우에 공식이 맞음을 확인할 수 있다. $m = 10$, $N = 20$, $d = 1$로 2×10^5회 시뮬레이션한 결과 평균은 70.50이었고, 공식의 값은 $\frac{9}{60}(440 + 30) = 70.5$이다.

흔한 실수

- 첫 구간을 다른 구간과 똑같이 취급하는 것. 감독관은 무작위 책상이 아니라 책상 1에서 출발하므로, 그 구간의 기댓값은 $(m^2-1)/(3m)$이 아니라 $\frac{1}{2}(m-1)$이다.
- $n_1 - n_2 = k$인 경우만 세고 $n_2 - n_1 = k$에 해당하는 인수 2를 빠뜨리거나, $k = 0$인 경우를 잘못 두 배로 세는 것.
- 합의 항들이 서로 독립이어야만 기댓값을 더할 수 있다고 생각하는 것.

STEP 너머

감독관의 위치는 **마르코프 연쇄**(*Markov chain*)이다. 다음에 어디로 갈지는 오직 지금 어디에 있는지에만 의존한다. 여기서는 연쇄가 매우 단순해서 각 단계가 과거를 완전히 "잊는다". 더 풍부한 모형(예를 들어 가까운 책상에서 호출할 가능성이 더 큰 경우)에서는 호출당 장기 평균 이동 거리를 구하기 위해 연쇄의 정상 분포(stationary distribution)가 필요하다. 첫 번째 결과의 연속 버전은 $[0,1]$ 위의 서로 독립인 두 균등분포 점 사이의 평균 거리가 $\frac{1}{3}$이라는 것이며, 이는 $(m^2-1)/(3m)$을 m으로 나눈 값의 극한이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)은 기댓값의 선형성과 마르코프 연쇄를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 1991, 문제 16

확률과 통계 • 이항분포의 정규근사

> **STEP II 1991, 16번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q16

핵심 아이디어

부족량(deficit), 즉 수위가 댐 꼭대기보다 얼마나 아래에 있는지를 추적한다. 방류는 부족량을 일정하게 늘리고, 소나기는 한 번 올 때마다 부족량을 정확히 V만큼 줄인다. 부족량이 음수가 되면 물이 넘친다. 이틀 문제에서는 물이 넘칠 수 있는 강우 패턴이 단 하나뿐이고, 그때에도 균등분포(uniform)를 따르는 시각 하나만 중요하다. 여름에는 방류가 멈추므로 모든 것이 소나기 횟수를 세는 문제로 귀결되며, 그 횟수는 이항분포(binomial)를 따른다.

풀이

소문항 (i): 이틀 휴가

휴가가 시작되는 자정부터 시간을 일 단위로 재고, 시각 t에서의 부족량을 $D(t)$라 하자. 그러면 $D(0) = V$이다. 소나기와 소나기 사이에 D는 비율 u로 증가하고, 소나기가 한 번 올 때마다 V만큼 감소한다. D가 한 번이라도 음수가 되면 댐이 넘친다. (문제의 의도대로, 저수지에는 이틀 내내 방류를 계속할 만큼 충분한 물이 있다고 가정한다.)

첫째 날과 둘째 날에 비가 오는 사건을 각각 R_1, R_2라 하고, 비가 오는 시각(하루에 대한 비율)을 T_1과 T_2라 하자. 이들은 각각 $[0,1]$에서 균등분포를 따른다. "어느 날이든 확률 p"라는 표현에 함축되어 있듯이, 각 날은 서로 독립(independent)이다.

- **비가 오지 않는 경우:** 부족량은 늘어나기만 하므로 넘치지 않는다.
- **하루만 비가 오는 경우**, 그 시각을 s라 하면: 소나기 직후 $D = V + us - V = us \geq 0$이므로 넘치지 않는다(확률이 0인 사건 $s = 0$은 제외한다).
- **이틀 모두 비가 오는 경우:** 첫 소나기 직후 $D = uT_1 \geq 0$이므로 안전하다. 두 번째 소나

기 직후, 즉 시각 $1+T_2$에서는

$$D = V + u(1+T_2) - 2V = u(1+T_2) - V.$$

T_1이 사라졌음에 주목하자. 첫 소나기가 언제 오든 방류는 같은 비율로 계속된다.

따라서 물이 넘치는 것은 이틀 모두 비가 오고 $u(1+T_2) < V$, 즉 $T_2 < \frac{V}{u} - 1$일 때이고, 그 때뿐이다. $\frac{1}{2}V \le u \le V$이면 수 $\frac{V}{u} - 1$은 $[0,1]$에 속하고, T_2가 균등분포를 따르므로

$$\mathrm{P}(\text{넘침}) = p^2\left(\frac{V}{u} - 1\right).$$

이것을 Q와 같다고 놓으면

$$\frac{V}{u} = 1 + \frac{Q}{p^2} \quad\Longrightarrow\quad u = \frac{p^2 V}{p^2 + Q}.$$

조건 $Q < p^2$ 덕분에 이 결과가 앞의 가정과 모순되지 않는다. $0 < Q/p^2 < 1$이므로 가정한 대로 $\frac{1}{2}V < u < V$가 된다. (이 조건이 없으면 해가 없다. 비 오는 날이 이틀 필요하므로 넘칠 확률은 결코 p^2를 넘을 수 없다.)

소문항 (i): 여름 휴가

이제 $u = 0$이므로 부족량은 결코 증가하지 않는다. 부족량은 kV에서 시작하여 소나기가 올 때마다 V씩 줄어든다. 따라서 18일 가운데 비 오는 날의 수를 N이라 하면

$$\text{넘침} \iff NV > kV \iff N > k.$$

각 날은 독립이고 각각 확률 $\frac{1}{3}$로 비가 오므로 $N \sim \mathrm{B}(18, \frac{1}{3})$이며, 평균(mean)은 6, 분산(variance)은 $18 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4$이다.

생각해 보기 여기서 "적절한" 근사는 무엇이며, 왜 연속성 보정이 필요한가?

$np = 6, n(1-p) = 12$이므로 정규근사(normal approximation) $N \approx \mathrm{N}(6,4)$는 타당하다. ($p$가 작지 않으므로 푸아송 근사(Poisson approximation)는 적절하지 않다.) N은 정수 값을 가지므로 정수 k에 대하여 사건 $N > k$는 사건 $N \ge k+1$과 같고, 이를 $X \sim \mathrm{N}(6,4)$에 대한 $X > k + \frac{1}{2}$로 근사한다. 이것이 연속성 보정(continuity correction)이다. 필요한 조건은

$$\mathrm{P}\left(Z > \frac{k + \frac{1}{2} - 6}{2}\right) < \frac{1}{10} \iff \frac{k - 5.5}{2} > 1.2816 \iff k > 8.06.$$

구체적으로, $k = 8$이면 $\mathrm{P}(Z > 1.25) \approx 0.106$으로 너무 크고, $k = 9$이면 $\mathrm{P}(Z > 1.75) \approx 0.040$으로 충분하다. 넘침 여부는 $N > k$인지에만 달려 있으므로 8과 9 사이의 정수가 아닌 k는 $k = 9$보다 나을 것이 없다. 따라서 기술자는 저수지의 물을

$$k = 9,$$

즉 꼭대기에서 $9V$ 아래까지 빼야 한다.

소문항 (ii)

이제 반나절이 36개 있고, 이들은 독립이며 각각 확률 $\frac{1}{6}$로 비가 온다. 방류는 여전히 0이므로 넘침은 다시 $N > k$를 뜻하는데, 이번에는 $N \sim \mathrm{B}(36, \frac{1}{6})$이다. 평균은 여전히 6이지만 분산은 $36 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 5$로 4보다 크다.

평균이 같을 때 분산이 크면 위쪽 꼬리(upper tail)가 더 두껍다. 즉 평균보다 큰 각 k에 대하여 $\mathrm{P}(N > k)$가 이전보다 크다. 따라서 필요한 k는 **더 커진다**. 연속성 보정을 적용하여 $\mathrm{N}(6, 5)$로 근사하면 필요한 조건은

$$\frac{k - 5.5}{\sqrt{5}} > 1.2816 \iff k > 8.37,$$

이고, 이전에는 $k > 8.06$이었다. (여기서 정규근사는 $\mathrm{P}(N \geq 9) \approx 0.132$를 주며, 소문항 (i)에서는 0.106이었다.) 따라서 기준값이 올라간다. k를 정수로 올림하면 두 경우 모두 여전히 $k = 9$이다. 그러나 $k = 9$에서의 꼬리 확률이 0.04가 아니라 약 0.06이므로 안전 여유가 더 줄어든다.

검산

- $p = 0.5$, $Q = 0.1$, $u = \frac{0.25}{0.35}V \approx 0.714V$로 이틀 휴가를 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)한 결과(400,000회), 넘침의 상대도수는 0.0996이었다. 다른 p와 Q 값에서도 마찬가지로 잘 맞았다.
- 극한의 경우: $Q \to p^2$이면 $u \to \frac{1}{2}V$인데, 이는 비 오는 날 이틀로 여전히 넘칠 수 있는 가장 느린 방류 속도이다. $Q \to 0$이면 $u \to V$인데, 이 속도에서는 두 번째 소나기가 결코 넘침을 일으킬 수 없다.
- 정확한 이항분포 꼬리 확률이 정규근사를 뒷받침한다. $\mathrm{B}(18, \frac{1}{3})$에서는 $\mathrm{P}(N \geq 9) = 0.1076$, $\mathrm{P}(N \geq 10) = 0.0433$이다. $\mathrm{B}(36, \frac{1}{6})$에서는 $\mathrm{P}(N \geq 9) = 0.1332$, $\mathrm{P}(N \geq 10) = 0.0652$이다.

흔한 실수

- 이틀 문제에서 첫 비가 오는 시각 T_1이 중요하다고 생각하는 것. 방류가 일정하므로 이 값은 소거된다.
- 연속성 보정을 잊는 것. 보정을 하지 않으면 부등식이 $k > 8.56$이 되어 N이 정수라는 사실이 가려진다.
- 평균이 같다는 이유로 (ii)의 답이 "같다"고 말하는 것. 꼬리를 좌우하는 것은 퍼짐의 정도이다.

STEP 너머

무작위한 순간에 비가 내리고 물이 일정한 비율로 빠져나가는 상황은 응용확률론의 고전적인 모형으로, Moran이 댐을 위해 발전시킨 저장 이론(storage theory)이다. 이는 대기행렬(queue) 이론, 보험 파산(insurance ruin) 이론과 밀접하게 관련되어 있다. 소문항 (ii)에서 평균을 고정한 채 하루를 더 많고 더 작은 조각으로 나누면 $\mathrm{B}(n, 6/n)$은 평균 6, 분산 6인 푸아송 분포(Poisson distribution)로 수렴하고, 비가 오는 사건들은 푸아송 과정(Poisson process)이 된다. 더 알고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)을 참고하라.

풀이

STEP III 1991, 문제 1

순수수학 • 급수와 전개

> **STEP III 1991, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q1

핵심 아이디어

세 소문항 모두 무작정 계산에 들어가기 전에 잠시 생각해 보면 보상이 따른다. (i)에서는 부분분수(partial fractions)로 분해하면 합이 서로 소거되는(telescope) 조각들로 바뀐다. (ii)에서는 삼차식 $1+x+x^2+x^3$이 등비급수(geometric series)이므로 아주 간단한 두 식의 몫으로 쓸 수 있고, 그러면 로그가 두 개의 표준 급수로 나뉜다. (iii)에서는 먼저 지수를 급수로 쓴다. 이 급수가 x^2부터 시작하므로 지수급수(exponential series)에서 x^4까지 닿을 수 있는 항은 몇 개뿐이다.

풀이

소문항 (i)

다음을 만족하는 상수를 찾는다.

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r+3}.$$

가리기 방법(cover-up rule)에 의해 $A = \dfrac{6}{1\cdot 3} = 2, B = \dfrac{6}{(-1)(2)} = -3, C = \dfrac{6}{(-3)(-2)} = 1$이다. (간단히 확인해 보면 $A+B+C=0$인데, 좌변은 r이 클 때 $6/r^3$처럼 행동하여 $1/r$ 항이 없으므로 당연히 그래야 한다.)

계수 $2, -3, 1$의 합이 0이므로, 이를 $2-2$와 $-1+1$로 나누어 보는 것이 자연스럽다.

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) - \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+3}\right).$$

이제 각 괄호는 서로 소거된다. 첫째 괄호에서는 다음을 얻는다.

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

둘째 괄호에서는 항들이 두 칸씩 떨어져 있으므로 양 끝에서 각각 두 항씩 남는다.

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

이를 합치면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}\frac{6}{r(r+1)(r+3)} &= 2-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\\ &= \frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

? **생각해 보기** $1+x+x^2+x^3$을 더 깔끔하게 쓰는 방법이 있을까?

이것은 공비가 x인 등비급수이므로 $x\neq 1$일 때

$$1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}.$$

$|x|<1$이면 $1-x^4$와 $1-x$가 모두 양수이므로 로그를 나눌 수 있다.

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1-x^4)-\ln(1-x).$$

$|y|<1$에서 성립하는 $\ln(1-y)=-\sum_{k\geq 1}y^k/k$를 이용하면 (여기서도 $|x^4|<1$이다)

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k},\qquad \ln(1-x^4)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{4m}}{m}.$$

둘째 급수는 k가 4의 배수인 거듭제곱 x^k에만 관여한다. 이러한 $k=4m$에 대하여 합친 계수는

$$\frac{1}{4m}-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4m}=-\frac{3}{k}.$$

따라서

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots,$$

이고, 일반항(general term)은 다음과 같다.

$$\frac{x^k}{k}\ \ 4\nmid k\text{이면},\qquad -\frac{3x^k}{k}\ \ 4\mid k\text{이면}.$$

모든 계수가 0이 아니므로, 위에 나타낸 다섯 항이 0이 아닌 처음 다섯 항이다.

소문항 (iii)

$-1 < x \leq 1$일 때 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$이므로

$$u = x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \cdots .$$

생각해 보기 $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots$에서 몇 개의 항이 필요할까?

u가 x^2부터 시작하므로 u^k는 x^{2k}부터 시작한다. 따라서 u^3 이후의 항은 x^4까지 아무런 기여도 하지 않고, u^2에서는 최저차항 x^4만 필요하다. 그러므로

$$\begin{aligned} e^{x\ln(1+x)} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}x^4 + \cdots \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \cdots . \end{aligned}$$

(물론 $e^{x\ln(1+x)}$는 바로 $(1+x)^x$이다.)

검산

- (i)에서 $n = 1$이면 $\frac{7}{6} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$이고, 이는 단 하나의 항 $\frac{6}{1\cdot 2\cdot 4}$와 일치한다. $n \to \infty$로 보내면 무한급수의 합(sum to infinity) $\frac{7}{6}$을 얻는다.
- (ii)에서 $y = x + x^2 + \cdots$로 두고 $\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2}$를 이용해 이차까지 직접 전개하면 $x + x^2 - \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2}$가 되어 처음 두 항과 일치한다. 수치적으로도 $x = 0.5$에서 급수를 많은 항까지 더하면 $\ln 1.875 \approx 0.6286$과 일치한다.
- (iii)에서 $x = 0.01$일 때 전개식과 $(1.01)^{0.01}$의 차는 약 7.4×10^{-11}로, 마땅히 그래야 하듯 x^5 정도의 크기이다(다음 계수는 $-\frac{3}{4}$임이 밝혀진다).

흔한 실수

- (i)에서 간격이 둘인 소거 합은 양 끝에서 한 항이 아니라 두 항씩 남긴다는 사실을 잊는 것.
- (ii)에서 x^4의 계수를 $\frac{1}{4} - 1$로 제대로 구해 놓고는 일반항을 $(-1)^{k+1}x^k/k$ 따위로 쓰는 것. 규칙은 k를 4로 나눈 나머지에 따라 달라진다.
- (iii)에서 $\frac{1}{2}u^2$ 항을 빠뜨리는 것. 이 항은 $\frac{1}{2}x^4$만큼 기여한다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 거듭제곱급수(power series)를 합성하는 작은 예이며, 각 항의 최저 차수를 추적하는 이 정리 요령은 대학에서 점근 전개(asymptotic expansion)를 다루는 방식 그대로이다. 거듭제곱급수가 언제 수렴하는지, 그리고 왜 수렴반지름(radius of convergence) 안에서는 급수를 자유롭게 더하고 곱하고 합성할 수 있는지는 해석학(analysis) 첫 강좌에서 다루는 내용이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 명료하게 다룬다.

풀이

STEP III 1991, 문제 2

순수수학 • 기하에서의 복소수

> **STEP III 1991, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q2

핵심 아이디어

복소수(complex number) 하나는 길이의 비와 각을 동시에 담을 수 있다. 몫 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$은 P_1에서 만나는 삼각형의 두 변의 길이의 비(절댓값(modulus))와 한 변에서 다른 변으로 돌아가는 회전(편각(argument))을 기록하며, 이 두 정보가 바로 SAS 닮음(similarity) 판정에 필요한 것이다. 조건을 행렬식(determinant)으로 바꾸고 나면, 각 소문항은 행렬식을 인수분해하는 문제이거나 비교할 삼각형 $Q_1Q_2Q_3$을 영리하게 고르는 문제로 귀결된다.

풀이

먼저 오식부터

문제에 인쇄된 대로라면 좌변의 분모는 $z_2 - z_3$이다. 그러나 이는 옳을 수 없다. $w_i = z_i$로 두어 두 삼각형이 똑같아지게 하자. 그러면 우변은 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$이 되는데, $z_2 \neq z_1$이므로 이것은 좌변과 다르다. 의도된 조건, 그리고 행렬식과 맞아떨어지는 조건은

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}. \tag{$*$}$$

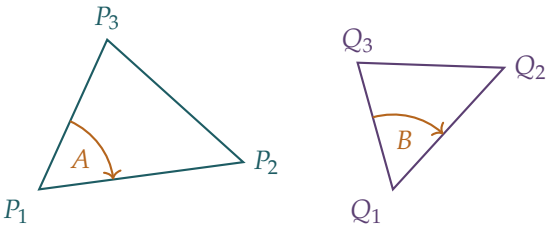
이다. 이것을 증명한다.

닮음 조건

삼각형 $P_1P_2P_3$의 P_1에서의 각을 A라 하자. 그러면 $0 < A < \pi$이다. 극형식(polar form)으로 쓰면

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{P_1P_2}{P_1P_3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

이다. 여기서 θ는 $\overrightarrow{P_1P_3}$의 방향에서 $\overrightarrow{P_1P_2}$의 방향으로 가기 위해 돌아야 하는 각이다. 따라서 $P_1 \to P_2 \to P_3$이 시계 반대 방향으로 돌면 $\theta = -A$이고(P_1P_3에서 시계 방향으로 돌아야 P_1P_2에 닿는다), 시계 방향으로 돌면 $\theta = +A$이다. 요약하면, 이 몫의 편각($(-\pi, \pi)$에서 잡는다)의 크기는 P_1에서의 각과 같고, 그 부호는 삼각형의 방향을 알려 준다. w들에 대해서도 Q_1에서의 각을 B라 하면 똑같은 사실이 성립한다.



같은 방향으로 닮음 $\Rightarrow (*)$. 두 삼각형이 $P_i \leftrightarrow Q_i$로 닮음이면, P_1과 Q_1에서 만나는 변들은 같은 비를 이루어 $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$이고, 그곳의 각도 같아 $A = B$이다. 두 삼각형이 같은 방향으로 돌기 때문에 두 편각 $\mp A$와 $\mp B$는 같은 부호를 가지므로 서로 같다. 절댓값이 같고 편각이 같으므로 $(*)$가 성립한다.

$(*) \Rightarrow$ **같은 방향으로 닮음.** $(*)$가 성립하면, 절댓값을 비교하여 $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$을 얻는다. 편각을 비교하면 $A = B$이고 부호도 같으므로, 두 삼각형은 같은 방향으로 돈다. 두 변의 길이가 비례하고 그 끼인각이 같으므로 SAS 조건이 성립하고, 따라서 두 삼각형은 $P_i \leftrightarrow Q_i$로 닮음이다. ($(*)$가 실수이면 두 세 점 모두 한 직선 위에 있고, 이 퇴화된 "삼각형"들도 역시 닮음이다.)

같은 사실을 보는 또 다른 방법이 있다. $(*)$는 상수 $a = (w_1 - w_2)/(z_1 - z_2) \neq 0$와 $b = w_1 - az_1$에 대하여 $w_i = az_i + b$라는 것과 정확히 같은 말이다. 사상 $z \mapsto az + b$는 $|a|$배 확대에 $\arg a$만큼의 회전과 평행이동을 합친 것이고, 이러한 사상은 모양과 방향을 보존한다.

행렬식 형태

분모를 없애면(점들이 서로 다르므로 두 분모 모두 0이 아니다) $(*)$는

$$(z_1 - z_2)(w_1 - w_3) - (z_1 - z_3)(w_1 - w_2) = 0.$$

과 동치이다. 전개하면 z_1w_1 항들이 소거되어

$$z_1(w_2 - w_3) - z_2(w_1 - w_3) + z_3(w_1 - w_2) = 0,$$

이 남는데, 이는 행렬식을 첫째 행을 따라 전개한 것이다. 따라서 $(*)$는 $\det = 0$과 같다.

각 소문항을 위해서는 행렬식을 다른 방법으로 계산해 두는 것이 도움이 된다. 둘째 열과 셋째 열에서 첫째 열을 빼면 행렬식은 변하지 않는다. 그런 다음 이제 $(1, 0, 0)$이 된 마지막 행

을 따라 전개하면

$$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ w_2 - w_1 & w_3 - w_1 \end{pmatrix}. \qquad (\dagger)$$

이다.

소문항 (i)

$w_i = z_i^2$이면 (†)는

$$\begin{aligned}(z_2 - z_1)(z_3^2 - z_1^2) - (z_3 - z_1)(z_2^2 - z_1^2) &= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)\big[(z_3 + z_1) - (z_2 + z_1)\big] \\ &= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2).\end{aligned}$$

이 된다. z_i들이 서로 다르므로 모든 인수가 0이 아니다. 따라서 행렬식은 결코 0이 아니며, 두 삼각형은 (위의 의미에서) 결코 닮음이 아니다.

소문항 (ii)

$w_i = z_i^3$이면 $z_j^3 - z_1^3 = (z_j - z_1)(z_j^2 + z_j z_1 + z_1^2)$을 이용하여

$$\begin{aligned}(z_2 - z_1)(z_3^3 - z_1^3) - (z_3 - z_1)(z_2^3 - z_1^3) &= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)\big[(z_3^2 + z_3 z_1) - (z_2^2 + z_2 z_1)\big] \\ &= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1 + z_2 + z_3),\end{aligned}$$

를 얻는다. 이는 $z_3^2 - z_2^2 + z_1(z_3 - z_2) = (z_3 - z_2)(z_3 + z_2 + z_1)$이기 때문이다. 앞의 세 인수는 0이 아니므로, 행렬식은 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$일 때, 그리고 그때에만 0이 된다. 즉 두 삼각형은 무게중심(centroid) $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$이 원점일 때, 그리고 그때에만 닮음이다.

소문항 (iii)

요령은 삼각형을 꼭짓점 이름만 바꾼 자기 자신과 비교하는 것이다. Q_1, Q_2, Q_3을 P_2, P_3, P_1로 잡자. 즉

$$w_1 = z_2, \qquad w_2 = z_3, \qquad w_3 = z_1.$$

? **생각해 보기** 왜 "정삼각형"이 이렇게 이름을 바꾸는 것과 관계가 있어야 할까?

$P_1 \leftrightarrow P_2, P_2 \leftrightarrow P_3, P_3 \leftrightarrow P_1$로 닮음이면 대응하는 변들은 공통의 비 $k > 0$를 가져야 한다.

$$\frac{P_2P_3}{P_1P_2} = \frac{P_3P_1}{P_2P_3} = \frac{P_1P_2}{P_3P_1} = k.$$

세 식을 곱하면 $k^3 = 1$이므로 $k = 1$이고, 세 변의 길이가 모두 같다. 역으로, 삼각형이 정삼각형(equilateral triangle)이면 중심에 대한 (알맞은 방향으로의) 120° 회전이

$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$로 보낸다. 회전은 모양과 방향을 보존하므로, 이 삼각형은 이름을 바꾼 자기 자신과 같은 방향으로 닮음이다. 따라서

$P_1P_2P_3$이 정삼각형이다 $\iff$ 이 삼각형은 같은 방향으로 다음 삼각형과 닮음이다: $P_2P_3P_1$.

첫 부분에 의해, 우변은

$$0 = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = z_1(z_3 - z_1) - z_2(z_2 - z_1) + z_3(z_2 - z_3),$$

일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 즉

$$z_1z_3 - z_1^2 - z_2^2 + z_1z_2 + z_2z_3 - z_3^2 = 0 \iff z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- 소문항 (ii): $z_1, z_2, z_3 = 1, \omega, \omega^2 (\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3})$는 무게중심이 0이지만, 세제곱이 모두 1이므로 서로 다르지 않다. 대신 $z = 1,\ \mathrm{i},\ -1 - \mathrm{i}$를 시험해 보자. 무게중심은 0이고 세제곱은 $1,\ -\mathrm{i},\ 2 - 2\mathrm{i}$이다. 두 삼각형 모두 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 순서로 변의 길이가 $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$이고(이 경우에는 합동(congruent)이기까지 하다), 둘 다 시계 반대 방향으로 돈다.
- 소문항 (iii): $z = 0, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$에 대하여 $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이므로 양변이 모두 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이다.
- 무작위 삼각형 10^4개에 대한 컴퓨터 실험으로, $w_i = az_i + b$는 항상 $(*)$를 만족하지만 대칭된 삼각형 $w_i = a\bar{z}_i + b$는 결코 만족하지 않음을 확인했다. 또한 (†)의 두 인수분해와 정삼각형 판정 조건도 확인했다. 인쇄된 대로의 조건($z_2 - z_3$을 쓴 것)은 실제로 닮음인 경우 모두에서 성립하지 않았다.

흔한 실수

- 삼각형의 방향을 무시하는 것. 절댓값만으로는 대칭까지 포함한 닮음밖에 얻지 못한다. 거울상인 두 삼각형은 편각의 부호가 반대이므로 $(*)$를 만족하지 않는다.
- 소문항 (iii)에서 역을 빠뜨리는 것. 이름을 바꾼 닮음 논증은 양쪽 방향으로 모두 성립해야 하며, $k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$ 단계는 k가 양의 실수라는 사실을 이용한다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto az + b$는 평면에서 방향(orientation)을 보존하는 닮음변환이다. 이들은 가장 단순한 뫼비우스(Möbius) 변환이며, 네 점의 비조화비(cross-ratio)는 $(*)$를 일반화한다.

정삼각형 조건은 $(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$으로도 인수분해되는데, 이는 z_1, z_2, z_3이 어느 한쪽 방향으로 정삼각형을 따라 돈다는 뜻이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수에 대한 이러한 기하학적 사고방식을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 1991, 문제 3

순수수학 • 구간별로 정의된 함수와 역함수

STEP III 1991, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q3

핵심 아이디어

절댓값(modulus)은 안쪽 식의 부호가 바뀔 때 식이 바뀌는 함수일 뿐이다. 여기 있는 세 절댓값은 $x = -1, 0, 1$에서만 부호가 바뀌므로, 이 점들이 $x < 2$를 나누는 네 구간 각각에서 함수는 평범한 이차함수이다. 이 네 이차함수를 구하고 나면 모든 질문(극점, 변곡점, 연속성, 매끄러움, 역함수)은 단순한 포물선들과 그것들이 이어지는 방식에 관한 질문이 된다.

풀이

절댓값 없애기

안쪽 식을 인수분해하면 $x^2 - x = x(x-1)$, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, $x^2 + x = x(x+1)$이다. 각각의 부호는 다음과 같다.

구간	$x^2 - x$	$x^2 - 1$	$x^2 + x$	$f(x)$
$x \le -1$	$+$	$+$	$+$	$x^2 - 4x - 1$
$-1 \le x \le 0$	$+$	$-$	$-$	$3x^2 + 1$
$0 \le x \le 1$	$-$	$-$	$+$	$1 - 5x^2$
$1 \le x < 2$	$+$	$+$	$+$	$x^2 - 4x - 1$

예를 들어 $-1 \le x \le 0$에서는

$$f(x) = 2(x^2 - x) + (1 - x^2) + 2(x^2 + x) = 3x^2 + 1,$$

이고, $0 \le x \le 1$에서는 $f(x) = -2(x^2 - x) + (1 - x^2) - 2(x^2 + x) = 1 - 5x^2$이다. 바깥쪽 두 구간에서는 세 안쪽 식이 모두 양수이고, $2(x^2 - x) + (x^2 - 1) - 2(x^2 + x) = x^2 - 4x - 1$이다. 구간의 끝점에서는 안쪽 식 하나가 0이 되므로 어느 쪽 식을 써도 옳다.

연속성과 미분가능성

f는 모두 연속인 $|\cdot|$와 다항식으로 만들어지므로, f는 $x < 2$에서 **모든 점에서 연속(continuous)**이다. 확인 삼아 보면, 이웃한 식들이 이음점에서 일치한다. $f(-1) = 4$, $f(0) = 1$, $f(1) = -4$.

미분가능성(differentiability)을 보려면 이음점에서 한쪽 도함수(one-sided derivative)를 비교한다. 네 조각의 도함수는 $2x - 4$, $6x$, $-10x$, $2x - 4$이다.

- $x = -1$에서: 왼쪽에서는 $2(-1) - 4 = -6$, 오른쪽에서는 $6(-1) = -6$이다. 둘이 같으므로 $f'(-1) = -6$이다.
- $x = 0$에서: 양쪽 모두 0이므로 $f'(0) = 0$이다.
- $x = 1$에서: 왼쪽에서는 -10, 오른쪽에서는 $2 - 4 = -2$이다. 둘이 다르므로 그래프는 $(1, -4)$에서 **꺾인 점(corner)**을 가진다.

따라서 f는 **모든 점에서 미분가능하지는 않다**. 정확히 $x = 1$에서만 미분가능하지 않다.

극점과 변곡점

단 한 점 $x = 0$을 제외하면 모든 조각에서 $f' < 0$이다.

- $x < -1$과 $1 < x < 2$: $x < 2$이므로 $f'(x) = 2x - 4 < 0$;
- $-1 < x < 0$: $f'(x) = 6x < 0$;
- $0 < x < 1$: $f'(x) = -10x < 0$.

f는 연속이고 각 조각에서 순감소하므로 $x < 2$ **전체에서 순감소(strictly decreasing)**한다. 특히 **극대점이나 극소점은 없으며**, 국소적인 것조차 없다.

> ? **생각해 보기** $f'(0) = 0$이니 $(0, 1)$은 극점(turning point)이 아닌가?

아니다. 왼쪽 조각 $3x^2 + 1$은 0에서 최솟값을, 오른쪽 조각 $1 - 5x^2$는 그곳에서 최댓값을 가지지만, 각 식이 적용되는 구간에서는 둘 다 감소한다. 따라서 f는 수평 접선을 가진 채 계속 내려가면서 $x = 0$을 지난다.

이제 오목·볼록을 보자. 각 조각의 이계도함수(second derivative)는 다음과 같다.

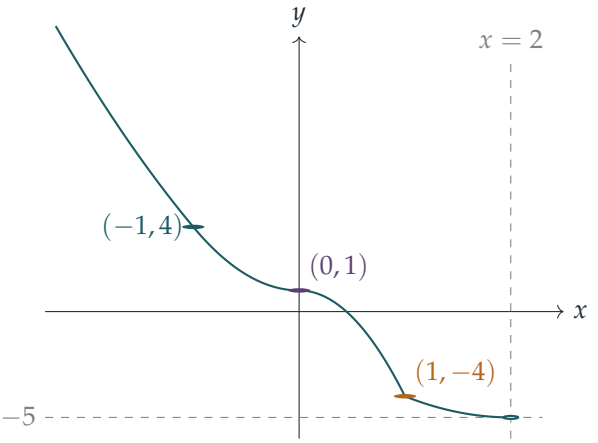
$$f'' = 2\ (x < -1), \qquad 6\ (-1 < x < 0), \qquad -10\ (0 < x < 1), \qquad 2\ (1 < x < 2).$$

- $x = 0$에서 그래프는 아래로 볼록(convex)에서 위로 볼록(concave)으로 바뀌고 그곳에서 접선을 가지므로, $(0, 1)$은 **정류 변곡점(stationary point of inflection)**이다.
- $x = -1$에서 f''는 2에서 6으로 뛰지만 양수로 유지되므로 변곡점이 아니다.

- $x = 1$에서 곡선은 위로 볼록에서 다시 아래로 볼록으로 바뀌지만, 그곳에서 꺾인 점을 가지며 접선이 없다. 보통의 정의(곡선을 가로지르는 접선)에 따르면 $(1, -4)$는 변곡점이 아니다. 답안에서 이 점을 명시적으로 밝혀 두는 것이 좋다.

개형 그리기

$x \to -\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$이다. $x \to 2^-$일 때 $f(x) \to 4 - 8 - 1 = -5$이며, 이 값은 실제로 취해지지 않는다.



곡선은 줄곧 내려간다. $(0, 1)$에서 평평해져 수평 변곡점이 되고, $(1, -4)$에서 꺾이며 그곳에서 기울기가 -10에서 -2로 뛴다.

역함수

f는 $x < 2$에서 연속이고 순감소하며, 왼쪽으로 가면 $f \to \infty$, 오른쪽으로 가면 $f \to -5$이므로, $(-\infty, 2)$에서 $(-5, \infty)$로의 전단사(bijection)이다. 따라서 f^{-1}는 $x > -5$에서 정의된다. $y = f(x)$로 놓고, 각 조각을 그 조각이 덮는 치역에서 역으로 푼다.

- $x \le -1$, 치역 $y \ge 4$: $y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$이므로 $(x-2)^2 = y + 5$이다. 여기서 $x - 2 < 0$이므로 음의 제곱근을 택한다. $x = 2 - \sqrt{y+5}$.
- $-1 \le x \le 0$, 치역 $1 \le y \le 4$: $x^2 = (y-1)/3$이고 $x \le 0$이므로 $x = -\sqrt{(y-1)/3}$.
- $0 \le x \le 1$, 치역 $-4 \le y \le 1$: $x^2 = (1-y)/5$이고 $x \ge 0$이므로 $x = \sqrt{(1-y)/5}$.
- $1 \le x < 2$, 치역 $-5 < y \le -4$: 다시 $(x-2)^2 = y + 5$이고 $x - 2 < 0$이므로 $x = 2 - \sqrt{y+5}$.

변수 이름을 x로 바꾸면 다음과 같다.

$$\mathrm{f}^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+5}, & -5 < x \le -4, \\ \sqrt{\frac{1-x}{5}}, & -4 \le x \le 1, \\ -\sqrt{\frac{x-1}{3}}, & 1 \le x \le 4, \\ 2 - \sqrt{x+5}, & x \ge 4. \end{cases}$$

공유하는 끝점에서 식들은 일치한다. 예를 들어 $x = 4$에서는 둘 다 -1이고, $x = -4$에서는 둘 다 1이다.

검산

- 특정 값 대입: $\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$이고, $1 - 5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$이다. 또 $\mathrm{f}^{-1}(-\frac{1}{4}) = \sqrt{1.25/5} = \frac{1}{2}$이다.
- 직접 계산하면 $\mathrm{f}(-3) = 2 \cdot 12 + 8 - 2 \cdot 6 = 20$이다. 식으로는 $9 + 12 - 1 = 20$이고, $\mathrm{f}^{-1}(20) = 2 - \sqrt{25} = -3$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 10^5개의 $x < 2$에 대해 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$이고, 촘촘한 격자의 모든 점에서 함수가 감소하며, $x = 1$에서의 한쪽 기울기는 -10과 -2로 나온다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}'(0) = 0$이라는 이유로 $(0, 1)$을 극대점이나 극소점이라고 하는 것. 각 포물선 자체의 꼭짓점이 그 식이 성립하는 구간의 가장자리에 있다면 그것은 의미가 없다.
- 역함수에서 제곱근의 부호를 잘못 고르는 것. 각 구간에서 x(또는 $x - 2$)의 부호가 이를 결정한다.
- 두 식이 이어지는 점은 반드시 미분가능하지 않은 점이라고 가정하는 것. $x = -1$과 $x = 0$에서는 기울기가 일치한다.

STEP 너머

구간별로 정의된 함수(piecewise-defined function)는 미분가능하지 않으면서 연속일 수 있고, 이계도함수가 연속이 아니면서 미분가능할 수도 있다(여기서 f''는 $x = -1$과 $x = 0$에서 뛴다). 역함수 정리(inverse function theorem)에 따르면 순단조(strictly monotonic) 연속함수는 연속인 역함수를 가지며, 그 역함수는 $\mathrm{f}' \neq 0$인 곳에서 미분가능하다. f^{-1}가 정확히 $\mathrm{f}'(0) = 0$에 대응하는 $x = 1$에서 수직 접선을 가진다는 점에 주목하라. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 1991, 문제 4

순수수학 • 공간에서의 직선과 평면

STEP III 1991, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q4

핵심 아이디어

같은 관찰자(observer) O_1에서 본 서로 다른 두 시선(line of sight)은 모두 O_1을 지나므로 하나의 평면을 생성하고, P의 경로는 두 시선과 모두 만난다. O_1을 지나는 두 직선과 만나면서 O_1 자체는 지나지 않는 직선은 반드시 두 직선이 이루는 평면 위에 있다. O_2에 대해서도 마찬가지이므로, 경로는 두 평면이 만나는 교선이다. 이렇게 하면 꼬인 위치(skew)에 있는 듯한 네 직선에 관한 문제가 외적(cross product) 하나와 연립방정식(simultaneous equations) 한 쌍의 문제로 바뀐다.

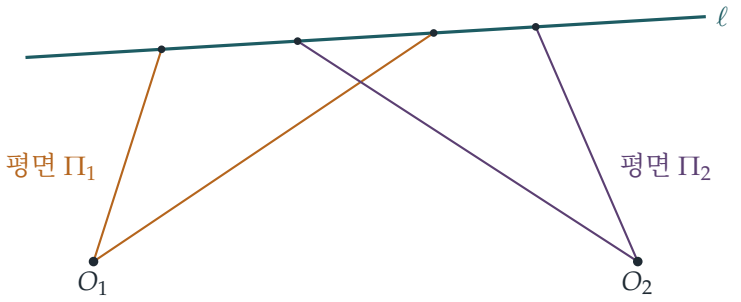
풀이

P가 움직이는 직선을 ℓ이라 하자. 네 시선의 방향은 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_1 = (2,0,3), \qquad \mathbf{d}_1' = (0,3,4) \qquad (O_1\text{을 지남}),$$

$$\mathbf{d}_2 = (-3,1,3), \qquad \mathbf{d}_2' = (-4,2,5) \qquad (O_2\text{를 지남}).$$

각 시선은 관찰자와 P의 한 위치를 잇는 직선이므로, ℓ은 네 시선과 모두 만난다.



(개략도일 뿐이다. 호박색 두 시선과 ℓ은 한 평면 Π_1 위에 있고, 자주색 두 시선과 ℓ은 또 다른 평면 Π_2 위에 있다.)

ℓ이 각 관찰자를 지나는 평면 위에 있는 이유

먼저, ℓ은 O_1을 지날 수 없다. 만약 지난다면 $P \neq O_1$일 때마다 O_1에서의 시선은 ℓ 자신이 되므로, O_1에서의 서로 다른 두 시선이 존재할 수 없다. 마찬가지로 ℓ은 O_2를 지나지 않는다.

O_1에서의 두 시선은 O_1을 지나는 서로 다른 직선이므로 O_1에서만 만나고, 평면 Π_1을 생성한다. 직선 ℓ은 두 시선과 각각 한 점에서 만나는데, 두 시선의 유일한 공통점은 O_1이고 ℓ은 O_1을 지나지 않으므로 이 두 점은 서로 다르다. 두 점 모두 Π_1 위에 있으므로 ℓ 전체가 Π_1 위에 있다. 같은 방법으로 ℓ은 O_2를 지나고 $\mathbf{d}_2$와 $\mathbf{d}_2'$을 포함하는 평면 Π_2 위에 있다.

> **생각해 보기** ℓ이 특정한 평면 위에 놓이지 않고 각 시선과 한 점씩에서 교차하기만 할 수는 없을까?

직선 하나만 놓고 보면 그럴 수 있다. 그러나 여기서는 교점 중 두 개가 O_1을 지나는 직선 위에 있고, 서로 다른 두 점은 ℓ을 결정한다. 두 점이 모두 Π_1 위에 있으므로 ℓ에게는 다른 선택지가 없다. 두 점을 지나는 직선, 곧 Π_1 위에 있는 직선이 될 수밖에 없다.

평면 Π_1

Π_1의 법선벡터(normal)는

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_1' = (2,0,3) \times (0,3,4) = (0-9,\ 0-8,\ 6-0) = (-9,-8,6),$$

이고 Π_1은 원점을 지나므로 다음과 같다.

$$\Pi_1 : \quad 9x + 8y - 6z = 0.$$

평면 Π_2

Π_2의 법선벡터는

$$\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_2' = (-3,1,3) \times (-4,2,5) = (5-6,\ -12+15,\ -6+4) = (-1,3,-2),$$

이고 Π_2는 $O_2(8a,0,0)$을 지나므로 $-(x-8a)+3y-2z=0$, 즉 다음과 같다.

$$\Pi_2 : \quad x - 3y + 2z = 8a.$$

(간단한 검산: $(-3,1,3)\cdot(-1,3,-2) = 3+3-6 = 0$이고 $(-4,2,5)\cdot(-1,3,-2) = 4+6-10=0$이다.)

$a \neq 0$이라고 가정한다. 그렇지 않으면 두 관찰자가 일치한다. 그러면 O_2는 Π_1 위에 있지 않고($9\cdot 8a \neq 0$이므로) O_1은 Π_2 위에 있지 않으며, 이는 앞에서 말한 내용과 일치한다.

경로

법선벡터 $(-9,-8,6)$과 $(-1,3,-2)$는 평행하지 않으므로 Π_1과 Π_2는 한 직선에서 만나고, 그 직선은 ℓ이어야 한다. 이 직선의 방향은 두 법선벡터에 모두 수직이다.

$$(-9,-8,6)\times(-1,3,-2)=(16-18,\ -6-18,\ -27-8)=(-2,-24,-35),$$

따라서 방향으로 $(2,24,35)$를 택할 수 있다. 이 직선 위의 한 점을 찾기 위해 $y=0$으로 놓자. 그러면 방정식은 $9x=6z$와 $x+2z=8a$가 되므로 $x=\frac{2}{3}z$이고 $\frac{8}{3}z=8a$이다. 이로부터 $z=3a$, $x=2a$를 얻는다. 따라서 $(2a,0,3a)$는 ℓ 위에 있다. 당연히 이 점은 O_1에서의 첫 번째 시선 위에도 있다.

그러므로 P의 경로는

$$\boxed{\frac{x-2a}{2}=\frac{y}{24}=\frac{z-3a}{35}}$$

이다. 또는 이와 동치인 두 방정식 $9x+8y-6z=0$과 $x-3y+2z=8a$의 쌍으로 나타낼 수도 있다.

마지막으로, ℓ은 실제로 네 시선과 모두 관찰자가 아닌 점에서 만난다. ℓ을 $(2a+2\lambda,\ 24\lambda,\ 3a+35\lambda)$로 쓰면, 네 시선과 만나는 점은 각각

$$(2a,0,3a),\qquad (0,-24a,-32a),\qquad \left(\tfrac{80a}{37},\tfrac{72a}{37},\tfrac{216a}{37}\right),\qquad \left(\tfrac{56a}{25},\tfrac{72a}{25},\tfrac{36a}{5}\right)$$

이다.

> **생각해 보기** $a>0$일 때 두 번째 점은 y와 z가 음수이다. 이것이 문제가 될까?

시선은 직선 전체로 주어져 있고, $(0,-24a,-32a)$는 $x=0,\ y/3=z/4$를 만족한다. 우리는 직선만 사용했을 뿐 관찰자가 어느 쪽을 보고 있었는지는 사용하지 않았으므로 답은 그대로 유효하다. "시선"을 관찰자에서 출발하는 반직선(ray)으로 해석한다면, 이 관측은 O_1의 뒤쪽에 있다. 이는 주어진 자료의 특이한 점일 뿐 방법의 오류가 아니다.

검산

- 점 $(2a,0,3a)$와 방향 $(2,24,35)$를 두 평면의 방정식에 대입한다. $9(2)+8(24)-6(35)=18+192-210=0$이고 $2-72+70=0$이므로 방향이 두 평면에 모두 놓인다.
- $a=1$일 때 점 $\left(\frac{80}{37},\frac{72}{37},\frac{216}{37}\right)$은 $O_2+\frac{72}{37}(-3,1,3)$과 같고, $\frac{80/37-2}{2}=\frac{3}{37}=\frac{72/37}{24}$이다. 따라서 이 점은 시선과 경로 위에 모두 있다.
- 여러 a 값에 대해 네 교점을 모두 정확한 유리수 연산으로 확인하였다.

흔한 실수

- 시선 쌍의 교점을 구하려는 것: 서로 다른 시각에 서로 다른 관찰자에게서 나온 시선은 전혀 만나지 않을 수도 있다.
- Π_2가 원점이 아니라 O_2를 지난다는 사실을 잊는 것. 그러면 $= 8a$ 대신 $x - 3y + 2z = 0$을 얻게 된다.
- 외적의 부호 오류. 법선벡터를 두 방향벡터와 각각 내적하여 항상 다시 확인하라.

STEP 너머

공간에서 주어진 네 직선과 모두 만나는 직선은 몇 개일까? 일반적인 위치(general position)에 있는 네 직선에 대해서는 답이 2이다(복소수 범위에서 센 것이며, 실수 범위에서는 0일 수도 있다). 이는 열거기하학(enumerative geometry)의 고전적인 결과이며, 여기서의 네 직선은 두 개씩 짝지어 두 관찰자를 지나므로 특수한 경우이다. 같은 시선 평면 아이디어가 삼각측량(triangulation)과, 두 카메라로 3차원 점의 위치를 복원하는 스테레오 비전(stereo vision)의 에피폴라 기하학(epipolar geometry)의 바탕이 된다. 직선, 평면, 교점에 관한 선형대수학은 Strang, *Introduction to Linear Algebra*를 읽어 보라.

풀이

STEP III 1991, 문제 5

순수수학 • 극곡선과 상미분방정식

STEP III 1991, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q5

핵심 아이디어

잠시 극좌표는 잊자. 이 방정식은 θ를 변수로 하는 상수계수 2계 선형 상미분방정식(linear second-order ODE with constant coefficients)일 뿐이다. 평소처럼 여함수(complementary function)와 특수해(particular integral)를 더하는 방법으로 풀고, $\theta = \frac{\pi}{2}$에서의 조건으로 상수를 정한 다음, 다시 기하로 돌아온다. $r = f(\theta)$로 주어진 곡선은 r이 0에서 시작하여 0에서 끝나고 그 사이에서 양수로 유지될 때 닫힌 고리(closed loop)가 되며, 그 넓이는 $\frac{1}{2}\int r^2 \, \mathrm{d}\theta$이다.

풀이

미분방정식 풀기

보조방정식(auxiliary equation) $m^2 + 4 = 0$의 근은 $m = \pm 2\mathrm{i}$이므로, 여함수는

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta.$$

이다. 특수해를 구할 때, $\sin 3\theta$는 여함수에 포함되지 않으므로 $r = k\sin 3\theta$로 놓아 본다. 그러면 $r'' = -9k\sin 3\theta$이고,

$$-9k\sin 3\theta + 4k\sin 3\theta = 5\sin 3\theta \quad \Longrightarrow \quad k = -1.$$

이다. 따라서 일반해(general solution)는

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta - \sin 3\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2A\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta - 3\cos 3\theta.$$

이다. $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 $\cos 2\theta = -1$, $\sin 2\theta = 0$, $\sin 3\theta = -1$, $\cos 3\theta = 0$이다. 두 조건은 다음과 같이 된다.

$$r = -A + 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2B = -2 \quad \Longrightarrow \quad B = 1.$$

그러므로

$$r = \sin 2\theta - \sin 3\theta.$$

이다.

곡선은 닫힌 고리이다

r이 어디에서 0이 되고 부호가 어떤지 알아보기 위해, 항등식 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$를 이용하여 인수분해한다.

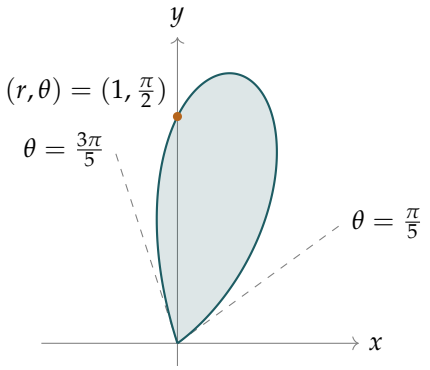
$$r = 2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) = -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}.$$

? 생각해 보기 인수분해한 꼴이 왜 "닫힌 고리" 문제를 해결해 주는가?

주어진 범위에서 두 인수의 부호를 쉽게 읽어 낼 수 있기 때문이다. $\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$에서

- $\frac{\theta}{2}$는 $\left[\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right]$에 속하므로 $\sin\frac{\theta}{2} > 0$이다.
- $\frac{5\theta}{2}$는 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$에 속하므로 $\cos\frac{5\theta}{2} \le 0$이고, 등호는 양 끝에서만 성립한다.

따라서 $\theta = \frac{\pi}{5}$와 $\theta = \frac{3\pi}{5}$에서 $r = 0$이고, 그 사이의 모든 θ에서 $r > 0$이다. 그러므로 곡선은 반직선 $\theta = \frac{\pi}{5}$를 따라 원점을 떠나 양의 r로 돌아 나간 뒤, 반직선 $\theta = \frac{3\pi}{5}$를 따라 원점으로 돌아온다. 그 사이의 각 반직선 $\theta =$ 상수는 곡선과 정확히 한 번 만나므로(그 θ에 대한 $r > 0$인 단 하나의 점에서), 곡선은 자기 자신과 교차하지 않는다. 즉 이 곡선은 하나의 닫힌 고리이며, 영역 $0 \le r \le \sin 2\theta - \sin 3\theta$, $\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$를 둘러싼다.



넓이

둘러싸인 넓이는

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} \left(\sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta \sin 3\theta + \sin^2 3\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$

이다. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$와 $2\sin P \sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$를 이용하면

$$r^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\cos 4\theta - \tfrac{1}{2}\cos 6\theta - \cos\theta + \cos 5\theta.$$

이다. $D = \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}$로 놓자. $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right]$에서 각 항을 적분하고, $\sin(x+2\pi) = \sin x$와 $\sin(\pi - x) = \sin x$를 이용하여 각 사인 값을 $\pm\sin\frac{\pi}{5}$ 또는 $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$로 줄인다.

$$\begin{aligned}
\int 1\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{2\pi}{5},\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 4\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{12\pi}{5} - \sin\tfrac{4\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{2\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}D,\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 6\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{12}\left[\sin\tfrac{18\pi}{5} - \sin\tfrac{6\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{12}\left[-\sin\tfrac{2\pi}{5} + \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = \tfrac{1}{12}D,\\
\int -\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\left[\sin\tfrac{3\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -D,\\
\int \cos 5\theta\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{5}\left[\sin 3\pi - \sin\pi\right] = 0.
\end{aligned}$$

(셋째 줄에서는 $\sin\frac{18\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5}$이고 $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}$이다.) 모두 더하면

$$\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{5} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - 1\right)D = \frac{2\pi}{5} - \frac{25}{24}D,$$

이고, 이를 반으로 나누면

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{5} - \frac{25}{48}D = \frac{\pi}{5} + \frac{25}{48}\left[\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\right],$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 $r = \sin\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 1$이고 $r' = 2\cos\pi - 3\cos\frac{3\pi}{2} = -2$이므로 조건을 만족한다.
- 수치적으로 $\mathcal{A} \approx 0.6283 - \frac{25}{48}(0.3633) \approx 0.4391$이다. $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값과, 그려진 고리에 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용한 값이 모두 0.43911이다. $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 출발하여 미분방정식을 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가면 $r = \sin 2\theta - \sin 3\theta$가 재현되고, 양 끝에서 r이 0으로 돌아옴이 확인된다.
- 답은 그럴듯하다. 고리는 $r \approx 1.22$까지 뻗어 나가고 $\frac{2\pi}{5}$의 각을 차지한다. 반지름이 1.22이고 중심각이 그 각인 부채꼴의 넓이는 약 0.93이고, 고리는 그 절반보다 조금 작은 부분을 채운다.

흔한 실수

- 특수해의 부호를 잘못 구하는 것: $(-9+4)k = 5$에서 $k = -1$이지 $+1$이 아니다.
- 양 끝점 사이에서 $r > 0$임을 보이는 것을 잊는 것. r의 영점이 두 개라는 것만으로는 고리가 되지 않는다. 그 사이에서 r의 부호가 바뀔 수도 있고, 그러면 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$는 둘러싸인 넓이가 아니다.
- $\sin\frac{12\pi}{5}$나 $\sin\frac{18\pi}{5}$를 부주의하게 줄이는 것: 각각 $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$이며, 부호가 중요하다.

STEP 너머

여기서 이 방법이 통하는 것은 방정식이 선형이기 때문이다. 모든 해는 하나의 특수해에 두 독립인 해 $\cos 2\theta$와 $\sin 2\theta$의 일차결합을 더한 것이고, 두 초기조건(initial condition)은 정확히 하나의 해를 골라낸다. 이것이 선형 상미분방정식의 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)로, 대학 1학년 과정에서 증명하고 끊임없이 사용한다. 이와 관련된 매력적인 사실로, 역제곱 힘(inverse-square force)을 받는 궤도에서는 $u = 1/r$이 $u'' + u =$ 상수를 만족하는데, 바로 이로부터 뉴턴(Newton)의 법칙이 원뿔곡선(conic section) 궤도를 이끌어 낸다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초미분방정식)는 선형 이론을 자세히 다룬다.

풀이

STEP III 1991, 문제 6

순수수학 • 쌍곡 일차변환

STEP III 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.6 절 **쌍곡 회전과 상대성 이론**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/hyperbolic-rotations.html

핵심 아이디어

이 행렬은 회전행렬(rotation matrix)처럼 행동하지만, 원함수 대신 쌍곡선함수(hyperbolic function)가 들어 있다. 그리고 항등식 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$과 cosh, sinh의 덧셈정리(addition formulae)가 모든 일을 해 준다. 기울기가 $\tanh v$인 방향을 벡터 $(\cosh v, \sinh v)$로 쓰면 T가 기울기에 미치는 효과가 분명해진다. 그것은 단지 "쌍곡각(hyperbolic angle)" v에 u를 더할 뿐이다. 각에 관한 조건은 두 직선 사이의 각의 탄젠트를 v_1과 v_2로 나타낸 다음, 무엇이 고정되어야 하는지 살펴보면 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $c = \cosh u$, $s = \sinh u$라 쓰자. 그러면 $c^2 - s^2 = 1$이고, $u > 0$이므로 $s > 0$이다. 변환(transformation)은 다음과 같다.

$$x' = cx + sy, \qquad y' = sx + cy.$$

쌍곡선

임의의 점에 대하여

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (cx + sy)^2 - (sx + cy)^2 \\ &= (c^2 - s^2)x^2 + 2csxy - 2csxy - (c^2 - s^2)y^2 \\ &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

따라서 T는 $x^2 - y^2$을 보존하고, $x^2 - y^2 = 1$ 위의 모든 점은 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점으로 옮겨진다. 곡선은 단지 자기 자신 안으로 옮겨지는 것이 아니라 빠짐없이 덮인다. u 대신 $-u$를 넣은 행렬이 T의 역행렬(inverse)이고(곱해 보고 $c^2 - s^2 = 1$을 이용하면 된다), 이 행렬 역시 $x^2 - y^2$을 보존한다. 그러므로 쌍곡선(hyperbola) 위의 모든 점은 쌍곡선 위의 어떤 점의 상이다. 곡선은 자기 자신으로 변환된다.

(사실 각 가지는 자기 자신으로 옮겨진다. $x \geq 1$이면 $|y| < x$이므로 $x' = cx + sy > (c - s)x = \mathrm{e}^{-u}x > 0$이다.)

원점을 지나는 불변직선

T는 선형(linear)이므로 원점을 원점으로 보내고, 방향이 $\mathbf{d}$이며 원점을 지나는 직선을 방향이 $T\mathbf{d}$이며 원점을 지나는 직선으로 보낸다. 따라서 $T\mathbf{d}$가 $\mathbf{d}$와 평행해야 한다. 즉 $\mathbf{d}$는 고유벡터(eigenvector)여야 한다. $\mathbf{d} = (1, m)$을 넣어 보자.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + sm \\ s + cm \end{pmatrix},$$

이것이 $(1, m)$과 평행할 필요충분조건은 $s + cm = m(c + sm)$, 즉 $s(1 - m^2) = 0$이다. $s \neq 0$이므로 $m = \pm 1$이다. (수직 방향 $(0, 1)$은 (s, c)로 옮겨지는데, 이것은 수직이 아니므로 새로운 것을 주지 않는다.) 두 직선은

$$\boxed{y = x \quad \text{그리고} \quad y = -x}$$

이고, 실제로 $T(1, 1) = \mathrm{e}^{u}(1, 1)$, $T(1, -1) = \mathrm{e}^{-u}(1, -1)$이다. 이 두 직선은 쌍곡선의 점근선(asymptote)이며, 이는 쌍곡선이 자기 자신으로 옮겨진다는 사실과 잘 맞는다.

기울기: $v' = v + u$

점 $\mathbf{p}$를 지나고 방향이 $\mathbf{d}$인 직선을 생각하자. 이 직선 위의 점은 $\mathbf{p} + t\mathbf{d}$이다. 선형성에 의해 그 상은 $T\mathbf{p} + tT\mathbf{d}$, 즉 $T\mathbf{p}$를 지나고 방향이 $T\mathbf{d}$인 직선이다. 따라서 직선의 위치는 상관없고 방향만이 중요하다.

기울기(gradient)가 $\tanh v$인 직선의 방향은 $(1, \tanh v)$이고, $\cosh v > 0$을 곱하면 방향

$(\cosh v, \sinh v)$로 쓸 수 있다. 그러면 덧셈정리에 의해

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\ \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u\cosh v + \sinh u \sinh v\\ \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\ \sinh(u+v)\end{pmatrix}$$

이다. 그러므로 상인 직선의 기울기는 $\tanh(v+u)$이다. tanh는 일대일(one-to-one)이므로 $\tanh v' = \tanh(v+u)$로부터

$$v' = v + u,$$

를 얻고, 이것이 보이려던 것이다. (기울기가 -1과 1 사이에 엄격히 있는 직선만 이렇게 쓸 수 있으며, 문제에서 $\tanh v$를 쓰는 까닭이 이것이다.)

같은 각

두 직선의 기울기가 m_1, m_2이고 $1 + m_1 m_2 \neq 0$이면, 두 직선 사이의 예각(acute angle) θ는 다음을 만족한다.

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

여기서는 $|m_1|, |m_2| < 1$이므로 $1 + m_1 m_2 > 0$이다. 즉 두 직선은 결코 수직이 아니고, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$이며, θ는 $\tan\theta$에 의해 정해진다.

> **생각해 보기** 이 공식은 $\tanh(v_1 - v_2)$처럼 보이지만 분모의 부호가 맞지 않는다. 그렇다면 이 식은 대신 무엇으로 정리되는가?

$m_i = \tanh v_i$라 놓고 분자와 분모에 $\cosh v_1 \cosh v_2 > 0$을 곱하면

$$\tan\theta = \frac{|\sinh v_1 \cosh v_2 - \cosh v_1 \sinh v_2|}{\cosh v_1 \cosh v_2 + \sinh v_1 \sinh v_2} = \frac{|\sinh(v_1 - v_2)|}{\cosh(v_1 + v_2)}.$$

변환된 직선은 $v_i' = v_i + u$를 가진다. 그 차는 변하지 않지만 합은 $2u$만큼 커지므로, 두 직선 사이의 각 θ'은 다음을 만족한다.

$$\tan\theta' = \frac{|\sinh(v_1 - v_2)|}{\cosh(v_1 + v_2 + 2u)}.$$

ℓ_1과 ℓ_2가 애초에 만나려면 $v_1 \neq v_2$여야 하므로 분자는 0이 아니다. 따라서

$$\theta = \theta' \iff \cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u).$$

$\cosh a = \cosh b$일 필요충분조건은 $a = \pm b$이므로, 이는 $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$이거나 $v_1 + v_2 = -(v_1 + v_2 + 2u)$라는 뜻이다. 앞의 경우는 $u > 0$이므로 불가능하다. 그러므로 필요충분조건(necessary and sufficient condition)은

$$\boxed{v_1 + v_2 = -u}$$

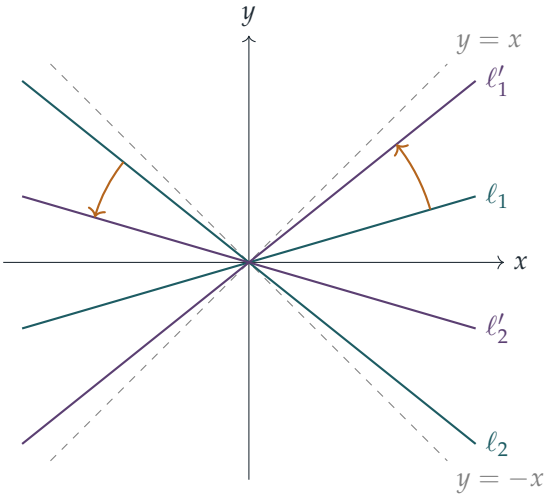
이고, 동치로 $v_1' + v_2' = u$이다.

직선들이 원점에서 만날 때의 그림

$v_1 + v_2 = -u$이면

$$v_1' = v_1 + u = -v_2, \qquad v_2' = v_2 + u = -v_1.$$

이다. 따라서 ℓ_1'의 기울기는 $-\tanh v_2$이고, 이는 ℓ_2를 x축에 대하여 대칭이동(reflection)한 것이다. 마찬가지로 ℓ_2'은 ℓ_1을 대칭이동한 것이다. 두 직선이 원점을 지나면, 변환된 직선 쌍은 원래 직선 쌍을 x축에 대하여 비춘 거울상일 뿐이며, 그래서 두 직선 사이의 각이 같은 것이다. 그림에서는 $u = 0.8$, $v_1 = 0.3$, $v_2 = -1.1$을 사용하였다. ℓ_1, ℓ_2의 기울기는 약 0.29와 -0.80이고, ℓ_1', ℓ_2'의 기울기는 0.80과 -0.29이다. 각 직선은 T가 늘이는 불변직선(invariant line) $y = x$ 쪽으로 돈다.



청록색 직선은 ℓ_1, ℓ_2이고, 자주색 직선은 그 상이다. 호박색 화살표는 $\ell_1 \to \ell_1'$과 $\ell_2 \to \ell_2'$을 나타낸다. 자주색 직선 쌍은 청록색 직선 쌍을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

검산

- $u = 0.8$, $v_1 = 0.3$, $v_2 = -1.1$일 때 ℓ_1과 ℓ_2 사이의 각과 그 상들 사이의 각을 수치로 계산하면 둘 다 54.92°가 나온다. v_2를 조금 바꾸면 두 각이 달라진다.
- $u \to 0$이면 T는 항등변환(identity)이 되고, 조건은 $v_1 + v_2 = 0$이 된다. 이는 x축에 대하여 대칭인 두 직선이며, 항등변환은 당연히 이 대칭을 유지한다.
- $\cosh u + \sinh u = \mathrm{e}^u$이므로 $T(1,1) = \mathrm{e}^u(1,1)$은 손으로 쉽게 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 쌍곡선이 자기 자신 **안으로** 옮겨진다는 것만 보이는 것. 역변환(inverse transformation)을 보면 빠지는 점이 없음을 알 수 있다.
- 각의 공식을 $\tanh(v_1 - v_2)$로 쓰는 것. $1 + m_1 m_2$의 $+$ 부호 때문에 분모에는 대신 $\cosh(v_1 + v_2)$가 나오며, T에 의해 변하는 것은 바로 **합**이다.
- $\cosh a = \cosh b$의 근 $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$를 빠뜨리고, 그것이 왜 불가능한지 말하지 않는 것.

STEP 너머

이 행렬은 특수상대성이론(special relativity)의 로런츠 부스트(Lorentz boost)로, x와 y가 각각 시간과 공간의 역할을 한다(빛의 속력이 1인 단위에서). 양 $x^2 - y^2$은 불변 간격(invariant interval)이고, $\tanh v$는 속도이며, v는 그 **신속도**(rapidity)이다. 결과 $v' = v + u$는 신속도가 더해진다는 뜻이며, 이는 상대론적 속도 덧셈 공식(relativistic velocity-addition formula)이 모습을 바꾼 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 특수상대성이론을 이런 방식으로 전개한다. 불변직선을 고유벡터의 관점에서 보려면 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 1991, 문제 7

순수수학 • 대칭성을 이용한 적분

> **STEP III 1991, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q7

핵심 아이디어

$\ln(\sin x)$의 적분(integral)은 역도함수(antiderivative)로는 구할 수 없지만, 대칭성(symmetry)이 모든 일을 해 준다. 치환(substitution) $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$는 sin과 cos을 서로 바꾸고, $x \mapsto \pi - x$는 $[0, \pi]$에서의 $\sin x$가 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서의 값을 두 번 되풀이한 것임을 보여 준다. 이어서 $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$로 쓰면 미지의 적분이 만족해야 하는 방정식을 얻는다. 소문항 (iii)은 $x \cot x$를 $\ln(\sin x)$로 바꾸는 부분적분(integration by parts)이고, 소문항 (ii)는 경계항(boundary term)을 처리한다.

풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 둔다.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

소문항 (i)

사인 적분과 코사인 적분은 같다. $x = \frac{1}{2}\pi - t$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$이고 $\sin x = \cos t$이다. 적분 구간의 끝 $0, \frac{1}{2}\pi$는 $\frac{1}{2}\pi, 0$이 되고, 음의 부호가 이를 다시 뒤집는다.

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \ln(\cos t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

$\sin 2x$와 연결하기. 같은 두 적분을 더하고 $\ln a + \ln b = \ln(ab)$를 이용하면(열린구간에서

$\sin x, \cos x > 0$이므로 성립한다) 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\pi \ln 2. \end{aligned}$$

양변을 2로 나누면 $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\pi \ln 2$이고, 이로써 첫 번째 등식이 완성된다.

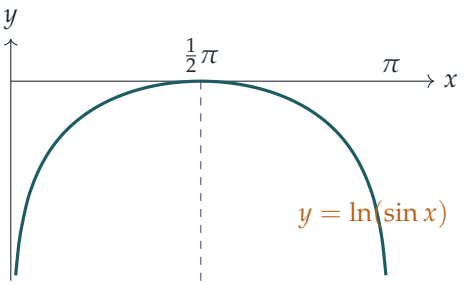
두 번째 등식. $u = 2x$로 두면 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 끝은 0과 π가 된다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u.$$

이제 $[0, \pi]$를 $\frac{1}{2}\pi$에서 나눈다. 뒤쪽 절반에서는 $u = \pi - v$로 치환한다. $\sin(\pi - v) = \sin v$이고 적분 구간의 끝 $\frac{1}{2}\pi, \pi$는 $\frac{1}{2}\pi, 0$이 되므로

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin v)\,\mathrm{d}v = I.$$

아래 그래프가 이 대칭성을 보여 준다. 곡선 $y = \ln(\sin x)$는 $x = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭이다.



따라서 $\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = 2I$이고, 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(2I) = I,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

I의 값 구하기. 두 번째 결과를 첫 번째 결과에 대입하면

$$I = \tfrac{1}{2}I - \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad\Longrightarrow\quad I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

이 단계에서는 I가 유한한 수여야 하며, 문제에서 수렴(convergence)을 가정하도록 허용한 까닭이 바로 이것이다. 그 가정이 없다면 "$I = \frac{1}{2}I + c$"는 아무것도 증명하지 못한다.

소문항 (ii)

$x \geq 1$이라 하고 $u = \sqrt{x}$로 둔다. 그러면 $u \geq 1$이므로 주어진 부등식(inequality)을 적용할 수 있다.

$$\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}, \qquad \text{즉,} \qquad \tfrac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}.$$

첫 번째 극한. $x \geq 1$이면 $\ln x \geq 0$이고, $\ln x < 2\sqrt{x}$의 양변을 $x > 0$으로 나누면

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$x \to \infty$일 때 우변은 0으로 가므로, 조임 정리(squeeze principle, sandwich principle)에 의하여 $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$이다.

두 번째 극한. $0 < x < 1$일 때 $x = 1/t$로 두면 $t > 1$이고, $x \to 0^+$일 때 $t \to \infty$이다. 그러면

$$x \ln x = \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t} \to 0$$

이 첫 번째 극한(limit)에 의하여 성립한다. 따라서 x가 양수 쪽에서 0으로 갈 때 $x \ln x \to 0$이다.

소문항 (iii)

먼저 피적분함수(integrand)는 0에서 문제가 없음에 주목한다. $x \cot x = \dfrac{x}{\sin x} \cos x \to 1$이기 때문이다. $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $\cot x$는 $\ln(\sin x)$의 도함수이므로, $u = x$, $\mathrm{d}v = \cot x \, \mathrm{d}x$, $v = \ln(\sin x)$로 두고 부분적분한다. 로그는 0에서 발산하므로 $[\varepsilon, \frac{1}{2}\pi]$에서 계산한 다음 $\varepsilon \to 0^+$로 보낸다.

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln(\sin x) \Big]_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x.$$

위끝에서 $\ln(\sin \frac{1}{2}\pi) = \ln 1 = 0$이다. 따라서 경계항은 그냥 $-\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$이다.

> **생각해 보기** 왜 $\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$은 0으로 갈까? 소문항 (ii)는 $x \ln(\sin x)$가 아니라 $x \ln x$에 관한 것이다.

$s = \sin \varepsilon$으로 쓰자. $\varepsilon \to 0^+$일 때 이 값은 양수 쪽에서 0으로 간다. 그러면

$$\varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \cdot s \ln s.$$

첫 번째 인수는 1로 가고(잘 알려진 극한 $\sin \varepsilon / \varepsilon \to 1$), $s \ln s \to 0$은 소문항 (ii)에 의하여 성립한다. 따라서 경계항은 0으로 간다.

$\varepsilon \to 0^+$로 보내고 소문항 (i)을 이용하면

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = 0 - I = \tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

검산

- 부호: 이 구간에서 $\ln(\sin x) \le 0$이므로 I는 음수여야 하고, 실제로 $-\frac{1}{2}\pi\ln 2 \approx -1.0888$은 음수이다. 한편 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $x\cot x > 0$이고, 우리가 얻은 답은 양수이다.
- 크기: $x\cot x$는 길이가 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$인 구간에서 1부터 0까지 감소하므로, 적분값이 약 1.09인 것은 그럴듯하다.
- 수치적으로, 중점 구적법(midpoint quadrature)으로 계산하면 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\cot x\,\mathrm{d}x \approx 1.0887930$이 되어 $\frac{1}{2}\pi\ln 2 = 1.0887930\ldots$과 일치하고, $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \approx -1.08879$이다.

흔한 실수

- $u = 2x$로 바꿀 때 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 것. 그러면 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = 2I$가 되어 아무 데로도 이어지지 않는다.
- 소문항 (iii)에서 0에서의 극한을 정당화하지 않고 $[x\ln(\sin x)]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 0$이라고 쓰는 것. 그 극한이 바로 소문항 (ii)의 존재 이유이다.

STEP 너머

여기서 다룬 두 적분은 모두 **이상적분**(*improper integral*)이다. 피적분함수나 사용한 역도함수가 구간의 한 끝점에서 유계가 아니다. 이런 적분은 우리가 ε을 써서 한 것처럼 극한으로 정의된다. 해석학(analysis) 입문 강좌에서는 이를 엄밀하게 다루고, 그러한 극한이 언제 존재하는지 판정하는 방법을 제공한다. 문제의 "가정해도 좋다"라는 구절 뒤에 있는 것이 바로 이 판정법들이다. 같은 대칭 기법으로 $\int_0^{\pi/2}\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x = 0$과 같은 훨씬 많은 적분을 계산할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 모든 것의 바탕이 되는 극한과 적분의 이론을 다룬다.

풀이

STEP III 1991, 문제 8

순수수학 • 점화 공식과 합

> **STEP III 1991, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q8

핵심 아이디어

소문항 (i)은 점화 공식(reduction formula)이므로, 부분적분(integration by parts)을 먼저 시도하는 것이 자연스럽다. 남는 피적분함수(integrand)에는 $\sin x \sin kx$가 들어 있는데, $\cos(k-1)x$에 대한 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)를 쓰면 이것을 다시 같은 꼴의 적분들로 바꿀 수 있다. 소문항 (ii)는 $(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^m$의 이항전개(binomial expansion)에서 실수부분(real part)을 비교하는 문제이다. 소문항 (iii)은 (ii)를 적분하고, (i)의 점화식을 망원 합(telescoping)으로 풀어내면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

$k \geq 1$이라 하고, $u = \cos^k x$, $\mathrm{d}v = \cos kx \, \mathrm{d}x$로 두어 부분적분한다. 그러면 $v = \frac{1}{k}\sin kx$이고 $\mathrm{d}u = -k\cos^{k-1} x \sin x \, \mathrm{d}x$이므로

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\tfrac{1}{k}\cos^k x \sin kx\right]_0^\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{k}\cos^k \theta \sin k\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

이다. 괄호 안의 값은 $x = 0$에서 0이 되기 때문이다.

> **생각해 보기** $\sin x \sin kx$를 x의 배수의 코사인들로 어떻게 다시 쓸 수 있을까?

$(k-1)x = kx - x$로 쓰면, 덧셈정리에 의해

$$\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x,$$

이므로

$$\sin x \sin kx = \cos(k-1)x - \cos x \cos kx.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x &= \int_0^\theta \cos^{k-1} x \cos(k-1)x \, \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^\theta \cos^k x \cos kx \, \mathrm{d}x \\ &= I_{k-1} - I_k.\end{aligned}$$

이다. 이것을 다시 대입하고 양변에 k를 곱하면

$$kI_k = \cos^k \theta \sin k\theta + kI_{k-1} - kI_k,$$

즉

$$2kI_k = kI_{k-1} + \cos^k \theta \sin k\theta,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (ii)

$z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$라 하자. 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} z^r \\ &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \left(\cos 2r\theta + \mathrm{i} \sin 2r\theta \right).\end{aligned}$$

이다. 이제 "반각"을 묶어 내면

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \right) = 2 \cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

이므로

$$(1+z)^m = 2^m \cos^m \theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} = 2^m \cos^m \theta \, (\cos m\theta + \mathrm{i} \sin m\theta).$$

이다. $2^m \cos^m \theta$는 실수이므로, 두 식의 실수부분을 비교하면

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \cos 2r\theta = 2^m \cos^m \theta \cos m\theta,$$

를 얻는다. 이것이 구하려던 항등식이다($r = 0$과 $r = m$인 항은 각각 1과 $\cos 2m\theta$이다).

소문항 (iii)

첫 번째 식을 S라 하자. (ii)의 우변은 I_m의 피적분함수에 2^m을 곱한 것이므로, (ii)를 0부터 θ까지 적분한다. $r=0$인 항을 적분하면 θ이고, $r \geq 1$이면 $\int_0^\theta \cos 2rx \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 2r\theta}{2r}$이다. 따라서

$$\theta + \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} \frac{\sin 2r\theta}{2r} = 2^m I_m, \qquad \text{따라서} \qquad S = 2^m I_m - \theta.$$

이다.

이제 (i)을 이용하여 $2^m I_m$을 계산한다. 점화식을 $2k$로 나누고 2^k를 곱하면, $k \geq 1$일 때

$$2^k I_k = 2^{k-1} I_{k-1} + \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

이다.

? 생각해 보기 왜 2^k를 곱할까?

점화식을 $I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \ldots$ 꼴로 쓰면, 각 단계마다 $\frac{1}{2}$이라는 인수가 붙는다. $J_k = 2^k I_k$를 쓰면 이 인수가 사라진다. 그러면 $J_k - J_{k-1}$이 간단한 명시적인 항이 되고, 합이 망원 합으로 정리된다. $k = 1, 2, \ldots, m$에 대한 식을 모두 더하면 중간 항들이 소거되어

$$2^m I_m = 2^0 I_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

를 얻는다. 마지막으로 $I_0 = \int_0^\theta 1 \, \mathrm{d}x = \theta$이므로

$$\begin{aligned} S = 2^m I_m - \theta &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} 2^{k-1} \cos^k \theta \sin k\theta \\ &= \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta + \cdots + \frac{1}{m} 2^{m-1} \cos^m \theta \sin m\theta, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $m = 1$: 주장하는 식은 $\frac{1}{2}\sin 2\theta = \cos\theta \sin\theta$이고, 이는 배각 공식(double-angle formula)이다.
- $m = 2$: 좌변은 $\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta$이고, 우변은 $\cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta(1 + \cos 2\theta)$이다. $\sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2}\sin 4\theta$이므로 두 값은 같다.
- 수치적으로, $m = 5, \theta = 0.7$일 때 두 식의 값은 모두 1.51963이다(소수점 아래 다섯째 자리까지). 점화 공식 또한 임의의 k와 θ에 대하여 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 I_k의 값과 일치함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 부분적분에서의 부호 실수: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^k x = -k\cos^{k-1} x \sin x$이며, 이 음의 부호가 $\int v\,\mathrm{d}u$ 앞의 음의 부호와 상쇄된다.
- (ii)에서 $r = 0$인 항을 빠뜨리는 것. 이 항을 적분하면 θ가 되고, 이것이 망원 합의 맨 아래에 있는 $I_0 = \theta$와 상쇄된다.

STEP 너머

$\cos^m\theta\cos m\theta$를 $\cos 2r\theta$들의 일차결합으로 나타내는 것은 곧 푸리에 급수(Fourier series)를 계산하는 일이다. 여기서는 유한 급수이며, 항별로 적분하는 것은 대학 1학년 수리 방법론 과목에서 푸리에 급수를 다루는 방식 그대로이다. (i)과 같은 종류의 점화 공식은 $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ 꼴의 적분이나 월리스 곱(Wallis product)을 다룰 때 쓰는 표준적인 도구이기도 하다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 (ii)에서 사용한 $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$라는 기법에 대한 기하학적 그림을 보여 준다.

풀이

STEP III 1991, 문제 9

순수수학 • 타원의 호의 길이

> **STEP III 1991, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q9

핵심 아이디어

E_1은 중심을 기준으로 한 형태로 쓴 타원(ellipse)이고, E_2는 같은 곡선을 초점(focus)에 극(pole)을 둔 극좌표 형태(polar form)로 쓴 것이다. E_2를 직교좌표 형태로 바꾸고 완전제곱식(completing the square)을 만들면 중심과 축의 위치가 드러나고, 반축(semi-axis)을 비교하면 k와 b를 얻는다. 적분에 대해서는, 둘레(perimeter)는 하나의 수이지만 각 매개변수화(parametrisation)가 겉보기에 서로 다른 호의 길이(arc length) 적분을 준다.

풀이

축, k와 b

E_2의 좌표를 (x, y)로 쓰고 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \theta_2$로 놓는다. 그러면 E_2는 $r = \dfrac{k}{1+e\cos\theta}$, 즉 $r + er\cos\theta = k$를 뜻하므로

$$r = k - ex.$$

양변을 제곱하면 (곡선 위에서 $r = k/(1+e\cos\theta) > 0$이므로 이 과정에서 잃는 것은 없다)

$$x^2 + y^2 = k^2 - 2kex + e^2x^2 \quad \Longrightarrow \quad (1-e^2)x^2 + 2kex + y^2 = k^2.$$

x에 대해 완전제곱식을 만들면

$$(1-e^2)\left(x + \frac{ke}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = k^2 + \frac{k^2e^2}{1-e^2} = \frac{k^2}{1-e^2},$$

이므로

$$\frac{\left(x + \frac{ke}{1-e^2}\right)^2}{k^2/(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{k^2/(1-e^2)} = 1.$$

이것은 E_2 축에서 중심이 $\left(-\frac{ke}{1-e^2}, 0\right)$이고, 대칭축(axes of symmetry)이 E_2 축과 평행하며, 반축이

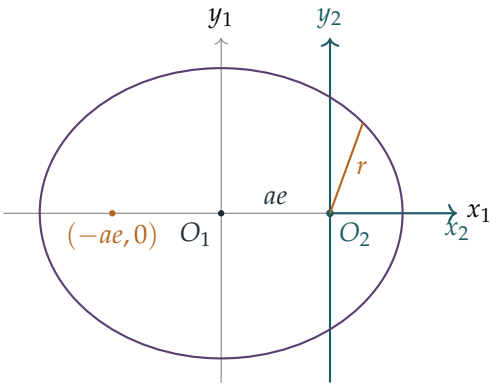
$$A = \frac{k}{1-e^2} \ (x \text{ 방향}), \qquad B = \frac{k}{\sqrt{1-e^2}} \ (y \text{ 방향}).$$

인 타원이다. $0 < 1 - e^2 < 1$이므로 $A > B$이고, 따라서 장축(major axis)은 E_2의 x축 위에 있다. E_1은 $a > b$인 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$이므로 장축이 E_1의 x축 위에 있다. 두 곡선이 같으므로 장반축끼리 같고 단반축끼리도 같다.

$$a = \frac{k}{1-e^2}, \quad \text{즉} \quad k = a(1-e^2), \qquad b^2 = \frac{k^2}{1-e^2} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2} = a^2(1-e^2),$$

이것이 요구된 두 결과이다.

E_1의 원점인 중심은 E_2의 x축 위의 $x = -\frac{ke}{1-e^2} = -ae$에 있다. 따라서 E_2 축은 E_1 축을 장축을 따라 거리 ae만큼 평행이동한 것이다. 즉 E_2의 원점은 E_1의 점 $(ae, 0)$이고, $a^2 - b^2 = a^2e^2$이므로 이 점은 초점이다. 두 x축은 같은 직선(장축) 위에 있고 y축끼리는 평행하다. E_1 좌표로 쓰면 $x_1 = x_2 + ae$, $y_1 = y_2$이다. 타원은 두 축에 대해 모두 대칭이므로, E_2의 원점을 다른 초점 $(-ae, 0)$에 두고 x축의 방향을 뒤집어도 똑같다. 어느 경우든 $\theta_2 = 0$인 점은 초점에 가장 가까운 꼭짓점(vertex)이다.



두 적분

타원의 위쪽 절반($y \geq 0$)의 길이를 두 가지 방법으로 계산한다.

E_1을 이용하기. θ_1이 0에서 π까지 움직일 때 점은 위쪽 절반을 한 번 지나간다. $\dot{x} = -a\sin\theta_1$, $\dot{y} = b\cos\theta_1$이므로, $a^2 - b^2 = a^2e^2$를 이용하면

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta_1 + b^2\cos^2\theta_1 = a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta_1 = a^2\left(1 - e^2\cos^2\theta_1\right),$$

이다. 따라서 둘레의 절반은

$$\tfrac{1}{2}P = a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

E_2를 이용하기. 여기서는 $r>0$이므로 $y_2 = r\sin\theta_2 \geq 0$일 필요충분조건은 $0 \leq \theta_2 \leq \pi$이다. 따라서 $\theta_2 \in [0,\pi]$도 위쪽 절반을 한 번 그린다. 극좌표에서는 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$이다. $r = k(1+e\cos\theta)^{-1}$이면

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{ke\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2},$$

이므로

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{k^2\left[(1+e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta\right]}{(1+e\cos\theta)^4} = \frac{k^2\left(1+e^2+2e\cos\theta\right)}{(1+e\cos\theta)^4}.$$

그러므로 $k = a(1-e^2)$를 이용하면

$$\tfrac{1}{2}P = a(1-e^2)\int_0^\pi \frac{\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

$\frac{1}{2}P$에 대한 두 식을 같게 놓고 $a>0$으로 나누면 요구된 항등식을 얻는다.

> **생각해 보기** 왜 두 매개변수가 모두 $[0,\pi]$에서 움직여야 하고, 어느 하나가 다른 범위에서 움직이면 안 되는가?

두 호의 길이는 곡선의 같은 부분에 대한 것이어야 한다. θ_1과 θ_2는 서로 다른 각(하나는 중심에서 잰 이심각(eccentric angle), 다른 하나는 초점에서 잰 극각)이지만, 각각 $[0,\pi]$에서 오른쪽 꼭짓점 $(a,0)$부터 왼쪽 꼭짓점 $(-a,0)$까지 위쪽 절반을 훑는다. 따라서 두 적분은 같은 호를 잰다.

근사

$0 \leq e^2\cos^2\theta < 1$이므로 이항급수(binomial series)를 적용할 수 있다.

$$\sqrt{1-u} = 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + O(u^3), \qquad u = e^2\cos^2\theta.$$

$O(u^3)$ 항은 $O(e^6)$이므로 무시한다.

$$\int_0^\pi \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{8}$$

(두 번째 식은 $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$에서 나온다)을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta &\approx \pi - \frac{e^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{e^4}{8}\cdot\frac{3\pi}{8} = \pi\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64}\right)\\ &= \tfrac{1}{64}\pi\left(64 - 16e^2 - 3e^4\right).\end{aligned}$$

을 얻는다. 방금 증명한 항등식에 의해 두 번째 적분도 같은 값을 가진다. 이것으로 문제가 끝난다.

검산

- $e = 0$일 때 두 적분은 모두 π이고, E_2는 $k = a$인 원 $r = k$가 된다. 올바르다.
- $a = 2$, $b = 1$ (따라서 $e^2 = \frac{3}{4}$)일 때, 200 000각형으로 계산하면 둘레가 9.6884482이고, 이는 첫 번째 적분의 $2a$배와 일치한다.
- 수치적으로 $e = 0.2$에서 두 적분은 모두 3.1099371이고 근사식은 3.1099411을 준다. 차이는 약 $-0.063e^6$으로, 급수의 다음 항 $-\frac{5\pi}{256}e^6 \approx -0.061e^6$과 잘 맞는다.

흔한 실수

- E_2의 원점을 중심에 두는 것. 분모에 $1 + e\cos\theta$가 있는 극좌표 형태는 언제나 극이 초점에 있다.
- 극좌표 호의 길이에서 $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2$ 항을 빠뜨리거나, 한쪽은 $[0, 2\pi]$에서, 다른 쪽은 $[0, \pi]$에서 적분하는 것.

STEP 너머

적분 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$는 제2종 완전 타원적분(complete elliptic integral of the second kind) $E(e)$이므로, 타원의 둘레는 $4aE(e)$이다. 이것은 초등함수(elementary functions)로 나타낼 수 없으며, 그래서 여기서와 같은 급수(그리고 라마누잔(Ramanujan)의 놀랍도록 정확한 근사식)가 중요하다. 타원적분은 타원함수(elliptic functions)와 타원곡선(elliptic curves)으로 이어지는데, 타원곡선은 현대 정수론(number theory)의 중심 주제이다. 이런 유형의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP III 1991, 문제 10

순수수학 • 뉴턴 항등식

> **STEP III 1991, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q10

핵심 아이디어

이 다항식은 0이 아닌 계수가 세 개뿐이므로 대칭함수(symmetric function) Σ_m 가운데 거의 모두가 0이 되고, 주어진 항등식(뉴턴(Newton)의 항등식)은 두 항으로 된 점화식(recurrence)으로 줄어든다. 차수 n을 넘어서면 이 항등식은 더 이상 적용되지 않지만, 훨씬 더 간단한 사실이 성립한다. 모든 근은 방정식 자체를 만족하므로, 방정식에 α^k를 곱하고 근에 대하여 더하면 S_{n+k}를 앞선 거듭제곱 합(power sum)들과 연결할 수 있다.

풀이

S_{n-1}까지의 거듭제곱 합

$x^n - qx^{n-1} + r$를 $\prod_i (x-\alpha_i) = x^n - \Sigma_1 x^{n-1} + \Sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \Sigma_n$와 비교하면 다음을 읽어 낼 수 있다.

$$\Sigma_1 = q, \qquad \Sigma_2 = \Sigma_3 = \cdots = \Sigma_{n-1} = 0, \qquad (-1)^n \Sigma_n = r.$$

주어진 항등식에서 $1 \le p \le n-1$이라 하자. $p \le n-1$이므로 $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$를 포함하는 항은 모두 0이 된다. ($p = 1$일 때 항등식은 단순히 $S_1 - \Sigma_1 = 0$이다.) 남는 것은 다음과 같다.

$$S_p - q\,S_{p-1} = 0 \quad (2 \le p \le n-1), \qquad S_1 = q.$$

따라서 $S_1 = q$이고, 각 거듭제곱 합은 바로 앞의 것의 q배이다. p에 대한 수학적 귀납법(induction)에 의해

$$S_p = q^p \qquad \text{단, } 1 \le p \le n-1$$

이 되어 증명이 끝난다. 각 $\alpha_i^0 = 1$이므로 $S_0 = n$임도 적어 두면 편리하다.

S_n, S_{n+1}, S_{n+2}

$p = n$일 때에도 항등식은 여전히 적용되며, 이제 마지막 항이 나타난다.

$$S_n - q\,S_{n-1} + (-1)^n n\,\Sigma_n = 0.$$

$(-1)^n\Sigma_n = r$이므로 다음을 얻는다.

$$S_n = q\cdot q^{n-1} - nr = q^n - nr.$$

생각해 보기 주어진 항등식은 $p = n$에서 끝난다. 그 너머로는 어떻게 나아갈 수 있을까?

방정식 자체를 이용한다. 각 근은 $\alpha_i^n = q\alpha_i^{n-1} - r$를 만족한다. 양변에 α_i^k $(k \geq 0)$를 곱하고 i에 대하여 더하면 다음을 얻는다.

$$S_{n+k} = q\,S_{n+k-1} - r\,S_k \qquad (k \geq 0). \tag{$*$}$$

$k = 0$이면 다시 $S_n = q^n - nr$을 얻으므로, 믿음직한 교차 확인이 된다. 이제

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= q\,S_n - r\,S_1 = q^{n+1} - nqr - qr = q^{n+1} - (n+1)qr, \\ S_{n+2} &= q\,S_{n+1} - r\,S_2 = q^{n+2} - (n+1)q^2r - q^2r = q^{n+2} - (n+2)q^2r. \end{aligned}$$

여기서 $S_1 = q$와 $S_2 = q^2$을 이용했는데, $n \geq 5$이면 $2 \leq n-1$이므로 이 식들이 성립한다.

일반 공식

$S_n = q^n - nr$, $S_{n+1} = q^{n+1} - (n+1)qr$, $S_{n+2} = q^{n+2} - (n+2)q^2r$라는 패턴으로부터 다음을 추측할 수 있다.

$$S_{n+m} = q^{n+m} - (n+m)\,q^m r \qquad \text{단, } 0 \leq m \leq n-1.$$

이를 m에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $m = 0$인 경우는 위에서 보인 $S_n = q^n - nr$이다.

$1 \leq m \leq n-1$이고, 공식이 $m-1$에 대하여 성립한다고 가정하자. $k = m$으로 둔 $(*)$에 의해

$$\begin{aligned} S_{n+m} &= q\,S_{n+m-1} - r\,S_m \\ &= q\big(q^{n+m-1} - (n+m-1)q^{m-1}r\big) - r\,q^m \\ &= q^{n+m} - (n+m)\,q^m r, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $1 \leq m \leq n-1$이므로 성립하는 $S_m = q^m$을 이용했다. 이것은 m에 대한 공식이다. 따라서 귀납법에 의해 이 공식은 모든 $0 \leq m \leq n-1$, 즉 $m < n$에 대하여 성립한다.

? 생각해 보기 조건 $m < n$은 정확히 어디에서 쓰이는가?

$S_m = q^m$을 쓰는 단계에서만 쓰인다. $m = n$이면 S_n이 필요한데, 이것은 q^n이 아니라 $q^n - nr$이므로 여분의 $-nr$이 끼어들어 패턴이 깨진다. 실제로 $(*)$로부터 $S_{2n} = q^{2n} - 2nq^n r + nr^2$을 얻는다.

검산

- $r = 0$이면 방정식은 $x^{n-1}(x - q) = 0$이고, 근은 q와 $0(n-1$개$)$이므로 모든 $S_k = q^k$이다. 우리가 얻은 공식은 모두 이것으로 귀결된다.
- $q = 0$이면 근은 $-r$의 n제곱근이다. 그러면 $1 \le p \le n-1$에 대하여 $S_p = 0$이고, $S_n = n \cdot (-r) = -nr$이므로 $q^n - nr$과 일치한다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 q, r와 $5 \le n \le 9$에 대하여 모든 근을 구하고 그 거듭제곱을 더해 보았다. $S_p = q^p$와 S_{n+m}에 대한 공식$(0 \le m \le n-1)$은 약 10^{-12} 이내로 일치했고, $m = n$에서는 공식이 눈에 띄게 어긋났다.

흔한 실수

- 항등식의 마지막 항에 붙은 인수 p를 빠뜨리는 것. 그러면 $S_n = q^n - r$을 얻게 되는데, 올바른 값은 $q^n - nr$이다.
- Σ_n의 부호를 틀리는 것. 상수항은 $(-1)^n \Sigma_n$이므로 $(-1)^n n\Sigma_n = nr$이며, 이는 n의 홀짝성(parity)과 관계없다.
- 주어진 항등식을 $p > n$에 적용하는 것. 이 경우 항등식은 주어진 형태로는 성립하지 않는다.

STEP 너머

이것이 바로 뉴턴 항등식이며, $(*)$는 거듭제곱합이 원래 방정식을 특성다항식(characteristic polynomial)으로 갖는 선형 점화식을 만족함을 보여 준다. 행렬의 언어로 말하면, S_k는 A^k의 대각합(trace)이고, 여기서 A는 이 다항식의 동반행렬(companion matrix)이다. 근에 대한 임의의 대칭다항식을 Σ_m으로 나타낼 수 있다는 사실은 대칭다항식의 기본정리(fundamental theorem of symmetric polynomials)이며, 이는 갈루아(Galois) 이론으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 대수학이 전개되는 모습을 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 1991, 문제 11

역학 • 강체의 평형

STEP III 1991, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

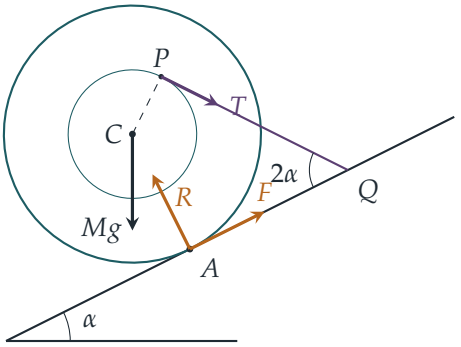
step.maths.org/questions/91-s3-q11

핵심 아이디어

원기둥(cylinder)은 네 힘, 즉 무게, 수직항력(normal reaction), 접촉점에서의 마찰력(friction), 줄의 장력(tension)을 받아 평형(equilibrium) 상태에 있는 강체(rigid body)이다. 이 가운데 무게와 수직항력은 원기둥의 중심을 지나므로, 중심에 대한 모멘트(moment)를 구하면 마찰력과 장력이 곧바로 연결된다. 그다음 빗면에 평행한 방향과 수직인 방향으로 힘을 분해하면 마찰력과 수직항력을 얻고, 나머지는 부등식 $F \leq \mu R$가 해결해 준다. 둘째 부분에서 원기둥은 줄을 무엇이 붙잡고 있는지 알지 못하므로 장력은 변하지 않고, 우리는 입자(particle)만 살펴보면 된다.

풀이

원기둥을 질량중심(centre of mass)이 그 중심 C인 균일한 강체로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로, 둘째 물체를 입자로 모형화한다. 빗면과의 접촉점을 A라 하고, 줄의 장력을 T라 하자. 줄이 홈(groove)에 감겨 있으므로 줄의 풀린 부분 PQ는 P에서 홈에 접하고, 따라서 그 작용선(line of action)은 C로부터 수직 거리 a만큼 떨어져 있다. 그림에서 Q는 A보다 빗면 위쪽에 있고, 줄은 원기둥을 P에서 Q 쪽으로, 즉 빗면 위쪽이면서 빗면을 향하는 방향으로, 빗면과 각 2α를 이루며 당긴다.



점선으로 그린 반지름 CP는 길이가 a이고 줄에 수직이다. 원기둥에 작용하는 마찰력을 F라 하고, 빗면 위쪽 방향을 양의 방향으로 잡는다.

원기둥: $\mu \geq \frac{1}{3}\tan\alpha$ 보이기

C에 대한 모멘트. 무게는 C에 작용하고 수직항력은 AC를 따라 작용하므로, 둘 다 C에 대한 모멘트가 없다. 마찰력은 C로부터 거리 $2a$인 곳에, 장력은 수직 거리 a인 곳에 작용하며 원기둥을 서로 반대 방향으로 돌리므로

$$F \cdot 2a = T \cdot a, \qquad \text{즉,} \qquad T = 2F.$$

? **생각해 보기** 마찰력과 장력은 왜 원기둥을 서로 반대 방향으로 돌리는가?

이 둘은 C에 대한 모멘트를 갖는 유일한 두 힘이므로, 그 모멘트는 서로 상쇄되어야 한다. P에서 줄이 당기는 힘만 있다면 원기둥은 빗면 위쪽으로 굴러 올라가도록 돌 것이다. A에서 빗면 위쪽을 향하는 마찰력은 원기둥을 반대 방향으로 돌린다. 만약 마찰력의 방향을 잘못 추측했다면 아래 식들에서 단순히 $F < 0$이 나올 것이므로, 이 부호는 별도의 가정이 아니다.

빗면에 평행한 방향으로 분해하기 (빗면 위쪽이 양의 방향):

$$F + T\cos 2\alpha = Mg\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad F(1+2\cos 2\alpha) = Mg\sin\alpha.$$

빗면에 수직인 방향으로 분해하기: 장력은 빗면을 향하는 성분 $T\sin 2\alpha$를 가지므로

$$R = Mg\cos\alpha + T\sin 2\alpha = Mg\cos\alpha + 2F\sin 2\alpha.$$

$F = Mg\sin\alpha/(1+2\cos 2\alpha)$를 대입하면

$$\begin{aligned} R(1+2\cos 2\alpha) &= Mg\big(\cos\alpha + 2\cos 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 2\alpha\sin\alpha\big) \\ &= Mg\big(\cos\alpha + 2\cos(2\alpha-\alpha)\big) = 3Mg\cos\alpha. \end{aligned}$$

따라서

$$F = \frac{Mg\sin\alpha}{1+2\cos 2\alpha}, \qquad R = \frac{3Mg\cos\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

원기둥은 빗면과 접촉한 상태를 유지하므로 $R > 0$이다. α가 예각이므로 $\cos\alpha > 0$이고, 따라서 $1+2\cos 2\alpha > 0$이며, 이는 $F > 0$임을 뜻한다. 두 식을 나누면

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \tfrac{1}{3}\tan\alpha.$$

평형을 이루려면 마찰력이 $F \le \mu R$를 만족해야 하므로, 요구한 대로 $\mu \ge F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$이다.

입자: 마찰계수의 최솟값

줄은 원래 있던 자리에 그대로 있으므로, 원기둥은 정확히 같은 위치에 있고 세 방정식도 변하지 않는다. 특히 장력은 여전히 다음과 같다.

$$T = 2F = \frac{2Mg\sin\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$이면 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$이므로

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3}{5}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5},$$

이고 $1+2\cos 2\alpha = \frac{11}{5}$이다. 따라서

$$T = \frac{2Mg}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{11} = \frac{2\sqrt{5}}{11}Mg.$$

(원기둥에 대해서도 $\mu \ge \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$이어야 한다.)

이제 Q에 있는 입자를 살펴보자. 줄은 입자를 P 쪽으로, 즉 빗면 **아래쪽**으로 성분 $T\cos 2\alpha$, 빗면에서 **멀어지는** 쪽으로 성분 $T\sin 2\alpha$를 가지고 당긴다. 입자의 무게 $3Mg$ 또한 빗면 아래쪽 성분을 가지므로, 입자에 작용하는 마찰력 F'은 빗면 위쪽으로 작용해야 한다. 입자에 작용하는 수직항력을 R'이라 하자.

빗면에 평행한 방향:

$$F' = 3Mg\sin\alpha + T\cos 2\alpha = \frac{3Mg}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{33\sqrt{5}}{55}Mg + \frac{6\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{39\sqrt{5}}{55}Mg.$$

빗면에 수직인 방향:

$$R' = 3Mg\cos\alpha - T\sin 2\alpha = \frac{6Mg}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{66\sqrt{5}}{55}Mg - \frac{8\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{58\sqrt{5}}{55}Mg.$$

이 값은 양수이므로 입자는 실제로 빗면 위에 머문다. 입자와 빗면 사이의 마찰계수(coefficient of friction)를 μ'이라 하면 평형을 위해 $F' \le \mu' R'$이어야 하므로

$$\mu' \ge \frac{F'}{R'} = \frac{39}{58}.$$

마찰계수의 최솟값은 $\dfrac{39}{58}$이다.

검산

- 대신 A에 대한 모멘트를 구하면 $T\,a(1+2\cos 2\alpha) = 2a\,Mg\sin\alpha$가 되어 같은 장력을 얻는다. ($A$에서 줄까지의 수직 거리는 $a+2a\cos 2\alpha$이다.)
- $\alpha \to 0$이면 빗면이 수평이 되어 장력과 마찰력이 사라지고, 한계값 $\frac{1}{3}\tan\alpha \to 0$도 마땅히 그래야 하듯 0으로 간다.
- 수치 검산으로, 60° 미만의 무작위 예각 α 10 000개에 대해 좌표로 기하 구조를 구성하고 평형 방정식을 풀어 $F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$임을 확인하였다. $\tan\alpha = \frac{1}{2}$일 때는 $T \approx 0.4066\,Mg$, $F' \approx 1.5856\,Mg$, $R' \approx 2.3580\,Mg$, $F'/R' \approx 0.67241 = 39/58$을 얻는다.

흔한 실수

- 장력이 원기둥을 빗면 **쪽으로** 밀어 R를 증가시킨다는 점을 잊는 것. $T\sin 2\alpha$를 빠뜨리면 잘못된 비를 얻는다.
- 줄이 입자를 당기는 방향을 잘못 잡는 것. 줄은 입자를 P 쪽으로 당기므로, 입자에 작용하는 수직항력을 **줄이고** 빗면 아래쪽 힘을 더한다.
- 둘째 부분에서 장력을 처음부터 다시 계산하는 것. 원기둥의 평형은 바뀌지 않았으므로 T도 바뀌지 않는다.

STEP 너머

강체의 정역학(statics)은 결국 두 벡터 방정식으로 귀결된다. 합력이 0이고, **임의의** 점에 대한 모멘트의 합이 0이라는 것이다. 그 점을 잘 고르는 것, 여기서는 두 미지의 힘이 지나는 중심을 고르는 것이 핵심 기술이다. 대학에서는 이것이 힘의 계와 그와 동등한 "렌치(wrench)"에 대한 연구로 이어진다. 마찰 문제는 또한 평형이 **어떻게** 깨지는가, 즉 미끄러짐(slipping), 굴림(rolling), 넘어짐(toppling) 중 무엇으로 깨지는가에 관한 질문으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 정역학과 회전을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1991, 문제 12

역학 • 곡선 위의 운동

STEP III 1991, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q12

핵심 아이디어

입자는 타원에 묶여 있으므로, 그 위치는 하나의 매개변수(parameter) θ만으로 완전히 기술된다. 위치 벡터를 두 번 미분하고 가속도를 안쪽 단위 법선(inward unit normal)에 사영(projection)한다. 이때 $\ddot{\theta}$ 항들은 접선 방향을 향하므로 사라진다. 둘째 부분에서는 수직항력(normal reaction)이 0으로 떨어질 때 입자가 면을 떠나며, 관이 매끄러우므로 에너지 보존(energy conservation)으로 모든 점에서의 속력을 구할 수 있다.

풀이

법선 가속도

입자를 매끄러운 곡선 위를 움직이는 점으로 모형화한다. 따라서 작용하는 힘은 아래쪽으로 향하는 무게 mg와 관이 주는 수직항력 R뿐이다.

위치는 $\mathbf{r} = (a\cos\theta,\ b\sin\theta)$이다. 연쇄 법칙(chain rule)을 써서 시간에 대해 미분하면

$$\dot{x} = -a\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = b\cos\theta\,\dot{\theta},$$
$$\ddot{x} = -a\sin\theta\,\ddot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta}^2, \qquad \ddot{y} = b\cos\theta\,\ddot{\theta} - b\sin\theta\,\dot{\theta}^2.$$

접선 방향은 $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$이므로, 법선 방향 하나는 $(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$이다(두 벡터의 내적(dot product)이 0이다). $\theta = 0$에서 이 벡터는 $(b, 0)$이고 타원의 바깥쪽을 향하므로, 안쪽 단위 법선은

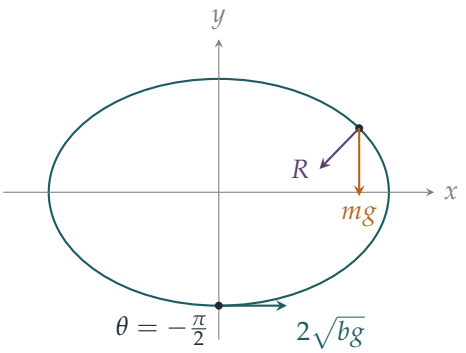
$$\mathbf{n} = -\frac{(b\cos\theta,\ a\sin\theta)}{D}, \qquad D = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

따라서 안쪽 법선 방향의 가속도는

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n} &= -\frac{1}{D}\Big[b\cos\theta\big(-a\sin\theta\,\ddot\theta - a\cos\theta\,\dot\theta^2\big) + a\sin\theta\big(b\cos\theta\,\ddot\theta - b\sin\theta\,\dot\theta^2\big)\Big]\\ &= -\frac{1}{D}\Big[-ab\,\dot\theta^2\big(\cos^2\theta+\sin^2\theta\big)\Big] = \frac{ab\,\dot\theta^2}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},\end{aligned}$$

이다. 두 $\ddot\theta$ 항이 서로 상쇄되기 때문이다. 이것이 구하려던 결과이다.

면을 떠나는 순간



가장 낮은 점은 $\theta=-\frac{\pi}{2}$이고, 이때 $y=-b$이다. 관이 매끄러우므로 수직항력은 일을 하지 않고, 에너지가 보존된다. 매개변수가 θ인 점에서의 속력을 v라 하면

$$\tfrac12 mv^2 + mgb\sin\theta = \tfrac12 m(4bg) - mgb \quad\Longrightarrow\quad v^2 = 2gb(1-\sin\theta).$$

첫째 부분에서 $v^2=\dot x^2+\dot y^2 = D^2\dot\theta^2$이므로 $\dot\theta^2 = v^2/D^2$이다.

이제 안쪽 법선 $\mathbf{n}$ 방향으로 힘을 분해한다. 수직항력 R은 $\mathbf{n}$ 방향으로 작용한다(입자가 안쪽에 있으므로 관은 입자를 안쪽으로 밀고, 접촉하는 동안 $R\ge 0$이다). 무게는 $(0,-mg)$이고, 그 $\mathbf{n}$ 방향 성분은 $(0,-mg)\cdot\mathbf{n} = mga\sin\theta/D$이다. 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 의해

$$R + \frac{mga\sin\theta}{D} = \frac{m\,ab\,\dot\theta^2}{D} = \frac{m\,ab\,v^2}{D^3}, \qquad \text{따라서} \qquad R = \frac{ma}{D^3}\Big(bv^2 - g\sin\theta\,D^2\Big).$$

> **생각해 보기** 무게의 성분이 왜 음의 부호가 아니라 $+mga\sin\theta/D$일까?

위쪽 절반($\sin\theta>0$)에서는 안쪽 법선이 아래 방향 성분을 가지므로, 연직 원운동의 꼭대기에서와 마찬가지로 그곳에서는 중력이 입자를 안쪽으로 끌어당기는 데 도움을 준다. R과 무게의 이 성분이 함께 구심 가속도(centripetal acceleration)를 제공한다.

이제 $a=\frac32 b$, $v^2=2gb(1-\sin\theta)$를 대입하고 $s=\sin\theta$라 쓰자. 그러면

$$D^2 = \tfrac94 b^2 s^2 + b^2(1-s^2) = b^2\big(1+\tfrac54 s^2\big),$$

이므로

$$bv^2 - g\sin\theta\, D^2 = gb^2\left[2(1-s) - s\left(1+\tfrac{5}{4}s^2\right)\right] = -\tfrac{1}{4}gb^2\left(5s^3+12s-8\right).$$

$ma/D^3 > 0$이므로 R의 부호는 $-(5s^3+12s-8)$의 부호와 같다.

입자는 R이 처음으로 0이 되는 곳에서 면을 떠난다. 함수 $p(s) = 5s^3+12s-8$은 $p'(s) = 15s^2+12 > 0$이므로 순증가(strictly increasing)하고, $p(-1) = -25 < 0$, $p(1) = 9 > 0$이다. 따라서 p는 $(-1,1)$에서 정확히 하나의 근을 가진다. 입자가 가장 낮은 점에서 올라감에 따라 s는 -1부터 증가하고, s가 그 근에 이를 때까지 $R > 0$이다. 또한 모든 $s < 1$에 대해 $v^2 = 2gb(1-s) > 0$이므로, 입자는 그 점에 이를 때 여전히 관을 따라 올라가고 있다. 그러므로 R이 처음으로 0이 되어 입자가 면을 떠나는 점은

$$5\sin^3\theta + 12\sin\theta - 8 = 0,$$

을 만족하는 점이고, 이것이 구하려던 것이다. 수치적으로는 $\sin\theta \approx 0.584$이므로, 입자는 축의 높이보다 조금 위에서 면을 떠난다.

검산

- $a = b = r$이면 법선 가속도는 $r\dot{\theta}^2 = v^2/r$가 되어, 익숙한 원운동의 결과와 같다.
- 가장 낮은 점에서 $v^2 = 4bg$이고 $R = m\left(\frac{bv^2}{a^2} + g\right)$이므로 양수이다(그곳의 곡률 반지름(radius of curvature)은 a^2/b이다). 이는 $p(-1) = -25 < 0$과 일치한다.
- $b = 1$, $a = 1.5$, $g = 9.81$로 두고 가장 낮은 점에서부터 θ에 대한 운동 방정식을 단계별로 수치 적분했다. 수직항력은 $\sin\theta \approx 0.58379$에서 처음으로 0이 되었으며, 이는 삼차방정식의 근 0.58377과 일치한다($\theta \approx 35.7^\circ$).

흔한 실수

- θ를 극각(polar angle)으로 여기는 것. $a = b$가 아니면 점 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$는 x축에서 각 θ만큼 떨어진 곳에 있지 않으며, 법선도 반지름 방향이 아니다.
- 법선 가속도로 v^2/b나 v^2/a를 쓰는 것. 타원에서는 곡률 반지름이 점마다 달라지며, 이것이 바로 첫째 부분에서 계산하는 내용이다.
- 무게의 법선 성분의 부호를 잘못 잡는 것. 그러면 삼차식이 $5s^3 - 4s + \ldots$로 바뀌어 의미 있는 근이 나오지 않는다.

STEP 너머

첫째 부분은 법선 가속도에 대한 공식 v^2/ρ의 특수한 경우이며, 여기서 ρ는 곡률 반지름이다. 실제로 이 타원에서는 $\rho = D^3/(ab)$이다. 가속도를 접선 성분과 법선 성분으로 나누는 것(프레네 틀(Frenet frame))은 대학 1학년 역학과 미분기하학에서 표준적인 내용이다. 구속 조건을 하나의 좌표 θ로 다루는 방법은 자연스럽게 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구속된 운동과 극좌표 및 내재 좌표(intrinsic coordinates)를 잘 다룬다.

풀이

STEP III 1991, 문제 13

역학 • 천장과 충돌하는 포물체

STEP III 1991, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

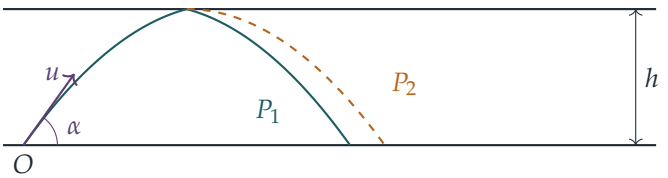
step.maths.org/questions/91-s3-q13

핵심 아이디어

천장이 매끄러우므로(smooth) 수평 속도 $u\cos\alpha$는 결코 변하지 않고, 모든 수평 도달 거리(range)는 $u\cos\alpha$에 비행 시간을 곱한 값일 뿐이다. 실제로 계산할 것은 모두 연직 운동에 있으며, 에너지 방정식(energy equation)을 쓰면 천장에서의 연직 속력이 곧바로 나온다. 탄성 충돌(elastic impact) 뒤에는 입자가 올라간 과정을 거꾸로 재생한 것처럼 정확히 그대로 내려오고, 비탄성 충돌(inelastic impact) 뒤에는 정지 상태에서 그냥 떨어진다.

풀이

두 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. $u=\sqrt{8gh}$, $s=\sin\alpha$, $c=\cos\alpha$로 쓴다. O에서 수평 방향으로 x, 연직 위쪽으로 y를 잡는다.



천장에 도달하기

처음 연직 속도는 us이고, 올라가는 동안

$$\dot{y}^2 = u^2s^2 - 2gy = 8gh\,s^2 - 2gy.$$

입자가 높이 h에 도달하려면 그곳에서 $\dot{y}^2 \geq 0$이어야 한다. 즉 $8ghs^2 \geq 2gh$이므로 $s^2 \geq \frac{1}{4}$이다. α는 예각이므로 $s > 0$이고, 이 조건은 $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$, 곧 $\alpha \geq \frac{1}{6}\pi$이다. ($\alpha = \frac{1}{6}\pi$일 때는 정확히 천장을 스치기만 한다.) 천장에 도달했을 때 그곳에서의 위쪽 속력은

$$w = \sqrt{8ghs^2 - 2gh} = \sqrt{2gh}\,\sqrt{4s^2 - 1}.$$

P_1의 도달 거리

올라가는 동안 연직 속도는 비율 g로 us에서 w까지 일정하게 줄어들므로, 천장까지 걸리는 시간은

$$t_1 = \frac{us - w}{g}.$$

생각해 보기 P_1이 천장에서 다시 내려오는 데 시간이 얼마나 걸리는가?

충돌은 완전 탄성이고 천장은 매끄러우므로, 연직 속도는 아래쪽으로 w가 되고 수평 속도는 변하지 않는다. 그러면 천장에서 내려오는 연직 운동은 올라가는 연직 운동을 시간을 거꾸로 돌린 것과 같다(높이 h에서 바닥 쪽으로 속력 w로 출발하여 g로 가속한다). 따라서 입자는 다시 시간 t_1이 걸려 연직 속력 us로 바닥에 닿는다. 직접 확인하면, 연직 속력이 비율 g로 w에서 $\sqrt{w^2 + 2gh} = us$까지 커진다.

전체 비행 시간은 $2t_1$이므로 도달 거리는

$$\begin{aligned} R_1 &= uc \cdot \frac{2(us - w)}{g} = \frac{2\sqrt{8gh}\,c}{g}\left(2\sqrt{2gh}\,s - \sqrt{2gh}\sqrt{4s^2 - 1}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{8gh}\sqrt{2gh}}{g}\,c\left(2s - \sqrt{4s^2 - 1}\right) = 8h\cos\alpha\left(2\sin\alpha - \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $us = \sqrt{8gh}\,s = 2\sqrt{2gh}\,s$와 $\sqrt{8gh}\sqrt{2gh} = 4gh$를 이용했다. 이것이 구하는 도달 거리이다.

P_2의 도달 거리와 차 D

P_2는 천장까지 같은 경로를 따라가며 시간 t_1이 걸린다. 충돌이 완전 비탄성이므로 연직 속도는 0이 되고, 천장이 매끄러우므로 수평 속도는 여전히 uc이다. 그다음 정지 상태에서 높이 h를 떨어지며, 이때 걸리는 시간은 $\sqrt{2h/g}$이다. 따라서

$$R_2 = uc\left(t_1 + \sqrt{\tfrac{2h}{g}}\right), \qquad R_2 - R_1 = uc\left(\sqrt{\tfrac{2h}{g}} - t_1\right).$$

이제

$$t_1 = \frac{\sqrt{2gh}\,(2s - \sqrt{4s^2 - 1})}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,(2s - \sqrt{4s^2 - 1})$$

이고 $uc\sqrt{2h/g} = \sqrt{8gh}\sqrt{2h/g}\,c = 4hc$이므로

$$R_2 - R_1 = 4h\cos\alpha\left(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right).$$

이 값은 $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$에서 양수이다. $s > \frac{1}{2}$이면 $(2s-1)^2 = 4s^2 - 1 - 2(2s-1) < 4s^2 - 1$이므로 $2s - 1 < \sqrt{4s^2-1}$이기 때문이다. 따라서 P_2가 언제나 더 멀리 떨어지며(탄성 반발이 P_1을 더 빠르게 아래로 내던진다),

$$D = 4h\cos\alpha\left(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right).$$

D의 최대화

$\frac{1}{6}\pi \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$에서 $f(\alpha) = D/(4h) = c(1-2s) + cr$로 놓는다. 여기서 $r = \sqrt{4s^2-1}$이다. $f(\frac{1}{6}\pi) = 0$이고, $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$일 때 ($c \to 0$이므로) $f \to 0$이며, 그 사이에서는 $f > 0$임에 주목한다. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{4sc}{r}$를 이용하여 미분하면

$$f'(\alpha) = -s(1-2s) - 2c^2 - sr + \frac{4sc^2}{r}.$$

$c^2 = 1 - s^2$를 대입하고 ($\alpha > \frac{1}{6}\pi$에서) $r > 0$을 곱하면

$$\begin{aligned} rf'(\alpha) &= (4s^2 - s - 2)\,r - sr^2 + 4s(1-s^2) \\ &= (4s^2 - s - 2)\,r - s(8s^2 - 5). \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{4}\pi$에서 $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = 1$이므로 $\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(4-5) = 0$이다. 따라서 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$는 정류점(stationary point)이다.

? 생각해 보기 이것이 다른 정류점이 아니라 최댓값임을 어떻게 아는가?

모든 정류점에서 $(4s^2 - s - 2)r = s(8s^2 - 5)$이다. 양변을 제곱하고 $r^2 = 4s^2 - 1$을 이용하여 전개하고 인수분해하면

$$(4s^2 - s - 2)^2(4s^2 - 1) - s^2(8s^2 - 5)^2 = -2(2s^2 - 1)(8s^3 - s^2 - 2s - 2),$$

이므로 모든 정류점은 $s^2 = \frac{1}{2}$ 또는 $q(s) = 8s^3 - s^2 - 2s - 2 = 0$을 만족한다. $[\frac{1}{2}, 1]$에서 $q'(s) = 24s^2 - 2s - 2 > 0$이므로 q는 증가한다. $q(0.8) = -0.144 < 0 < 0.0985 = q(0.82)$이므로 이 구간에서 q의 유일한 근은 $(0.8, 0.82)$에 있다. 그런데 이러한 s에 대하여

$$4s^2 - s - 2 < 4(0.82)^2 - 0.8 - 2 < 0, \qquad 8s^2 - 5 > 8(0.8)^2 - 5 > 0,$$

이므로 좌변 $(4s^2 - s - 2)r$는 음수이고 우변 $s(8s^2 - 5)$는 양수이다. 즉 이 근은 제곱하는 과정에서 생긴 것이며 정류점이 아니다. 따라서 $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 정류점은 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 하나뿐이다. f는 연속이고 구간 안에서 양수이며 양 끝에서 0이거나 0으로 다가가므로 구간 안에서 최댓값을 가지고, 그 최댓값은 이 정류점에서 나타나야 한다. 따라서 D는 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$일 때 가장 크며,

$$D_{\max} = 4h \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \sqrt{2} + 1\right) = 4h(\sqrt{2} - 1).$$

검산

- $\alpha = \frac{1}{6}\pi$에서는 입자가 천장에 겨우 닿으므로 두 입자의 결과가 일치해야 한다. 실제로 $D = 0$이고, $R_1 = 8h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,h$는 통상적인 도달 거리 $u^2 \sin 2\alpha / g$와 같다.
- $h = 1.7\,\mathrm{m}$로 두고 $\alpha = 1$에서 두 운동을 수치적으로 단계별 계산하면 $R_1 \approx 2.420\,\mathrm{m}$, $D \approx 2.464\,\mathrm{m}$로 공식과 일치한다. α에 대해 촘촘히 탐색하면 $D/(4h)$의 최댓값은 $\alpha = 0.78540 \approx \frac{1}{4}\pi$에서 나타나며 그 값은 $0.41421 \approx \sqrt{2} - 1$이다.

흔한 실수

- $h = ust - \frac{1}{2}gt^2$를 t_1에 대해 풀고 큰 근을 택하는 것. 큰 근은 천장이 없을 때 입자가 내려오면서 높이 h를 지나는 시각이다.
- $D = R_1 - R_2$로 쓰는 것. 이 값은 음수이다. 비탄성 입자가 더 멀리 떨어진다.
- $f'(\frac{1}{4}\pi) = 0$에서 멈추고 이 정류점이 최댓값임을 보이지 않는 것.

STEP 너머

P_1에 대한 시간 역전(time reversal) 논법은 깊은 사실을 처음 엿보게 해 준다. 보존력(conservative force)만 작용할 때 뉴턴(Newton)의 법칙은 시간을 거꾸로 돌려도 똑같아 보이며, 완전 탄성 충돌은 이 대칭성을 보존하지만 (에너지를 잃는) 비탄성 충돌은 이를 깨뜨린다. 0과 1 사이의 반발 계수(coefficient of restitution)를 쓰면 여기서 구한 두 도달 거리 사이를 보간하게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 충돌과 에너지 보존을 다룬다.

풀이

STEP III 1991, 문제 14

역학 • 용수철이 있는 원운동

STEP III 1991, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

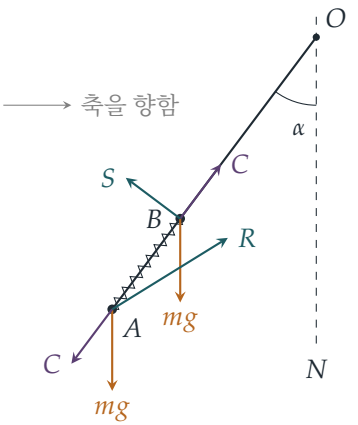
step.maths.org/questions/91-s3-q14

핵심 아이디어

모든 것이 같은 각속도(angular speed)로 ON을 축으로 하는 수평 원을 그리며 움직이므로, 각 질량에는 축을 향하는 크기 $\omega^2 r$의 알려진 가속도만 있고 그 밖의 가속도는 없다. 매끄러운(smooth) 막대에 끼워진 고리의 경우, 가장 깔끔한 식은 막대 방향의 식이다. 미지의 수직항력(normal reaction)이 그 식에서 사라지기 때문이다. 그다음 용수철의 힘이 고리와 A에 있는 입자를 이어 주고, 거기서 막대가 주는 반작용(reaction)의 방향이 k를 결정한다.

풀이

모형. 막대는 가볍고 매끄러우며, A와 B는 질량 m인 입자이고, 용수철은 B와 A 사이에서 막대를 따라 놓여 있다. $\alpha = \sin^{-1}\frac{3}{5}$로 놓으면 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$이고 $\omega^2 = \frac{5g}{2a}$이다. $OB = x$라 하면 $AB = 2a - x$이다.



여기서 C는 용수철의 압축력(thrust)이다(용수철이 **압축되어**(compressed) 있음을 알게 될 것이므로, 용수철은 B를 O 쪽으로 밀고 A를 O에서 멀어지는 쪽으로 민다). S는 매끄러운 막대가 B에 작용하는 수직항력이고(막대에 수직이며 연직 평면 안에 있고, 방향은 앞으로 구한다), R은 막대가 A에 작용하는 반작용이다. ω가 일정하고 B가 막대에 대해 정지해 있으므로 연직 평면을 가로지르는 방향의 가속도는 없고, 따라서 모든 힘은 그 평면 안에 있다.

길이 OB

B는 반지름 $x\sin\alpha$인 수평 원을 그리며 움직이므로, 그 가속도는 ON을 향해 수평 방향으로 $\omega^2 x\sin\alpha$이다. 막대를 따라 $O \to A$ 방향(아래쪽이자 축에서 멀어지는 쪽)으로 분해하자. 가속도는 축을 향하고 막대는 연직선과 각 α를 이루므로, 이 방향의 가속도 성분은 $-\omega^2 x\sin\alpha\cdot\sin\alpha$이다.

용수철이 B에 작용하는 힘을 **장력**(tension) T(B를 A 쪽으로 당기는 힘)로 두고 부호는 저절로 정해지게 하는 것이 가장 간단하다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해

$$T = \frac{kmg\left((2a-x)-a\right)}{a} = \frac{kmg(a-x)}{a}.$$

막대가 매끄러우므로 반작용 S는 막대 방향 성분이 없다. 따라서 OA 방향으로

$$mg\cos\alpha + \frac{kmg(a-x)}{a} = -m\omega^2 x\sin^2\alpha.$$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$, $\omega^2 = \frac{5g}{2a}$를 대입하면 우변은 $-\frac{9gx}{10a}m$이다. 양변을 mg로 나누고 $10a$를 곱하면

$$\begin{aligned} 8a + 10k(a-x) &= -9x \\ (10k+8)a &= (10k-9)x, \end{aligned}$$

따라서

$$OB = x = \frac{(10k+8)a}{10k-9},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. $x > a$임에 주목하자(답이 양수가 되려면 $10k > 9$이어야 한다). 그러므로 $AB = 2a - x < a$이고, 용수철은 압축되어 있으며 그 압축력은

$$C = -T = \frac{kmg(x-a)}{a} = \frac{17k\,mg}{10k-9},$$

이다. 여기서 $x - a = \frac{17a}{10k-9}$를 이용했다.

k 구하기

생각해 보기 왜 A에서의 반작용은 B에서의 반작용처럼 막대에 수직이지 않을까?

A에 있는 입자는 막대에 끼워진 것이 아니라 **붙어** 있으므로, 막대는 그것을 어느 방향으로든 밀거나 당길 수 있다. 매끄러움은 미끄러지는 고리에 작용하는 힘만 제한한다. 그래서 R을 성분으로 나누어 쓴다. R_h는 축을 향하는 수평 성분이고 R_v는 연직 위쪽 성분이다.

A는 반지름 $2a\sin\alpha = \frac{6a}{5}$인 원을 그리며 움직이므로, 그 가속도는 축을 향해 $\omega^2 \cdot \frac{6a}{5} = 3g$이다. 압축력 C는 A에 OA를 따라 O에서 멀어지는 방향으로 작용하므로, 축에서 멀어지는 성분 $C\sin\alpha$와 아래쪽 성분 $C\cos\alpha$를 가진다. 따라서

$$\text{수평 (축을 향하는 쪽)}: \quad R_h - \tfrac{3}{5}C = 3mg,$$
$$\text{연직}: \quad R_v - mg - \tfrac{4}{5}C = 0.$$

$C = c\,mg$로 놓자. 반작용은 수평선과 각 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$을 이루므로

$$\frac{R_v}{R_h} = \frac{1+\frac{4}{5}c}{3+\frac{3}{5}c} = \frac{13}{21} \implies 21 + \tfrac{84}{5}c = 39 + \tfrac{39}{5}c \implies 9c = 18, \quad c = 2.$$

($c > 0$이면 R_h와 R_v가 모두 양수이므로, 반작용은 실제로 위쪽이자 안쪽을 향하고 부호의 모호함은 없다.) 그러면

$$\frac{17k}{10k-9} = 2 \implies 17k = 20k - 18 \implies k = 6.$$

따라서 $k = 6$이고, 이때 $OB = \frac{68a}{51} = \frac{4}{3}a$로 a와 $2a$ 사이에 안전하게 놓이며, 압축력은 $C = 2mg$이다. (이때 A에 작용하는 반작용은 $R_h = \frac{21}{5}mg$, $R_v = \frac{13}{5}mg$이다.)

고리에 작용하는 반작용

생각해 보기 가장 적은 계산으로 S를 얻으려면 어느 방향으로 분해해야 할까?

막대에 수직인 방향이다. 그러면 용수철의 힘이 식에서 사라진다. 연직 평면 안에서 OA에 수직이고 **위쪽이자 축에서 멀어지는 쪽**을 향하는 단위 방향을 잡자. 이 방향은 수평선과 각 α를 이루므로, 바깥쪽 성분 $\cos\alpha$와 위쪽 성분 $\sin\alpha$를 가진다. B에 작용하는 반작용의 이 방향 성분을 S라 하자. 무게는 $-mg\sin\alpha$를 기여하고, 가속도(축을 향해 $\omega^2 x\sin\alpha$)는 $-\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$를 기여한다. 따라서

$$S - mg\sin\alpha = -m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha.$$

$x = \frac{4}{3}a$를 대입하면

$$m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha = m\cdot\frac{5g}{2a}\cdot\frac{4a}{3}\cdot\frac{12}{25} = \frac{8}{5}mg, \qquad \text{따라서} \qquad S = \frac{3}{5}mg - \frac{8}{5}mg = -mg.$$

그러므로 막대와 고리 사이의 반작용의 크기는

$$\boxed{mg},$$

이고, 음의 부호는 이 반작용이 막대에 수직으로 **아래쪽이자 축을 향하는 쪽**으로 작용함을 말해 준다.

검산

- B에 대한 완전한 벡터 검산(수평 성분은 축을 향하는 쪽, 연직 성분은 위쪽): $C = 2mg$는 AO를 따라 작용하고 $S = mg$는 앞에서 구한 대로이다. 수평: $\frac{3}{5}(2mg) + \frac{4}{5}(mg) = 2mg$이고, $m\omega^2 x \sin\alpha = m \cdot \frac{5g}{2a} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{3}{5} = 2mg$이다. 연직: $\frac{4}{5}(2mg) - \frac{3}{5}mg - mg = 0$. 둘 다 균형을 이룬다.
- $k \to \infty$이면 용수철은 강체가 되고 $OB \to a$, 즉 자연 길이로 가는데, 마땅히 그래야 한다.
- 수치적으로, $m = g = a = 1$로 두고 k의 무작위 값 200개에 대해 OB 공식을 정확히 확인했으며, 각 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$은 $k = 6$에서만 나왔고 $|S| = 1.0$을 얻었다. 작은 변위에서 시작해 막대를 따른 B의 운동을 단계적으로 계산하면 $x \approx 1.3333$ 근처에 머문다.

흔한 실수

- 용수철이 늘어나 있다고 가정했다가 $x > a$를 보고 당황하는 것. 장력의 부호는 계산에서 저절로 나오게 하라.
- A에서의 반작용이 막대에 수직이라고 생각하는 것. 그런 제한은 미끄러지는 고리에만 있다.
- 원운동의 반지름으로 $x\sin\alpha$ 대신 x를 쓰는 것.

STEP 너머

막대와 함께 회전하는 좌표계에서 B는 바깥쪽으로 "원심력"(centrifugal force) $m\omega^2 r$을 느끼고, 막대 방향의 식은 평범한 평형 문제가 된다. 이 관점을 더 밀고 나가면 유효 퍼텐셜(effective potential), 코리올리 힘(Coriolis force)(여기서는 B가 막대를 따라 움직이자마자 막대의 반작용과 균형을 이룬다), 그리고 평형의 안정성(stability)에 이른다. $x = \frac{4}{3}a$는 안정한가? Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 비관성 좌표계(non-inertial frame)와 회전하는 계를 정확히 이 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 1991, 문제 15

확률과 통계 • 표본 속 쌍의 개수 세기

STEP III 1991, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q15

핵심 아이디어

k장의 카드로 이루어진 모든 집합이 뽑힐 가능성은 똑같으므로, 각 확률은 조건을 만족하는 패(hand)의 개수를 $\binom{2n}{k}$로 나눈 값이다. 주어진 쌍 구조를 갖는 패의 개수를 세려면 단계별로 패를 만들어 나가면 된다. 먼저 어떤 종류가 완전한 쌍으로 나타나는지 고른다. 다음으로 다른 어떤 종류가 한 장씩만 나타나는지 고른다. 마지막으로 한 장만 있는 각 종류에 대해 두 장 가운데 어느 카드를 가지고 있는지 고른다. 이 개수를 구해 두면 문제의 모든 부분이 하나의 공식의 특수한 경우가 된다.

풀이

$2n$장의 카드를 모두 서로 구별할 수 있다고 생각하자(한 종류의 두 카드에 각각 1과 2라는 번호를 붙였다고 보면 된다). 그러면 k장의 카드를 비복원 추출(without replacement)로 뽑을 때, 크기가 k인 $\binom{2n}{k}$개의 부분집합이 모두 같은 확률로 뽑힌다. 어떤 종류의 두 카드가 모두 뽑혔을 때 패에 그 종류의 쌍(pair)이 있다고 한다.

네 장, 쌍 없음

쌍이 없는 패는 서로 다른 네 종류의 카드를 한 장씩 포함한다. 종류를 고르는 방법은 $\binom{n}{4}$가지이고, 각 종류에서 카드를 고르는 방법은 2가지이므로 이런 패는 $2^4\binom{n}{4}$개이다.

$$\binom{2n}{4} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24} = \frac{4n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{24},$$

이므로

$$\mathrm{P}(\text{쌍 없음}) = \frac{16 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)/24}{4n(n-1)(2n-1)(2n-3)/24} = \frac{4(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (여기서 $n \geq 4$이므로 서로 다른 네 종류가 반드시 존재한다.)

네 장, 정확히 한 쌍

쌍으로 나타나는 종류를 고른다(n가지). 나머지 두 장은 남은 $n-1$개의 종류 가운데 서로 다른 두 종류에서 나와야 하는데, 이 두 종류를 고르는 방법은 $\binom{n-1}{2}$가지이고 각 종류마다 카드를 고르는 방법이 2가지이다. 따라서 패의 개수는

$$n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 4 = 2n(n-1)(n-2),$$

이고, 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{정확히 한 쌍}) = \frac{24 \cdot 2n(n-1)(n-2)}{4n(n-1)(2n-1)(2n-3)} = \frac{12(n-2)}{(2n-1)(2n-3)}.$$

k장, 정확히 r개의 쌍

패에 쌍이 정확히 r개 있다고 하자. 이 쌍들이 $2r$장의 카드를 차지한다. 나머지 $k-2r$장은 모두 서로 다른 종류에 속하며, 그 가운데 어느 것도 쌍을 이룬 r개의 종류에 속하지 않는다. 그렇지 않으면 쌍이 더 생기기 때문이다. 따라서 다음을 센다.

- 쌍을 이루는 종류: $\binom{n}{r}$가지;
- 한 장씩 나타나는 $k-2r$개의 종류를 나머지 $n-r$개의 종류에서 고르는 방법: $\binom{n-r}{k-2r}$가지;
- 한 장만 있는 각 종류에서 두 장 가운데 어느 카드를 가지는지: 2^{k-2r}가지.

쌍이 정확히 r개인 각 패는 이러한 선택의 순서 가운데 정확히 하나로부터 얻어진다. 그러므로

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{정확히}r\text{개의 쌍}) = \frac{2^{k-2r}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-2r}}{\binom{2n}{k}}}$$

> **생각해 보기** 이 값이 0이 되는 경우가 있는가? 그리고 네 장일 때의 답과 일치하는가?

한 장씩 나타나는 종류에 대해서는 $k-2r \leq n-r$, 즉 $r \geq k-n$이어야 한다. $k > n$이면 어떤 k장의 카드에도 쌍이 적어도 $k-n$개 있어야 하는데, $\binom{n-r}{k-2r} = 0$이 이 경우를 자동으로 처리해 준다. $k = 4$일 때 $r = 0$인 경우는 $2^4\binom{n}{4}/\binom{2n}{4}$, $r = 1$인 경우는 $2^2\, n\binom{n-1}{2}/\binom{2n}{4}$이고, 이는 위에서 구한 두 개수와 정확히 같다.

k가 짝수, 모든 카드가 쌍을 이룸

$k = 2m$이라 하자. 패가 m개의 쌍으로 이루어지는 것은 패가 m개의 완전한 종류의 합집합일 때, 그리고 그때뿐이다. 이런 패는 $\binom{n}{m}$개 있다(일반 공식에서 $r = m$인 경우이다). 따라서

$$\mathrm{P} = \frac{\binom{n}{m}}{\binom{2n}{2m}} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{(2m)!\,(2n-2m)!}{(2n)!}.$$

이를 간단히 하기 위해 계승(factorial)의 짝수 인수와 홀수 인수를 나누어 묶는다.

$$(2j)! = \big(2 \cdot 4 \cdots 2j\big)\big(1 \cdot 3 \cdots (2j-1)\big) = 2^j\, j!\,\big(1 \cdot 3 \cdots (2j-1)\big).$$

$O_j = 1 \cdot 3 \cdots (2j-1)$, $O_0 = 1$로 놓자. 그러면 $(2j)!/j! = 2^j O_j$이므로

$$\mathrm{P} = \frac{2^m O_m \cdot 2^{n-m} O_{n-m}}{2^n O_n} = \frac{O_m\, O_{n-m}}{O_n}.$$

O_n을 O_{n-m}으로 나누면 $2n-2m+1 = 2n-k+1$부터 $2n-1$까지의 홀수가 남으므로

$$\mathrm{P}(\tfrac{1}{2}k\text{개의 쌍}) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (k-1)}{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-k+1)},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

깔끔한 직접적인 논증도 있다. 카드 한 벌 전체를 섞고 맨 위의 k장을 패로 삼자. 맨 위 카드를 보자. 그 짝은 나머지 $2n-1$개의 위치 어디에나 같은 가능성으로 있을 수 있고, 그 가운데 $k-1$개가 패 안에 있으므로 짝이 패 안에 있을 확률은 $\frac{k-1}{2n-1}$이다. 짝이 패 안에 있다면 그 쌍을 제거한다. 남은 것은 $2n-2$장의 카드를 무작위로 배열한 것이고, 패는 그 가운데 맨 위의 $k-2$장이다. 같은 논증을 반복하면 $\frac{k-3}{2n-3}$을 얻고, 이렇게 계속하여 $\frac{1}{2n-k+1}$까지 내려간다. 이 조건부 확률(conditional probability)들을 곱하면 같은 곱을 얻는다.

검산

- 네 장일 때 가능한 경우는 쌍이 0개, 1개, 2개인 세 경우이고, 쌍이 2개일 확률은 $\binom{n}{2}/\binom{2n}{4} = \frac{3}{(2n-1)(2n-3)}$이다. 실제로

  $$4(n-2)(n-3) + 12(n-2) + 3 = 4n^2 - 8n + 3 = (2n-1)(2n-3),$$

  이므로 세 확률의 합은 1이다.

- $n = 5$이고 네 장일 때 확률은 $\frac{8}{21}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{21}$이다. $4 \le n \le 8$이고 k가 3부터 $2n-1$까지인 모든 경우에 대해 컴퓨터로 모든 패를 열거해 본 결과, 일반 공식 및 모두 쌍인 경우의 공식과 일치했다.

- $k = 2$일 때 모두 쌍인 경우의 공식은 $\frac{1}{2n-1}$을 주는데, 이는 두 번째 카드가 첫 번째 카드와 짝이 맞을 확률이다.

흔한 실수

- 한 장씩 있는 카드를 남은 $2n-2r$장 전체에서 $\binom{2n-2r}{k-2r}$로 고르는 것. 이렇게 하면 그중 두 장이 같은 종류일 수 있어서 쌍이 더 생긴다.
- 인수 2^{k-2r}를 빠뜨리는 것. 한 장씩 나타나는 각 종류는 두 카드 가운데 어느 것이든 될 수 있다.

STEP 너머

쌍이 정확히 r개인 패의 개수는 "구조를 먼저 고르고, 그다음에 채워 넣는" 전형적인 세기이고, 곱 $1\cdot 3\cdots(2m-1)$(이중 계승(double factorial) $(2m-1)!!$)은 $2m$개의 대상을 쌍으로 나누는 방법의 수를 센다. 이중 계승은 표준정규분포(standard normal distribution)의 짝수 차 적률(moment)로도 다시 등장한다. 무작위 표본에서 몇 개의 쌍이 살아남는지를 묻는 같은 짝 맞추기 문제는 고전적인 "잃어버린 양말" 문제나 생일 문제 유형의 문제에도 나타난다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)은 이런 종류의 세기에 대한 좋은 기초를 제공한다.

풀이

STEP III 1991, 문제 16

확률과 통계 • 결합 분포와 주변 분포

STEP III 1991, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q16

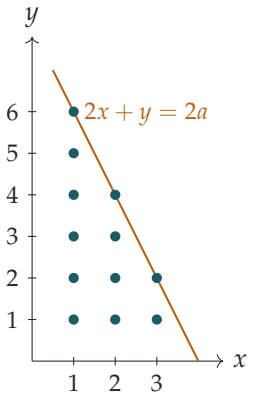
핵심 아이디어

여기서 다루는 것은 모두 삼각형 모양으로 놓인 격자점(lattice points) 위에서의 유한합이다. 먼저 영역을 그려 보자. 각 x에 대해 어떤 y가 허용되는지, 그리고 각 y에 대해 어떤 x가 허용되는지 알아야 한다. 범위를 올바르게 잡고 나면 각 주변분포(marginal distribution)는 등차수열(arithmetic progression)의 합이 된다. 유일하게 미묘한 점은 주어진 y에 대해 허용되는 가장 큰 x가 $\lfloor (2a-y)/2 \rfloor$이고, 이 값이 y가 짝수인지 홀수인지에 따라 달라진다는 것이다.

풀이

영역

$x \geq 1, y \geq 1, 2x + y \leq 2a$가 성립해야 한다. $y \geq 1$이므로 $2x \leq 2a - 1$이어야 하고, 따라서 $x \leq a - 1$이다. $1 \leq x \leq a - 1$인 고정된 x에 대해 허용되는 값은 $y = 1, 2, \ldots, 2a - 2x$이다. 마찬가지로 $x \geq 1$이므로 $y \leq 2a - 2$이다.



그림은 $a = 4$인 경우를 보여 준다. 열 x에는 $2a - 2x$개의 점이 있다.

X의 주변분포와 c의 값

x를 고정하고 $n = 2a - 2x$로 쓰자. 등차수열 $2x + 1, \ldots, 2x + n$을 더하면

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = x) &= c \sum_{y=1}^{n} (2x + y) = c \left(2xn + \frac{n(n+1)}{2} \right) = c \, \frac{n}{2} \, (4x + n + 1) \\ &= c \, (a - x)(2a + 2x + 1), \qquad x = 1, 2, \ldots, a - 1, \end{aligned}$$

이고, 그 밖의 경우에는 $\mathrm{P}(X = x) = 0$이다.

확률을 모두 더하면 1이 되어야 한다. $k = a - x$로 놓으면 이 값은 1부터 $a - 1$까지 변하고, $2a + 2x + 1 = 4a + 1 - 2k$이며

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{a-1} k(4a + 1 - 2k) &= (4a + 1) \frac{(a-1)a}{2} - 2 \cdot \frac{(a-1)a(2a-1)}{6} \\ &= a(a-1) \left(\frac{4a+1}{2} - \frac{2a-1}{3} \right) = \frac{a(a-1)(8a+5)}{6}. \end{aligned}$$

이다. 이 값에 c를 곱한 것을 1로 놓으면

$$c = \frac{6}{a(a-1)(8a+5)},$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

Y의 주변분포

$1 \le y \le 2a - 2$인 y를 고정하자. 허용되는 x는 $1, 2, \ldots, N$이고, 여기서 N은 $2N \le 2a - y$를 만족하는 가장 큰 정수이다. 이러한 N개의 항에 대해

$$\sum_{x=1}^{N} (2x + y) = N(N+1) + yN = N(N + 1 + y).$$

y가 짝수인 경우. 이때 $2a-y$는 짝수이고 $N=\frac{1}{2}(2a-y)$이므로 $N+1+y=\frac{1}{2}(2a+2+y)$이고

$$\mathrm{P}(Y=y)=c\cdot\frac{(2a-y)(2a+2+y)}{4}=\frac{3(2a-y)(2a+2+y)}{2a(a-1)(8a+5)},$$

이다. 여기서 c의 값을 이용하였다. 이것이 요구된 결과이다.

> **생각해 보기** y가 홀수일 때는 왜 $N=\frac{1}{2}(2a-y)$를 쓸 수 없을까?

y가 홀수이면 $\frac{1}{2}(2a-y)$는 정수가 아니다. $2x\le 2a-y$를 만족하는 가장 큰 정수 x는 $N=\frac{1}{2}(2a-y-1)$이다. 내림을 하면 절반이 떨어져 나가기 때문이다.

y가 홀수인 경우. $N=\frac{1}{2}(2a-1-y)$로 놓으면 $N+1+y=\frac{1}{2}(2a+1+y)$이므로

$$\mathrm{P}(Y=y)=c\cdot\frac{(2a-1-y)(2a+1+y)}{4}=\frac{3(2a-1-y)(2a+1+y)}{2a(a-1)(8a+5)}.$$

(두 경우는 같은 분모 위에 각각 $3\big((2a+1)^2-(y+1)^2\big)$과 $3\big(4a^2-(y+1)^2\big)$로 쓸 수 있다.)

Y의 기댓값(expectation)

$y\,\mathrm{P}(Y=y)$를 더하려면 짝수인 y와 홀수인 y를 따로 다루어야 한다. 결합분포(joint distribution)로 돌아가서 각 열을 따라 더하는 편이 더 깔끔하다. 고정된 x에 대해, 앞에서처럼 $n=2a-2x$로 두면

$$\sum_{y=1}^{n}y(2x+y)=2x\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{6}\big(6x+2n+1\big).$$

다시 $k=a-x$로 놓으면 $n=2k$이고 $6x+2n+1=6a-2k+1$이다. 열의 합은 다음과 같이 된다.

$$\frac{2k(2k+1)(6a+1-2k)}{6}=\frac{k(2k+1)(6a+1-2k)}{3}.$$

전개하면 $k(2k+1)(6a+1-2k)=(6a+1)(2k^2+k)-4k^3-2k^2$이다. $a-1$까지의 표준적인 합 공식을 이용하면

$$\sum_{k=1}^{a-1}(2k^2+k)=\frac{a(a-1)(2a-1)}{3}+\frac{a(a-1)}{2}=\frac{a(a-1)(4a+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{a-1}k^3=\frac{a^2(a-1)^2}{4},\qquad\sum_{k=1}^{a-1}k^2=\frac{a(a-1)(2a-1)}{6}.$$

따라서

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{a-1} k(2k+1)(6a+1-2k)\\&\quad= a(a-1)\left(\frac{(6a+1)(4a+1)}{6} - a(a-1) - \frac{2a-1}{3}\right)\\&\quad= \frac{a(a-1)}{6}\left(24a^2+10a+1-6a^2+6a-4a+2\right)\\&\quad= \frac{a(a-1)(6a^2+4a+1)}{2}.\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \frac{c}{3}\cdot\frac{a(a-1)(6a^2+4a+1)}{2} = \frac{6}{a(a-1)(8a+5)}\cdot\frac{a(a-1)(6a^2+4a+1)}{6}\\&= \frac{6a^2+4a+1}{8a+5}.\end{aligned}$$

검산

- $a=2$이면 점은 $(1,1)$과 $(1,2)$ 두 개뿐이고 가중치는 각각 $3c$와 $4c$이므로 $c=\frac{1}{7}$이다. 이는 $6/(2\cdot1\cdot21)$과 일치한다. 그러면 $\mathrm{E}(Y)=\frac{3+8}{7}=\frac{11}{7}$이고, 공식도 $\frac{33}{21}=\frac{11}{7}$을 준다.
- X와 Y의 주변분포 공식(두 홀짝성(parity) 모두)과 $\mathrm{E}(Y)$를 2부터 29까지의 모든 a에 대해 분수를 이용한 정확한 전수 계산으로 확인하였다. 예를 들어 $a=3$이면 $\mathrm{E}(Y)=\frac{67}{29}$이다.
- a가 크면 $\mathrm{E}(Y)\approx\frac{3}{4}a$이다. 가중치 $2x+y$는 비스듬한 변 근처의 점에 더 큰 비중을 주므로, Y는 삼각형 위에 균등한 가중치를 줄 때 얻는 $\frac{2}{3}a$보다 꽤 위에 놓인다.

흔한 실수

- x를 a까지 움직이게 하는 것. $x=a$인 점에서는 $y\le0$이 되어야 한다.
- 홀수 y에 대해 $N=\frac{1}{2}(2a-y)$를 쓰는 것. 이 값은 정수가 아니다.
- 두 경우로 나뉜 주변분포로부터 $\mathrm{E}(Y)$를 구하려는 것. 이 방법도 되기는 하지만, 결합분포의 열을 따라 더하면 홀짝에 따른 경우 나누기를 아예 피할 수 있다.

STEP 너머

결합분포로부터 주변분포를 얻는다는 것은 다른 변수에 대해 합을 취해 없앤다는 뜻이며, 어려운 부분은 언제나 영역의 범위를 정하는 것이다. 연속확률변수에서는 같은 작업이 이

중적분(double integral)의 적분 범위를 정하는 일이 되고, (E(Y)를 구할 때 했던 것처럼) 합의 순서를 바꾸는 것은 적분 순서를 바꾸는 것이 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이산변수와 연속변수 모두에 대해 결합분포와 주변분포를 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1991년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

