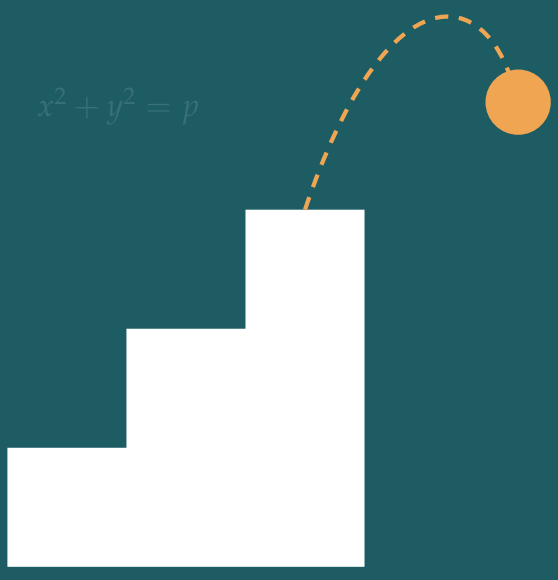
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1990년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1990년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1990년 풀이

1990년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 48개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 삼각함수의 최적화 순수수학 3

Q2 1의 거듭제곱근 필터 순수수학 6

Q3 법선과 평행 곡선 순수수학 10

Q4 등차수열과 차분 순수수학 14

Q5 부분분수와 곡선의 개형 순수수학 17

Q6 벡터와 평행사변형 순수수학 21

Q7 일계 선형 상미분방정식 순수수학 25

Q8 삼각함수의 무한곱 순수수학 29

Q9 접선과 넓이의 한계 순수수학 33

Q10 일률과 저항 역학 37

Q11 포물체와 운동량 역학 41

Q12 탄성 용수철과 에너지 역학 45

Q13 마찰과 강체의 평형 역학 49

Q14 기댓값과 최적 정지 확률과 통계 53

Q15 음이항분포 확률과 통계 57

Q16 삼각분포와 검정 확률과 통계 61

STEP II

Q1 다항식 부등식 순수수학 65

Q2 프톨레마이오스 정리 순수수학 69

Q3 삼차함수의 그래프 그리기 순수수학 73

Q4 직선의 배치와 수학적 귀납법 순수수학 78

Q5 복소수와 원 순수수학 82

Q6 정수 부등식과 분수 순수수학 86

Q7 미분방정식 순수수학 90
Q8 부분적분 순수수학 94
Q9 극곡선과 곡선의 길이 순수수학 98
Q10 행렬 다항방정식 순수수학 102
Q11 각운동량 보존 역학 106
Q12 반발 계수와 포물체 운동 역학 110
Q13 막대의 평형 역학 114
Q14 탄성 충돌 역학 118
Q15 순서통계량 확률과 통계 122
Q16 베이즈 정리 확률과 통계 125

STEP III

Q1 배각과 다항식의 근 순수수학 128
Q2 3차원 벡터 순수수학 132
Q3 군의 공리와 켤레 순수수학 136
Q4 삼각급수 순수수학 139
Q5 라이프니츠 정리 순수수학 143
Q6 선형 변환과 타원 순수수학 147
Q7 음함수 곡선 그리기 순수수학 152
Q8 완전미분방정식 순수수학 157
Q9 쌍곡선 함수 순수수학 160
Q10 근과 점근 근사 순수수학 164
Q11 강체의 회전 역학 169
Q12 움직이는 쐐기 위의 입자 역학 173
Q13 구 내부에서의 운동 역학 177
Q14 힘의 계 역학 181
Q15 기하분포 확률과 통계 185
Q16 기하학적 확률 확률과 통계 189

풀이

STEP I 1990, 문제 1

순수수학 • 삼각함수의 최적화

> **STEP I 1990, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q1

핵심 아이디어

블라인드의 모든 꼭짓점은 중심 D로부터 거리가 r이므로, 반지름 DX와 DY는 사각형을 꼭지각이 D에 있는 세 개의 이등변삼각형(isosceles triangle)으로 나눈다. 각 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\sin$(꼭지각)이고, 세 꼭지각의 합은 π이다. 이렇게 하면 기하 문제가 사인 값들의 합을 최대화하는 문제로 바뀌고, 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)을 쓰면 미적분(calculus) 없이 첫 부분을 해결할 수 있다.

풀이

블라인드의 넓이

A, D, C가 한 직선 위에 있으므로(collinear), D에서의 각은 다음을 만족한다.

$$\angle ADX + \angle XDY + \angle YDC = \pi, \qquad \text{따라서} \qquad \angle YDC = \pi - \theta - \alpha.$$

여기서 $\theta \geq 0, \alpha > 0$이고 $\theta + \alpha \leq \pi$이므로, X와 Y는 호 위에 A, X, Y, C의 순서로 놓인다.

반지름 DX와 DY는 블라인드 $AXYC$를 삼각형 ADX, XDY, YDC로 나누며, 각 삼각형은 길이가 r인 두 변이 D에서 만난다. 각각에 대해 넓이 $= \frac{1}{2}ab\sin C$를 쓰면

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \tfrac{1}{2}r^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha + \tfrac{1}{2}r^2\sin(\pi - \theta - \alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}r^2[\sin\alpha + \sin\theta + \sin(\theta + \alpha)], \end{aligned}$$

이다. $\sin(\pi - u) = \sin u$이기 때문이다.

고정된 α에 대한 최적의 θ

α를 고정하면 $\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)$만 변한다. 합을 곱으로 바꾸는 공식 $\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$에 의해

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) = 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\,\sin\!\left(\theta+\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

? **생각해 보기** 왜 이렇게 하면 최댓값이 분명해지는가?

$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 인수 $2\cos\frac{\alpha}{2}$는 고정된 양의 상수이다. 따라서 넓이는 $\sin(\theta+\frac{\alpha}{2})$가 가장 클 때 정확히 가장 크다. θ가 $[0, \pi-\alpha]$ 위를 움직이면 각 $\theta+\frac{\alpha}{2}$는 $[\frac{\alpha}{2}, \pi-\frac{\alpha}{2}]$ 위를 움직이고, 이 구간은 $\frac{\pi}{2}$를 포함한다. 그러므로 사인은 $\theta+\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$일 때 가능한 최댓값 1에 도달한다. 즉

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}.}$$

이때 $\angle YDC = \pi - \theta - \alpha = \frac{\pi-\alpha}{2} = \theta$도 성립한다. 즉 최적의 블라인드는 수직 반지름에 대하여 대칭이며, 이는 직관과도 맞아떨어진다. 이 α에 대한 최대 넓이는

$$\tfrac{1}{2}r^2\left[\sin\alpha + 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\right].$$

α를 변화시키기

이제 $0 < \alpha < \pi$에서 $f(\alpha) = \sin\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2}$를 최대화한다. (각 α에 대해 가장 큰 넓이는 $\frac{1}{2}r^2 f(\alpha)$이므로, 전체에서 가장 큰 넓이는 f의 최댓값에 $\frac{1}{2}r^2$를 곱한 것이다.) 미분하면

$$f'(\alpha) = \cos\alpha - \sin\tfrac{\alpha}{2}.$$

$s = \sin\frac{\alpha}{2}$로 두면 $0 < s < 1$이고, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$를 이용하면

$$f'(\alpha) = 1 - s - 2s^2 = (1-2s)(1+s).$$

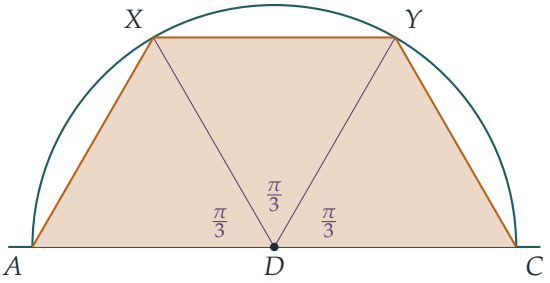
$1+s > 0$이므로 f'의 부호는 $1-2s$의 부호와 같다. $(0,\pi)$에서 s는 α에 따라 증가하므로, f'는 $s < \frac{1}{2}$일 때 양수이고 $s > \frac{1}{2}$일 때 음수이다. 따라서 f는 증가하다가 감소하며, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, 즉 $\alpha = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값을 가진다. 이때

$$f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\tfrac{\pi}{3} + 2\cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \tfrac{3\sqrt{3}}{2},$$

이므로 블라인드의 가능한 최대 넓이는

$$\boxed{\tfrac{1}{2}r^2 \cdot \tfrac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2.}$$

이때 $\alpha = \theta = \angle YDC = \frac{\pi}{3}$이므로 세 삼각형은 정삼각형이고, 블라인드는 원 전체에 내접하는 정육각형(regular hexagon)의 절반이다.



검산

- 극한의 경우: $\alpha \to 0$이면 블라인드는 X가 꼭대기에 있는 삼각형 AXC가 되고, 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$이며, 실제로 $\frac{1}{2}r^2 f(0) = r^2$이다. $\alpha \to \pi$이면 블라인드는 지름 위로 납작해지고 $f(\pi) = 0$이다. 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 \approx 1.299r^2$은 두 경우보다 크고, 반원의 넓이 $\frac{\pi}{2}r^2 \approx 1.571r^2$보다 작으니 당연히 그래야 하는 대로이다.
- 수치적으로: X와 Y의 임의의 위치에 대해 세 삼각형 공식을 신발끈 공식(shoelace formula)과 비교하여 확인했고, 여러 α 값에 대해 촘촘한 격자 탐색(grid search)으로 최적의 θ를 찾았으며, $r = 1$로 두고 θ와 α를 함께 탐색하면 최대 넓이가 $1.299038\ldots = \frac{3\sqrt{3}}{4}$임을 확인했다.

흔한 실수

- 세 번째 삼각형 YDC를 빠뜨리거나, 그 각을 $\pi - \theta - \alpha$가 아니라 $\pi - \alpha$로 쓰는 것.
- 두 번째 부분에서 정당화 없이 $\theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$라는 지름길을 쓰는 것. 최적의 블라인드가 정말로 정육각형의 절반임을 보이려면 미적분(또는 대칭성 논증)이 필요하다.

STEP 너머

이 답은 고전적인 사실의 특수한 경우이다. 원에 내접하는 모든 n각형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 정n각형이다. 깔끔한 증명 하나는 $[0, \pi]$에서 sin의 오목성(concavity)과 옌센 부등식(Jensen's inequality)을 이용한다. 중심각 $\phi_1, \ldots, \phi_n$의 합이 2π이면 $\sum \sin\phi_i \leq n \sin\frac{2\pi}{n}$이다. 우리의 블라인드는 $n = 6$인 경우의 절반이다. 이런 종류의 볼록성(convexity)과 부등식은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 계속 등장하는 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이를 제대로 만나기에 좋은 책이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 같은 맥락의 STEP 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 1990, 문제 2

순수수학 • 1의 거듭제곱근 필터

STEP I 1990, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s1-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.2 절 **단위근 필터**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/roots-filter.html

핵심 아이디어

1의 세제곱근(cube roots of unity)은 일종의 거름망 역할을 한다. $(1+\omega^r)^n$을 이항정리(binomial theorem)로 전개하고 $r=1,2,3$일 때의 결과를 더하면, 각 이항계수(binomial coefficient) $\binom{n}{j}$에 $1+\omega^j+\omega^{2j}$가 곱해진다. 이 값은 j가 3으로 나누어떨어지면 3이고 그렇지 않으면 0이다. 따라서 이 합에는 정확히 우리가 원하는 계수만 남는다. 각 $(1+\omega^r)^n$을 계산하는 또 다른 방법은 $1+\omega^r$을 절댓값-편각 형식(modulus–argument form)으로 나타낸 뒤 드무아브르(de Moivre) 정리를 이용하는 것이다.

풀이

1의 세제곱근

$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$이므로 $\omega^3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$이지만 $\omega \neq 1$이다. 그러면

$$0 = \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2),$$

이고 $\omega - 1 \neq 0$이므로 양변을 이것으로 나누면 $1+\omega+\omega^2 = 0$을 얻는다.

따라서 $1+\omega^2 = -\omega$이다. $-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$을 곱하는 것은 $-\pi$만큼 회전하는 것이므로

$$1 + \omega^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}.$$

그러므로 $1+\omega^2$의 절댓값은 1이고 편각은 $-\frac{\pi}{3}$이다. (검산해 보면 $1+\omega^2 = 1+$

$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$이다.) 같은 방법으로 $1+\omega = -\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이고, 이는 켤레 복소수(complex conjugate)이다.

항등식

첫 번째 방법: 이항정리. $r = 1, 2, 3$에 대하여

$$(1+\omega^r)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{rj}.$$

세 경우를 더하면

$$(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+\omega^3)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\omega^j + \omega^{2j} + \omega^{3j}\right).$$

? **생각해 보기** 일반적인 정수 j에 대하여 $\omega^j + \omega^{2j} + \omega^{3j}$의 값은 무엇인가?

$\omega^{3j} = 1$이므로 괄호 안은 $1+\omega^j+\omega^{2j}$이고, $\omega^3 = 1$이므로 이 값은 j를 3으로 나눈 나머지에만 의존한다.

- j가 3의 배수이면 $\omega^j = 1$이고 괄호 안은 $1+1+1 = 3$이다.
- $j \equiv 1 \pmod 3$이면 $\omega^j = \omega, \omega^{2j} = \omega^2$이므로 괄호 안은 $1+\omega+\omega^2 = 0$이다.
- $j \equiv 2 \pmod 3$이면 $\omega^j = \omega^2, \omega^{2j} = \omega^4 = \omega$이므로 이번에도 괄호 안은 0이다.

따라서 $3 \mid j$인 항만 살아남고

$$(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+\omega^3)^n = 3\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{k}\right],$$

이다. 여기서 k는 n 이하인 3의 배수 중 가장 큰 수이다.

두 번째 방법: 절댓값과 편각. 앞부분에서 $1+\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, 1+\omega^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$이고, $1+\omega^3 = 2$이다. 드무아브르 정리에 의하여

$$\begin{aligned}(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+\omega^3)^n &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/3} + 2^n \\ &= 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

두 계산 결과를 비교하고 3으로 나누면

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots + \binom{n}{k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$n = 25$인 경우

25를 넘지 않는 가장 큰 3의 배수는 24이므로, 첫 번째 합은 정확히 $n = 25$일 때의 항등식이다. 이제 $\frac{25\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3}$이므로 $\cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$이고

$$\binom{25}{0} + \binom{25}{3} + \cdots + \binom{25}{24} = \frac{1}{3}\left(2^{25} + 1\right) = \frac{33554433}{3} = 11184811.$$

두 번째 합

여기서는 $n = 24$이고 $j \equiv 2 \pmod 3$인 계수 $\binom{24}{j}$의 합을 구하려 한다. 모든 계수 $\binom{24}{j}$를 j를 3으로 나눈 나머지에 따라 묶으면

$$S_0 + S_1 + S_2 = \sum_{j=0}^{24} \binom{24}{j} = 2^{24},$$

이다. 여기서 S_m은 $j \equiv m \pmod 3$인 j에 대한 $\binom{24}{j}$의 합이다.

대칭성 $\binom{24}{j} = \binom{24}{24-j}$로 이들을 짝지을 수 있다. 24가 3의 배수이므로 $j \equiv 2$이면 $24 - j \equiv -2 \equiv 1 \pmod 3$이다. 따라서 $j \mapsto 24 - j$는 S_2의 항과 S_1의 항을 일대일로 대응시키고, $S_1 = S_2$이다.

$n = 24$일 때의 항등식으로 S_0를 구할 수 있다. $\cos 8\pi = 1$이므로

$$S_0 = \frac{1}{3}\left(2^{24} + 2\right).$$

그러므로

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(2^{24} - S_0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2^{24} - 2}{3} = \frac{2^{24} - 1}{3}.$$

주어진 값을 반으로 나누면 $2^{24} = 16777216$이므로

$$\binom{24}{2} + \binom{24}{5} + \cdots + \binom{24}{23} = \frac{16777215}{3} = 5592405.$$

검산

- 작은 경우: $n = 3$이면 좌변은 $1 + 1 = 2$이고 우변은 $\frac{1}{3}(8 + 2\cos\pi) = 2$이다. $n = 4$이면 좌변은 $1 + 4 = 5$이고 우변은 $\frac{1}{3}\left(16 + 2\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}(16 - 1) = 5$이다.
- 나누어떨어짐: $2^{25} + 1$과 $2^{24} - 1$은 모두 3의 배수여야 하는데, $2 \equiv -1 \pmod 3$이므로 실제로 그렇다.
- 컴퓨터로 이항계수를 직접 더해 보았다. 항등식은 199 이하의 모든 n에 대하여 성립하고, 첫 번째 합은 11184811, 두 번째 합은 5592405이다.

흔한 실수

- $1+\omega^2$의 편각을 $\frac{\pi}{3}$으로 쓰는 것. 이 수는 제4사분면에 있으므로 주편각(principal argument)은 $-\frac{\pi}{3}$이다(또는 같은 뜻으로 $\frac{5\pi}{3}$).
- 2^n을 만들어 내는 $r=3$인 경우를 빠뜨리는 것.
- 두 번째 합에서 공식을 그대로 쓰려고 하는 것. 이 공식은 3의 배수인 경우만 다루므로, 나머지가 2인 항에는 다른 아이디어(여기서는 대칭성)가 필요하다.

STEP 너머

이 기법을 **단위근 필터**(roots of unity filter)라고 하며, 이는 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)의 첫 번째 예이다. m제곱근인 1의 거듭제곱근들에 대하여 $f(\omega^r)$의 평균을 내면, 다항식 f의 계수 중 m을 법으로 하는 특정한 잉여류(residue class)에 속하는 것만 골라낼 수 있다. 대칭들의 군에 대하여 이와 같이 평균을 내는 방법은 유한군(finite group)의 지표 이론(character theory)과 번사이드(Burnside) 보조정리 같은 세기 논법에서 다시 등장한다. 복소수가 왜 이런 계산을 자연스럽게 만드는지 더 알고 싶다면 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 참고하라.

풀이

STEP I 1990, 문제 3

순수수학 • 법선과 평행 곡선

STEP I 1990, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s1-q3

핵심 아이디어

아래쪽을 향하는 단위 법선벡터(unit normal)를 명시적으로 적어 $\mathbf{s}$의 좌표를 x로 나타내기만 하면 나머지는 모두 저절로 따라온다. 그러면 소문항 (i)은 $\mathbf{s}$의 y좌표가 0이 되도록 만드는 문제가 된다. 소문항 (ii)에서는 제시된 치환(substitution)을 쓰면 $\mathbf{s}$의 좌표가 아주 간단해지고, 기울기 조건은 1계 미분방정식(first-order differential equation)이 되는데, 이 식은 알고 보면 어떤 식의 도함수 그 자체이다.

풀이

준비. $y = \mathrm{f}(x)$의 접선(tangent) 방향은 $(1, \mathrm{f}'(x))$이므로 법선 방향은 $\pm(\mathrm{f}'(x), -1)$이다. 아래쪽을 향하는 것은 y성분이 음수인 쪽이므로

$$\mathbf{n} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \mathrm{f}'(x) \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad N = \sqrt{1 + \mathrm{f}'(x)^2},$$

이고, 따라서

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} + \mathrm{p}(x)\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x + \dfrac{\mathrm{p}(x)\,\mathrm{f}'(x)}{N} \\ \mathrm{f}(x) - \dfrac{\mathrm{p}(x)}{N} \end{pmatrix}.$$

이다. 또한 $\mathbf{n}$이 단위벡터이므로 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}| = |\mathrm{p}(x)|$임에 주목하자.

소문항 (i)

여기서는 $\mathrm{f}(x) = x^k$, $\mathrm{f}'(x) = kx^{k-1}$, $N = \sqrt{1 + k^2x^{2k-2}}$이다. $\mathbf{s}$가 x축 위에 있으려면 y좌표가 0이어야 한다.

$$x^k - \frac{\mathrm{p}(x)}{N} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(x) = x^k\sqrt{1 + k^2x^{2k-2}}.$$

이렇게 잡으면 $\mathbf{s}$의 x좌표는

$$x + x^k \cdot kx^{k-1} = x + kx^{2k-1},$$

이고, 이는 연속이고 증가하며, $x \to 0^+$일 때 0으로, $x \to \infty$일 때 무한대로 간다. 따라서 $\mathbf{s}$는 양의 x축의 일부가 아니라 전체를 실제로 훑고 지나간다.

이제 $|\mathbf{r}|^2 = x^2 + x^{2k}$이고 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = \mathrm{p}(x)^2 = x^{2k} + k^2x^{4k-2}$이다(여기서 $\mathrm{p} > 0$). 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$일 필요충분조건은

$$x^2 = k^2x^{4k-2} \quad \text{모든} x > 0.$$

에 대하여 성립하는 것이다. $x = 1$을 대입하면 $k^2 = 1$이어야 하므로 $k = 1$이다. 역으로 $k = 1$이면 양변이 모두 x^2이 된다. 따라서 $k = 1$이다.

기하학적으로 보면, 직선 $y = x$ 위의 점 (x, x)에서 아래쪽으로 그은 법선은 x축과 $(2x, 0)$에서 만나고, 세 꼭짓점이 O, (x, x), $(2x, 0)$인 삼각형은 같은 두 변의 길이가 $\sqrt{2}\,x$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이다.

소문항 (ii)

이제 $\mathrm{f}(x) = x^2$, $\mathrm{f}'(x) = 2x$, $N = \sqrt{1 + 4x^2}$이다. $\mathrm{p} = \mathrm{q}N$으로 놓으면 번거로운 제곱근이 소거된다.

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2x\,\mathrm{q}(x) \\ x^2 - \mathrm{q}(x) \end{pmatrix}.$$

새 곡선은 x를 매개변수(parameter)로 하여 주어지므로, $\mathbf{s}$에서의 기울기는

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{2x - \mathrm{q}'}{1 + 2\mathrm{q} + 2x\mathrm{q}'}.$$

이다. 이것을 $\mathbf{r}$에서 $y = x^2$의 기울기인 $2x$와 같다고 놓고 분모를 곱하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & 2x - \mathrm{q}' = 2x + 4x\mathrm{q} + 4x^2\mathrm{q}' \\ \Longleftrightarrow \quad & (1 + 4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q} = 0. \end{aligned}$$

생각해 보기 (0이 되는 곳이 있을 수도 있는) q로 나누지 않고 이 식을 풀 수 있을까?

그렇다. 대신 결코 0이 되지 않는 $N = \sqrt{1+4x^2}$으로 나누면 된다. $N' = 4x/N$이므로

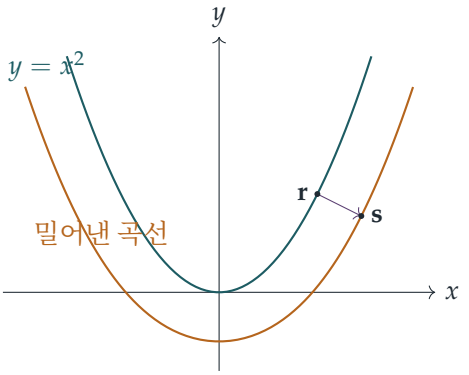
$$\frac{(1+4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q}}{N} = N\mathrm{q}' + \frac{4x}{N}\,\mathrm{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N\mathrm{q}) = \mathrm{p}'(x).$$

이다. 따라서 조건은 단순히 모든 x에 대하여 $\mathrm{p}'(x) = 0$이라는 것이고, 그러므로

$$\mathrm{p}(x) = c, \qquad \text{상수}$$

이다(동치로 $\mathrm{q}(x) = c/\sqrt{1+4x^2}$). 역으로, 새 곡선의 기울기가 정의되는 곳에서는 위의 각 단계를 거꾸로 따라갈 수 있으므로 모든 상수 c가 조건을 만족한다.

새 곡선은 **평행곡선**(parallel curve)이다. 즉 포물선의 각 점을 법선을 따라 일정한 거리 c만큼 밀어낸 것이다. 그림은 $c = \frac{1}{2}$인 경우이다.



미묘한 점이 하나 있다. $\mathrm{d}X/\mathrm{d}x = 1 + 2\mathrm{q} + 2x\mathrm{q}'$인데, $\mathrm{q} = c/N$을 대입하면 $1 + 2c/N^3$으로 간단해진다. $c > -\frac{1}{2}$이면 이 값은 항상 양수이므로 밀어낸 곡선은 매끄러운 곡선이다. $c \le -\frac{1}{2}$이면(꼭짓점에서의 곡률 반지름(radius of curvature)인 $\frac{1}{2}$ 이상만큼 **위쪽으로** 밀어내는 경우), 이 값은 $N^3 = -2c$인 곳에서 0이 되고, 밀어낸 곡선은 그곳에서 첨점(cusp)을 갖게 된다.

검산

- (i)에서 $k = 2$, $x = 1$이면 $\mathrm{p}(1) = \sqrt{5}$이고 $\mathbf{s} = (1,1) + \sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = (3,0)$이므로 요구대로 x축 위에 있다. 그러나 $|\mathbf{r}| = \sqrt{2} \neq \sqrt{5}$이므로 $k = 2$는 조건을 만족하지 않는다.
- (ii)에서 상수 c로 밀어낸 곡선은 $x = 0$일 때 $(0,-c)$를 지나고, 대칭성에 의해 그곳에서의 기울기는 0이므로 포물선의 꼭짓점과 들어맞는다.

- 수치적으로 $c = 1$, $x = 0.8$일 때 밀어낸 곡선의 유한 차분(finite difference) 기울기는 $2x = 1.6$과 일치한다. 반면 상수가 아닌 $\mathrm{p} = x^2$을 택하면 기울기는 약 0.41이 나온다.

흔한 실수

- 위쪽을 향하는 법선 $(-\mathrm{f}', 1)/N$을 쓰는 실수: 이 경우 $\mathbf{s}$의 부호가 모두 뒤집힌다.
- 새 곡선의 기울기를 $(\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x)/(\mathrm{d}X/\mathrm{d}x)$가 아니라 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x$로 쓰는 실수: 새 곡선의 x좌표는 x가 아니라 X이다.
- (i)에서 지수만 비교하여 $(4k - 2 = 2)$ $k = 1$이라고 결론짓고, 계수 조건 $k^2 = 1$은 확인하지 않는 실수.

STEP 너머

일정한 거리만큼 밀어낸 곡선을 **평행곡선** 또는 **오프셋 곡선**(offset curve)이라고 하며, 실제로도 중요하다. 밀링 머신(milling machine)의 절삭 공구 중심은 깎아 내는 모양의 평행곡선을 따라 움직인다. 밀어내는 거리가 곡률 반지름보다 클 때 나타나는 첨점들은 곡률 중심의 자취인 **축폐선**(evolute) 위에 놓이는데, 이는 곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 핵심적인 대상이다. 좋은 입문서로 Pressley, *Elementary Differential Geometry*(초등 미분기하학)가 있다.

풀이

STEP I 1990, 문제 4

순수수학 • 등차수열과 차분

> **STEP I 1990, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q4

핵심 아이디어

수열의 각 항은 첫째항에 차이들의 누적합을 더한 것이다. 등차수열(arithmetic progression)에서는 차이가 일정하므로 합을 구하기 쉽다. 이중 등차수열(double arithmetic progression)에서는 차이 자체가 등차수열을 이루므로 합하는 단계가 한 겹 더 늘어나고, 이항계수(binomial coefficient) $\binom{n}{2}$와 $\binom{n}{3}$이 자연스럽게 나타난다. 마지막 부분은 결국 두 미지의 차이에 대한 연립일차방정식이 된다.

풀이

등차수열

공차(common difference)를 $d = a_2 - a_1$이라 하면 $a_k = a_1 + (k-1)d$이다. 그러면

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}(a_2 - a_1),$$

이다. 여기서 $0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$을 이용하였다. a_1과 a_2에 대한 항끼리 묶으면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}\big[(3-n)a_1 + (n-1)a_2\big].$$

이중 등차수열

차이를 $\delta_k = b_{k+1} - b_k$라 하자. 이들은 첫째항이 $p = \delta_1 = b_2 - b_1$이고 공차가

$$e = \delta_2 - \delta_1 = (b_3 - b_2) - (b_2 - b_1) = b_3 - 2b_2 + b_1.$$

인 등차수열을 이룬다. 따라서 $\delta_j = p + (j-1)e$이고, 처음 $k-1$개의 차이를 더하면(첫 번째 부분의 공식에서 n을 $k-1$로 바꾼 것) 다음을 얻는다.

$$b_k = b_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j = b_1 + (k-1)p + \frac{(k-1)(k-2)}{2}\, e = b_1 + \binom{k-1}{1} p + \binom{k-1}{2} e.$$

이제 $k = 1, \ldots, n$에 대하여 합한다. 두 개의 합이 필요하다. 첫 번째는 앞에서와 같이 $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \binom{n}{2}$이다. 두 번째는 $j = k-1$이 0부터 $n-1$까지 움직인다고 하면

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{12}\left[(2n-1) - 3\right]$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \binom{n}{3}.$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = nb_1 + \binom{n}{2}(b_2 - b_1) + \binom{n}{3}(b_3 - 2b_2 + b_1).$$

이것은 이미 n, b_1, b_2, b_3에 대한 공식이다. 각 b_i의 계수를 따로 보고 싶다면 전개하여 다음을 얻는다.

$$b_1 + \cdots + b_n = \frac{n(n^2 - 6n + 11)}{6}\, b_1 + \frac{n(n-1)(7-2n)}{6}\, b_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\, b_3.$$

(간단한 확인: $n = 1, 2, 3$을 넣으면 각각 b_1, $b_1 + b_2$, $b_1 + b_2 + b_3$이 나온다.)

생각해 보기 $\binom{n}{3}$이 어디에서 나오는지 더 깔끔하게 볼 수 있는 방법이 있을까?

있다. $\binom{k-1}{2}$는 $k-1$개에서 2개를 고르는 방법의 수이고, 하키스틱 항등식(hockey-stick identity) $\sum_{k=1}^{n}\binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}$($n$개에서 3개를 고를 때 가장 큰 것 k를 먼저 정한다)을 쓰면 합을 한 번에 구할 수 있다. 적분하면 거듭제곱의 차수가 하나 올라가는 것과 마찬가지로, "차이의 차이"를 한 겹 더할 때마다 이항계수가 하나씩 올라간다.

계승 수열

이제 $b_1 = 1$이고, p와 e를 위와 같이 두면 $b_k = 1 + (k-1)p + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)e$이다. 따라서

$$b_2 = 1 + p, \qquad b_4 = 1 + 3p + 3e, \qquad b_6 = 1 + 5p + 10e.$$

$c_1 = b_2$, $c_2 = b_4$, $c_3 = b_6$, $c_4 = 220$인 계승 수열(factorial progression)에서 연속한 차이는 $1!\,d$, $2!\,d$, $3!\,d$, 즉 d, $2d$, $6d$이다.

$$b_4 - b_2 = 2p + 3e = d,$$
$$b_6 - b_4 = 2p + 7e = 2d,$$
$$220 - b_6 = 219 - 5p - 10e = 6d.$$

첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하면 $2p+7e=4p+6e$이므로 $e=2p$이고, 따라서 $d=8p$이다. 세 번째 식은

$$219-5p-20p=48p \quad\Longrightarrow\quad 73p=219 \quad\Longrightarrow\quad p=3,$$

이 되므로 $e=6$, $d=24$이고, 이는 조건대로 0이 아니다. 모든 단계가 필연적으로 결정되었으므로 해는 유일하다.

그러므로 $b_k = 1+3(k-1)+3(k-1)(k-2) = 3k^2-6k+4$이고, 수열은 $1,4,13,28,49,76,\ldots$이다. 실제로 $b_2, b_4, b_6, 220 = 4, 28, 76, 220$의 차이는 $24, 48, 144 = 1!\cdot 24,\ 2!\cdot 24,\ 3!\cdot 24$이다.

마지막으로 $b_1=1$, $b_2-b_1=3$, $b_3-2b_2+b_1=6$을 합 공식에 넣으면

$$\begin{aligned} 1+b_2+\cdots+b_n &= n+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}+6\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n}{2}\left[2+3(n-1)+2(n-1)(n-2)\right] \\ &= \frac{n(2n^2-3n+3)}{2}. \end{aligned}$$

검산

$n=1,2,3$일 때 최종 공식은 $1, 5, 18$을 주며, 이는 $1, 1+4, 1+4+13$과 일치한다. $n=6$일 때는 $3\cdot 57 = 171$이고, 직접 계산해도 $1+4+13+28+49+76=171$이다. 또한 컴퓨터로 수백 개의 무작위 수열과 $n\le 24$인 모든 n에 대하여 두 일반 합 공식을 (분수를 사용해) 정확하게 확인하였다.

흔한 실수

- 계승 수열의 차이를 $d, 2d, 3d$로 잡는 것: 차이는 $1!\,d, 2!\,d, 3!\,d$이므로 세 번째 차이는 $6d$이다.
- $b_k = b_1 + kp + \ldots$로 쓰는 것: b_1과 b_k 사이에는 차이가 $k-1$개뿐이다.

STEP 너머

이것은 유한차분법(calculus of finite differences)이다. m계 차분이 일정한 수열은 n에 대한 m차 다항식이고, 그 부분합은 $m+1$차 다항식이며, 이는 기저 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$로 나타내는 것이 가장 좋다(뉴턴(Newton)의 전진차분 공식). $\binom{n}{r}$을 합하여 $\binom{n+1}{r+1}$을 얻는 것은 $\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1}$의 이산적 쌍둥이이다. 이런 흐름의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 실린 문제들을 시도해 보자.

풀이

STEP I 1990, 문제 5

순수수학 • 부분분수와 곡선의 개형

> **STEP I 1990, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q5

핵심 아이디어

(i)에서는 이차식(quadratic)이 인수분해되므로, 부분분수(partial fractions)를 이용하면 적분이 로그(logarithm)의 차로 바뀐다. (ii)에서는 거듭제곱의 지수가 엄청나게 커서 겁이 나지만, $1760 = 8 \times 220$이므로 이 함수는 사실 $u = x^{220} \geq 0$에 대하여 $u^8 - u + q$일 뿐이다. 그래프의 모양은 정류점(stationary point)에서 결정되며, 근의 개수는 오직 가로축이 극댓값(local maximum)과 두 극솟값(minimum)에 대하여 어디에 놓이는지에 따라서만 달라진다.

풀이

소문항 (i)

$6 \times 15 = 90 = 9 \times 10$이고 $9 + 10 = 19$이므로, 이차식은 다음과 같이 인수분해된다.

$$6x^2 + 19x + 15 = (2x+3)(3x+5).$$

다음과 같이 놓는다.

$$\frac{1}{(2x+3)(3x+5)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x+5}, \qquad \text{따라서} \qquad 1 = A(3x+5) + B(2x+3).$$

$x = -\frac{3}{2}$를 대입하면 $\frac{1}{2}A = 1$이므로 $A = 2$이고, $x = -\frac{5}{3}$을 대입하면 $-\frac{1}{3}B = 1$이므로 $B = -3$이다. $2x+3$과 $3x+5$는 모두 $[1,3]$에서 양수이므로 절댓값 기호는 필요 없다.

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{6x^2+19x+15} &= \int_1^3 \left(\frac{2}{2x+3} - \frac{3}{3x+5}\right)\mathrm{d}x = \Big[\ln(2x+3) - \ln(3x+5)\Big]_1^3 \\ &= \ln\frac{9}{14} - \ln\frac{5}{8} = \ln\frac{72}{70} = \ln\frac{36}{35}.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

대칭성과 양 끝에서의 거동. 두 지수가 모두 짝수이므로 f는 우함수(even function)이고, 그 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. $|x|$가 클 때는 x^{1760}항이 지배적이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$이다. 또한 $\mathrm{f}(0) = q$이고 $\mathrm{f}(\pm 1) = q$이다.

정류점. 미분하면 다음을 얻는다.

$$\mathrm{f}'(x) = 1760x^{1759} - 220x^{219} = 220\,x^{219}\left(8x^{1540} - 1\right).$$

이 값은 $x = 0$에서, 그리고 $x^{1540} = \frac{1}{8}$인 곳, 곧 다음과 같은 $x = \pm a$에서 0이 된다.

$$a = 8^{-1/1540} \approx 0.9987.$$

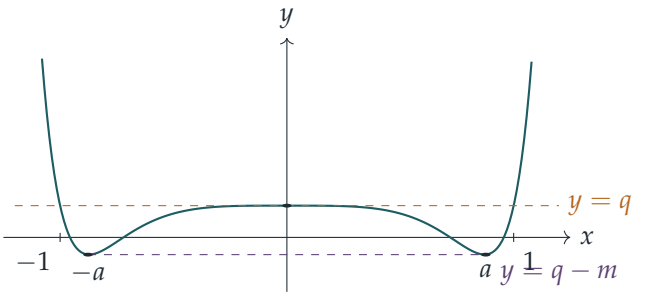
$x > 0$에서 $\mathrm{f}'(x)$의 부호는 $8x^{1540} - 1$의 부호와 같다. 즉 $(0, a)$에서는 음수이고 $x > a$에서는 양수이다. x^{219}는 홀수 차수의 거듭제곱이므로, $x < 0$에서는 부호가 반대가 된다. 따라서 f는 $(-\infty, -a)$에서 감소하고, $(-a, 0)$에서 증가하고, $(0, a)$에서 감소하고, (a, ∞)에서 증가한다. 즉 $x = 0$에서 극댓값 q를 가지고 $x = \pm a$에서 같은 두 극솟값을 가진다.

생각해 보기 $8^{-1/1540}$과 씨름하지 않고 극솟값을 어떻게 구할 수 있을까?

$u = x^{220}$을 이용한다. $x = \pm a$에서 $x^{1540} = u^7 = \frac{1}{8}$이므로 $u = 8^{-1/7}$이고 $u^8 = u \cdot u^7 = \frac{1}{8}u$이다. 따라서

$$\mathrm{f}(\pm a) = u^8 - u + q = q - \tfrac{7}{8}u = q - m, \qquad \text{여기서} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

개형 그리기. 그래프는 "W" 모양이다. 높은 곳에서 시작하여 $x = -a$에서 극솟값 $q - m$까지 내려가고, 원점에서 극댓값 q까지 올라갔다가, $x = a$에서 극솟값 $q - m$까지 내려간 뒤 가파르게 올라간다. 지수가 매우 크기 때문에 실제 그래프는 극도로 평평하다. $|x|$가 1에 아주 가깝지 않으면 x^{220}은 매우 작으므로, $(-1, 1)$의 대부분에서 $\mathrm{f}(x) \approx q$이고, $x = \pm 1$(그래프가 다시 높이 q로 돌아오는 곳) 바로 안쪽에 좁게 파인 두 골짜기가 있으며, 그 바깥쪽은 거의 수직인 벽이다. 아래 그림은 특징이 보이도록 골짜기를 과장하여 그린 것이다.



근의 개수 세기. $\mathrm{f}(x) = 0$의 근은 그래프가 x축과 만나는 점이므로, 0을 극댓값 q 및 극솟값 $q - m$과 비교한다.

- $q > m$: 극솟값 $q - m$이 양수이므로 모든 곳에서 $\mathrm{f} > 0$이다. **근이 없다**.
- $q = m$: 그래프는 극소인 점에서만 축에 접한다. **근은 두 개**, $x = \pm a$이다.
- $0 < q < m$: 이제 $q - m < 0 < q$이다. 단조성(monotonicity)을 가지는 네 구간 $(-\infty, -a)$, $(-a, 0)$, $(0, a)$, (a, ∞) 각각에서 f는 연속(continuous)이고 강한 단조이며 양의 값에서 음의 값으로, 또는 그 반대로 변하므로, 각 구간에서 정확히 하나의 근을 가진다. **근은 네 개**이다.
- $q = 0$: $\mathrm{f}(x) = x^{220}(x^{1540} - 1)$이고, 이는 정확히 $x = 0$과 $x = \pm 1$에서 0이 된다. **근은 세 개**이다.
- $q < 0$: 극댓값 $\mathrm{f}(0) = q$가 음수이므로 $[-a, a]$ 전체에서 $\mathrm{f} < 0$이고, f는 (a, ∞)와 $(-\infty, -a)$ 각각에서 음의 값으로부터 $+\infty$까지 강한 단조로 변한다. **근은 두 개**이다.

따라서 서로 다른 근의 개수로 가능한 것은 0, 2, 3, 4이며, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &0\text{개의 근}: \quad q > m, \\ &2\text{개의 근}: \quad q < 0 \text{ 또는 } q = m, \\ &3\text{개의 근}: \quad q = 0, \\ &4\text{개의 근}: \quad 0 < q < m, \end{aligned} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

검산

(i)의 피적분함수에 심프슨(Simpson) 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.0281709를 얻으며, 이는 $\ln \frac{36}{35} = 0.0281709$와 일치한다. (ii)에서는 $x = 1$ 근처에서 $x^{1760} - x^{220}$의 최솟값을 수치적으로 촘촘히 탐색하면 $x \approx 0.99865$에서 -0.650123을 얻으며, 이는 $-m$ 및 a와 일치한다. $q = 1,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.001,\ 0,\ -0.01,\ -5$에 대하여 촘촘한 격자에서 f의 부호 변화를 세면 근의 개수는 $0, 4, 4, 4, 3, 2, 2$로, 위의 표가 예측한 대로이다. $q = 0$인 경우는 개형을 점검하기에 좋다. 그래프는 반드시 원점과 $(\pm 1, 0)$을 지나야 한다.

흔한 실수

- 경계에 해당하는 경우인 $q = 0$(극댓값이 축 위에 있으므로 근이 세 개)과 $q = m$(극소인 점에서 중근이 두 개)을 빠뜨린다.
- $-a$와 a 사이에서 아무 일도 일어나지 않는다는 것을 확인하지 않고 $q < 0$일 때 "대칭성에 의해" 근이 두 개라고 주장한다. 그 구간에서 추가적인 근을 배제해 주는 것은 바로 극댓값 q가 음수라는 사실이다.
- 완만하게 굽은 "W"를 그린다. 지수가 이렇게 크면 $|x| < 1$에서 그래프는 높이 q에서 거의 평평하다. 개형에서 골짜기를 과장하여 그리더라도 이 점을 언급해 둘 가치가 있다.

STEP 너머

극값의 위치를 찾아 근의 개수를 세는 방법은, 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 다루는 중간값 정리(intermediate value theorem)와 단조성 논증을 처음 맛보는 것이다. 치환 $u = x^{220}$은 또한 $n \to \infty$일 때 x^n이 어떻게 행동하는지, 즉 $(-1, 1)$에서 0으로 수렴하지만 균등수렴(uniform convergence)하지는 않는다는 것을 보여 준다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 연속성과 균등수렴을 모두 세심하고 읽기 쉽게 다룬다.

풀이

STEP I 1990, 문제 6

순수수학 • 벡터와 평행사변형

> **STEP I 1990, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q6

핵심 아이디어

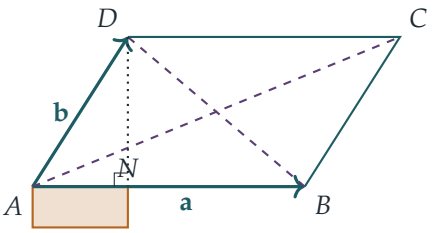
원점을 A에 두고, 모든 것을 두 변 벡터(vector) $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$와 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$로 나타낸다. 그러면 두 대각선은 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$와 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$이고, 모든 길이의 제곱은 어떤 벡터와 자기 자신의 내적(dot product)이다. 이 내적들을 전개하면 모든 일이 끝난다. 필요한 기하는 단 하나, $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|$가 $\mathbf{u}$의 길이와 $\mathbf{v}$를 $\mathbf{u}$ 위로 내린 정사영(projection)의 길이의 곱이라는 사실뿐이다.

풀이

A를 원점으로 잡고, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$라 하자. $ABCD$는 평행사변형(parallelogram)이므로 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$이고, 따라서

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{BD} = \mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

임의의 벡터에 대해 $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$이고, 내적은 교환법칙이 성립하며 덧셈에 대해 분배법칙이 성립한다. $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$라 쓰자.



그림에서 N은 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발이므로, AN은 AD를 AB 위로 내린 정사영이고 그 길이는 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|/a$이다.

소문항 (i)

마주 보는 변의 길이가 같으므로 좌변은 $2a^2 + 2b^2$이다. 대각선에 대해서는

$$AC^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = a^2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2,$$
$$BD^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = a^2 - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2.$$

두 식을 더하면 교차항이 소거되어 $AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$이 되므로, 증명이 끝난다. (이를 흔히 평행사변형 법칙(parallelogram law)이라 부른다.)

소문항 (ii)

이번에는 같은 두 식을 빼면

$$AC^2 - BD^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \qquad \text{따라서} \qquad \left|AC^2 - BD^2\right| = 4\,|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|.$$

이제 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$를 해석해 보자. θ가 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$ 사이의 각이면 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = a\cdot b|\cos\theta|$이고, $b|\cos\theta|$는 정확히 AD를 AB 위로 내린 정사영의 길이 AN이다. 따라서 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$는 AB와, AD를 AB 위로 내린 정사영을 두 변으로 하는 직사각형(그림에서 색칠한 부분)의 넓이이다.

생각해 보기 이 결과는 어느 변을 택하든, 그리고 그에 이웃한 어느 변을 택하든 성립한다고 주장한다. 왜 여덟 가지 경우를 따로 계산할 필요가 없을까?

평행사변형의 각 변은 벡터 $\pm\mathbf{a}$ 또는 $\pm\mathbf{b}$이고, 그 변에 이웃한 두 변은 부호를 제외하면 나머지 벡터이다. 예를 들어 변 BC는 $\mathbf{b}$이고, 이웃한 변 AB와 CD는 $\mathbf{a}$와 $-\mathbf{a}$이다. 정사영의 길이는 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|$이므로, 부호를 바꾸어도 벡터의 길이나 정사영의 길이는 변하지 않는다. 따라서 변과 이웃한 변을 어떻게 택하든 직사각형의 넓이는 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$로 같다. 즉 $a\times$(정사영의 길이, 사영되는 벡터$\mathbf{b}$, 기준 벡터$\mathbf{a}$) 또는 $b\times$(정사영의 길이, 사영되는 벡터$\mathbf{a}$, 기준 벡터$\mathbf{b}$)이고, 둘 다 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$와 같다. 그러므로 모든 경우에

$$\left|AC^2 - BD^2\right| = 4\times(\text{그 직사각형의 넓이}). \qquad \blacksquare$$

마지막 소문항

소문항 (ii)는 두 변의 내적에서 나왔다. 변과 대각선의 역할을 바꾸어 두 대각선의 내적을 구하면

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = b^2 - a^2,$$

교차항 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$와 $-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$가 소거되기 때문이다. 그러므로

$$\left|AB^2 - AD^2\right| = |\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|.$$

소문항 (ii)에서와 같이 논증하면 다음을 얻는다.

결과. $\left|AB^2 - AD^2\right|$는 한 대각선과, 다른 대각선을 그 위로 내린 정사영을 두 변으로 하는 직사각형의 넓이와 같다. 어느 대각선을 택해도 된다.

증명. φ가 두 대각선 사이의 각이면 $\left|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}\right| = AC \cdot BD\,|\cos\varphi|$이다. 여기서 $BD\,|\cos\varphi|$는 BD를 AC 위로 내린 정사영의 길이이고, $AC\,|\cos\varphi|$는 AC를 BD 위로 내린 정사영의 길이이다. 따라서 어느 대각선에서 시작하든 넓이는 같고, 위의 식에 의해 그 값은 $\left|AB^2 - AD^2\right|$이다. ■

(ii)와 더욱 닮은 꼴로 만들려면, 두 대각선이 서로를 이등분하는 점을 O라 하자. 그러면 $AC = 2OA$이고, BD를 AC 위로 내린 정사영은 OB를 OA 위로 내린 정사영의 두 배이다. 따라서 $\left|AB^2 - AD^2\right|$는 OA와, OB를 OA 위로 내린 정사영을 두 변으로 하는 직사각형의 넓이의 4배이기도 하다. 이제는 대각선의 절반이 변의 역할을 하는 것이다.

여기서 두 가지 멋진 따름정리가 자연스럽게 나온다. 두 대각선의 길이가 같을 필요충분조건은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 즉 평행사변형이 직사각형인 것이다. 두 대각선이 수직일 필요충분조건은 $a = b$, 즉 평행사변형이 마름모인 것이다.

검산

$A = (0,0), B = (4,0), D = (1,2)$로 잡으면 $C = (5,2)$이다. 그러면 $AC^2 = 29, BD^2 = 13$이고 $2(16+5) = 42 = 29 + 13$이므로 (i)이 확인된다. (ii)에서는 $AC^2 - BD^2 = 16$이고, AD를 AB 위로 내린 정사영의 길이는 1이므로 직사각형의 넓이는 $4 \times 1 = 4$이며, $16 = 4 \times 4$이다. 마지막 소문항에서는 $AB^2 - AD^2 = 16 - 5 = 11$이고 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (5,2) \cdot (-3,2) = -11$이다. 또한 세 결과 모두를, 변과 이웃한 변의 모든 선택에 대해, 무작위로 만든 10^5개의 평행사변형에서 검사하였다. 가장 큰 오차는 약 10^{-13}으로, 단순한 반올림 오차에 불과하다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{BD} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 또는 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$로 쓰는 것. BD^2에서는 부호가 상관없지만, 방향을 바르게 잡아두면 나중에 혼란을 피할 수 있다.
- 절댓값을 빠뜨리는 것. A에서의 각이 둔각이면 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$는 음수이지만 넓이는 음수일 수 없다. 그래서 문제에 $\left|AC^2 - BD^2\right|$가 나오는 것이다.
- 마지막 소문항에서 대각선 전체를 쓰면서 4라는 인수를 붙이는 것. 대각선 전체를 쓰면 인수는 1이고, 인수 4는 대각선의 절반을 쓸 때만 나타난다.

STEP 너머

항등식 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$는 **편극 항등식**(polarisation identity)으로, 내적을 길이만으로 복원할 수 있음을 보여 준다. 소문항 (i)의 평행사변형 법칙과 함께, 이는 내적 공간(inner product space)에 관한 핵심적인 사실이다. 노름(norm)이 어떤 내적에서 유도될 필요충분조건은 그 노름이 평행사변형 법칙을 만족하는 것이며, 이는 요르단(Jordan)과 폰 노이만(von Neumann)의 정리이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 내적, 정사영, 직교성이 임의의 차원에서 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1990, 문제 7

순수수학 • 일계 선형 상미분방정식

> **STEP I 1990, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q7

핵심 아이디어

$y = uv$로 놓으면 미지 함수가 하나만 필요한 자리에 두 개가 생기므로, 그중 하나에 조건을 하나 더 부과할 여유가 생긴다. 자연스러운 선택은 u가 P를 포함한 항을 없애도록 하는 것이다. 그러면 바로 적분할 수 있는 미분방정식(differential equation)이 남는다. 이것은 모습을 바꾼 적분인자법(integrating-factor method)이며, $1/u$가 바로 적분인자이다.

풀이

치환

$y = uv$이면 곱의 미분법(product rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$이므로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu\right) = Q.$$

u가 1계 방정식

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu = 0,$$

을 만족하도록 고르면 괄호 안이 0이 되고, 다음이 남는다.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{Q}{u},$$

이것은 요구한 대로 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$를 x, Q, u만으로 나타낸 방정식이다. (나누려면 $u \neq 0$이어야 한다. $u' + Pu = 0$의 0이 아닌 해는 $A \neq 0$인 $u = A\mathrm{e}^{-\int P\,\mathrm{d}x}$이고, 이는 결코 0이 되지 않는다.)

주어진 방정식

여기서 $P = -\dfrac{2}{x+1}$이고 $Q = (x+1)^{5/2}$이다. Q는 $x \geq -1$일 때만 (실수로서) 정의되고 P는 $x = -1$에서 정의되지 않으므로, $x+1 > 0$인 $x > -1$에서 생각한다.

생각해 보기 u의 일반해가 필요할까, 아니면 해 하나면 충분할까?

0이 아닌 해 하나면 충분하다. 최종 답의 임의상수는 v를 구하려고 적분할 때 나타나기 때문이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u}{x+1}$$

를 변수분리(separating variables)로 풀면 $\ln|u| = 2\ln(x+1) +$ 상수이고, 다음을 택한다.

$$u = (x+1)^2.$$

(확인: $u' = 2(x+1) = \frac{2u}{x+1}$.) 그러면

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+1)^{5/2}}{(x+1)^2} = (x+1)^{1/2}, \qquad \text{따라서} \qquad v = \tfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

그러므로 일반해(general solution)는 다음과 같다.

$$y = uv = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} + C(x+1)^2.$$

$y(1) = 0$을 적용하면

$$0 = \tfrac{2}{3}\cdot 2^{7/2} + 4C \quad \Longrightarrow \quad C = -\tfrac{1}{6}\cdot 2^{7/2} = -\tfrac{1}{6}\cdot 8\sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

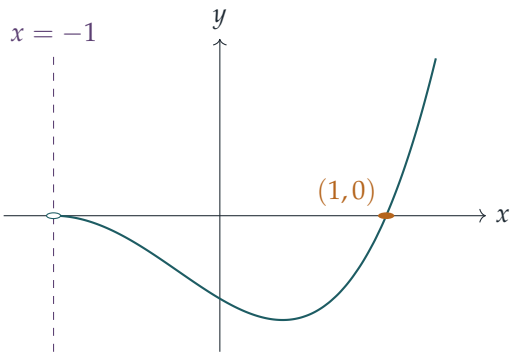
따라서

$$\boxed{y = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} - \tfrac{4\sqrt{2}}{3}(x+1)^2 = \tfrac{2}{3}(x+1)^2\left[(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]}$$

해가 유효한 범위

생각해 보기 y의 식은 $x = -1$에서도 의미가 있다. 그런데 왜 $x = -1$은 포함되지 않을까?

해는 $x > -1$에서 유효하다. $x < -1$이면 우변 $(x+1)^{5/2}$이 실수가 아니므로 미분방정식 자체가 그곳에서 아무 의미가 없다(우리가 구한 $(x+1)^{7/2}$도 마찬가지이다). $x = -1$에서는 항 $\frac{2y}{x+1}$이 정의되지 않으므로, 우리 식에서 $x \to -1^+$일 때 $y \to 0$이 되더라도 방정식은 그곳에서도 성립하지 않는다. $x+1 > 0$인 구간 $x > -1$ 전체에서는 위의 모든 단계가 정당하며, 해는 이 구간에 속하는 주어진 점 $x = 1$을 지난다.



빈 원은 제외된 끝점 $x = -1$을 나타낸다.

검산

- 다시 대입하기: $y' = \frac{7}{3}(x+1)^{5/2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$이고 $\frac{2y}{x+1} = \frac{4}{3}(x+1)^{5/2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$이다. 둘의 차는 요구한 대로 $(x+1)^{5/2}$이다.
- $y(1) = \frac{2}{3} \cdot 4\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = 0$.
- 특정한 값: $y(0) = \frac{2-4\sqrt{2}}{3} \approx -1.219$이고 $y(3) = \frac{256-64\sqrt{2}}{3} \approx 55.16$이다. $y(1) = 0$에서 출발하여 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로) 적분한 결과는 두 값 모두와 유효숫자 아홉 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- P의 부호를 틀리는 것: 여기서 $P = -\frac{2}{x+1}$이므로 $u = (x+1)^2$이고, $(x+1)^{-2}$이 아니다.
- v를 구하려고 적분할 때 상수를 빠뜨리는 것: 그러면 $y(1) = 0$에 맞출 자유도가 남지 않는다.
- 범위를 $x \geq -1$로 답하는 것: 방정식은 $x = -1$에서 정의되지 않는다.

STEP 너머

골칫거리 항을 없애도록 u를 고르는 것은 **매개변수 변화법**(variation of parameters)의 바탕이 되는 아이디어이다. 먼저 동차방정식(homogeneous equation)을 풀고, 그다음 "상수"를 변하게 하여 외력 항을 흡수하는 것이다. 같은 기법이 2계 선형방정식에도 통하며, 해가 어디에서 유효한가라는 질문은 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)로 발전한다. 이 정리는 P와 Q가 연속인 임의의 구간에서 유일한 해가 존재함을

보장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)가 두 주제를 모두 다룬다.

풀이

STEP I 1990, 문제 8

순수수학 • 삼각함수의 무한곱

> **STEP I 1990, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q8

핵심 아이디어

배각 공식(double-angle formula) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$를 쓰면 각 코사인을 두 사인의 비 $\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$로 바꿀 수 있다. 이런 비들을 서로 곱하면 망원급수(telescoping sum)처럼 거의 모든 것이 약분된다. 유한곱이 하나의 깔끔한 분수가 되고 나면, $n \to \infty$로 보낼 때 필요한 것은 $x \to 0$일 때 $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$이라는 표준적인 극한(limit)뿐이다.

풀이

α에 대한 조건에 관하여

아래의 모든 단계에서는 어떤 $m \geq 0$에 대하여 $\sin(\alpha/2^m)$으로 나누므로, 이 값들이 결코 0이 되지 않아야 한다. 만약 $\sin(\alpha/2^m) = 0$이면 어떤 정수 j에 대하여 $\alpha/2^m = j\pi$이므로 $\alpha = (2^m j)\pi$는 π의 정수배가 되는데, 이는 조건에서 제외된 경우이다. 따라서 모든 $m \geq 0$에 대하여 $\sin(\alpha/2^m) \neq 0$이다.

두 코사인의 곱

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$를 두 번, 먼저 $\theta = \alpha/2$로, 다음에 $\theta = \alpha/4$로 적용하면

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ &= 2\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}.\end{aligned}$$

이다. $\sin(\alpha/4) \neq 0$이므로 $4\sin(\alpha/4)$로 나눌 수 있고, 그러면

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\alpha}{4\sin(\alpha/4)},$$

을 얻는다. 이것이 보이려던 식이다.

n개의 코사인의 곱

$P_n = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$이라 하자. n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로

$$P_n = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}.$$

임을 증명한다. $n = 1$일 때 이 식은 $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)}$가 되는데, 이는 배각 공식을 $2\sin(\alpha/2) \neq 0$으로 나눈 것이다. ($n = 2$인 경우는 방금 보인 결과이다.)

이제 어떤 $n \geq 1$에 대하여 이 식이 성립한다고 가정하자. $\theta = \alpha/2^{n+1}$로 배각 공식을 쓰면 $\sin\frac{\alpha}{2^n} = 2\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$이다. 따라서

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} &= \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin\alpha\,\cos(\alpha/2^{n+1})}{2^n\cdot 2\sin(\alpha/2^{n+1})\cos(\alpha/2^{n+1})} = \frac{\sin\alpha}{2^{n+1}\sin(\alpha/2^{n+1})}. \end{aligned}$$

이다. $\cos(\alpha/2^{n+1})$을 약분하는 것은 정당하다. 이 값은 0이 아닌 $\sin(\alpha/2^n)$의 인수이므로 역시 0이 아니기 때문이다. 이것이 $n+1$일 때의 식이므로, 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 식이 성립한다.

$n \to \infty$로 보내기

무한곱(infinite product)은 부분곱(partial product) P_n의 극한을 뜻한다. $x_n = \alpha/2^n$이라 두면 $n \to \infty$일 때 $x_n \to 0$이고,

$$2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha\cdot\frac{\sin x_n}{x_n} \longrightarrow \alpha\cdot 1 = \alpha.$$

이다.

생각해 보기 $\lim P_n = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$의 역수를 취해도 괜찮은 이유는 무엇인가?

극한이 0이 아니기 때문이다. 우리가 다루는 α에 대해서는 $\alpha \neq 0$이고 $\sin\alpha \neq 0$이다. 따라서 $P_n \to \frac{\sin\alpha}{\alpha} \neq 0$이므로 무한곱이 존재하고, $\sin\alpha$를 이것으로 나누면

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha}{P_n} = \lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha,$$

를 얻는다. 이것이 구하려던 식이다.

$\pi/2$에 대한 공식

π의 정수배가 아닌 $\alpha = \pi/2$를 택하면 $\sin\alpha = 1$이다. 그러면

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots}.$$

이다. 이제 각 코사인이 중첩된 제곱근임을 보이면 된다. $k \geq 1$에 대하여 $c_k = \cos(\pi/2^{k+1})$이라 하자. 그러면 $c_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$이다. 반각 공식(half-angle formula) $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$에 $\theta = \pi/2^{k+2}$를 대입하면

$$c_{k+1}^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k, \qquad \text{이므로} \qquad c_{k+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k},$$

이다. 여기서 $0 < \pi/2^{k+2} < \pi/2$이므로 $c_{k+1} > 0$이어서 양의 제곱근을 택한다. 따라서

$$c_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad c_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad c_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}, \quad \ldots,$$

이고, 각 인수는 바로 앞의 인수를 $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t}$에 넣은 것이다. 이들은 구하려는 곱의 인수들과 정확히 같으므로

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

이다.

검산

- $\alpha = \pi/2, n = 1$일 때 유한곱 공식은 $\cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2\sin(\pi/4)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$를 주며, 이는 옳다.
- 중첩 근호의 부분곱의 역수는 1.4142, 1.5307, 1.5607, 1.5683, 1.5702, …이고, 60개의 인수를 곱하면 1.5707963267949를 얻어 기계 정밀도 내에서 $\pi/2$와 일치한다.
- 유한 항등식은 임의의 α와 14 이하의 n에 대해서도 수치적으로 확인되며, $\alpha = 2.5$나 $\alpha = -4$ 같은 값에 대하여 $\sin\alpha / P_{60}$은 α를 재현한다.

흔한 실수

- $\sin(\alpha/2^n)$이 왜 0이 아닌지 말하지 않고 그것으로 나누는 것. 이것이 바로 $\alpha \neq k\pi$라는 조건이 있는 이유이다.
- $\lim P_n \neq 0$임을 언급하지 않고 $1/\lim P_n = \lim(1/P_n)$이라고 쓰는 것.
- 반각 단계에서 양의 제곱근을 택하는 근거를 대지 않는 것.

STEP 너머

마지막 공식은 1593년의 비에트(Viète)의 곱으로, 역사상 처음으로 쓰인 π에 대한 정확한 무한 표현이다. 대학에서는 해석학(analysis)에서 무한곱을 제대로 배우는데, 0이 아닌 인수들의 곱은 부분곱이 0이 아닌 극한으로 갈 때 수렴(converge)한다고 한다. 이것이 바로 우리가 확인한 점이다. 오일러(Euler)의 곱 $\sin\alpha = \alpha\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2\pi^2}\right)$은 이보다 더 깊은 친척이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이런 극한을 엄밀하게 다루는 방법을 보기에 친절한 책이다.

풀이

STEP I 1990, 문제 9

순수수학 • 접선과 넓이의 한계

> **STEP I 1990, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q9

핵심 아이디어

곡선 $y = 1/x$는 위로 휘어 있으므로(즉, 볼록(convex)하므로) 모든 접선(tangent)은 곡선 아래에 놓인다. 따라서 접선 아래의 두 사다리꼴(trapezium)은 $x = 1$과 $x = b$ 사이에서 곡선 아래 영역 안에 들어가고, 그 영역의 넓이는 $\ln b$이다. 두 넓이를 비교하면 로그의 하한(lower bound)을 얻는다. 같은 방법으로 곡선 위에 놓인 직사각형으로부터 상한(upper bound)을 얻는다.

풀이

점 C

$y = 1/x$에 대하여 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1/x^2$이다. 따라서 $(t, 1/t)$에서의 접선은

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t), \qquad \text{즉} \qquad y = \frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}.$$

$t = 1$이면 A에서의 접선은 $y = 2 - x$이다. $t = b$이면 B에서의 접선은 $y = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2}$이다. 두 접선이 만나는 점에서

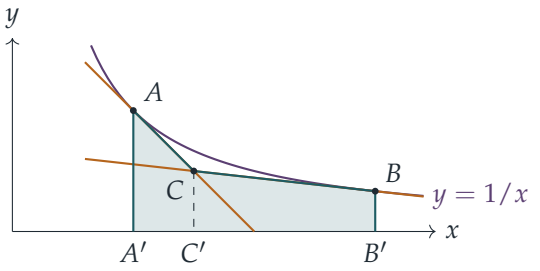
$$2 - x = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad x\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

$b > 1$이므로 $1 - \frac{1}{b} \neq 0$으로 나눌 수 있고, 그러면 $x\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 2$가 남는다. 따라서

$$C = \left(\frac{2b}{b+1}, \frac{2}{b+1}\right),$$

이고, 여기서 y좌표는 $y = 2 - x$에서 얻는다. $1 < \frac{2b}{b+1} < b$임에 주목하자. 왼쪽 부등식은 $b + 1 < 2b$이고, 오른쪽 부등식은 $2 < b + 1$이다. $b > 1$이므로 둘 다 성립하고, 따라서 C는

가로 방향으로 A와 B 사이에 있다.



그림은 $b = 3$인 경우를 그린 것이다. 색칠한 영역은 두 사각형으로 이루어져 있다.

넓이의 합

각 사각형은 두 변이 세로이므로 사다리꼴이고, 그 넓이는 폭에 두 세로 변의 평균을 곱한 것이다.

$ACC'A'$의 폭은 $\frac{2b}{b+1} - 1 = \frac{b-1}{b+1}$이고, 세로 변은 1과 $\frac{2}{b+1}$이다.

$$\text{넓이}(ACC'A') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-1}{b+1}\left(1 + \frac{2}{b+1}\right) = \frac{(b-1)(b+3)}{2(b+1)^2}.$$

$CBB'C'$의 폭은 $b - \frac{2b}{b+1} = \frac{b(b-1)}{b+1}$이고, 세로 변은 $\frac{2}{b+1}$과 $\frac{1}{b}$이다.

$$\text{넓이}(CBB'C') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b(b-1)}{b+1}\left(\frac{2}{b+1} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(b-1)(3b+1)}{2(b+1)^2}.$$

더하면 분자는 $(b-1)(4b+4) = 4(b-1)(b+1)$이 되므로

$$\text{넓이}(ACC'A') + \text{넓이}(CBB'C') = \frac{2(b-1)}{b+1}.$$

부등식

생각해 보기 두 사다리꼴이 왜 반드시 곡선 아래에 들어가야 할까?

$x > 0$일 때, 곡선과 $(t, 1/t)$에서의 접선 사이의 차는

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}\right) = \frac{t^2 - 2tx + x^2}{t^2 x} = \frac{(x-t)^2}{t^2 x} \geq 0.$$

따라서 각 접선은 모든 $x > 0$에 대하여 곡선 위에 있거나 곡선 아래에 놓인다. 색칠한 영역의 윗변은 $[1, \frac{2b}{b+1}]$에서는 A에서의 접선이고 $[\frac{2b}{b+1}, b]$에서는 B에서의 접선이다. 두 부분 모두 $y = 1/x$ 아래에 놓이고, 영역은 x축 위에 있다. 따라서 색칠한 영역은 $x = 1$부터 $x = b$까지

곡선 아래 영역에 포함되고,

$$\frac{2(b-1)}{b+1} \leq \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b.$$

상한에 대해서는, $x \geq 1$이면 $\frac{1}{x} \leq 1$이므로 곡선 아래 영역은 밑변이 $A'B'$이고 높이가 1인 직사각형 안에 놓인다. 따라서

$$\ln b = \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_1^b 1\,\mathrm{d}x = b-1.$$

이제 $z > 0$이라 하고 $b = 1+z$로 놓으면, 요구한 대로 $b > 1$이다. 그러면 $b-1 = z$이고 $b+1 = 2+z$이므로 두 부등식을 합치면

$$\frac{2z}{2+z} \leq \ln(1+z) \leq z,$$

가 되고, 이것이 증명해야 할 것이었다. (곡선과 경계가 되는 직선들은 고립된 점에서만 만나므로, 사실 $z > 0$일 때 두 부등식은 모두 등호 없이 성립한다.)

검산

- $b = 1$이면 C는 $(1,1) = A$가 되고 넓이의 합은 0이 되는데, 마땅히 그래야 한다.
- $b = 2$이면 $C = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$이고 넓이의 합은 $\frac{2}{3} \approx 0.667$로, $\ln 2 \approx 0.693$보다 약간 작으며, 이 값은 다시 1보다 작다.
- z가 작을 때 $\frac{2z}{2+z} = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$는 z^2 항까지 $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$와 일치하므로, 하한은 0 근처에서 매우 정밀하다.

여러 b 값에 대하여 좌표와 두 사다리꼴의 넓이를 정확한 산술로 확인했고, 10^{-6}과 10^{6} 사이의 무작위 z 10^5개에 대하여 부등식을 확인했다.

흔한 실수

- C가 $x = 1$과 $x = b$ 사이에 있는지 확인하는 것을 잊는다. 이것이 없으면 "사각형"이 생각하는 모양이 아닐 수도 있다.
- 접선이 곡선 아래에 있다고 "그림을 보고" 말한다. $(x-t)^2$을 이용한 한 줄짜리 계산이 있어야 증명이 된다.

STEP 너머

함수를 그래프 위아래의 간단한 도형과 비교하는 것은 리만 합(Riemann sums)의 바탕에 있는 아이디어이며, 첫 해석학(analysis) 강의에서 적분을 엄밀하게 정의하는 방법이기도

하다. 볼록함수의 접선이 그래프 아래에 놓인다는 사실은 볼록함수(convex function) 이론의 출발점이다. 이로부터 옌센 부등식(Jensen's inequality)과, 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 비롯한 많은 고전적인 부등식이 나온다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 바로 이러한 정신으로 적분을 전개한다.

풀이

STEP I 1990, 문제 10

역학 • 일률과 저항

> **STEP I 1990, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q10

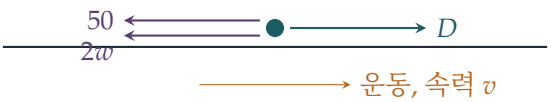
핵심 아이디어

"일정한 속력(steady speed)"이란 가속도(acceleration)가 없다는 뜻이므로, 주자의 구동력(driving force)은 저항력과 정확히 균형을 이루고, 일률(power)은 구동력과 속력의 곱이다. 유일하게 미묘한 점은 공기 저항(air resistance)이 **공기에 대한 상대** 속력에 따라 달라지며, 이 상대 속력이 갈 때와 올 때 서로 다르다는 것이다. 문제의 후반부에서는 일률보다 총에너지를 생각하라. 각 구간에서 쓰는 에너지는 저항력과 거리의 곱이며, 이를 통해 고정된 에너지 예산이 두 속력에 대한 일차 조건으로 바뀐다.

풀이

일정한 속력과 경주 시간

주자를 직선 위를 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. 한 구간에서 주자의 지면에 대한 속력을 v (단위 $\mathrm{m\,s^{-1}}$), 주자가 내는 앞쪽 방향 구동력을 D (단위 N)라 하자. 저항력은 50 N과 $2w$ N이며, 각각 지면에 대한 운동과 공기에 대한 운동을 방해한다.



트랙 방향으로 힘을 분해하면, 일정한 속력에서는 가속도가 없으므로

$$D = 50 + 2w.$$

주자가 일을 하는 비율은 구동력과 그 작용점의 속력의 곱이므로 $300 = Dv$이다.

가는 구간. 바람은 주자의 운동 방향으로 $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 분다. $v > 3$이면 주자는 공기에 대해 $w = v - 3$으로 앞으로 움직이고, 공기 저항은 뒤쪽으로 작용한다. ($v > 3$인지는 아래에서 확인한다.) 그러면 $D = 50 + 2(v-3) = 44 + 2v$이고, 양의 근을 택하면

$$v_1(44 + 2v_1) = 300 \iff v_1^2 + 22v_1 - 150 = 0 \iff v_1 = -11 + \sqrt{271} \approx 5.462,$$

이다. 이 값은 실제로 3보다 크므로 가정이 성립한다. (다른 방법: $v = 3$에서는 공기 저항이 없고 필요한 일률이 $3 \times 50 = 150 < 300\,\mathrm{W}$뿐이므로, 주자는 바람보다 빨리 달려야 한다.)

돌아오는 구간. 이제 주자는 바람을 안고 달리므로 $w = v + 3$이고 $D = 50 + 2(v+3) = 56 + 2v$이다.

$$v_2(56 + 2v_2) = 300 \iff v_2^2 + 28v_2 - 150 = 0 \iff v_2 = -14 + \sqrt{346} \approx 4.601.$$

시간. 출발과 반환점에서의 가속을 무시하면

$$T_0 = \frac{5000}{v_1} + \frac{5000}{v_2} \approx 915.4 + 1086.7 = 2002.1,$$

이므로, 경주에는 초 단위로 반올림하여 $2002\,\mathrm{s}$(약 33분 22초)가 걸린다.

다른 전략

이번에는 주자가 가는 구간에서 $x_1\,\mathrm{W}$, 돌아오는 구간에서 $x_2\,\mathrm{W}$로 일하며, 일정한 속력이 각각 v_1, v_2라 하자. 힘의 균형은 그대로이므로 $v_1 > 3$인 한

$$x_1 = v_1(44 + 2v_1), \qquad x_2 = v_2(56 + 2v_2).$$

가는 구간에 걸리는 시간은 $5000/v_1$이므로, 그 구간에서 쓰는 에너지는

$$x_1 \cdot \frac{5000}{v_1} = 5000(44 + 2v_1),$$

이다. 이는 당연히 그래야 하듯 저항력과 거리의 곱일 뿐이다. 마찬가지로 돌아오는 구간에서는 $5000(56 + 2v_2)$를 쓴다. 따라서 총에너지는

$$E = 5000\big(100 + 2(v_1 + v_2)\big).$$

? 생각해 보기 고정된 총에너지는 어디에서 쓰이는가?

주자는 원래 경주에서와 같은 총에너지를 써야 하므로 E는 고정된 수이다. E는 오직 $v_1 + v_2$를 통해서만 속력에 의존하므로, x_1과 x_2를 어떻게 고르든 이 합은

$$v_1 + v_2 = \frac{E}{10\,000} - 50,$$

로 정해진다. 이로써 결과가 증명된다. 그 값은 원래 경주에서의 값으로,

$$S = v_1 + v_2 = \sqrt{271} + \sqrt{346} - 25 \approx 10.063.$$

최선의 전략. 이제 경주 시간은

$$T = 5000\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{5000\,(v_1 + v_2)}{v_1 v_2} = \frac{5000\,S}{v_1 v_2}.$$

S가 고정되어 있으므로, 이 값은 $v_1 v_2$가 최대일 때 최소가 된다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해 $v_1 v_2 \le \left(\frac{S}{2}\right)^2$이고, 등호는 정확히 $v_1 = v_2 = \frac{S}{2}$일 때 성립한다. 따라서 최선의 계획은 갈 때와 올 때 모두 같은 속력 $\frac{S}{2} \approx 5.032\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 달리는 것이다. 이 속력은 여전히 바람보다 빠르므로, 가는 구간의 x_1에 대한 공식은 그대로 유효하다. 최소 시간은

$$T_{\min} = \frac{5000\,S}{S^2/4} = \frac{20\,000}{S} \approx 1987.4\ \mathrm{s}.$$

주자는 $T_0 - T_{\min} \approx 2002.1 - 1987.4 = 14.7\,\mathrm{s}$를 절약하며, 이는 요구한 대로 약 15초이다. 이때 일률은 가는 구간에서 약 $x_1 \approx 272\,\mathrm{W}$, 돌아오는 구간에서 약 $x_2 \approx 332\,\mathrm{W}$이다. 즉 주자는 바람을 등지고 달릴 때는 힘을 늦추고, 바람을 안고 달릴 때는 더 힘을 낸다.

검산

- 에너지의 일관성: $300 \times 2002.105 \approx 600\,632\,\mathrm{J}$이고, $5000(100 + 2 \times 10.0632) \approx 600\,632\,\mathrm{J}$도 마찬가지이다.
- 바람이 없다면 두 구간 모두 $v^2 + 25v - 150 = 0$이 되어 $v = 5$이고, 두 방법은 일치한다. 절약을 가능하게 하는 것은 바람이다.
- x_1을 무작위로 1000번 골라(x_2는 에너지 예산으로 정해짐) $v_1 + v_2 = 10.0632$임을, 어떤 선택도 1987.4 s보다 빠르지 않음을, 그리고 절약되는 시간이 14.66 s임을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 공기 저항 항에 공기에 대한 상대 속력 대신 지면에 대한 속력을 쓰거나, 한 구간에서 바람의 부호를 반대로 잡는 것.
- 갈 때와 올 때 **일률**을 같게 하는 것이 공평하다고 생각하는 것. 시간을 최소로 만드는 것은 갈 때와 올 때 **속력**을 같게 하는 것이다.
- 일률에 대한 식만으로 $v_1 + v_2$가 일정함을 증명하려는 것. 고정된 총에너지가 필요하다.

STEP 너머

마지막 부분은 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 일차 제약 조건 아래에서 $1/v_1 + 1/v_2$를 최소화하는 것이다. 여기서는 산술-기하 평균 부등식으로 해결되지만, 대학 1학년 과정에서 배우는 일반적인 도구는 라그랑주(Lagrange) 승수법(method of Lagrange multipliers)이며, 같은 아이디어가 사이클과 조정에서의 최적 페이스 배분을 지배한다. 일, 일률, 항력에 대한 꼼꼼한 설명은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP I 1990, 문제 11

역학 • 포물체와 운동량

> **STEP I 1990, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q11

핵심 아이디어

이 문제는 세 단계로 이루어진다. 비행의 최고점까지 가는 평범한 포물체 운동(projectile motion), 순간적인 충돌(collision)(붙잡기), 그리고 순간적인 "폭발(explosion)"(밀어내기)이다. 순간적으로 일어나는 두 단계 동안에는 중력이 작용할 시간이 없으므로, 포탄과 슈퍼맨으로 이루어진 계의 운동량(momentum)은 각 방향에서 따로따로 보존된다. 그 뒤 포탄은 다시 포물체가 되어, 알려진 높이에서 알려진 아래 방향 속력으로 출발한다.

풀이

포탄과 슈퍼맨을 입자로 모형화하고, 공기 저항(air resistance)은 무시하며, 포탄은 수평인 지면에서 발사되어 같은 지면에 떨어진다고 하자. x축은 운동 방향의 수평 방향으로, y축은 연직 위 방향으로 잡는다.

비행의 최고점까지

포탄의 처음 속도 성분은 다음과 같다.

$$u_x = v\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}v, \qquad u_y = v\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v.$$

최고점에서 연직 방향 속도는 0이므로, 걸린 시간과 도달한 높이는

$$t_1 = \frac{u_y}{g} = \frac{\sqrt{3}\,v}{2g}, \qquad H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{3v^2}{8g}.$$

이다. 이 순간 포탄은 속력 $\frac{1}{2}v$로 수평으로 움직이고 있다.

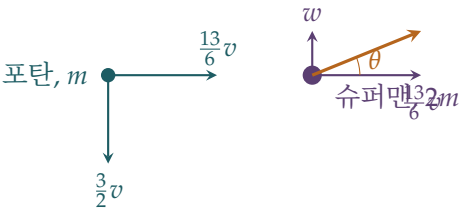
붙잡기

속력 $3v$로 수평으로 움직이던 슈퍼맨이 뒤에서 포탄을 붙잡고, 둘은 함께 움직인다. (순간적인) 붙잡기 동안 수평 방향 운동량이 보존되므로, 둘의 공통 속력을 V라 하면

$$2m(3v) + m\left(\tfrac{1}{2}v\right) = 3mV \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{13v}{6}.$$

이 순간 둘 다 연직 방향 속도가 없으므로, 합친 연직 방향 운동량은 0이다.

밀어내기



이제 슈퍼맨이 포탄을 바로 아래로 밀어낸다. 이 밀어내기는 내부 충격량(impulse)이므로, 두 물체의 전체 운동량은 두 방향 모두에서 변하지 않는다.

수평 방향: 포탄은 수평 속력 $\frac{13}{6}v$를 그대로 유지한다. 전체 수평 방향 운동량은 여전히 $3m \cdot \frac{13}{6}v$이므로, 슈퍼맨도 수평 속력 $\frac{13}{6}v$를 유지한다. (충격량이 연직 방향이므로 놀랄 일은 아니다.)

연직 방향: 전체 연직 방향 운동량이 0이었으므로, 슈퍼맨이 속력 w로 위로 움직인다고 하면

$$2m\,w - m\left(\tfrac{3}{2}v\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{3}{4}v.$$

? **생각해 보기** 중력이 내내 작용하고 있는데도 왜 운동량 보존을 쓸 수 있을까?

붙잡기와 밀어내기는 순간적으로 일어난다. 중력은 유한한 힘이므로 길이가 0인 시간 구간 동안의 충격량은 0이다. 중요한 것은 슈퍼맨과 포탄 사이에 짧은 시간 동안 작용하는 매우 큰 내력(internal force)뿐이고, 이 힘들은 쌍으로 상쇄된다.

포탄의 나머지 비행

이제 포탄은 높이 $H = \frac{3v^2}{8g}$에서 아래 방향 연직 속력 $\frac{3}{2}v$로 출발한다. 아래 방향으로 s를 재면, 포탄은 다음을 만족하는 시간 t_2 후에 지면에 닿는다.

$$\tfrac{3}{2}v\,t_2 + \tfrac{1}{2}gt_2^2 = \frac{3v^2}{8g}.$$

양변에 $8g$를 곱하면 gt_2에 대한 이차방정식(quadratic equation)을 얻는다.

$$4(gt_2)^2 + 12v(gt_2) - 3v^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad gt_2 = \frac{-12v + \sqrt{144v^2 + 48v^2}}{8} = \frac{-12 + 8\sqrt{3}}{8}\, v,$$

여기서 $t_2 > 0$이므로 양의 근을 택했다. 따라서

$$t_2 = \left(\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\right)\frac{v}{g}.$$

($\sqrt{3} \approx 1.732 > 1.5$이므로 이 값은 양수이다.) 전체 비행 시간은

$$\begin{aligned} T = t_1 + t_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{v}{g} + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{v}{g} \\ &= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}\,\frac{v}{g} \;\approx\; 1.10\,\frac{v}{g}. \end{aligned}$$

슈퍼맨의 방향

밀어낸 직후 슈퍼맨의 속도 성분은 수평 방향으로 $\frac{13}{6}v$, 위 방향으로 $\frac{3}{4}v$이다. 따라서 슈퍼맨의 궤적은 수평면 위로 각 θ를 이루며 시작하고,

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{4}v}{\frac{13}{6}v} = \frac{9}{26}, \qquad \theta = \arctan\frac{9}{26} \approx 19.09^\circ,$$

이므로 가장 가까운 도 단위로 나타낸 각은 19°이다.

검산

- 슈퍼맨이 없었다면 포탄은 시각 $2t_1 = \sqrt{3}\,v/g \approx 1.73\,v/g$에 떨어졌을 것이다. 포탄을 아래로 밀어내면 비행 시간이 짧아져야 하는데, 실제로 $T \approx 1.10\,v/g$가 더 작다.
- 질량비: 포탄의 질량은 슈퍼맨의 절반이므로, 포탄은 슈퍼맨의 연직 속력의 두 배를 반대 방향으로 얻어야 한다. 실제로 $\frac{3}{2}v = 2 \times \frac{3}{4}v$이다.
- 수치적으로, $v = 13.7$, $g = 9.81$로 두고 높이 H에서의 포탄의 낙하를 10^{-6} 간격으로 계산하면 $t_2 \approx 0.32407\,\mathrm{s}$를 얻어 $(\sqrt{3} - \frac{3}{2})v/g$와 일치하고, $T \approx 1.5335\,\mathrm{s} = 1.0981\,v/g$이다.

흔한 실수

- 붙잡기를 잊는 것: 밀어낸 뒤의 속력으로 공통 속력 $\frac{13}{6}v$ 대신 포탄 자신의 수평 속력 $\frac{1}{2}v$나 슈퍼맨의 $3v$를 쓰는 것.
- 질량을 무시하여 슈퍼맨의 위 방향 속력을 $\frac{3}{2}v$로 두는 것.
- 이차방정식의 음의 근을 택하거나, t_2를 t_1이 아니라 $2t_1$에 더하는 것.

STEP 너머

붙잡기는 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이고, 밀어내기는 그 반대 과정인 폭발이다. 같은 보존 법칙이 양쪽 방향으로 성립하지만, 운동 에너지(kinetic energy)는 한 쪽에서는 잃고 다른 쪽에서는 공급된다. 대학 1학년 과정에서 이는 충격력의 일반 이론, 그리고 계의 질량 중심(centre of mass)에 대한 이론이 된다. 질량 중심의 운동은 각 부분이 서로를 아무리 격렬하게 밀어내더라도 오직 외력에만 의존한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 운동량, 충격량, 질량 중심을 다룬다.

풀이

STEP I 1990, 문제 12

역학 • 탄성 용수철과 에너지

STEP I 1990, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

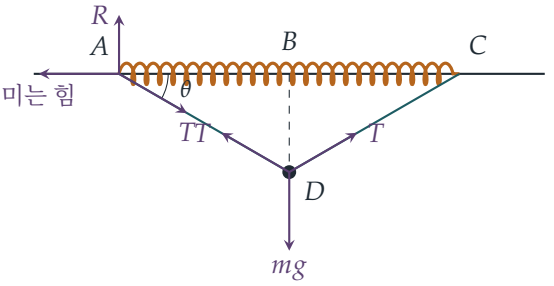
step.maths.org/questions/90-s1-q12

핵심 아이디어

입자를 제외한 모든 것이 가벼우므로(light, 질량을 무시할 수 있음), 양 끝 A와 C에 작용하는 힘은 정확히 평형을 이루어야 한다. 즉 각 끝에서 줄이 수평으로 당기는 힘은 압축된 용수철이 미는 힘과 같다. 이로부터 평형(equilibrium) 조건을 얻는다. 운동에 대해서는 에너지가 자연스러운 도구이다. 운동 에너지(kinetic energy)는 입자의 것뿐이므로, 입자는 위치 에너지(potential energy)가 처음 값으로 돌아올 때 정확히 정지한다.

풀이

모형. 용수철과 줄은 가볍고, 줄은 늘어나지 않으며(inextensible), 막대는 매끄러우므로(smooth) 막대는 용수철을 수직 방향으로만 밀 수 있다. B를 지나는 연직선에 대한 대칭(symmetry)에 의해 입자 D는 항상 B의 바로 아래에 있고, $AD = DC = l$이다. 줄의 각 절반에 걸리는 장력(tension)을 T, 각 절반이 막대와 이루는 각을 θ라 하자.



평형

$\theta = \pi/6$이면 AC의 절반의 길이는 $l\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$이므로

$$AC = \sqrt{3}l < 2l,$$

이고, 용수철은 $(2-\sqrt{3})l$만큼 **압축**(compressed)되어 있다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 용수철은 A를 (그리고 C를) 바깥쪽으로 다음 크기의 힘(thrust)으로 민다.

$$\frac{\lambda(2-\sqrt{3})l}{2l} = \lambda\Big(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

D에서 연직 방향으로 분해하면: $2T\sin\frac{\pi}{6} = mg$이므로 $T = mg$이다.

A에서 수평 방향으로 분해하면:

> **생각해 보기** 그곳에는 아무것도 없는데, 왜 A에서 힘의 평형을 따질 수 있을까?

용수철의 끝은 가벼운 점이다. 질량이 0인 물체에 알짜힘이 작용하면 가속도가 무한대가 되므로, 그 점에 작용하는 힘은 (평형 상태에서뿐만 아니라) 매 순간 평형을 이루어야 한다. 막대는 매끄러우므로 그 수직항력 R는 연직 방향이고, 수평 방향으로는 줄과 용수철만 작용한다.

$$T\cos\frac{\pi}{6} = \lambda\Big(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad\Longrightarrow\quad mg\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

따라서

$$mg = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \lambda\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\Big),$$

이며, 이것이 보이려던 식이다.

위치 에너지

$AC = 2xl$이라 하자. 줄이 팽팽한 동안 $0 < x \le 1$이다. AC의 절반은 xl이고 $AD = l$이므로, 피타고라스 정리(Pythagoras)에 의해 D는 막대 아래로

$$BD = l\sqrt{1-x^2}$$

의 깊이에 있다. 용수철의 늘어난 길이는 $2xl - 2l$이므로 탄성 에너지(elastic energy)는 $\frac{\lambda(2l-2xl)^2}{2\cdot 2l} = \lambda l(1-x)^2$이다. 막대를 중력 위치 에너지의 기준(0) 높이로 잡으면

$$V(x) = \lambda l(1-x)^2 - mgl\sqrt{1-x^2}.$$

일관성을 확인해 보자.

$$V'(x) = -2\lambda l(1-x) + \frac{mglx}{\sqrt{1-x^2}},$$

이고, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$에서($\cos\theta = x$이므로 $\theta = \frac{\pi}{6}$) 이 값은 $mg\sqrt{3} = \lambda(2-\sqrt{3})$일 때 정확히 0이 되는데, 이는 위에서 구한 조건과 같다.

B에서의 낙하

처음에 입자는 B에 있으므로 줄은 막대를 따라 놓여 있고, $AC = 2l$, $x = 1$이다. 이때 $V(1) = 0$이고 계는 정지 상태에서 출발한다.

막대는 매끄럽고 줄은 늘어나지 않으므로 에너지 손실이 없다. 또 용수철과 줄은 가벼우므로 운동 에너지는 입자의 $\frac{1}{2}mv^2$뿐이다. 따라서 운동하는 동안 항상

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V(x) = V(1) = 0.$$

생각해 보기 왜 "정지한다"는 것이 $V'(x) = 0$이 아니라 $V(x) = 0$을 뜻할까?

입자는 $v = 0$일 때 정지하며, 에너지 보존에 의해 이는 $V(x) = 0$을 뜻한다. 조건 $V'(x) = 0$은 평형을 나타내는데, 그곳은 입자가 멈추는 곳이 아니라 **가장 빠르게** 움직이는 곳이다. 따라서 x는 다음을 만족한다.

$$\lambda(1-x)^2 = mg\sqrt{1-x^2}, \qquad \text{즉,} \qquad (1-x)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\sqrt{1-x^2}.$$

근 $x = 1$은 출발 위치이다. $x < 1$이면 $\sqrt{1-x} > 0$으로 나누고 제곱할 수 있으며, 그러면 더 깔끔한 3차 방정식(cubic)을 얻는다.

$$(1-x)^3 = k^2(1+x), \qquad k = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0.15470, \quad k^2 \approx 0.023932.$$

$(1-x)^{3/2} = k\sqrt{1+x}$의 양변이 모두 양수이므로 여기서 제곱해도 문제가 없다. $f(x) = (1-x)^3 - k^2(1+x)$라 하자. 그러면

$$f(0.65) = 0.042875 - 0.039488 \approx +0.0034,$$
$$f(0.66) = 0.039304 - 0.039727 \approx -0.0004,$$

이므로 0.65와 0.66 사이, 0.66에 매우 가까운 곳에 근이 있다. $f'(x) = -3(1-x)^2 - k^2 < 0$이므로 f는 순감소(strictly decreasing)하고, 따라서 이것이 $x < 1$인 유일한 근이다. 입자는 $x \approx 0.66$(더 정확히는 $x \approx 0.6589$)일 때 다음으로 정지하며, 이때 D는 막대 아래 약 $0.75l$의 깊이에 있다.

검산

- $\theta = \pi/6$에서 $\lambda = l = m = 1$, $g = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$로 두면 A에서의 수평 당김과 용수철의 미는 힘은 모두 0.13397이고, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$에서 V의 수치 미분값은 0이다($V'' > 0$이므로 이 평형은 안정(stable)하다).
- 이분법(bisection)으로 근 $x = 0.658861$을 얻으며, D의 깊이 y에 대한 운동 방정식(equation of motion) $m\ddot{y} = mg - 2\lambda(1-x)\,y/(lx)$를 $y = 0$의 정지 상태에서부

터 (RK4로) 단계적으로 풀면 입자가 처음 멈추는 곳이 $x = 0.658861$로 나와 결과가 일치한다.

- 평형값 $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$은 당연히 0.66과 1 사이에 있다. 입자는 평형 위치를 중심으로 진동(oscillates)하기 때문이다.

흔한 실수

- 용수철이 늘어나 있다고 생각하는 것. 여기서는 $AC < 2l$이므로 용수철은 압축되어 있고 A와 C를 서로 멀어지도록 민다.
- 정지 위치를 구하려고 $V'(x) = 0$으로 두는 것. 그것은 속력이 가장 큰 평형 위치를 준다.
- 막대 아래에서 중력 위치 에너지가 **음수**임을 잊는 것. 그러면 에너지 방정식이 $(0, 1)$에서 해를 갖지 않게 된다.

STEP 너머

질량이 없는 물체에 작용하는 알짜힘이 0이어야 한다는 생각은 운동 법칙이 아니라 구속 조건(constraint)이다. 이런 문제는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 가장 깔끔하게 다룰 수 있다. 라그랑주 역학에서는 하나의 좌표(여기서는 x)로 에너지 함수 하나를 적으면 되고, 구속력은 전혀 나타나지 않는다. 또 위치 에너지 $V(x)$는 V''를 통해 평형 위치 근처에서의 미소 진동(small oscillations)의 주기도 알려 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 방법과 미소 진동을 다룬다.

풀이

STEP I 1990, 문제 13

역학 • 마찰과 강체의 평형

STEP I 1990, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

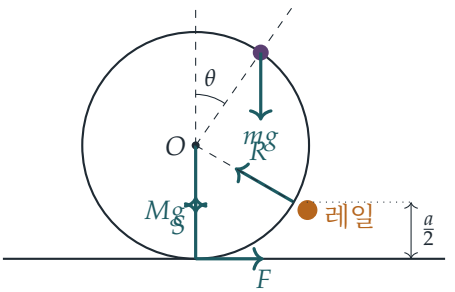
step.maths.org/questions/90-s1-q13

핵심 아이디어

먼저 입자(particle)를 다룬다. 이 입자는 거친 빗면 위에 놓인 평범한 입자이고, 그 빗면은 접촉점에서 원기둥(cylinder)에 접하는 접평면(tangent plane)이다. 다음으로, 입자가 평형(equilibrium) 상태에 있으므로 입자가 원기둥에 작용하는 힘 전체는 단순히 입자의 무게이며, 접촉점을 지나 연직 아래로 작용한다는 점에 주목한다. 원기둥의 중심에 대한 모멘트(moment)를 잡으면 이 힘과 평면이 주는 마찰력(friction)을 제외한 모든 힘이 사라지므로, 이것이 가장 빠른 길이다.

풀이

입자를 질량 m인 질점(point mass)으로, 원기둥을 질량 M이고 질량중심(centre of mass) O가 축 위에 있는 균일한 강체(rigid body) 원기둥으로 모형화한다. 레일은 매끄러우므로 수직항력만 작용하고, 평면과 원기둥의 표면은 마찰계수(coefficient of friction) μ로 거칠다. 모든 일은 O를 지나는 연직 단면 안에서 일어나므로, 이제부터 이 단면을 사용한다. 레일을 오른쪽에 둔다.



그림은 원기둥에 작용하는 힘들을 나타낸다(입자 위치의 mg는 두 번째 부분에서 설명한다). 화살표의 길이는 실제 비율이 아니다.

입자의 평형

접촉점 P에서 바깥쪽 법선은 연직 위쪽 방향과 각 θ를 이루므로, 그곳의 접평면은 수평면과 θ만큼 기울어진 빗면이다. 입자에 작용하는 힘은 무게 mg, 바깥쪽 법선 방향의 수직항력(normal reaction) N, 그리고 접선 방향으로 빗면 위쪽을 향하는 마찰력 f이다. 법선 방향과 그에 수직인 방향으로 분해하면

$$N = mg\cos\theta, \qquad f = mg\sin\theta.$$

$f \le \mu N$이면 마찰력이 이만큼을 공급할 수 있다. 즉,

$$\tan\theta \le \mu, \qquad \text{동치로} \qquad \theta \le \arctan\mu.$$

(N이 양수이려면 $0 \le \theta < 90^\circ$이어야 하는데, 입자가 원기둥 윗부분에 있으므로 이는 성립한다.)

놓은 뒤 원기둥의 평형

생각해 보기 입자는 수직항력과 마찰력으로 원기둥을 누른다. 이 두 힘을 따로따로 다루어야 할까?

그럴 필요 없다. 뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 따라 원기둥은 P에서 $-N$과 $-f$를 받는다. N과 f를 합하면 입자의 무게와 평형을 이루므로 그 합은 연직 위쪽으로 mg이고, 따라서 입자가 원기둥에 작용하는 힘 전체는 **P에서 연직 아래로 작용하는** mg이다. 이 힘의 작용선(line of action)은 레일 쪽으로 O에서 수평 거리 $a\sin\theta$만큼 떨어져 있다.

원기둥에 작용하는 나머지 힘은 다음과 같다.

- O에 작용하는 무게 Mg;
- 레일의 반작용 R. 이 힘은 원기둥 표면에 수직이므로 반지름을 따라 O를 향한다. 레일은 높이 $a/2$, 즉 O보다 $a/2$ 아래에서 닿으므로, 이 반지름은 연직 아래 방향과 60°를 이룬다. 따라서 R은 레일에서 멀어지는 방향으로 수평 성분 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$, 위쪽으로 성분 $\frac{1}{2}R$를 가진다;
- 가장 낮은 점에서 위쪽으로 작용하는 수직항력 S와 수평으로 작용하는 마찰력 F(레일 쪽을 양의 방향으로 잡는다).

O에 대한 모멘트. Mg, R, S의 작용선은 모두 O를 지난다. 입자의 mg는 모멘트 $mg\,a\sin\theta$를 가지며(원기둥을 레일 쪽으로 돌리려 한다), F는 O보다 거리 a 아래에서 반대 방향으로 작

용한다. 따라서

$$Fa = mg\,a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad F = mg\sin\theta.$$

이 값은 양수이므로, 그림처럼 마찰력은 실제로 레일 쪽으로 작용한다. (레일이 없다면 원기둥은 레일이 있는 쪽으로 굴러갈 것이다. 레일이 쓸모 있으려면 입자가 그쪽에 있어야 하는 이유가 바로 이것이다.)

수평 방향으로 분해하면: $\frac{\sqrt{3}}{2}R = F$이므로

$$R = \frac{2mg\sin\theta}{\sqrt{3}} > 0,$$

이는 레일이 밀기만 할 수 있다는 사실과 모순되지 않는다.

연직 방향으로 분해하면:

$$S = (M+m)g - \tfrac{1}{2}R = (M+m)g - \frac{mg\sin\theta}{\sqrt{3}},$$

$\sin\theta < 1 < \sqrt{3}$이고 $M > 0$이므로 이 값은 양수이고, 따라서 원기둥은 평면 위에 머문다.

$F \le \mu S$이면 평면이 마찰력을 공급할 수 있다.

$$m\sin\theta \le \mu\left[(M+m) - \frac{m\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] \iff m\sin\theta\left(\sqrt{3}+\mu\right) \le \sqrt{3}\,\mu\,(M+m).$$

그러므로 놓은 뒤에 두 물체가 모두 평형을 유지할 수 있는 조건은 $\tan\theta \le \mu$와

$$\boxed{\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\,\mu\,(M+m)}{m\,(\sqrt{3}+\mu)}}$$

가 모두 성립하는 것이다. (매끄러운 레일에서는 마찰력이 필요 없고, 입자와 원기둥 사이의 마찰력은 첫 번째 부분에서 다루었다.)

마지막 부분

$m = 7M$, $\mu = \frac{3}{4}$일 때 입자의 조건은 $\tan\theta \le \frac{3}{4}$, 즉 $\sin\theta \le \frac{3}{5}$이다. 원기둥의 조건은

$$\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 8M}{7M\,(\sqrt{3}+\frac{3}{4})} = \frac{24\sqrt{3}}{7(4\sqrt{3}+3)} = \frac{24\sqrt{3}\,(4\sqrt{3}-3)}{7\cdot 39} = \frac{24(4-\sqrt{3})}{91}.$$

어느 쪽이 더 엄격할까? 다음이 성립한다.

$$\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} < \frac{3}{5} \iff 120(4-\sqrt{3}) < 273 \iff 207 < 120\sqrt{3} \iff 42849 < 43200,$$

이는 참이다. 따라서 원기둥이 평면 위에서 미끄러지는 것이 실제로 제약이 되는 조건이며(아주 근소한 차이로), 평형을 이루는 θ의 최댓값은

$$\theta_{\max} = \arcsin\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} \approx 36.7^\circ,$$

으로, $\arctan\frac{3}{4} \approx 36.9^\circ$보다 약간 작다.

검산

- 극한의 경우 $M \to \infty$: 아주 무거운 원기둥은 언제나 마찰력으로 붙잡아 둘 수 있으므로 원기둥의 조건은 아무 제약도 주지 않게 되고, $\tan\theta \le \mu$만 남는다.
- $\theta \to 0$이면 입자는 꼭대기에 놓이고 그 무게는 O를 지나며, $F = R = 0$이다. 예상대로 레일도 마찰력도 필요 없다.
- 수치적으로, M, m, a, μ, θ를 무작위로 20 000번 골라 힘 벡터로부터 직접 세 평형 방정식을 풀어 보면 매번 상자 안의 조건과 일치한다. $m = 7M$, $\mu = 0.75$일 때 θ를 촘촘히 훑으면 $\theta_{\max} \approx 36.737^\circ$, $\sin\theta_{\max} \approx 0.59814$를 얻는다.

흔한 실수

- 레일의 힘을 수평으로 잡는 것. 이 힘은 원기둥 표면에 수직이므로 반지름 방향을 향하며, 여기서는 수평면 위로 30°를 이룬다.
- 레일의 힘의 위쪽 성분 $\frac{1}{2}R$를 빠뜨리는 것. 이 성분은 S를 줄이고, 따라서 평면이 줄 수 있는 마찰력도 줄인다.
- 원기둥의 조건과 비교하지 않고 $\theta = \arctan\frac{3}{4}$에서 멈추는 것. 원기둥의 조건이 (근소하게) 더 엄격하다.

STEP 너머

여기서 쓴 유용한 기법, 즉 입자의 접촉력들을 입자의 무게와 같은 하나의 합력(resultant)으로 바꾸는 것은, 강체에 작용하는 임의의 힘의 계가 선택한 한 점을 지나는 하나의 힘과 하나의 짝힘(couple)으로 환원된다는 생각을 처음 엿보게 해 준다. 마찰이 있는 접촉이 여러 개인 강체의 정역학(statics)은 대학 1학년의 표준 주제이며, 어느 접촉이 먼저 미끄러지는가 하는 질문은 마찰력이 방정식만으로는 결정되지 않는 더 미묘한 문제로 이어진다. Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 힘, 토크(torque), 강체의 평형을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1990, 문제 14

확률과 통계 • 기댓값과 최적 정지

STEP I 1990, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s1-q14

핵심 아이디어

공을 다시 넣으므로 각 시행은 독립(independent)이고, 따라서 매번 흰 공, 빨간 공, 검은 공이 나올 확률은 항상 같은 값으로 고정되어 있다. Juggins의 경우에는 세 번의 시행에서 살아남을 확률과 살아남은 시행 한 번의 평균 점수만 알면 된다. Muggins의 경우에는 맞바꿈(trade-off)이 문제가 된다. 한 번 더 뽑으면 평균적으로 점수가 조금 늘지만 이미 쌓아 둔 점수를 모두 잃을 위험이 있고, 그 위험의 크기는 N과 함께 커진다. "뽑을 때의 기대 점수"와 "멈출 때의 점수"를 비교하면 문턱값(threshold)이 나온다.

풀이

한 번의 시행에서 공이 흰 공, 빨간 공, 검은 공인 사건을 각각 W, R, B라 하자. 공을 다시 넣으므로 각 시행은 다른 시행과 독립이고,

$$\mathrm{P}(W) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(R) = \frac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

이다.

Juggins의 전략

Juggins의 최종 점수가 0이 되는 것은 처음 세 번 안에 검은 공이 나올 때이고, 오직 그때뿐이다. 그렇지 않으면 세 번 모두 검은 공이 아니고 그는 멈춘다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{최종 점수}0) = 1 - \mathrm{P}(\text{세 번 모두 검은 공이 아님}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}.$$

이다.

기댓값(expected value)을 구하기 위해 그의 최종 점수를 S라 하자. 처음 세 번이 모두 검은

공이 아니면(확률 $\frac{64}{125}$) $S = X_1 + X_2 + X_3$이다. 여기서 X_i는 i번째 시행이 검은 공이 아니라는 조건 아래에서 그 시행의 점수이다. 검은 공이 아니라는 조건 아래에서 그 공이 흰 공일 확률은 $\frac{1/2}{4/5} = \frac{5}{8}$, 빨간 공일 확률은 $\frac{3/10}{4/5} = \frac{3}{8}$이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(X_i) = 1 \cdot \tfrac{5}{8} + 2 \cdot \tfrac{3}{8} = \tfrac{11}{8}.$$

이다. 나머지 모든 경우에는 $S = 0$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(S) = \tfrac{64}{125} \cdot 3 \cdot \tfrac{11}{8} = \tfrac{264}{125} = 2.112.$$

이다.

생각해 보기 여기서 왜 $\frac{1}{2}$와 $\frac{3}{10}$이 아니라 $\frac{5}{8}$과 $\frac{3}{8}$을 쓰는가?

이미 살아남았다는 조건을 걸었으므로 세 번의 시행은 모두 검은 공이 아님이 알려져 있고, 따라서 확률의 합이 1이 되도록 다시 비율을 맞춰야 한다. 조건부 확률(conditional probability)을 쓰지 않고 같은 계산을 할 수도 있다. $\mathrm{E}(S)$는 흰 공과 빨간 공으로 이루어진 $2^3 = 8$가지 순서 각각에 대해 (확률)×(점수)를 더한 값이다. 각 시행은 기댓값으로 $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{11}{10}$만큼 기여하고, 그 점수는 나머지 두 시행도 살아남을 때(확률 $\frac{16}{25}$)에만 유지된다. 이렇게 해도 다시 $3 \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{16}{25} = \frac{264}{125}$를 얻는다.

Muggins의 결정

Muggins가 N점을 가진 상태에서 한 번 더 뽑고 (그다음 멈춘다고) 하자. 그의 점수는 $N+1$, $N+2$ 또는 0이 되므로

$$\mathrm{E}(\text{한 번 더 뽑은 뒤의 점수}) = \tfrac{1}{2}(N+1) + \tfrac{3}{10}(N+2) + \tfrac{1}{5} \cdot 0 = \tfrac{4}{5}N + \tfrac{11}{10}.$$

이다. 평균적으로 뽑는 것이 멈추는 것보다 나은 것은 정확히

$$\tfrac{4}{5}N + \tfrac{11}{10} > N \iff \tfrac{11}{10} > \tfrac{1}{5}N \iff N < 5.5.$$

일 때이다. 한 번 뽑을 때의 평균 이득은 $\frac{11}{10}$이고, 평균 손실은 검은 공이 나올 확률에 걸려 있는 점수를 곱한 $\frac{1}{5}N$이다. 점수는 정수이므로, 이로부터 다음 전략을 생각할 수 있다.

점수가 5 이하인 동안은 계속 뽑고, 6 이상이 되는 즉시 멈춘다.

생각해 보기 한 번 더 뽑는 경우와 멈추는 경우만 비교하는 것은 근시안적으로 보인다. $N \geq 6$에서 뽑고 나중에 또 뽑을 계획을 세우는 것이 이득일 수는 없을까?

그렇지 않다. 점수가 일단 6 이상이 되면, 이후에 몇 번을 더 뽑든 점수는 6 이상으로 남거나 (아니면 0으로 게임이 끝나므로), 이후의 모든 결정 시점에서 한 번 뽑기 비교는 다시 "멈춰

라"라고 말한다. 그런 점수에서 한 번 더 뽑을 때마다 최종 점수의 기댓값이 줄어드므로, 그 상태에서 가장 좋은 계획은 즉시 멈추는 것이다. 6 미만에서는 한 번 더 뽑는 것만으로도 이미 멈추는 것보다 낫고, 계속할 수 있는 선택지는 그 이득을 더 늘려 줄 뿐이다. 따라서 이 문턱값 규칙은 단지 합리적인 전략이 아니라 가능한 최선의 전략이다.

이 전략을 쓸 때 N에서 시작한 최종 점수의 기댓값을 $V(N)$이라 하자. 그러면 $N \geq 6$에 대해 $V(N) = N$이고, $N \leq 5$에 대해 $V(N) = \frac{1}{2}V(N+1) + \frac{3}{10}V(N+2)$이다. 위에서부터 내려가며 계산하면 다음과 같다.

N	6	5	4	3	2	1	0
$V(N)$	6	5.1	4.35	3.705	3.1575	2.690	2.292

따라서 Muggins는 한 게임에 평균 약 2.29점을 얻고, 이는 Juggins의 2.112점보다 높다.

검산

- 컴퓨터로 최대 세 번까지의 모든 시행 순서를 정확히 나열하였다. 그 결과 $\mathrm{P}(0) = \frac{61}{125} = 0.488$과 $\mathrm{E}(S) = \frac{264}{125}$가 확인되었다. 2×10^5번의 게임으로 몬테카를로(Monte Carlo) 시뮬레이션을 하였더니 0.488과 2.111이 나왔다.
- $N = 5$에서 뽑으면 $\frac{4}{5} \cdot 5 + 1.1 = 5.1 > 5$이다. $N = 6$에서는 $5.9 < 6$이다. 따라서 전환점은 5와 6 사이에 있다.
- 모든 전략에 대해 가치 반복(value iteration)을 수행하였더니 같은 규칙이 나왔다. 대신 ≥ 5나 ≥ 7에서 멈추면 평균이 각각 2.261과 2.265로, 6에서 멈출 때의 2.292보다 낮다.

흔한 실수

- $\mathrm{E}(S)$를 $3 \times \frac{11}{10}$으로 계산하는 것. 이는 나중에 검은 공이 나오면 앞의 점수가 모두 사라진다는 사실을 잊은 것이다.
- 조건부 평균 $\frac{11}{8}$에 조건 없는 확률까지 곱하는 것. 이렇게 하면 생존 인자를 두 번 세게 된다.
- 문턱값을 $N \leq 5.5$로 쓰고 N이 정수라는 점을 언급하지 않는 것. 규칙은 "5에서는 뽑고, 6에서는 멈춘다"이다.

STEP 너머

Muggins의 문제는 **최적 정지**(*optimal stopping*) 문제이다. "지금 멈추는 것이 한 단계 더 가는 것보다 나으면 멈춘다"는 규칙을 **한 단계 앞보기**(*one-step look-ahead*) 규칙이라 하며, 이

문제에서처럼 그 규칙이 멈추라고 하는 상태들의 집합을 결코 벗어날 수 없을 때에는 언제나 최적이다. 같은 아이디어는 마르코프(Markov) 결정 과정(Markov decision process)과 동적 계획법(dynamic programming)으로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 기댓값과 마르코프 연쇄(Markov chain)의 배경 지식을 다루고, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 이와 비슷한 첫 단계 분석(first-step analysis)이 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 1990, 문제 15

확률과 통계 • 음이항분포

> **STEP I 1990, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q15

핵심 아이디어

첫 번째 부분에서는 사건을 서로 독립(independent)인 두 조각, 즉 마지막 던지기에서 일어나는 일과 그 이전의 모든 던지기에서 일어나는 일로 나눈다. 나머지 부분에서 중요한 사실은 동전에 기억이 없다는 것이다. 앞면이 막 나왔다면 다음 앞면을 기다리는 일은 처음부터 새로 시작되므로, 기하분포(geometric distribution)를 따르는 대기 시간이 짝수일 확률과 홀수일 확률만 알면 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $q = 1 - p$로 둔다. 각 던지기는 독립이고, 각각 확률 p로 앞면이 나온다.

k번째 앞면의 분포

k번째 앞면이 나오는 던지기의 번호를 T_k라 하자. 사건 $\{T_k = n\}$은 정확히 다음 두 조건이 성립할 때 일어난다.

- n번째 던지기가 앞면이고,
- $1, 2, \ldots, n-1$번째 던지기 중 앞면이 정확히 $k-1$번 (따라서 뒷면이 $n-k$번) 나온다.

두 조건은 모두 필요하다. n번째 던지기가 뒷면이라면 k번째 앞면은 n번째 던지기 이전이나 이후에 나오고, n번째에 나오지는 않는다. 처음 $n-1$번의 던지기에서 앞면의 개수가 다르다면 n번째 던지기는 k번째 앞면이 되지 않는다. 또한 두 조건을 함께 만족하면 충분하다.

이 두 사건은 서로 겹치지 않는 던지기들에 관한 것이므로 독립이다. 첫 번째 사건의 확률은 p이다. 두 번째 사건에서 $k-1$개의 앞면은 처음 $n-1$번의 던지기 중 $\binom{n-1}{k-1}$가지 위치 집합

어디에든 놓일 수 있다. 이러한 배열 각각은 $k-1$개의 앞면과 $n-k$개의 뒷면으로 이루어진 특정한 수열이며, 독립성에 의해 그 확률은 $p^{k-1}q^{n-k}$이다. 또 서로 다른 배열은 서로 배반(mutually exclusive)이다. 따라서

$$\mathrm{P}(T_k = n) = p \cdot \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad n \geq k,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

짝수에서 짝수로

$(k-1)$번째 앞면 이후에 추가로 필요한 던지기 횟수를 $G = T_k - T_{k-1}$라 하자 (단, $T_0 = 0$). T_{k-1}번째 던지기 이후의 던지기들은 그 시점까지 일어난 모든 일과 독립이다. 따라서 G는 T_{k-1}과 독립이고, 다음과 같은 기하분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(G = g) = q^{g-1}p, \qquad g = 1, 2, \ldots$$

(이는 첫 번째 부분에서 $k = 1$인 경우이다.)

? **생각해 보기** T_{k-1}이 짝수일 때, T_k는 언제 짝수인가?

$T_k = T_{k-1} + G$이므로, T_{k-1}이 짝수이면 T_k는 정확히 G가 짝수일 때 짝수이다. G는 T_{k-1}과 독립이므로, T_{k-1}이 짝수라는 조건을 걸어도(conditioning) G의 분포는 변하지 않는다. 그러므로

$$\mathrm{P}(T_k \text{ 짝수} \mid T_{k-1} \text{ 짝수}) = \mathrm{P}(G \text{ 짝수}).$$

등비급수(geometric series)의 합을 구하면

$$\mathrm{P}(G \text{ 짝수}) = p\left(q + q^3 + q^5 + \cdots\right) = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{pq}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q},$$
$$\mathrm{P}(G \text{ 홀수}) = p\left(1 + q^2 + q^4 + \cdots\right) = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}.$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{q}{1+q} = \frac{1-p}{2-p}.$$

이 답은 k에 의존하지 않는다.

짝수 번째 던지기에서 정확히 두 번 앞면

이제 세 번째 앞면이 나올 때까지 던진다. 세 대기 시간을 $G_1 = T_1$, $G_2 = T_2 - T_1$, $G_3 = T_3 - T_2$라 하자. 같은 무기억성(memoryless) 논증에 의해 이들은 독립이고, 각각 위와 같은 기하분포를 따른다. 다음과 같이 쓰자.

$$e = \mathrm{P}(G_i \text{ 짝수}) = \frac{q}{1+q}, \qquad o = \mathrm{P}(G_i \text{ 홀수}) = \frac{1}{1+q}.$$

시작점은 0번째 던지기이고, 이는 짝수이다. 짝수 간격은 현재 위치의 홀짝성(parity)을 유지하고, 홀수 간격은 홀짝성을 바꾼다. 다음 표는 (G_1, G_2, G_3)의 가능한 홀짝 패턴 여덟 가지와 그에 따른 (T_1, T_2, T_3)의 홀짝성을 나열한 것이다.

G_1	G_2	G_3	T_1	T_2	T_3	짝수 번째 앞면
짝	짝	짝	짝	짝	짝	3
짝	짝	홀	짝	짝	홀	**2**
짝	홀	짝	짝	홀	홀	1
짝	홀	홀	짝	홀	짝	**2**
홀	짝	짝	홀	홀	홀	0
홀	짝	홀	홀	홀	짝	1
홀	홀	짝	홀	짝	짝	**2**
홀	홀	홀	홀	짝	홀	1

짝수 번째 던지기에서 앞면이 정확히 두 번 나오는 경우는 세 가지이고, 그 확률은 각각 e^2o, eo^2, o^2e이다. 간격들의 독립성에 의해 구하는 확률은

$$\begin{aligned} e^2o + 2eo^2 = eo(e+2o) &= \frac{q}{(1+q)^2} \cdot \frac{q+2}{1+q} \\ &= \frac{q(2+q)}{(1+q)^3} = \frac{(1-p)(3-p)}{(2-p)^3}. \end{aligned}$$

검산

- 첫 번째 부분의 검산으로, $n \geq k$에 대해 $\mathrm{P}(T_k = n)$을 모두 더하면 1이 되어야 한다. 이는 음이항 급수 $\sum_{n \geq k} \binom{n-1}{k-1} q^{n-k} = (1-q)^{-k}$이다.
- 두 홀짝 확률 $\frac{q}{1+q}$와 $\frac{1}{1+q}$를 더하면 1이다. p가 1에 가까우면 첫 앞면은 거의 항상 곧바로, 즉 홀수 번째 던지기에서 나오므로 $\mathrm{P}(G \text{ 짝수}) \to 0$이고, 공식도 그렇게 준다.
- 공정한 동전($p = \frac{1}{2}$)에 대해 최종 답은 $\frac{(1/2)(5/2)}{(3/2)^3} = \frac{10}{27} \approx 0.370$이다. 2×10^5회의 시뮬레이션 결과는 0.369였다. 세 대기 시간에 대해 직접 합을 계산한 결과는 $p = 0.3, 0.5, 0.8$에서 공식과 10^{-9} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- 첫 번째 부분에서 $\binom{n}{k}$를 사용하는 것. 마지막 던지기는 반드시 앞면이어야 하므로, 자유롭게 정해지는 것은 처음 $n-1$번의 던지기뿐이다.
- 두 번째 부분에서 음이항분포를 짝수 n에 대해 더하는 것. 무기억성을 가진 간격을 이용하면 이 계산을 완전히 피할 수 있다.

- 마지막 부분에서 짝수 위치의 앞면을 셀 때 위치들이 독립인 것처럼 다루는 것. 각 위치는 바로 앞의 위치로부터 만들어지므로 독립이 아니다.

STEP 너머

k번째 앞면이 나오는 시각은 **음이항분포**(negative binomial distribution)를 따른다. 이를 독립인 기하분포 간격들의 합으로 쓰는 것은, 포아송 과정(Poisson process)의 도착 시각이 독립인 지수분포 대기 시간들로 만들어지는 방식의 이산 버전이다. 마지막 부분의 홀짝 기록은 두 상태 마르코프 연쇄(Markov chain)이며, 이는 대학 1학년 확률론 강의에서 일찍 만나는 주제이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 이 모든 내용을 다룬다.

풀이

STEP I 1990, 문제 16

확률과 통계 • 삼각분포와 검정

> **STEP I 1990, 16번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q16

핵심 아이디어

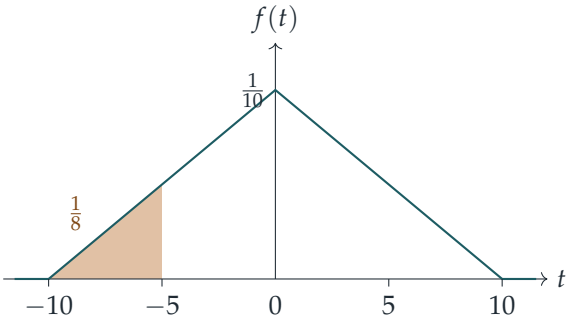
확률밀도함수(density)가 삼각형 모양이므로, 필요한 확률은 모두 작은 삼각형의 넓이이고, 누적분포함수(cumulative distribution function)가 모든 일을 해 준다. 두 번째로 주목할 점은 오전 8시 무렵에 올 수 있는 버스는 8시 버스뿐이라는 것이다. 7시 버스는 7.10까지 이미 떠났고, 9시 버스는 8.50 이전에는 올 수 없다. 따라서 아침에 "버스를 탄다"는 것은 사실상 "8시 버스가 오기 전에 정류장에 도착한다"는 뜻이다. 그러면 마지막 부분은 모수가 하나인 이항 모형(binomial model)과 유의성 검정(significance test)의 문제가 된다.

풀이

T의 확률밀도함수

확률밀도함수는 $t = -10$에서 0으로부터 선형으로 증가하여 $t = 0$에서 최댓값에 이르고, 같은 비율로 감소하여 $t = 10$에서 0이 된다. 따라서 $[-10, 10]$에서 $f(t) = k(10 - |t|)$ 꼴이고 그 밖에서는 0이다. 전체 넓이는 밑변이 20이고 높이가 $10k$인 삼각형의 넓이이므로 $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10k = 1$이고, $k = \frac{1}{100}$을 얻는다.

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{10+t}{100}, & -10 \le t \le 0, \\ \dfrac{10-t}{100}, & 0 \le t \le 10, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases}$$



나중에 쓰기 위해 구해 두면, 왼쪽 절반에서 누적분포함수는 밑변이 $a+10$이고 높이가 $f(a)$인 삼각형의 넓이이다.

$$\mathrm{P}(T<a)=\tfrac{1}{2}(a+10)\cdot\frac{a+10}{100}=\frac{(a+10)^2}{200},\qquad -10\le a\le 0,$$

또 $t=0$에 대한 대칭성에 의해 $0\le a\le 10$일 때 $\mathrm{P}(T>a)=\dfrac{(10-a)^2}{200}$이다. 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 $\mathrm{P}(T<-5)=\frac{25}{200}=\frac{1}{8}$이다.

오전 8.10까지 버스 타기

버스가 올 때까지 정류장에서 기다린다고 가정한다. 8시에 오기로 된 버스는 오전 8시로부터 T분 뒤에 도착하며, $-10\le T\le 10$이다. 그 앞 버스는 7.10까지 이미 떠났고, 다음 버스는 8.50 이전에는 올 수 없다. 따라서 8.10까지 버스를 타는 것은 정확히 8시 버스가 도착하기 전에 정류장에 도착하는 경우이며, 이때 8.10이라는 시한은 자동으로 만족된다.

오전 8시로부터 a분 뒤에 정류장에 도착한다면, $T>a$일 때 버스를 탄다($T=a$일 확률은 0이다). 세 경우는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
7{\cdot}55,\ a=-5:&\quad \mathrm{P}(T>-5)=1-\tfrac{25}{200}=\tfrac{7}{8},\\
7{\cdot}58,\ a=-2:&\quad \mathrm{P}(T>-2)=1-\tfrac{64}{200}=\tfrac{17}{25},\\
8{\cdot}02,\ a=2:&\quad \mathrm{P}(T>2)=\tfrac{64}{200}=\tfrac{8}{25}.
\end{aligned}$$

정류장에 7.55에 도착할 확률은 0.5, 7.58에 도착할 확률은 $0.5\times 0.8=0.4$, 8.02에 도착할 확률은 $0.5\times 0.2=0.1$이다. 내가 늦잠을 자는 것은 버스와 아무 관계가 없으므로, 전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(8.10\text{까지 버스를 탐}) &= 0.5\cdot\tfrac{7}{8}+0.4\cdot\tfrac{17}{25}+0.1\cdot\tfrac{8}{25}\\
&= 0.4375+0.272+0.032=\frac{1483}{2000}=0.7415.
\end{aligned}$$

새 시계가 틀렸을까?

먼저 시계가 정확하여 매일 아침 7:55에 정류장에 도착한다고 하자. 8시 버스와 9시 버스의 도착 시각을 정시로부터 몇 분 뒤인지로 나타낸 것을 각각 T_8, T_9라 하자. 이 둘은 독립(independent)이고, 각각 확률밀도함수 f를 가진다. 오전 9시가 지나서도 기다리고 있는 것은 정확히 8시 버스를 놓치고($T_8 < -5$) 그리고 9시 버스가 늦게 오는($T_9 > 0$) 경우이다. 따라서 어느 하루 아침에

$$p = \mathrm{P}(T_8 < -5)\,\mathrm{P}(T_9 > 0) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{16}.$$

> **생각해 보기** 검정은 어느 방향으로 해야 할까? 5번은 "너무 많은" 것일까, "너무 적은" 것일까?

시계가 잘못 맞춰져 있으면 p는 어느 쪽으로든 움직일 수 있다. 시계가 d분 빠르다고 하자. 그러면 나는 실제 시각 $7.55 - d$에 정류장에 도착하고, 시계는 실제 시각 $9.00 - d$에 9:00을 가리키므로, "오전 9시"가 지나서도 기다릴 확률은

$$g(d) = \mathrm{P}(T_8 < -5 - d)\,\mathrm{P}(T_9 > -d).$$

가 된다. 시계가 빠르면($d > 0$) 더 일찍 도착하므로 8시 버스를 놓치는 일이 드물어 $g(d) < \frac{1}{16}$이다. 시계가 조금 느리면 반대가 된다(예를 들어 $g(-2.5) \approx 0.079$). 따라서 정직한 검정은 양측 검정(two-sided test)이다.

새 시계로 100일의 아침 가운데 오전 9시가 지나서도 기다린 날의 수를 X라 하자. 서로 다른 버스의 도착 시각은 독립이고 나는 매일 같은 시각에 도착하므로, 각 아침은 독립 시행(trial)이며

$$H_0:\ \text{시계가 정확함},\quad X \sim \mathrm{B}\!\left(100, \tfrac{1}{16}\right); \qquad H_1:\ \text{시계가 잘못 맞춰짐, 따라서} p \neq \tfrac{1}{16}.$$

H_0 아래에서 기대 횟수는 $\mathrm{E}(X) = 6.25$이고 $\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16} \approx 5.86$이므로, 표준편차(standard deviation)는 약 2.42이다. 관측값 5는 평균보다 조금 작다. 정확히 계산하면

$$\mathrm{P}(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} \approx 0.40 \qquad \text{여기서} p = \tfrac{1}{16},$$

이고, 연속성 보정(continuity correction)을 한 정규근사(normal approximation)는 $\Phi\big((5.5 - 6.25)/2.42\big) = \Phi(-0.31) \approx 0.38$을 준다. 이는 0.025(유의수준 5% 양측 검정의 아래쪽 꼬리)는 물론이고 통상적인 어떤 유의수준(significance level)과도 거리가 멀다. 따라서 H_0를 기각하지 않는다. **새 시계가 잘못 맞춰져 있다는 증거는 없다.**

이것이 시계가 정확하다는 증거와 같은 것은 아니다. 실제로 확률밀도함수가 대칭이므로(두 버스의 역할을 맞바꾸면) $g(d) = g(-5 - d)$이고, 따라서 5분 느린 시계는 정확한 시계와 똑같이 $p = \frac{1}{16}$을 준다. 이런 종류의 자료로는 아침을 아무리 많이 관찰해도 이 두 경우를 구별할 수 없다.

검산

- 확률밀도함수의 넓이는 1이고, 삼각형 공식은 f의 수치적분 결과와 일치한다. 예를 들어 $\mathrm{P}(T < -2) = 0.32$이다.
- 답 0.7415는 최선의 경우 $\frac{7}{8}$(항상 7.55에 도착)과 최악의 경우 0.32(항상 8.02에 도착) 사이에 있으며, 마땅히 그래야 한다. 10^6일의 아침을 시뮬레이션한 결과는 0.741이었다.
- 10^6개의 쌍 (T_8, T_9)을 시뮬레이션한 결과는 $\frac{1}{16} = 0.0625$에 대해 0.0622였고, 정확한 이항분포 꼬리확률 $\mathrm{P}(X \leq 5)$의 값은 0.4002이다.

흔한 실수

- 9시가 지나서도 기다리려면 8시 버스를 놓쳐야 한다는 점을 잊는 것. 답 $p = \frac{1}{2}$(단지 "9시 버스가 늦게 온다")는 첫 번째 인수를 무시한 것이다.
- "8.10까지 버스를 탄다"를 $T \leq 10$을 따로 확인해야 하는 것으로 다루는 것. 8시 버스는 항상 8.10까지 도착하므로 $T > a$만 중요하다.
- 자료가 오히려 조금 적게 나왔는데 "너무 많다"에 대한 단측 검정(one-tailed test)을 하는 것. 잘못된 시계는 p를 어느 방향으로든 움직일 수 있다.

STEP 너머

삼각형 모양의 확률밀도함수는 정확히 서로 독립인 두 균등 확률변수(uniform random variable)의 합의 분포이며, 이는 합성곱(convolution)의 첫 번째 예이다. 대학 1학년 확률론 강의에서는 이 방법으로 합의 확률밀도함수를 구한다. 마지막 부분은 통계적 식별 가능성(identifiability)을 조금 맛보게 해 준다. 대칭성 $g(d) = g(-5 - d)$는 서로 다른 두 모수 값이 똑같은 자료를 만들어 낸다는 뜻이므로, 어떤 검정도 이 둘을 구별할 수 없다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 합성곱과 확률변수의 합을 명쾌하게 다룬다.

풀이

STEP II 1990, 문제 1

순수수학 • 다항식 부등식

> **STEP II 1990, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q1

핵심 아이디어

실근을 갖지 않는 사차식이란 결국 항상 양수인 사차식이다. 따라서 이 식을 음이 아니라는 것을 이미 아는 조각들, 즉 완전제곱식이나 특정 구간에서 부호가 분명한 곱으로 나누는 방법을 찾는다. 어느 하나의 분해가 모든 곳에서 통하지는 않지만, 구간마다 다른 분해가 통하고 이들을 합치면 실수 전체를 덮는다. 첫 번째 부분에서는 조각들이 주어지지만, 마지막 부분에서는 그 조각들을 스스로 찾아야 한다.

풀이

음이 아닌 두 식

사차식을 인수분해하고 이차식을 완전제곱식으로 고치면

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = x^2(x-1)^2,$$
$$x^2 - 8x + 17 = (x-4)^2 + 1.$$

첫 번째 식은 두 제곱의 곱이므로 모든 실수 x에 대하여 ≥ 0이다. 두 번째 식은 제곱에 1을 더한 것이므로 적어도 1이고, 특히 음이 아니다.

첫 번째 방정식

$p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 17$이라 하자. p는 위의 두 식의 합이 아니라는 점에 주의한다(그 합에는 x^2이 아니라 $2x^2$이 있다). 그래서 두 식을 단순히 더할 수는 없다. 대신 구간마다 p를 다르게 나누어 모든 곳에서 $p(x) > 0$임을 보인다.

생각해 보기 문제는 음이 아닌 두 식을 주지만, 그 합은 $p(x)$가 되지 않는다. 그래도 이 식들을 어떻게 활용할 수 있을까?

각 식을 실수 직선의 일부에서 "빌려" 쓸 수 있다. 한 구간에서는 사차식 $x^2(x-1)^2$을 그대로 두고 나머지 $17-8x$를 직접 다룬다. 다른 구간에서는 이차식 $(x-4)^2+1$을 그대로 두고 나머지 x^4-2x^3을 직접 다룬다.

경우 $x \le 0$. 이때 $x^4 \ge 0$, $-2x^3 \ge 0$($x^3 \le 0$이므로), $x^2 \ge 0$, $-8x \ge 0$이다. 따라서 $p(x)$의 모든 항이 음이 아니고, 상수 17 때문에 합은 적어도 17이다. 그러므로 $p(x) > 0$이다.

경우 $0 < x \le 2$. 다음과 같이 쓴다.

$$p(x) = x^2(x-1)^2 + (17-8x).$$

첫 번째 괄호는 ≥ 0이고, $x \le 2$이므로 $17-8x \ge 17-16 = 1$이다. 따라서 $p(x) \ge 1 > 0$이다.

경우 $x > 2$. 다음과 같이 쓴다.

$$p(x) = x^3(x-2) + \left(x^2 - 8x + 17\right) = x^3(x-2) + (x-4)^2 + 1.$$

$x > 2$이므로 x^3과 $x-2$가 모두 양수이고, 따라서 $x^3(x-2) > 0$이다. 또 $(x-4)^2+1 \ge 1$이다. 따라서 $p(x) > 1 > 0$이다.

세 구간은 모든 실수를 덮고 각 구간에서 $p(x) > 0$이므로, $p(x) = 0$은 실근(real root)을 갖지 않는다.

두 번째 방정식

$q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$라 하자. 같은 방법을 따르되, 이번에는 분해를 스스로 고른다.

생각해 보기 실수 직선을 어디에서 나누어야 하고, 어떤 항들을 짝지어 묶어야 할까?

각 묶음이 자기 구간에서 부호가 분명하기를 바란다. 묶음 $4-4x = 4(1-x)$는 $x \le 1$에서 음이 아니다. $x \ge 1$에서는 묶음 $x^4 - x^3 = x^3(x-1)$이 음이 아니고, 나머지 $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$은 완전제곱식(perfect square)이다. 따라서 자연스러운 경계는 $x = 1$이다.

경우 $x \le 1$. 다음과 같이 쓴다.

$$q(x) = \left(x^4 - x^3 + x^2\right) + 4(1-x) = x^2\left[\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right] + 4(1-x).$$

첫 번째 항은 ≥ 0이고 $x = 0$일 때만 0이다(대괄호 안은 적어도 $\frac{3}{4}$이다). 두 번째 항은 $x \le 1$이므로 ≥ 0이고, $x = 1$일 때만 0이다. 두 항이 동시에 0일 수는 없으므로 $q(x) > 0$이다.

경우 $x \ge 1$. 다음과 같이 쓴다.

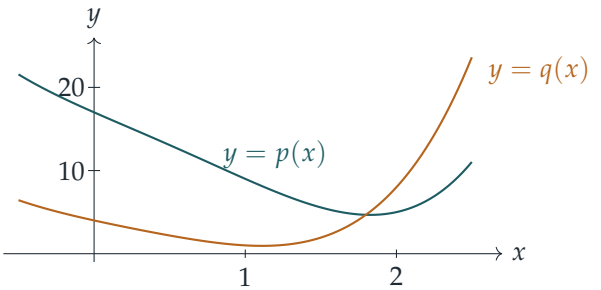
$$q(x) = x^3(x-1) + \left(x^2 - 4x + 4\right) = x^3(x-1) + (x-2)^2.$$

$x \ge 1$이면 x^3과 $x - 1$이 모두 음이 아니므로 첫 번째 항은 ≥ 0이고, $x = 1$에서만 0이다. 두 번째 항은 제곱이며 $x = 2$에서만 0이다. 이번에도 두 항이 동시에 0이 될 수 없으므로 $q(x) > 0$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $q(x) > 0$이고, $q(x) = 0$은 실근을 갖지 않는다.

검산

- 각 분해를 전개하여 정말로 p나 q가 되는지 확인한다. 예를 들어 $x^3(x-1) + (x-2)^2 = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$이다.
- $-5 \le x \le 8$을 10^{-4} 간격으로 수치 탐색하면 p의 최솟값은 약 4.67($x \approx 1.83$ 근처), q의 최솟값은 약 0.94($x \approx 1.11$ 근처)이다. 그림에서 보듯이 둘 다 넉넉하게 양수이다.



흔한 실수

- 주어진 두 식을 더하고 그 합이 $p(x)$라고 주장하는 것. x^2항이 맞지 않으므로 그렇지 않다.
- "음이 아닌 항 더하기 음이 아닌 항"으로부터 $q(x) > 0$이라고 결론짓는 것. 이로부터는 $q(x) \ge 0$만 얻는다. 근이 없음을 보이려면 두 항이 동시에 0이 될 수 없음을 보여야 한다.

- $-2x^3$이나 $-8x$의 부호가 항상 음이라고 생각하는 것. $x \leq 0$에서는 이 항들이 오히려 도움이 된다.

STEP 너머

다항식을 제곱의 합(sum of squares)으로 나타내어 양수임을 보이는 것은 본격적인 연구 주제이다. 일변수의 음이 아닌 다항식은 모두 두 실계수 다항식의 제곱의 합으로 나타낼 수 있지만, 힐베르트(Hilbert)는 다변수에서는 이것이 성립하지 않음을 보였고, 이는 그의 제17문제로 이어졌다. 오늘날에는 최적화(optimisation) 문제에서 컴퓨터가 이러한 분해를 찾는다. 이런 종류의 부등식 기법을 더 많이 접하고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)가 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP II 1990, 문제 2

순수수학 • 프톨레마이오스 정리

> **STEP II 1990, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q2

핵심 아이디어

첫 번째 부분은 사인의 곱을 모두 코사인의 차로 바꾸고 나면 저절로 풀리는 삼각항등식(trigonometric identity)이다. 그다음 조건 $A+B+C+D=\pi$를 이용해 $\cos(A+C)$와 $\cos(A-C)$를 다시 쓴다. 두 번째 부분은 프톨레마이오스의 정리(Ptolemy's theorem)이다. 중심 O가 힌트이다. 반지름이 r인 원의 모든 현(chord)은 길이가 $2r\sin$(현이 이루는 중심각의 절반, 중심O)이고, O 둘레의 네 반각을 더하면 π가 되는데, 이것이 바로 첫 번째 부분의 조건이다.

풀이

항등식

곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)

$$\sin X \sin Y = \tfrac{1}{2}\big[\cos(X-Y) - \cos(X+Y)\big]$$

을 세 번 사용한다. 좌변에서

$$\sin(A+B)\sin(A+D) = \tfrac{1}{2}\big[\cos(B-D) - \cos(2A+B+D)\big],$$
$$\sin B \sin D = \tfrac{1}{2}\big[\cos(B-D) - \cos(B+D)\big],$$

이므로 $\cos(B-D)$ 항이 소거되어

$$\sin(A+B)\sin(A+D) - \sin B \sin D = \tfrac{1}{2}\big[\cos(B+D) - \cos(2A+B+D)\big].$$

이다. 우변에서는

$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}\big[\cos(A-C) - \cos(A+C)\big].$$

이다. 이제 $C = \pi - A - B - D$를 이용한다. 그러면

$$A + C = \pi - (B + D), \qquad \text{따라서} \quad \cos(A + C) = -\cos(B + D),$$
$$A - C = (2A + B + D) - \pi, \qquad \text{따라서} \quad \cos(A - C) = -\cos(2A + B + D),$$

이다. 여기서 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$와 $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$를 사용했다. 그러므로

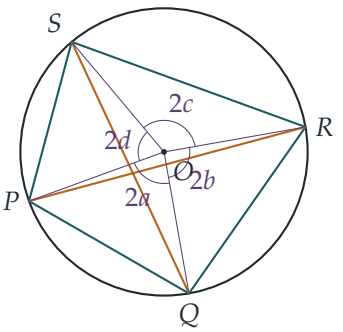
$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}\big[-\cos(2A + B + D) + \cos(B + D)\big],$$

이고, 이는 좌변과 같다. 이로써 항등식이 증명된다.

원

원의 반지름을 r라 하자. 원을 따라 P에서 Q, R, S를 거쳐 다시 P로 돌아올 때, 호 PQ, QR, RS, SP가 O에서 이루는 중심각을 각각 $2a$, $2b$, $2c$, $2d$라 하자. 점들이 이 순서로 놓여 있으므로 네 호는 서로 겹치지 않고 원 전체를 이룬다. 따라서

$$a, b, c, d > 0, \qquad 2a + 2b + 2c + 2d = 2\pi, \qquad \text{즉} \quad a + b + c + d = \pi.$$



? **생각해 보기** 호가 중심에서 이루는 각이 2θ인 현의 길이는 얼마인가?

$0 < 2\theta \le \pi$이면, O와 현의 두 끝점이 이루는 삼각형은 두 변의 길이가 r이고 꼭지각이 2θ인 이등변삼각형(isosceles triangle)이다. O에서 내린 수선은 현과 꼭지각을 모두 이등분하므로 현의 길이는 $2r\sin\theta$이다. 반면 $\pi < 2\theta < 2\pi$이면 삼각형 안에서 O의 각은 $2\pi - 2\theta$이고, 현의 길이는 $2r\sin(\pi - \theta) = 2r\sin\theta$이다. 따라서 어느 경우에나

$$\text{현의 길이} = 2r\sin\theta.$$

이를 네 변과 두 대각선(호 $P \to Q \to R$는 $2(a + b)$, 호 $Q \to R \to S$는 $2(b + c)$의 중심각을 이룬다)에 적용하면

$$PQ = 2r\sin a, \quad QR = 2r\sin b, \quad RS = 2r\sin c, \quad PS = 2r\sin d,$$

$$PR = 2r\sin(a+b), \qquad QS = 2r\sin(b+c).$$

을 얻는다. $a+b$나 $b+c$가 $\frac{\pi}{2}$보다 클 수 있다는 점에 주의하자. 반원보다 큰 호에 대한 공식이 필요했던 이유가 이것이다.

$4r^2$으로 나누면, 증명하려는 결과는

$$\sin a \sin c + \sin b \sin d = \sin(a+b)\sin(b+c),$$

또는 이와 동치인

$$\sin(b+a)\sin(b+c) - \sin a \sin c = \sin b \sin d.$$

가 된다. 이는 $A=b, B=a, D=c, C=d$로 둔 첫 번째 부분의 항등식과 정확히 같으며, $b+a+d+c=\pi$이므로 그렇게 둘 수 있다. 다시 $4r^2$을 곱하면

$$PQ \times RS + QR \times PS = PR \times QS,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

- 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 원에 내접하는 정사각형은 변의 길이가 1, 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$이다: $1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$.
- 변의 길이가 p, q인 임의의 직사각형에서 프톨레마이오스의 정리는 $p^2+q^2 =$ (대각선)^{2}이 된다. 즉 피타고라스(Pythagoras)의 정리는 그 특수한 경우이다. 3×4 직사각형에서는 $9+16=25=5\times 5$이다.
- A, B, D에 무작위 값 10^5개를 넣고($C=\pi-A-B-D$로 두고) 항등식을 수치적으로 확인했더니 최대 오차가 약 5×10^{-15}였고, 무작위로 만든 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral) 10^5개가 상대 오차 10^{-15} 이내에서 최종 결과를 만족했다. 점들의 순서를 바꾸면(예를 들어 원을 따라 P, R, Q, S 순서로 놓으면) 등식이 성립하지 않으므로, 순서가 정말로 중요하다.

흔한 실수

- 원 위의 한 점에서의 원주각(inscribed angle)을 쓰면서 그 각이 어느 호에 대한 것인지 밝히지 않는 것. 문제에서 권하는 대로 중심각을 사용하면 이 문제를 피할 수 있다.
- 대각선이 반원보다 큰 호를 잘라낼 수 있다는 사실을 잊는 것. 공식 $2r\sin\theta$는 여전히 성립하지만, 위에서 한 줄로 보인 정당화가 필요하다.
- A, B, C, D에 엉뚱한 각을 대응시키는 것. A와 C는 우변에만 나타나는 두 각, 여기서는 b와 d여야 한다.

STEP 너머

프톨레마이오스의 정리에는 훨씬 더 멀리 나아가는 후속 결과가 있다. 평면 위의 임의의 네 점에 대해 $PQ \cdot RS + QR \cdot PS \geq PR \cdot QS$가 성립하고, 등호는 네 점이 원(또는 직선) 위에 순서대로 놓일 때에만 성립한다. 깔끔한 증명은 점들을 복소수 p, q, r, s로 보고, 대수적 항등식 $(p-q)(r-s) + (q-r)(p-s) = (p-r)(q-s)$에 주목한 다음 삼각부등식(triangle inequality)을 적용하는 것이다. 등호가 성립하는 경우에서 복소평면의 기하가 등장한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이런 종류의 논증과, 이 결과를 깔끔하게 증명하는 또 다른 방법인 반전(inversion)을 만나기에 훌륭한 책이다.

풀이

STEP II 1990, 문제 3

순수수학 • 삼차함수의 그래프 그리기

STEP II 1990, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q3

핵심 아이디어

삼차함수(cubic)를 $f(x) = x(x^2 - 2bx + c^2)$로 쓴다. 두 판별식(discriminant)이 모든 것을 결정한다. $f'(x)$의 판별식은 극점(turning point)이 있는지를 알려 주고, 이차 인수의 판별식은 곡선이 원점이 아닌 다른 곳에서 x축과 만나는지를 알려 준다. 일곱 가지 경우는 두 경계값 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$와 c에 대하여 b를 어디에 놓느냐에 따른 경우일 뿐이다. 삼차함수의 그래프를 그리고 나면 $y^2 = f(x)$는 거의 저절로 얻어진다. $f(x) \geq 0$인 부분만 남기고, 제곱근을 취한 뒤 x축에 대하여 대칭이동하면 된다.

풀이

모든 경우에 성립하는 사실

$f(x) = x^3 - 2bx^2 + c^2x = x(x^2 - 2bx + c^2)$라 하자. 그러면

$$f'(x) = 3x^2 - 4bx + c^2, \qquad f''(x) = 6x - 4b.$$

이다.

- **극점.** f'의 판별식은 $16b^2 - 12c^2 = 4(4b^2 - 3c^2)$이다. 따라서 $2b > c\sqrt{3}$이면 f'은 서로 다른 두 실근을 갖고, $2b = c\sqrt{3}$이면 중근 하나를 가지며, $2b < c\sqrt{3}$이면 실근을 갖지 않는다. 근이 있을 때 두 근의 합은 $\frac{4}{3}b \geq 0$이고 곱은 $\frac{1}{3}c^2 \geq 0$이므로 어느 근도 음수가 아니다. 즉 모든 극점은 $x \geq 0$인 영역에 있다.
- **근.** 항상 $f(0) = 0$이다. 이차 인수는 $(x - b)^2 + c^2 - b^2$이므로, $b < c$이면 실근이 없고, $b = c$이면 중근(double root) $x = b$를 가지며, $b > c$이면 두 근 $b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$를 갖는다.
- **음수인 x.** $x < 0$이면 x^3, $-2bx^2$, c^2x가 모두 ≤ 0이고 $x^3 < 0$이므로 $f(x) < 0$이다. y축

왼쪽에 있는 곡선 전체가 x축 아래에 놓인다.

- **모양**. $x \to \pm\infty$일 때 $f(x) \to \pm\infty$이다. 원점에서의 기울기(gradient)는 $f'(0) = c^2$이다. 또 변곡점(point of inflection)은 f''의 부호가 바뀌는 $x = \frac{2}{3}b$에 있는 것 하나뿐이다.

$c > 0$이면 항상 $c\sqrt{3} < 2c$이므로, c를 고정하면 각 경우는 b가 커지는 순서대로 나열된다. 극점이 없는 경우, 기울기가 0인 변곡점(stationary point of inflection)이 있는 경우, 극점이 축 위에 있는 경우, 축에 접하는 근이 있는 경우, 세 근을 갖는 경우의 순서이다.

삼차함수의 그래프

(i) $2b < c\sqrt{3}$. 이때 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이므로(판별식이 음수이고 최고차항의 계수가 양수이다) f는 순증가한다. 또한 $b < \frac{\sqrt{3}}{2}c < c$이므로(여기서 $c > 0$임에 주의하라) 근은 원점뿐이다. 곡선은 기울기 c^2로 원점을 지나며 올라가고, $x = \frac{2}{3}b$에서 변곡점을 갖는다.

(ii) $2b = c\sqrt{3} \neq 0$. 이제 $f'(x) = 3(x - \frac{2}{3}b)^2 \geq 0$이므로 f는 여전히 증가하지만, $x = \frac{2}{3}b = c/\sqrt{3}$에서 순간적으로 기울기가 0이 된다. 이 점에서 $f'' = 0$이기도 하므로, 이 점은 기울기가 0인 변곡점이다. $c^2 = \frac{4}{3}b^2$를 이용하면

$$f\left(\tfrac{2}{3}b\right) = \tfrac{2}{3}b\left(\tfrac{4}{9}b^2 - \tfrac{4}{3}b^2 + \tfrac{4}{3}b^2\right) = \tfrac{8}{27}b^3 = \tfrac{\sqrt{3}}{9}c^3 > 0.$$

이다. 이번에도 $b < c$이므로 근은 원점뿐이다.

(iii) $c\sqrt{3} < 2b < 2c$. 이제 f'은 두 근 $x_1 < x_2$를 가지며 둘 다 양수이다. 따라서 $x_1 = \frac{1}{3}\left(2b - \sqrt{4b^2 - 3c^2}\right)$에서 극대, $x_2 = \frac{1}{3}\left(2b + \sqrt{4b^2 - 3c^2}\right)$에서 극소가 된다.

> **?** **생각해 보기** 극소점이 x축 아래로 내려가는가?

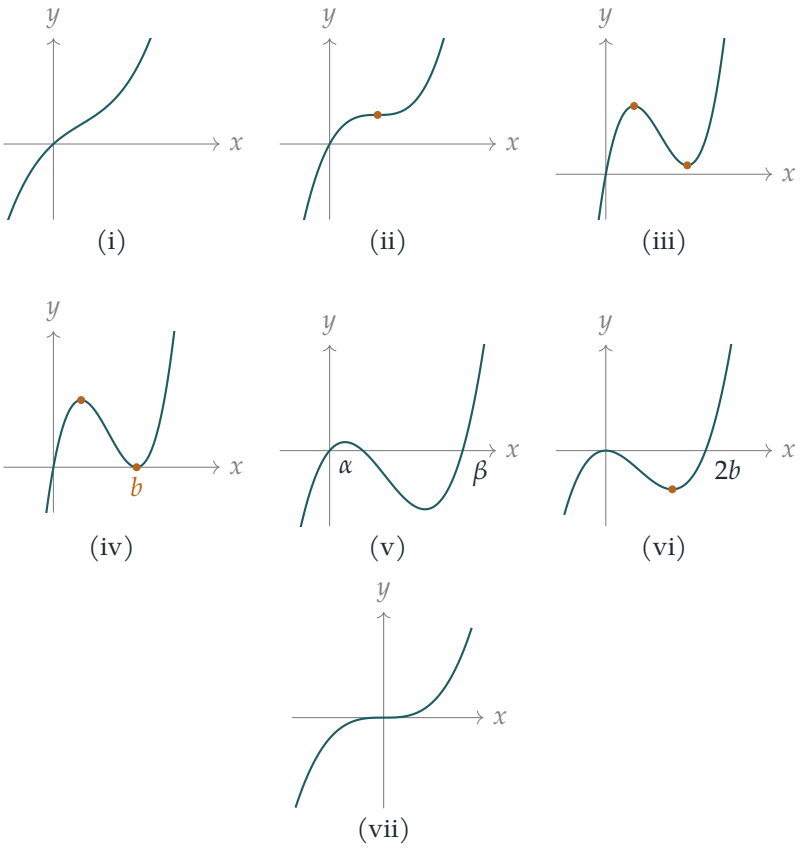
그렇지 않다. $b < c$이므로 인수 $(x - b)^2 + c^2 - b^2$는 모든 x에 대하여 양수이고, 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) > 0$이다. 그러므로 두 극점은 모두 축 위에 있고, 곡선은 여전히 원점에서만 축과 만난다. 곡선은 올라가다가 조금 내려온 뒤 다시 계속 올라간다.

(iv) $b = c \neq 0$. 이제 $f(x) = x(x - b)^2$이다. $x = b$가 중근이므로 곡선은 그 점에서 축에 접하며, 이 점 $(b, 0)$이 극소점이다. $f'(x) = (x - b)(3x - b)$의 나머지 근에서 극대점 $\left(\frac{1}{3}b, \frac{4}{27}b^3\right)$를 얻는다.

(v) $b > c > 0$. 세 근 $0 < \alpha < \beta$가 있으며, $\alpha = b - \sqrt{b^2 - c^2}$, $\beta = b + \sqrt{b^2 - c^2}$이다($\sqrt{b^2 - c^2} < b$이므로 둘 다 양수이다). 이웃한 두 근 사이에서 곡선은 방향을 바꾸어야 하므로, 극대점은 $(0, \alpha)$에 있고 그곳에서 $f > 0$이며, 극소점은 (α, β)에 있고 그곳에서 $f < 0$이다. 따라서 $f \geq 0$인 범위는 정확히 $[0, \alpha]$와 $[\beta, \infty)$이다.

(vi) $c = 0, b \neq 0$. 이제 $f(x) = x^2(x - 2b)$이고 $f'(x) = x(3x - 4b)$이다. 원점이 중근이므로 원점은 곡선이 축에 접하는 극대점이 되고, $\left(\frac{4}{3}b, -\frac{32}{27}b^3\right)$에 극소점이 있다. 곡선은 $x = 2b$에서 축을 가로지른다.

(vii) $b = c = 0$. 이것은 $y = x^3$이며, 원점에 기울기가 0인 변곡점이 있다.



그림은 (i)–(iv)에서 $c = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0.99, 1을, (v)에서 $(b, c) = (1, 0.8)$을, (vi)에서 $b = 0.6$을 사용하였다. (iii)과 (iv)의 작은 굴곡이 보이도록 그림마다 세로 축척을 다르게 하였다.

곡선 $y^2 = f(x)$

다음 세 규칙으로 각 삼차함수의 그래프를 곡선 $y^2 = f(x)$로 바꾼다.

- $f(x) < 0$인 곳에는 점이 없으며, 특히 $x < 0$인 점은 없다.
- $f(x) \geq 0$인 곳에서는 $y = \pm\sqrt{f(x)}$이므로, 곡선은 x축에 대하여 대칭이고 f가 가장 큰 곳에서 가장 높다.
- 미분하면 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$이다.

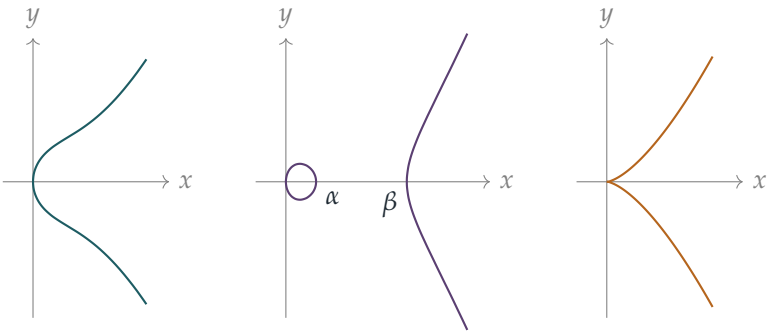
? **생각해 보기** 곡선이 x축과 만나는 곳에서 곡선은 어떤 모양인가?

f의 단순근(simple root) x_0에서는 $f'(x_0) \neq 0$이고, $y \to 0$일 때 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{2y}{f'(x)} \to 0$이다. 따라서 그곳에서 접선(tangent)은 **수직**이고, 위쪽 절반과 아래쪽 절반이 매끄럽게 이어진다. 이러한 근 근처에서는 $y^2 \approx f'(x_0)(x - x_0)$이며, 이는 옆으로 누운 포물선이다. 경우 (vii)에서 보듯이 중근에서는 다르게 행동한다.

경우 (i). $f(x) \geq 0$인 것은 정확히 $x \geq 0$일 때이고, 근 0은 단순근이다($f'(0) = c^2 > 0$). 따라서 곡선은 유계가 아닌 가지(branch) 하나로 이루어진다. 곡선은 수직 접선을 가지며 원점에서 출발하고, 그 근처에서 $y^2 \approx c^2 x$와 비슷하다. f가 증가하므로 $|y| = \sqrt{f(x)}$는 꾸준히 증가하며, 결국 $x^{3/2}$처럼 커진다. 위쪽 절반은 처음에는 $\sqrt{x}$처럼 위로 볼록하다가 나중에는 $x^{3/2}$처럼 아래로 볼록해지므로 변곡점을 하나 가진다(대칭에 의하여 아래쪽 절반도 마찬가지이다).

경우 (v). $[0, \alpha]$와 $[\beta, \infty)$에서 $f(x) \geq 0$이고, 세 근이 모두 단순근이다. 따라서 곡선은 서로 떨어진 두 조각으로 이루어진다. 하나는 $(0,0)$과 $(\alpha,0)$을 지나는 닫힌 고리(oval)로, 두 점 모두에서 수직 접선을 가지며 삼차함수의 극대점의 x좌표에서 (y 방향으로) 가장 넓다. 다른 하나는 $(\beta,0)$에서 수직 접선을 가지며 출발하여 경우 (i)의 곡선처럼 오른쪽으로 열리는, 유계가 아닌 가지이다. 삼차함수가 음수인 틈 $\alpha < x < \beta$에는 아무것도 없다.

경우 (vii). $y^2 = x^3$이므로 $x \geq 0$이고 $y = \pm x^{3/2}$이다. 여기서 $x \to 0$일 때 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm\frac{3}{2}x^{1/2} \to 0$이다. 즉 두 절반이 모두 위와 아래에서 **x축에 접하면서** 원점에 도달하여, 첨점(cusp)이라 불리는 뾰족한 점을 이룬다.



(i) (v) (vii)

이 그림들은 대응하는 삼차함수와 같은 b, c 값을 사용하였으며, 두 축의 축척은 같다.

검산

- 일반적인 결과에 $b = c = 0$을 대입하면 (vii)과 일치해야 한다. 예를 들어 (ii)의 정류값 $\frac{8}{27}b^3$과 (vi)의 극솟값 $-\frac{32}{27}b^3$은 모두 원점으로 줄어든다.
- $c = 1, b = 0.99$(경우 (iii))일 때 극점은 대략 $(0.340, 0.150)$과 $(0.980, 0.020)$이며, 주장한

대로 둘 다 축 위에 있다. $(b,c)=(1,0.8)$일 때 근은 $0, 0.4, 1.6$이고, 극솟값은 $x\approx 1.147$에서 약 -0.388로 $(0.4,1.6)$ 안에 있다.

- 경우 (i), (iii), (v)에서 무작위로 고른 수천 개의 (b,c)에 대한 수치 실험으로 극점과 근의 개수 및 위치, 그리고 $f\geq 0$인 집합을 확인하였다.

흔한 실수

- 경우 (iii)에서 극소점을 축 아래에 그리는 것. $b<c$이면 삼차함수는 모든 $x>0$에 대하여 양수이다.
- $y^2=f(x)$가 단순근에서 x축을 가로지르는 곳을 모서리나 수평 접선으로 그리는 것. 그 곳에서의 접선은 수직이다.
- 삼차함수가 음수인 곳에서는 $y^2=f(x)$의 점이 없다는 것을 잊는 것. 그래서 경우 (v)에서 닫힌 고리와 가지는 서로 떨어져 있다.

STEP 너머

삼차식이 서로 다른 근을 갖는 곡선 $y^2=x^3+Ax^2+Bx+C$를 **타원곡선**(elliptic curve)이라 하며, 이는 현대 정수론(number theory)의 핵심 대상 중 하나이다. 세 실근을 갖는 경우 (v)는 닫힌 고리와 가지로 이루어진 두 조각의 그림을 주고, 실근이 하나인 경우 (i)은 한 조각을 준다. 근이 겹치면 곡선은 특이(singular)해진다. 경우 (vii)은 첨점을 가지며, 경우 (iv)는 $(b,0)$에서 자기 자신과 교차하는 곡선을 준다. 이러한 곡선 위의 점들을 "더하는" 놀라운 방법에 대한 입문으로는 Silverman과 Tate의 *Rational Points on Elliptic Curves*(타원곡선 위의 유리점)를 보라.

풀이

STEP II 1990, 문제 4

순수수학 • 직선의 배치와 수학적 귀납법

STEP II 1990, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.1 절 **평면을 자르는 직선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/lazy-caterer.html

핵심 아이디어

그림을 직선 하나씩 차례로 살펴본다. 새 직선을 하나 추가하면, 이 직선은 기존의 모든 직선과 서로 다른 점에서 정확히 한 번씩 만나므로, 예측 가능한 개수의 조각으로 잘린다. 이 조각 하나하나는 두 가지 역할을 한다. 새로운 선분이 되는 동시에, 기존의 영역 하나를 둘로 나눈다. 새 직선 하나가 미치는 효과를 세면 점화식(recurrence)을 얻고, 이 점화식은 쉽게 합을 구할 수 있다.

풀이

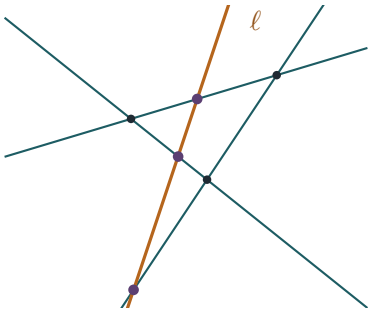
작은 경우

여기서 "선분(segment)"이란 한 직선 위에서 이웃한 두 교점 사이의 조각을 뜻하며, 각 직선 양 끝의 무한히 뻗는 두 조각(반직선(ray))도 포함한다. 또 직선이 하나뿐일 때는 직선 전체를 선분 하나로 센다. 처음 몇 가지 경우를 그려 보면 다음과 같다.

n	1	2	3	4
선분	1	4	9	16
영역	2	4	7	11

예를 들어 직선 세 개는 삼각형을 이룬다. 각 직선은 유한한 변 하나와 반직선 두 개로 잘리므로 선분은 9개이고, 영역(region)은 삼각형 자신, 삼각형의 변에 맞닿은 영역 세 개, 꼭짓

점에 맞닿은 영역 세 개로 모두 7개이다. 선분의 개수를 보면 n^2임을 짐작할 수 있다.



그림은 직선 세 개(청록색)와 네 번째 직선 ℓ(호박색)을 보여 준다. ℓ이 기존 직선들과 만나는 자주색 점 세 개가 ℓ을 네 조각으로 자르고, 각 조각이 기존의 일곱 영역 중 하나를 나누어 영역은 11개가 된다.

선분의 개수

n개의 직선 중 하나를 고정한다. 어떤 두 직선도 평행(parallel)하지 않으므로 이 직선은 나머지 $n-1$개의 직선과 각각 만나고, 어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 않으므로(공점(concurrent)이 아니므로) 이 $n-1$개의 교점은 모두 서로 다르다(두 교점이 일치한다면 그 점에서 세 직선이 만나게 된다). 따라서 이 직선 위에는 서로 다른 $n-1$개의 점이 있고, 이 점들이 직선을 n개의 조각, 즉 유한한 선분 $n-2$개와 반직선 2개로 자른다. 이를 n개의 직선 각각에 대해 하면

$$\text{선분의 개수} = n \cdot n = n^2.$$

각 선분은 정확히 한 직선 위에 있으므로 한 번씩만 세어진다.

수학적 귀납법(induction)을 선호한다면, 선분의 개수를 $S(n)$이라 하자. 일반 위치(general position)에 있는 $n-1$개의 직선에 n번째 직선을 추가하면, 새 직선은 n개의 조각으로 잘리고, 새 직선과 만나는 기존 직선 $n-1$개는 각각 선분 하나가 둘로 나뉘어 선분이 하나씩 늘어난다. 따라서

$$S(n) = S(n-1) + n + (n-1) = S(n-1) + 2n - 1,$$

이고, $S(1) = 1$이므로 $S(n-1) = (n-1)^2$이면 $S(n) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$이다.

영역의 개수

일반 위치에 있는 n개의 직선이 만드는 영역의 개수를 $R(n)$이라 하면 $R(1) = 2$이다. 그러한 직선 $n-1$개에서 시작하여 n번째 직선 ℓ을 추가한다. 앞에서와 같이 ℓ은 기존 직선들과 서로 다른 $n-1$개의 점에서 만나고 n개의 조각으로 잘린다.

이 조각 중 하나를 택하자. 그 내부는 어떤 기존 직선과도 만나지 않으므로 기존 영역 하나 안에 놓이고, 그 영역을 경계에서 경계까지(또는 무한히 먼 곳까지) 완전히 가로지른다. 따라서 그 영역을 둘로 나눈다.

> **생각해 보기** n개의 조각 중 두 개가 같은 기존 영역 안에 놓여서, 새로 생기는 영역이 n개보다 적어질 수 있을까?

그렇지 않다. 각 영역은 반평면(half-plane)들(각 기존 직선에 대해 정해진 한쪽)의 교집합이므로 볼록(convex)하다. 직선과 볼록 집합의 교집합은 하나의 구간이므로 ℓ은 각 기존 영역을 많아야 한 번 지나가고, 서로 다른 조각은 서로 다른 영역에 놓인다. 또한 ℓ이 지나가지 않는 영역은 그대로 남는다.

그러므로 ℓ을 추가하면 기존 영역 중 정확히 n개가 각각 둘로 나뉘고 나머지는 그대로이다.

$$R(n) = R(n-1) + n.$$

이제 수학적 귀납법을 쓴다. 식 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$은 $n = 1$일 때 2이므로 옳다. $R(n-1) = \frac{1}{2}\big((n-1)^2+(n-1)+2\big) = \frac{1}{2}(n^2-n+2)$이면

$$R(n) = \tfrac{1}{2}(n^2-n+2) + n = \tfrac{1}{2}(n^2+n+2),$$

이므로, 요구한 대로 이 식은 모든 $n \geq 1$에 대해 성립한다. (같은 말로, $R(n) = 1 + (1+2+\cdots+n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$이고, 맨 앞의 1은 직선이 하나도 없을 때의 평면 전체이다.)

검산

- 이 식은 $n = 1, 2, 3, 4$일 때 $2, 4, 7, 11$을 주어 그림과 일치한다.
- 오일러(Euler) 공식(Euler's formula)으로 독립적인 검산을 할 수 있다. 무한히 뻗는 반직선들을 하나의 "무한원점"에서 모이게 한다. 그러면 꼭짓점은 $V = \binom{n}{2} + 1$개, 변은 $E = n^2$개, 면은 F개이고 $V - E + F = 2$이므로 $F = n^2 - \binom{n}{2} + 1 = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$이다.
- 컴퓨터로 정수 계수를 갖는 직선을 최대 8개까지 무작위로 그리고, 교점의 위치를 구해 선분을 세었으며, 모든 교점 주변과 멀리 떨어진 곳의 표본점들에서 나타나는 "각 직선의 어느 쪽인가"의 서로 다른 패턴의 개수로 영역을 세었다. 예를 들어 직선 8개는 매번 선분 64개와 영역 37개를 주었다.

흔한 실수

- 각 직선 위의 무한한 반직선 두 개를 빠뜨려서 n^2 대신 $n(n-2)$를 얻는 것.
- 새 직선이 늘리는 영역이 n개(조각마다 하나)가 아니라 $n-1$개(교점마다 하나)라고 하는 것.

- 가정을 사용하지 않는 것: "어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 않는다"는 조건이 없으면 한 직선 위의 교점들이 서로 다르지 않을 수 있고, 개수가 줄어든다.

STEP 너머

이것은 **초평면 배치**(*hyperplane arrangement*)의 가장 단순한 경우이다. 같은 논증을 한 차원 높여 적용하면, 일반 위치에 있는 평면 n개는 공간을 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$개의 조각으로 나눈다는 것을 보일 수 있다. 새 평면 하나가 기존 평면들에 의해 그 자체로 $R(n-1)$개의 영역으로 잘리기 때문이다. 오일러 공식을 이용한 검산은 위상수학(topology)의 핵심 개념인 오일러 지표(Euler characteristic)를 처음 엿보는 것이다. 오일러 공식과 그 쓰임새를 다룬 멋진 장을 보려면 Aigner와 Ziegler의 *Proofs from THE BOOK*(『하늘책의 증명』)을 참고하라.

풀이

STEP II 1990, 문제 5

순수수학 • 복소수와 원

STEP II 1990, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q5

핵심 아이디어

원 $|z| = r$ 위에서 켤레(conjugation)는 나눗셈이 된다: $\bar{z} = r^2/z$. 이 덕분에 "이 비가 순허수(purely imaginary)이다"라는 조건(두 방향이 수직인지 판정하는 기준)이 $lm + pq = 0$이라는 깔끔한 다항식 조건으로 바뀐다. 그다음부터 문제의 나머지는 추적 과정이다. 수직인 현(chord) 하나하나가 $z \mapsto c/z$ 꼴의 공식으로 새로운 점을 주므로, 이 사상들을 합성하여 무엇이 나오는지 보기만 하면 된다.

풀이

수직 판정 기준

S의 반지름을 r라 하면 $|l| = |m| = |p| = |q| = r$이고, 따라서

$$\bar{l} = \frac{r^2}{l}, \qquad \bar{m} = \frac{r^2}{m}, \qquad \bar{p} = \frac{r^2}{p}, \qquad \bar{q} = \frac{r^2}{q}.$$

현 LM과 PQ의 방향은 각각 $l - m$과 $p - q$이며, 점들이 서로 다르므로 둘 다 0이 아니다. 0이 아닌 두 복소수가 서로 수직인 방향을 나타낼 필요충분조건은 그 몫이 순허수라는 것이므로,

$$w = \frac{l - m}{p - q}.$$

로 놓는다. 그러면 w가 순허수일 필요충분조건은 $w + \bar{w} = 0$이다. 이제

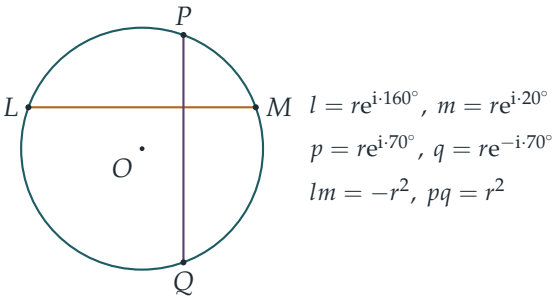
$$\bar{w} = \frac{r^2/l - r^2/m}{r^2/p - r^2/q} = \frac{(m - l)/(lm)}{(q - p)/(pq)} = \frac{l - m}{p - q} \cdot \frac{pq}{lm} = w\,\frac{pq}{lm},$$

이므로

$$w + \bar{w} = w\left(1 + \frac{pq}{lm}\right) = \frac{w}{lm}\,(lm + pq).$$

$w \neq 0$이고 $lm \neq 0$이므로, 이 값이 0이 될 필요충분조건은 $lm + pq = 0$이다. 따라서 요구한 대로 $LM \perp PQ$일 필요충분조건은 $lm + pq = 0$이다.

(수직이등분선(perpendicular bisector)을 이용하는 방법도 같은 아이디어에 기하학의 옷을 입힌 것이다. 현 LM의 수직이등분선은 O를 지나고, 현의 방향은 그 수직이등분선 방향의 i배이다.)



세 점

A_1, A_2, A_3을 a_1, a_2, a_3으로, A_1'을 z로 나타내자. 판정 기준에 따르면 "$A_1'A_2' \perp A_1A_2$"는 $z\,a_2' = -a_1a_2$를 뜻하므로

$$a_2' = -\frac{a_1a_2}{z}.$$

$|a_2'| = r \cdot r/r = r$이므로 이 점은 실제로 S 위에 있으며, 조건을 만족하는 S 위의 점은 이것뿐이다. 같은 방법으로

$$a_3' = -\frac{a_2a_3}{a_2'} = \frac{a_3}{a_1}\,z,$$

$$a_1'' = -\frac{a_3a_1}{a_3'} = -\frac{a_1^2}{z}.$$

따라서 $A_1'' = A_1'$일 필요충분조건은 $z = -a_1^2/z$, 즉

$$z^2 = -a_1^2 \iff z = \pm \mathrm{i}\,a_1.$$

두 값 모두 절댓값(modulus)이 r이므로 S 위에 있고, $a_1 \neq 0$이므로 서로 다르다. 그러므로 A_1'의 위치는 정확히 두 곳이며, 이는 A_1을 O를 중심으로 $\pm 90^\circ$만큼 회전(rotation)시켜 얻는 점들이다.

생각해 보기 사상 $z \mapsto -a_1^2/z$는 원에 무엇을 하는가?

S 위에서는 $1/z = \bar{z}/r^2$이므로 $-a_1^2/z = -(a_1^2/r^2)\,\bar{z}$이고, 이는 켤레를 취한 뒤 회전하는 것, 곧 원을 한 지름에 대하여 반사(reflection)하는 것이다. 반사는 거울이 되는 지름의 양 끝점 두 개만을 고정하며, 그래서 해가 두 개인 것이다. 실제로 각 단계 $z \mapsto -a_ka_{k+1}/z$ 하나하나가 모두 이러한 반사이며, 이것으로 이후의 모든 내용이 설명된다.

네 점

마지막 단계에 a_4를 넣어 같은 추적을 계속하면

$$a_2' = -\frac{a_1 a_2}{z}, \qquad a_3' = \frac{a_3}{a_1} z,$$
$$a_4' = -\frac{a_3 a_4}{a_3'} = -\frac{a_1 a_4}{z}, \qquad a_1'' = -\frac{a_4 a_1}{a_4'} = z.$$

따라서 S 위에서 A_1'을 어떻게 잡든 $A_1'' = A_1'$이다.

n개의 점

k에 대한 수학적 귀납법(induction)으로, 추적하면

$$a_k' = \frac{a_k}{a_1} z \quad (k\text{가 홀수}), \qquad a_k' = -\frac{a_1 a_k}{z} \quad (k\text{가 짝수}),$$

를 얻는다. a_k'이 한 가지 꼴이면 $a_{k+1}' = -a_k a_{k+1}/a_k'$은 다른 꼴이 되기 때문이다. 마지막 단계는 $a_1'' = -a_n a_1 / a_n'$이다.

- n이 짝수이면 $a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{z}{-a_1 a_n} = z$이므로, 모든 A_1'에 대하여 A_1''은 A_1'과 일치한다.
- n이 홀수이면 $a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{a_1}{a_n z} = -\dfrac{a_1^2}{z}$이므로, $n = 3$일 때와 똑같이 A_1''이 A_1'과 일치하는 A_1'의 위치는 정확히 두 곳, 즉 $z = \pm \mathrm{i} a_1$이다.

말로 하면, 짝수 번의 반사는 회전이 되고 여기서는 그것이 항등변환(identity)으로 판명되며, 홀수 번의 반사는 반사가 되어 원 위에 고정점(fixed point)을 두 개 가진다.

검산

- 그림: $l = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 160^\circ}$, $m = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 20^\circ}$이면 현 LM은 수평이고, $p = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\cdot 70^\circ}$이면 현 PQ는 수직이다. 실제로 $lm = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -r^2 = -pq$이다.
- 수치적으로, 임의의 반지름을 가진 원 위의 임의의 점들과 3부터 9까지의 n에 대하여 수직인 현을 추적해 보면, 매 단계마다 S 위의 점이 다시 나왔고, n이 짝수일 때는 정확히 출발점으로 돌아왔으며, n이 홀수일 때는 원 둘레의 출발 위치 200 000개를 조사한 결과 고정점이 정확히 두 개, $\pm \mathrm{i} a_1$에서 발견되었다.

흔한 실수

- 수직 여부를 "w가 실수이다"로 판정하는 것. 평행한 현은 실수인 비를 주고, 수직인 현은 순허수인 비를 준다.

- $\bar{z} = r^2/z$가 $|z| = r$일 때만 성립한다는 것을 잊는 것. 네 점이 모두 O를 중심으로 하는 같은 원 위에 있다는 사실 덕분에 판정 기준이 이렇게 깔끔해진다.
- n개의 점의 경우에 답이 n의 홀짝성(parity)에 따라 달라진다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

원으로 제한한 사상 $z \mapsto c/z$는 반사이며, 반사를 합성하는 것은 등거리변환군(isometry group) 연구의 출발점이다. 원의 대칭은 직교군(orthogonal group) $O(2)$를 이루고, 이 군에서 두 반사를 합성하면 회전이 된다. $z \mapsto c/z$나 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ 같은 사상은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)으로, 복소해석학(complex analysis)과 기하학에서 핵심적인 역할을 한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 두 관점을 모두 아름답게 전개한다.

풀이

STEP II 1990, 문제 6

순수수학 • 정수 부등식과 분수

> **STEP II 1990, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q6

핵심 아이디어

모든 것은 정수에 관한 한 가지 사실에 기대고 있다. 정수 사이의 엄격한 부등식(strict inequality)은 1만큼 더 강하게 만들 수 있다. $a < b$이면 $b \geq a+1$이고, $d < c$이면 $d \leq c-1$이다. 이 사실 덕분에 (ii)는 한 줄짜리 어림이 된다. 이후의 소문항들은 교묘하게 고른 정수에 (ii)를 적용하는 것이다. 분수 부등식의 분모를 없앤 다음, 그렇게 얻은 정수 부등식을 다시 (ii)에 넣으면 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 모든 문자는 양의 정수를 나타낸다.

소문항 (i)

$b > a \geq 1$이고 b는 정수이므로 $b \geq 2$이다. 양변에 $c > 0$을 곱하면 $bc \geq 2c$를 얻는다.

$c > 1$이고 c는 정수이므로 $c \geq 2$이고, 따라서 $2c = c + c \geq c + 2$이다. 이를 합치면 $bc \geq 2c \geq 2 + c$이므로 원하는 결과가 나온다.

소문항 (ii)

부등식이 엄격하고 수들이 정수이므로 $b \geq a+1$이고 $d \leq c-1$이다. 첫 번째 부등식에서는 $c > 0$을, 두 번째 부등식에서는 $a > 0$을 이용하면

$$\begin{aligned} bc - ad &\geq (a+1)c - a(c-1) \\ &= ac + c - ac + a \\ &= a + c. \end{aligned}$$

따라서 $bc - ad \geq a + c$이고, 등호는 정확히 $b = a+1$이고 $d = c-1$일 때 성립한다.

(이것은 (i)에서 쓴 것과 같은 "1만큼 강하게 만들기" 기법이며, (i)은 몸풀기 문제이다. 이후에는 (i)이 다시 필요하지 않다.)

소문항 (iii)

$b, d > 0$을 이용하여 두 부등식의 분모를 없애면

$$\frac{a}{b} < p \iff a < bp, \qquad p < \frac{c}{d} \iff dp < c.$$

이제 b를 bp로, d를 dp로 바꾸어 (ii)를 적용한다(둘 다 양의 정수이다). 가정 $a < bp$와 $dp < c$는 정확히 우리가 가진 것이므로

$$(bp)c - a(dp) \geq a + c, \qquad \text{즉,} \qquad (bc - ad)p \geq a + c.$$

소문항 (iv)

분모(모두 양수이다)를 없애면 두 개의 정수 부등식을 얻는다.

$$aq < bp \qquad \text{그리고} \qquad dp < cq.$$

또한 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$이므로 $ad < bc$이고, $bc - ad$는 **양의** 정수이다. 따라서 부등호의 방향을 바꾸지 않고 이 수로 나눌 수 있다.

> **생각해 보기** (ii)에서 a, b, c, d의 역할을 어떤 네 수가 맡아야 할까?

우리에게는 엄격한 부등식이 두 개 있고, (ii)에 필요한 것도 정확히 두 개, 즉 "첫째 $<$ 둘째"와 "넷째 $<$ 셋째"이다. 이 둘을 짝짓는 자연스러운 방법이 두 가지 있으며, 각각에서 한 계가 하나씩 나온다.

p에 대한 한계. $aq < bp$를 "$a < b$" 부등식으로, $dp < cq$를 "$d < c$" 부등식으로 삼는다. (ii)를 aq, bp, cq, dp에 적용하면

$$(bp)(cq) - (aq)(dp) \geq aq + cq, \qquad \text{따라서} \qquad pq(bc - ad) \geq q(a + c).$$

$q > 0$으로 나누고, 다시 $bc - ad > 0$으로 나누면

$$p \geq \frac{a+c}{bc-ad}.$$

q에 대한 한계. 이번에는 역할을 바꾼다. $dp < cq$를 "$a < b$" 부등식으로, $aq < bp$를 "$d < c$" 부등식으로 삼는다. (ii)를 dp, cq, bp, aq에 적용하면

$$(cq)(bp) - (dp)(aq) \geq dp + bp, \qquad \text{따라서} \qquad pq(bc-ad) \geq p(b+d).$$

$p > 0$과 $bc - ad > 0$으로 나누면

$$q \geq \frac{b+d}{bc-ad}.$$

두 한계가 모두 증명되었다. ((iii)은 첫 번째 한계에서 $q = 1$인 특수한 경우이다.)

$8/9$와 $9/10$ 사이의 분수

$a = 8, b = 9, c = 9, d = 10$으로 놓는다. 그러면

$$bc - ad = 81 - 80 = 1,$$

이므로 $8/9$와 $9/10$ 사이에 엄격하게 놓인 분수 p/q(p, q는 양의 정수이며, 기약분수이든 아니든 상관없다)는 모두

$$p \geq \frac{8+9}{1} = 17, \qquad q \geq \frac{9+10}{1} = 19.$$

를 만족한다. 따라서 분모가 20보다 작다면 정확히 $q = 19$이어야 한다. 그러면

$$\frac{8}{9} < \frac{p}{19} < \frac{9}{10} \iff \frac{152}{9} < p < \frac{171}{10} \iff 16.88\ldots < p < 17.1,$$

이어야 하므로 $p = 17$이다. 그리고 $8 \cdot 19 = 152 < 153 = 9 \cdot 17$이고 $17 \cdot 10 = 170 < 171 = 9 \cdot 19$이므로 $17/19$는 실제로 이 구간에 놓인다.

따라서 $8/9$와 $9/10$ 사이에 있으면서 분모가 20보다 작은 분수는

$$\frac{17}{19}.$$

뿐이다. 한계 $q \geq 19$는 기약분수뿐 아니라 분수를 나타내는 모든 방법에 적용되므로, $34/38$처럼 약분되지 않은 꼴이 더 작은 분모로 끼어들 수도 없다.

검산

- $17/19$는 **중간수**(mediant) $\frac{8+9}{9+10}$이며, (iv)의 두 한계가 모두 이 분수에서 달성된다. 이는 한계가 최선(sharp)이라는 좋은 신호이다.

- 소수로 나타내면 $8/9 \approx 0.8889$, $17/19 \approx 0.8947$, $9/10 = 0.9$이다.
- (i)과 (ii)는 29까지의 모든 값에 대해, (iii)과 (iv)는 약 60,000개의 무작위 경우에 대해 확인했으며, $8/9$와 $9/10$ 사이에서 $q \leq 19$인 모든 p/q를 전수 조사로 나열했다. 나타나는 것은 $17/19$뿐이다.

흔한 실수

- (iv)에서 $bc - ad$로 나누기 전에 $bc - ad > 0$임을 밝히지 않는 것.
- 마지막 소문항에서 p에 대한 한계만 사용하는 것. 이 한계는 q가 19까지 가능함을 허용하지만, 그것만으로는 더 작은 분모를 배제하지 못한다. 실제로 일을 하는 것은 q에 대한 한계이다.
- (iv)에서 (ii)로부터 한계를 하나만 얻는 것. 두 번째 한계를 얻으려면 두 부등식의 역할을 서로 바꿔야 한다.

STEP 너머

$bc - ad = 1$인 두 분수 $a/b < c/d$를 **페리 이웃**(Farey neighbours)이라 부르며, 이 문제는 이들에 관한 핵심 사실, 즉 둘 사이에서 분모가 가장 작은 분수는 그 중간수 $\frac{a+c}{b+d}$라는 사실을 증명한다. 중간수를 반복해서 끼워 넣으면 페리 수열(Farey sequence)과 스턴–브로코 트리(Stern–Brocot tree)가 만들어지는데, 이들은 모든 양의 유리수를 정확히 한 번씩 나열하며 연분수(continued fraction) 및 실수의 최良 유리 근사와 밀접하게 연결되어 있다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*은 연분수와 근사에 대해 읽기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP II 1990, 문제 7

순수수학 • 미분방정식

STEP II 1990, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q7

핵심 아이디어

지수함수 꼴의 시험해(trial solution)를 대입하면 지연 방정식(delay equation)이 p에 대한 보통의 방정식으로 바뀐다. 시간을 이동하는 것은 e^{pt}에 상수를 곱하는 것에 지나지 않기 때문이다. 방정식 $(*)$에는 p와 e^{-p}가 섞여 있어서 정확히 풀 수는 없지만, 양변에 e^{p}를 곱하면 p에 관한 부분이 모두 한쪽으로 모인다. 즉 근은 하나의 곡선 $y = (p+1)\mathrm{e}^{p}$가 수평선 $y = k$와 만나는 점이다. 따라서 근의 개수를 세는 문제는 곡선 하나를 그리는 문제로 귀결된다.

풀이

p에 대한 방정식

$A \neq 0$으로 두고 $\mathrm{f}(t) = A\mathrm{e}^{pt}$라 하자(영이 아닌 해를 원하기 때문이다). 그러면 $\mathrm{f}'(t) = pA\mathrm{e}^{pt}$이고 $\mathrm{f}(t-1) = A\mathrm{e}^{p(t-1)} = \mathrm{e}^{-p}\,A\mathrm{e}^{pt}$이므로, $(\dagger)$는 다음과 같이 된다.

$$A\mathrm{e}^{pt}\left(p + 1 - k\mathrm{e}^{-p}\right) = 0 \quad \text{모든} t.$$

$A \neq 0$이고 $\mathrm{e}^{pt} > 0$이므로, 이 식이 모든 t에 대하여 성립할 필요충분조건은

$$p + 1 = k\mathrm{e}^{-p},$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다. 따라서 이러한 해는 p가 $(*)$의 실근일 때, 그리고 그때에만 존재하며, 이때 A는 아무 값이어도 된다.

실근은 몇 개인가?

$(*)$의 양변에 $e^p > 0$을 곱하면 다음과 동치인 방정식을 얻는다.

$$g(p) = k, \qquad \text{여기서} g(p) = (p+1)e^p.$$

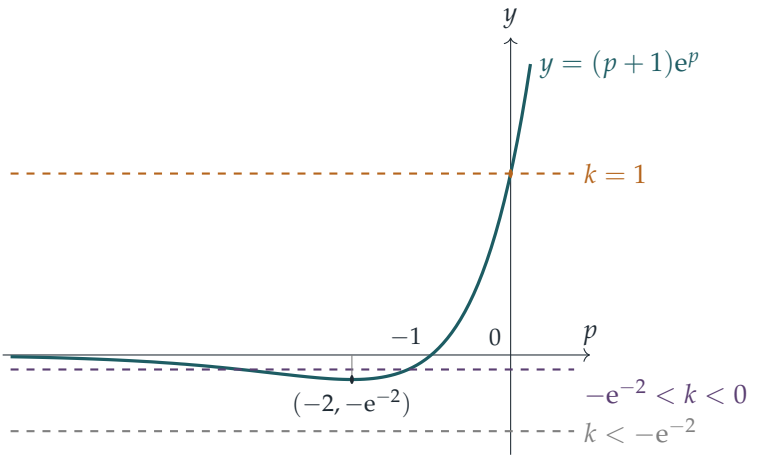
그러므로 곡선 $y = g(p)$와 수평선 $y = k$의 교점의 개수를 세면 된다.

> **생각해 보기** $y = (p+1)e^p$의 그래프는 어떤 모양인가? 어디에서 가장 작고, 양 끝에서는 어떻게 되는가?

미분하면 $g'(p) = e^p + (p+1)e^p = (p+2)e^p$이고, 이는 $p < -2$에서 음수, $p > -2$에서 양수이다. 따라서 g는 $(-\infty, -2]$에서 감소하고 $[-2, \infty)$에서 증가하며, 전역 최솟값(global minimum)은

$$g(-2) = -e^{-2}.$$

이다. 양 끝에서는 $p \to \infty$일 때 $g(p) \to \infty$이고, $p \to -\infty$일 때 $g(p) \to 0$이다(지수적 감쇠가 일차적 증가를 이긴다). $p < -1$에서는 인수 $p+1$이 음수이므로 g는 아래쪽에서 0에 다가간다. 곡선은 $p = -1$에서만 축과 만나고, $g(0) = 1$이다.



그림에서 읽어 내면 다음과 같다(앞에서 살펴본 단조성(monotonicity)이 이를 엄밀하게 뒷받침한다).

- $k > 0$: $(-\infty, -1]$에서는 $g \le 0 < k$이고, $(-1, \infty)$에서 g는 0에서 ∞까지 순증가하므로 근은 **정확히 하나**이며, 그 근은 $p > -1$을 만족한다.
- $-e^{-2} < k < 0$: $(-\infty, -2]$에서 g는 0에 가까운 값에서 $-e^{-2}$까지 순감소하므로 값 k를 한 번 갖는다. $[-2, -1]$에서는 $-e^{-2}$에서 0까지 순증가하므로 값 k를 한 번 더 갖는다. $p > -1$에서는 $g > 0 > k$이다. 따라서 근은 **두 개**이며, 하나는 $(-\infty, -2)$에, 다른 하나는 $(-2, -1)$에 있다.

- $k = -\mathrm{e}^{-2}$: 직선이 곡선의 최솟점에서 접하므로 근은 $p = -2$ **하나**뿐이다.
- $k < -\mathrm{e}^{-2}$: 직선이 곡선 전체보다 아래에 있으므로 근이 **없다**.

따라서 요구한 대로 $(*)$는 k에 따라 0개, 1개 또는 2개의 실근을 가지며, $A\mathrm{e}^{pt}$ 꼴의 해가 존재할 필요충분조건은

$$k \geq -\mathrm{e}^{-2}, \quad k \neq 0.$$

이다. (값 $k = 0$은 문제에서 제외되어 있다. 이 경우에는 근 $p = -1$ 하나만 나온다.)

해는 언제 감쇠하는가?

> **생각해 보기** 어떤 p에 대하여 $A\mathrm{e}^{pt} \to 0$이 되는가? 그리고 $(*)$를 풀지 않고 근이 0에 대해 어디에 있는지 어떻게 알아낼 수 있는가?

$A \neq 0$일 때, $t \to +\infty$에서 $A\mathrm{e}^{pt} \to 0$일 필요충분조건은 $p < 0$이다. 근을 명시적으로 구할 필요는 전혀 없고, 0에 대한 근의 위치만 알면 된다.

- $-\mathrm{e}^{-2} \leq k < 0$이면 모든 근이 $(-\infty, -1)$에 있다(실제로 $p \geq -1$에서 $g \geq 0$이므로, $g(p) = k < 0$이면 반드시 $p < -1$이다). 이러한 해는 모두 감쇠한다.
- $k > 0$이면 유일한 근은 g가 순증가하는 구간에 있으므로 $p < 0 \iff g(p) < g(0) \iff k < 1$이다. $k = 1$이면 근은 $p = 0$이고 상수해 $\mathrm{f} = A$가 나오는데, 이는 0으로 수렴하지 않는다. $k > 1$이면 근이 양수이므로 해는 커진다.

그러므로 $t \to +\infty$일 때 해가 0으로 수렴할 필요충분조건은

$$-\mathrm{e}^{-2} \leq k < 1, \quad k \neq 0.$$

이다.

검산

- $k = 1$: $p = 0$은 $0 + 1 = 1 \cdot \mathrm{e}^{0}$을 만족하고, $\mathrm{f} = A$는 분명히 $\mathrm{f}' + \mathrm{f} - \mathrm{f}(t-1) = 0$의 해이다. 마땅히 그래야 하듯이, 이것이 감쇠와 증가의 경계이다.
- $k = -\mathrm{e}^{-2} \approx -0.1353$: $p = -2$를 대입하면 $-1 = -\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{2}$이다. 수치적으로 $k = -0.13$이면 -2의 양쪽에 두 근 $p \approx -2.311$과 $p \approx -1.742$가 있고, $k = -0.14$이면 근이 없다.
- 물리적 의미: 되먹임(feedback)이 없으면$(k \to 0)$ 계는 $\mathrm{f}' = -\mathrm{f}$이고 감쇠율은 $p = -1$인데, 이는 $|k|$가 작을 때 근이 놓이는 위치와 같다. 강한 양의 되먹임$(k > 1)$은 감쇠 효과를 이겨 내고, 해는 커진다.

흔한 실수

- $y = p + 1$과 $y = ke^{-p}$를 그려 비교하다가, $k < 0$일 때 직선이 곡선과 두 번 만나거나 전혀 만나지 않을 수 있다는 점을 놓치는 것. 접할 조건은 $g(p) = (p+1)e^{p}$를 쓰면 더 쉽게 찾을 수 있다.
- 끝점 $k = -e^{-2}$를 빠뜨리는 것. 이때는 실제로 (중)근 $p = -2$가 있으므로 감쇠하는 해가 존재한다.
- 감쇠하는 경우에 $k = 1$을 포함하는 것. $p = 0$이면 감쇠하는 해가 아니라 상수해가 나온다.

STEP 너머

방정식 (†)는 **지연 미분방정식**(*delay differential equation*)이고, (∗)는 그 특성방정식(characteristic equation)이다. 보통의 선형 상미분방정식(ODE)과 달리 이 방정식은 무한히 많은 **복소근** p를 가지며, 일반해는 이 근 모두로부터 만들어진다. 따라서 완전한 안정성을 얻으려면 모든 복소근의 실수부가 음수여야 하며, 이는 제어 이론(control theory)에서 연구된다. $(p+1)e^{p} = k$의 실근은 람베르트 W 함수(Lambert W function)의 값으로 나타난다. 즉 $p + 1 = W(k)$이며, $-e^{-1}$(여기서는 $ke = -e^{-1}$)은 정확히 W의 분기점(branch point)이다. 선형 상미분방정식과 특성방정식에 대해서는 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 1990, 문제 8

순수수학 • 부분적분

STEP II 1990, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q8

핵심 아이디어

미분방정식(differential equation)의 각 항은 완전도함수(exact derivative)이거나 거의 그러하다. $t = 0$과 $t = 1$에서 y와 y'이 같은 값을 가지므로, 이러한 완전도함수를 적분하면 0이 된다. 각 관계식은 방정식에 적절한 함수를 곱한 다음, 모든 경계항(boundary term)이 사라질 때까지 부분적분(integration by parts)을 하여 얻는다. 경계항을 없애 주는 사실들을 목록으로 정리해 두자: $x(0) = 0$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$, 그리고 (증명한 뒤에는) $x(1) = 0$.

풀이

첫 번째 항등식

$x' = y$이므로 피적분함수 $xy = xx'$은 $\frac{1}{2}x^2$의 도함수이다. 따라서

$$\int_0^1 x(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}x(t)^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}[x(1)]^2,$$

이다. 여기서 $x(0) = \int_0^0 y(u)\,\mathrm{d}u = 0$임을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

$x(1) = 0$ 보이기

$(*)$의 가운데 항을 완전도함수로 쓰자:

$$(y^2 - 1)\,y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{3}y^3 - y\right).$$

이제 $(*)$를 0부터 1까지 항별로 적분한다:

$$\left[y'\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{3}y^3 - y\right]_0^1 + \int_0^1 y\,\mathrm{d}t = 0.$$

첫 번째 괄호는 $y'(1) - y'(0) = 0$이고, 두 번째 괄호는 $y(1) = y(0)$이므로 0이다. 남은 적분은 x의 정의에 의해 $x(1)$이다. 따라서 $x(1) = 0$이다.

관계식 $\int y^2 = \frac{1}{3}\int y^4$

$(*)$에 x를 곱하고 $[0,1]$에서 적분한다. 적분이 세 개 생기는데, 하나씩 차례로 다룬다.

마지막 항. 첫 번째 항등식과 $x(1) = 0$에 의해

$$\int_0^1 x\,y\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}[x(1)]^2 = 0.$$

y'' 항. x를 미분하는 쪽으로 하여 부분적분한다($x' = y$이다):

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,y''\,\mathrm{d}t &= \Big[x\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y\,y'\,\mathrm{d}t \\ &= x(1)y'(1) - x(0)y'(0) - \Big[\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0,\end{aligned}$$

이는 $x(1) = x(0) = 0$이고 $y(1) = y(0)$이기 때문이다.

> **생각해 보기** $x\,(y^2-1)\,y'$을 어떻게 부분적분해야 할까? 어느 인수를 적분해야 할까?

가운데 항. 이미 $\frac{1}{3}y^3 - y$의 도함수임을 알고 있는 인수 $(y^2-1)y'$을 적분하고, x를 미분한다:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,(y^2-1)\,y'\,\mathrm{d}t &= \Big[x\big(\tfrac{1}{3}y^3 - y\big)\Big]_0^1 - \int_0^1 y\big(\tfrac{1}{3}y^3 - y\big)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

x가 양 끝점에서 모두 0이므로 경계항은 사라진다.

세 부분을 더하면 0이 된다:

$$\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{즉,} \qquad \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\int_0^1 [y(t)]^4\,\mathrm{d}t,$$

이므로 구하는 결과를 얻는다.

관계식 $\int y'^2 = \int y^2$

> **생각해 보기** y'^2의 적분을 얻고 싶다. 어떤 함수를 곱하면 그것이 나올까?

$y\,y''$을 부분적분하면 $-\int y'^2$이 나오므로, 이번에는 $(*)$에 y를 곱하고 적분한다. 각 항을 차

례로 계산하면 다음과 같다:

$$\int_0^1 y\,y''\,\mathrm{d}t = \Big[y\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^1 (y^3 - y)\,y'\,\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0.$$

y와 y'이 모두 같은 값을 반복하므로 경계항 $y(1)y'(1) - y(0)y'(0)$은 0이다. 둘째 줄은 $y(1) = y(0)$이므로 0이 된다. 남는 것은

$$-\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{따라서} \qquad \int_0^1 [y'(t)]^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

검산

첫 번째 항등식은 임의의 y에 대해 성립한다. $y = \cos 3t + t^2 - 0.7e^t$로 두고 수치적분(quadrature)을 하면 $\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t \approx 0.338191$을 얻는데, 이는 $\frac{1}{2}x(1)^2$과 같다.

시간 1마다 반복되는 $(*)$의 자명하지 않은 해는 존재하지 않는다(아래 참고). 그러나 시간 T마다 반복되는 임의의 해에 대해서는 같은 논증이 $[0, T]$에서 그대로 성립한다. $(*)$를 수치적으로 적분하여 주기궤도(periodic orbit)에 도달시켰고, 그 주기는 $T \approx 6.6633$이다. 한 주기에 걸쳐 $\int y \approx 10^{-9}$, $\int y^2 \approx 13.72222$, $\frac{1}{3}\int y^4 \approx 13.72222$, $\int y'^2 \approx 13.72228$을 얻었으며, 이 값들은 스텝 크기에 따른 오차 범위 안에서 일치한다.

흔한 실수

- 세 번째 부분에서 $x(1) = 0$이 필요하다는 것을 잊는 경우. 이것이 없으면 $\int xy$도, 경계항도 사라지지 않는다.
- 가운데 항에서 $(y^2 - 1)y'$ 대신 x를 적분하는 경우. $x' = y$를 이용해야 적분이 y의 거듭제곱들로 정리된다.
- 경계항이 "$y(0) = 0$이므로" 0이라고 말하는 경우. 그런 조건은 주어지지 않았다. 경계항이 사라지는 것은 0과 1에서의 값이 서로 같기 때문이다.

STEP 너머

방정식 $(*)$는 반 데르 폴 진동자(van der Pol oscillator)로, 스스로 진동을 유지하는 전기 회로의 고전적인 모형이다. 이 방정식은 주기궤도를 단 하나 가지며, 여러분이 증명한 관계식들은 한 주기에 걸친 에너지 균형을 나타낸다. 이 관계식들은 또한 뜻밖의 사실을 드러낸다. $\int_0^1 y = 0$이므로, 푸리에 급수(Fourier series)에서 나오는 비르팅거(Wirtinger) 부등식(또는 푸앵카레(Poincaré) 부등식)에 의해 $\int_0^1 y'^2 \geq 4\pi^2 \int_0^1 y^2$이다. 이를 마지막 관계식과 함

께 쓰면 $y \equiv 0$일 수밖에 없다. 따라서 시간 1마다 반복되는 해는 자명해뿐인데, 실제 주기가 약 6.66이기 때문이다. 주기궤도와 극한순환(limit cycle)에 대해 더 알고 싶다면 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 1990, 문제 9

순수수학 • 극곡선과 곡선의 길이

STEP II 1990, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q9

핵심 아이디어

두 곡선 모두 r이 θ에 대한 식으로 주어져 있으므로, 반직선(ray)마다 비교한다. 원점에서 나가는 각 반직선 위에 포물선(parabola)의 점은 정확히 하나 있고, 그 점은 심장형(cardioid)의 안쪽에 있거나 바깥쪽에 있다. 이것으로 포물선이 심장형 안으로 들어가고 나오는 곳을 곧바로 알 수 있다. 길이를 구할 때 심장형은 극좌표(polar coordinates) 형태 그대로 두는 것이 가장 좋고(호의 길이(arc length) 피적분함수가 반각 공식(half-angle identity)으로 간단해진다), 포물선은 직교좌표(Cartesian coordinates) 형태로 다루는 편이 훨씬 쉽다.

풀이

두 곡선

포물선에서 $r + r\cos\theta = 1$은 $r = 1 - x$를 뜻한다. 양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 = (1-x)^2$이므로

$$y^2 = 1 - 2x.$$

이것은 초점(focus)이 원점이고 꼭짓점(vertex)이 $(\frac{1}{2}, 0)$이며 왼쪽으로 열린 포물선이다. 원점은 포물선의 오목한 쪽, 즉 $y^2 < 1 - 2x$인 쪽에 있다. 이쪽을 포물선의 안쪽이라 하자.

심장형 $r = 4(1 + \cos\theta)$는 원점에 첨점(cusp)이 있고($\theta = \pi$일 때), $\theta = 0$일 때 $x = 8$에 이른다.

두 곡선이 만나는 곳

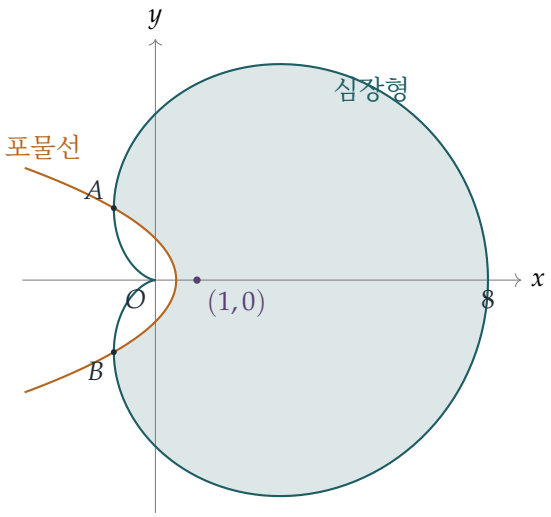
$-\pi < \theta < \pi$인 방향 θ를 하나 고정하면 $1+\cos\theta > 0$이다. 그 반직선 위에서 포물선은 거리 $1/(1+\cos\theta)$에 있고 심장형의 경계는 거리 $4(1+\cos\theta)$에 있으며, 심장형의 내부는 반직선에서 경계 앞쪽의 선분이다. 따라서 포물선의 점이 심장형 안에 있을 필요충분조건은

$$\frac{1}{1+\cos\theta} < 4(1+\cos\theta) \iff (1+\cos\theta)^2 > \tfrac{1}{4} \iff \cos\theta > -\tfrac{1}{2} \iff |\theta| < \tfrac{2\pi}{3},$$

이다. 여기서 양수 $1+\cos\theta$를 곱하고 양의 제곱근을 취했다. 등호는 $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$에서 성립하고 이때 $r = 2$이므로, 두 교점은

$$A = (-1, \sqrt{3}), \qquad B = (-1, -\sqrt{3}).$$

이다. 따라서 포물선은 B에서 꼭짓점 $(\frac{1}{2}, 0)$을 지나 A까지 끊어지지 않은 하나의 호를 따라 심장형 안에 있고, 그 밖의 모든 곳에서는 심장형 바깥에 있다. 이 하나의 호가 심장형 경계의 두 점을 잇므로, 심장형의 내부를 두 부분으로 나눈다. 하나는 포물선 안쪽 부분(원점을 포함하고, 첨점 근처의 심장형 작은 고리로 둘러싸인 부분)이고, 다른 하나는 포물선 바깥쪽 부분(심장형의 큰 바깥 호로 둘러싸인 부분)이다.



(그림에서 보이는 깔끔한 사실 하나: $x = 4(1+\cos\theta)\cos\theta = (2\cos\theta+1)^2 - 1 \geq -1$이므로, A와 B는 심장형에서 가장 왼쪽에 있는 점이기도 하다.)

경계의 길이

$r = 1, \theta = 0$인 점은 $(1,0)$이다. 이 점은 심장형 안에 있고$(1 < 8)$ 포물선 바깥에 있으므로$(0^2 > 1-2)$, 색칠한 부분에 속한다. 이 부분의 경계는 심장형의 호 $-\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$와 B에서 A까지의 포물선 호로 이루어진다.

심장형의 호. 극좌표에서 $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$이다. 여기서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -4\sin\theta$이므로

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = 16\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 32(1+\cos\theta) = 64\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

> **?** **생각해 보기** 그냥 $\sqrt{64\cos^2(\theta/2)} = 8\cos(\theta/2)$라고 써도 될까?

구간 전체에서 $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$이기 때문에만 그렇다. $|\theta| \leq \frac{2\pi}{3}$이면 $|\frac{\theta}{2}| \leq \frac{\pi}{3}$이다. x축에 대한 대칭(symmetry)을 이용하면

$$L_{\text{cardioid}} = 2\int_0^{2\pi/3} 8\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32\Big[\sin\tfrac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi/3} = 32\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}.$$

포물선의 호. y를 매개변수(parameter)로 쓴다. $x = \frac{1}{2}(1-y^2)$이므로 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = -y$이고 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$이며, y는 $-\sqrt{3}$에서 $\sqrt{3}$까지 움직인다. 대칭에 의해

$$L_{\text{parabola}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$y = \sinh u$, $\mathrm{d}y = \cosh u\,\mathrm{d}u$로 치환하면 피적분함수는 $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$가 되므로

$$\int \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sinh 2u = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}\right) + C.$$

$y = \sqrt{3}$에서 $\sqrt{1+y^2} = 2$이고 $\operatorname{arsinh}\sqrt{3} = \ln\left(\sqrt{3}+2\right)$이므로

$$L_{\text{parabola}} = \Big[\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}\Big]_0^{\sqrt{3}} = \ln(2+\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}.$$

전체. 더하면

$$L = 16\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 심장형 전체의 길이는 $\int_{-\pi}^{\pi} 8\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32$이고, 우리가 쓴 바깥 호 $16\sqrt{3} \approx 27.71$은 그 대부분을 차지한다. 이는 그림과 일치한다. 첨점 근처의 작은 고리의 길이는 $32 - 16\sqrt{3} \approx 4.29$이다.
- 포물선 호의 길이는 약 4.78로, B에서 꼭짓점 $(\frac{1}{2}, 0)$을 거쳐 A로 가는 두 선분의 길이의 합 $2\sqrt{1.5^2+3} \approx 4.58$보다 조금 길다. 당연히 그래야 한다.
- 두 곡선의 극좌표 호의 길이 피적분함수를 중점 규칙(midpoint rule)으로 수치 적분하면 합계가 32.49387이 나와, $18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) \approx 32.49387$과 일치한다.

흔한 실수

- 엉뚱한 부분을 택하는 실수: $(1,0)$은 포물선 바깥($\text{꼭짓점 } x=\frac{1}{2}$의 오른쪽)에 있으므로, 그 경계에는 첨점 근처의 고리가 아니라 심장형의 큰 바깥 호가 쓰인다.
- 심장형을 $8\cos\frac{\theta}{2}$로 0에서 2π까지 한 번에 적분하는 실수: 이 식은 $\theta>\pi$에서 음수가 된다. 피적분함수는 $8\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$이다.

STEP 너머

두 곡선은 모두 극(pole)에 초점이나 첨점을 둔 원뿔곡선(conic) 또는 리마송(limaçon)이며, $r=\ell/(1+e\cos\theta)$는 태양을 초점에 둔 궤도 역학(orbital mechanics)에서 원뿔곡선이 나타나는 형태이다. 호의 길이 공식 $\int\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta$는 매개곡선의 길이 $\int|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$의 특수한 경우이며, 이는 대학 1학년 벡터 미적분학(vector calculus)에서 곡률(curvature)과 선적분(line integral)으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원뿔곡선의 극좌표 형태를 이용해 케플러(Kepler)의 궤도를 유도한다.

풀이

STEP II 1990, 문제 10

순수수학 • 행렬 다항방정식

> **STEP II 1990, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q10

핵심 아이디어

행렬식(determinant)은 행렬의 곱을 보통의 수의 곱으로 바꾸어 주고, 실수의 곱은 인수 중 하나가 0일 때에만 0이 된다. 삼차식의 경우 $\mathbf{M}$은 $\mathbf{I}$와 교환 가능(commute)하므로, $\mathbf{M}$에 대한 행렬 다항식은 x에 대한 다항식과 똑같이 인수분해(factorise)된다. 여기에 상삼각행렬(upper triangular matrix)은 아주 다루기 좋다. 곱의 대각성분은 각 대각성분의 곱일 뿐이므로 대각선은 금방 처리되고, 실제로 계산이 필요한 것은 오른쪽 위 구석뿐이다.

풀이

$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$인 행렬

곱의 행렬식은 행렬식의 곱이므로

$$\det \mathbf{A} \, \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{0} = 0.$$

좌변은 두 실수의 곱이므로 둘 중 적어도 하나는 0이다. 즉 $\det \mathbf{A} = 0$이거나 $\det \mathbf{B} = 0$이거나 둘 다이다. 이것이 증명(proof)하려던 결과이다.

$\det \mathbf{B} \neq 0$이면 $\mathbf{B}^{-1}$이 존재하고, $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$의 양변 오른쪽에 $\mathbf{B}^{-1}$을 곱하면

$$\mathbf{A} = \mathbf{ABB}^{-1} = \mathbf{0}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}.$$

따라서 $\mathbf{A}$는 영행렬(zero matrix)이어야 한다.

그러나 두 행렬식이 모두 0이라는 것만으로는 충분하지 않다. 다음과 같이 잡아 보자.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

그러면 $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$이지만 $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$이다.

삼차식의 인수분해

먼저 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$을 인수분해한다. 6의 작은 약수들을 대입해 보면

$$f(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0,$$
$$f(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0,$$
$$f(-3) = -27 + 18 + 15 - 6 = 0,$$

이고, 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$이다.

이제 $(\mathbf{M} + p\mathbf{I})(\mathbf{M} + q\mathbf{I})(\mathbf{M} + r\mathbf{I})$를 전개하자. $\mathbf{I}$는 $\mathbf{M}$과 교환 가능하므로(그리고 $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$이므로) 전개 결과는 수의 경우와 완전히 같다.

$$\mathbf{M}^3 + (p+q+r)\mathbf{M}^2 + (pq+qr+rp)\mathbf{M} + pqr\,\mathbf{I}.$$

위의 다항식과 비교하면

$$p = 1, \qquad q = -2, \qquad r = 3$$

으로 잡을 수 있고(순서는 상관없다), 그러면 모든 정사각행렬 $\mathbf{M}$에 대하여 $\mathbf{M}^3 + 2\mathbf{M}^2 - 5\mathbf{M} - 6\mathbf{I} = (\mathbf{M} + \mathbf{I})(\mathbf{M} - 2\mathbf{I})(\mathbf{M} + 3\mathbf{I})$이다.

생각해 보기 이제 세 인수 중 하나는 영행렬이어야 한다고 말할 수 있을까?

그렇지 않다. 첫 번째 부분에서 보았듯이 행렬의 곱은 어느 인수도 영행렬이 아니면서 영행렬이 될 수 있다. 알 수 있는 것은 적어도 한 인수가 특이(singular)행렬이라는 것뿐이다. 따라서 직접 계산해야 한다.

상삼각행렬 해

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$라 하자. 각 인수는 오른쪽 위 성분이 똑같이 c인 상삼각행렬이다.

$$\mathbf{M} + k\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a+k & c \\ 0 & b+k \end{pmatrix}.$$

대각성분이 (d_i, e_i)이고 오른쪽 위 성분이 모두 c인 세 상삼각행렬을 곱하면

$$\begin{pmatrix} d_1 & c \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 & c \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_3 & c \\ 0 & e_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_1d_2d_3 & c\,(d_1d_2 + d_1e_3 + e_2e_3) \\ 0 & e_1e_2e_3 \end{pmatrix}.$$

$d_1, d_2, d_3 = a+1, a-2, a+3$, $e_1, e_2, e_3 = b+1, b-2, b+3$으로 놓으면 주어진 방정식은 다음 세 조건이 된다.

$$\begin{aligned}(a+1)(a-2)(a+3) &= 0,\\ (b+1)(b-2)(b+3) &= 0,\\ c\left[(a+1)(a-2)+(a+1)(b+3)+(b-2)(b+3)\right] &= 0.\end{aligned}$$

처음 두 조건은 $a, b \in \{-1, 2, -3\}$임을 뜻한다. 세 번째 조건의 괄호를 전개하면

$$(a^2-a-2)+(ab+3a+b+3)+(b^2+b-6) = a^2+ab+b^2+2(a+b)-5.$$

> **생각해 보기** 아홉 쌍을 모두 대입해 보는 것보다 이 괄호가 언제 0이 되는지 더 영리하게 알아내는 방법이 있을까?

있다. $a \neq b$이면 괄호는

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}+2\,\frac{a^2-b^2}{a-b}-5\,\frac{a-b}{a-b} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b},$$

이고, $f(a) = f(b) = 0$이므로 이 값은 0이다. 따라서 $a \neq b$일 때는 c가 무엇이든 세 번째 조건이 성립한다.

$a = b$이면 괄호는 $3a^2+4a-5 = f'(a)$이다. 이 값은 $a = -1, 2, -3$에서 각각 $-6, 15, 10$이므로(어느 것도 0이 아닌데, f가 서로 다른 세 근을 갖기 때문이다) 세 번째 조건에 의해 $c = 0$이어야 한다.

따라서 해는 다음과 같다.

- a와 b가 $\{-1, 2, -3\}$에서 고른 **서로 다른** 수이고 c가 **임의의** 실수인 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (여섯 개의 族, 즉 여섯 가지 꼴);
- 세 스칼라 행렬(scalar matrix) $-\mathbf{I}$, $2\mathbf{I}$, $-3\mathbf{I}$ ($a = b$인 경우로, 이때는 $c = 0$이어야 한다).

검산

$a = -1, b = 2, c = 5$로 잡자. 그러면 $\mathbf{M}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}-2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}+3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$이다. 처음 두 행렬의 곱이 이미 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로, 어떤 c에 대해서도 전체 곱은 영행렬이 된다. 한편 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$이면 $\mathbf{M}^3+2\mathbf{M}^2-5\mathbf{M}-6\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$이고, 이는 $f'(2) = 15$와 일치한다. 여러 유리수 a, b, c에 대한 컴퓨터 탐색으로 정확히 위의 해들만 찾아졌고, 인수분해는 무작위 3×3 정수 행렬로 확인하였다.

흔한 실수

- $(\mathbf{M}+\mathbf{I})(\mathbf{M}-2\mathbf{I})(\mathbf{M}+3\mathbf{I})=\mathbf{0}$으로부터 $\mathbf{M}$이 $-\mathbf{I}$, $2\mathbf{I}$, $-3\mathbf{I}$ 중 하나여야 한다고 결론 내리는 것. 첫 번째 부분은 바로 이 실수를 경고하기 위해 있는 것이다.
- $a=b$인 경우를 빠뜨리거나, 그 경우에도 c가 자유롭다고 가정하는 것.
- 첫 번째 부분의 예를 실수로 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$이 되도록 쓰는 것. 곱이 정말로 영행렬이 아닌지 확인하라.

STEP 너머

이 답은 **최소다항식**(minimal polynomial)을 처음 엿보는 것이다. 행렬이 서로 다른 근을 갖는 다항식을 만족할 필요충분조건은 그 행렬이 대각화 가능(diagonalisable)하고 고유값(eigenvalue)이 모두 그 근들 가운데 있는 것이다. $a\neq b$인 해는 모든 c에 대해 대각화 가능하지만, $c\neq 0$인 $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$는 그렇지 않으며, 이것이 해가 되지 못하는 이유이다. 구석에 나타나는 분할차분(divided difference) $\big(f(a)-f(b)\big)/(a-b)$가 $a=b$일 때 $f'(a)$가 되는 것은, 일반적으로 행렬의 함수를 정의하는 방식 그대로이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 고유값과 대각화를 명쾌하게 다룬다.

풀이

STEP II 1990, 문제 11

역학 • 각운동량 보존

STEP II 1990, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q11

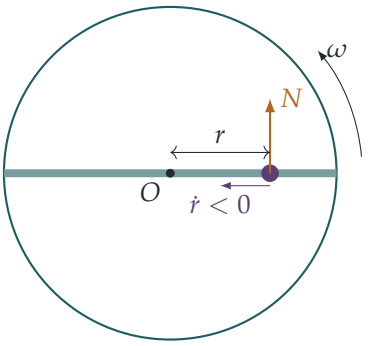
핵심 아이디어

원판과 입자를 하나의 계로 보면, 연직축에 대한 외부 토크(torque)가 없고 일을 하는 외력도 없으므로 두 가지 양이 보존된다. 바로 축에 대한 각운동량(angular momentum)과 운동 에너지(kinetic energy)이다. 이 두 식으로부터 ω와 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$를 곧바로 얻는다. 한 변화율을 다른 변화율로 나누면 시간이 소거되고, 경로, 즉 θ의 함수로서의 r에 대한 변수분리형 미분방정식(separable equation)이 남는다.

풀이

모형

입자를 매끄러운 홈 안에 있는 질점으로 보고, 축도 매끄럽다(마찰 없는 베어링)고 가정한다. 위에서 내려다보면, 홈을 따라 거리 r인 곳에 있는 입자는 홈 방향으로 속도 $\dot{r}$, 홈에 수직인 방향으로 속도 $r\omega$를 가진다. 여기서 $\omega = \dot{\theta}$이다.



입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 홈에 수직인 홈의 반작용 N뿐이다(홈이 매끄러우므로 홈 방향 성분은 없다). 원판은 $-N$을 받는다.

각운동량

중력과 연직 방향의 반작용은 축과 평행하고, 매끄러운 축은 토크를 가하지 않으므로 축에 대한 전체 각운동량은 일정하다. 원판의 기여는 $mk^2\omega$이고 입자의 기여는 $m\,r\cdot r\omega = mr^2\omega$이다. $t=0$일 때와 비교하면

$$mk^2\omega + mr^2\omega = mk^2\Omega + ma^2\Omega \quad\Longrightarrow\quad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2}.$$

에너지

> **생각해 보기** 반작용 N은 입자가 옆으로 움직이는 동안 입자를 옆으로 민다. 그렇다면 운동 에너지가 변하지 않는가?

입자의 운동 에너지는 변하지만 전체 운동 에너지는 변하지 않는다. N은 입자에 $N\cdot r\omega$의 비율로 일을 하고, 원판에 작용하는 크기가 같고 방향이 반대인 힘은 같은 거리 r에서 작용하므로 토크 $-Nr$를 가하여 $-Nr\omega$의 비율로 일을 한다. 이 둘이 상쇄되므로 전체 운동 에너지는 보존된다.

$$\tfrac{1}{2}mk^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\omega^2\right) = \tfrac{1}{2}mk^2\Omega^2 + \tfrac{1}{2}m\left(V^2 + a^2\Omega^2\right).$$

따라서

$$\dot r^2 = V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 - (k^2+r^2)\omega^2.$$

주어진 조건 $V^2 = \Omega^2a^2(k^2+a^2)/k^2$를 쓰면

$$V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)\,\frac{a^2+k^2}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2},$$

이고, 각운동량의 결과로부터 $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$이다. 그러므로

$$\dot r^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+r^2}\right) = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2\,r^2}{k^2(k^2+r^2)}.$$

입자가 축을 향해 움직이는 동안 $\dot r<0$이므로 음의 제곱근을 택한다($r>0$).

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}},$$

이것이 구하는 식이다.

경로

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t > 0$이므로 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}} \cdot \frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r(k^2+r^2)^{1/2}}{k},$$

즉 $k\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -r(k^2+r^2)^{1/2}$이다. Ω와 a가 사라졌다는 점에 주목하자.

이제 $u = 1/r$로 놓으면 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -u^{-2}\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta$이고 $r(k^2+r^2)^{1/2} = u^{-2}(1+k^2u^2)^{1/2}$이다($u > 0$이므로). 방정식은 다음과 같이 된다.

$$k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{1+k^2u^2}.$$

제곱근을 보면 쌍곡선 함수 치환(hyperbolic substitution)이 떠오른다. $ku = \sinh\phi$로 놓자. 그러면 $k\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta = \cosh\phi\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$이고 $\sqrt{1+\sinh^2\phi} = \cosh\phi$이므로

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \phi = \theta + \alpha.$$

$\theta = 0$일 때 $r = a$이므로 $\sinh\alpha = ku = k/a$이다. 따라서 $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$, 즉

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k, \qquad \sinh\alpha = \frac{k}{a}.$$

입자는 결코 축에 도달하지 않는다

> **생각해 보기** $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$는 $\theta \to \infty$일 때 0으로 간다. 원판이 유한한 시간 동안 무한한 각만큼 회전할 수 있을까?

그렇지 않다. $r^2 \geq 0$이므로 $\omega = \Omega(k^2+a^2)/(k^2+r^2) \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$이고, 따라서 시각 t까지 원판이 회전한 각은 많아야 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$로 유한하다. 유한한 θ에 대하여 $\sinh(\theta+\alpha)$는 유한하므로 $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$이다. 또한 모든 $r > 0$에 대하여 $\dot{r}$는 엄밀히 음수이므로 입자는 멈추었다가 되돌아가는 일이 없다. 따라서 위의 공식들은 모든 t에 대하여 성립하며, r는 0을 향해 감소하지만 결코 0에 도달하지 않는다.

(다른 방법으로, $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$에 대한 식에서 바로 보일 수도 있다. a에서 r까지 가는 데 걸리는 시간은 $\frac{k}{\Omega(k^2+a^2)}\int_r^a \frac{\sqrt{k^2+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$이고, $x = 0$ 근처에서 피적분함수는 k/x처럼 행동하므로 그 적분은 $r \to 0$일 때 로그적으로 발산한다.)

검산

- $t = 0$일 때 $r = a$이면 $\omega = \Omega$이고 $\dot{r} = -\Omega a\sqrt{k^2+a^2}/k = -V$이므로 초기 조건과 일치한다. 또 $\theta = 0$이면 $r = k/\sinh\alpha = a$이다.

- θ가 클 때 $r \approx 2ke^{-(\theta+\alpha)}$이다. 입자는 지수적으로 나선을 그리며 안쪽으로 들어가며, 결코 도달하지 않는다는 결과와 부합한다.
- 무작위로 고른 k, a, Ω에 대하여 운동 방정식($\ddot{r} = r\omega^2$, 각운동량 고정)을 수치적으로 단계별로 풀어 보면 $\dot{r}$, 에너지, $r\sinh(\theta+\alpha) = k$가 약 10^{-12}의 정확도로 재현된다. $k = a = \Omega = 1$일 때 $r = 10^{-8}$에 이르는 시간은 약 9.32이며, $\frac{1}{2}\ln(1/r)$처럼 증가한다.

흔한 실수

- 입자 혼자만의 에너지가 보존된다고 가정하는 것. 홈의 반작용이 입자에 일을 하므로 전체 에너지만 보존된다.
- 입자의 운동 에너지나 각운동량에서 가로 방향 속도 $r\omega$를 빠뜨리는 것.
- 시간이 유한할 때 θ가 유한하게 유지되는지 확인하지 않고, 유한한 θ에 대해 $r > 0$이라는 것만으로 입자가 축에 도달하지 않는다고 결론짓는 것.

STEP 너머

V에 대한 특별한 조건은 입자를 정확히 $r = 0$을 향해 영원히 조금씩 다가가는 궤적 위에 놓는다. 회전 좌표계(rotating frame)에서 $r = 0$은 불안정 평형점(unstable equilibrium)이고, 이 궤적은 그 평형점의 **안정 다양체**(*stable manifold*)이다. V가 조금이라도 더 크면 입자는 중심을 지나가고, 조금이라도 더 작으면 되돌아간다. 이와 같은 아이디어는 결합된 물체들에 대한 보존 법칙과 함께 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 나온다.

풀이

STEP II 1990, 문제 12

역학 • 반발 계수와 포물체 운동

STEP II 1990, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

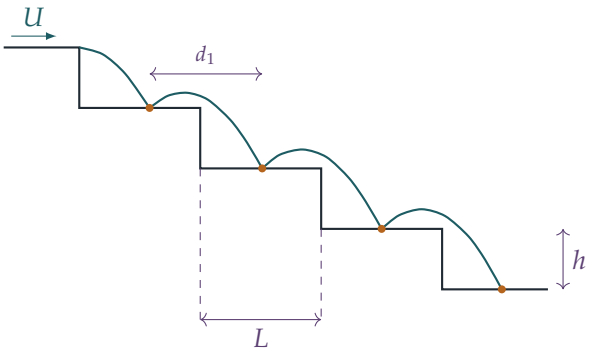
step.maths.org/questions/90-s2-q12

핵심 아이디어

계단이 매끄러우므로(smooth) 수평 속도는 결코 변하지 않는다. 수평 속도는 내내 U로 유지되고, 모든 수평 거리는 단순히 U에 비행 시간을 곱한 것이다. 모든 계산은 연직 운동에 있다. 연직 운동에서는 매번 튕길 때마다 연직 속력에 e가 곱해지고, 높이 h만큼 떨어질 때마다 그 제곱에 $2gh$가 더해진다. 이로부터 각 튕김에서의 연직 속력의 **제곱**에 대한 간단한 점화식(recurrence)을 얻는다. 마지막 부분에서는 튕김이 어디에 떨어져야 하는지 생각해 보라. 끝없이 이어지는 계단에서 계단 한 칸마다 한 번씩 떨어져야 한다.

풀이

입자는 튕김과 튕김 사이에 중력만 받으며 움직이는 점으로, 계단은 매끄러운 수평면으로 모형화한다. 각 계단은 바로 위 계단보다 높이 h만큼 낮고, 계단 모서리 사이의 수평 거리는 L이다.



튕김 사이의 거리

수평 운동. 계단이 매끄러우므로 계단이 가하는 충격량(impulse)은 모두 순수하게 연직 방향이고, 튕김과 튕김 사이에 작용하는 힘은 중력뿐이다. 따라서 수평 속도는 언제나 U이고, 시간 T 동안의 비행은 수평 거리 UT를 이동한다.

연직 운동. 입자가 n번째 튕김에서 계단에 부딪칠 때의 (아래 방향) 속력을 w_n이라 하자. 입자는 연직 속도 없이 맨 위 계단을 떠나 h만큼 떨어지므로

$$w_1^2 = 2gh.$$

n번째 튕김에서, 고정된 계단에 대한 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따라 입자는 속력 ew_n으로 위로 튀어 오른다. 그 뒤 입자는 h만큼 낮은 다음 계단에 도달해야 하므로, $v^2 = u^2 + 2as$에 의해 (아래 방향을 양으로 잡으면 변위는 $+h$이다)

$$w_{n+1}^2 = e^2 w_n^2 + 2gh.$$

$w_1^2 = 2gh$에서 시작하여 이 식을 거듭 적용하면

$$\begin{aligned} w_n^2 &= 2gh\left(1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)}\right) \\ &= 2gh\,\frac{1 - e^{2n}}{1 - e^2} = 2gh\,\alpha_n^2 \end{aligned}$$

이다. 여기서 등비급수(geometric series)의 합을 이용하였다($e^2 \neq 1$이므로 성립한다). 따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여 $w_n = \sqrt{2gh}\,\alpha_n$이다. 간단한 수학적 귀납법(induction)으로 이를 엄밀하게 보일 수 있다. $e^2 \cdot 2gh\,\alpha_n^2 + 2gh = 2gh\left(e^2\alpha_n^2 + 1\right)$이고 $e^2\alpha_n^2 + 1 = \dfrac{e^2 - e^{2n+2} + 1 - e^2}{1 - e^2} = \alpha_{n+1}^2$이기 때문이다.

? **생각해 보기** n번째 튕김에서 $(n+1)$번째 튕김까지의 비행 시간은 얼마인가?

연직 속도는 (아래 방향으로) 일정한 비율 g로 변한다. 처음에는 위로 ew_n이고 끝에는 아래로 w_{n+1}이므로, 전체 변화량은 $ew_n + w_{n+1}$이고 비행 시간은

$$T_n = \frac{ew_n + w_{n+1}}{g} = \frac{\sqrt{2gh}}{g}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right) = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right)$$

이다. (이렇게 하면 T_n에 대한 이차방정식을 풀지 않아도 된다. 나중 속력을 이미 알고 있기 때문이다.) 수평 속력 U를 곱하면

$$d_n = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right)$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

아주 긴 계단

$0 \le e < 1$이므로 $e^{2n} \to 0$이고, 따라서 $n \to \infty$일 때 $\alpha_n \to \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}$이다. 그러므로 $1-e^2 = (1-e)(1+e)$를 이용하면

$$d_n \to D = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}}$$

이다.

? **생각해 보기** 이 극한(limit) 거리가 왜 정확히 L이어야 하는가?

맨 위 계단의 모서리에서부터 수평으로 x를 잰다. 바로 아래 첫 번째 계단은 $0 \le x \le L$을 차지하고, 일반적으로 맨 위에서 n번째 아래 계단은 $(n-1)L \le x \le nL$을 차지한다. 입자는 모든 계단에서 한 번씩 튕기므로, n번째 튕김의 위치를 x_n이라 하면

$$(n-1)L \le x_n \le nL, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{x_n}{n} \to L \text{ 이다. 여기서} n \to \infty.$$

한편 $x_n = x_1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}$이고 $d_k \to D$이다. 만약 $D > L$이면 어느 시점부터는 모든 d_k가 L보다 적어도 일정한 양만큼 크므로, 입자는 튕길 때마다 계단 모서리보다 일정한 거리만큼 앞서 나가다가 결국 어떤 계단을 건너뛰게 된다. 만약 $D < L$이면 입자는 꾸준히 뒤처지다가 결국 같은 계단에 두 번 떨어지게 된다. (엄밀하게는, D로 수렴하는 항들의 평균 x_n/n은 D로 수렴한다.) 어느 경우든 충분히 긴 계단에서는 계단 한 칸마다 한 번씩 튕길 수 없다. 따라서 N이 매우 클 때에는 $D = L$이어야 한다.

$$U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} = L \quad \Longrightarrow \quad U = \left(\frac{L^2 g}{2h}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}}$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

검산

- **특수한 값.** $\alpha_1 = 1$이므로 $d_1 = U\sqrt{2h/g}\,(e + \sqrt{1+e^2})$이다. $e = 0$이면 입자는 튕길 때마다 연직 방향으로 완전히 멈추므로, 각 비행은 $\sqrt{2h/g}$의 시간이 걸리는 단순한 h만큼의 낙하이다. 실제로 $d_n = U\sqrt{2h/g}$이고, 마지막 조건은 $U\sqrt{2h/g} = L$이 되어 정확히 예상대로이다.
- **차원**(*dimensions*). $\sqrt{2h/g}$는 시간이므로 d_n은 길이이다. $\sqrt{L^2 g/h}$는 속력이다.
- **수치 계산.** U, h, e에 무작위 값을 넣고 ($g = 9.8$로 두고) 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보았더니, 각 d_n이 10^{-6} 이내의 오차로 재현되었다. $e = \frac{1}{2}$, $L = 0.3$, $h = 0.2$일 때 공식은 $U \approx 0.857$을 주며, 이때 튕김 위치는 2000개의 계단 동안 연속한 계단 위에 머물렀다.

흔한 실수

- 매번의 튕김을 정지 상태에서, 또는 직전 튕김의 높이에서 h만큼 떨어지는 것으로 보는 실수. 입자는 튕길 때마다 위로 솟아오르므로, 연직 속력은 계단을 거칠수록 커진다.
- $w_{n+1} = ew_n + \sqrt{2gh}$로 쓰는 실수. 더해지는 것은 속력 자체가 아니라 속력의 **제곱**이다.

STEP 너머

마지막 부분은 평균에 관한 명제이다. $d_n \to D$이면 누적 평균도 $\frac{1}{n}\sum d_k \to D$를 만족한다(체사로(Cesàro) 정리). 이는 실해석학(real analysis) 초반의 대표적인 연습문제이다. 또한 U에 대한 조건은 **필요조건**(necessary)일 뿐 충분조건(sufficient)이 아니라는 점에 주목하라. 초반의 튕김은 L보다 짧으며, e가 1에 가까우면 누적된 부족분이 처음의 앞선 거리 x_1을 넘어설 수 있어서, 어떤 발사 속력도 통하지 않는다. 수열의 극한을 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 충돌의 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문서)를 보라.

풀이

STEP II 1990, 문제 13

역학 • 막대의 평형

> **STEP II 1990, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q13

핵심 아이디어

못(peg)이 매끄럽고 줄이 가벼우므로 장력(tension)은 줄 전체에서 같고, 따라서 막대는 PO 방향과 QO 방향으로 크기가 **같은** 두 힘을 받는다. 이 두 힘의 합력(resultant)은 각 POQ를 이등분하며, 평형(equilibrium)을 이루려면 합력이 같은 연직선 위에서 무게와 균형을 이루어야 한다. 그러므로 O를 지나는 연직선은 POQ의 각의 이등분선이고 G를 지나며, 나머지는 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)가 해결해 준다. 그러면 구하는 부등식은 삼각형 OPQ가 진짜 삼각형이라는 사실을 말할 뿐이다.

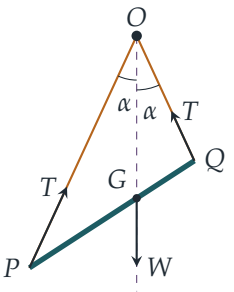
풀이

OP와 OQ 구하기

막대를 무게중심(centre of gravity)이 G인 강체 막대로 모형화하고, $PG = a + d$, $GQ = a - d$라 하자. $0 \leq d < a$로 잡으면 G는 막대 위에 있으며 중점에 대하여 Q 쪽에 있다(또는 중점과 일치한다). 줄은 가볍고 늘어나지 않으며 못은 작고 매끄러우므로, 장력 T는 두 부분 OP와 OQ에서 같고

$$OP + OQ = 2b.$$

막대에 작용하는 힘은 세 개뿐이다. G에 작용하는 무게 W, P에서 PO 방향으로 작용하는 장력 T, 그리고 Q에서 QO 방향으로 작용하는 장력 T이다.



두 장력의 작용선은 O에서 만나므로 (O에 대한 모멘트(moment)를 생각하면) 무게도 O를 지나며 작용해야 한다. 즉 O를 지나는 연직선은 G를 지난다. 또한 두 장력의 크기가 같으므로, 그 합력은 PO 방향 단위벡터와 QO 방향 단위벡터의 합의 방향, 곧 두 힘 사이의 각의 이등분선 방향을 향한다. 이 합력이 W와 균형을 이루려면 연직이어야 한다. 따라서 연직선 OG는 각 POQ를 이등분한다. 이등분된 각을 각각 α라 하자.

생각해 보기 OG가 각 POQ를 이등분한다는 사실로부터 길이에 대해 무엇을 알 수 있는가?

삼각형 OPQ에서 각의 이등분선 정리에 의해, O에서 그은 이등분선은 PQ를 이웃한 두 변의 비로 나눈다.

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{PG}{GQ} = \frac{a+d}{a-d}.$$

(직접 확인해 보자. 삼각형 OPG와 OQG는 O에서 내린 높이를 공유하므로 넓이의 비는 $PG : GQ$이다. 한편 두 삼각형의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}\,OP \cdot OG \sin\alpha$와 $\frac{1}{2}\,OQ \cdot OG \sin\alpha$이기도 하다.) 따라서 어떤 $k > 0$에 대하여 $OP = k(a+d)$, $OQ = k(a-d)$이고, $OP + OQ = 2b$에서 $2ka = 2b$, 즉 $k = b/a$이다.

$$OP = \frac{b(a+d)}{a}, \qquad OQ = \frac{b(a-d)}{a}.$$

부등식

$\theta = \angle POQ = 2\alpha$라 하자. 막대가 연직이 아니므로 O는 직선 PQ 위에 있지 않고, 따라서 OPQ는 진짜 삼각형이며 $0 < \theta < \pi$이다. $PQ = 2a$로 코사인 법칙(cosine rule)을 쓰면

$$\begin{aligned} 4a^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2\,OP \cdot OQ \cos\theta \\ &= \frac{b^2}{a^2}\Big[(a+d)^2 + (a-d)^2 - 2(a^2-d^2)\cos\theta\Big] \\ &= \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\cos\theta\Big]. \end{aligned}$$

이제 $\theta \neq 0$이므로 $\cos\theta < 1$이고, $d < a$이므로 $a^2 - d^2 > 0$이다. 따라서

$$4a^2 > \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\Big] = \frac{4b^2d^2}{a^2},$$

즉 $b^2d^2 < a^4$이다. ($b > 0, d \geq 0$이므로) 양의 제곱근을 취하면 $bd < a^2$이고, 따라서

$$d < \frac{a^2}{b},$$

이 되어 증명이 끝난다.

이것은 삼각형 부등식(triangle inequality) $OP - OQ < PQ$와 동치이다. 여기서 $OP - OQ = 2bd/a$이고, $2bd/a < 2a$는 같은 조건이다. (다른 쪽 부등식 $\cos\theta > -1$은 $OP + OQ > PQ$, 즉 $b > a$를 주는데, 이는 줄이 애초에 못에 걸칠 수 있을 만큼 길다는 뜻일 뿐이다.)

검산

- $d = 0$(균일한 막대)이면 $OP = OQ = b$이고, 대칭성에서 예상되듯이 막대는 수평으로 매달린다. 부등식 $0 < a^2/b$는 자동으로 성립한다.
- $d \to a^2/b$이면 $OP - OQ \to 2a = PQ$이므로 삼각형이 납작해지고 막대는 연직이 된다. 이 값을 넘어서면 연직으로 매달리는 방법밖에 없다.
- $a = 1, b = 2, d = 0.3$이면 $OP = 2.6, OQ = 1.4, \cos\theta \approx 0.648$이다. 이 삼각형을 OG가 연직이 되도록 놓으면, 두 장력의 수평 성분이 상쇄되고 O에 대한 모멘트가 기계 정밀도 수준에서 균형을 이룬다. 줄의 모든 위치를 조사해 본 결과, 이것이 연직이 아닌 유일한 평형이며 $d \geq a^2/b$이면 그러한 평형이 존재하지 않음을 확인하였다.

흔한 실수

- 줄의 두 부분에서 장력이 다르다고 가정하는 것. 매끄러운 못에 걸린 줄에서는 장력이 같으며, 바로 이 때문에 OG가 각의 이등분선이 된다.
- 각의 이등분선의 비를 거꾸로 쓰는 것. 더 긴 줄 OP는 G에서 더 먼 끝에 연결된다.
- 이 평형이 안정(stable)하리라고 기대하는 것. 사실 이 평형은 불안정하다. $d = 0$일 때 수평인 막대에서 G는 O보다 $\sqrt{b^2 - a^2}$만큼 아래에 있지만, 연직으로 매달리면 G는 b만큼 아래에 있어 더 낮다. 문제는 평형에 대해서만 묻고 있다.

STEP 너머

막대에 대한 O의 자취는 P와 Q를 초점(foci)으로 하는 타원(ellipse)이고, 평형 위치는 G의 높이가 정류값을 갖는 곳이다. 이것이 가상일의 원리(principle of virtual work)이며, 이는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 이어진다. 이 원리는 왜 크기가 같은 장력이 각을 이등분하는지도 설명해 준다. 그것은 바로 타원의 반사 성질(reflection property)이다.

Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 정역학(statics)과 안정성을 공부하기 위한 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP II 1990, 문제 14

역학 • 탄성 충돌

STEP II 1990, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q14

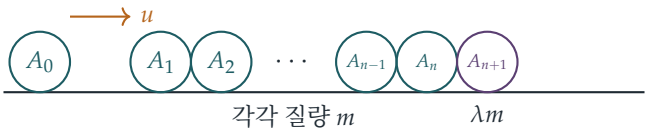
이 문제는 *Beyond STEP*의 10.1 절 **뉴턴의 요람**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/newtons-cradle.html

핵심 아이디어

충격량이 줄을 따라 어떻게 전달되는지 모르므로 충돌을 하나하나 추적할 수는 없다. 대신 제안된 각 최종 운동을 세 가지 조건으로 검사할 수 있다. 운동량(momentum)이 보존되고, 운동 에너지(kinetic energy)가 보존되며, 구슬들이 서로를 통과하지 않는다는 것이다. 세 번째 조건은 잊기 쉽지만 각 소문항의 답을 결정하는 것은 바로 이 조건이다. 바로 뒤에 정지한 구슬이 있는 구슬은 뒤로 움직일 수 없고, 어떤 구슬도 바로 앞에 있는 구슬보다 빠르게 움직일 수 없다.

풀이

구슬들을 매끄러운 직선(홈통) 위의 입자로 모형화하고, 속도는 A_0의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 하여 잰다. 충돌 전 전체 운동량은 mu이고 전체 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mu^2$이며, 둘 다 보존된다.



구슬들이 겹칠 수 없으므로, 가능한 모든 최종 운동에 대해 다음 두 가지 사실이 성립한다.

- A_k가 정지해 있고 A_{k+1}이 그 바로 앞에서 맞닿아 있으면, A_{k+1}의 속도는 음수일 수 없다.
- A_k와 A_{k+1}이 맞닿아 있으면, A_k의 속도는 A_{k+1}의 속도보다 클 수 없다.

소문항 (i)

A_n과 A_{n+1}만 각각 속도 v와 w로 움직인다고 하자. 양변을 m으로 나누면

$$v + \lambda w = u,$$
$$v^2 + \lambda w^2 = u^2.$$

$v = u - \lambda w$를 에너지 방정식에 대입하면

$$u^2 - 2\lambda uw + \lambda^2 w^2 + \lambda w^2 = u^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda w\big((1+\lambda)w - 2u\big) = 0.$$

근 $w = 0$에서는 $v = u$이다. 그러면 A_n이 정지한 A_{n+1} 쪽으로 앞으로 움직이게 되므로 불가능하다. 다른 근은

$$w = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad v = u - \lambda w = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda}.$$

$\lambda < 1$인 경우: $v > 0$이므로 A_n은 정지한 A_{n-1}에서 멀어진다. 또한

$$w - v = \frac{(1+\lambda)u}{1+\lambda} = u > 0,$$

이므로 A_{n+1}은 A_n에서 멀어진다. 두 보존 법칙이 모두 성립하고 겹치는 것도 없으므로, $A_0, \ldots, A_{n-1}$이 모두 정지한 이 운동은 가능하다.

$\lambda > 1$인 경우: $v < 0$이므로 A_n은 뒤로 움직여야 한다. 그런데 A_{n-1}이 바로 뒤에서 맞닿은 채 정지해 있다. 따라서 두 보존 법칙을 모두 만족하는 유일한 운동이 물리적으로 불가능하므로, $\lambda > 1$일 때 이런 종류의 운동은 존재하지 않는다.

소문항 (ii)

A_{n-1}, A_n, A_{n+1}만 각각 속도 a, b, c로 움직인다고 하자. $n \geq 3$이므로 구슬 A_{n-2}가 존재하고, 이 구슬은 정지한 채 뒤에서 A_{n-1}과 맞닿아 있다. 따라서 $a \geq 0$이다. 움직이는 세 구슬은 서로 추월할 수 없으므로 $a \leq b \leq c$이다. 그러므로 a, b, c는 모두 음이 아니다.

> **생각해 보기** 두 보존 법칙은 모두 a, b, c에 관한 방정식을 준다. 풀지 않고 이 둘을 어떻게 비교할 수 있을까?

운동량 방정식을 제곱한 뒤 에너지 방정식을 뺀다. 보존 법칙에서 $a + b + \lambda c = u$이고 $a^2 + b^2 + \lambda c^2 = u^2$이므로

$$(a + b + \lambda c)^2 - (a^2 + b^2 + \lambda c^2) = u^2 - u^2 = 0.$$

좌변을 전개하면

$$\lambda(\lambda-1)c^2+2ab+2\lambda c(a+b)=0.$$

$\lambda>1$이고 $a,b,c\geq 0$이면 좌변의 모든 항이 음이 아니므로, 모든 항이 0이어야 한다. 특히 $\lambda(\lambda-1)c^2=0$이므로 $c=0$이다. 그러면 $0\leq a\leq b\leq c=0$이므로 세 구슬이 모두 정지해 있다. $u>0$이므로 이는 운동량 방정식에 모순이다. 따라서 $\lambda>1$일 때 이러한 운동은 존재하지 않는다.

소문항 (iii)

(ii)의 논증은 움직이는 구슬들의 어떤 집합에도 적용된다. 모든 속도가 음이 아니고 A_{n+1}이 움직이면 운동 에너지가 너무 작다. 따라서 $\lambda>1$일 때는 어떤 구슬이 뒤로 움직여야 한다. A_0을 제외한 모든 구슬은 바로 뒤에 구슬이 있으므로, 되튀는 구슬의 자연스러운 후보는 A_0이다.

? **생각해 보기** 어떤 두 구슬을 시도해 보아야 할까?

A_0과 A_{n+1}이 각각 속도 p와 q로 움직이고 $A_1,\ldots,A_n$은 정지해 있다고 해 보자. 이는 v,w 대신 p,q를 쓴 것만 다를 뿐 (i)과 같은 두 방정식이고, 자명하지 않은 해는

$$p=\frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda}=-\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1},\qquad q=\frac{2u}{1+\lambda}.$$

(i)에서와 같이 운동량과 에너지가 보존된다. 또한 이 운동은 물리적으로 가능하다.

- $p<0$이므로 A_0은 뒤로 움직여 A_1에서 멀어지고, A_0 뒤에는 아무것도 없다.
- $q>0$이므로 A_{n+1}은 정지한 A_n에서 멀어진다.

따라서 가능한 운동 하나는 A_0이 속력 $\dfrac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$로 되튀고, A_{n+1}이 속력 $\dfrac{2u}{\lambda+1}$로 움직여 나가며, $A_1,\ldots,A_n$은 정지해 있는 것이다.

충돌을 이웃한 구슬 사이의 개별 충돌이 차례로 일어나는 것으로 모형화해도 바로 이 결과가 나온다. 같은 구슬끼리의 각 쌍은 속도를 서로 맞바꾸므로, 속력 u가 A_n까지 전달된다. A_n이 A_{n+1}과 충돌하면 속도 p로 되튀고, 이 뒤쪽 방향 속도가 다시 줄을 따라 A_0까지 전달된다.

검산

- $\lambda=1$이면 모든 구슬이 똑같고, 두 답 모두 A_{n+1}이 속력 u로 움직여 나가고 나머지는 모두 정지하는 것이 된다. 이것이 익숙한 "뉴턴의 요람(Newton's cradle)"이다.
- $\lambda=2$, $u=3$이면 소문항 (iii)에서 $p=-1$, $q=2$이다. 운동량: $-1+2\times 2=3$. 에너지: $1+2\times 4=9=3^2$.

- $n = 3$과 $n = 6$에 대해 두 구슬 사이의 탄성 충돌(elastic collision)이 차례로 일어나는 과정을 수치적으로 단계별로 계산해 보았다. $\lambda = 2$일 때 최종 속도는 $-\frac{1}{3}u$와 $\frac{2}{3}u$였고, $\lambda = 4$일 때는 $-0.6u$와 $0.4u$로, 예측과 정확히 일치했다. $\lambda = \frac{1}{2}$일 때 시뮬레이션은 A_n과 A_{n+1}이 $\frac{1}{3}u$와 $\frac{4}{3}u$로 움직이며 끝나서 (i)과 일치한다.

흔한 실수

- 두 보존 방정식을 풀고 거기서 멈추는 것. 각 소문항의 답은 그 해가 물리적으로 가능한지, 즉 속도의 부호와 구슬들이 서로를 통과하게 되는지에 달려 있다.
- (i)에서 근 $w = 0, v = u$를 남겨 두는 것. 그 근은 충돌 전의 운동을 나타낼 뿐이다.
- (ii)에서 A_{n-1} 뒤에 정지한 A_{n-2}가 있음을 보장하는 것이 $n \geq 3$이라는 조건임을 잊는 것.

STEP 너머

맞닿아 있는 구슬들의 줄에서는 두 보존 법칙만으로는 결과가 정해지지 않는다. 이 문제는 사실 보존량을 만족하는 수많은 해 가운데 어느 것이 물리적으로 가능한지에 관한 것이다. 이들 가운데 하나를 고르려면 두 구슬 사이의 충돌이 차례로 일어난다고 보거나 구슬들을 단단한 용수철로 다루는 등, 접촉에 대한 더 자세한 모형이 필요하다. 구슬들을 용수철로 모형화하면 입자 사슬에서의 파동 이론으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 충돌과 보존 법칙을 다룬다.

풀이

STEP II 1990, 문제 15

확률과 통계 • 순서통계량

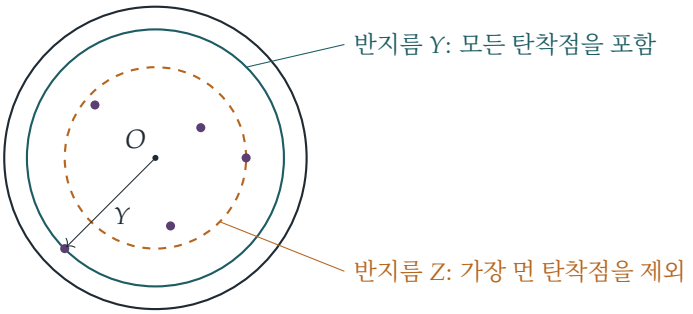
STEP II 1990, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q15

핵심 아이디어

탄착점들을 모두 둘러싸는 O 중심의 가장 작은 원의 반지름은 **가장 먼** 탄착점까지의 거리와 같으므로, Y는 서로 독립(independent)인 거리들의 최댓값이다. 최댓값이 y 이하인 것은 **모든** 탄착점이 거리 y 이내에 있을 때와 정확히 같으므로, 누적분포함수(cumulative distribution function)는 곱으로 바뀐다. 가장 먼 탄착점을 제외하고 나면 구하려는 반지름은 **두 번째로** 큰 거리이며, 그 분포함수는 주어진 원 바깥에 놓일 수 있는 탄착점이 몇 개인지를 세어서 얻는다.



풀이

n개의 탄착점이 O로부터 떨어진 거리를 $R_1, \ldots, R_n$이라 하자. 사격은 독립적으로 이루어지므로 이들은 서로 독립이고, 각각의 분포함수는 다음과 같다.

$$P(R_i \le t) = t^2, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Y의 분포

모든 탄착점을 포함하는 O 중심의 가장 작은 원의 반지름은 $Y = \max(R_1, \ldots, R_n)$이다. $0 \le y \le 1$에 대하여

$$P(Y \le y) = P(R_1 \le y, \ldots, R_n \le y) = \prod_{i=1}^{n} P(R_i \le y) = (y^2)^n = y^{2n},$$

이며, 가운데 단계에서 독립성을 이용하였다. 이를 미분하면 Y의 확률밀도함수(probability density function)는

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} y^{2n} = 2ny^{2n-1}, \qquad 0 \le y \le 1,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($[0,1]$ 바깥에서는 0이며, 적분하면 당연히 1이 된다.)

원의 넓이는 πY^2이므로

$$E(\pi Y^2) = \pi \int_0^1 y^2 \cdot 2ny^{2n-1}\,\mathrm{d}y = 2n\pi \int_0^1 y^{2n+1}\,\mathrm{d}y = \frac{2n\pi}{2n+2} = \frac{n\pi}{n+1}.$$

가장 먼 탄착점 제외하기

탄착점이 남아 있으려면 $n \ge 2$이어야 한다. 가장 먼 탄착점을 제거하면, 나머지를 둘러싸는 O 중심의 가장 작은 원의 반지름은 $R_1, \ldots, R_n$ 중 두 번째로 큰 값인 Z이다.

> **생각해 보기** 사건 $Z \le z$를 반지름 z인 원 바깥에 떨어지는 탄착점의 개수로 어떻게 나타낼 수 있을까?

두 번째로 큰 거리가 z 이하인 것은 O로부터 z보다 멀리 떨어진 탄착점이 **많아야 하나**일 때와 정확히 같다. 각 탄착점은 독립적으로 확률 z^2으로 거리 z 이내에 놓이므로, 반지름 z인 원 바깥에 있는 탄착점의 개수는 이항분포(binomial distribution) $\mathrm{B}(n, 1-z^2)$를 따른다. 따라서 $0 \le z \le 1$에 대하여

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= P(\text{바깥에 탄착점이 없음}) + P(\text{바깥에 탄착점이 정확히 하나}) \\ &= z^{2n} + n(1-z^2)z^{2(n-1)} \\ &= nz^{2n-2} - (n-1)z^{2n}. \end{aligned}$$

이를 미분하면 Z의 확률밀도함수를 얻는다.

$$f_Z(z) = 2n(n-1)z^{2n-3} - 2n(n-1)z^{2n-1} = 2n(n-1)z^{2n-3}(1-z^2), \qquad 0 \le z \le 1.$$

그러므로 새 원의 넓이의 기댓값은

$$\begin{aligned} E(\pi Z^2) &= 2n(n-1)\pi \int_0^1 \left(z^{2n-1} - z^{2n+1}\right) \mathrm{d}z \\ &= 2n(n-1)\pi \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= 2n(n-1)\pi \cdot \frac{2}{2n(2n+2)} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\pi, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $n = 1$이면 첫 번째 답은 $\pi/2$이다. 탄착점이 하나일 때 $P(R^2 \leq u) = u$이므로 R^2은 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르고, 따라서 넓이 πR^2의 기댓값은 $\pi/2$이다.
- $n = 2$이면 두 번째 답은 $\pi/3$으로, 두 탄착점 중 **더 가까운** 것에 대한 넓이의 기댓값이다. 첫 번째 답 $2\pi/3$과 함께 평균을 내면 탄착점이 하나일 때의 값인 $\pi/2$가 되며, 반드시 그래야 한다.
- $n = 5$로 2×10^5회 시행한 시뮬레이션에서 넓이의 기댓값은 2.618과 2.095로 나왔으며, 이론값은 $5\pi/6 \approx 2.618$과 $4\pi/6 \approx 2.094$이다.

흔한 실수

- 남은 탄착점들이 마치 $n-1$개짜리 새로운 표본인 것처럼 $P(Z \leq z) = z^{2(n-1)}$이라고 쓰는 것. 제외된 탄착점은 무작위로 고른 것이 아니므로, 남은 탄착점들은 O 쪽으로 치우쳐 있다.
- 원 바깥에 있는 탄착점이 어느 것인지에 해당하는 인수 n을 빠뜨리는 것.
- $E(Y)$를 구한 뒤 제곱하는 것. 넓이의 기댓값은 $\pi E(Y^2)$이지 $\pi\big(E(Y)\big)^2$이 아니다.

STEP 너머

이것들은 **순서통계량**(*order statistics*)이다. $U_i = R_i^2$이 $[0,1]$에서 균등분포를 따르므로 넓이들은 바로 n개의 균등분포 확률변수의 순서통계량이며, n개의 독립인 균등분포 확률변수 중 k번째로 작은 값은 평균이 $k/(n+1)$인 베타분포(beta distribution)를 따른다. 여기서 구한 두 답은 각각 $k = n$과 $k = n-1$인 경우이다. 깔끔하게 그려 보면, n개의 무작위 점이 $[0,1]$을 기대 길이가 모두 같은 $n+1$개의 구간으로 나눈다는 것이다. Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)에서 이런 종류의 변환과 순서통계량을 다룬다.

풀이

STEP II 1990, 문제 16

확률과 통계 • 베이즈 정리

> **STEP II 1990, 16번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q16

핵심 아이디어

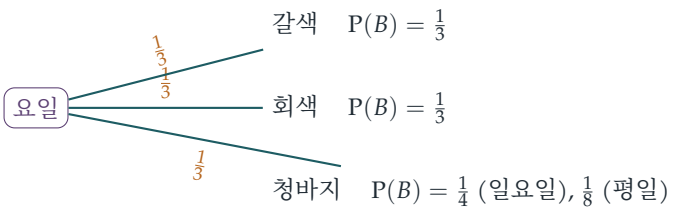
이 문제는 베이즈 정리(Bayes' theorem)를 다른 모습으로 바꾸어 놓은 것이다. 사진을 보면 검은 넥타이를 맸다는 것을 알 수 있고, 우리가 구하려는 것은 그 사실이 **주어졌을** 때 그날이 무슨 요일인지에 대한 확률이다. 그래서 먼저 순방향으로 계산한다. 각 종류의 날마다 바지에 따라 갈라지는 수형도를 이용하여 검은 넥타이를 맬 확률을 구한다. 그다음 조건부 확률(conditional probability)의 방향을 뒤집는다. 월요일 규칙은 수형도의 가지 하나만 바꾸므로, 두 번째 부분은 추가로 할 일이 거의 없다.

풀이

사진이 일요일에 찍힌 사건을 S, 내가 검은 넥타이를 맨 사건을 B라 하자. 사진은 일곱 요일 중 어느 날에 찍혔을 가능성이 모두 같으므로, 사진을 보기 전에는 $\mathrm{P}(S) = \frac{1}{7}$이다. (나중에 다룰) 월요일을 제외한 모든 날에 각 바지를 입을 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

각 종류의 날에 검은 넥타이를 맬 확률

- **갈색 바지.** 크라바트는 제외되므로, 넥타이는 검은 넥타이, 물방울무늬 넥타이, 레지멘탈 넥타이 중 하나를 임의로 고른다: $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$.
- **회색 바지.** 물방울무늬 넥타이는 제외되므로, 검은 넥타이, 레지멘탈 넥타이, 크라바트 중에서 고른다: $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$.
- **일요일의 청바지.** 넥타이는 항상 매며, 네 가지 모두 중에서 고른다: $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$.
- **평일의 청바지.** 확률 $\frac{1}{2}$로 스웨트셔츠를 입고 넥타이를 매지 않는다. 그렇지 않으면 네 넥타이 중 하나를 맨다: $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.



가지를 따라 더하면(바지에 대한 전확률 법칙(law of total probability))

$$\mathrm{P}(B \mid \text{일요일}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{11}{12} = \tfrac{11}{36} = \tfrac{22}{72},$$
$$\mathrm{P}(B \mid \text{평일}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{19}{24} = \tfrac{19}{72}.$$

첫 번째 답

일요일의 사전 확률(prior probability)을 $\frac{1}{7}$, 여섯 평일 전체의 사전 확률을 $\frac{6}{7}$로 하여 베이즈 정리를 적용하면

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{22}{72}}{\frac{1}{7}\cdot\frac{22}{72}+\frac{6}{7}\cdot\frac{19}{72}} = \frac{22}{22+6\times 19} = \frac{22}{136} = \frac{11}{68},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (공통 인수 $\frac{1}{7\times 72}$가 약분되는데, 모든 것을 분모 72로 맞춰 두면 좋은 이유가 바로 이것이다.)

> **?** **생각해 보기** 왜 답이 그냥 $\mathrm{P}(B \mid \text{일요일})$이나 $\frac{1}{7}$이 아닐까?

$\mathrm{P}(B \mid \text{일요일}) = \frac{11}{36}$은 엉뚱한 질문에 대한 답이다. 이것은 요일이 주어졌을 때 넥타이를 맬 확률이지, 넥타이가 주어졌을 때 그 요일일 확률이 아니다. 또 $\frac{1}{7}$은 증거를 무시한 값이다. 일요일에는 넥타이를 매지 않는 선택지가 없으므로 검은 넥타이를 맬 가능성이 조금 더 높다($\frac{22}{72}$ 대 $\frac{19}{72}$). 그래서 사진은 일요일일 확률을 $\frac{1}{7} = \frac{11}{77}$에서 $\frac{11}{68}$로 살짝 끌어올린다.

월요일 규칙이 있을 때

이제 월요일에는 반드시 청바지를 입는데, 월요일도 평일이므로 스웨트셔츠 선택지는 여전히 적용된다:

$$\mathrm{P}(B \mid \text{Monday}) = 1\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} = \tfrac{9}{72}.$$

일요일과 나머지 다섯 평일은 변하지 않는다. 각 요일의 사전 확률은 여전히 $\frac{1}{7}$이고 이것이 약분되므로

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{22}{72}}{\frac{22}{72}+\frac{9}{72}+5\cdot\frac{19}{72}} = \frac{22}{22+9+95} = \frac{22}{126} = \frac{11}{63}.$$

이 값은 $\frac{11}{68}$보다 조금 크다. 이는 타당하다. 월요일에는 검은 넥타이를 맬 가능성이 낮아지므로($\frac{19}{72}$가 아니라 $\frac{1}{8}$), 검은 넥타이 사진은 월요일에서 멀어지고 일요일 쪽을 조금 더 가리키게 된다.

검산

- 각 요일에 대해 넥타이별 확률과 "넥타이 없음"의 확률을 더하면 1이 된다. 예를 들어 평일에 넥타이를 매지 않을 확률은 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$이다.
- 임의의 날 4×10^5개를 모의실험(simulation)하면, 검은 넥타이를 맨 날 중 일요일의 비율은 약 0.161(정확한 값 $\frac{11}{68} \approx 0.1618$)이고, 월요일 규칙이 있을 때는 약 0.174(정확한 값 $\frac{11}{63} \approx 0.1746$)이다.

흔한 실수

- 월요일에도 청바지에는 스웨트셔츠를 입을 확률 절반이 따라온다는 것을 잊는 실수. 월요일도 평일이다. 월요일에 $\frac{1}{8}$ 대신 $\frac{1}{4}$를 쓰면 $\frac{22}{135}$가 나온다.
- 갈색 바지나 회색 바지를 입을 때 네 넥타이 모두 중에서 고르는 실수. 이 두 경우에는 넥타이가 세 개만 남는다.

STEP 너머

"가설이 주어졌을 때 증거의 확률"을 "증거가 주어졌을 때 가설의 확률"로 바꾸는 것이 베이즈 추론(Bayesian inference)의 핵심이다. 깔끔하게 말하면, 사후 오즈(posterior odds)는 사전 오즈(prior odds)에 우도비(likelihood ratio)를 곱한 것과 같다. 여기서 일요일 대 평일의 사전 오즈는 1 : 6이고 우도비는 22 : 19이므로 22 : 114, 즉 11 : 57을 얻는다. 대학 과정에서는 이를 발전시켜 베이즈 통계학(Bayesian statistics)을 배우는데, 여기서는 분포 전체를 같은 방식으로 갱신한다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 이 문제와 같은 예가 많이 실린, 조건부 확률에 관한 훌륭한 장이 있다.

풀이

STEP III 1990, 문제 1

순수수학 • 배각과 다항식의 근

STEP III 1990, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q1

핵심 아이디어

9는 3×3이므로 탄젠트의 삼배각 공식(triple-angle formula)을 두 번 쓰면 $\tan 9\theta$를 얻을 수 있다. 이는 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^9$을 전개하는 것보다 훨씬 수고가 적다. 또한 인수분해(factorisation)된 형태를 보면 $\theta = \pi/9, 2\pi/9, 4\pi/9$에서 어느 인수가 0이 되는지도 알 수 있다. 이 각들은 바로 $\tan^2 3\theta = 3$이 되는 각들이다. 여기서 $u = \tan^2\theta$에 대한 삼차방정식(cubic)을 얻고, 나머지는 비에트(Vieta)의 공식(Vieta's formulas, 다항식의 근과 계수 사이의 관계)이 해결해 준다.

풀이

$\tan 9\theta$에 대한 공식

$t = \tan\theta$, $T = \tan 3\theta$라 하자. 삼배각 공식은 $\tan(2\theta + \theta)$로부터, 또는 $n = 3$일 때의 드무아브르(de Moivre) 정리로부터 얻을 수 있으며, 다음을 준다.

$$T = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t(t^2 - 3)}{3t^2 - 1}, \qquad \tan 9\theta = \frac{3T - T^3}{1 - 3T^2} = \frac{T(3 - T^2)}{1 - 3T^2}.$$

이제 $3-T^2$과 $1-3T^2$을 공통분모 $(1-3t^2)^2$ 위에 쓴다.

$$\begin{aligned}(1-3t^2)^2(3-T^2) &= 3(1-3t^2)^2 - t^2(3-t^2)^2\\ &= (3-18t^2+27t^4) - (9t^2-6t^4+t^6)\\ &= -(t^6-33t^4+27t^2-3),\\ (1-3t^2)^2(1-3T^2) &= (1-3t^2)^2 - 3t^2(3-t^2)^2\\ &= (1-6t^2+9t^4) - (27t^2-18t^4+3t^6)\\ &= -(3t^6-27t^4+33t^2-1).\end{aligned}$$

비를 취하면 인수 $-(1-3t^2)^{-2}$가 약분되므로

$$\tan 9\theta = \frac{t(t^2-3)}{3t^2-1}\cdot\frac{t^6-33t^4+27t^2-3}{3t^6-27t^4+33t^2-1},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

대신 드무아브르 정리를 쓰면 $\tan 9\theta = \operatorname{Im}(1+\mathrm{i}t)^9/\operatorname{Re}(1+\mathrm{i}t)^9$이다. 그러면

$$9t-84t^3+126t^5-36t^7+t^9 \quad 과 \quad 1-36t^2+126t^4-84t^6+9t^8$$

이 각각 위의 분자와 분모로 인수분해된다는 것을 확인해야 한다. 실제로 그렇게 되지만, $\tan 3\theta$를 거치는 방법은 인수분해를 공짜로 안겨 준다.

삼차방정식

$P(t) = t^6-33t^4+27t^2-3$이라 하자. 위의 첫 번째 계산에 따르면

$$3-\tan^2 3\theta = -\frac{P(t)}{(1-3t^2)^2} \qquad 단,\ 3t^2\neq 1.$$

이제 $\theta = \pi/9,\ 2\pi/9,\ 4\pi/9$로 놓자. 그러면 $3\theta = \pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3$이고, 각 경우에 $\tan 3\theta = \pm\sqrt{3}$이므로 $\tan^2 3\theta = 3$이다. 각 경우에 3θ는 $\pi/6$의 홀수 배가 아니므로 $3t^2\neq 1$이다(그렇지 않으면 $\tan 3\theta$가 정의되지 않는다). 따라서 세 각 모두에 대해 $P(\tan\theta)=0$이다.

이 각들은 $(0,\pi/2)$에서 t나 t^2-3이 아니라 인수 P 때문에 $\tan 9\theta = 0$이 되는 바로 그 각들이다. 실제로 $t\neq 0$이고, $\theta\neq\pi/3$이므로 $t^2\neq 3$이다.

생각해 보기 이 세 수가 삼차방정식의 모든 근이며 중근이 없다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

$u = t^2$으로 놓자. $\tan^2(\pi/9)$, $\tan^2(2\pi/9)$, $\tan^2(4\pi/9)$는 각각

$$u^3-33u^2+27u-3=0.$$

의 근이다. tan는 $(0, \pi/2)$에서 양수이고 순증가하며 $\pi/9 < 2\pi/9 < 4\pi/9 < \pi/2$이므로, 세 값은 서로 다르다. 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이므로, 이 세 값이 정확히 그 근들이다. 이것이 구하려던 정수 계수의 삼차방정식이다.

곱

비에트의 공식에 의해 $u^3 - 33u^2 + 27u - 3$의 근들의 곱은 3이다.

$$\tan^2\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 3.$$

세 각 모두 $(0, \pi/2)$에 있으므로 각 탄젠트는 양수이고, 따라서 양의 제곱근을 취한다.

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = \sqrt{3}.$$

여섯제곱의 합

근을 u_1, u_2, u_3이라 하자. 삼차방정식으로부터

$$e_1 = u_1 + u_2 + u_3 = 33, \qquad e_2 = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 27, \qquad e_3 = u_1u_2u_3 = 3.$$

우리가 구하려는 것은 $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$이며, 이는 탄젠트들의 여섯제곱의 합이다.

> **생각해 보기** 근을 구하지 않고 e_1, e_2, e_3으로부터 세제곱의 합을 어떻게 얻을 수 있는가?

각 근은 $u_i^3 = 33u_i^2 - 27u_i + 3$을 만족한다. 이 세 식을 더하면

$$\sum u_i^3 = 33\sum u_i^2 - 27\sum u_i + 9.$$

이다. 여기서 $\sum u_i = 33$이고,

$$\sum u_i^2 = e_1^2 - 2e_2 = 1089 - 54 = 1035.$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\sum u_i^3 &= 33 \times 1035 - 27 \times 33 + 9\\ &= 34155 - 891 + 9\\ &= 33273.\end{aligned}$$

즉,

$$\tan^6\left(\tfrac{\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{2\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 33273,$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. 같은 이야기로, $\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 35937 - 2673 + 9$이다.

검산

- 수치로 계산하면 $\tan^2(\pi/9) \approx 0.1325$, $\tan^2(2\pi/9) \approx 0.7041$, $\tan^2(4\pi/9) \approx 32.163$이다. 이들의 합은 33.000이고, 곱은 3.000이다.
- 세 탄젠트의 곱은 $1.7320508\ldots = \sqrt{3}$이다.
- 위 세 값의 세제곱의 합은 33273.0이다. 그 대부분은 $\tan^6(4\pi/9) \approx 33272.4$에서 나온다.
- $\tan 9\theta$에 대한 공식은 수천 개의 무작위 θ 값에서 계산기와 약 12자리 유효숫자(significant figures)까지 일치한다.
- 작은 경우: $t = 1$, 즉 $\theta = \pi/4$로 놓자. 공식은 $\frac{1\cdot(-2)(-8)}{2\cdot 8} = 1 = \tan(9\pi/4)$를 준다.

흔한 실수

- 6차 인수(sextic factor)가 0이 된다고 결론짓기 전에 $3t^2 \neq 1$인지(즉 분모가 0이 아닌지) 확인하는 것을 잊는다.
- 곱으로 $-\sqrt{3}$을 택한다. 모든 각이 예각(acute)이므로 모든 탄젠트는 양수이다.
- $+3e_3$ 항을 빠뜨리고 $\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2$로 써서 33264를 얻는다.

STEP 너머

삼차식 $u^3 - 33u^2 + 27u - 3$은 유리근을 갖지 않으므로 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약(irreducible)이다. 또한 이 삼차식은 세 개의 실근을 갖는다. 갈루아(Galois) 이론(Galois theory)에 따르면 이런 삼차식의 근은 실수 거듭제곱근(radicals)만으로는 나타낼 수 없다(*casus irreducibilis*, 환원 불능의 경우). 그래서 $\tan^2(\pi/9)$ 같은 삼각함수 표현이 이 근들을 적는 자연스러운 방법이다. 근의 거듭제곱의 합은 일반적으로 뉴턴(Newton)의 항등식(Newton's identities)이 지배한다. 드무아브르 정리의 기하학적 측면에 대해서는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)를 읽어 보라. 대수적 측면에 대해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 1990, 문제 2

순수수학 • 3차원 벡터

STEP III 1990, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q2

핵심 아이디어

네 점은 모두 하나의 곡선 $t \mapsto (t^3, t^2, t)$, 즉 **꼬인 삼차곡선**(*twisted cubic*) 위에 있다. 만나는 두 직선은 하나의 공통 평면 위에 있으므로, 소문항 (i)은 O, A, B, C가 결코 한 평면 위에 있지 않음(동일 평면(coplanar)이 아님)을 보이는 문제로 귀결되며, 이는 방데르몽드 행렬식(Vandermonde determinant)처럼 인수분해되는 행렬식(determinant)으로 확인할 수 있다. 소문항 (ii)에서는 조건 $ab = 1$ 덕분에 스칼라곱(scalar product)과 길이가 하나의 양 $a^2 + 1/a^2$의 함수로 간단해진다.

풀이

먼저, "서로 다르다"는 조건은 무엇을 알려 주는가? 매개변수(parameter)가 t인 점의 세 번째 좌표는 t 자신이므로, 서로 다른 점은 서로 다른 매개변수를 가진다. 따라서 a, b, c는 서로 다르고, O는 $t = 0$인 점이므로 a, b, c 중 어느 것도 0이 아니다.

소문항 (i)

직선 OA와 BC가 만난다고 가정하자. 공통점을 지나는 두 직선은 하나의 공통 평면 위에 있다(두 직선이 일치하는 경우에는 그 직선을 포함하는 아무 평면이나 택하면 된다). 그러면 O, A, B, C는 모두 원점을 지나는 한 평면 위에 있게 되고, 위치벡터(position vector) $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$는 일차종속(linearly dependent)이 된다. 이는 정확히 다음이 성립할 때 일어난다.

$$D = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a \\ b^3 & b^2 & b \\ c^3 & c^2 & c \end{vmatrix} = 0.$$

첫째 행에서 인수 a를, 둘째 행에서 b를, 셋째 행에서 c를 묶어 내면

$$D = abc\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

첫째 행과 둘째 행에서 각각 셋째 행을 빼고, 마지막 열을 따라 전개하면

$$D = abc\begin{vmatrix} (a-c)(a+c) & a-c & 0 \\ (b-c)(b+c) & b-c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = abc\,(a-c)(b-c)\begin{vmatrix} a+c & 1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix}$$
$$= abc\,(a-b)(a-c)(b-c).$$

$a, b, c \neq 0$이고 a, b, c가 서로 다르므로 모든 인수가 0이 아니다. 따라서 $D \neq 0$이고, 네 점은 한 평면 위에 있지 않으며, 그러므로 직선 OA와 BC는 만날 수 없다. (두 직선은 평행하지도 않으므로 꼬인 위치(skew)에 있다.)

? 생각해 보기 네 점이 한 평면 위에 있지 않음을 보이는 것으로 왜 충분한가?

만나는 두 직선은 항상 하나의 평면을 생성하기 때문이다. OA와 BC가 점 P에서 만난다면, P를 지나고 두 직선을 모두 포함하는 평면은 O, A, B, C를 모두 포함할 것이다. 우리는 그러한 평면이 존재하지 않음을 보였다.

소문항 (ii)

$b = 1/a$로 놓자. 그러면 $a \neq 0$이고, $a \neq \pm 1$이다. 그렇지 않으면 $b = a$가 되어 A와 B가 일치하기 때문이다. 스칼라곱은

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (ab)^3 + (ab)^2 + ab = 3,$$

이고, 길이의 제곱은

$$|\mathbf{a}|^2 = a^2(a^4 + a^2 + 1), \qquad |\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^6}.$$

이다. 두 식을 곱하면 $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = (a^4 + a^2 + 1)^2/a^4$이므로 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (a^4 + a^2 + 1)/a^2$이고, 이 값은 양수이다. $\theta = \angle AOB$라 하면

$$\cos\theta = \frac{3a^2}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{3}{u + 1}, \qquad \text{여기서} u = a^2 + \frac{1}{a^2}.$$

나타날 수 있는 값. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해(또는 $a^2 + a^{-2} - 2 = (a - a^{-1})^2$이므로) $u \geq 2$이고, 등호는 $a^2 = 1$일 때만 성립하는데 이 경우는 제외된다. 따라서 $u > 2$이고, 그러므로

$$0 < \cos\theta = \frac{3}{u+1} < \frac{3}{3} = 1,$$

이 되어 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$를 얻는다. 다른 각은 불가능하다.

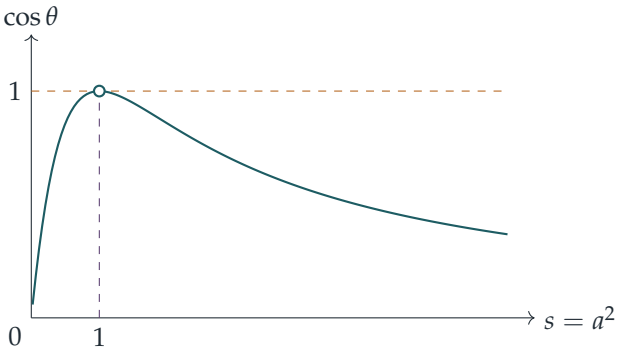
그러한 값은 모두 나타난다. $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$인 임의의 θ를 잡자. 그러면 $0 < \cos\theta < 1$이다. $u = 3/\cos\theta - 1$이 되어야 하며, 이 값은 2보다 크다. 방정식 $a^2 + 1/a^2 = u$는 a^2에 대한 이차방정식 $(a^2)^2 - u\,a^2 + 1 = 0$이고, 그 근

$$a^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4}}{2} > 1,$$

은 $u > 2$이므로 실수이다. a를 양의 제곱근으로 택하고 $b = 1/a$로 놓자. 그러면 $a > 1 > b > 0$이므로 $ab = 1$, $A \neq B$이고, 어느 점도 O가 아니며, $\cos\angle AOB = 3/(u+1) = \cos\theta$이다. 두 각이 모두 코사인이 일대일(one-to-one)인 구간 $[0, \pi]$에 있으므로 $\angle AOB = \theta$이다.

따라서 $\angle AOB$는 $0 < \angle AOB < \frac{1}{2}\pi$의 모든 값을 취하고 그 밖의 값은 취하지 않으며, 이것이 보이려던 것이다.

아래 그래프는 $s = a^2$에 대한 $\cos\theta$를 나타낸다. 그래프는 제외된 값 $s = 1$에서 1까지 올라가고 양 끝에서 0으로 다가가므로, 그 값들은 정확히 $(0, 1)$을 채운다.



검산

- $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$로 해 보자. $A = (8, 4, 2)$와 $B = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$에서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 + 1 + 1 = 3$이고, 공식에 따르면 $\cos\theta = 12/21 = 4/7$이므로 $\theta \approx 55.2°$이며, 이는 구간 안에 있다.
- $a \to 1$이면 점 A와 B가 하나로 합쳐지고 $\theta \to 0$이다. $a \to \infty$이면 A는 거의 x축을 따라 멀어지고 B는 거의 z축을 따라 O에 다가가므로 $\theta \to \frac{1}{2}\pi$이다. 이 둘이 구간의 양 끝이다.
- D의 인수분해는 수천 개의 무작위 유리수 a, b, c에 대해 정확히 확인했고, 각에 대한 공식과 그 범위는 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- a, b, c가 서로 다르고 0이 아닌 이유를 밝히지 않는 것. 바로 이 사실들이 $D \neq 0$이 되게 한다.
- $a = \pm 1$을 제외하지 않고 $\cos\theta < 1$만으로 결론을 내리는 것. $\theta = 0$을 배제하는 것은 엄격한 부등식 $u > 2$이다.
- "다른 값은 없다"는 것만 증명하는 것. 문제는 구간의 모든 값이 실제로 나타남을 보이라고도 요구하며, 이를 위해서는 구체적인 a가 필요하다.

STEP 너머

곡선 (t^3, t^2, t)는 꼬인 삼차곡선으로, 대수기하학(algebraic geometry)의 대표적인 예이다. 소문항 (i)은 이 곡선 위의 어떤 네 점도 한 평면 위에 있지 않다는 사실이며, 여러분이 계산한 행렬식은 방데르몽드 행렬식으로, 다항식 보간(polynomial interpolation)과 일차독립(linear independence) 논증에서 다시 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 행렬식과 일차독립을 명쾌하게 다룬다.

풀이

STEP III 1990, 문제 3

순수수학 • 군의 공리와 켤레

> **STEP III 1990, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q3

핵심 아이디어

세 소문항 모두 군의 공리(group axioms)만으로 해결되며, 각 소문항에서 유용한 수는 한 원소를 다른 원소를 써서 다시 나타내는 것이다. 위수(order)가 2인 원소는 자기 자신이 역원이므로, (i)은 한 줄짜리 계산이 된다. (ii)와 (iii)에서 쓰는 도구는 **켤레**(*conjugation*)이다. $x \mapsto c^{-1}xc$는 곱을 보존하므로 거듭제곱을 거듭제곱으로 보낸다.

이 풀이 전체에서 $x * y$를 xy로, 항등원을 e로 쓴다.

풀이

소문항 (i)

원소 x의 위수가 2일 필요충분조건은 $x \neq e$이고 $x^2 = e$인 것이다. 두 번째 조건은 $x^{-1} = x$라는 뜻이다. 따라서

$$a^{-1} = a, \qquad b^{-1} = b, \qquad (ab)^{-1} = ab.$$

군의 임의의 원소에 대하여 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$이다. $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = e$이기 때문이다. 그러므로

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba,$$

이고, a와 b는 교환한다.

소문항 (ii)

먼저 dc가 cd의 켤레임에 주목한다.

$$c^{-1}(cd)\,c = (c^{-1}c)\,dc = dc.$$

생각해 보기 $dc = c^{-1}(cd)c$로 쓰는 것이 위수를 다루는 데 왜 도움이 될까?

켤레가 거듭제곱을 그대로 통과하기 때문이다. 임의의 x와 임의의 양의 정수 n에 대하여

$$(c^{-1}xc)^n = (c^{-1}xc)(c^{-1}xc)\cdots(c^{-1}xc) = c^{-1}x^nc,$$

이다. 가운데에서 이웃한 $c\,c^{-1}$ 쌍이 모두 소거되기 때문이다. $x = cd$로 두면 $(dc)^n = c^{-1}(cd)^nc$를 얻는다. 이제

$$(dc)^n = e \iff c^{-1}(cd)^nc = e \iff (cd)^n = cec^{-1} = e,$$

이다. 여기서 두 번째 단계는 왼쪽에 c를, 오른쪽에 c^{-1}을 곱한 것이다(역방향은 c^{-1}과 c를 곱한다). 따라서 $(cd)^n = e$를 만족하는 양의 정수 n은 $(dc)^n = e$를 만족하는 양의 정수 n과 정확히 같다. 위수는 이러한 n 중 가장 작은 것이므로, cd와 dc의 위수는 같다. 이러한 n이 없으면 둘 다 위수가 무한이므로, 이 경우에도 명제가 성립한다.

소문항 (iii)

$c^{-1}bc = b^r$이 주어져 있다. 양의 정수 s에 대하여, (ii)의 연쇄 소거(telescoping) 논법을 쓰면

$$c^{-1}b^sc = (c^{-1}bc)^s = (b^r)^s = b^{sr}.$$

$s = 0$일 때도 같은 식이 성립한다(양변이 모두 e이다). s가 음수이면 $t > 0$인 t로 $s = -t$라 쓰자. 그러면 $(c^{-1}b^tc)(c^{-1}b^{-t}c) = e$이므로 $c^{-1}b^sc = \left(c^{-1}b^tc\right)^{-1}$이다. 따라서

$$c^{-1}b^sc = \left(b^{tr}\right)^{-1} = b^{-tr} = b^{sr}.$$

그러므로 모든 정수 s에 대하여 $c^{-1}b^sc = b^{sr}$이다.

두 번째 결과는 $n \geq 1$에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 보이되, 모든 정수 s에 대하여 한꺼번에 보인다. $n = 1$인 경우는 방금 증명한 것이다. 모든 정수 s에 대하여 $c^{-n}b^sc^n = b^{sr^n}$이라고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} c^{-(n+1)}\,b^s\,c^{n+1} &= c^{-1}\left(c^{-n}b^sc^n\right)c \\ &= c^{-1}\,b^{sr^n}\,c \\ &= b^{(sr^n)r} = b^{sr^{n+1}}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 마지막 줄은 첫 번째 결과에서 s 대신 정수 sr^n을 넣은 것이다. 이로써 귀납법이 완성되므로, 모든 양의 정수 n에 대하여 $c^{-n}b^sc^n = b^{sr^n}$이다.

생각해 보기 첫 번째 결과를 굳이 음수 s에 대해서도 증명한 이유는 무엇일까?

r이 음수이면(예를 들어 정이면체군(dihedral group)에서 $c^{-1}bc = b^{-1}$인 경우), s가 양수일 때에도 sr^n은 음수가 될 수 있고, 귀납 단계에서는 s 대신 sr^n을 넣어 첫 번째 결과를 적용한다. 첫 번째 결과를 모든 정수 s에 대하여 증명해 두면 r의 부호에 상관없이 귀납법이 작동한다.

검산

작은 군에서 확인해 보자. 정사각형의 대칭에서 두 대각선에 대한 반사와 그 곱(반 바퀴 회전)은 모두 위수가 2이고, (i)이 예측하는 대로 두 반사는 실제로 교환한다. S_3에서 $c = (12)$, $d = (13)$으로 잡으면 cd와 dc는 두 개의 3-순환이고, 둘 다 위수가 3이다. (iii)의 경우, 정이면체군에서 반사 c와 회전 b는 $c^{-1}bc = b^{-1}$을 만족하므로 $r = -1$이고, 공식은 $c^{-n}b^sc^n = b^{(-1)^n s}$를 예측한다. 이는 옳다. 반사로 두 번 켤레를 취하면 아무 변화도 없기 때문이다. 또한 세 명제를 모두 컴퓨터로 확인하였다. S_4의 조건에 맞는 모든 원소에 대하여((i)은 S_5에 대해서도) 빠짐없이 확인하였고, 13을 법으로 하는 사상 $x \mapsto ux + v$들의 군에서도 확인하였다.

흔한 실수

- $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$로 쓰는 것. 순서가 뒤바뀌며, 바로 그 뒤바뀜 덕분에 (i)이 성립한다.
- (ii)에서 $(cd)^n = e \Rightarrow (dc)^n = e$만 증명하는 것. 양방향이 모두 필요하며(또는 대칭성을 써서 c와 d의 역할을 바꾼다), 위수가 무한인 경우도 언급해야 한다.
- (iii)의 두 번째 결과를 귀납법 대신 점 세 개를 찍어 "증명"하는 것.

STEP 너머

사상 $x \mapsto c^{-1}xc$는 군의 **자기 동형 사상**(*automorphism*)이다. 즉 G에서 자기 자신으로 가는 전단사 함수(bijection)로서 연산을 보존하므로, 위수를 보존하고 거듭제곱을 거듭제곱으로 보낸다. 소문항 (iii)은 **반직접곱**(*semidirect product*)의 핵심 관계식이다. b와 c로 생성되고 $c^{-1}bc = b^r$을 만족하는 군에는 정이면체군($r = -1$)과, 소수를 법으로 하는 사상 $x \mapsto ux + v$들의 군이 포함된다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 켤레와 이러한 예들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 1990, 문제 4

순수수학 • 삼각급수

STEP III 1990, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q4

핵심 아이디어

두 급수(series)는 모두 각이 일정한 간격으로 커지는 코사인들의 합이므로, 자연스럽게 떠오르는 도구가 두 가지 있다. 단순한 합에는 $2\sin\beta$를 곱하고 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)을 쓴다. 그러면 각 항이 두 사인의 차로 쪼개지고 합이 연쇄적으로 소거된다(telescoping). 이항계수가 붙은 합과 마지막 항등식에서는 $\cos\phi$를 $e^{i\phi}$의 실수부(real part)로 생각한다. 그러면 이항정리(binomial theorem)나 등비급수(geometric series)의 합 공식이 일을 대신해 주고, 마지막에 실수부나 허수부(imaginary part)를 취하면 답이 나온다.

풀이

첫 번째 급수

이 합을 S라 하자. 곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\sin A\cos B = \sin(B+A) - \sin(B-A)$에 의해

$$2\sin\beta\cos(\alpha+2r\beta) = \sin\big(\alpha+(2r+1)\beta\big) - \sin\big(\alpha+(2r-1)\beta\big).$$

이것을 $r = 0, 1, \ldots, n$에 대해 더하면 합이 연쇄적으로 소거된다. r일 때의 첫 번째 사인이 $r+1$일 때의 두 번째 사인과 상쇄되기 때문이다. 따라서 두 항만 남는다.

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\, S &= \sin\big(\alpha+(2n+1)\beta\big) - \sin(\alpha-\beta) \\ &= 2\cos(\alpha+n\beta)\sin\big((n+1)\beta\big), \end{aligned}$$

여기서 $\frac{P+Q}{2} = \alpha + n\beta$, $\frac{P-Q}{2} = (n+1)\beta$로 두고 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$를 이용하였다. $\sin\beta \neq 0$이므로 양변을 나눌 수 있고,

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} \cos(\alpha + 2r\beta) = \frac{\sin(n+1)\beta\,\cos(\alpha+n\beta)}{\sin\beta}}$$

$\alpha + n\beta$가 첫 번째 각과 마지막 각의 평균이라는 점에 주목하자. 이는 식의 꼴이 맞는지 확인하는 좋은 검증 수단이다.

이항급수

이 합을 T라 하자. $\cos\phi = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$이고 이항계수는 실수이므로, 이항정리에 의해

$$T = \mathrm{Re}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}\right)^r = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}\right)^n\right]$$

이다. 이제 "반각" 인수를 묶어 낸다.

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right) = 2\cos\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}.$$

따라서 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta})^n = 2^n\cos^n\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+n\beta)}$이고, $2^n\cos^n\beta$는 실수이므로

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos(\alpha+2r\beta) = 2^n\cos^n\beta\,\cos(\alpha+n\beta)}$$

(이 결과는 사실 $\sin\beta \neq 0$이라는 조건이 필요 없다.)

마지막 항등식

시컨트(secant)가 있으므로 $\cos\theta \neq 0$이어야 하며, 이는 문제에 암묵적으로 포함되어 있다. $\sec^r\theta$는 실수이므로 r번째 항은 $\cos r\theta\,\sec^r\theta = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sec\theta\right)^r$이다. 그러므로

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sec\theta = \frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta} = 1 + \mathrm{i}\tan\theta.$$

로 두자. 좌변은 $\mathrm{Re}(1 + w + \cdots + w^n)$이다.

> **생각해 보기** 여기서 등비급수의 합 공식을 써도 되는 이유는 무엇이며, w는 왜 도움이 되는가?

이 공식을 쓰려면 $w \neq 1$이어야 하는데, $\sin\theta \neq 0$이기 때문에 바로 $w - 1 = \mathrm{i}\tan\theta \neq 0$이다. 조건이 쓰이는 곳이 바로 여기이다. w의 장점은 $w-1$이 순허수여서 그것으로 나누기가 쉽고, 한편 w^{n+1}은 지수 형태 $w = \sec\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로부터 쉽게 계산된다는 것이다. $t = \tan\theta$라 쓰면

$$1 + w + \cdots + w^n = \frac{w^{n+1}-1}{w-1} = \frac{\sec^{n+1}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} - 1}{\mathrm{i}t}.$$

임의의 복소수 z와 실수 $t \neq 0$에 대해 $\operatorname{Re}\dfrac{z}{\mathrm{i}t} = \operatorname{Re}\dfrac{-\mathrm{i}z}{t} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{t}$이다. 분자의 -1은 허수부가 0이므로

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta \, \sec^r\theta = \frac{\sec^{n+1}\theta \, \sin(n+1)\theta}{\tan\theta} = \sec^{n+1}\theta \, \sin(n+1)\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin(n+1)\theta \, \sec^n\theta}{\sin\theta},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

앞부분과의 연결. 양변에 $\cos^n\theta$를 곱하면 이 항등식은

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta \cos^{n-r}\theta = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

라는 뜻이 된다. 이 꼴은 n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로도 증명할 수 있다. 좌변을 C_n이라 하면 $C_n = \cos\theta\, C_{n-1} + \cos n\theta$이고, $\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta = \sin(n+1)\theta$로 귀납 단계가 마무리된다.

검산

- $n = 0$: 세 공식 모두 단 하나뿐인 첫 항$(\cos\alpha, \cos\alpha, 1)$이 된다.
- 첫 번째 합에서 $\beta \to 0$이면 $\frac{\sin(n+1)\beta}{\sin\beta} \to n+1$이므로 $S \to (n+1)\cos\alpha$이고, 이는 같은 항 $n+1$개의 합으로서 옳다. 두 번째 합에서 $\beta = 0$이면 $\sum \binom{n}{r} = 2^n$이므로 $2^n\cos\alpha$가 된다.
- $\theta = \pi/4$, $n = 2$: 좌변은 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2} + 0 = 2$이고, 우변은 $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot 2/\sin\frac{\pi}{4} = 2$이다.
- 수치적으로도 α, β, θ와 $n \leq 15$를 무작위로 20 000번 골랐을 때 세 공식 모두 직접 더한 값과 (상대오차) 10^{-9} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 첫 번째 급수의 항이 $n+1$개($r = 0$부터 n까지)라는 것을 잊어서 $\sin(n+1)\beta$ 대신 $\sin n\beta$를 얻는 실수.
- $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}$를 $2\cos\beta$로 써서 인수 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$를 잃어버리는 실수. 이렇게 하면 답의 각이 어긋난다.
- 마지막 부분에서 분자와 분모의 실수부를 따로따로 취하는 실수. 먼저 분모를 실수로 만들어야 한다.

STEP 너머

cos를 지수함수의 실수부로 쓰면 삼각함수의 합이 등비급수나 이항급수의 합으로 바뀐다. 이것이 푸리에 해석(Fourier analysis)의 출발점이다. 첫 번째 합은 본질적으로 디리클레 핵(Dirichlet kernel) $\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) / \sin\frac{x}{2}$이며, 이것이 푸리에 급수가 어떻게 수렴하는지를 좌우한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 $e^{i\theta}$를 곱하는 것이 왜 회전을 뜻하는지, 그리고 이런 합들이 왜 깔끔한 공식으로 닫히는지를 아름답고 기하학적인 관점에서 보여 준다.

풀이

STEP III 1990, 문제 5

순수수학 • 라이프니츠 정리

> **STEP III 1990, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q5

핵심 아이디어

파스칼 법칙(Pascal's rule)은 두 항을 공통분모(common denominator)로 통분하고 나면 계승이 들어 있는 분수 계산에 지나지 않는다. 곱의 n계 도함수에 대한 라이프니츠(Leibniz) 공식은 n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. n계 공식을 한 번 더 미분하면 각 혼합항이 두 번씩 나타나고, 그 두 항을 하나로 합쳐 주는 것이 바로 파스칼 법칙이다. 마지막 부분에서 $y = \sin^{-1} x$를 직접 n번 미분하는 것은 가망이 없다. 그 대신 y가 만족하는 간단한 2계 방정식을 찾고, 거기에 라이프니츠 공식을 적용한다.

(인쇄된 문제에는 $y = \sin^{-1} y$라고 되어 있다. 이는 분명히 $y = \sin^{-1} x$의 오식이며, 여기서는 이것을 사용한다.)

풀이

파스칼 법칙

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$이고 $0! = 1$임을 떠올리자. $1 \le r \le n$이면 $r-1$과 $n-r$이 모두 음이 아니므로, 아래의 모든 계승이 의미를 가진다. $r! = r\,(r-1)!$이고 $(n-r+1)! = (n-r+1)\,(n-r)!$이므로 공통분모는 $r!\,(n-r+1)!$이다.

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n-r+1)}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{n!\,r}{r!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n+1-r)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r}.\end{aligned}$$

라이프니츠 공식

u와 v는 필요한 만큼 여러 번 미분할 수 있다고 가정한다. 합의 기호로 쓰면 증명할 명제는

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r)}$$

이고, 여기서 $z^{(0)}$은 z 자신을 뜻한다. 이를 $n \geq 1$에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다.

기저 단계 $n = 1$**.** 우변은 $u^{(1)}v + uv^{(1)}$이고, 곱의 미분법(product rule)에 의해 이는 $(uv)'$이다.

귀납 단계. 어떤 $n \geq 1$에 대하여 공식이 성립한다고 하자. 각 항에 곱의 미분법을 써서 이를 미분하면

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r+1)}.$$

두 번째 합에서 $s = r + 1$로 놓으면 이 합은 $\sum_{s=1}^{n+1} \binom{n}{s-1} u^{(n+1-s)} v^{(s)}$가 된다. 이제 두 합은 모두 $u^{(n+1-r)}v^{(r)}$ 꼴의 항으로 이루어진다. 첫 번째 합의 $r = 0$인 항과 두 번째 합의 $s = n + 1$인 항을 따로 떼어 내면

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \right] u^{(n+1-r)} v^{(r)} + uv^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)}v + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} + uv^{(n+1)}\end{aligned}$$

이다. 여기서 $1 \leq r \leq n$이므로 파스칼 법칙을 적용할 수 있다. $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$이므로 이는

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)}$$

이고, 이것이 $n + 1$에 대한 공식이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 공식은 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다.

$\sin^{-1} x$의 도함수

$-1 < x < 1$에서 $y = \sin^{-1} x$라 하자. 그러면

$$y^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \text{따라서} \qquad (1 - x^2)\left(y^{(1)}\right)^2 = 1.$$

이 식을 x에 대하여 미분하면

$$(1 - x^2) \cdot 2y^{(1)}y^{(2)} - 2x\left(y^{(1)}\right)^2 = 0.$$

$(-1,1)$에서 $y^{(1)} > 0$이므로 $2y^{(1)}$로 나눌 수 있다.

$$(1-x^2)\,y^{(2)} - x\,y^{(1)} = 0. \qquad (*)$$

이것이 $n=0$일 때 증명해야 할 결과이다.

> **생각해 보기** $(1-x^2)^{-1/2}$을 그냥 미분하지 않고, 왜 $y^{(1)}$을 먼저 제곱한 뒤 미분할까?

$(1-x^2)^{-1/2}$을 직접 미분하면 $y^{(2)} = x(1-x^2)^{-3/2}$이고, 여기에 $1-x^2$을 곱해도 똑같이 $(*)$를 얻는다. 어느 방법이든 된다. 요점은 계수가 x에 대한 **다항식**(polynomial)이고 y의 도함수에 대하여 **선형**(linear)인 방정식에 도달하는 것이다. 라이프니츠 공식이 깔끔하게 다룰 수 있는 것이 바로 이런 방정식이기 때문이다. 다항식 계수는 몇 번 미분하면 곧 0이 된다.

이제 $n \geq 1$에 대하여 $(*)$를 n번 미분하면서 각 곱에 라이프니츠 공식을 적용한다. 첫 번째 곱에서는 $u = y^{(2)}$, $v = 1-x^2$으로 놓는다. 그러면 $v^{(1)} = -2x$, $v^{(2)} = -2$이고 그보다 높은 계의 도함수는 모두 0이므로 세 항만 남는다.

$$\left((1-x^2)\,y^{(2)}\right)^{(n)} = (1-x^2)\,y^{(n+2)} + \binom{n}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\,y^{(n)}.$$

($n=1$일 때는 마지막 항이 없는데, 이는 $\binom{1}{2} = 0$과 일치한다.) 두 번째 곱에서는 $u = y^{(1)}$, $v = x$로 놓으면 두 항만 남는다.

$$\left(x\,y^{(1)}\right)^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)}.$$

두 식을 빼면 $(*)$의 n계 도함수는

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)} - x\,y^{(n+1)} - n\,y^{(n)} = 0.$$

항을 정리하면 $-2nx - x = -(2n+1)x$이고 $-n(n-1) - n = -n^2$이므로

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)x\,y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0$$

이 되어 증명이 끝난다. 이 식은 모든 $n \geq 0$과 $(-1,1)$의 모든 x에 대하여 성립한다.

검산

- 라이프니츠 공식에서 $n=1$로 놓으면 곱의 미분법이 나온다. $n=2$이면 $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$이고, 이는 $u'v + uv'$을 미분하여 확인할 수 있다.
- $x=0$에서 최종 결과는 $y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0)$이 된다. $y^{(1)}(0) = 1$이므로 $y^{(3)}(0) = 1$, $y^{(5)}(0) = 9$이고, 따라서 매클로린 급수(Maclaurin series)는 $x + \frac{x^3}{6} + \frac{9x^5}{120} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}$으로 시작한다. 이는 $\sin^{-1} x$의 알려진 급수와 같다.

- 수치적으로도 확인하였다. 파스칼 법칙은 모든 $n < 60$에 대하여, 라이프니츠 공식은 무작위로 고른 다항식 쌍 300개에 대하여 정확하게, 최종 항등식은 $(1-x^2)^{-1/2}$의 테일러 계수(Taylor coefficients)를 이용하여 $(-1, 1)$의 여섯 점에서 n이 27까지일 때 확인하였다. 상대 잔차는 10^{-15}보다 작았다.

흔한 실수

- 귀납 단계에서 두 번째 합의 첨자를 바꾼 뒤 이항계수(binomial coefficient)를 잘못 쓰는 것. 파스칼 법칙을 적용하기 전에 $r = 0$과 $r = n + 1$인 양 끝 항을 따로 써 두자.
- 먼저 방정식 $(*)$를 찾지 않고 $\sin^{-1} x$를 직접 n번 미분하려 하는 것.
- $1 - x^2$을 미분할 때 인수 $\binom{n}{2}$나 음의 부호를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

다항식 계수를 갖는 선형 미분방정식을 찾은 뒤 그것을 n번 미분하는 기법은 테일러 계수에 대한 점화식(recurrence)을 얻는 표준적인 방법이다. 이는 곧바로 상미분방정식(ODE)의 거듭제곱급수 해법(power-series solutions)으로 이어지며, 르장드르(Legendre) 함수와 베셀(Bessel) 함수가 바로 이렇게 생겨난다. 라이프니츠 공식은 이항정리(binomial theorem)의 미적분판이기도 하다. $u = \mathrm{e}^{ax}$, $v = \mathrm{e}^{bx}$로 놓으면 이 공식은 $(a+b)^n = \sum \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$이 된다. 급수해에 대해 더 알고 싶다면 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

풀이

STEP III 1990, 문제 6

순수수학 • 선형 변환과 타원

STEP III 1990, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.2 절 돌지 않고 늘어나기에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/eigenvectors.html

핵심 아이디어

두 특별한 벡터는 행렬의 고유벡터(eigenvector)이며, 이것이 기하학적 구조 전체를 알려준다. T는 한 직선 방향으로 어떤 배율만큼, 그와 수직인 직선 방향으로 또 다른 배율만큼 늘이므로, 단위원(unit circle)은 그 두 직선을 축으로 하는 타원(ellipse)이 된다. 대수적으로는 T의 역변환을 구하여 x와 y를 X와 Y로 나타낸 뒤 $x^2 + y^2 = 1$에 대입하는 것이 E의 방정식을 얻는 가장 깔끔한 방법이다. 넓이는 행렬식(determinant)만큼 배가 되며, T는 직선을 직선으로 옮기므로 E의 접선(tangent)은 단순히 C의 접선의 상이다.

풀이

$M = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$로 두면, T는 M을 곱하는 변환이다.

두 특별한 방향

다음을 계산한다.

$$M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$
$$M\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}18+2\\-4-6\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

따라서 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$는 방향을 유지한 채 2배가 되고, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$는 방향을 유지한 채 4배가 되므로, 요구된 결과가 성립한다. $1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0$이므로 이 두 방향이 서로 수직이라는 점에 주목하자.

E의 방정식

M의 행렬식은

$$\det M = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 (9\cdot 6 - (-2)(-2)) = \tfrac{4}{25}\cdot 50 = 8,$$

이고 이는 0이 아니므로 T는 역변환을 가지며, 역행렬(inverse matrix)은

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 9\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 9\end{pmatrix}.$$

이다. 따라서 점 (X,Y)가 (x,y)의 상일 필요충분조건은

$$x = \frac{3X+Y}{10}, \qquad y = \frac{2X+9Y}{20}.$$

이다. 점 (X,Y)가 E 위에 있을 필요충분조건은 그 점의 원래 점이 C 위에 있는 것, 즉 $x^2+y^2=1$이다. 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{(3X+Y)^2}{100} + \frac{(2X+9Y)^2}{400} = 1 &\iff 4(9X^2+6XY+Y^2) + (4X^2+36XY+81Y^2) = 400\\ &\iff 40X^2+60XY+85Y^2 = 400\\ &\iff 8X^2+12XY+17Y^2 = 80,\end{aligned}$$

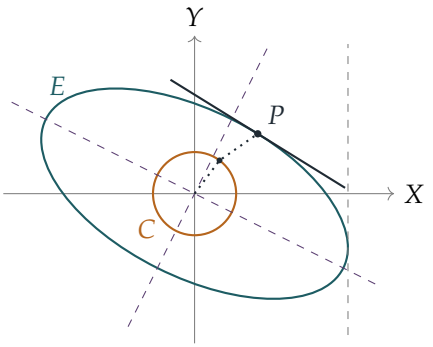
이고, 이것이 구하는 E의 방정식이다.

넓이

선형사상(linear map)은 모든 넓이를 $|\det M|$배 한다. C로 둘러싸인 원판의 넓이는 π이므로, E로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$8\pi.$$

이다. 이는 기하학적 관찰과도 일치한다. E는 반축의 길이가 $2(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 방향)와 $4(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 방향)인 타원이며, $\pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi$이다.



그림은 C, 축(점선)과 함께 그린 타원 E, E에 접하는 수직선 $X = 2\sqrt{17/5}$, 그리고 $\frac{1}{5}(3,4)$의 상인 P에서의 접선을 보여 준다.

X의 최댓값

E의 방정식을 Y에 대한 이차방정식(quadratic equation)으로 보자.

$$17Y^2 + 12XY + (8X^2 - 80) = 0.$$

주어진 X의 값이 E 위에 나타날 필요충분조건은 이 방정식이 실근 Y를 갖는 것, 즉 판별식(discriminant)이 음이 아닌 것이다.

$$\begin{aligned} 144X^2 - 4 \cdot 17(8X^2 - 80) \geq 0 &\iff 144X^2 - 544X^2 + 5440 \geq 0 \\ &\iff 400X^2 \leq 5440 \\ &\iff X^2 \leq \tfrac{68}{5}. \end{aligned}$$

따라서 E 위의 모든 점은 $X \leq \sqrt{68/5} = 2\sqrt{17/5}$를 만족하고, 등호가 성립하는 점이 존재한다(이때 판별식은 0이며, $Y = -\frac{6X}{17}$인 한 점이 나온다). 그러므로 E 위에서 X의 최댓값은 $2\sqrt{17/5}$이며, 요구된 결과가 성립한다.

? 생각해 보기 판별식을 쓰지 않고 원에서 바로 이 결과를 알아낼 방법이 있을까?

있다. E 위에서 $x^2 + y^2 = 1$일 때 $X = \frac{2}{5}(9x - 2y)$이다. $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$로 두면, 식 $9\cos\theta - 2\sin\theta$의 최댓값은 $\sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}$이다($R\cos(\theta + \alpha)$ 꼴로 합성). 따라서 X의 최댓값은 $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{85/25} = 2\sqrt{17/5}$이고, 위의 결과와 일치한다.

접선

C 위의 점 $\frac{1}{5}(3,4)$는 다음 점으로 옮겨진다.

$$P = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9\cdot\frac{3}{5} - 2\cdot\frac{4}{5} \\ -2\cdot\frac{3}{5} + 6\cdot\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{25} \\ \frac{36}{25} \end{pmatrix}.$$

$\frac{1}{5}(3,4)$에서 C의 접선은 그 점에서의 반지름과 수직이므로

$$3x + 4y = 5.$$

이다. T는 선형이고 역변환을 가지므로 직선을 직선으로 옮기며, C와 정확히 한 점에서 만나는 직선은 E와 정확히 한 점에서 만나는 직선으로 옮겨진다. 따라서 P에서 E의 접선은 이 직선의 상이다. $x = \frac{3X+Y}{10}$과 $y = \frac{2X+9Y}{20}$를 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{3(3X+Y)}{10} + \frac{4(2X+9Y)}{20} = 5 &\iff 6(3X+Y) + 4(2X+9Y) = 100 \\ &\iff 26X + 42Y = 100, \end{aligned}$$

이므로 P에서 E의 접선은

$$13X + 21Y = 50.$$

이다. 확인해 보면 $13\cdot\frac{38}{25} + 21\cdot\frac{36}{25} = \frac{494+756}{25} = 50$이므로 P는 이 직선 위에 있다. 다른 방법으로, $8X^2 + 12XY + 17Y^2 = 80$을 음함수 미분(implicit differentiation)하면 P에서의 법선(normal)은 $(16X + 12Y,\ 12X + 34Y) = \frac{1}{25}(1040, 1680)$ 방향이고, 이는 $(13,21)$과 평행하므로 같은 직선을 얻는다.

검산

- $(1,0)$의 상은 $\frac{2}{5}(9,-2)$이고, $\frac{4}{25}\left(8\cdot 81 - 12\cdot 18 + 17\cdot 4\right) = \frac{4}{25}\cdot 500 = 80$이므로 이 점은 E 위에 있다.
- 축의 끝점 $\pm 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$와 $\pm 4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$는 E의 방정식을 만족한다. 예를 들어 $\frac{4}{5}(8 + 24 + 68) = 80$이다.
- 수치적으로 C 위의 점 200 000개를 표본으로 잡으면 X의 최댓값은 $X \approx 3.687818$로 $2\sqrt{17/5} \approx 3.687818$과 일치하며, 상으로 얻은 다각형의 넓이를 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구하면 $25.13274 \approx 8\pi$이다.

흔한 실수

- $x^2 + y^2 = 1$에 대입할 때 M^{-1} 대신 M을 적용하는 실수: 상으로 얻은 곡선의 방정식을 구하려면 옛 좌표를 새 좌표로 나타내야 한다.

- 행렬식을 계산할 때 인수 $\frac{2}{5}$를 빠뜨리는 실수: 이 인수는 $\frac{2}{5}$가 아니라 $\left(\frac{2}{5}\right)^2$만큼 기여한다.
- 상인 점 P를 구한 뒤, E의 접선에 $\frac{1}{5}(3,4)$에서의 C의 기울기를 그대로 쓰는 실수: 선형사상은 접한다는 성질은 보존하지만 기울기는 보존하지 않는다.

STEP 너머

여기서의 행렬은 대칭행렬(symmetric matrix)이며, 그 때문에 고유벡터들이 서로 수직이다. 이것은 모든 실대칭행렬이 회전에 의해 대각화(diagonalise)될 수 있다는 스펙트럼 정리(spectral theorem)의 2차원 경우이다. 이 정리는 임의의 이차형식(quadratic form) $ax^2 + 2hxy + by^2$가 서로 수직인 주축(principal axes)을 갖는 이차곡선(conic)을 나타내는 이유를 설명해 주며, 그 이차형식의 행렬의 고윳값(eigenvalue)을 보면 곡선의 모양을 곧바로 알 수 있다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 풍부한 기하학적 그림과 함께 고윳값, 대칭행렬, 이차형식을 전개한다.

풀이

STEP III 1990, 문제 7

순수수학 • 음함수 곡선 그리기

STEP III 1990, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q7

핵심 아이디어

음함수 미분(implicit differentiation)을 두 번 하면 각 점에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$와 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$를 얻는데, 이것이 바로 테일러 급수(Taylor series)의 계수이다. 부등식에서는 이 방정식이 y에 대한 **이차식**(*quadratic*)일 뿐이라는 점을 알아차리는 것이 요령이다. 점 (x,y)가 존재하려면 그 이차식이 실근을 가져야 하므로, 판별식(discriminant)이 음이 아니어야 한다. 그다음 이차방정식을 직접 풀면 곡선 전체의 모습이 드러난다. 곡선은 두 갈래로 이루어져 있고, 두 갈래는 판별식이 0이 되는 곳에서 만난다.

풀이

이 풀이 전체에서 $F(x,y) = xy^2 + x^3 + a^2y - a^3$으로 둔다. 대입해 보면 P, Q, R에서 $F = 0$임을 알 수 있다. 예를 들어 R에서는 $a \cdot a^2 + a^3 - a^3 - a^3 = 0$이다.

P, Q, R에서의 테일러 급수

y를 x의 함수로 보고 $F(x,y) = 0$을 x에 대하여 미분하면

$$y^2 + 2xyy' + 3x^2 + a^2y' = 0, \qquad \text{따라서} \qquad y' = -\frac{y^2 + 3x^2}{2xy + a^2}.$$

첫 번째 식을 다시 미분하면(항 $2xyy'$에서 $2yy' + 2xy'^2 + 2xyy''$가 나온다)

$$4yy' + 2xy'^2 + 6x + (2xy + a^2)\,y'' = 0.$$

각 점에서 분모 $2xy + a^2$가 0이 아니므로, 이 식들로부터 y'와 y''가 정해지고, 그러면 $y = y_0 + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \cdots$이다.

$P(0,a)$**에서:** $y' = -a^2/a^2 = -1$이다. 그러면 $4a(-1) + a^2y'' = 0$이므로 $y'' = 4/a$이고

$$y = a - h + \frac{2}{a}h^2 + \cdots.$$

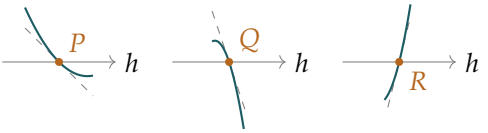
$Q(a,0)$**에서:** $y' = -3a^2/a^2 = -3$이다. 그러면 $0 + 2a(9) + 6a + a^2y'' = 0$이므로 $y'' = -24/a$이고

$$y = -3h - \frac{12}{a}h^2 + \cdots.$$

$R(a,-a)$**에서:** 여기서는 $2xy + a^2 = -a^2$이므로 $y' = -4a^2/(-a^2) = 4$이다. 그러면 $4(-a)(4) + 2a(16) + 6a - a^2y'' = 0$, 즉 $22a = a^2y''$이므로 $y'' = 22/a$이고

$$y = -a + 4h + \frac{11}{a}h^2 + \cdots.$$

따라서 P 근처에서 곡선은 기울기 -1로 내려가며 아래로 볼록(concave up)하다(접선(tangent)보다 위쪽으로 휜다). Q 근처에서는 기울기 -3으로 가파르게 내려가며 위로 볼록(concave down)하다. R 근처에서는 기울기 4로 올라가며 아래로 볼록하다.



($a = 1$일 때의 국소적인 모양이다. 점선은 접선이다.)

부등식

C의 방정식을 y에 대한 이차식으로 쓰면

$$x\,y^2 + a^2\,y + (x^3 - a^3) = 0.$$

$x \neq 0$이고 (x,y)가 C 위에 있으면 이 이차식은 실근 y를 가지므로 판별식이 음이 아니다.

$$a^4 - 4x(x^3 - a^3) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^4 - 4a^3x - a^4 \leq 0.$$

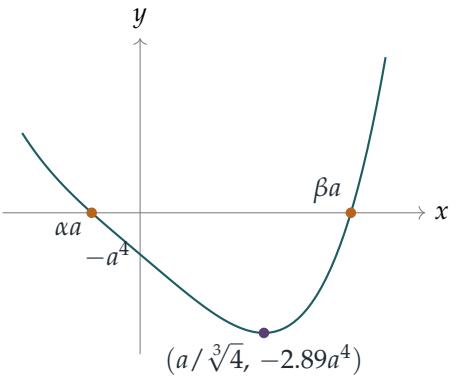
$x = 0$이면 좌변은 $-a^4 < 0$이므로 이 경우에도 부등식이 성립한다. 이로써 결과가 증명된다.

$y = 4x^4 - 4a^3x - a^4$**의 그래프**

문제지에는 $4x^4 - 4a^3 - a^4$로 인쇄되어 있는데, 이는 방금 만난 사차식(quartic) $g(x) = 4x^4 - 4a^3x - a^4$의 오식임이 분명하다. $g(0) = -a^4$이고 $g'(x) = 16x^3 - 4a^3$인데, 이는 $x_0 = a/\sqrt[3]{4} \approx 0.63a$에서만 0이 되며, 이곳에서 g는 최솟값을 가진다. $x_0^3 = a^3/4$를 이용하면

$$g(x_0) = a^3x_0 - 4a^3x_0 - a^4 = -a^4\left(1 + 3 \cdot 4^{-1/3}\right) \approx -2.89a^4.$$

$x \to \pm\infty$일 때 $g \to +\infty$이고 g는 감소하다가 증가하므로, g는 정확히 두 개의 영점 $x = \alpha a$와 $x = \beta a$를 가진다. 여기서 $\alpha \approx -0.246$과 $\beta \approx 1.072$는 $4t^4 - 4t - 1 = 0$의 근이다(깔끔한 닫힌 꼴은 없으며, 필요하지도 않다). 또한 $g''(x) = 48x^2 \geq 0$이므로 그래프는 볼록(convex)하다.



($a = 1$로 그렸다.) 따라서 C 위의 모든 점은 $\alpha a \leq x \leq \beta a$를 만족한다. 즉 곡선은 세로 띠 안에 놓여 있다.

곡선 C

$x \neq 0$일 때 이차방정식을 풀면 두 갈래

$$y_\pm = \frac{-a^2 \pm \sqrt{D}}{2x}, \qquad D = a^4 + 4a^3x - 4x^4,$$

를 얻는다. 이들은 정확히 그 띠 위에서 실수이고, $D = 0$인 곳, 즉 $x = \alpha a$와 $x = \beta a$에서 만난다. 그곳에서 $y = -a^2/(2x)$이고, 접선은 수직이다. 그곳이 바로 y'의 분모 $2xy + a^2$가 0이 되는 곳이기 때문이다. 이로부터 점 $(\beta a, -0.47a)$와 $(\alpha a, 2.03a)$를 얻는다.

> **?** **생각해 보기** $x \to 0$일 때 두 갈래는 어떻게 되는가?

분자와 분모에 $\sqrt{D} + a^2$를 곱하고 $D - a^4 = 4x(a^3 - x^3)$을 이용하면

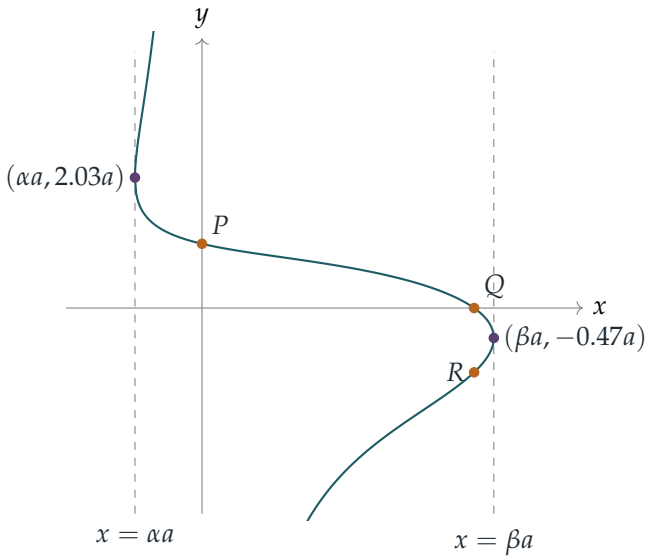
$$y_+ = \frac{2(a^3 - x^3)}{a^2 + \sqrt{D}},$$

를 얻는다. 이는 $x = 0$에서 아무 문제 없이 정의되며 그곳에서 값은 a이다. 따라서 y_+는 P를 지나는 하나의 매끄러운 갈래이다. 다른 갈래는 작은 x에 대하여 $y_- \approx -a^2/x$를 만족하므로, $x \to 0^+$일 때 $y_- \to -\infty$이고 $x \to 0^-$일 때 $y_- \to +\infty$이다. 이것이 y축을 따라 놓인 점근선(asymptote)이다.

개형을 확정하는 데 도움이 되는 사실이 몇 가지 더 있다.

- 수평 접선은 없다. $y' = 0$이 되려면 $y^2 + 3x^2 = 0$, 즉 $(0,0)$이어야 하는데, 이 점은 C 위에 있지 않다.
- 곡선은 $x^3 = a^3$인 곳, 즉 Q에서만 $y = 0$과 만나고, P에서만 $x = 0$과 만난다.
- $x = a$에서 $D = a^4$이므로 $y_+ = 0$(점 Q)이고 $y_- = -a$(점 R)이다.

이를 종합하면 C는 연결된 하나의 곡선이다. 곡선은 y축 바로 왼쪽에서 $+\infty$로부터 y_-를 따라 내려와 $(\alpha a, 2.03a)$의 수직 접선에 이른다. 거기서 방향을 바꾸어 y_+를 따라 P를 지나고(기울기 -1), Q를 지나 내려가서(기울기 -3) $(\beta a, -0.47a)$의 수직 접선에 이른다. 그다음 다시 방향을 바꾸어 y_-를 따라 R을 지나고(기울기 4), y축 바로 오른쪽에서 $-\infty$로 내려간다. P에서는 아래로 볼록하고 Q에서는 위로 볼록하므로, 그 사이에 변곡점(point of inflection)이 있다.



($a = 1$로 그렸다. 점선은 앞에서 구한 띠의 경계이다.)

검산

- $a = 1.7$로 두고, 각 점 근처의 $x = x_0 + h$에서 이차방정식을 풀어 y를 구했다. h를 절반으로 줄일 때마다 두 항까지의 테일러 급수 각각의 오차가 약 8배씩 줄었는데, 이는 예상대로 h^3의 거동이다.
- x의 무작위 값 10^5개를 택했을 때, 이차방정식은 정확히 $4x^4 - 4a^3x - a^4 \le 0$일 때 실근을 가졌다.

- 이분법(bisection)으로 $\alpha \approx -0.2463$과 $\beta \approx 1.0724$를 얻는다. $x = \pm 0.001$에서($a = 1.7$일 때) 한 근은 a에 가깝고 다른 근은 $-a^2/x \approx \mp 2890$에 가깝다.

흔한 실수

- 인수 $\frac{1}{2}$를 빠뜨리는 것. h^2의 계수는 y''가 아니라 $\frac{1}{2}y''$이다.
- $x = 0$인 경우를 따로 확인하지 않고 판별식을 쓰기 위해 x로 나누는 것.
- y_+가 P를 매끄럽게 지난다는 점을 놓치는 것. $(-a^2 + \sqrt{D})/(2x)$로 쓰면 $x = 0$에서 특이점이 있는 것처럼 보이지만 실제로는 그렇지 않다.

STEP 너머

여기서는 음함수로 정의된 함수의 테일러 전개로부터 한 점 근처에서 곡선의 거동을 알아냈다. $\partial F/\partial y \neq 0$인 곳이면 어디서나 y가 x의 매끄러운 함수임을 보장하는 정리가 **음함수 정리**(*implicit function theorem*)로, 다변수 해석학(multivariable analysis)의 핵심 결과이다. 띠의 양 끝에 있는 수직 접선은 정확히 $\partial F/\partial y = 2xy + a^2$가 0이 되는 점들이다. 이 곡선은 평면 위의 삼차 곡선(cubic)이며, 이러한 곡선에 대한 연구는 대수기하학(algebraic geometry)과 타원곡선(elliptic curves)으로 이어진다. 이런 유형의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP III 1990, 문제 8

순수수학 • 완전미분방정식

> **STEP III 1990, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q8

핵심 아이디어

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py' + qy)$를 전개하여 $Py'' + Qy' + Ry$와 비교한다. 그러면 p와 q가 완전히 결정되고, 조건 $P'' - Q' + R = 0$은 바로 마지막 계수가 맞아떨어지게 하는 조건이다. 주어진 미분방정식(differential equation)에서는 이 조건이 성립하므로, 한 번 적분하면 2계(second-order) 방정식이 곧바로 1계 선형(first-order linear) 방정식이 되고, 이것은 적분인자(integrating factor)로 마무리된다.

풀이

완전성 판정법(exactness criterion)

임의의 함수 p, q, y에 대하여 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py' + qy) = py'' + (p' + q)y' + q'y. \tag{$*$}$$

필요성. (y에 의존하지 않는) p와 q가 모든 y에 대하여 $Py'' + Qy' + Ry$를 $(*)$와 같게 만든다고 하자. $y = 1$로 놓으면 $R = q'$이다. $y = x$로 놓으면 $Q + Rx = (p' + q) + q'x$이므로 $Q = p' + q$이다. $y = \frac{1}{2}x^2$으로 놓으면 $P + Qx + \frac{1}{2}Rx^2 = p + (p' + q)x + \frac{1}{2}q'x^2$이므로 $P = p$이다. 따라서

$$P'' - Q' + R = p'' - (p'' + q') + q' = 0.$$

충분성. $P'' - Q' + R = 0$이라 하자.

$$p = P, \qquad q = Q - P'.$$

으로 택한다. 그러면 조건을 이용하여 $p' + q = P' + Q - P' = Q$이고 $q' = Q' - P'' = R$이다. $(*)$에 의해 모든 y에 대하여 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py' + qy) = Py'' + Qy' + Ry$이므로 원하는 결과를 얻는다.

이 과정은 또한 p와 q가 반드시 P와 $Q - P'$이어야 함을 보여 준다. 아래에서도 이 방법으로 이들을 구한다.

미분방정식

여기서 $P = x - x^4$, $Q = 1 - 7x^3$, $R = -9x^2$이므로

$$P'' - Q' + R = -12x^2 - (-21x^2) - 9x^2 = 0.$$

따라서 판정법을 적용할 수 있고, $p = P = x - x^4$, $q = Q - P' = (1 - 7x^3) - (1 - 4x^3) = -3x^3$이다. 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x - x^4)y' - 3x^3 y\right] = (x^3 + 3x)\mathrm{e}^x.$$

부분적분(integration by parts)을 반복하면 $\int x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\mathrm{e}^x$이고 $\int 3x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (3x - 3)\mathrm{e}^x$이므로

$$(x - x^4)y' - 3x^3 y = (x^3 - 3x^2 + 9x - 9)\mathrm{e}^x + C.$$

$x = 2$에서 $y = 2\mathrm{e}^2$, $y' = 0$이므로 좌변은 $-3 \cdot 8 \cdot 2\mathrm{e}^2 = -48\mathrm{e}^2$이고 우변은 $5\mathrm{e}^2 + C$이다. 따라서 $C = -53\mathrm{e}^2$이다.

> **생각해 보기** 좌변 $(x - x^4)y' - 3x^3 y$는 $(x - x^4)y$의 도함수가 아니다. 두 번째 적분은 어떻게 할까?

x를 묶어 내면 좌변은 $x\left[(1 - x^3)y' - 3x^2 y\right] = x\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 - x^3)y\right]$이다. (이것은 통상의 적분인자이다. $y' - \frac{3x^2}{1-x^3}y$의 적분인자는 $\exp\int \frac{-3x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = 1 - x^3$이다.) 해가 $x = 2$ 근처에서 정의되므로 x로 나누어도 되고, 그러면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 - x^3)y\right] = (x^2 - 3x + 9)\mathrm{e}^x - \frac{9\mathrm{e}^x}{x} - \frac{53\mathrm{e}^2}{x}.$$

다시 부분적분하면 $\int (x^2 - 3x + 9)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x^2 - 5x + 14)\mathrm{e}^x$이다. 항 e^x/x는 초등함수인 역도함수(antiderivative)를 갖지 않으므로, 출발점 $x = 2$부터의 적분으로 남겨 둔다.

$$(1 - x^3)y = (x^2 - 5x + 14)\mathrm{e}^x - 53\mathrm{e}^2 \ln\frac{x}{2} - 9\int_2^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t + D.$$

$x = 2$에서 좌변은 $-7 \cdot 2\mathrm{e}^2 = -14\mathrm{e}^2$이고 우변은 $8\mathrm{e}^2 + D$이므로 $D = -22\mathrm{e}^2$이다. 따라서

$$\boxed{y = \frac{1}{1 - x^3}\left[(x^2 - 5x + 14)\mathrm{e}^x - 22\mathrm{e}^2 - 53\mathrm{e}^2 \ln\frac{x}{2} - 9\int_2^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\right]}$$

이고, 이는 $x > 1$에서 성립한다. y''의 계수 $x - x^4$는 $x = 1$에서 0이 되므로, $x = 2$를 지나는 해는 $x > 1$에서 정의되며 $x = 1$ 너머로 확장될 필요가 없다.

검산

- $x = 2$에서 대괄호 안은 $8e^2 - 22e^2 = -14e^2$이고, 이를 $1 - 8 = -7$로 나누면 $y = 2e^2$이 되어 조건과 맞는다.
- 원래 방정식을 $x = 2$부터 수치적으로 풀면(4차 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) $y(3) \approx 7.90306$을 얻는데, 이는 적분을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산한 공식의 값과 일치한다. 두 값은 $x = 1.2, 1.5, 4$에서도 일치한다.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x - x^4)y' - 3x^3y\right]$를 전개하면 다시 $(x - x^4)y'' + (1 - 7x^3)y' - 9x^2y$가 나온다.

흔한 실수

- 첫 번째 적분 후 상수 C를 빠뜨리는 것. 여기서는 이 상수가 0이 아니며, 로그항을 만들어 낸다.
- $\int e^x/x\,\mathrm{d}x$를 억지로 닫힌 형태로 구하려는 것. 이는 불가능하므로 아래끝이 2인 정적분(definite integral)으로 남겨 두어야 하며, 그렇게 하면 초기조건(initial condition)을 적용하기도 쉽다.

STEP 너머

완전한 도함수가 되는 식 $Py'' + Qy' + Ry$를 **완전**(*exact*)하다고 한다. 식 $P'' - Q' + R$는 **수반**(*adjoint*) 방정식 $(Pz)'' - (Qz)' + Rz = 0$의 좌변에 $z = 1$을 대입한 값이다. 일반적으로 수반 방정식의 임의의 해 z는 $z(Py'' + Qy' + Ry)$를 완전하게 만드는 적분인자이다. 수반 방정식은 자기수반(self-adjoint) 문제(슈투름-리우빌(Sturm–Liouville) 문제)와 그린 함수(Green's function)로 이어진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 2계 선형 방정식에 관한 연습문제에서 완전 방정식과 수반 방정식을 다룬다.

풀이

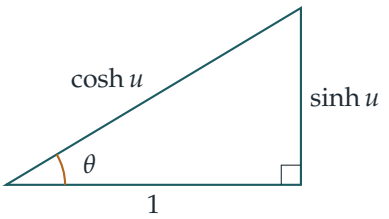
STEP III 1990, 문제 9

순수수학 • 쌍곡선 함수

> **STEP III 1990, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q9

핵심 아이디어

관계식 $\tan\theta = \sinh u$는 $\sec^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$와 같으므로, 두 변수의 삼각함수(trigonometric function)와 쌍곡선함수(hyperbolic function)는 정확히 짝을 이룬다: $\cos\theta = \operatorname{sech} u$, $\sin\theta = \tanh u$, $\sec\theta = \cosh u$. 세 변의 길이가 1, $\sinh u$, $\cosh u$인 직각삼각형을 그려 보면 이 관계를 한눈에 모두 볼 수 있다. 이 대응표만 손에 넣으면 각 소문항은 짧은 미분 계산을 한 뒤 다시 원래 변수로 옮겨 쓰는 것으로 끝난다.



풀이

풀이 전체에서 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\tan\theta \ge 0$이고, 따라서 $\sinh u \ge 0$, $u \ge 0$이다. 또한 $\cos\theta > 0$, $\cosh u > 0$이다.

소문항 (i)

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$와 $1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$를 이용하면

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u.$$

$\sec\theta$와 $\cosh u$는 모두 양수이므로 $\sec\theta = \cosh u$, 즉 $\cos\theta = \operatorname{sech} u = v$이고, 이것이 보이려던 것이다.

짝이 되는 사실도 적어 둘 만하다: $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \sinh u \operatorname{sech} u = \tanh u$.

소문항 (ii)

$\tan\theta = \sinh u$를 u에 대하여 (연쇄법칙(chain rule)을 이용한 음함수 미분(implicit differentiation)으로) 미분하면

$$\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u\cos^2\theta = \cosh u\operatorname{sech}^2 u = \operatorname{sech} u = v,$$

여기서 $\cos\theta$에 대해서는 소문항 (i)을 이용하였다.

소문항 (iii)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\cosh u = \sinh u$이므로

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\big(\cosh u\big)^{-1} = -\frac{\sinh u}{\cosh^2 u} = -\operatorname{sech} u\tanh u.$$

대응표를 쓰면 $\operatorname{sech} u\tanh u = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$이므로

$$\sin 2\theta = -2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}.$$

이계도함수(second derivative)를 구할 때는 곱의 미분법(product rule)과 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u$를 함께 쓴다:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} &= -\Big[(-\operatorname{sech} u\tanh u)\tanh u + \operatorname{sech} u\cdot\operatorname{sech}^2 u\Big]\\ &= \operatorname{sech} u\big(\tanh^2 u - \operatorname{sech}^2 u\big).\end{aligned}$$

$-\cosh u$를 곱하면 $\operatorname{sech} u$가 소거된다:

$$-\cosh u\,\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} = \operatorname{sech}^2 u - \tanh^2 u = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,$$

이것이 두 번째 결과이다.

소문항 (iv)

이제 u와 v를 θ의 함수로 본다. 소문항 (i)에서 $v = \cos\theta$, $\cosh u = \sec\theta$이고, 소문항 (ii)에서 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1\big/\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = 1/v$이다($v > 0$이므로 성립한다). 따라서

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sec\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = \sec\theta\tan\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2} = -\cos\theta.$$

생각해 보기 무작정 계산에 들어가기 전에, 문제에 인쇄된 (iv)의 항등식이 정말 옳아 보이는가?

그렇지 않다. 인쇄된 대로라면 첫째 항에 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$가 있고, 그러면 좌변은

$$\begin{aligned}\sec\theta\cdot\sec\theta\tan\theta-\sin\theta\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta&=\sec^2\theta\tan\theta+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)\\&=\sec^2\theta\tan\theta+1\ \geq 1,\end{aligned}$$

이 되어 결코 0이 되지 않는다. 의도한 항등식은 첫째 항에 $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}$가 있는 것이다($v$를 u로 잘못 인쇄한 오식(misprint)이다):

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=0.$$

네 도함수를 대입하면

$$\sec\theta(-\cos\theta)+(-\sin\theta)\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta=-1-\tan^2\theta+\sec^2\theta=0,$$

이다. $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$이기 때문이다. 이로써 수정된 결과가 증명된다.

더 깔끔하게 보는 방법도 있다. 곱의 미분법에 의해 처음 두 항은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right)$이고, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=-\sec\theta\sin\theta=-\tan\theta$이며, 그 도함수는 $-\sec^2\theta=-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$이다.

검산

$u=\ln 2$로 잡으면 $\sinh u=\frac{3}{4}$, $\cosh u=\frac{5}{4}$이고 $\tan\theta=\frac{3}{4}$이다. 세 변이 3–4–5인 삼각형에서 $\cos\theta=\frac{4}{5}=\operatorname{sech}u$, $\sin 2\theta=\frac{24}{25}$를 얻고, 한편 $-2\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}u=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$이다. 수치적으로도 무작위로 뽑은 2000개의 점에서 유한차분(finite difference)으로 구한 도함수가 (i)–(iii)과 수정된 (iv)에 약 10^{-7} 이내로 일치하며, 인쇄된 (iv)의 좌변이 $1+\sec^2\theta\tan\theta$와 같음도 확인된다.

흔한 실수

- $\cos\theta=\pm\operatorname{sech}u$에서 양의 부호가 옳은 이유를 말하지 않고 넘어가는 것: 이를 결정하는 것은 범위 $0\leq\theta<\frac{1}{2}\pi$이다.
- $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$가 단지 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}$의 역수라는 사실을 잊고, $\operatorname{arsinh}(\tan\theta)$를 처음부터 미분하는 것.

STEP 너머

함수 $\theta(u)=\arctan(\sinh u)$는 **구더만 함수**(*Gudermannian function*)로, 복소수(complex number) 없이 원함수와 쌍곡선함수를 이어 준다. 그 역함수 $u=\ln(\sec\theta+\tan\theta)=$

$\int_0^\theta \sec t \, \mathrm{d}t$는 바로 메르카토르(Mercator) 지도의 세로 좌표이다. 같은 짝짓기는 $\cosh(\mathrm{i}x) = \cos x$라고 쓸 때에도 나타나며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 연결을 기하학적으로 살펴보기에 훌륭한 책이다.

풀이

STEP III 1990, 문제 10

순수수학 • 근과 점근 근사

STEP III 1990, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q10

핵심 아이디어

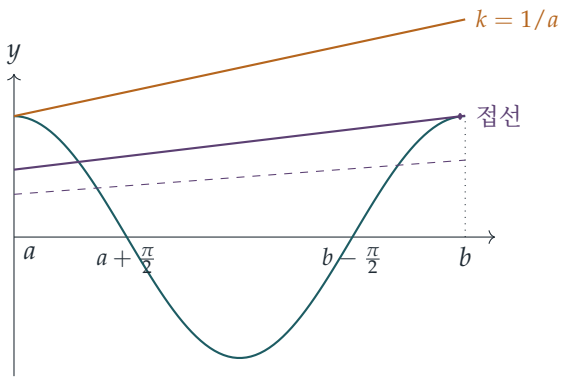
주어진 구간에서 $\sin x$는 꼭대기에서 시작하여 꼭대기에서 끝나면서 한 주기(period)를 온전히 지나고, 직선 $y = kx$는 양수이며 천천히 올라간다. 근(root)은 $\sin x > 0$인 곳에서만 생길 수 있는데, 그런 곳은 서로 떨어진 두 구간이다. 하나는 $\sin x$가 감소하는 구간(교점이 많아야 하나)이고, 다른 하나는 $\sin x$가 증가하면서 위로 볼록(concave)한 구간(교점이 많아야 둘)이다. 흥미로운 경계는 직선이 두 번째 봉우리에 딱 접하는 경우이다. 접점을 구간의 오른쪽 끝에서 왼쪽으로 작은 거리 δ만큼 떨어진 점으로 쓰면, 접할 조건이 주어진 방정식으로 바뀐다.

풀이

이제부터 다음과 같이 쓴다.

$$a = (4n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad b = (4n+5)\frac{\pi}{2} = a + 2\pi,$$

그러면 구간은 $a < x < b$이다. $\sin a = \sin b = 1$이므로 $\sin x$의 그래프는 꼭대기에서 시작하여 $x = a + \frac{\pi}{2}$에서 0으로 떨어지고, $x = a + \frac{3\pi}{2} = b - \frac{\pi}{2}$까지 음수이며, 그 뒤 b에서 다시 꼭대기로 올라간다.



그림($n = 1$일 때 실제 비율로 그렸으며, 원점은 왼쪽 멀리 있다)에서 청록색은 $\sin x$, 호박색은 $(a, 1)$을 지나는 직선, 자주색 실선은 접선(tangent line), 자주색 점선은 곡선과 세 번 만나는 더 완만한 직선이다.

가능한 근의 개수

$k > 0$이고 $x > 0$이므로 $kx > 0$이다. 따라서 모든 근은 $\sin x > 0$인 곳, 즉 $I_1 = (a, a + \frac{\pi}{2})$ 또는 $I_2 = (b - \frac{\pi}{2}, b)$에 있다.

I_1에서. 여기서 $\sin x$는 순감소(strictly decreasing)하고 kx는 순증가하므로 $kx - \sin x$는 순증가하며, 근은 많아야 하나이다. 오른쪽 끝에서 $kx - \sin x > 0$이고, $x = a$에서는 그 값이 $ka - 1$이다. 따라서 $ka < 1$이면 I_1에 근이 정확히 하나 있고, $ka \geq 1$이면 근이 없다(이때 구간 전체에서 $kx - \sin x > 0$이다).

I_2에서. $f(x) = \sin x - kx$라 하자. 여기서 $f''(x) = -\sin x < 0$이므로 f는 위로 볼록하고, I_2에서 영점이 많아야 둘이다. 또 왼쪽 끝에서 $f < 0$이고 $f(b) = 1 - kb$이다.

- $kb < 1$이면 f는 음수에서 양수로 가는데, 위로 볼록한 함수는 올라가는 동안 부호가 한 번만 바뀔 수 있으므로 근은 정확히 하나이다. $kb = 1$일 때도 마찬가지이다. 이때 $f(b) = 0$이고 $f'(b) = \cos b - k = -k < 0$이므로 b의 바로 왼쪽에서 $f > 0$이며, 따라서 I_2 내부에 근이 하나 있다(b 자체에서의 영점은 제외된다).
- $kb > 1$이면 양 끝에서 $f < 0$이므로, I_2에서 f의 최댓값이 음수인지, 영인지, 양수인지에 따라 근은 각각 0, 1, 2개이다. 값이 0인 경우가 접하는 경우이다. 즉 직선이 어떤 점 $t \in I_2$에서 봉우리에 접하며, 이때의 기울기를 k_t라 하자. k가 큰 값에서부터 줄어들면 직선이 내려오므로, $k > k_t$이면 근이 없고, $k = k_t$이면 하나, $\frac{1}{b} < k < k_t$이면 둘이다.

접점에서 $k_t t = \sin t < 1$이고 $t > a$이므로 $k_t < 1/a$이다. 또 접하는 경우는 $kb > 1$이므로 $k_t > 1/b$이다. 두 구간을 합치면 다음과 같다.

k의 범위	I_1의 근	I_2의 근	합계
$k \le 1/b$	1	1	2
$1/b < k < k_t$	1	2	3
$k = k_t$	1	1	2
$k_t < k < 1/a$	1	0	1
$k \ge 1/a$	0	0	0

따라서 방정식은 주어진 구간에서 근을 0, 1, 2, 3개 가질 수 있고, 이것이 보여야 할 내용이다.

근이 정확히 하나인 경우

표에서 근이 정확히 하나인 것은 바로 $k_t < k < \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$일 때이다. 이제 k_t를 설명하면 된다.

? 생각해 보기 "직선이 곡선에 접한다"를 어떻게 식으로 바꿀까?

직선 $y = kx$가 $x = t$에서 $y = \sin x$에 접한다는 것은 두 그래프가 그 점에서 만나고 **동시에** 기울기가 같다는 뜻이다.

$$\sin t = k_t t, \qquad \cos t = k_t.$$

점 t는 I_2에 있으므로 $t = b - \delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$로 쓰자. $\sin b = 1$이고 $\cos b = 0$이므로

$$\sin t = \sin(b-\delta) = \cos\delta, \qquad \cos t = \cos(b-\delta) = \sin\delta.$$

따라서 기울기 조건에서 $k_t = \sin\delta$를 얻고, 만나는 조건은 다음이 된다.

$$\cos\delta = \left((4n+5)\frac{\pi}{2} - \delta\right)\sin\delta.$$

그러므로 근이 정확히 하나인 것은

$$\sin\delta < k < \frac{2}{(4n+1)\pi},$$

일 때이며, 여기서 δ는 위에서 설명한 것이다. 이것이 보여야 할 내용이다.

큰 n에 대한 근사

δ에 대한 방정식을 $\sin\delta$로 나누면(그 값은 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$이므로 영이 아니다)

$$\cot\delta = b - \delta, \qquad \text{즉} \qquad \tan\delta = \frac{1}{b-\delta}.$$

$\delta < \frac{\pi}{2}$이므로 우변은 $1/(b - \frac{\pi}{2})$보다 작고, 이 값은 n이 클 때 작다. 따라서 δ는 작고 $\tan\delta \approx \delta$, $b - \delta \approx b$이므로

$$\delta \approx \frac{1}{b} = \frac{2}{(4n+5)\pi}.$$

다음 근사를 위해 $\delta = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c}{b^3}$로 놓고 양변에서 b^{-3}까지의 항을 남긴다. 좌변은 $\tan\delta = \delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \cdots = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c+\frac{1}{3}}{b^3} + \cdots$이다. 우변은

$$\frac{1}{b-\delta} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\delta}{b} + \cdots\right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^3} + \cdots,$$

이며, 보정항에서는 $\delta \approx 1/b$를 썼다. b^{-3} 항을 비교하면 $c + \frac{1}{3} = 1$이므로 $c = \frac{2}{3}$이고

$$\delta \approx \frac{1}{b} + \frac{2}{3b^3} = \frac{2}{(4n+5)\pi} + \frac{16}{3(4n+5)^3\pi^3}.$$

(같은 결과를 다른 방법으로 얻을 수도 있다. $\delta = 1/b$에서 출발하여 반복(iteration) $\delta \mapsto \arctan\dfrac{1}{b-\delta}$을 한 번 적용하면 $\arctan\dfrac{b}{b^2-1}$을 얻는데, 이것도 같은 전개를 갖는다.) 따라서 k의 구간의 아래쪽 끝은 $\sin\delta \approx \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2b^3}$이다.

검산

- $n = 1$일 때 $\cos\delta = (\frac{9\pi}{2} - \delta)\sin\delta$를 수치적으로 풀면 $\delta = 0.070973$이고, $1/b = 0.070736$, $1/b + 2/(3b^3) = 0.070971$이다. 개선된 근사가 약 150배 더 가깝다. $n = 10$이면 오차는 약 5×10^{-10}으로 줄어든다.
- $n = 1, 2, 3, 5$와 표의 각 행에서 고른 k 값에 대해 촘촘한 격자 위에서 $kx - \sin x$의 부호 변화를 세면 예측대로 정확히 $2, 3, 1, 0$개의 근이 나오고, $\sin\delta$와 $2/((4n+1)\pi)$ 사이의 임의의 k에 대해서는 항상 근이 하나 나온다.

흔한 실수

- 접하는 경우를 빠뜨리거나 $1/b$, k_t, $1/a$의 대소 순서를 잘못 잡아 개수를 엉망으로 세는 것.
- 두 번째 근사에서 $\tan\delta \approx \delta$만 써서 $\delta \approx b/(b^2-1) \approx 1/b + 1/b^3$을 얻는 것. $\tan\delta$의 $\frac{1}{3}\delta^3$ 항은 보정항과 같은 차수이므로 반드시 남겨야 한다.

STEP 너머

작거나 큰 매개변수가 있는 방정식의 근에 대해 점점 더 나은 근사를 얻는 것을 **점근 해석**(*asymptotic analysis*)이라 한다. 여기서 한 것과 똑같이 $1/b$의 거듭제곱으로 된 급수를 대입하고 계수를 비교한다. 같은 아이디어를 $\tan x = x$에 적용하면 이 방정식의 큰 근들을 기술할 수 있는데, 이 근들은 열 흐름과 진동 문제에서 나타난다. 이런 전개 뒤에 있는

해석학을 더 알고 싶다면 Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*를 보라. Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*에는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 있다.

풀이

STEP III 1990, 문제 11

역학 • 강체의 회전

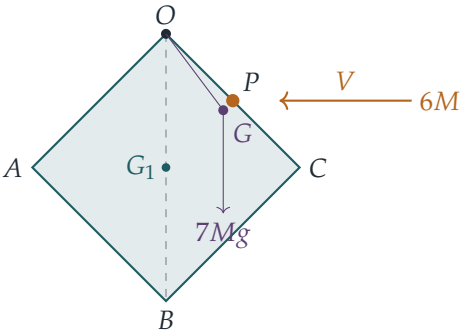
> **STEP III 1990, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q11

핵심 아이디어

충돌은 순간적으로 일어나고, 그동안 O의 회전축은 큰 충격력(impulsive force)을 가하므로 선운동량(linear momentum)은 보존되지 **않는다**. 그러나 그 충격은 O에 작용하므로 O에 대한 모멘트(moment)가 없다. 따라서 회전축에 대한 각운동량(angular momentum)은 충돌 전후로 보존된다. 충돌 이후의 계는 고정된 축에 매달린 강체(rigid body)이고, 일을 하는 힘은 중력뿐이므로 에너지 보존(conservation of energy)을 이용하면 꼭대기를 넘어갈 수 있는지 판단할 수 있다.

풀이

박판(lamina)은 균일한 정사각형 강체로, 입자는 충돌하는 순간 박판에 달라붙는 점질량으로, 회전축은 매끄러운 것으로 모형화한다. O를 원점으로 잡는다. OB가 연직 아래 방향일 때, 정사각형의 중심 G_1은 깊이 $\sqrt{2}\,a$(대각선 $2\sqrt{2}\,a$의 절반)에 있고, A와 C는 OB의 양쪽으로 수평 거리 $\sqrt{2}\,a$만큼 떨어져 있으며 역시 깊이 $\sqrt{2}\,a$에 있다. 따라서 OC의 중점 P는 O로부터 수평 거리 $a/\sqrt{2}$, 깊이 $a/\sqrt{2}$인 곳에 있고, $OP = a$이다.



(그림은 입자가 오른쪽에서 날아오는 경우를 나타낸다. 뒤에서 보겠지만 왼쪽에서 날아와도 답은 같다.)

회전축에 대한 관성 모멘트

한 변의 길이가 $2a$인 균일한 정사각형 박판의 중심을 지나고 판에 수직인 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $\frac{1}{12}M\big((2a)^2+(2a)^2\big) = \frac{2}{3}Ma^2$이다(수직축 정리(perpendicular axis theorem)에 의해, 판 위의 두 축에 대한 관성 모멘트 $\frac{1}{3}Ma^2$를 각각 더한 것이다). 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해, $OG_1 = \sqrt{2}\,a$이므로

$$I_{\text{박판}} = \tfrac{2}{3}Ma^2 + M\big(\sqrt{2}\,a\big)^2 = \tfrac{8}{3}Ma^2.$$

입자는 결국 O로부터 거리 a인 P에 놓이므로, 합쳐진 물체에 대해

$$I = \tfrac{8}{3}Ma^2 + 6Ma^2 = \tfrac{26}{3}Ma^2.$$

충돌

생각해 보기 왜 충돌에서 선운동량 보존을 쓸 수 없을까?

회전축이 고정되어 있기 때문이다. O가 움직이지 않도록 하려면 축은 충돌하는 동안 박판에 충격량(impulse)을 주어야 하며, 그 충격량은 알 수 없다. 하지만 그 작용선은 O를 지나므로 O에 대한 모멘트는 0이고, 중력은 한순간에 충격량을 주지 않는다. 따라서 회전축에 대한 각운동량은 보존된다.

충돌 직전에 O에 대한 입자의 각운동량은 운동량 $6MV$에 O로부터 입자의 (수평) 운동 경로까지의 수직 거리를 곱한 것이며, 이 거리는 P의 깊이, 곧 $a/\sqrt{2}$이다. 박판은 정지해 있다. 충돌 직후에는 물체 전체가 각속력 ω로 회전하므로

$$\tfrac{26}{3}Ma^2\,\omega = 6MV\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad\Longrightarrow\qquad \omega = \frac{9V}{13\sqrt{2}\,a}.$$

그러면 충돌 직후의 운동 에너지는

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{26}{3}Ma^2\cdot\frac{81V^2}{338a^2} = \frac{27}{26}MV^2.$$

완전한 회전

합쳐진 물체의 질량중심(centre of mass) G(질량 $7M$)의 O로부터의 수평 변위와 깊이는

$$\frac{M\cdot 0 + 6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M} = \frac{3\sqrt{2}}{7}a, \qquad \frac{M\cdot\sqrt{2}\,a + 6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M} = \frac{4\sqrt{2}}{7}a,$$

이므로 $OG = \frac{\sqrt{2}}{7}a\sqrt{3^2+4^2} = \frac{5\sqrt{2}}{7}a$이다.

물체는 강체이고 O에 핀으로 고정되어 있으므로 (줄에 매달린 입자와 달리) 원 궤도에서 "떨어져 나갈" 수 없다. 따라서 위치 에너지가 가장 큰 위치, 곧 G가 O의 연직 위에 있는 위치에서도 운동 에너지가 양수일 때, 그리고 그때에만 완전히 회전한다. G는 처음 O 아래 깊이 $\frac{4\sqrt{2}}{7}a$에서 O 위 높이 $\frac{5\sqrt{2}}{7}a$까지 올라가므로

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}a + \frac{5\sqrt{2}}{7}a = \frac{9\sqrt{2}}{7}a,$$

만큼 상승하며, 이는 물체가 어느 방향으로 돌든 같다. 따라서 입자가 어느 쪽에서 왔는지는 상관없다. 충돌 이후에는 중력만 일을 하므로(매끄러운 축은 일을 하지 않는다), 에너지 보존에 의해

$$\frac{27}{26}MV^2 > 7Mg\cdot\frac{9\sqrt{2}}{7}a = 9\sqrt{2}\,Mga,$$

이어야 한다. 즉,

$$\boxed{V^2 > \frac{26\sqrt{2}}{3}ga.}$$

문제의 모든 질량이 M의 배수이므로, 당연히 M은 약분된다. (정확히 등호가 성립하면 물체는 꼭대기 위치를 향해 한없이 느리게 다가갈 뿐 결코 지나가지 못하므로, 부등식은 등호 없이 성립해야 한다.)

검산

- 관성 모멘트, 질량중심(연직 아래 방향과 이루는 각의 tan 값은 $\frac{3}{4}$), 운동 에너지 계수 $\frac{27}{26}$을 모두 수치적으로 확인했다. 관성 모멘트는 기울어진 정사각형 위의 격자에서 적분하여 확인했다.
- $a = 1.3$, $g = 9.81$로 두고 운동 방정식 $I\ddot{\theta} = -7Mg\,x_G$를 수치적으로 단계별 계산했다. V^2이 $\frac{26\sqrt{2}}{3}ga \approx 15.6$의 98%일 때는 물체가 되돌아오고, 102%일 때는 한 바퀴를 완전히 돈다. 입자가 어느 방향에서 오든 마찬가지이다.

- 에너지에 대한 타당성 확인: 입자의 운동 에너지 $3MV^2$ 가운데 $\frac{27}{26}MV^2$만이 충돌 후에 남는데, 이는 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)에서 예상되는 결과이다.

흔한 실수

- 충돌 전후로 선운동량을 보존시키는 것: 축이 충격량을 주므로 선운동량은 보존되지 않는다.
- 입자 운동량의 팔 길이로 운동 경로까지의 수직 거리 $a/\sqrt{2}$ 대신 거리 $OP = a$를 쓰는 것.
- 입자가 달라붙고 나면 질량중심이 OB에서 벗어난다는 것을 잊는 것. 그래서 꼭대기까지의 상승 높이는 단순히 처음 깊이의 두 배가 아니다.

STEP 너머

이것은 고정된 축을 중심으로 회전하는 강체의 역학이다. 여기서는 축에서의 충격 반작용 때문에 충돌에서 보존되는 양이 선운동량이 아니라 각운동량이 된다. 자연스럽게 이어지는 주제로 **타격 중심**(centre of percussion)이 있다. 이는 타격을 가해도 축에 충격 반작용이 전혀 생기지 않는 점으로, 크리켓 배트에 "스위트 스폿"이 있는 이유이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 각충격량을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1990, 문제 12

역학 • 움직이는 쐐기 위의 입자

> **STEP III 1990, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q12

핵심 아이디어

입자가 미끄러지는 동안 두 가지가 보존된다. 수평 방향 운동량(momentum)이 보존되고(탁자가 매끄러우므로 수평 방향의 외력이 없다), 에너지(energy)가 보존된다(모든 면이 매끄럽다). 이 두 법칙과 함께, 입자가 항상 **쐐기에 대하여 상대적으로** 면 AC를 따라 움직인다는 사실을 쓰면 모든 속도가 정해진다. 그 뒤의 튀어 오름과 비행은 쐐기가 일정한 속력으로 미끄러져 가는 동안 일어나는 단순한 포물체 운동(projectile motion)일 뿐이다.

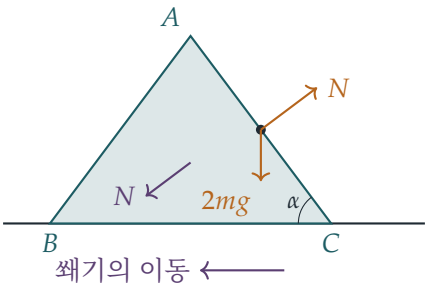
풀이

설정하기

입자를 질량 $2m$인 질점(point mass)으로, 쐐기를 질량 m인 강체(rigid body)로 모형화한다. 모든 접촉면은 매끄럽다. A, B, C를 지나는 연직 단면에서 생각한다. B를 원점에 두고 $C = (6a, 0)$, $A = (3a, 4a)$로 놓는다. 삼각형이 $AB = AC = 5a$이고 밑변의 절반이 $3a$인 이등변삼각형이므로 A의 높이는 $4a$이다. 각 ACB를 α라 하자. 그러면

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

입자는 AC를 따라 미끄러져 내려가며 양의 x 방향으로 움직이고, 쐐기는 음의 x 방향으로 반동한다.



AC를 따라 내려가는 방향으로, **쐐기에 대한** 입자의 상대 속력을 u라 하자. 쐐기의 속도를 V라 하면 이는 수평 방향이다. 입자의 속도는 쐐기의 속도에 쐐기에 대한 상대 속도를 더한 것이다.

$$\mathbf{v}_P = \left(V + u\cos\alpha,\ -u\sin\alpha\right) = \left(V + \tfrac{3}{5}u,\ -\tfrac{4}{5}u\right).$$

미끄러지는 동안의 운동량과 에너지

외력은 중력과 탁자의 연직 반작용뿐이므로 수평 방향 운동량이 보존된다. 처음 운동량이 0이므로

$$2m\left(V + \tfrac{3}{5}u\right) + mV = 0 \quad\Longrightarrow\quad V = -\tfrac{2}{5}u.$$

따라서 입자의 속도는 $\left(\frac{1}{5}u,\ -\frac{4}{5}u\right)$이고 쐐기의 속도는 $-\frac{2}{5}u$이다.

> **?** **생각해 보기** 왜 입자 하나만 따로 떼어서 에너지 보존을 적용하면 안 될까?

입자에 작용하는 수직항력(normal reaction)은 면 AC에 수직이지만, 그 면 자체가 움직이고 있다. 그러므로 입자의 실제 속도는 AC 방향이 아니며, N은 입자에 일을 한다. 에너지가 보존되는 것은 **계** 전체뿐인데, 한 쌍의 수직항력이 하는 일의 합이 0이기 때문이다.

입자는 AC의 아래 끝에 도달할 때까지 높이 $4a$만큼 떨어진다. 계 전체의 에너지 보존으로부터

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(2m)\left(\tfrac{1}{25} + \tfrac{16}{25}\right)u^2 + \tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{4}{25}u^2 &= 2mg\cdot 4a\\ \tfrac{19}{25}u^2 &= 8ga\\ u^2 &= \frac{200ga}{19}.\end{aligned}$$

입자는 내내 면 위에 머문다. 가속도를 이용해 분해해 보면 수직항력이 상수 $N = \frac{10}{19}mg > 0$임을 알 수 있다.

충돌 순간 각 물체의 위치

운동량이 내내 0이므로 계의 질량중심(centre of mass)은 수평 방향으로 움직이지 않는다. 입자가 탁자에 닿을 때까지 입자가 수평으로 x_P, 쐐기가 수평으로 x_W만큼 움직였다고 하자. 그러면 $2m\,x_P + m\,x_W = 0$이다. 쐐기에 대하여 입자는 A에서 C까지, 즉 수평 거리 $3a$만큼 움직였으므로 $x_P - x_W = 3a$이다. 따라서

$$x_P = a, \qquad x_W = -2a.$$

그 순간 입자는 $x = 3a + a = 4a$에 있고 모서리 C는 $6a - 2a = 4a$에 있다. 입자가 막 C에 도달했으므로 둘이 같은 위치에 있는 것은 당연하다.

튀어 오름과 비행

탁자는 고정되어 있고 매끄러우며, 충돌은 완전 탄성 충돌(perfectly elastic)이다. 따라서 입자의 수평 속도는 변하지 않고 연직 속도는 반대가 된다. 입자는 속도 $\left(\frac{1}{5}u,\ \frac{4}{5}u\right)$로 탁자를 떠난다. 다시 탁자에 닿을 때까지의 비행 시간은

$$T = \frac{2 \cdot \frac{4}{5}u}{g} = \frac{8u}{5g}.$$

비행하는 동안 입자는 오른쪽으로 수평 거리 $\frac{1}{5}u \cdot T = \dfrac{8u^2}{25g}$만큼 움직인다.

입자가 떠난 뒤에는 쐐기에 수평 방향의 힘이 작용하지 않으므로, 쐐기는 왼쪽으로 속력 $\frac{2}{5}u$를 유지하며 계속 움직인다. 시간 T 동안 쐐기는 $\frac{2}{5}u \cdot T = \dfrac{16u^2}{25g}$만큼 움직인다. 입자는 오른쪽으로, 쐐기는 왼쪽으로 움직이므로 입자가 다시 쐐기와 만날 수는 없다.

둘 다 $x = 4a$에서 출발하여 서로 반대 방향으로 움직였으므로, D와 E 사이의 거리는 이 두 거리의 합이다.

$$DE = \frac{8u^2}{25g} + \frac{16u^2}{25g} = \frac{24u^2}{25g} = \frac{24}{25} \cdot \frac{200a}{19} = \frac{192}{19}\,a,$$

이로써 요구된 결과를 얻는다.

검산

- 충돌 순간의 전체 운동 에너지: $\frac{19}{25}mu^2 = \frac{19}{25} \cdot \frac{200}{19}mga = 8mga$. 이는 잃은 위치 에너지와 같다.
- 운동량: $2m \cdot \frac{1}{5}u + m \cdot \left(-\frac{2}{5}u\right) = 0$.
- $a = g = m = 1$로 놓고 운동을 수치적으로 단계별 계산하면 $DE \approx 10.1053$이고, $\frac{192}{19} = 10.10526\ldots$이다.

흔한 실수

- 입자의 속도를 AC 방향으로 잡는 것. 그것은 움직이는 쐐기에 **대한 상대** 속도일 뿐이다.
- 입자 하나에 대해 $\frac{1}{2}(2m)u^2 = 2mg \cdot 4a$라고 쓰는 것. 이는 쐐기의 운동 에너지와 N이 한 일을 무시한 것이다.
- DE를 충돌 지점 $x = 4a$가 아니라 C의 원래 위치에서부터 재는 것. 그 순간 입자와 C는 모두 $x = 4a$에 있다.

STEP 너머

매끄러운 탁자 위에서 미끄러지는 쐐기는 **구속 조건**(constraints)이 있는 계의 고전적인 예이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 이런 계를 다룰 때 구속력이 전혀 나타나지 않도록 좌표(여기서는 쐐기의 위치와 비탈을 따라 내려간 입자의 거리)를 고른다. 그러면 보존되는 수평 방향 운동량은 수평 평행이동에 대한 문제의 대칭성에서 나오는데, 이는 뇌터 정리(Noether's theorem)의 한 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 움직이는 좌표계와 다물체계에서의 운동량 보존을 다룬다.

풀이

STEP III 1990, 문제 13

역학 • 구 내부에서의 운동

> **STEP III 1990, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q13

핵심 아이디어

운동은 두 단계로 이루어진다. 먼저 수직항력(normal reaction)이 0이 될 때까지 구면 위에서 원운동(circular motion)을 하고, 그다음에는 포물체(projectile)로서 자유롭게 날아간다. 이탈 조건은 이탈하는 순간의 속력을 θ로 나타내 준다. 나머지는 힌트가 해결한다. 포물체가 다시 구면 위에 있을 조건 $x^2 + y^2 = a^2$를 t에 대한 방정식으로 쓰면 된다. 이탈 조건 때문에 여러 항이 소거되어 식이 아름답게 정리된다.

풀이

모형

P를 입자(particle)로, 반지름이 a인 구를 매끄러운(smooth) 면으로 본다. 그러면 P가 구에 닿아 있는 동안 P에 작용하는 힘은 무게 mg와 O를 향하는 수직항력 R뿐이다. 운동은 O를 지나는 연직 평면 안에서 일어난다. 원점을 O로, x축을 수평 방향으로, y축을 연직 위쪽으로 잡고, P가 구의 오른쪽 면을 타고 올라간다고 하자.

P가 구면에서 떨어지려면 반드시 O보다 높은 곳에서 떨어져야 한다. O보다 낮은 곳에서는 중력의 PO 방향 성분이 O에서 멀어지는 쪽을 향하므로, P가 원 위를 움직이는 동안 그곳에서 R이 0이 될 수 없다. 따라서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

구면에서 떨어지기

OP가 연직 위 방향과 각 θ를 이룰 때 P의 속력을 v라 하자. 이때 P는 O보다 $a\cos\theta$만큼 높은 곳에 있다. O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면 무게의 그 방향 성분은 $mg\cos\theta$이므로

$$R + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}.$$

P는 $R = 0$일 때 떨어지므로, 그 순간

$$v^2 = ag\cos\theta.$$

(에너지 보존(conservation of energy)에 의해 던진 속력 u는 $u^2 = v^2 + 2ga(1+\cos\theta) = ag(2+3\cos\theta)$를 만족해야 하므로, u를 알맞게 고르면 $(0, \frac{\pi}{2})$의 모든 θ를 얻을 수 있다. P가 올라감에 따라 v가 줄고 R도 줄어들므로, R은 정확히 이 지점에서 처음으로 0이 된다.)

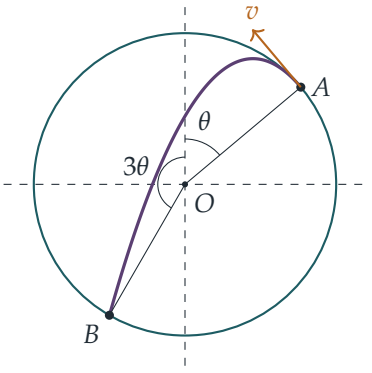
자유 비행

떨어지는 순간을 $t = 0$이라 하자. 이때 P는 $(a\sin\theta, a\cos\theta)$에 있고, 속도는 접선(tangent) 방향으로 OP에 수직이며 위로 꼭대기를 넘어가는 쪽을 향한다.

$$\text{속도} = v(-\cos\theta,\ \sin\theta).$$

그 뒤로는 중력만 작용하므로

$$x = a\sin\theta - vt\cos\theta, \qquad y = a\cos\theta + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



P는 A에서 떨어지고, 아래에서 보이듯이 B에서 다시 구면에 부딪힌다.

P는 $x^2 + y^2 = a^2$일 때 구면 위에 있다. 전개하면 상수항과 t에 대한 일차항은

$$a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = a^2 \qquad \text{그리고} \qquad -2avt\sin\theta\cos\theta + 2avt\cos\theta\sin\theta = 0$$

이므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2-a^2 &= v^2t^2\cos^2\theta + v^2t^2\sin^2\theta - gt^2\left(a\cos\theta + vt\sin\theta\right) + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= \left(v^2 - ag\cos\theta\right)t^2 - gv\sin\theta\, t^3 + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - v\sin\theta\right), \end{aligned}$$

이다. 마지막 단계에서 $v^2 = ag\cos\theta$를 이용하였다.

생각해 보기 왜 $t=0$이 단순한 근이 아니라 삼중근(triple root)으로 나오는가?

떨어지는 순간에는 중력만으로 원 위를 움직이는 데 필요한 O 방향 가속도 v^2/a가 정확히 공급된다. 그래서 포물선은 구면과 같은 방향**뿐 아니라** 같은 곡률(curvature)로 출발한다. 즉 포물선은 구면에 아주 바짝 붙어 있다가 구 안쪽으로 떨어져 나간다. 이 때문에 t항뿐 아니라 t^2항도 소거된다.

$0 < t < 4v\sin\theta/g$에서 이 식은 음수이므로 P는 구의 엄밀히 안쪽에 있고, 다음으로 구면과 만나는 시각은

$$T = \frac{4v\sin\theta}{g}.$$

떨어지는 지점

$t = T$에서 $vT\sin\theta = 4v^2\sin^2\theta/g = 4a\cos\theta\sin^2\theta$와 $\frac{1}{2}gT^2 = 8v^2\sin^2\theta/g = 8a\cos\theta\sin^2\theta$를 이용하면

$$y = a\cos\theta + 4a\cos\theta\sin^2\theta - 8a\cos\theta\sin^2\theta = a\cos\theta\left(1-4\sin^2\theta\right).$$

($\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(1-4\sin^2\theta)$이므로 이는 $a\cos 3\theta$이다. 마찬가지로 $x = -a\sin 3\theta$이므로, 충돌 지점 B는 그림에서처럼 반대쪽에서 연직 위 방향과 각 3θ를 이루는 곳에 있다.)

P가 O보다 낮은 곳에 부딪힐 필요충분조건은 $y<0$이다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta>0$이고, 따라서

$$y<0 \iff 1-4\sin^2\theta<0 \iff \sin\theta>\tfrac{1}{2} \iff \theta>\tfrac{\pi}{6},$$

이다. 마지막 단계는 sin이 $(0,\frac{\pi}{2})$에서 증가하기 때문이다. $\theta=\frac{\pi}{6}$이면 P는 정확히 O와 같은 높이에서 구면에 부딪힌다. 따라서 θ가 넘어야 하는 각은

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ}$$

이고, $30^\circ < \theta < 90^\circ$인 모든 θ에 대하여 실제로 O보다 낮은 곳에서 충돌이 일어난다.

검산

- $\theta = 60°$: 공식에서 $y = a\cos 180° = -a$이므로, P는 가장 낮은 점, 즉 던진 지점으로 되돌아와 떨어진다. $\theta = 45°$이면 연직 위 방향에서 $135°$인 곳에 떨어진다. 두 경우 모두 예상대로 $y < 0$이다.
- $\theta \to 0$이면 $T \to 0$이고 $B \to A$이다. 꼭대기에서 겨우 떨어지는 입자는 곧바로 구면 위로 다시 떨어진다.
- 수치 시뮬레이션($R = 0$이 될 때까지 구면 위의 운동을 단계별로 계산하고, 그다음 구면과 만날 때까지 포물체 운동을 계산)을 $\theta = 10°, 25°, 29°, 30.5°, 31°, 45°, 60°, 80°$에 대해 수행한 결과, 소수점 넷째 자리까지 $T = 4v\sin\theta/g$ 및 $y = a\cos 3\theta$와 일치하였다. 예를 들어 $\theta = 31°$이면 $y/a = -0.0523$이다.

흔한 실수

- 속도의 방향을 잘못 잡는 것. 속도는 OP에 수직이고 여전히 위로 꼭대기를 넘어가는 쪽을 향하며, 성분은 $(v\sin\theta, v\cos\theta)$가 아니라 $(-v\cos\theta, v\sin\theta)$이다.
- $x^2 + y^2 = a^2$를 풀기 전에 $v^2 = ag\cos\theta$를 쓰는 것을 잊는 것. 그러면 깔끔한 인수분해(factorisation) 대신 다루기 힘든 사차식(quartic)이 남는다.
- P가 O보다 높은 곳에서 떨어지므로 $\cos\theta > 0$이라는 점을 언급하지 않고 $1 - 4\sin^2\theta < 0$을 얻기 위해 양변을 나누는 것.

STEP 너머

$t = 0$에서의 삼중근은 **접촉**(*osculation*)에 관한 사실이다. 포물선과 원은 이탈 지점에서 접선과 곡률을 공유하므로 2차 접촉을 한다. 곡률과 접촉원(osculating circle)은 곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 핵심적인 개념이며, 역학에서 가속도를 접선 성분과 법선 성분으로 나눌 때마다 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 극좌표(polar coordinates)에서의 운동과 이러한 종류의 구속 운동(constrained motion)을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1990, 문제 14

역학 • 힘의 계

STEP III 1990, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

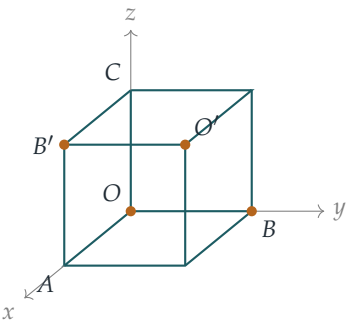
step.maths.org/questions/90-s3-q14

핵심 아이디어

강체(rigid body)에 작용하는 힘의 계는 결국 두 벡터로 요약된다. 하나는 합력(resultant) $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$이고, 다른 하나는 선택한 점에 대한 모멘트(moment) $\mathbf{G}_P = \sum (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}) \times \mathbf{F}_i$이다. 기준점을 O에서 P로 옮기면 모멘트는 간단한 규칙 $\mathbf{G}_P = \mathbf{G}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{R}$에 따라 바뀐다. 이 문제의 모든 부분은 이 규칙을 서로 다른 P에 적용한 것이다.

풀이

정육면체를 모서리의 길이가 a인 강체로 모형화하면 $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$, $C = (0, 0, a)$이고, B의 맞은편 꼭짓점은 $B' = (a, 0, a)$이다.



λ, μ, ν 구하기

O에 작용하는 힘은 O에 대한 모멘트가 없으므로 나머지 세 힘만 고려하면 된다. $(x,y,z)\times(p,q,r) = (yr-zq,\ zp-xr,\ xq-yp)$를 이용하면 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OO'}\times\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\\lambda-1\\-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB'}\times\begin{pmatrix}1\\\mu\\\nu\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\\mu\\\nu\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-\mu\\1-\nu\\\mu\end{pmatrix}.$$

이를 더하면 O에 대한 전체 모멘트는 $a\,(3-\mu,\ \lambda-\nu,\ 1-\lambda+\mu)$이다. 각 성분을 영으로 놓으면 $\mu = 3$, 이어서 $\lambda = 1+\mu = 4$, 그리고 $\nu = \lambda = 4$를 얻는다.

$$\lambda = 4, \qquad \mu = 3, \qquad \nu = 4.$$

이 중 어느 것도 α, β, γ에 의존하지 않으며, 합력은 다음과 같다.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\alpha+\lambda-1+1\\\beta+\mu\\\gamma+1+2+\nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+4\\\beta+3\\\gamma+7\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G}_O = \mathbf{0}.$$

소문항 (i)

$\alpha = \beta = \gamma = 0$이면 $\mathbf{R} = (4,3,7)$이다. 두 힘의 계는 합력이 같고 한 점에 대한 모멘트가 같을 때(따라서 모든 점에 대한 모멘트가 같을 때) 동등(equivalent)하다. 그러므로 B에 작용하는 하나의 힘은 $\mathbf{R}$ 자체여야 하고, 짝힘(couple)은 원래 계의 B에 대한 모멘트와 같아야 한다.

$$\mathbf{G}_B = \mathbf{G}_O - \overrightarrow{OB}\times\mathbf{R} = \mathbf{0} - a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix}7\\0\\-4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-7\\0\\4\end{pmatrix}.$$

생각해 보기 B에 대한 모멘트가 왜 $\mathbf{G}_O - \overrightarrow{OB}\times\mathbf{R}$와 같을까?

각 힘에 대하여 $(\mathbf{r}_i - \mathbf{b})\times\mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i - \mathbf{b}\times\mathbf{F}_i$이고, 이를 i에 대해 모두 더하면 $\mathbf{G}_O - \mathbf{b}\times\mathbf{R}$가 된다.

따라서 동등한 계는 B에 작용하는 힘 $(4,3,7)$과 모멘트가 $a(-7,0,4)$인 짝힘으로 이루어진다. 검산해 보면, B에 작용하는 힘과 이 짝힘을 합한 것의 O에 대한 모멘트는 $a(7,0,-4)+a(-7,0,4)=\mathbf{0}$으로, 마땅히 그래야 하는 결과와 일치한다.

소문항 (ii)

이제 $\mathbf{R}=(2+4,\ 3+3,\ 2+7)=(6,6,9)=3(2,2,3)$이고, 여전히 $\mathbf{G}_O=\mathbf{0}$이다. 위치벡터(position vector)가 $\mathbf{r}=(x,y,z)$인 점 P에서

$$\mathbf{G}_P=\mathbf{G}_O-\mathbf{r}\times\mathbf{R}=-\mathbf{r}\times\mathbf{R}.$$

$\mathbf{R}\neq\mathbf{0}$이므로, 이것은 $\mathbf{r}$가 $\mathbf{R}$에 평행할 때(또는 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$일 때) 그리고 그때에만 영벡터가 된다. 따라서 구하는 자취(locus)는 O를 지나고 방향이 $(2,2,3)$인 직선이다.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

물리적으로 보면, 전체 계는 이 직선을 따라 작용하는 하나의 힘 $(6,6,9)$와 동등하다.

정육면체가 회전 없이 평행이동(translation)하면 모든 점이 같은 변위(displacement)만큼 움직이므로, 힘이 한 일(work)은 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{s}$이다. 여기서 $\mathbf{s}$는 변위이다. 직선을 따라 $(2,2,3)$ 방향으로 거리 d만큼 움직이면 $\mathbf{s}=\dfrac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)$이고

$$W=(6,6,9)\cdot\frac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)=\frac{51d}{\sqrt{17}}=3\sqrt{17}\,d.$$

문제에서는 거리를 따로 정하지 않았으므로, 단위 거리당 한 일은 $3\sqrt{17}\approx 12.37$ 단위이다. $\mathbf{R}$가 이 직선 위에 놓여 있으므로 이 값은 그냥 $|\mathbf{R}|\,d=\sqrt{36+36+81}\,d=\sqrt{153}\,d$이며, 같은 수이다. (직선을 따라 반대 방향으로 움직이면 $-3\sqrt{17}\,d$가 된다.)

검산

- $\lambda=4,\ \mu=3,\ \nu=4$일 때 O에 대한 세 모멘트는 $a(1,3,-4)$, $a(2,0,1)$, $a(-3,-3,3)$이고, 이들의 합은 영벡터이다.
- (ii)에서 $P=(2,2,3)$을 택하면 $\mathbf{r}\times\mathbf{R}=(2,2,3)\times(6,6,9)=\mathbf{0}$이다. $P=(1,0,0)$에서의 모멘트는 $-(0,-9,6)\neq\mathbf{0}$이다.
- 정확한 분수 계산을 하는 컴퓨터로 모든 모멘트를 확인하였고, (i)의 동등한 계가 임의로 고른 20개의 점에 대해 원래 계와 같은 모멘트를 가짐을 확인하였으며, 단위 거리당 한 일이 $3\sqrt{17}\approx 12.369$임을 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$에서 순서를 잘못 쓰는 것: 순서를 뒤집으면 모든 부호가 바뀐다.
- (i)의 짝힘을 $+\overrightarrow{OB} \times \mathbf{R}$로 잡는 것. 힘을 O에서 B로 옮기려면 반대 부호의 보정 짝힘이 필요하다.
- 서로 다른 꼭짓점에 작용하는 힘들에 대해 각각 일을 구해 더하는 것. 순수한 평행이동에서는 합력만이 중요하다.

STEP 너머

강체에 작용하는 임의의 힘의 계는 어떤 직선을 따라 작용하는 하나의 힘과 그 같은 직선에 대한 짝힘으로 환원된다. 이것을 **렌치**(wrench)라 하며, 그 피치(pitch)는 $\mathbf{R} \cdot \mathbf{G} / |\mathbf{R}|^2$이다. (ii)에서는 피치가 영이므로 렌치는 그냥 하나의 힘이고, 모멘트가 영인 자취는 그 힘의 작용선(line of action), 곧 중심축(central axis)이다. 이러한 개념은 강체 동역학과 로봇공학의 나사 이론(screw theory)으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 토크와 강체를 알맞은 수준으로 다룬다.

풀이

STEP III 1990, 문제 15

확률과 통계 • 기하분포

> **STEP III 1990, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q15

핵심 아이디어

각 시행에서 A는 확률 $\frac{1}{4}$, B는 확률 $\frac{3}{4}$로 서로 독립(independent)으로 나온다. 따라서 사건 $\{M = m,\ N = n\}$은 하나의 특정한 시행 결과의 나열이고, 그 확률은 곱으로 주어진다. 이 곱은 m에만 의존하는 인수와 n에만 의존하는 인수의 곱으로 나뉜다. 사실상 이것이 거의 모든 일을 해 준다. 주변분포(marginal distribution)는 기하분포(geometric distribution)이고, 두 확률변수는 독립이며, 이후의 모든 확률은 등비급수(geometric series)가 된다.

풀이

한 번의 시행에 대하여 $p = \mathrm{P}(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $q = \mathrm{P}(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$로 놓는다. 각 시행은 서로 독립이다.

사건 $\{M = m,\ N = n\}$은 처음 $m + n + 1$번의 시행 결과가

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{m}\ \underbrace{B\,B\cdots B}_{n}\ A,$$

일 때, 그리고 그때에만 일어난다. 따라서 독립성에 의해 $m \geq 0$, $n \geq 1$에 대하여

$$\mathrm{P}(M = m,\ N = n) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m} \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n} \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m+1} \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n}.$$

이다. (확률 1로 시행의 나열에는 결국 B가 나오고 그 뒤에 A가 나오므로 이 확률들의 합은 1이다. 아래의 주변분포가 이를 확인해 준다.)

소문항 (i)

M의 주변분포를 구하기 위해 $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \dfrac{3/4}{1-3/4} = 3$을 이용하여 $n \geq 1$에 대해 더하면

$$\mathrm{P}(M=m) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m+1}\cdot 3 = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

이다. N의 주변분포를 구하기 위해 $\sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} = \dfrac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$을 이용하여 $m \geq 0$에 대해 더하면

$$\mathrm{P}(N=n) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

이다. 두 결과 모두 직접 생각해 보아도 타당하다. M은 첫 번째 B가 나오기 전까지 나온 A의 개수이고, N은 B의 연속이 시작된 뒤 첫 번째 A가 나올 때까지의 대기 시간이다. 각각의 합은 1이다.

소문항 (ii)

$|x| < 1$일 때 $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$를 이용한다(등비급수를 미분하면 된다). 그러면

$$\mathrm{E}(M) = \tfrac{3}{4}\sum_{m\geq 1} m\left(\tfrac{1}{4}\right)^m = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{(3/4)^2} = \tfrac{1}{3},$$

$$\mathrm{E}(N) = \tfrac{1}{4}\sum_{n\geq 1} n\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1/4)^2} = 4.$$

이다.

독립성

주변분포를 곱하면 모든 $m \geq 0, n \geq 1$에 대하여

$$\mathrm{P}(M=m)\,\mathrm{P}(N=n) = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m\cdot\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m+1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n = \mathrm{P}(M=m,\ N=n)$$

이다. 따라서 M과 N은 **실제로** 독립이다.

? **생각해 보기** A의 연속 길이가 당연히 B의 연속에 영향을 주지 않을까? 왜 그렇지 않은가?

A의 연속은 첫 번째 B에서 끝나고, 그 시행부터 과정은 새로 시작된다. 남은 시행들은 그 이전의 모든 것과 독립이다. B의 연속 길이는 이 이후의 시행들에만 의존하므로, M을 알아도 N에 대해서는 아무것도 알 수 없다. 결합확률(joint probability)의 인수분해(factorisation)는 이 사실을 대수적으로 나타낸 것이다.

N과 M에 관한 확률

정수 $k \geq 1$에 대하여 기하분포의 꼬리(tail)를 더하면

$$\mathrm{P}(N > k) = \sum_{n \geq k+1} \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{(3/4)^k}{1 - 3/4} = \left(\tfrac{3}{4}\right)^k.$$

이다. 이 식은 $\mathrm{P}(N > 0) = 1$도 주는데, $N \geq 1$이므로 이것도 옳다.

$\mathrm{P}(N > M)$을 구하기 위해 M의 값에 대한 조건을 붙이고 독립성을 이용하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N > M) &= \sum_{m \geq 0} \mathrm{P}(M = m)\,\mathrm{P}(N > m) = \sum_{m \geq 0} \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m \left(\tfrac{3}{4}\right)^m \\ &= \tfrac{3}{4} \sum_{m \geq 0} \left(\tfrac{3}{16}\right)^m = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{16}{13} = \tfrac{12}{13}.\end{aligned}$$

이다. $\mathrm{P}(N = M)$의 경우, $N \geq 1$이므로 공통값은 적어도 1이어야 한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N = M) &= \sum_{m \geq 1} \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m \cdot \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{m-1} = \tfrac{3}{64} \sum_{m \geq 1} \left(\tfrac{3}{16}\right)^{m-1} \\ &= \tfrac{3}{64} \cdot \tfrac{16}{13} = \tfrac{3}{52}.\end{aligned}$$

마지막으로 세 사건 $N > M$, $N = M$, $N < M$은 서로 배반(exclusive)이고 합치면 전체를 이루므로(exhaustive)

$$\mathrm{P}(N < M) = 1 - \tfrac{12}{13} - \tfrac{3}{52} = \tfrac{52-48-3}{52} = \tfrac{1}{52},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 평균(mean)은 직관과 맞는다. A는 드물게 나오므로 처음 A의 연속은 짧고(평균 $\frac{1}{3}$), B의 연속을 끝낼 A가 나오기까지는 평균 $1/p = 4$번의 시행을 기다린다.
- 직접 계산하면 $\mathrm{P}(M > n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$이므로 $\mathrm{P}(N < M) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{64}\sum_{n \geq 1}\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1} = \frac{1}{64} \cdot \frac{16}{13} = \frac{1}{52}$이고, 이는 빼서 구한 값과 일치한다. $\mathrm{P}(N > k) = \left(\frac{3}{4}\right)^k$인 직접적인 이유는, 첫 번째 B 다음의 k번의 시행이 모두 B여야 하기 때문이다.
- 결합분포를 정확히 더하면 $\mathrm{P}(N > M) = 0.92308$, $\mathrm{P}(N = M) = 0.05769$, $\mathrm{P}(N < M) = 0.01923$이다. 200 000회의 시행 나열에 대한 모의실험(simulation)에서는 0.923, 0.058, 0.019를 얻었고, 표본평균은 0.334와 3.99였다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(N = M)$을 구하는 합에 $m = 0$을 포함하는 것. N은 결코 0이 될 수 없다.

- M이 0일 수 있다는 것(첫 번째 시행이 B일 수 있다)을 잊는 것. 그러면 M의 주변분포가 밀려서 틀린 평균을 얻는다.

STEP 너머

여기서 연속 길이들이 독립인 이유는, 독립시행의 나열이 첫 번째 B처럼 과거에 의해서만 결정되는 임의의 시각에서 "다시 시작"하기 때문이다. 이것을 **강한 마르코프 성질**(strong Markov property)이라고 하며, 이는 재생 이론(renewal theory)과 마르코프 연쇄(Markov chain) 분석의 바탕이 된다. 이들은 대학 1, 2학년에서 배우는 주제이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 기하분포, 독립성, 마르코프 연쇄를 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 1990, 문제 16

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP III 1990, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q16

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.21 절 **막대 부러뜨리기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/broken-stick.html

핵심 아이디어

합이 일정한 세 길이는 각각이 전체 합의 절반보다 작을 때, 그리고 그때에만 삼각형을 이룬다. 일단 삼각형이 존재하면, 가장 긴 변의 제곱이 나머지 두 변의 제곱의 합보다 클 때, 그리고 그때에만 그 삼각형은 둔각삼각형(obtuse triangle)이다(코사인 법칙(cosine rule)). 두 소문항 모두 확률변수(random variable)에 대한 조건으로 바뀌고, 확률은 (i)에서는 구간의 길이, (ii)에서는 영역의 넓이가 된다.

풀이

소문항 (i)

세 조각의 길이는 X, $\frac{1}{2}(1-X)$, $\frac{1}{2}(1-X)$이고, 합은 1이다. 양수인 세 길이는 각각이 나머지 둘의 합보다 작을 때, 즉 둘레의 절반(여기서는 $\frac{1}{2}$)보다 작을 때, 그리고 그때에만 삼각형을 이룬다. 길이가 같은 두 조각은 $X > 0$이면 항상 $\frac{1}{2}(1-X) < \frac{1}{2}$를 만족하므로, 남는 조건은 $X < \frac{1}{2}$뿐이다. 삼각형을 만들 수 있는 사건을 T라 하자. 그러면

$$\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}\left(0 < X < \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

삼각형은 가장 긴 변의 제곱이 나머지 두 변의 제곱의 합보다 클 때, 그리고 그때에만 둔각삼각형이다. 어느 변이 가장 긴지는 X에 따라 달라진다.

- $X \le \frac{1}{3}$이면 $X \le \frac{1}{2}(1-X)$이므로, 길이가 같은 조각 중 하나가 가장 긴 변이다. 판정 조건은 $\frac{1}{4}(1-X)^2 > \frac{1}{4}(1-X)^2 + X^2$, 즉 $X^2 < 0$이 되는데, 이는 결코 성립하지 않는다. 이 삼각형은 밑변이 두 등변보다 길지 않은 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 결코 둔각삼각형이 아니다.
- $\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}$이면 가장 긴 변은 X이고, 삼각형이 둔각삼각형일 필요충분조건은

$$X^2 > 2 \cdot \tfrac{1}{4}(1-X)^2 \iff X > \frac{1-X}{\sqrt{2}},$$

  이다. 양변이 모두 양수이므로 양의 제곱근을 취했다. 이를 정리하면 $X(\sqrt{2}+1) > 1$, 즉 $X > \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \approx 0.414$이고, 이 값은 실제로 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 안에 있다.

삼각형이 둔각삼각형인 사건을 O라 하자. 그러면 $O \cap T$는 사건 $\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2}$이고, X는 균등분포(uniform distribution)를 따르므로

$$\mathrm{P}(O \mid T) = \frac{\mathrm{P}(\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2})}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\frac{1}{2} - (\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

작도는 항상 가능하다. 꼭짓점이 $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$인 삼각형 R는 $x \le 1, y \le 1, x+y \ge 1$을 만족하는 점들의 집합이다. 제시된 변 x, y, $2-x-y$의 합은 2이고, 이들은 세 값이 모두 음이 아니고 어느 것도 둘레의 절반인 1을 넘지 않을 때, 그리고 그때에만 (퇴화(degenerate)되었을 수도 있는) 삼각형을 이룬다.

- $0 \le x \le 1$과 $0 \le y \le 1$은 R 위에서 성립한다.
- $2-x-y \le 1$은 곧 $x+y \ge 1$이고, $2-x-y \ge 0$은 $x \le 1, y \le 1$에서 나온다.

따라서 R의 모든 점은 삼각형을 준다. 삼각형이 퇴화되는 것은 R의 변 위에서뿐이며, 그 확률은 0이다.

$\angle ABC$는 언제 둔각인가? B에서의 각은 BA와 BC 사이에 있으므로, 그 대변은 $CA = y$이다. 코사인 법칙에 의해 $\angle ABC$가 둔각일 필요충분조건은 $CA^2 > AB^2 + BC^2$, 즉

$$y^2 > x^2 + (2-x-y)^2.$$

이다. $(2-x-y)^2 = (2-x)^2 - 2(2-x)y + y^2$으로 전개하면 y^2 항이 소거되고, 조건은

$$2(2-x)y > x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4.$$

이 된다. $x \le 1$이므로 $2-x>0$이고, 따라서 부등호 방향을 바꾸지 않고 $2(2-x)$로 나눌 수 있다.

$$y > \frac{x^2-2x+2}{2-x},$$

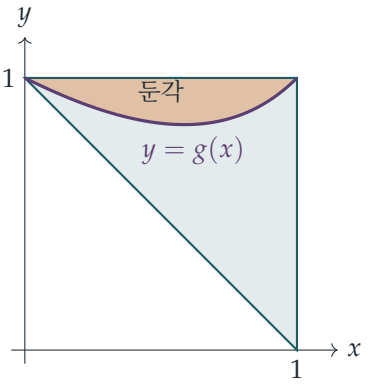
이로써 요구된 결과를 얻는다. 우변을 $g(x)$라 하자.

? 생각해 보기 곡선 $y=g(x)$는 정말로 삼각형 R 안에 머무는가?

둔각 영역이 단순히 R에서 곡선 위쪽 부분이 되려면, $0 \le x \le 1$에서 곡선이 직선 $y=1-x$와 $y=1$ 사이에 있어야 한다. 실제로

$$1-g(x) = \frac{(2-x)-(x^2-2x+2)}{2-x} = \frac{x(1-x)}{2-x} \ge 0, \qquad g(x)-(1-x) = \frac{x}{2-x} \ge 0,$$

이고 $g(0)=g(1)=1$이다. 따라서 곡선은 $(0,1)$에서 $(1,1)$까지 이어지며, $y=1$ 아래로 내려가지만 빗변(hypotenuse) $x+y=1$ 아래로는 결코 내려가지 않는다.



확률. 삼각형 R의 넓이는 $\frac{1}{2}$이므로 결합 밀도(joint density)는 R 위에서 2이고,

$$\mathrm{P}(\angle ABC\text{가 둔각}) = 2 \times \text{넓이}\{(x,y) : g(x) < y \le 1,\ 0 \le x \le 1\} = 2\int_0^1 \big(1-g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

이다. g를 적분하기 위해 $u=2-x$로 치환(substitution)하면 $x=2-u$이고

$$x^2-2x+2 = (2-u)^2-2(2-u)+2 = u^2-2u+2, \qquad g = \frac{u^2-2u+2}{u} = u-2+\frac{2}{u}.$$

이다. x가 0에서 1까지 변할 때 u는 2에서 1까지 변하고, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(u-2+\frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^2-2u+2\ln u\right]_1^2 \\ &= (2-4+2\ln 2)-\left(\tfrac{1}{2}-2\right) = 2\ln 2-\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\angle ABC\text{가 둔각}) = 2\left(1-2\ln 2+\tfrac{1}{2}\right) = 3-4\ln 2,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- 수치로는 $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716$, $3 - 4\ln 2 \approx 0.2274$이다. 시행 10^6회의 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)에서는 약 0.1719와 0.2278을 얻었다.
- 두 답 모두 0과 1 사이에 있다. (ii)에서 곡선은 양 끝에서 $y = 1$에 닿는다. $x = 0$에서는 변 BC가 사라지고, $x = 1$에서는 변 AB가 사라지므로, 예상대로 둘 다 퇴화된 경우이다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$를 계산하면 0.886294가 나와 $2\ln 2 - \frac{1}{2}$와 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 조건부(conditional)로 계산하는 것을 잊는 실수: 둔각삼각형이 될 무조건부 확률은 $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$로, 요구된 답의 절반이다.
- (ii)에서 코사인 법칙에 엉뚱한 변을 쓰는 실수. B에서의 각의 대변은 AB가 아니라 $CA = y$이다.
- R 위의 밀도가 1이 아니라 2임을 잊는 실수. 그러면 답이 절반 크기가 된다.

STEP 너머

확률을 길이나 넓이로 바꾸는 것을 **기하적 확률**(*geometric probability*)이라 하며, 막대를 무작위로 부러뜨리는 문제는 그 고전적인 문제 가운데 하나이다. 서로 독립인 균등분포의 두 점에서 막대를 부러뜨리면 삼각형이 될 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 소문항 (ii)는 연속 결합분포(continuous joint distribution)를 처음 맛보는 문제로, 여기서 확률은 어떤 영역 위에서 결합 밀도를 이중적분(double integral)한 값이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 결합 밀도를 다루며 이런 종류의 문제를 여러 개 싣고 있다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1990년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

