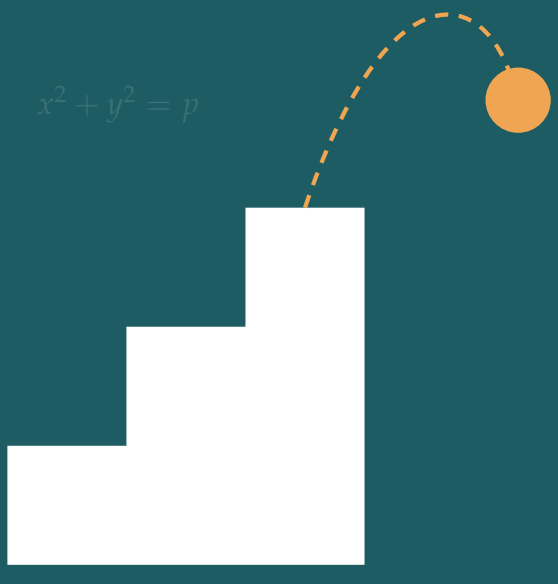
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1989년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1989년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1989년 풀이

1989년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 48개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 복합 영역의 넓이 순수수학 . . . 3

Q2 리만 합과 극한 순수수학 . . . 7

Q3 벡터와 내적 순수수학 . . . 11

Q4 램지 이론 순수수학 . . . 15

Q5 이항계수 항등식 순수수학 . . . 19

Q6 법선과 미분방정식 순수수학 . . . 22

Q7 곡선 그리기와 최적화 순수수학 . . . 25

Q8 배각 공식 순수수학 . . . 29

Q9 그래프의 변환 순수수학 . . . 33

Q10 속도에 따라 달라지는 저항 역학 . . . 38

Q11 포물체 도달 거리의 최적화 역학 . . . 42

Q12 탄성 끈과 에너지 역학 . . . 46

Q13 마찰이 있는 사다리의 평형 역학 . . . 50

Q14 조건부 분포 확률과 통계 . . . 54

Q15 분포의 비교 확률과 통계 . . . 58

Q16 영합 게임 확률과 통계 . . . 62

STEP II

Q1 삼차방정식의 삼각함수 해법 순수수학 . . . 66

Q2 멱급수의 계수 순수수학 . . . 70

Q3 복소 쌍곡선 사상 순수수학 . . . 73

Q4 유리함수의 그래프 그리기 순수수학 . . . 77

Q5 극곡선과 반사 순수수학 . . . 82

Q6 역함수의 적분 순수수학 . . . 86

Q7 2계 미분방정식 순수수학 90
Q8 변환의 군 순수수학 94
Q9 행렬 지수함수와 연립 미분방정식 순수수학 98
Q10 직선과 평면 순수수학 101
Q11 연결된 입자와 충격량 역학 105
Q12 강체의 평형 역학 109
Q13 관성 모멘트 역학 113
Q14 원운동 역학 118
Q15 기하학적 확률 확률과 통계 122
Q16 이항분포 확률과 통계 126

STEP III

Q1 회전면 순수수학 130
Q2 3차원 공간의 평면 순수수학 134
Q3 행렬군 순수수학 138
Q4 곡선 그리기와 근 순수수학 142
Q5 체비쇼프 다항식 순수수학 147
Q6 이차곡선의 극방정식 순수수학 151
Q7 층밀림 행렬 순수수학 155
Q8 연립 미분방정식 순수수학 159
Q9 거듭제곱급수의 합 순수수학 163
Q10 리만 합 순수수학 166
Q11 구의 비스듬한 충돌 역학 170
Q12 회전 좌표계 역학 174
Q13 단순 조화 운동 역학 179
Q14 도르래와 충격량 역학 183
Q15 중앙값의 분포 확률과 통계 187
Q16 확률과 가설검정 확률과 통계 191

풀이

STEP I 1989, 문제 1

순수수학 • 복합 영역의 넓이

> **STEP I 1989, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q1

핵심 아이디어

이 영역은 반원(semicircle)들로 이루어져 있다. 큰 반원판(half-disc) 하나에서 시작하여 작은 반원판들을 빼고 더하면 이 영역을 얻을 수 있다. 따라서 필요한 것은 각 반원의 반지름뿐이고, 특히 아래쪽 반원 CDE의 반지름이 중요한데, 이는 직선 AG 위의 길이들로부터 구할 수 있다. 반원을 포물선(parabola)으로 바꾸어도 방법은 달라지지 않는다. 포물선 아치에도 간단한 넓이 공식이 있어서 $\frac{1}{2}\pi a^2$의 역할을 대신하기 때문이다.

풀이

반원

A에서부터 직선을 따라 길이를 잰다. ABC의 반지름이 h이므로 $AC = 2h$이다. 마찬가지로 $EG = 2h$이고, AHG의 반지름이 r이므로 $AG = 2r$이다. 따라서

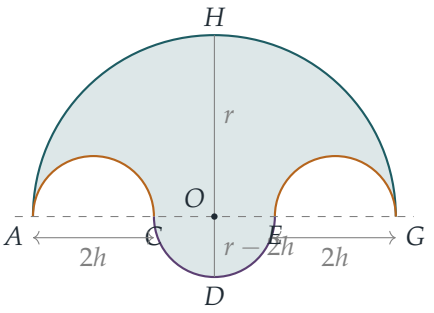
$$CE = 2r - 4h,$$

이고, $2h < r$이므로 이 값은 양수이다. 그러므로 반원 CDE의 반지름은 $r - 2h$이다. 그 중심은 CE의 중점이고, 대칭성에 의해 이는 AG의 중점이기도 하므로, 이 반원은 큰 반원과 중심 O를 공유한다.

그림에서 ABC와 EFG는 AG에 대하여 H와 같은 쪽, 즉 큰 반원의 안쪽에 있고, CDE는 반대쪽에 있다. 따라서 둘러싸인 영역은

$$(\text{반원판 } AHG) \;-\; (\text{반원판 } ABC \text{ 와 } EFG) \;+\; (\text{반원판 } CDE).$$

이다.



반지름이 a인 반원판의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi a^2$이므로, 둘러싸인 넓이는

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi r^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\pi h^2 + \tfrac{1}{2}\pi(r-2h)^2 &= \tfrac{1}{2}\pi(r^2 - 2h^2 + r^2 - 4rh + 4h^2)\\ &= \tfrac{1}{2}\pi(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \pi(r-h)^2.\end{aligned}$$

? **생각해 보기** HD의 길이는 얼마인가?

점 H는 큰 반원의 꼭대기이므로, O를 지나고 AG에 수직인 직선 위에 있으며 O로부터의 거리는 r이다. 점 D는 CDE의 가장 낮은 점이므로 같은 수직선 위에 있으며, 직선의 반대쪽에서 O로부터 $r-2h$만큼 떨어져 있다. 따라서

$$HD = r + (r-2h) = 2(r-h),$$

이고, 지름이 HD인 원의 반지름은 $r-h$, 넓이는 $\pi(r-h)^2$이다. 이는 앞에서 구한 넓이와 같으므로 요구된 결과가 성립한다.

포물선

반지름이 a인 각 반원을, 길이가 $2a$인 같은 현(chord) 위에 놓이고 꼭짓점(vertex)이 현의 중점에서 높이 a만큼 위에 있는 포물선 아치로 바꾼다. 현의 중점을 원점으로 잡자. 포물선은 꼭짓점을 지나는 축에 대하여 대칭이므로 $y = a - kx^2$ 꼴이다. 이 포물선은 $(\pm a, 0)$을 지나므로 $k = 1/a$이다. 아치와 현 사이의 넓이는

$$\int_{-a}^{a}\left(a - \frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x = 2a^2 - \frac{2a^3}{3a} = \frac{4a^2}{3}.$$

이다. (이것은 아르키메데스(Archimedes)의 결과로, 아치를 둘러싸는 직사각형 넓이의 3분의 2, 즉 $\frac{2}{3}\cdot 2a\cdot a$이다.)

각 아치는 여전히 원래의 반원과 같은 쪽, 즉 AG에 대하여 같은 쪽에 있다. 또한 각각의 작은 아치가 여전히 큰 아치 아래에 있는지도 확인해야 한다. 두 아치 모두 A에서 기울

기(gradient) 2로 출발하므로, A 근처에서는 이것이 자명하지 않다. A로부터의 거리가 x인 곳($0 \le x \le 2h$)에서 큰 아치의 높이는 $x(2r-x)/r$이고 아치 ABC의 높이는 $x(2h-x)/h$이다. 그 차는

$$\frac{x(2r-x)}{r} - \frac{x(2h-x)}{h} = x^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r}\right) \ge 0,$$

이므로 ABC는 실제로 AHG 안에 있고, 대칭성에 의해 EFG도 마찬가지이다. 따라서 $\frac{1}{2}\pi a^2$ 대신 $\frac{4}{3}a^2$을 써서 같은 방식으로 더하고 빼면 된다.

$$\begin{aligned}\tfrac{4}{3}r^2 - 2\cdot\tfrac{4}{3}h^2 + \tfrac{4}{3}(r-2h)^2 &= \tfrac{4}{3}(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \tfrac{8}{3}(r-h)^2.\end{aligned}$$

그러므로 포물선의 경우 둘러싸인 넓이는 $\frac{8}{3}(r-h)^2$이다.

검산

- 두 답 모두 $(r-h)^2$의 상수배이다. 두 계산의 구조가 완전히 같고, 아치 하나에 대한 계수만 $\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{4}{3}$으로 바뀌므로 당연히 그래야 한다. 비 $\frac{8/3}{\pi} \approx 0.849$는 1보다 작은데, 같은 현과 높이를 가진 포물선 아치는 반원 안쪽에 있으므로 이것도 올바르다.
- 극한(limit)의 경우 $h \to 0$: 작은 아치들은 사라지고 CDE는 반지름이 r인 완전한 아래쪽 반원이 되어, 넓이가 πr^2인 원 전체가 된다. 공식 $\pi(r-h)^2$도 이와 일치한다.
- 수치적으로, $r = 3$, $h = 1$(시험지 그림의 비율)일 때 넓이는 $4\pi \approx 12.566$과 $\frac{32}{3} \approx 10.667$이다. 임의의 여덟 쌍 (r,h)에 대하여 경계를 따라 신발끈 공식(shoelace formula)으로 계산한 결과, 이산화 오차 범위 안에서 두 공식과 모두 일치하였다.

흔한 실수

- CDE의 반지름을 $r-h$나 $r-4h$로 잡는 것. AG 위의 길이를 그려 보면 $CE = 2r-4h$이므로 반지름은 $r-2h$이다.
- 위쪽의 작은 반원들을 빼지 않고 더하는 것. 이 반원들은 큰 반원판을 파고들어 가므로 그 넓이는 빼야 한다.

STEP 너머

첫 번째 부분의 도형은 아르키메데스가 연구한 **아르벨로스**(arbelos, "구두장이의 칼")이다. 고전적인 형태는 큰 반원 안에 작은 반원 두 개가 들어 있는 모양이며, 그 넓이 역시 잘 고른 현 위의 원의 넓이와 같다. 아르키메데스는 적분에 매우 가까운 극한 논증을 통해 포물선 조각에 대한 $\frac{2}{3}$ 법칙도 발견하였다. 대학에서는 그의 "실진법(method of exhaustion)"에서

리만 적분(Riemann integral)으로 나아가는 과정이 첫 해석학(analysis) 강의의 중심 내용이다. 이를 살펴보기에 좋은 책으로 Abbott, *Understanding Analysis*가 있다.

풀이

STEP I 1989, 문제 2

순수수학 • 리만 합과 극한

> **STEP I 1989, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q2

핵심 아이디어

이 낯선 식은 사실 직사각형 넓이의 합이 모습을 바꾼 것에 지나지 않는다. n개의 직사각형 넓이의 합을 직접 써 보면 $k\ln k$가 들어간 합이 나오는데, 팩토리얼(factorial)의 로그로 이루어진 부분은 바로 그 합을 다르게 묶은 것일 뿐이다. 두 식이 같다는 것을 확인하고 나면 극한은 적분이 되고, 그 적분은 첫 번째 문항의 결과로 계산할 수 있다.

풀이

부정적분

$u = \ln x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x$로 놓고 부분적분(integration by parts)을 하면 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{2}x^2$이므로

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C.\end{aligned}$$

적분값

$\ln(1/x) = -\ln x$이므로 피적분함수(integrand)는 $-x\ln x$이다. 피적분함수가 $x = 0$에서 정의되지 않으므로 $[\varepsilon, 1]$에서 적분한 다음 $\varepsilon \to 0^+$로 보낸다.

$$\int_\varepsilon^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_\varepsilon^1 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,(\varepsilon\ln\varepsilon).$$

$\varepsilon \to 0$일 때 $\varepsilon^2 \to 0$이고 (문제에서 주어진 사실에 의해) $\varepsilon\ln\varepsilon \to 0$이므로

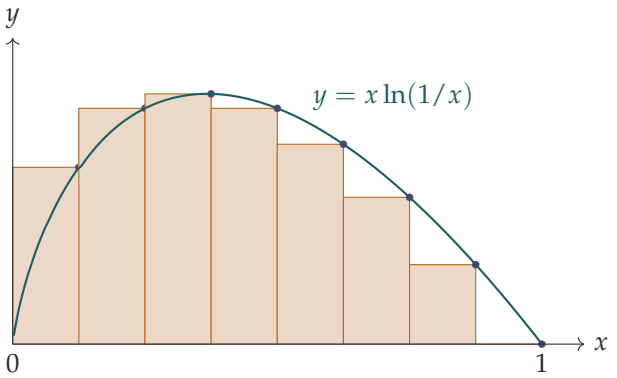
$$\int_0^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

같은 사실로부터 $x \to 0^+$일 때 $f(x) = x\ln(1/x)$가 0으로 수렴함을 알 수 있으므로, $f(0) = 0$으로 정하면 f는 $[0,1]$ 전체에서 연속(continuous)이다. 곡선은 0에서 올라가 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$에서 ($f'(x) = -\ln x - 1 = 0$인 점) 최댓값 $\frac{1}{\mathrm{e}}$에 이르고, $x = 1$에서 다시 0으로 내려온다.

직사각형

$[0,1]$을 폭이 $\frac{1}{n}$인 n개의 띠로 나눈다. k번째 띠는 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$이고, 이 띠 위의 직사각형은 오른쪽 위 꼭짓점이 곡선 위에 있으므로 높이는

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}\ln\frac{n}{k} = \frac{k}{n}(\ln n - \ln k).$$



따라서 직사각형 넓이의 합은

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}(\ln n - \ln k) &= \frac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{\ln n}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k. \end{aligned}$$

첫째 항은 이미 우리가 원하는 식과 일치한다.

? **생각해 보기** 팩토리얼은 어디에서 나오는가?

$0 \le m \le n-1$일 때

$$\ln\frac{n!}{m!} = \ln\big((m+1)(m+2)\cdots n\big) = \sum_{k=m+1}^{n} \ln k.$$

이제 이것을 $m = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 모두 더하고, 각 $\ln k$가 몇 번 나타나는지 세어 보자. 항 $\ln k$는 $m+1 \le k$일 때, 즉 $m = 0, 1, \ldots, k-1$일 때 정확히 포함되므로 k번 나타난다.

따라서

$$\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}=\sum_{k=1}^{n}k\ln k.$$

(예를 들어 $n=3$이면 $\ln 6+\ln 6+\ln 3=\ln 1+2\ln 2+3\ln 3$이고, 양변은 모두 $\ln 108$이다.) 그러므로 문제의 식은 정확히 S_n, 즉 n개의 직사각형 넓이의 합이다.

극한

$n\to\infty$일 때 직사각형들은 곡선에 점점 더 가깝게 들어맞고, f가 $[0,1]$에서 연속이므로 넓이의 합은 곡선 아래의 넓이로 수렴한다. 따라서

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n-\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}\right]=S_n\to\int_0^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

이므로 증명이 끝난다.

"직사각형들이 점점 더 가깝게 들어맞는다"보다 더 확실한 근거를 원한다면, 다음과 같은 부등식으로 오차를 잡을 수 있다. 각 띠에서 직사각형의 넓이와 곡선 아래의 넓이의 차는 많아야 그 띠에서 f가 변하는 양의 $\frac{1}{n}$배이다. 이 변화량을 모든 띠에 대하여 더하면, f는 $\frac{1}{\mathrm{e}}$만큼 올라갔다가 $\frac{1}{\mathrm{e}}$만큼 다시 내려오므로 합은 많아야 $\frac{2}{\mathrm{e}}$이다. 따라서 $\left|S_n-\frac{1}{4}\right|\le\frac{2}{\mathrm{e}n}\to 0$이다.

검산

- 첫 번째 문항의 답을 미분해 본다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right)=x\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\ln x$.
- $n=2$이면 식의 값은 $\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\ln 2+\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 2\approx 0.173$이고, 이는 두 직사각형의 넓이의 합 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 0$과 같다.
- 수치로 계산하면 식의 값은 $n=10$일 때 약 0.24559, $n=100$일 때 약 0.249937, $n=1000$일 때 약 0.2499992로, $\frac{1}{4}$에 가까워진다.

흔한 실수

- 부호를 놓치는 실수: 피적분함수는 $x\ln(1/x)=-x\ln x$이므로 첫 번째 문항에서 구한 부정적분의 부호를 바꾸어야 하고, 넓이는 $-\frac{1}{4}$가 아니라 $+\frac{1}{4}$이다.
- $\frac{1}{2}n(n+1)$ 대신 $\sum k=\frac{1}{2}n^2$으로 쓰는 실수: 그러면 괄호 안의 $\frac{1}{n}$이 사라져 버린다.
- 적분이 0에서 이상적분(improper integral)이라는 것을 잊는 실수: 아래끝에서는 문제에서 주어진 사실 $x\ln x\to 0$이 필요하다.

STEP 너머

직사각형 넓이의 합은 리만 합(Riemann sum)이며, 닫힌구간에서 연속인 모든 함수에 대하여 리만 합이 적분으로 수렴한다는 사실은 대학 해석학 강의에서 처음 만나는 중요한 정리 가운데 하나이다. 우리가 f의 전체 오르내림을 이용해 구한 오차의 한계는 **유계변동**(bounded variation) 함수라는 개념의 바탕이 되는 아이디어이다. 거꾸로 보면, 이 문제는 $\sum k \ln k$에 대한 정보도 준다. 이 값은 초계승(hyperfactorial) $1^1 2^2 \cdots n^n$과 밀접하게 관련되어 있으며, 그 증가 속도는 $n!$에 대한 스털링(Stirling) 공식과 같은 방식으로 더 정밀하게 구할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 리만 적분을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 1989, 문제 3

순수수학 • 벡터와 내적

> **STEP I 1989, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q3

핵심 아이디어

O를 원점(origin)으로 잡고 모든 것을 두 벡터(vector) $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$로 나타낸다. 그러면 "수직(perpendicular)"은 "스칼라곱(scalar product)이 0"이라는 조건이 되고, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$이므로 그 스칼라곱은 x, OY, 그리고 유일한 미지수 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$에만 의존한다. $OX + OY = 1$을 이용하면 x와 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$를 잇는 방정식 하나만 남는다. 그다음 범위는 x가 움직일 수 있는 범위에서 나온다.

풀이

조건

O를 원점으로 잡고 $k = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$라 하자. C는 A에서 B로 가는 길의 3분의 1 지점이고 D는 3분의 2 지점이므로

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b}), \qquad \overrightarrow{OD} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}).$$

X는 OA 위에 있고 $OX = x$이며 $|\mathbf{a}| = 1$이므로 $\overrightarrow{OX} = x\mathbf{a}$이다. 마찬가지로 $y = OY = 1 - x$에 대하여 $\overrightarrow{OY} = y\mathbf{b}$이다. 따라서

$$3\overrightarrow{CY} = (3y-1)\mathbf{b} - 2\mathbf{a}, \qquad 3\overrightarrow{DX} = (3x-1)\mathbf{a} - 2\mathbf{b}.$$

두 직선이 수직일 필요충분조건은 스칼라곱이 0인 것이다. 전개하고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$을 이용하면

$$\begin{aligned} 9\,\overrightarrow{CY}\cdot\overrightarrow{DX} &= (3x-1)(3y-1)k - 2(3y-1) - 2(3x-1) + 4k \\ &= k\big[(3x-1)(3y-1)+4\big] - 2(3x+3y-2). \end{aligned}$$

이제 $x+y=1$을 이용한다. 그러면 $3x+3y-2=1$이고

$$(3x-1)(3y-1) = 9xy - 3(x+y) + 1 = 9xy - 2.$$

따라서 수직 조건은 $k(9xy+2)=2$가 된다. $y=1-x$를 대입하면

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{2}{9x(1-x)+2}}$$

이다(분모는 2 이상이므로 이것으로 나누어도 안전하다).

범위

X는 길이가 1인 선분(segment) OA 위에 있으므로 $0 \le x \le 1$이다. (그러면 $y=1-x$도 $[0,1]$에 속하므로 Y는 자동으로 OB 위에 있다.) 이 구간에서

$$x(1-x) = \tfrac{1}{4} - \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2,$$

이므로 $0 \le x(1-x) \le \frac{1}{4}$이고, 최댓값은 $x=\frac{1}{2}$에서, 최솟값은 $x=0$ 또는 1에서 얻는다. 따라서

$$2 \le 9x(1-x)+2 \le \tfrac{9}{4}+2 = \tfrac{17}{4}.$$

역수(reciprocal)를 취하면 부등호의 방향이 바뀌고(모든 값이 양수이다), 2를 곱하면

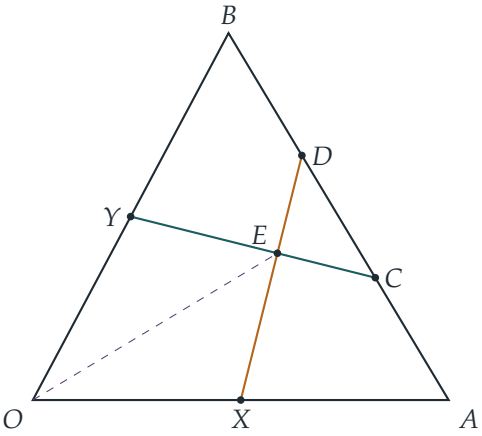
$$\frac{8}{17} \le \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le 1,$$

이 되어 증명이 끝난다. (값 1이 되려면 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$이어야 하는데, 이는 제대로 된 삼각형이 아니므로 실제로는 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<1$이다. 그래도 주어진 부등식은 여전히 성립한다.)

가장 큰 각과 OE

생각해 보기 왜 가장 큰 각이 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$의 가장 작은 값에 대응하는가?

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$이므로 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos A\hat{O}B$이고, 코사인(cosine)은 $[0,\pi]$에서 감소한다. 따라서 각은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{8}{17}$일 때, 즉 $x=\frac{1}{2}$일 때(따라서 $y=\frac{1}{2}$일 때) 가장 크다. 이때 X와 Y는 각각 OA와 OB의 중점이고, 각의 크기는 $\arccos\frac{8}{17} \approx 61.9°$이다.



이제 전체 도형은 **a**와 **b**를 맞바꾸는 것에 대하여 대칭이다. 이 교환은 $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$, $X \leftrightarrow Y$를 바꾸므로 직선 CY와 DX를 서로 바꾼다. 따라서 두 직선의 교점 E는 이 교환으로 변하지 않으므로 대칭축(line of symmetry) 위에 있다. 즉 어떤 t에 대하여 $\overrightarrow{OE} = t(\mathbf{a}+\mathbf{b})$이다.

DX 위의 일반적인 점은

$$\overrightarrow{OX} + s\,\overrightarrow{XD} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + s\left(\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + \tfrac{2}{3}\mathbf{b} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}\right) = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{s}{6}\right)\mathbf{a} + \tfrac{2s}{3}\mathbf{b}.$$

이다. **a**와 **b**는 평행하지 않으므로 계수를 비교할 수 있다. 이것이 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$의 상수배가 되는 것은 $\frac{1}{2} - \frac{s}{6} = \frac{2s}{3}$일 때이고, 이로부터 $s = \frac{3}{5}$, $t = \frac{2}{5}$를 얻는다. 따라서 $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$이다. 마지막으로

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 2 + \tfrac{16}{17} = \tfrac{50}{17},$$

이므로

$$OE = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{17}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{2\sqrt{34}}{17}} \approx 0.686.$$

검산

- 좌표로 $\mathbf{a} = (1,0)$, $\mathbf{b} = (\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$로 잡자. 그러면 $X = (\frac{1}{2}, 0)$, $D = (\frac{11}{17}, \frac{10}{17})$이므로 $\overrightarrow{XD} = (\frac{5}{34}, \frac{10}{17})$이다. 또 $Y = (\frac{4}{17}, \frac{15}{34})$, $C = (\frac{14}{17}, \frac{5}{17})$이므로 $\overrightarrow{CY} = (-\frac{10}{17}, \frac{5}{34})$이다. 두 벡터의 스칼라곱은 $-\frac{50}{578} + \frac{50}{578} = 0$으로, 예상대로이다.
- $E = \frac{2}{5}(\frac{25}{17}, \frac{15}{17}) = (\frac{10}{17}, \frac{6}{17})$이고 $|OE| = \frac{\sqrt{136}}{17} = \frac{2\sqrt{34}}{17} \approx 0.6860$이다. 이는 두 직선의 교점을 직접 수치적으로 구한 값과 일치한다.
- 값 $s = \frac{3}{5}$는 $[0,1]$에 속하므로, E는 실제로 X와 D 사이, 삼각형 내부에 있다.

흔한 실수

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$임을 잊고 조건식에 $|\mathbf{a}|^2$ 항을 그대로 남겨 두거나, 삼등분점(trisection point)을 반대로 잡는 실수.
- 가장 큰 각이 가장 큰 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$를 뜻한다고 생각하는 실수. 각이 커질수록 코사인은 감소한다.
- $x\mathbf{a}$ 대신 $\overrightarrow{OX} = x$라고 쓰는 실수. 점 X는 벡터이고, x는 그 길이일 뿐이다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 모든 점을 두 기저 벡터(basis vector)의 일차결합으로 쓰고 기하를 스칼라곱으로 바꾸는 방법은 내적(inner product)과 그람 행렬(Gram matrix)을 다루는 출발점이다. 벡터들의 배치는 스칼라곱의 표에 의해 회전을 제외하고 결정되는데, 여기서 그 표는 단지 $1, 1, \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$뿐이다. 그래서 문제 전체가 하나의 수로 귀결된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이 아이디어들을 전개한다.

풀이

STEP I 1989, 문제 4

순수수학 • 램지 이론

STEP I 1989, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.2 절 **축소판 램지 정리**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/ramsey.html

핵심 아이디어

기하는 잊어도 된다. 점들에 대한 조건은 그중 어느 세 점을 골라도 진짜 삼각형이 된다는 것만 보장하므로, 이 문제는 순전히 여섯 개의 점을 잇는 15개의 변을 색칠(colouring)하는 문제이다. 힌트를 따라 한 점을 살펴보자. 그 점에는 변이 다섯 개 있고 색은 두 가지뿐이므로, 비둘기집 원리(pigeonhole principle)에 의해 그 변들 중 적어도 세 개는 같은 색이다. 그러면 세 개의 반대쪽 끝점들 사이의 변들은 처음 점과 함께 한 가지 색의 삼각형을 완성하거나, 그 자체로 한 가지 색의 삼각형을 이룬다.

풀이

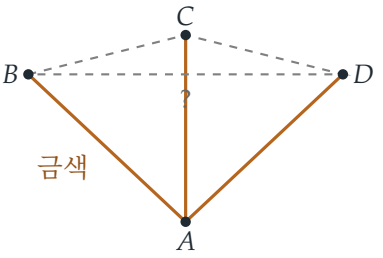
점 여섯 개

어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로(collinear), 어느 세 점을 골라도 진짜 삼각형의 꼭짓점이 되고, 그 세 변은 우리가 그은 선분들 가운데 있다. (어느 네 점도 한 평면 위에 있지 않다(coplanar)는 조건은 논증에 전혀 쓰이지 않는다.)

A에서 나오는 다섯 선분 AB, AC, AD, AE, AF를 생각하자. 각 선분은 금색이거나 은색이다. 금색이 많아야 두 개이고 은색도 많아야 두 개라면 선분은 모두 합쳐 많아야 네 개일 것이므로 모순이다. 따라서 이 중 적어도 세 개는 같은 색이다. 점 $B, \ldots, F$의 이름을 다시 붙이

고, 필요하면 두 색의 이름을 서로 바꾸면, 다음과 같이 가정할 수 있다.

$AB,\ AC,\ AD$는 모두 금색이다.



이제 반대쪽 끝점들을 잇는 세 선분 BC, CD, DB를 살펴보자.

생각해 보기 BC, CD, DB가 어떤 색이든, 아래 두 경우 중 하나에서 반드시 한 가지 색의 삼각형이 생기는 이유는 무엇인가?

가능한 경우는 두 가지뿐이다.

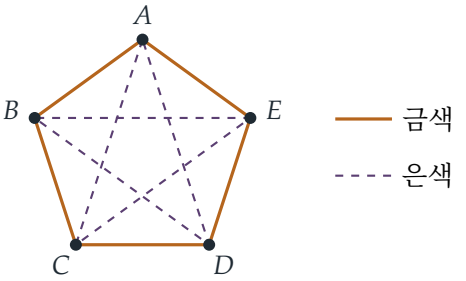
- **BC, CD, DB 중 적어도 하나가 금색인 경우.** 그것이 BC라고 하자(나머지 경우는 문자만 바꾸면 똑같다). 그러면 AB, AC, BC가 모두 금색이므로 삼각형 ABC의 변은 모두 한 가지 색이다.
- **BC, CD, DB 중 어느 것도 금색이 아닌 경우.** 그러면 세 변이 모두 은색이므로 삼각형 BCD의 변은 모두 한 가지 색이다.

어느 경우든 변이 모두 같은 색인 삼각형이 존재하며, 이것이 증명해야 할 내용이었다.

점 다섯 개

점이 다섯 개이면 각 점에 변이 네 개뿐이어서 둘과 둘로 나뉠 수 있으므로 위의 논증은 성립하지 않는다. 이 결과가 실제로 거짓임을 보이려면 한 가지 색의 삼각형이 없는 색칠을 하나 찾으면 된다.

점 A, B, C, D, E를 오각형(pentagon) 둘레에 놓는다. 다섯 변 AB, BC, CD, DE, EA를 금색으로 칠하고, 다섯 대각선(diagonal) AC, BD, CE, DA, EB(오각별(pentagram))를 은색으로 칠한다.



모든 삼각형은 다섯 점 중 세 점을 사용한다. 오각형의 어느 세 꼭짓점을 골라도 그중 적어도 두 개는 서로 이웃하지 않으므로(세 꼭짓점이 서로 모두 이웃하려면 5-순환 안에 삼각형이 있어야 한다), 모든 삼각형에는 은색 변이 있다. 또한 어느 세 꼭짓점을 골라도 그중 적어도 두 개는 서로 **이웃한다**. 세 점 중 어느 두 점도 이웃하지 않는다면, 오각형 둘레를 따라 연이어 고른 꼭짓점들 사이의 각 틈에 고르지 않은 꼭짓점이 적어도 하나씩 있어야 하므로 $3+3=6$개의 점이 필요하기 때문이다. 따라서 모든 삼각형에는 금색 변도 있다. 그러므로 모든 변이 한 가지 색인 삼각형은 없다.

생각해 보기 정오각형은 평평하므로 네 꼭짓점이 한 평면 위에 있다. 이것은 점들이 일반적인 위치에 있어야 한다는 규칙을 어기는 것이 아닌가?

점들이 말 그대로 한 평면 위에 있다면 그렇겠지만, 색칠은 어느 쌍이 연결되어 있는지에만 의존할 뿐 점들이 어디에 있는지와는 무관하다. 꼭짓점들을 평면에서 서로 다른 높이만큼 살짝 들어 올리자(예를 들어 $k=0,1,2,3,4$에 대하여 k번째 꼭짓점을 높이 $0.3k^2$로 올린다). 그러면 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않고 어느 네 점도 한 평면 위에 있지 않으며, 위에서 내려다본 그림은 여전히 여기 그린 오각형과 오각별이고, 색칠도 같으며 한 가지 색의 삼각형도 없다.

검산

점 여섯 개에 대해 변을 색칠하는 방법은 $2^{15}=32768$가지뿐이므로 컴퓨터로 모두 확인해 볼 수 있다. 모든 색칠에 한 가지 색의 삼각형이 있으며, 사실 언제나 적어도 두 개가 있다. 점 다섯 개에 대해서는, 오각형 색칠의 $\binom{5}{3}=10$개 삼각형을 모두 확인하면 각 삼각형에 두 색이 모두 있음을 확인할 수 있다. 행렬식(determinant)으로 확인하면 위에서 들어 올린 오각형에는 한 평면 위에 있는 네 점이 없음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 무엇을 가정하는지 밝히지 않고 "대칭성에 의해"라고만 말하는 것. A에서 나오는 변들 중 다수인 색의 변 세 개를 고르고 그 색을 금색이라고 부른다는 것을 분명히 밝혀야 한

다.

- A에 한 가지 색의 변이 세 개 있다는 것만 증명하고 거기서 멈추는 것. 두 번째 단계, 즉 BC, CD, DB를 살펴보는 것이 증명의 핵심이다.
- 점 다섯 개의 경우에 모든 삼각형을 확인하지 않고 그림만 제시하는 것. "A에서 나오는 별 모양은 금색, 나머지는 모두 은색"과 같은 색칠은 성립하지 않는다.

STEP 너머

이것은 램지 이론(Ramsey theory)의 첫 번째 사례이다. **램지 수**(Ramsey number) $R(3,3)$은 완전 그래프(complete graph) K_n의 변을 두 가지 색으로 어떻게 칠하든 한 가지 색의 삼각형이 반드시 생기는 가장 작은 n이며, 이 문제는 $R(3,3) = 6$임을 보여 준다. 램지(Ramsey)의 정리는 한 가지 색의 완전 부분그래프의 크기가 얼마이든 그러한 수가 존재한다고 말하지만, 이 수들은 계산하기가 지독하게 어렵다. $R(5,5)$조차 아직 알려져 있지 않다. 램지의 정리를 포함하여 그래프 이론(graph theory)을 훌륭하게 소개하는 책으로 Wilson, *Introduction to Graph Theory*(그래프 이론 입문)가 있다.

풀이

STEP I 1989, 문제 5

순수수학 • 이항계수 항등식

> **STEP I 1989, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q5

핵심 아이디어

이항전개(binomial expansion)는 x에 대한 항등식(identity)이므로 어떤 수를 대입해도 성립한다. $x = 1$을 택하면 모든 계수(coefficient)를 더하게 되고, $x = -1$을 택하면 부호를 번갈아 가며 더하게 된다. 이 두 결과를 결합하면 짝수 번째 계수와 홀수 번째 계수를 분리할 수 있다. (ii)의 가중합에서 $\binom{n}{r}$ 앞의 인수 r는 바로 x^r를 미분(differentiate)할 때 생기는 것이므로, 전개식을 미분한 다음 대입한다.

풀이

양의 정수 n에 대하여

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

이다. 여기서 $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$이다. 이 식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

소문항 (i)

짝수 번째 계수의 합을 $E = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$, 홀수 번째 계수의 합을 $O = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$이라 하자. n이 짝수이므로 마지막 항 $\binom{n}{n}$은 E에, $\binom{n}{n-1}$은 O에 속한다. 따라서 E와 O를 합치면 모든 계수가 정확히 한 번씩 들어 있다.

전개식에 $x = 1$을 대입하면

$$E + O = 2^n.$$

이다. $x = -1$을 대입하면 각 짝수 거듭제곱 $(-1)^r$은 $+1$이고 각 홀수 거듭제곱은 -1이며,

$n \geq 1$이므로 좌변은 $0^n = 0$이다. 따라서

$$E - O = 0.$$

이다. 그러므로 $E = O$이고, 이에 따라 $2E = 2^n$이므로

$$E = O = 2^{n-1},$$

이다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

전개식의 양변을 x에 대하여 미분한다. 상수항은 사라지고 x^r는 rx^{r-1}이 된다.

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

이제 $x = 1$을 대입하면

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 이것은 n이 홀수이든 짝수이든 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

> **생각해 보기** 미적분을 쓰지 않고 소문항 (ii)를 이해하는 방법이 있을까?

있다. $1 \leq r \leq n$에 대하여 $r\binom{n}{r} = r \cdot \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = n \cdot \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = n\binom{n-1}{r-1}$이므로, $(1+x)^{n-1}$의 전개식에 $x = 1$을 대입하면 합은 $n\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1} = n \cdot 2^{n-1}$이다. 말로 풀어 보면, n명 중에서 크기에 상관없이 위원회를 뽑은 다음 그 위원회에서 위원장을 뽑는 것은, 위원장을 먼저 뽑고(n가지) 나머지 $n-1$명의 임의의 부분집합(subset)을 뽑는 것(2^{n-1}가지)과 같다.

마지막 합

합을 둘로 나눈다.

$$\sum_{r=0}^{n}(r + (-1)^r)\binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}.$$

첫 번째 합의 $r = 0$인 항은 0이므로, 첫 번째 합은 정확히 (ii)의 합, 즉 $n2^{n-1}$이다. 두 번째 합은 $(1+x)^n$의 전개식에 $x = -1$을 대입한 것이므로, 모든 양의 정수 n에 대하여 $(1-1)^n = 0$이다. (이것은 (i)의 $E - O = 0$ 단계이며, n이 짝수일 필요 없이 $n \geq 1$이기만 하면 된다.) 그러므로

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}(r + (-1)^r)\binom{n}{r} = n2^{n-1}.}$$

이다.

검산

- $n = 2$일 때: 계수는 $1, 2, 1$이므로 $E = 1 + 1 = 2 = O$이고 $2^1 = 2$이다. (ii)의 합은 $2 + 2 \cdot 1 = 4 = 2 \cdot 2^1$이다.
- $n = 3$일 때 마지막 합은 $(0+1) \cdot 1 + (1-1) \cdot 3 + (2+1) \cdot 3 + (3-1) \cdot 1 = 1 + 0 + 9 + 2 = 12 = 3 \cdot 2^2$이다.
- 1부터 29까지의 모든 n에 대하여 세 항등식을 정확히 확인하였다. 예를 들어 $n = 6$이면 $192 = 6 \cdot 2^5$이다.

흔한 실수

- $\sum(-1)^r \binom{n}{r} = 0$이 홀수 n에 대해서도 성립한다는 사실을 잊고, 최종 답이 n의 홀짝성(parity)에 따라 달라진다고 생각하는 것. 이 식은 $n = 0$일 때만 성립하지 않으며, 여기서 n은 양수이다.
- (ii)에서 미분하기 전에 $x = 1$을 대입하는 것. 대입은 마지막에 해야 한다. x가 일단 수가 되면 더 이상 미분할 것이 남지 않는다.

STEP 너머

다항식(polynomial)을 계수들의 저장소로 보고, 대입하거나 미분하거나 곱하여 정보를 뽑아내는 것은 **생성함수**(generating function)의 아이디어이며, 이는 조합론(combinatorics)과 확률(probability)에서 가장 강력한 도구 중 하나이다. ± 1 대신 복소수 단위근(roots of unity)을 대입하면 같은 방식으로 세 번째마다 또는 네 번째마다의 계수를 골라낼 수 있다. 또 확률생성함수(probability generating function)를 미분하면 분포(distribution)의 평균(mean)을 얻는데, 이는 여기서 미분으로 $\sum r\binom{n}{r}$을 얻은 것과 똑같다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 생성함수가 활용되는 모습을 볼 수 있다.

풀이

STEP I 1989, 문제 6

순수수학 • 법선과 미분방정식

STEP I 1989, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q6

핵심 아이디어

P에서의 법선(normal)의 기울기(gradient)는 $-1/\mathrm{f}'(x)$이므로, Q를 구하려면 법선의 방정식에 $X = 0$을 대입하기만 하면 된다. 그러면 PQ^2은 수평 거리의 제곱과 수직 거리의 제곱의 합이 되고, 주어진 길이 조건은 $\mathrm{f}'(x)$만에 대한 방정식으로 바뀐다. 유일하게 미묘한 부분은 마지막의 제곱근이다. 어떤 부호를 택할지는 최솟점이 결정한다.

풀이

Q의 y좌표

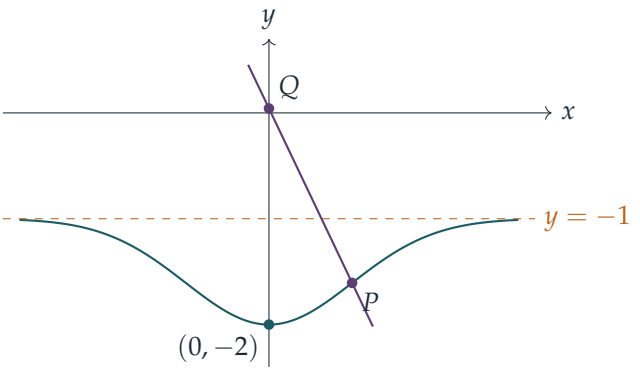
$P = (x, \mathrm{f}(x))$에서 접선(tangent)의 기울기는 $\mathrm{f}'(x)$이므로, ($\mathrm{f}'(x) \neq 0$이라면) 법선의 기울기는 $-1/\mathrm{f}'(x)$이다. 직선 위의 임의의 점의 좌표를 (X, Y)로 나타내면, 법선은

$$Y - \mathrm{f}(x) = -\frac{1}{\mathrm{f}'(x)}\,(X - x).$$

이다. $X = 0$을 대입하면, 법선은 y축과

$$Y = \mathrm{f}(x) + \frac{x}{\mathrm{f}'(x)}, \qquad \text{이므로} \qquad Q = \left(0,\ \mathrm{f}(x) + \frac{x}{\mathrm{f}'(x)}\right).$$

에서 만난다. ($\mathrm{f}'(x) = 0$이면 법선은 수직선이 되고, $x = 0$이 아닌 한 y축과 만나지 않는다.)



미분방정식

P와 Q는 수평 방향으로 x만큼, 수직 방향으로 $x/\mathrm{f}'(x)$만큼 차이가 나므로

$$PQ^2 = x^2 + \frac{x^2}{\left(\mathrm{f}'(x)\right)^2}.$$

이다. 이것을 $\mathrm{e}^{x^2} + x^2$과 같다고 놓으면 x^2 항이 소거되어

$$\frac{x^2}{\left(\mathrm{f}'(x)\right)^2} = \mathrm{e}^{x^2}, \qquad \text{즉} \qquad \boxed{\left(\mathrm{f}'(x)\right)^2 = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}.}$$

을 얻는다. 이는 $\mathrm{f}'(x) = \pm x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$와 같다.

$(0, -2)$에서 최솟값을 갖는 곡선

생각해 보기 어느 부호를 택해야 할까? 그리고 곡선을 따라가는 도중에 부호가 바뀔 수도 있을까?

f'은 연속(continuous)이고 (곡선이 최솟점을 가지므로 미분가능(differentiable)하다고 가정한다), $\mathrm{f}'(x)^2 = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$은 $x = 0$에서만 0이 되므로, f'은 $x > 0$에서도, $x < 0$에서도 부호가 바뀔 수 없다. 부호가 바뀌려면 0을 지나야 하기 때문이다. $(0, -2)$가 최솟점이 되려면 f는 0의 바로 왼쪽에서 감소하고 바로 오른쪽에서 증가해야 하므로, $x < 0$에서 $\mathrm{f}'(x) < 0$이고 $x > 0$에서 $\mathrm{f}'(x) > 0$이다. 이것은 정확히 x의 부호와 같으므로, 양쪽 모두에서

$$\mathrm{f}'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

이다. (전체에서 음의 부호를 택하면 $x = 0$에서 최댓값을 갖게 되고, 부호를 섞으면 f'의 부호가 일정해져 변곡점(point of inflection)이 된다.)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$이므로 적분하면

$$\mathrm{f}(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2} + c.$$

이다. 조건 $f(0) = -2$에서 $-1 + c = -2$이므로 $c = -1$이고, 곡선은

$$\boxed{y = -1 - e^{-x^2/2}.}$$

이다. 이 곡선은 $x = 0$에서 최솟값 -2를 갖고, 그림에서처럼 양쪽으로 점근선(asymptote) $y = -1$을 향해 올라간다.

검산

- $x = 1$일 때: $f(1) = -1 - e^{-1/2} \approx -1.6065$이고 $f'(1) = e^{-1/2} \approx 0.6065$이므로, $Q \approx (0, 0.0422)$이고 $PQ \approx \sqrt{1 + 1.6487^2} \approx 1.9283$이다. 이는 요구한 대로 $\sqrt{e+1}$과 같다.
- 컴퓨터로 무작위로 고른 2000개의 점에서 법선과 y축의 교점으로 Q를 다시 계산해 보았더니, PQ가 $\sqrt{e^{x^2} + x^2}$과 (상대오차) 10^{-15} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- 법선의 기울기 $-1/f'(x)$ 대신 접선의 기울기 $f'(x)$를 사용하는 실수. 이렇게 하면 Q가 $f(x) - xf'(x)$에 놓이게 된다.
- 왜 음의 부호를 버리는지 설명하지 않고 제곱근을 $f'(x) = xe^{-x^2/2}$로 택하는 실수.

STEP 너머

여기서는 곡선 위의 모든 점에 대한 기하학적 조건이 일계 미분방정식(first-order differential equation)이 되었는데, 이 방정식에서는 f'이 제곱된 형태로 나타나므로, 추가 정보로 가지를 골라 주기 전까지는 해가 하나로 정해지지 않는다. 이처럼 y'에 대해 풀려 있지 않은 방정식에서부터 상미분방정식(ODE)의 유일성 정리(uniqueness theorem)를 다룰 때 주의가 필요해지며, 이는 포락선(envelope)과 특이해(singular solution)로 이어진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계 방정식과 그 해의 존재성(existence) 및 유일성 이론을 다룬다.

풀이

STEP I 1989, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기와 최적화

> **STEP I 1989, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q7

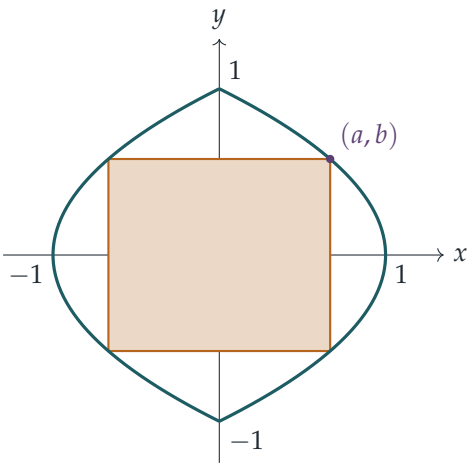
핵심 아이디어

곡선이 두 좌표축에 대하여 모두 대칭이므로, 가장 큰 직사각형은 원점을 중심으로 하고 한 꼭짓점이 제1사분면의 곡선 위에 있어야 할 것이다. 그러면 두 변수에 대한 탐색이 한 변수 함수의 최댓값 문제로 바뀐다. 일반적인 곡선에서도 $|y|$를 $1-|x|$의 거듭제곱으로 풀어 내기만 하면 같은 아이디어가 통한다.

풀이

개형 그리기

$y^2 \geq 0$이므로 $1-|x| \geq 0$이어야 하고, 따라서 $-1 \leq x \leq 1$이다. $x \geq 0$일 때 곡선은 $x = 1-y^2$, 즉 꼭짓점이 $(1,0)$이고 왼쪽으로 열린 포물선(parabola)이다. $x \leq 0$일 때는 그 거울상인 $x = y^2 - 1$이다. 두 호는 $(0, \pm 1)$에서 만나는데, 이 점에서 뾰족점(corner)을 이룬다(기울기 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mp\frac{1}{2}$와 $\pm\frac{1}{2}$가 일치하지 않는다). 또 두 호는 $(\pm 1, 0)$에서 x축과 수직으로 만난다. 이 곡선은 영역 $|x| + y^2 \leq 1$을 둘러싸는 닫힌 고리이며, 모서리가 둥근 마름모 모양이다.



가장 큰 직사각형

직사각형 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$가 영역 $|x| + y^2 \leq 1$ 안에 놓여 있다고 하자. $A = \max(|x_1|, |x_2|)$, $B = \max(|y_1|, |y_2|)$로 놓는다. 꼭짓점은 i, j를 독립적으로 골라 만든 (x_i, y_j)이므로, 어떤 꼭짓점 하나는 $|x| = A$와 $|y| = B$를 동시에 만족한다. 그 꼭짓점이 영역 안에 있으므로 $A + B^2 \leq 1$이다. 그러면 직사각형 $[-A, A] \times [-B, B]$도 영역 안에 놓인다. $|x| \leq A$, $|y| \leq B$이면

$$|x| + y^2 \leq A + B^2 \leq 1.$$

이기 때문이다. 이 직사각형의 가로 길이는 $2A \geq x_2 - x_1$이고 세로 길이는 $2B \geq y_2 - y_1$이므로, 넓이가 원래 직사각형보다 작지 않다. 따라서 꼭짓점이 $(\pm a, \pm b)$이고 원점을 중심으로 하는 직사각형만 생각해도 되며, 꼭짓점을 곡선에 닿을 때까지 밀어내면 $a = 1 - b^2$, $0 \leq b \leq 1$이다.

생각해 보기 왜 원점을 중심으로 하는 직사각형만 살펴보아도 충분한가?

바로 위의 논증이 그 답이다. 각 변을 축으로부터의 두 거리 중 큰 쪽으로 바꾸어도 직사각형은 (대칭성에 의해) 곡선 안에 머물고, 결코 작아지지 않는다.

넓이는

$$S(b) = 4ab = 4b(1 - b^2) = 4b - 4b^3, \qquad S'(b) = 4 - 12b^2.$$

이다. $b = 1/\sqrt{3}$에서 $S'(b) = 0$이고, 그 앞에서는 $S' > 0$, 그 뒤에서는 $S' < 0$이며, $S(0) = S(1) = 0$이므로 이 점에서 최댓값(maximum)을 갖는다. 이때 $a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$이고

$$S_{\max} = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{27}},$$

이므로 요구된 결과가 나온다.

일반적인 곡선

이제 $y^{2m} = (1-|x|)^n$을 생각하자. 좌변은 음이 아니고, n이 홀수이므로 $(1-|x|)^n$은 $1-|x|$와 부호가 같다. 따라서 이번에도 $|x| \le 1$이고, (양의) $2m$제곱근을 취하면

$$|y| = (1-|x|)^k, \qquad k = \frac{n}{2m} > 0.$$

이다. (n이 짝수라면 모든 x가 허용되어 곡선이 무한히 뻗어 나가므로 가장 큰 직사각형이 존재하지 않는다. 이것이 n이 홀수여야 하는 이유이다.) 이 곡선도 $(\pm 1, 0)$과 $(0, \pm 1)$을 지나고 두 좌표축에 대하여 대칭인 닫힌 고리이며, 영역 $|y| \le (1-|x|)^k$를 둘러싼다. $(1-|x|)^k$는 $|x|$가 커질수록 감소하므로, 앞에서와 같은 논증에 의해 꼭짓점이 $(\pm a, \pm b)$, $b = (1-a)^k$, $0 \le a \le 1$인 직사각형만 생각해도 된다. 그 넓이는

$$S(a) = 4a(1-a)^k.$$

이다. 미분하면

$$S'(a) = 4(1-a)^{k-1}\big[(1-a) - ka\big] = 4(1-a)^{k-1}\big[1-(1+k)a\big],$$

이고, 이는 $0 < a < \frac{1}{1+k}$에서 양수, $\frac{1}{1+k} < a < 1$에서 음수이다. $S(0) = S(1) = 0$이므로 최댓값은 $a = \frac{1}{1+k}$에서 나타나며, 이때 $1-a = \frac{k}{1+k}$이다.

$$S_{\max} = \frac{4}{1+k}\left(\frac{k}{1+k}\right)^k = \frac{4k^k}{(1+k)^{k+1}}.$$

$k = \frac{n}{2m}$, $1+k = \frac{n+2m}{2m}$을 대입하면 $2m$의 거듭제곱들이 $(2m)^{-k} \cdot (2m)^{k+1} = 2m$으로 모이므로

$$S_{\max} = \frac{8m\, n^{n/(2m)}}{(n+2m)^{(n+2m)/(2m)}} = 8m\left(\frac{n^n}{(n+2m)^{n+2m}}\right)^{1/(2m)}.$$

이다.

검산

- $m = n = 1$이면 $8\left(\frac{1}{27}\right)^{1/2} = 8/\sqrt{27} \approx 1.5396$이 되어 앞부분의 결과와 일치한다.
- $(m,n) = (1,3), (2,1), (2,3), (3,5)$에 대하여 $a \in [0,1]$을 촘촘하게 탐색한 결과가 공식과 일치한다. 예를 들어 $(m,n) = (2,1)$이면 $16/5^{5/4} \approx 2.1400$이다. 중심이 원점에서 벗어난 직사각형을 무작위로 잡아 보아도 이 값을 넘지 못한다.
- n을 고정하고 $m \to \infty$이면 $k \to 0$이 되어 곡선이 정사각형 $|x| \le 1, |y| \le 1$을 가득 채우게 되고, 공식의 값은 그 정사각형의 넓이인 4에 수렴한다.

흔한 실수

- 인수 4를 빠뜨리는 실수: 꼭짓점 (a, b)는 가로 길이 $2a$, 세로 길이 $2b$인 직사각형을 준다.
- n이 홀수라는 조건이 왜 중요한지 놓치는 실수: n이 짝수이면 유계인 곡선이 생기지 않는다.

STEP 너머

$a(1-a)^k$의 최댓값 구하기는 사실 가중 산술-기하 평균 부등식(weighted AM–GM) 문제가 모습을 바꾼 것이다. $a \cdot \left(\frac{1-a}{k}\right)^k$를 합이 일정한 $1+k$개 인수의 곱으로 보면 미적분 없이도 최댓값을 얻는다. 곡선 $|x|^p + |y|^q = 1$은 ℓ^p 노름(norm)의 단위 공(unit ball)과 사촌 격인데, 이것은 대학 1학년 해석학과 선형대수학에서 등장한다. 이런 종류의 부등식에 대해 더 알고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 고급 문제)를, 최적화의 바탕이 되는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 보라.

풀이

STEP I 1989, 문제 8

순수수학 • 배각 공식

> **STEP I 1989, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q8

핵심 아이디어

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)를 쓰면 $\cos n\theta$는 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$의 실수부(real part)가 되고, $\sin^2\theta$를 $1-\cos^2\theta$로 바꾸면 $\cos\theta$에 대한 다항식(polynomial)이 남는다. 마지막 부분의 6차 다항식(sextic)은 방금 구한 두 다항식의 결합처럼 보이므로, 그런 결합을 찾아본다. 알고 보면 그것은 $\cos 6\theta - \cos 4\theta$의 절반이고, $\cos 6\theta = \cos 4\theta$를 푸는 것은 쉽다.

풀이

풀이 전체에서 $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$라 쓰자. 그러면 $s^2 = 1 - c^2$이다.

소문항 (i)

드무아브르 정리에 의해 $\cos 4\theta + \mathrm{i}\sin 4\theta = (c + \mathrm{i}s)^4$이다. 이항정리(binomial theorem)로 전개하여 실수인 항(is의 짝수 거듭제곱이 들어 있는 항)만 남기면

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= c^4 - \tbinom{4}{2}c^2s^2 + s^4 \\ &= c^4 - 6c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2 \\ &= c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4 \\ &= 8c^4 - 8c^2 + 1,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 항등식(identity)이다.

소문항 (ii)

같은 방법으로 $(c+\mathrm{i}s)^6$의 실수부를 구하면

$$\cos 6\theta = c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6,$$

이다. 여기서 $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$와 $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^6 = -1$을 이용했다. $u = c^2$이라 두면 $s^2 = 1-u$이므로

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= u^3 - 15u^2(1-u) + 15u(1-u)^2 - (1-u)^3 \\ &= u^3 - 15u^2 + 15u^3 + 15u - 30u^2 + 15u^3 - 1 + 3u - 3u^2 + u^3 \\ &= 32u^3 - 48u^2 + 18u - 1 \\ &= 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1,\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

방정식

좌변을 $p(x) = 16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1$이라 하자.

> **생각해 보기** 두 항등식 중 어느 것과도 같지 않은 다항식을 다루는 데 두 항등식이 어떻게 도움이 될까?

계수(coefficient)를 비교해 보자. 최고차항의 계수 16은 32의 절반이고, 상수항 -1은 -2의 절반이다. 이는 (ii)에서 (i)을 빼 보라는 암시이다.

$$\cos 6\theta - \cos 4\theta = 32c^6 - 56c^4 + 26c^2 - 2 = 2\,p(c).$$

따라서 $x = \cos\theta$이면

$$p(x) = 0 \iff \cos 6\theta = \cos 4\theta.$$

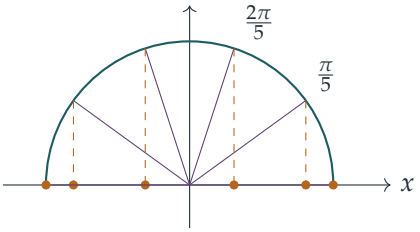
이다. 그런데 $\cos A = \cos B$일 필요충분조건은 어떤 정수 k에 대하여 $A = \pm B + 2k\pi$인 것이다. 여기서는 다음을 얻는다.

$$6\theta = 4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = k\pi, \qquad \text{또는} \qquad 6\theta = -4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{k\pi}{5}.$$

첫 번째 해의 집합은 두 번째에 포함되므로 해는 $\theta = k\pi/5$이고, 이에 대응하는 $x = \cos\theta$의 값은

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{3\pi}{5} = -\cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\pi = -1.$$

이다. 다른 k 값은 이 값들을 되풀이할 뿐이다. 이들은 **서로 다른** 여섯 개의 수이고(코사인은 $[0,\pi]$에서 순감소(strictly decreasing)한다), p의 차수(degree)는 6이므로, 이것들이 실근이든 복소근이든 p의 근(root) 전부이다. 특히 치환 $x = \cos\theta$로는 $-1 \le x \le 1$ 범위만 다룰 수 있지만, 그 구간 밖의 근을 놓친 것은 아니다. 더 찾을 근이 남아 있지 않기 때문이다.



하지만 아직은 답으로 받아들일 수 없다. 수치 근삿값은 허용되지 않으며 코사인 값을 정확히 구해야 하기 때문이다. $x = 1$이 근이므로 $x = -1$도 근이고(p는 우함수(even function)이다), 따라서 $x^2 - 1$은 인수(factor)이다. 나누어 보면(또는 계수를 비교하면)

$$p(x) = (x^2 - 1)(16x^4 - 12x^2 + 1).$$

이다. 4차식(quartic) 인수는 x^2에 대한 이차식(quadratic)이므로

$$x^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

이다. 여기서 다음에 주목하자.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

x^2의 두 값은 모두 양수이므로 각각에서 실수 x 값이 두 개씩 나온다. 따라서 방정식의 실근은 다음 여섯 개의 수이다.

$$x = \pm 1, \qquad x = \pm\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

덤으로, 위의 목록과 크기를 맞추어 보면($\cos\frac{\pi}{5} > \cos\frac{2\pi}{5} > 0$) 잘 알려진 값 $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$와 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$를 얻는다.

검산

- $\theta = 0$에서 두 항등식은 모두 $1 = 1$이 되고, $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 (i)은 $1 = 1$, (ii)는 $-1 = -1$이 된다.
- p의 계수의 합은 $16 - 28 + 13 - 1 = 0$이므로 $x = 1$이 근임이 확인된다.
- 수치적으로 $\frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.80902 = \cos 36^\circ$이고 $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0.30902 = \cos 72^\circ$이며, 두 값에서 p는 (반올림 오차 범위 안에서) 0이 된다.

흔한 실수

- $6\theta = -4\theta + 2k\pi$에서 나오는 해를 빠뜨려 $x = \pm 1$만 구하는 것.

- 답을 $\cos\frac{\pi}{5}$ 등의 꼴이나 소수로 남겨 두는 것. 문제는 정확한 무리수(surd) 꼴을 요구한다.
- $|x| > 1$인 근이 없는 이유를 설명하지 않는 것. 차수를 세어 보면 해결된다.

STEP 너머

$\cos n\theta$를 $\cos\theta$로 나타내는 다항식은 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial) T_n이다. 따라서 (i)과 (ii)는 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$이라는 뜻이다. 체비쇼프 다항식은 수치해석(numerical analysis)에서 핵심적인 역할을 하며, 그 근은 다항식 보간(polynomial interpolation)에 가장 좋은 점들을 준다. $\cos\frac{\pi}{5}$에 $\sqrt{5}$가 나타나는 것은 정오각형(regular pentagon)의 기하와 황금비(golden ratio)를 반영한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 드무아브르 정리와 단위근(roots of unity)을 기하적으로 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1989, 문제 9

순수수학 • 그래프의 변환

> **STEP I 1989, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q9

핵심 아이디어

기본이 되는 삼차함수(cubic)의 그래프를 그리고 나면, 나머지 그래프는 모두 같은 곡선을 좌표 변환(change of coordinates)을 거쳐 본 것일 뿐이다. 치환 $X = ax + b$, $Y = cy + d$는 각 방향으로의 늘이기(stretch)(또는 대칭이동(reflection))에 평행이동(translation)이 이어진 것에 지나지 않으며, 극점(turning point)을 극점으로 옮긴다. 따라서 해야 할 일은 원래 삼차함수의 두 극점을 찾고, 그 점들이 어디로 옮겨지는지 추적하는 것뿐이다.

풀이

기본 그래프

$y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x) = \frac{1}{8}x(x^2 - 12)$로 쓰자. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 - 12}{8} = \frac{3(x-2)(x+2)}{8}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}.$$

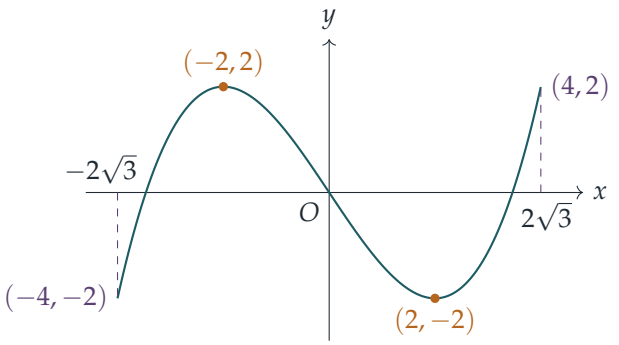
기울기(gradient)는 $x = \pm 2$에서 0이다.

- $x = -2$에서: $y = \frac{1}{8}(-8 + 24) = 2$이고 $y'' = -\frac{3}{2} < 0$이므로, $(-2, 2)$는 극대점(local maximum)이다.
- $x = 2$에서: $y = \frac{1}{8}(8 - 24) = -2$이고 $y'' = \frac{3}{2} > 0$이므로, $(2, -2)$는 극소점(local minimum)이다.

그 밖의 유용한 특징은 다음과 같다.

- 곡선은 $x(x^2 - 12) = 0$인 곳, 즉 $x = 0$과 $x = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.46$에서 축과 만난다.

- 이 함수는 기함수(odd function)이므로 그래프는 원점에 대해 위수 2의 회전대칭(rotational symmetry)을 가지며, 원점은 변곡점(point of inflection)이기도 하다. 그곳에서의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다.
- 양 끝에서 $y(4) = \frac{1}{8}(64 - 48) = 2$이고 $y(-4) = -2$이다. 따라서 곡선은 정확히 $x = 4$에서 극대점의 높이까지 다시 올라온다.



극점이 극점으로 옮겨지는 이유

생각해 보기 좌표를 바꿀 때, 새 극점이 단지 원래 극점의 상이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

$X = ax + b$, $Y = cy + d$이고 $a, c \neq 0$이면, 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{c}{a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

이고, 이 값은 정확히 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 0이인 곳에서 0이 된다. 따라서 새 극점은 $(-2, 2)$와 $(2, -2)$의 상이다. ($c/a < 0$이면 그림이 대칭이동되어 극대와 극소의 역할이 서로 바뀐다.) 기하학적으로 보면 다음과 같다.

- $X = \frac{1}{2}x$는 그래프를 가로 방향으로 2분의 1로 줄인다;
- $Y = \frac{1}{2}y$는 그래프를 세로 방향으로 2분의 1로 줄인다;
- 그다음 X 또는 Y에 1을 더하면 그래프가 오른쪽 또는 위쪽으로 1만큼 이동한다.

변환된 네 그래프

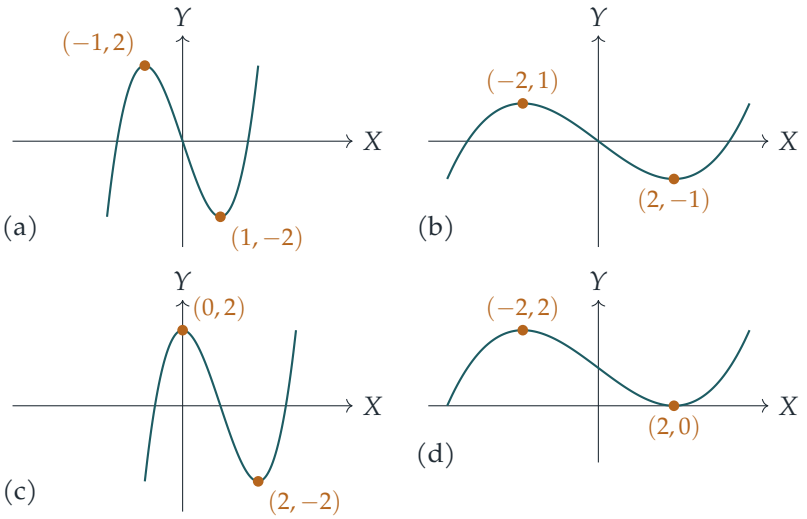
각 변환을 $(-2, 2)$, $(2, -2)$와 범위 $-4 \leq x \leq 4$에 적용하면 다음과 같다.

(a) $X = \frac{1}{2}x$, $Y = y$: 극대점 $(-1, 2)$, 극소점 $(1, -2)$, 범위 $-2 \leq X \leq 2$. 곡선은 $Y = X^3 - 3X$이다.

(b) $X = x$, $Y = \frac{1}{2}y$: 극대점 $(-2,1)$, 극소점 $(2,-1)$, 범위 $-4 \le X \le 4$. 곡선은 $16Y = X^3 - 12X$이다.

(c) $X = \frac{1}{2}x + 1$, $Y = y$: 극대점 $(0,2)$, 극소점 $(2,-2)$, 범위 $-1 \le X \le 3$. 이것은 그래프 (a)를 오른쪽으로 1만큼 옮긴 것이며, 변곡점은 $(1,0)$이다.

(d) $X = x$, $Y = \frac{1}{2}y + 1$: 극대점 $(-2,2)$, 극소점 $(2,0)$, 범위 $-4 \le X \le 4$. 이것은 그래프 (b)를 위로 1만큼 옮긴 것이며, 변곡점은 $(0,1)$이다. 이 그래프는 극소점에서 X축에 접한다.



마지막 부분

$a, c \neq 0$이어야 하며(그렇지 않으면 그래프가 직선으로 찌그러진다), 이때 새 그래프의 극점은

$$(-2a + b,\ 2c + d) \quad \text{와} \quad (2a + b,\ -2c + d).$$

이다. 이 두 점은 순서에 상관없이 $(0,0)$과 $(1,1)$이 되어야 하므로, 두 개의 연립일차방정식(linear system)을 얻는다.

경우 1: $(-2,2) \mapsto (0,0)$이고 $(2,-2) \mapsto (1,1)$인 경우. 그러면 $-2a + b = 0$이고 $2a + b = 1$이므로 $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$이다. 또 $2c + d = 0$, $-2c + d = 1$이므로 $d = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{4}$이다.

경우 2: $(-2,2) \mapsto (1,1)$이고 $(2,-2) \mapsto (0,0)$인 경우. 같은 방법으로 $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$이다.

따라서 한 답은

$$a = \tfrac{1}{4}, \quad b = \tfrac{1}{2}, \quad c = -\tfrac{1}{4}, \quad d = \tfrac{1}{2},$$

이고, 다른 답은 $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$이다.

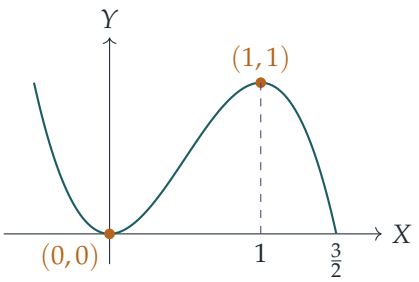
새 곡선을 직접 구해 볼 만하다. 경우 1에서 $x = 4X - 2$이고 $y = 2 - 4Y$이므로

$$\begin{aligned} 8(2-4Y) &= (4X-2)^3 - 12(4X-2) \\ &= 64X^3 - 96X^2 + 48X - 8 - 48X + 24 \\ &= 64X^3 - 96X^2 + 16, \end{aligned}$$

이고, 이를 정리하면

$$Y = 3X^2 - 2X^3 = X^2(3-2X).$$

이다. 이 곡선은 $Y' = 6X(1-X)$이므로, 그 극점은 실제로 $(0,0)$에서의 극소점과 $(1,1)$에서의 극대점이다. 경우 2도 정확히 같은 곡선을 준다. 원래 삼차함수가 기함수이므로 (x,y)를 $(-x,-y)$로 바꾸어도 원래 그래프는 변하지 않는데, 이것이 두 경우 사이의 유일한 차이이기 때문이다.



$-4 \le x \le 4$에 대해 이 곡선은 $(-\frac{1}{2}, 1)$에서 $(\frac{3}{2}, 0)$까지 이어진다.

검산

- $Y = 3X^2 - 2X^3$에 $X = 0$과 $X = 1$을 대입하면 각각 0과 1이 나오고, $Y' = 6X(1-X)$는 두 점 모두에서 0이 된다.
- 변환된 각 그래프는 곡선이 범위의 한쪽 끝에서 극점의 높이로 돌아온다는 원래 성질을 그대로 유지한다. 예를 들어 (d)에서는 $Y = 2$가 $X = 4$에서, $Y = 0$이 $X = -4$에서 성립한다.
- 수치로 확인해 보면, $x = 1$에서 $y = -\frac{11}{8}$이다. 경우 1에서 이는 $X = 0.75, Y = 0.84375$를 주며, 실제로 $3(0.75)^2 - 2(0.75)^3 = 0.84375$이다.

흔한 실수

- 늘이기의 방향을 잘못 잡는 것: $X = \frac{1}{2}x$는 그래프를 넓게가 아니라 **좁게** 만든다. $x = 2$에 있던 점이 $X = 1$로 옮겨지기 때문이다.

- 정의역(domain)도 함께 변환하는 것을 잊는 것: 그래프 (c)는 $-4 \leq X \leq 4$가 아니라 $-1 \leq X \leq 3$ 위에서 그려진다.
- 극점을 대응시키는 다른 순서를 알아채지 못하고 마지막 부분에 해를 하나만 제시하는 것(어느 하나만으로도 충분하지만, 첫 번째 경우에서 $c < 0$이라는 점은 놓치기 쉽다).

STEP 너머

변환 $X = ax + b$, $Y = cy + d$는 아핀 변환(affine transformation)이며, 마지막 부분은 두 극점을 갖는 모든 삼차함수의 그래프가 이러한 변환 하나로 표준 곡선 $Y = 3X^2 - 2X^3$ 위로 옮겨질 수 있음을 보여 준다. 이 곡선은 컴퓨터 그래픽스에서 쓰이는 "smoothstep" 함수이다. 이처럼 변환군(group of transformations)에 대해 곡선을 분류하는 것은 기하학과 선형대수학(linear algebra) 전반에 흐르는 주제이다. 이 이야기의 행렬 쪽 측면은 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 1989, 문제 10

역학 • 속도에 따라 달라지는 저항

STEP I 1989, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q10

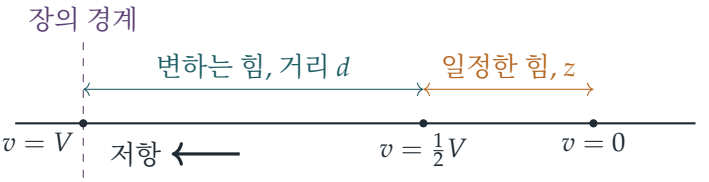
핵심 아이디어

저항(resistance)은 시간이 아니라 속력 v에 따라 달라지고, 우리가 구하려는 것은 거리이다. 이것은 가속도를 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰라는 신호이다. 이렇게 하면 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(Newton's second law)이 v와 x를 직접 잇는 변수분리형 미분방정식(separable equation)이 된다. 두 번째 부분은 감속도(deceleration)가 일정한 문제이므로, 전환되는 순간의 힘을 구하고 그 힘을 $\pm 10\%$만큼 변화시키기만 하면 된다.

풀이

모형

우주선을 질량이 M이고 직선 위를 움직이는 입자(particle)로 다룬다. 장(field)에 들어선 뒤 이동한 거리를 x, 속력을 v라 하고, $x = 0$일 때 $v = V$라 하자. 작용하는 힘은 뒤쪽으로 작용하는 저항뿐이므로, 속력은 운동하는 내내 감소한다.



속력이 절반이 될 때까지의 거리

운동 방향을 양의 방향으로 잡고 가속도를 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰면, 뉴턴의 운동 제2법칙에서

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{M\omega\,(v^2+V^2)}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = -\omega\,\mathrm{d}x.$$

를 얻는다.

> **?** **생각해 보기** $\dfrac{v^2}{v^2+V^2}$는 어떻게 적분할까?

분자를 $(v^2+V^2)-V^2$로 쓰면

$$\frac{v^2}{v^2+V^2} = 1 - \frac{V^2}{v^2+V^2}, \qquad \int \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = v - V\arctan\frac{v}{V} + C,$$

이다. 여기서 기본 적분 $\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+V^2} = \frac{1}{V}\arctan\frac{v}{V}$를 이용하였다.

속력이 $\frac{1}{2}V$로 떨어졌을 때까지 이동한 거리를 d라 하자. $(x,v)=(0,V)$에서 $(d,\frac{1}{2}V)$까지 적분하면

$$\begin{aligned}\omega d &= \int_{V/2}^{V} \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = \Big[v - V\arctan\frac{v}{V}\Big]_{V/2}^{V} \\ &= \frac{V}{2} - V\Big(\arctan 1 - \arctan\tfrac{1}{2}\Big) = V\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big).\end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 거리는

$$d = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big) = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3}\Big) \approx 0.178\,\frac{V}{\omega}.$$

이다. 두 번째 꼴은 탄젠트의 뺄셈 공식(tangent subtraction formula)에서 얻은 $\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} = \arctan\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \arctan\frac{1}{3}$을 이용한 것이다(두 각이 모두 $(0,\frac{\pi}{2})$에 있으므로 모호함이 없다). 어느 꼴로 답해도 완전한 답이다.

일정한 힘

전환 직전에 $v=\frac{1}{2}V$이므로, 저항력의 크기는

$$\frac{M\omega\big(\frac{1}{4}V^2+V^2\big)}{\frac{1}{2}V} = \frac{5}{2}M\omega V.$$

이다. 새로운 일정한 힘 F는 이 값과 10% 이내로 차이 나므로

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V \le F \le \frac{11}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V, \qquad \text{즉} \qquad \frac{9}{4}M\omega V \le F \le \frac{11}{4}M\omega V.$$

이다. 힘이 일정하면 감속도 $a = F/M$도 일정하므로, $u = \frac{1}{2}V$이고 나중 속력이 0일 때 $v^2 = u^2 - 2as$에서

$$z = \frac{(V/2)^2}{2a} = \frac{MV^2}{8F}.$$

를 얻는다. 이 값은 F가 커질수록 작아지므로, 가장 큰 힘이 가장 작은 z를 주고 그 반대도 성립한다.

$$\frac{MV^2}{8 \cdot \frac{11}{4} M\omega V} \le z \le \frac{MV^2}{8 \cdot \frac{9}{4} M\omega V}, \qquad \text{즉} \qquad \boxed{\frac{V}{22\,\omega} \le z \le \frac{V}{18\,\omega}}$$

("10% 이내"를 엄격한 의미로 읽으면 부등호도 엄격한 부등호가 된다). 힘이 전혀 바뀌지 않는다면 $z = V/(20\omega)$이고, 이는 이 범위의 한가운데에 있다.

검산

- 차원(dimensions): $M\omega v$가 힘이어야 하므로 ω의 단위는 s^{-1}이고, 따라서 V/ω는 길이이다. 두 답 모두 그래야 한다.
- 계수 $\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} \approx 0.1782$는 양수이고 $\frac{1}{2}$보다 작다. 당연히 그래야 한다. 우주선은 $\frac{1}{2}V$와 V 사이의 속력으로 움직이고 감속도는 적어도 $2\omega V$이므로, 이 구간을 지나는 데 걸리는 시간은 많아야 $1/(4\omega)$이고 이동 거리는 $V/(4\omega)$보다 작다.
- $V = \omega = 1$로 두고 $\dot{v} = -\omega(v^2 + V^2)/v$를 수치적으로 한 단계씩 계산하면 $v = \frac{1}{2}$가 되는 거리로 0.17825를 얻고, 일정한 힘이 작용하는 단계를 같은 방식으로 계산하면 힘이 110%, 100%, 90%일 때 각각 $z = 0.0455, 0.0500, 0.0556$을 얻는다. 이는 $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{18}$과 일치한다.

흔한 실수

- $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 대신 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$를 쓰는 것: 이렇게 하면 거리가 아니라 시간이 나오고, 적분을 한 번 더 해야 한다.
- 경계를 거꾸로 짝짓는 것: **더 큰** 힘은 **더 짧은** 정지 거리를 주므로, 1.1배의 힘은 하한 $V/(22\omega)$에 대응한다.

STEP 너머

$a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$로 쓰는 것은 더 큰 아이디어를 처음 엿보는 것이다. 위치나 속력에만 의존하는 1차원 힘에 대해서는 시간 대신 다른 변수를 써서 방정식의 계수(order)를 낮출 수 있고, 힘이 위치에만 의존할 때에는 이것이 에너지 보존(energy conservation)과 운동의 위상 평면(phase plane) 그림으로 이어진다. 두 번째 부분은 **민감도**(sensitivity)에 관한 작은 연습

이다. 즉 자료의 불확실성(여기서는 힘의 $\pm 10\%$)이 답에(대략 z의 $\mp 10\%$로) 어떻게 전파되는지를 본다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘을 이러한 관점에서 다룬다.

풀이

STEP I 1989, 문제 11

역학 • 포물체 도달 거리의 최적화

STEP I 1989, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q11

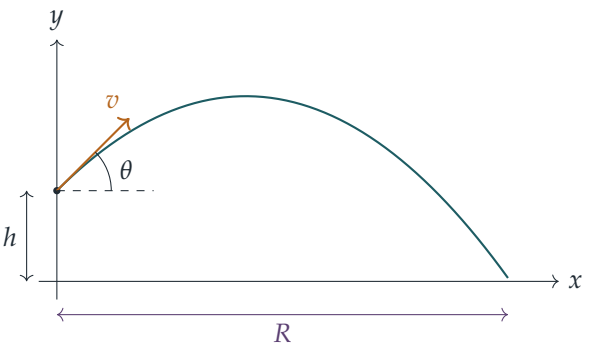
핵심 아이디어

비행 시간(time of flight)은 t에 대한 이차방정식(quadratic)에서 나온다. 포환은 높이가 다시 영이 될 때 땅에 떨어진다. 양의 근을 택해 수평 속력을 곱하면 R을 얻고, 나머지는 제곱근을 요구된 꼴로 정리하는 일뿐이다. 둘째 부분에서 "θ를 조금 줄이면 R이 늘어나는가?"라는 물음은 $\theta = 45°$에서 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta$의 부호에 관한 물음이며, $\sin 45° = \cos 45°$라는 대칭성 덕분에 이 도함수(derivative)는 아주 깔끔하게 정리된다.

풀이

모형

포환을 중력만 받으며 움직이는 질점(particle)으로 보고, 점 $(0, h)$에서 속력 v로 수평면 위각 θ 방향으로 던진다고 하자. 여기서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고 $h > 0$이다. x축은 던지는 방향의 수평 방향으로, y축은 지면에서 연직 위쪽으로 잡는다.



사거리

시간 t가 지난 뒤

$$x = vt\cos\theta, \qquad y = h + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

포환은 $y = 0$일 때, 곧

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - (v\sin\theta)\,t - h = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{v\sin\theta \pm \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}.$$

일 때 땅에 닿는다. $h > 0$이므로 두 근의 곱 $-2h/g$는 음수이고, 따라서 양의 근은 정확히 하나이다. 빼기 부호를 택하면 음의 근(던지기 전의 시각)이 나오므로 더하기 부호를 택한다. 그러면

$$\begin{aligned} R = v\cos\theta\, t &= \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}\right) \\ &= \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2\sin^2\theta}}\right) \qquad (v\sin\theta > 0\text{을 밖으로 묶어 냄}) \\ &= \frac{v^2}{2g}\sin 2\theta\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2\sin^2\theta}}\right), \end{aligned}$$

이고, 여기서 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$를 이용했다. 이것이 구하는 결과이다.

> ? **생각해 보기** $v\sin\theta$를 제곱근 안으로 $v^2\sin^2\theta$로 넣어도 되는 이유는 무엇인가?

$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$는 $a \geq 0$일 때만 성립하기 때문이다. 여기서는 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $v\sin\theta > 0$이고, 따라서 이 단계는 타당하다. (아래쪽으로 던지는 경우에는 이 단계가 성립하지 않으며, 주어진 공식도 틀리게 된다.)

$45°$가 가장 좋은 각인가?

미분할 때는 정리하기 전의 꼴이 더 다루기 쉽다.

$$R(\theta) = \frac{v}{g}\cos\theta\,(v\sin\theta + S), \qquad S = \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh},$$

로 쓰면 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}$이다. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v}{g}\left[-\sin\theta\,(v\sin\theta + S) + \cos\theta\left(v\cos\theta + \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}\right)\right].$$

$\theta = 45°$에서 $\sin\theta = \cos\theta = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$로 두자. 항 $-vc^2$와 $+vc^2$가 서로 지워지고

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=45°} = \frac{vc}{g}\left(-S + \frac{v^2c^2}{S}\right) = \frac{vc}{gS}\left(v^2c^2 - S^2\right)$$
$$= \frac{vc}{gS}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v^2 - 2gh\right) = -\frac{2vhc}{S} = -\frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}},$$

이 남는다. 마지막 단계에서는 $S = \sqrt{\frac{1}{2}v^2 + 2gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v^2+4gh}$를 썼다.

$v > 0$이고 $h > 0$이므로 이 도함수는 순음수이다. 따라서 R은 $45°$ 근처에서 θ에 대한 순감소함수이고, 충분히 작은 감소량 $\delta\theta > 0$에 대하여 $R(45° - \delta\theta) \approx R(45°) + \frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}}\,\delta\theta > R(45°)$이다. **그렇다. θ를 조금 줄이면 R이 늘어난다.**

물리적으로 보면, 높은 곳에서 던진 포환은 평지에서보다 공중에 조금 더 오래 머무르며, 그 늘어난 시간은 수평으로 나아가는 데 쓰는 편이 낫다. 그래서 조금 더 낮게 던지는 것이 유리하다. $h = 0$일 때에만 도함수가 영이 되어 $45°$가 최적이 된다.

검산

- $h = 0$이면 공식은 $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$, 곧 익숙한 평지에서의 사거리가 되고, $45°$에서의 도함수는 마땅히 그래야 하듯 0이다.
- 단위: v^2/g는 길이이고, $2hg/v^2$는 무차원(dimensionless)이다.
- 수치로 $g = 9.8$, $v = 13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $h = 2\,\mathrm{m}$로 두면 $R(45°) \approx 19.05\,\mathrm{m}$이지만 $R(40°) \approx 19.10\,\mathrm{m}$이다. 운동을 시간에 따라 단계적으로 계산해 보면 R에 대한 공식이 재현되고, $45°$에서의 유한 차분(finite-difference) 도함수는 무작위로 고른 여러 v와 h에 대해 $-\sqrt{2}\,vh/\sqrt{v^2+4gh}$와 일치한다.

흔한 실수

- t에 대한 이차방정식에서 엉뚱한 근을 택하거나, 음의 근을 버리는 근거를 밝히지 않는 것.
- "$\sin 2\theta$가 $45°$에서 최대이므로 R도 그렇다"고 추론하는 것. 괄호 부분도 θ에 의존하므로(그것도 θ가 커질수록 줄어든다) 이 논증은 불완전하다.

STEP 너머

일반적으로 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta = 0$으로 놓으면, 높이 h에서 던질 때 최적의 발사각은 $\tan\theta = v/\sqrt{v^2+2gh}$를 만족함을 알 수 있다. 이 각은 $45°$보다 조금 작다(위의 수치에서는 약

42°). 실제 포환던지기 선수들은 이보다도 낮게 던지는데, 낮은 각도에서 더 세게 밀어낼 수 있기 때문이다. 이처럼 궤적들의 족(family)에 대해 최적화를 하다 보면 그 족의 **포락선**(envelope), 곧 포환이 도달할 수 있는 모든 점의 경계를 나타내는 "안전 포물선(parabola of safety)"에 이르게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물선 운동과 그 여러 변형을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1989, 문제 12

역학 • 탄성 끈과 에너지

STEP I 1989, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q12

핵심 아이디어

모든 것은 정사면체(regular tetrahedron)의 기하에 달려 있다. 즉 질량중심(centre of mass)이 꼭짓점(vertex)에서, 면(face)에서, 그리고 한 꼭짓점을 지나는 축(axis)에서 얼마나 떨어져 있는지가 핵심이다. 이 세 길이를 구하고 나면 첫 번째 부분은 훅의 법칙(Hooke's law)을 적용하기만 하면 된다. 두 번째 부분에서는 대칭(symmetry) 때문에 운동이 순수한 연직 병진운동(translation)으로 유지된다. 정사면체는 정지 상태에서 출발하여 정지 상태로 끝나므로 운동 방정식(equation of motion)은 전혀 필요하지 않다. 중력 퍼텐셜 에너지(gravitational potential energy)와 탄성 퍼텐셜 에너지(elastic potential energy) 사이의 에너지 균형만으로 충분하다.

풀이

정사면체의 기하

막대는 균일한 강체 막대로, 줄은 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 줄로 모형화한다. 각 막대의 질량은 그 중점에 있다고 볼 수 있다. 모든 꼭짓점은 여섯 개의 막대 가운데 정확히 세 개에 속하므로, 여섯 중점의 평균은 네 꼭짓점의 평균과 같다. 따라서 질량중심 G는 정사면체의 무게중심(centroid)이다.

면 BCD는 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형이므로, 그 중심 N은 B, C, D 각각으로부터 거리

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

만큼 떨어져 있다. 정사면체의 높이는 $AN = \sqrt{(2a)^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\,a = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$이다. 무게중심

은 AN 위에 있으며, 면에서부터 높이의 4분의 1 되는 곳에 있다. 따라서

$$GN = r = \frac{\sqrt{6}}{6}a, \qquad GA = GB = GC = GD = R = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

(검산하면 $R^2 = \rho^2 + r^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{6}a^2 = \frac{3}{2}a^2$이다.)

장력

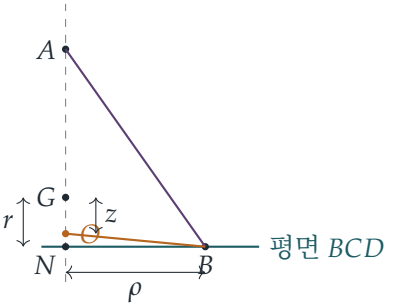
X가 G에 있을 때 각 줄의 길이는 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$이고 늘어난 길이(extension)는 $R - a = \frac{\sqrt{6}-2}{2}a > 0$이므로 네 줄 모두 팽팽하다. 훅의 법칙에 따라 각 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda(R-a)}{a} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\lambda \approx 0.225\,\lambda.$$

XA가 끊어진 뒤

끊어지기 전에는 크기가 같은 네 장력이 각 꼭짓점을 G를 향하는 네 방향으로 당긴다. G가 무게중심이므로 G에서 각 꼭짓점으로 향하는 단위벡터의 합은 영이다. 따라서 줄들이 작용하는 알짜힘은 없고, 탁자가 무게 Mg 전체를 떠받친다.

XA가 끊어지면 남은 세 줄이 당기는 힘의 합력은 연직 위쪽으로 크기 T이며, 이는 사라진 XA의 당기는 힘에 음의 부호를 붙인 것이다. 수평 방향으로는 연직선 AN에 대한 3회 대칭 때문에 세 힘이 상쇄된다. 각 힘은 이 직선을 지나는 연직 평면 안에 있으므로 비트는 짝힘(couple)을 만들지 않으며, 기울이는 짝힘들은 대칭에 의해 상쇄된다. 따라서 정사면체는 AN이 O를 지나는 연직선 위에 머문 채 순수한 연직 병진운동을 한다. 정사면체가 탁자에서 떠오르는 것은 $T > Mg$이기 때문이며, 이는 마지막에 확인한다.



O에 대한 G의 높이를 z라 하자. 그러면 B는 O를 지나는 연직선으로부터 수평 거리 ρ만큼 떨어져 있고, O에 대한 높이는 $z - r$이다. 따라서 세 줄 각각의 길이는

$$L(z) = \sqrt{\rho^2 + (z-r)^2}.$$

처음에는 $z = 0$이고 $L = \sqrt{\rho^2 + r^2} = R$이다. 가장 높은 지점에서는 BCD가 O와 같은 높이

에 있으므로 $z = r$이고 $L = \rho = \frac{2}{\sqrt{3}}a$이다. $0 \le z \le r$에서 L은 ρ와 R 사이에 있고 둘 다 a보다 크므로, 줄들은 내내 팽팽하게 유지된다.

> **생각해 보기** 다루기 힘든 비선형 운동 방정식을 풀지 않고 최대 높이를 어떻게 구할 수 있을까?

탁자는 매끄럽고 줄은 가벼우므로 역학적 에너지가 보존된다. 정사면체가 곧바로 탁자를 떠나므로 수직항력(normal reaction)은 일을 하지 않는다. 정사면체는 처음과 가장 높은 지점에서 모두 정지해 있으므로 운동 에너지(kinetic energy)는 고려할 필요가 없다. 세 줄이 잃은 탄성 에너지 $3 \cdot \dfrac{\lambda(L-a)^2}{2a}$는 얻은 중력 에너지 Mgr와 같아야 한다.

$$Mg\,r = \frac{3\lambda}{2a}\Big[(R-a)^2 - (\rho - a)^2\Big].$$

괄호 안을 인수분해하고 $R^2 - \rho^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{4}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2$을 이용하면

$$\begin{aligned}(R-a)^2 - (\rho-a)^2 &= R^2 - \rho^2 - 2a(R-\rho)\\ &= a^2\left(\tfrac{1}{6} - \sqrt{6} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

$\dfrac{3}{2ar} = \dfrac{3}{2a}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{6}\,a} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2a^2}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{Mg}{\lambda} &= \frac{3\sqrt{6}}{2}\left(\tfrac{1}{6} - \sqrt{6} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - 9 + 6\sqrt{2}\\ &\approx 0.6124 - 9 + 8.4853 = 0.0977,\end{aligned}$$

이고, 이는 유효숫자(significant figures) 2자리로 0.098이므로 요구된 결과이다.

끝으로 $Mg \approx 0.098\lambda < 0.225\lambda \approx T$이므로, 끊어진 직후의 위쪽 알짜힘 $T - Mg$는 양수이고 정사면체는 실제로 떠오른다. 이는 문제의 상황과 일치한다.

검산

- $a = 1$로 두고 네 꼭짓점을 좌표로 놓아, 여섯 모서리의 길이가 모두 2이고 네 꼭짓점이 모두 무게중심으로부터 $\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.2247$만큼 떨어져 있음을 확인했으며, $T \approx 0.2247\lambda$를 다시 얻었다.
- $Mg/\lambda = 6\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} - 9 \approx 0.09765$로 두고, 운동 방정식 $M\ddot{z} = 3T(L)\,\frac{r-z}{L} - Mg$를 $z = 0$에서의 정지 상태부터 수치적으로 단계별 계산했다. 속도는 $z \approx 0.40825$에서 처음으로 다시 영이 되며, 이는 $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$과 일치한다.

흔한 실수

- R을 무게중심에서 면까지의 거리로 잡는 실수. 무게중심은 꼭짓점에서부터 아래로 $\frac{3}{4}$ 되는 곳에 있으므로 $R = 3r$이다.
- 가장 높은 지점에서도 줄이 여전히 늘어나 있다는 사실을 잊는 실수. 그곳에서 각 줄의 에너지는 영이 아니라 $\frac{\lambda(\rho-a)^2}{2a}$이다.
- 늘어난 길이 $L - a$에서 L을 O에서 꼭짓점까지가 아니라 O에서 면의 중심 N까지 잰 길이로 쓰는 실수.

STEP 너머

여기서 쓴 무게중심 요령(여섯 막대 중점의 평균이 네 꼭짓점의 평균과 같다는 것)은, 계의 질량중심이 각 부분의 질량중심을 질량으로 가중평균한 것이라는 일반적 사실의 작은 예이다. 운동을 순수한 병진운동으로 다루는 것은 대칭 논증에 기댄 것인데, 이러한 논증은 강체 동역학(rigid-body dynamics)에서 체계화된다. 강체 동역학에서는 물체의 운동이 질량중심의 병진운동과 질량중심에 대한 회전으로 나뉜다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 1989, 문제 13

역학 • 마찰이 있는 사다리의 평형

STEP I 1989, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

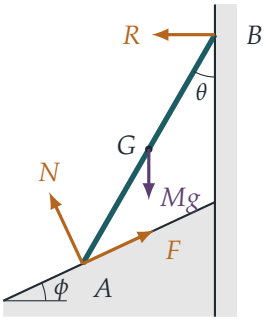
step.maths.org/questions/89-s1-q13

핵심 아이디어

이 문제는 세 힘에 마찰력이 더해진 평형(equilibrium) 문제이며, 요령은 좋은 방향을 고르는 데 있다. 사다리의 아래 끝에 대한 모멘트(moment)를 취하면 N과 F가 모두 사라지므로 벽의 반력(reaction)이 곧바로 구해진다. 그다음에는 수평 방향과 수직 방향으로 분해(resolve)하는 대신 **경사면에 수직인 방향과 경사면을 따르는 방향**으로 분해한다. 각 식에는 미지수 N과 F 중 하나만 들어 있으므로, 주어진 공식이 바로 나온다.

풀이

사다리를 길이가 $2a$인 균일한 막대 AB로 모형화하고, 질량중심(centre of mass) G는 중점에 있다고 하자. 아래 끝 A는 거친 경사면 위에 있고 위 끝 B는 매끄러운 벽에 기대어 있으므로, 벽의 반력 R는 벽에서 멀어지는 방향을 향하는 수평 방향의 힘이다. A에는 경사면에 수직인 수직항력(normal reaction) N과 경사면을 따르는 마찰력(friction) F가 작용한다. 사다리가 미끄러진다면 아래 끝이 경사면을 따라 아래로, 즉 벽에서 멀어지는 쪽으로 미끄러질 것이므로, F는 경사면을 따라 위쪽, 즉 벽을 향하는 방향으로 작용한다고 둔다. (F에 대한 공식이 양수로 나오므로 이 선택이 옳음이 확인된다.)



벽의 반력

A에 대한 모멘트를 취하면 N과 F가 사라진다. 사다리는 연직선과 각 θ를 이루므로, B는 A보다 $2a\cos\theta$만큼 높은 곳에 있고 G는 A로부터 수평 거리 $a\sin\theta$만큼 떨어져 있다. B에 작용하는 수평 방향의 힘 R의 모멘트는 $R\cdot 2a\cos\theta$이고, 무게의 모멘트는 반대 방향으로 $Mg\cdot a\sin\theta$이므로

$$2aR\cos\theta = Mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad R = \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta.$$

경사면에 수직인 방향과 경사면을 따르는 방향으로 분해하기

생각해 보기 각 식에 미지수가 하나만 들어가게 하려면 어느 방향으로 분해해야 할까?

경사면에 수직인 방향과 경사면을 따르는 방향으로 분해한다. F는 경사면에 수직인 성분이 없고, N은 경사면을 따르는 성분이 없다. 나머지 두 힘의 성분을 구하면 된다.

- 무게 Mg는 경사면 안쪽으로 향하는 성분 $Mg\cos\phi$와 경사면을 따라 아래로 향하는 성분 $Mg\sin\phi$를 가진다.
- 경사면은 벽 쪽으로 올라가므로 위쪽 법선은 벽에서 멀어지는 쪽으로 기울어 있고, (역시 벽에서 멀어지는 쪽을 향하는) 수평 방향의 힘 R는 그 법선 방향으로 성분 $R\sin\phi$를 가진다. 즉 경사면 **바깥쪽**으로 향한다. 경사면을 따르는 방향으로는 R가 벽에서 멀어지는 쪽, 즉 내리막 방향을 향하며 그 성분은 $R\cos\phi$이다.

경사면에 수직인 방향:

$$N + R\sin\phi = Mg\cos\phi,$$

$$\text{따라서} \quad N = Mg\cos\phi - \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta\sin\phi = Mg\left(\cos\phi - \frac{\tan\theta\sin\phi}{2}\right).$$

경사면을 따르는 방향(경사면 위쪽을 양의 방향으로):

$$F = Mg\sin\phi + R\cos\phi \quad \Longrightarrow \quad F = Mg\left(\sin\phi + \frac{\tan\theta\cos\phi}{2}\right).$$

이것이 구하려던 두 결과이다.

가장 큰 각

아래 끝이 미끄러지지 않으려면 접촉이 유지되어야 하므로 $N > 0$이어야 하고, 마찰력은 한계를 넘지 않아야 하므로 $\mu = 2$일 때 $F \le \mu N$이어야 한다. (여기서 $F > 0$이므로 마찰에 관한 조건은 이것뿐이다.) $\phi = 45^\circ$이면 $\sin\phi = \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $t = \tan\theta$로 두면

$$F = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{t}{2}\right), \qquad N = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

따라서 $N > 0$이려면 $t < 2$이어야 하고, 이때 $F \le 2N$은 다음과 같이 된다.

$$1 + \frac{t}{2} \le 2 - t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3t}{2} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan\theta \le \frac{2}{3}.$$

이 조건은 $t < 2$보다 엄격하므로 실제로 제약이 되는 조건은 이것이다. $0 < \theta < 90^\circ$에서 $\tan\theta$는 증가하므로, 사다리가 평형 상태로 놓일 수 있는 가장 큰 각은

$$\theta = \arctan\tfrac{2}{3} \approx 33.7^\circ,$$

이고, 이 각에서 마찰은 한계 마찰(limiting friction) 상태이다.

검산

- $\phi = 0$(평평한 지면)이면 공식은 $N = Mg$와 $F = \frac{1}{2}Mg\tan\theta = R$를 주는데, 이는 수평인 바닥에 놓인 사다리에 대해 익숙한 결과이다.
- $\theta = 0$(사다리가 연직)이면 벽은 아무 역할도 하지 않고, $N = Mg\cos\phi$, $F = Mg\sin\phi$가 되어 경사면 위에 정지해 있는 입자의 경우와 똑같다.
- 임의의 θ와 ϕ에 대해 수평 방향과 수직 방향의 힘의 식을 직접 수치적으로 풀어 보면 두 공식과 10^{-13} 이내로 일치하며, $\phi = 45^\circ$일 때 비 F/N은 $\theta = 33.690^\circ$에서 2를 지난다.

흔한 실수

- $R\sin\phi$ 항의 부호를 잘못 잡는 것. 경사면이 벽 쪽으로 올라가므로 R는 아래 끝을 경사면에서 부분적으로 떼어 내는 쪽으로 당기고, 그 결과 N이 줄어든다.
- 수평 방향과 수직 방향으로 분해한 다음, 그 결과로 나온 연립방정식을 풀다가 실수하는 것. 그 방법도 통하지만, 경사면을 따르는 방향과 경사면에 수직인 방향으로 분해하는 편이 훨씬 빠르다.

STEP 너머

경사면이 가파를수록 사다리를 기울일 수 있는 정도가 작아진다는 점에 주목하자. 벽의 반력이 N은 줄이고 F는 늘리기 때문이다. 이런 문제는 정역학(statics)의 출발점으로, 정역학에서는 미지수들을 서로 분리하도록 축과 모멘트의 기준점을 고른다. 같은 아이디어가 트러스(truss)와 골조 구조의 해석, 그리고 더 일반적으로는 안정성(stability)의 해석에 깔려 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체(rigid body)의 평형과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1989, 문제 14

확률과 통계 • 조건부 분포

STEP I 1989, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q14

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 확률 집합, 곧 씨앗이 폭 1리그(league)인 각 띠에 떨어질 확률에 달려 있다. 씨앗은 공원 지대나 농지에 떨어질 때에만 나무로 자라므로, 나무의 수는 이항분포(binomial distribution)를 따른다. 나무가 자라는 거리 Y는 육지에 떨어졌다는 **조건**(condition) 아래의 L일 뿐이다. 그 확률밀도함수(probability density function)는 f를 육지 띠로 잘라 낸 뒤 전체 넓이가 1이 되도록 늘린 것이다. 마지막 부분은 가설검정(hypothesis test)이다. 이항분포를 따르는 개수로서, 농지에 나무가 23그루 있다는 것은 놀랄 만큼 많은가?

풀이

각 띠의 확률

L의 누적분포함수(cumulative distribution function)는 $0 \le x \le 4$에서

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}t\right)\mathrm{d}t = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16},$$

이므로 $\mathrm{F}(1) = \frac{7}{16}$, $\mathrm{F}(2) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{F}(3) = \frac{15}{16}$, $\mathrm{F}(4) = 1$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{공원}) = \mathrm{P}(0 \le L \le 1) = \tfrac{7}{16}, \qquad \mathrm{P}(\text{호수}) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{7}{16} = \tfrac{5}{16},$$
$$\mathrm{P}(\text{농지}) = \mathrm{P}(2 \le L \le 3) = \tfrac{15}{16} - \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{16}, \qquad \mathrm{P}(\text{바다}) = \tfrac{1}{16}.$$

이다. (L은 연속확률변수이므로 경계에서의 확률은 0이고, 따라서 경계가 어느 띠에 속하는지는 상관없다.) 씨앗이 나무로 자랄 확률은

$$p = \tfrac{7}{16} + \tfrac{3}{16} = \tfrac{5}{8}.$$

이다. 한 해에 자라는 나무의 수를 T라 하자. 96개의 씨앗은 서로 독립적으로 날려 가고 각각 확률 $\frac{5}{8}$로 자라므로 $T \sim \mathrm{B}\left(96, \frac{5}{8}\right)$이고, 해마다 새로 자라는 열병나무(fever tree)의 평균 개수는

$$\mathrm{E}(T) = 96 \times \tfrac{5}{8} = 60.$$

이다.

소문항 (i)

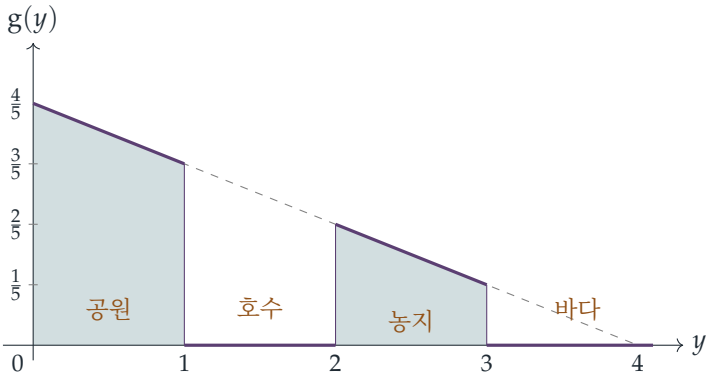
Y는 씨앗이 육지에 떨어졌다는 조건 아래에서 L의 분포를 따른다. 육지를 $A = [0,1] \cup [2,3]$이라 쓰자. $y \in A$에 대하여

$$\mathrm{P}(y \le Y \le y + \delta y) = \frac{\mathrm{P}(y \le L \le y + \delta y)}{\mathrm{P}(L \in A)} \approx \frac{\mathrm{f}(y)\,\delta y}{5/8},$$

이고, Y는 A 바깥의 값을 결코 갖지 않는다. 그러므로 Y의 확률밀도함수는

$$\mathrm{g}(y) = \begin{cases} \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}y\right) = \dfrac{4-y}{5} & \text{조건: } 0 \le y \le 1 \text{ 또는} 2 \le y \le 3, \\ 0 & \text{그 밖의 경우.} \end{cases}$$

이다. 검산으로, 넓이는 $\frac{8}{5}\left(\frac{7}{16} + \frac{3}{16}\right) = 1$이다. 그래프는 같은 하강 직선의 두 조각이다. 공원 지대 위에서는 $\frac{4}{5}$에서 $\frac{3}{5}$로 내려가고, 호수 위에서는 아무것도 없으며, 농지 위에서는 $\frac{2}{5}$에서 $\frac{1}{5}$로 내려간다.



점선은 비교를 위해 그린 $\frac{8}{5}\mathrm{f}$이다. Y의 확률밀도함수는 육지 위에서만 이 선을 따른다.

평균을 구하자. $\int y(4-y)\,\mathrm{d}y = 2y^2 - \frac{1}{3}y^3$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{5}\left[2y^2 - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1 + \frac{1}{5}\left[2y^2 - \tfrac{1}{3}y^3\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(9 - \frac{16}{3}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{11}{3} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

이다. 따라서 새 나무는 평균적으로 성에서 남쪽으로 $\frac{16}{15}$리그 떨어진 곳에서 자란다. 이는 공원 지대를 막 지나 호수 안에 있는 지점인데, 문제될 것은 없다. 평균이 반드시 확률변수가 가질 수 있는 값일 필요는 없기 때문이다.

소문항 (ii)

한 해에 농지에서 자라는 나무의 수를 X라 하자. 전통이 지켜진다면 96개의 씨앗이 날려지고, 각각은 독립적으로 확률 $\frac{3}{16}$로 농지에 떨어지므로

$$X \sim \mathrm{B}\left(96, \tfrac{3}{16}\right), \qquad \mathrm{E}(X) = 18, \qquad \mathrm{Var}(X) = 96 \cdot \tfrac{3}{16} \cdot \tfrac{13}{16} = \tfrac{117}{8} \approx 14.6,$$

이고, 표준편차(standard deviation)는 약 3.82이다.

> **생각해 보기** 정확히 무엇을, 어느 방향으로 검정하는가?

귀무가설(null hypothesis)은 전통이 지켜졌다는 것, 곧 씨앗이 96개여서 $X \sim \mathrm{B}\left(96, \frac{3}{16}\right)$라는 것이다. 농지의 나무가 평소보다 **많다**는 데서 자연스럽게 품게 되는 의심은 96개보다 많은 씨앗이 날려졌다는 것이므로, 단측검정(one-tailed test)을 사용하여 귀무가설 아래에서 23그루 **이상**이 나올 가능성이 얼마나 되는지 묻는다.

$np = 18$과 $n(1-p) = 78$이 모두 충분히 크므로, 연속성 수정(continuity correction)을 적용한 정규근사(normal approximation) $X \approx \mathrm{N}(18,\ 14.625)$를 사용한다.

$$\mathrm{P}(X \geq 23) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{22.5 - 18}{3.824}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1.18) \approx 0.12.$$

(정확한 이항분포 값은 0.121이다.) 따라서 평상시 조건에서 농지의 나무가 23그루 이상인 일은 대략 8년에 한 번꼴로 일어난다. 이는 5% 유의수준(significance level)(심지어 10%)에도 한참 못 미친다. 이 관측 결과는 전통이 지켜졌다는 것과 충분히 잘 들어맞으며, 이 증거만으로는 왕의 의심이 정당하다고 할 수 **없다**.

비교하자면, 5% 수준에서도 왕이 합리적인 근거를 가지려면 개수가 적어도 25는 되어야 한다(정확한 값 $\mathrm{P}(X \geq 25) \approx 0.049$). 왕이 공원 지대의 나무 수까지 알고 있다면 전체 나무 수 $T \sim \mathrm{B}\left(96, \frac{5}{8}\right)$를 검정할 수 있을 것이고, 이는 날려진 씨앗의 수에 대해 훨씬 더 좋은 증거가 될 것이다.

검산

- 네 띠의 확률 $\frac{7}{16}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{16}$을 더하면 1이고, Y의 확률밀도함수의 전체 넓이도 1이다.
- 중점 규칙으로 수치적분하면 $\mathrm{E}(Y) = 1.06667$을 얻어 $\frac{16}{15}$와 일치한다. 씨앗 400 000개를 시뮬레이션하면(U가 $[0,1]$에서 균등분포를 따를 때 $L = 4 - 4\sqrt{1-U}$를 사용) 62.5%가 육지에 떨어졌고, 그중 평균 낙하 거리는 1.069였다.

- 이항분포의 확률을 정확히 더하면 $\mathrm{P}(X \geq 23) = 0.1213$이고, 이는 정규근사 추정값 0.120에 가깝다.

흔한 실수

- f 자체를 Y의 확률밀도함수로 사용하는 것. 육지 위에서 그 넓이는 $\frac{5}{8}$밖에 되지 않으므로 $\frac{5}{8}$로 나누어야 한다.
- $\mathrm{E}(L\,;\, L \in A) = \int_A y\,\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$을 계산하고 $\mathrm{P}(L \in A)$로 나누는 것을 잊는 것.
- 꼬리 확률 $\mathrm{P}(X \geq 23)$ 대신 $\mathrm{P}(X = 23)$을 검정하는 것. X의 어떤 한 값이든 그 확률은 꽤 작다.

STEP 너머

소문항 (i)은 **조건부 분포**(conditional distribution)의 예이다. 확률변수를 어떤 사건으로 제한하고 다시 정규화하는 것이다. 같은 조작이 확률밀도함수에 대한 베이즈(Bayes) 정리와 통계학 전반에서 쓰이는 절단분포(truncated distribution)의 바탕에 있다. 소문항 (ii)는 가설검정과 p값을 처음 맛보는 것으로, 대학 1학년 과정에서는 네이만–피어슨(Neyman–Pearson) 체계로 이를 엄밀하게 다룬다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 이와 같은 풀이 이야기를 풍부하게 곁들여 조건부 분포를 다룬다.

풀이

STEP I 1989, 문제 15

확률과 통계 • 분포의 비교

STEP I 1989, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q15

핵심 아이디어

시속 $12\,\mathrm{km\,h^{-1}}$로 달리면 1킬로미터마다 정확히 5분이 걸리므로, 각 이동 시간은 고정된 분수에 하나의 확률변수(random variable)의 간단한 배수를 더한 것이 된다. 이 확률변수는 균등분포(uniform), 푸아송 분포(Poisson), 이항분포(binomial)를 따른다. 따라서 시간에 관한 모든 질문은 그 하나의 확률변수에 관한 질문이 된다. 가운데 부분은 세 경로가 똑같은 확률로 선택되는 상황에서의 베이즈 정리(Bayes' theorem)이다.

풀이

이동 시간

T_A, T_B, T_D를 세 경로 각각의 이동 시간(분 단위)이라 하자. $12\,\mathrm{km\,h^{-1}}$는 5분마다 1 km를 가는 속력이므로 다음이 성립한다.

- Angle Avenue: $T_A = 25 + A$이고, $A \sim \mathrm{U}(0, 10)$이다.
- Bend Boulevard: $T_B = 20 + 3B$이고, $B \sim \mathrm{Po}(4)$이다.
- Detour Drive: X를 우회 횟수라 하자. 다섯 곳의 도로 공사가 각각 확률 $\frac{4}{5}$로 서로 독립적으로(independently) 작용한다고 가정하면 $X \sim \mathrm{B}(5, \frac{4}{5})$이고, 거리는 $2 + X$ km이며 $T_D = 10 + 5X$이다.

27분 이상

Angle Avenue. $T_A \geq 27 \iff A \geq 2$이므로

$$\mathrm{P}(T_A \geq 27) = \frac{10-2}{10} = \frac{4}{5}.$$

Bend Boulevard. B는 정수이므로 $T_B \geq 27 \iff 3B \geq 7 \iff B \geq 3$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(T_B \geq 27) = 1 - \mathrm{e}^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!}\right) = 1 - 13\mathrm{e}^{-4} \approx 0.7619.$$

Detour Drive. $T_D \geq 27 \iff 5X \geq 17 \iff X \geq 4$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(T_D \geq 27) = 5\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^4\left(1 + \frac{4}{5}\right) = \frac{256}{625}\cdot\frac{9}{5} = \frac{2304}{3125} = 0.73728.$$

이동이 오래 걸렸다면 어느 경로였을까?

R을 선택한 경로라 하고 $\mathrm{P}(R=A) = \mathrm{P}(R=B) = \mathrm{P}(R=D) = \frac{1}{3}$이라 하자. 또 L을 이동 시간이 27분 이상인 사건이라 하자. 베이즈 정리에 의해 $\frac{1}{3}$인 인수들은 약분된다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R=B \mid L) &= \frac{\mathrm{P}(L \mid B)}{\mathrm{P}(L \mid A) + \mathrm{P}(L \mid B) + \mathrm{P}(L \mid D)} = \frac{1 - 13\mathrm{e}^{-4}}{\frac{4}{5} + 1 - 13\mathrm{e}^{-4} + \frac{2304}{3125}} \\ &= \frac{1 - 13\mathrm{e}^{-4}}{\frac{7929}{3125} - 13\mathrm{e}^{-4}} \approx \frac{0.7619}{2.2992} \approx 0.331.\end{aligned}$$

이 값은 $\frac{1}{3}$보다 아주 조금 클 뿐인데, 이는 납득할 만하다. 세 경로가 27분 이상의 이동 시간을 낼 확률이 거의 같기 때문이다.

소문항 (i)

$\mathrm{E}(A) = 5, \mathrm{E}(B) = 4, \mathrm{E}(X) = 5 \times \frac{4}{5} = 4$와 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용하면

$$\mathrm{E}(T_A) = 25 + 5 = 30, \qquad \mathrm{E}(T_B) = 20 + 3 \times 4 = 32, \qquad \mathrm{E}(T_D) = 10 + 5 \times 4 = 30.$$

생각해 보기 두 경로가 동점이다. 혹시 계산 실수일까?

아니다. Angle Avenue와 Detour Drive는 둘 다 평균이 정확히 30분이고, Bend Boulevard는 평균이 32분이다. 따라서 평균 시간을 가장 작게 하려면 Angle Avenue와 Detour Drive 중 어느 쪽이든 이용하면 된다. 두 경로는 똑같이 좋고, 둘 다 Bend Boulevard보다 낫다.

소문항 (ii)

이제 각 경로에 대하여 $\mathrm{P}(T < 32)$를 비교한다.

- $T_A < 32 \iff A < 7$이므로 $\mathrm{P}(T_A < 32) = \frac{7}{10} = 0.7$이다.
- $T_B < 32 \iff 3B < 12 \iff B \leq 3$이므로
$$\mathrm{P}(T_B < 32) = \mathrm{e}^{-4}\left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3}\right) = \frac{71}{3}\mathrm{e}^{-4} \approx 0.4335.$$
- $T_D < 32 \iff 5X < 22 \iff X \leq 4$이므로
$$\mathrm{P}(T_D < 32) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 1 - \frac{1024}{3125} = \frac{2101}{3125} \approx 0.6723.$$

$0.7 > 0.6723 > 0.4335$이므로 항상 **Angle Avenue**를 이용해야 하며, 그러면 전체 날 중 70%에서 32분 안에 도착한다.

검산

- 400 000번의 이동을 시뮬레이션(simulation)한 결과 $\mathrm{P}(T \geq 27) \approx 0.801,\ 0.761,\ 0.740$, 평균 시간 $\approx 30.0,\ 32.0,\ 30.0$분, $\mathrm{P}(T < 32) \approx 0.700,\ 0.435,\ 0.670$, 그리고 $\mathrm{P}(R = B \mid L) \approx 0.331$을 얻었다. 모두 정확한 값과 일치한다.
- 경계값 점검: Detour Drive에서 우회가 3번이면 시간은 25분이고 4번이면 30분이므로, "27분 이상"은 정말로 "우회 4번 이상"을 뜻한다.

흔한 실수

- 정수 조건을 대충 다루는 것: $3B \geq 7$은 $B \geq 2$가 아니라 $B \geq 3$을 뜻하고, $3B < 12$는 $B \leq 4$가 아니라 $B \leq 3$을 뜻한다.
- Detour Drive의 기본 거리 2 km를 빠뜨리거나, 다른 경로에서 1km당 5분의 주행 시간을 빠뜨리는 것.
- (i)에서 하나의 경로만 최선이라고 주장하는 것. 두 평균은 정확히 같다.

STEP 너머

소문항 (i)과 (ii)는 "최선"이 무엇을 최적화하느냐에 따라 달라진다는 것을 보여 준다. 평균은 분포를 요약하는 하나의 값일 뿐이며, 평균이 같은 두 경로라도 퍼진 정도와 꼬리 확률(tail probability)은 매우 다를 수 있다. 결정 이론(decision theory)에서는 이것

이 **손실함수**(loss function)를 선택하는 문제이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 여기에 나온 분포들과 베이즈 정리를 다룬다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 이런 종류의 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 1989, 문제 16

확률과 통계 • 영합 게임

STEP I 1989, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q16

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.14 절 **혼합 전략**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/mixed-strategies.html

핵심 아이디어

모든 것은 작은 표 하나에서 나온다. 두 사람이 추측할 수 있는 아홉 가지 쌍 각각에 대해 B가 따는 금액을 적은 표이다. 이 표를 한 번 적어 두면, 각 기댓값(expected value)은 표의 값들의 가중합(weighted sum)일 뿐이다. 마지막 문항에서는 합을 A의 확률 a_j별로 묶으면 "A가 무엇을 하든"이라는 조건이 세 계수에 대한 조건으로 바뀌고, 이 세 계수를 모두 음이 아니게 만드는 것은 작은 선형 부등식(linear inequality) 연립 문제가 된다.

풀이

A가 i를, B가 j를 추측한 판에서 B가 따는 금액(파운드 단위)을 $w(i,j)$라 하자. 규칙을 읽어 보면 다음과 같다.

- $|i-j|=2$이면 1을 말한 사람이 3을 말한 사람에게 2파운드를 내므로 $w(1,3)=2$, $w(3,1)=-2$이다.
- $|i-j|=1$이면 더 큰 수를 말한 사람이 1파운드를 내므로 $w(2,1)=w(3,2)=1$, $w(1,2)=w(2,3)=-1$이다.
- $w(i,i)=0$이다.

	B가 1	B가 2	B가 3
A가 1	0	-1	2
A가 2	1	0	-1
A가 3	-2	1	0

$w(j,i) = -w(i,j)$임에 주목하자. 규칙은 두 사람을 똑같이 대하므로, 추측을 서로 바꾸면 돈을 내는 사람도 바뀐다.

소문항 (i)

A가 항상 N을 말한다면, B는 표의 N번째 행을 보고 그중 가장 큰 값을 항상 고르면 된다.

- $N = 1$: B는 항상 3을 말하고 매 판 £2를 딴다.
- $N = 2$: B는 항상 1을 말하고 매 판 £1를 딴다.
- $N = 3$: B는 항상 2를 말하고 매 판 £1를 딴다.

각 경우 이 선택이 유일한 최선이며, 다른 응수는 모두 아무것도 따지 못하거나 잃는다.

소문항 (ii)

한 판에서 A의 추측과 B의 추측은 독립(independent)이다(A는 스스로 무작위로 정하고, B는 몰래 결정한다). 따라서 A가 i를 말하고 B가 j를 말할 확률은 $\frac{1}{3}b_j$이다. 그러므로 B가 따는 금액의 기댓값은

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \sum_{j=1}^{3} b_j \cdot \tfrac{1}{3}\big(w(1,j) + w(2,j) + w(3,j)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(b_1(0+1-2) + b_2(-1+0+1) + b_3(2-1+0)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\,(b_3 - b_1). \end{aligned}$$

이다. $b_3 \le 1$이고 $b_1 \ge 0$이므로 이 값은 많아야 $\frac{1}{3}$이고, 등호는 정확히 $b_3 = 1$일 때(이때 $b_1 = b_2 = 0$이 강제된다) 성립한다. 따라서 B는 **항상 3을 추측해야** 하며, 그러면 한 판당 £$\frac{1}{3}$를 딸 것으로 기대된다. 균등하게 무작위로 추측하는 A를 상대로 3이라는 추측은 각각 확률 $\frac{1}{3}$로 £2를 따거나, £1를 잃거나, 비긴다.

소문항 (iii)

A가 확률 a_i로 i를, B가 확률 b_j로 j를 서로 독립적으로 추측하면

$$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\, w(i,j).$$

이다. 각 a_i에 대한 항을 모으면(표의 한 행씩)

$$\mathrm{E}(W) = \underbrace{(2b_3 - b_2)}_{X}\, a_1 + \underbrace{(b_1 - b_3)}_{Y}\, a_2 + \underbrace{(b_2 - 2b_1)}_{Z}\, a_3.$$

이다. 우리는 $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$, 즉

$$b_2 \leq 2b_3, \qquad b_3 \leq b_1, \qquad 2b_1 \leq b_2.$$

이기를 원한다. 이것들을 이어 붙이면 $b_2 \leq 2b_3 \leq 2b_1 \leq b_2$이므로 모두 등호여야 한다. 즉 $b_3 = b_1$이고 $b_2 = 2b_1$이다. 여기에 $b_1 + b_2 + b_3 = 1$을 함께 쓰면

$$b_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad b_3 = \tfrac{1}{4},$$

을 얻고, 이때 $X = Y = Z = 0$이므로 확실히 음이 아니다. 따라서 그러한 선택이 존재한다(사실 이것이 유일하다).

? **생각해 보기** B가 더 잘해서 X, Y, Z를 모두 양수로 만들 수는 없을까?

없다. 임의의 b_j에 대해

$$b_1 X + b_2 Y + b_3 Z = b_1(2b_3 - b_2) + b_2(b_1 - b_3) + b_3(b_2 - 2b_1) = 0,$$

이며, 이는 B가 자기 자신의 복제와 겨루면 본전이라는 사실(표가 반대칭(antisymmetric)이라는 것)을 말할 뿐이다. 합이 1인 음이 아닌 가중치로 X, Y, Z를 가중합했을 때, 셋이 모두 양수라면 그 합은 0이 될 수 없다. 그래서 위의 부등식들은 등호로만 만족될 수 있었던 것이다.

이제 결론을 이끌어 내자. $b = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$이면

$$\mathrm{E}(W) = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0$$

이 a_1, a_2, a_3의 **모든** 선택에 대해 성립한다. 더 일반적으로, $X, Y, Z \geq 0$이기만 하면 각 $a_i \geq 0$이므로 $\mathrm{E}(W) = Xa_1 + Ya_2 + Za_3 \geq 0$이다. 서로 다른 판에서 B가 따는 금액은 독립이고 동일한 분포를 따르며(independent and identically distributed, 두 사람의 추측이 판마다 독립이므로), 각각의 평균은 0 이상이다. 큰 수의 법칙(law of large numbers)에 의해 여러 판에 걸친 B의 한 판당 평균 상금은 이 평균으로 수렴하므로, A가 무엇을 하든 장기적으로 B는 돈을 잃지 않는다. □

검산

- 소문항 (ii)는 소문항 (iii)에서 $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$인 특수한 경우이다. 실제로 $\frac{1}{3}(X + Y + Z) = \frac{1}{3}(b_3 - b_1)$로, 앞에서 구한 것과 같다.

- 소문항 (i)은 a가 모든 가중치를 N에 두는 경우이다. $N = 1$이면 $\mathrm{E}(W) = X = 2b_3 - b_2$이고, 이는 $b_3 = 1$일 때 최대가 되어 2를 준다.
- B가 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$를, A가 $(0.6, 0.1, 0.3)$을 쓰는 2×10^5판의 시뮬레이션에서 한 판당 평균 상금은 약 -0.004로, 0과 들어맞았다.

흔한 실수

- 부호 규칙을 거꾸로 잡는 것: 차이가 1일 때는 **더 큰** 추측을 한 사람이 내지만, 차이가 2일 때는 **더 작은** 추측을 한 사람이 낸다. 표를 먼저 만들고 반대칭인지 확인하라.
- 소문항 (ii)로부터 B가 추측을 섞어야 한다고 결론 내리는 것: 고정된 혼합 전략(mixed strategy)에 대한 최선의 응수는 언제나 순수 전략(pure strategy)이다(여기서는 항상 3). 섞는 것이 이득이 되는 것은 소문항 (iii)처럼 B가 A의 **모든** 전략에 대비해야 할 때뿐이다.

STEP 너머

이것은 2인 영합 게임(two-player zero-sum game)이며, 소문항 (iii)은 폰 노이만(von Neumann)의 최소최대 정리(minimax theorem)의 작은 사례이다. B에게는 A가 무엇을 하든 적어도 게임의 값만큼은 보장해 주는 혼합 전략이 있고, 게임이 대칭이므로 그 값은 0이다. 그러한 전략을 찾는 것은 선형 계획법(linear programming) 문제이며, 이는 확률을 최적화 및 경제학과 연결해 준다. 확률 쪽으로는 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)을 보라. 게임 자체에 대해서는 Binmore, *Playing for Real*(게임이론 입문서)이 처음 읽기에 좋다.

풀이

STEP II 1989, 문제 1

순수수학 • 삼차방정식의 삼각함수 해법

STEP II 1989, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q1

핵심 아이디어

항등식(identity)에 따르면 $z = \cos\theta$일 때 $4z^3 - 3z$는 모양만 바꾼 $\cos 3\theta$이다. 따라서 삼차식(cubic)을 $|k| \leq 1$인 $4z^3 - 3z = k$ 꼴로 바꿀 수 있다면, 이 방정식을 푸는 것은 $\cos 3\theta = k$를 푸는 것과 같고, 이 방정식의 세 해는 쉽게 구할 수 있다. 두 치환(substitution)은 서로 다른 일을 한다. 평행이동 $y = x + a$는 제곱항을 없애고, 배율 조정 $z = by$는 남은 계수의 비를 $4:3$으로 맞춘다.

풀이

항등식

덧셈정리(addition formulae)와 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$를 이용하면

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

삼차식 간단히 하기

$y = x + a$로 두면 $x = y - a$이고, $24(y-a)^3 - 72(y-a)^2 + \cdots$에서 y^2의 계수(coefficient)는 $-72a - 72$이다. 이 항을 없애려면 $a = -1$, 즉 $x = y + 1$이어야

한다. 그러면

$$\begin{aligned}&24(y+1)^3-72(y+1)^2+66(y+1)-19\\&\quad=(24y^3+72y^2+72y+24)-(72y^2+144y+72)\\&\qquad+(66y+66)-19\\&\qquad\qquad=24y^3-6y-1,\end{aligned}$$

이므로 $(*)$는

$$24y^3-6y=1.$$

이 된다. 이제 $y=z/b$를 대입하면

$$\frac{24}{b^3}z^3-\frac{6}{b}z=1.$$

생각해 보기 좌변이 $4z^3-3z$의 상수배가 되도록 하려면 b를 어떻게 골라야 할까?

z^3과 z의 계수의 비가 $4:-3$이어야 하므로

$$\frac{24/b^3}{6/b}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad\frac{4}{b^2}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad b^2=3.$$

$b=\sqrt{3}$으로 잡는다. 그러면 방정식은 $\dfrac{8}{\sqrt{3}}z^3-\dfrac{6}{\sqrt{3}}z=1$이 되고, 양변에 $\frac{\sqrt{3}}{2}$를 곱하면

$$4z^3-3z=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

따라서 $a=-1$, $b=\sqrt{3}$, $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $z=\sqrt{3}\,(x-1)$이다. (대신 $b=-\sqrt{3}$으로 잡으면 $k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$가 되지만 결국 같은 근을 얻는다.)

근 구하기

$|k|\le 1$이므로 $z=\cos\theta$로 쓸 수 있고, 항등식에 의해 방정식은

$$\cos 3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ.$$

가 된다. 따라서 $3\theta=30^\circ,\ 390^\circ,\ 750^\circ$이고, $\theta=10^\circ,\ 130^\circ,\ 250^\circ$이다. 이들은 서로 다른 세 $\cos\theta$ 값을 주고, 삼차방정식의 근(root)은 많아야 세 개이므로 이것이 근의 전부이다.

$$z=\cos 10^\circ,\quad \cos 130^\circ,\quad \cos 250^\circ.$$

치환을 되돌리면 $x = 1 + \dfrac{z}{\sqrt{3}}$이므로

$$x_1 = 1 + \frac{\cos 10^\circ}{\sqrt{3}} = 1.5686\ldots \approx 1.57,$$
$$x_2 = 1 + \frac{\cos 130^\circ}{\sqrt{3}} = 0.6289\ldots \approx 0.629,$$
$$x_3 = 1 + \frac{\cos 250^\circ}{\sqrt{3}} = 0.8025\ldots \approx 0.803.$$

모든 삼차식에 통하지는 않는다

최고차항의 계수가 1인(monic) 일반적인 삼차방정식 $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$에서는 평행이동이 저절로 정해진다. $x = y - a$로 둔 뒤 y^2의 계수는 $\alpha - 3a$이므로 $a = \frac{\alpha}{3}$이고, $p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$인 $y^3 + py + q = 0$을 얻는다. $y = z/b$를 대입하고 $4b^3$을 곱하면

$$4z^3 + 4pb^2 z + 4qb^3 = 0,$$

이고, 이것을 $4z^3 - 3z$에 맞추려면 $4pb^2 = -3$, 즉 $b^2 = -\dfrac{3}{4p}$이어야 한다. 이 식은 $p < 0$일 때에만 실수해를 가진다.

반례(counterexample)는

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

이다. 여기서 $\alpha = 0$이므로 $a = 0$이고 $p = 3 > 0$이다. 그러면 $b^2 = -\frac{1}{4}$이어야 하는데, 이를 만족하는 실수 b는 없다. 따라서 이 방정식은 결코 $4z^3 - 3z = k$ 꼴로 바꿀 수 없다. (이 방정식에도 근은 있다. $(x-1)(x^2+x+4) = 0$으로 인수분해되고, 이차식의 판별식(discriminant)은 $-15 < 0$이므로 $x = 1$이 유일한 실근이다. 실패하는 것은 방법이지 방정식이 아니다.)

$p < 0$일 때에도 다음 단계에서 방법이 실패할 수 있다. $x^3 - 3x - 4 = 0$에서 $x = 2z$로 치환하면 $4z^3 - 3z = 2$가 된다. 그런데 $|\cos 3\theta| \le 1$이므로 $\cos 3\theta = 2$인 실수 θ는 없다.

검산

- 세 근의 합은 $\frac{72}{24} = 3$, 곱은 $\frac{19}{24}$이어야 한다. 실제로 cos 항들의 합은 0이고 ($\cos 10^\circ + \cos 130^\circ + \cos 250^\circ = 0$), 수치로 계산하면 $1.5686 \times 0.6289 \times 0.8025 = 0.7917 \approx \frac{19}{24}$이다.
- $x = 1.5686$을 $24x^3 - 72x^2 + 66x - 19$에 대입하면 계산기의 정확도 범위에서 0이 된다. 나머지 두 근도 마찬가지이다.

흔한 실수

- $\theta = 10°$에서 멈추는 것: 나머지 두 근은 $3\theta = 390°$와 $750°$에서 나온다.
- a의 부호를 틀리는 것: $y = x + a$이고 $x = y + 1$이면 $a = -1$이지 $+1$이 아니다.
- 반례로 $p < 0$이고 $|k| \leq 1$인 삼차식을 고르는 것: 이런 식은 이 방법으로 완벽하게 풀린다. 실패한다고 주장하기 전에 $b^2 > 0$인지, $|k| \leq 1$인지 확인하자.

STEP 너머

이 방법은 삼차식이 세 실근을 가질 때 정확히 통한다. 이것이 바로 "기약의 경우(casus irreducibilis)"로, 답이 모두 실수인데도 카르다노(Cardano)의 공식을 쓰면 복소수의 세제곱근을 거쳐야만 하는 경우이다. $|k| > 1$일 때에는 $\cosh 3u = 4\cosh^3 u - 3\cosh u$이므로 cos 대신 cosh를 써서 같은 아이디어를 적용할 수 있다. $x^3 - 3x - 4 = 0$에 적용하면 실근 $x = 2\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcosh} 2\right) \approx 2.196$을 얻는다. 어떤 다항방정식이 애초에 거듭제곱근으로 풀리는가(solvable by radicals)라는 더 깊은 질문은 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 출발점으로 좋은 책이고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 세제곱근의 기하학을 보여 준다.

풀이

STEP II 1989, 문제 2

순수수학 • 멱급수의 계수

STEP II 1989, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q2

핵심 아이디어

x에서의 함수값과 $2x$에서의 같은 함수의 값을 연결하는 삼각함수 항등식(identity)은 거듭제곱급수(power series)의 계수(coefficient) 사이의 관계로 바뀐다. x를 $2x$로 바꾸면 x^n의 계수에 2^n이 곱해지므로, 양변을 모두 거듭제곱급수로 쓰고 나면 계수를 비교하여 관계를 곧바로 읽어 낼 수 있다. 유용한 요령은 먼저 전체에 x를 곱하는 것이다. 그러면 모든 항이 0에서 제대로 된 거듭제곱급수를 갖는 함수가 된다.

풀이

풀이 전체에서 x는 작고 영이 아닌 값이므로, 아래의 모든 급수는 수렴(converge)한다(예를 들어 $0 < |x| < \frac{\pi}{4}$에서는 관련된 모든 함수가 잘 정의되고 좋은 성질을 가진다). 0 주위의 구간에서 일치하는 두 수렴하는 거듭제곱급수는 계수가 같으므로, x^n의 계수를 비교할 수 있다.

a_{n-1}과 b_n 사이의 관계

먼저 $(*)$를 확인한다.

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

x를 곱하면

$$x\cot x - x\tan x = (2x)\cot(2x).$$

이제 각 항을 급수로 쓴다.

- $x\cot x = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n x^n$.

- $x\tan x = \sum_{m\geq 0} a_m x^{m+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n$. 여기서 $n = m+1$로 놓았다.
- x가 작으면 $2x$도 작으므로, $x\cot x$의 급수에서 x를 $2x$로 바꿀 수 있다.

$$(2x)\cot(2x) = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n (2x)^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

따라서

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n - a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

상수항은 일치하고, $n \geq 1$에 대해 x^n의 계수를 비교하면 $b_n - a_{n-1} = 2^n b_n$, 즉

$$a_{n-1} = (1-2^n)\, b_n \qquad (n \geq 1),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

> **생각해 보기** $\cot x$ 자체를 다루지 않고, 전개하기 전에 x를 곱하는 이유는 무엇인가?

$\cot x$는 0에서 발산하므로 그곳에서 거듭제곱급수를 갖지 않는다. 문제에서 주어진 것도 $x\cot x$의 급수뿐이다. 항등식 전체에 x를 곱하면 모든 항이 "거듭제곱급수를 갖는 함수" 꼴이 되고, 우변의 코탄젠트 항은 $(2x)\cot(2x)$, 즉 같은 함수를 $2x$에서 계산한 값이 된다. 이것이 바로 우리가 필요로 하는 꼴이다.

계수 c_n

짝을 이루는 항등식은 차 대신 합을 쓴 것이다.

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

다시 x를 곱하면

$$x\cot x + x\tan x = (2x)\operatorname{cosec}(2x).$$

앞에서와 같은 전개와, x를 $2x$로 바꾼 $x\operatorname{cosec} x$의 급수를 이용하면

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n + a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n c_n x^n,$$

이므로 $n \geq 1$에 대해

$$2^n c_n = b_n + a_{n-1}.$$

이제 첫 번째 결과를 이용하여 b_n을 소거한다. $n \geq 1$이므로 $1 - 2^n \neq 0$이고, 따라서 $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{1-2^n}$이며

$$2^n c_n = a_{n-1}\left(\frac{1}{1-2^n} + 1\right) = a_{n-1}\frac{2-2^n}{1-2^n} = a_{n-1}\frac{2\,(2^{n-1}-1)}{2^n - 1}.$$

2^n으로 나누고 $2/2^n = 1/2^{n-1}$로 쓰면

$$c_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}\, a_{n-1} \qquad (n \geq 1),$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

검산

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$로부터 $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$이다. 첫 번째 결과는 $b_2 = a_1/(1-4) = -\frac{1}{3}$과 $b_4 = a_3/(1-16) = -\frac{1}{45}$을 예측하는데, 이는 $x\cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \cdots$와 일치한다. 두 번째 결과는 $c_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$과 $c_4 = \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{360}$을 예측하는데, 이는 $x\operatorname{cosec} x = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots$와 일치한다. $n = 1$인 경우도 살펴보자. $a_0 = 0$이고 $b_1 = c_1 = 0$이므로 두 공식 모두와 들어맞는다. sin과 cos의 급수를 나누어 $n \leq 23$인 모든 경우에 대해 두 관계를 (분수로) 정확히 확인하였고, 급수를 $\tan 0.3 \approx 0.309336$ 및 $0.3\operatorname{cosec} 0.3 \approx 1.015159$와 비교하여 확인하였다.

흔한 실수

- 첨자 이동(index shift)을 잊는 것: $x\tan x$에서 x^n의 계수는 a_n이 아니라 a_{n-1}이다.
- $x\cot x$에서 x에 $2x$를 대입하면서 $2x\cot x$나 $x\cot 2x$로 쓰는 것: 항등식의 항은 정확히 $(2x)\cot(2x)$여야 한다.
- $1-2^n$으로 나누기 전에 $1-2^n \neq 0$임을 밝히지 않는 것.

STEP 너머

여기서 나온 계수들은 간단한 인수를 제외하면 베르누이 수(Bernoulli numbers)이다. $x\cot x = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$이고, 문제의 관계식들은 탄젠트와 코시컨트의 급수를 베르누이 수로 나타내 준다. 0 근처에서 일치하는 두 거듭제곱급수의 계수를 같다고 놓을 수 있다는 사실(거듭제곱급수의 일치 정리(identity theorem))은 해석학 입문 과정에서 증명된다. 더 알고 싶다면 거듭제곱급수에 관해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를, 이러한 전개가 복소함수로부터 자연스럽게 나타나는 모습은 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

풀이

STEP II 1989, 문제 3

순수수학 • 복소 쌍곡선 사상

> **STEP II 1989, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q3

핵심 아이디어

우변은 $2\sinh(x+\mathrm{i}y)$이므로, 이 문제 전체는 사상(map) $u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$에 관한 것이다. 합의 sinh를 전개하면 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)로 나뉘어 u와 v를 명시적으로 얻는다. 그다음 x나 y를 고정하면 매개변수 곡선(parametric curve)이 남고, 항등식 $\cos^2+\sin^2=1$과 $\cosh^2-\sinh^2=1$로 매개변수를 소거한다.

풀이

u와 v 구하기

양변을 2로 나누면 $u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$이다. $\sinh(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\sin y$와 $\cosh(\mathrm{i}y)=\cos y$를 이용하면

$$\begin{aligned}\sinh(x+\mathrm{i}y)&=\sinh x\cosh(\mathrm{i}y)+\cosh x\sinh(\mathrm{i}y)\\&=\sinh x\cos y+\mathrm{i}\cosh x\sin y.\end{aligned}$$

(원한다면 $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)-\mathrm{e}^{-x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y)\right)$를 직접 전개해도 된다. 결과는 같다.) x, y, u, v가 모두 실수이므로 실수부와 허수부를 비교하면

$$u=\sinh x\cos y,\qquad v=\cosh x\sin y.$$

직선 $x=a$

$x=a$를 고정하고 y를 자유롭게 두면 $u=\sinh a\cos y$, $v=\cosh a\sin y$이다. $a>0$이므로 $\sinh a$와 $\cosh a$는 모두 양수이고, 따라서 나눌 수 있다.

$$\left(\frac{u}{\sinh a}\right)^2+\left(\frac{v}{\cosh a}\right)^2=\cos^2 y+\sin^2 y=1.$$

역으로 이 타원(ellipse) 위의 모든 점은 어떤 y에 대하여 $(\sinh a \cos y, \cosh a \sin y)$ 꼴로 나타난다. 이것이 타원의 표준적인 매개화(parametrisation)이기 때문이다. 따라서 직선 $x = a$는 타원 전체에 대응하며(y의 길이 2π인 구간마다 한 번씩 그려진다), 이 타원의 반축(semi-axis)은 u축 방향으로 $\sinh a$, v축 방향으로 $\cosh a$이다.

직선 $y = b$

이제 $y = b$를 고정하고 x를 자유롭게 둔다. 그러면 $u = \sinh x \cos b$, $v = \cosh x \sin b$이다. 문제에서 $0 < \sin b < 1$이라 했으므로 $\sin b \neq 0$이고, $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b > 0$이므로 $\cos b \neq 0$이기도 하다. 나누면

$$\left(\frac{v}{\sin b}\right)^2 - \left(\frac{u}{\cos b}\right)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

이것은 축이 v축 위에 있고 꼭짓점(vertex)이 $(0, \pm \sin b)$인 쌍곡선(hyperbola)이다.

> **?** **생각해 보기** 왜 한 가지(branch)만 나타나는가? 그리고 그 가지 전체가 덮이는가?

$\cosh x > 0$이고 $\sin b > 0$이므로 항상 $v > 0$이다. 즉 위쪽 가지만 얻어진다. 그리고 그 가지 전체가 얻어진다. 위쪽 가지 위의 임의의 점 (u, v)가 주어지면 $x = \sinh^{-1}(u / \cos b)$로 택하여 $\sinh x \cos b = u$가 되게 한다. 그러면 $\cosh x \sin b$는 그 u에 대한 쌍곡선 방정식의 양의 근이고, 이것이 바로 v이다. 따라서 직선 $y = b$는 정확히 한 가지, 곧 $v > 0$인 가지에 대응한다.

교점과 직각

점 $x = a, y = b$는 두 직선 위에 모두 있으므로, 그 상은 두 곡선 위에 모두 있다.

$$(u, v) = (\sinh a \cos b,\ \cosh a \sin b).$$

그 점에서 곡선의 방향을 구하려면 각 매개화를 자신의 매개변수로 미분한다. 타원($x = a$, 매개변수 y)을 따라 $y = b$에서

$$\mathbf{t}_1 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) = (-\sinh a \sin b,\ \cosh a \cos b).$$

쌍곡선($y = b$, 매개변수 x)을 따라 $x = a$에서

$$\mathbf{t}_2 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = (\cosh a \cos b,\ \sinh a \sin b).$$

두 벡터 모두 성분 $\cosh a \cos b \neq 0$을 가지므로 영벡터가 아니고, 따라서 둘 다 진짜 접벡터(tangent vector)이다. 이들의 스칼라곱(scalar product)은

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = -\sinh a \sin b \cosh a \cos b + \cosh a \cos b \sinh a \sin b = 0,$$

이므로, 요구된 대로 타원과 쌍곡선의 가지는 이 점에서 직각으로 만난다.

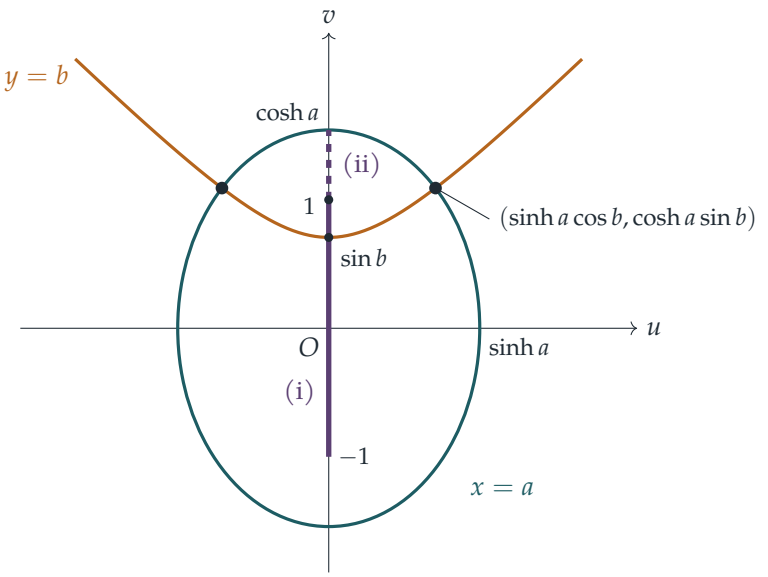
(두 곡선 모두 $u \mapsto -u$ 대칭을 가지므로, $x = -a$, $y = b$의 상, 또는 마찬가지로 $x = a$, $y = \pi - b$의 상인 $(-\sinh a \cos b, \cosh a \sin b)$에서도 직각으로 만난다.)

그림

(i) $x = 0$이면 $u = 0$, $v = \sin y$이다. 이는 v축 위의 $(0, -1)$에서 $(0, 1)$까지의 선분이다. $\sinh a \to 0$이고 $\cosh a \to 1$이므로, 이것은 $a \to 0$일 때 타원들의 극한임에 주목하자.

(ii) $y = \frac{1}{2}\pi$, $0 \le x \le a$이면 $u = 0$, $v = \cosh x$이고, 이 값은 1에서 $\cosh a$까지 증가한다. 이는 v축 위의 $(0, 1)$에서 타원의 꼭대기 $(0, \cosh a)$까지의 선분이다.

쌍곡선 가지의 꼭짓점은 $(0, \sin b)$이고, 이 점은 선분 (i) 위에 있다. 그림에서는 $a = 1$, $b = \frac{1}{4}\pi$를 사용하였다.



선분 (i)은 실선, 선분 (ii)는 점선이며, 둘을 합치면 v축을 따라 -1에서 타원의 꼭대기까지 이어진다. 대신 모든 실수 x에 대해 $y = \frac{1}{2}\pi$를 택하면 v축 위의 반직선 $v \ge 1$이 두 번 겹쳐 그려지는데, 이것은 문제에서 제외한 퇴화(degenerate)된 경우 $\sin b = 1$이다.

검산

▶ 두 이차곡선 모두 초점(focus)이 $(0, \pm 1)$이다. 타원에서는 $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$이고, 쌍곡선에서는 $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$이기 때문이다. 공초점(confocal) 타원과 쌍곡선은 항상 직각으로 만나므로, 우리의 결과와 일치한다.

- 수치적으로 $a = 1$, $b = \frac{1}{4}\pi$일 때 $\sinh(1 + \frac{1}{4}\pi\mathrm{i}) \approx 0.8310 + 1.0911\mathrm{i}$이고, 이는 $(\sinh 1 \cos \frac{1}{4}\pi,\ \cosh 1 \sin \frac{1}{4}\pi)$와 일치한다. 또한 무작위로 고른 여러 (a, b)에서 두 곡선의 방정식과 스칼라곱이 0이 됨을 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{i}\sin y$ 대신 $\sinh(\mathrm{i}y) = \sin y$로 쓰는 것. 이렇게 하면 u와 v의 역할이 뒤바뀐다.
- 왜 $v > 0$인 가지만 나타나는지 설명하지 않고 "쌍곡선"이라고만 말하는 것.
- $\cos b \neq 0$임을 확인하지 않고 그것으로 나누는 것. 조건 $\sin b < 1$은 바로 이것을 위한 것이다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto \sinh z$는 **등각**(*conformal*)이다. 즉 도함수가 0이 아닌 곳에서는 각을 보존하므로, 직선 $x =$ 상수와 $y =$ 상수로 이루어진 직교 격자는 곡선들의 직교 격자, 여기서는 공초점 타원과 쌍곡선으로 옮겨져야 한다. 평평한 판이나 틈 주위에서 라플라스(Laplace) 방정식을 풀 때 이러한 "타원 좌표"가 나타나는 이유가 바로 이것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 바로 이런 종류의 그림을 많이 곁들여 등각 사상을 아름답게 설명한다.

풀이

STEP II 1989, 문제 4

순수수학 • 유리함수의 그래프 그리기

> **STEP II 1989, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q4

핵심 아이디어

일차식들의 곱이나 몫은 로그미분(logarithmic differentiation)으로 미분하는 것이 가장 쉽다. 로그를 취하면 곱이 합으로 바뀌기 때문이다. 치역(range)을 구할 때는 질문을 거꾸로 던진다. 어떤 z에 대해 $f(x) = z$가 실근을 갖는가? 이 방정식은 x에 대한 이차방정식이므로 답은 판별식(discriminant)에서 나온다. 그래프의 개형은 영점(zeros), 극(poles), $|x|$가 클 때의 거동, 그리고 빠지는 z 값이 있는지 없는지로부터 그려진다.

인쇄된 문제에 대해 한마디 덧붙인다. 조건 $a+d \neq c+d$는 $a \neq c$라는 뜻일 뿐이며, 이는 이미 알고 있는 사실이다. 실제로 쓰이는 조건은 $a+b \neq c+d$이므로, 풀이 전체에서 이를 가정한다.

풀이

도함수

$f(x) \neq 0$인 곳, 즉 ($x \neq c, d$일 뿐 아니라) $x \neq a, b$인 곳에서는 절댓값에 로그를 취할 수 있다.

$$\ln|f(x)| = \ln|x-a| + \ln|x-b| - \ln|x-c| - \ln|x-d|.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x-k| = \frac{1}{x-k}$를 이용하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}.$$

이제 양변에 x를 곱한다. $x \neq 0$일 때 각 항은

$$\frac{x}{x-k} = \frac{1}{1-k/x} = \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{-1},$$

이 되므로, 구하는 항등식

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{b}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{c}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{d}{x}\right)^{-1}.$$

을 얻는다.

$|x|$가 클 때

$|x|$가 $|k|$보다 훨씬 크면 이항전개(binomial expansion)에 의해 $(1-k/x)^{-1} = 1+\frac{k}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$이다. 맨 앞의 1 네 개는 서로 소거되어$(1+1-1-1=0)$ 다음이 남는다.

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{a+b-c-d}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{x^2}\left[(a+b-c-d)+O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right].$$

$a+b-c-d \neq 0$이므로, $|x|$가 충분히 크면 대괄호 안의 부호는 $a+b-c-d$의 부호와 같다. 또한 $|x| \to \infty$일 때 $\mathrm{f}(x) \to 1$이므로 그곳에서 $\mathrm{f}(x) > 0$이고, $x^2 > 0$이다. 따라서 $|x|$가 클 때, 실수직선의 양 끝 모두에서 $\mathrm{f}'(x)$의 부호는 $a+b-c-d$의 부호와 같다.

곡선이 점근선(asymptote) $y=1$의 어느 쪽에 있는지도 기록해 둘 만하다. 직접 계산하면

$$\mathrm{f}(x)-1 = \frac{(c+d-a-b)x+ab-cd}{(x-c)(x-d)} \approx \frac{c+d-a-b}{x} \quad \text{충분히 큰} |x|,$$

이고, 분자를 보면 $\mathrm{f}(x)=1$이 되는 점은 정확히 하나, $x_0 = \dfrac{cd-ab}{c+d-a-b}$뿐임을 알 수 있다.

치역 조건: 방법

$\mathrm{f}(x)=z$를 $(x-a)(x-b)=z(x-c)(x-d)$로 정리하면 다음 이차방정식이 된다.

$$(1-z)x^2 - \big(a+b-(c+d)z\big)x + (ab-cdz) = 0.$$

- 이 방정식의 근은 $x=c$나 $x=d$일 수 없다. 그곳에서 좌변 $(x-a)(x-b)$가 0이 아니기 때문이다. 따라서 이 이차방정식의 실근은 정확히 $\mathrm{f}(x)=z$의 실수해이다.
- $z \neq 1$이면, 판별식 $\Delta(z) = \big(a+b-(c+d)z\big)^2 - 4(1-z)(ab-cdz)$가 ≥ 0일 때, 그리고 그때에만 실근이 존재한다. 전개한 뒤 $(c-d)^2 > 0$을 곱하고 z의 거듭제곱별로 정리한다. $P=(a-c)(b-d)$, $Q=(a-d)(b-c)$라 두면 유용한 항등식은 $P-Q=(a-b)(c-d)$이며, 따라서 상수항 $(a-b)^2(c-d)^2$는 $(P+Q)^2-4PQ$와 같다. 그러면 주어진 부등식은 정확히 $(c-d)^2\Delta(z) \geq 0$이 된다.
- $z=1$이면 방정식은 x의 계수가 $c+d-a-b \neq 0$인 일차방정식이므로 근이 존재한다. 또한 양변의 차가 $(c-d)^2(a+b-c-d)^2 > 0$이므로 부등식도 성립한다.

그래프의 개형

$G(z) = \left[(c-d)^2 z + P + Q\right]^2 - 4PQ$라 하자. z가 변하면 제곱 부분은 $[0, \infty)$의 모든 값을 가지므로, G의 최솟값은 $-4PQ$이다. 그러므로

$$\text{함수f의 치역이 전체 실수 집합}\mathbb{R} \iff PQ \leq 0.$$

이다. $PQ > 0$이면 $G(z) < 0$인 z 값들은 열린구간을 이루며, 이 값들이 바로 빠지는 값이다.

> **생각해 보기** 실제 수치 없이 PQ의 부호를 어떻게 알 수 있을까?

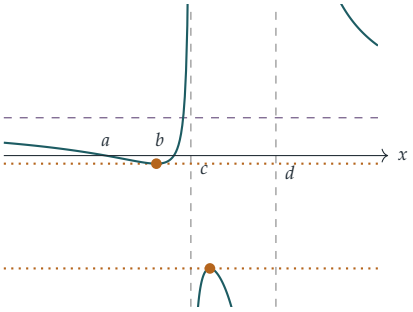
다시 묶으면 $PQ = (a-c)(a-d) \cdot (b-c)(b-d)$이다. $a < c < d$이므로 앞의 쌍은 두 음수의 곱이어서 양수이다. 따라서 PQ의 부호는 $(b-c)(b-d)$의 부호와 같고, 이는 b가 두 극 c와 d 사이에 있을 때 정확히 음수이다. 결국 모든 것은 $c < d$에 대해 b가 어디에 있는지, 그리고 $a+b-c-d$의 부호에 달려 있다.

1. $a < b < c < d$: 이때 $a+b < c+d$는 자동으로 성립한다.
2. $a < c < b < d$: $a < c$이고 $b < d$이므로 역시 $a+b < c+d$이다.
3. $a < c < d < b$이고 $a+b < c+d$.
4. $a < c < d < b$이고 $a+b > c+d$.

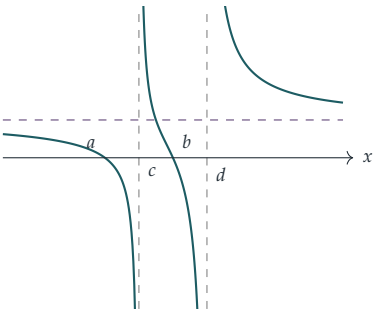
따라서 치역이 $\mathbb{R}$ 전체인 것은 경우 2뿐이다. 경우 1, 3, 4에서는 어떤 구간의 값이 빠진다.

극값을 다룰 때 도구가 하나 더 도움이 된다. f가 x_1에서 정류점(stationary point)을 갖고 $\mathrm{f}(x_1) = z_1$이라면, x_1은 $(x-a)(x-b) - z_1(x-c)(x-d) = 0$의 중근(repeated root)이다. ($z_1 = 1$이면 이 식은 일차식이므로 이런 일은 일어날 수 없다.) 중근을 가진다는 것은 $G(z_1) = 0$이라는 뜻이다. 따라서 정류점에서의 함숫값은 정확히 빠지는 구간의 양 끝값이다. 경우 2에서는 항상 $G > 0$이므로 정류점이 전혀 없다.

각 극의 바로 양옆에서 f의 부호는 음인 인수의 개수를 세어 알 수 있다. 각 그림에서 세로 점선은 극 $x = c$, $x = d$이고, 가로 점선은 점근선 $y = 1$이며, 호박색 점선은 빠지는 구간의 양 끝, 즉 정류점(호박색 점)에서의 함숫값을 나타낸다. 곡선은 특정한 값(각 그림 아래에 표시)으로 그렸지만, 같은 경우에 속하는 모든 선택에서 모양은 같다.



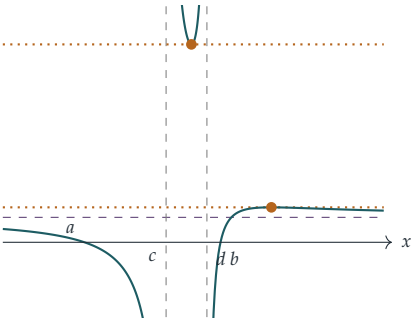
경우 1: $a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$



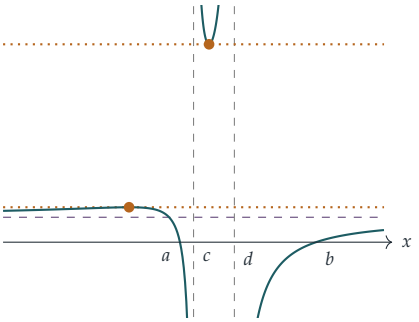
경우 2: $a, b, c, d = -1, 1, 0, 2$

경우 1 ($a < b < c < d$). 이 경우 왼쪽 멀리에서는 $\mathrm{f} < 1$이고 오른쪽 멀리에서는 $\mathrm{f} > 1$이다. $x < c$에서 곡선은 1 바로 아래에서 들어와 a에서 0까지 내려가고, a와 b 사이에서 음의 극솟값까지 내려갔다가, b를 지나 올라가 c에서 $+\infty$로 간다. 두 극 사이에서는 분모의 두 인수의 부호가 서로 반대이고 분자는 양수이므로, 양 끝에서 $\mathrm{f} \to -\infty$이며 그 사이에 음의 극댓값이 있다. d의 오른쪽에서 곡선은 $+\infty$에서 1로 내려간다. (c, d)에서의 극댓값은 (a, b)에서의 극솟값보다 아래에 있으며, 둘 사이에 엄격히 놓인 값들은 빠진다. **치역은 $\mathbb{R}$ 전체가 아니다.**

경우 2 ($a < c < b < d$). 정류점이 없다. 곡선은 1 바로 아래에서 a를 지나 c에서 $-\infty$로 내려간다. 그다음 $+\infty$에서 b를 지나 d에서 $-\infty$로 내려가고, 이어서 $+\infty$에서 1로 내려간다. 가운데 가지 하나만으로도 모든 실숫값을 가진다. **치역은 $\mathbb{R}$ 전체이다.**



경우 3: $a, b, c, d = -3, 2, 0, \frac{3}{2}$



경우 4: $a, b, c, d = -\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0, \frac{3}{2}$

경우 3 ($a < c < d < b$, $a + b < c + d$). $x < c$에서 곡선은 1 바로 아래에서 a를 지나 $-\infty$로 내려간다. 두 극 사이에서는 분자가 음수이므로 양 끝에서 $\mathrm{f} \to +\infty$이며, 극솟값 m을 가진다. d의 오른쪽에서는 $-\infty$에서 b를 지나 올라가 x_0에서 $y = 1$을 가로지르고, 1보다 조금 큰 극댓값 M에 이른 다음 위에서 1로 다시 내려온다. $1 < M < m$일 때 (M, m)의 값들이 빠진다. **치역은 $\mathbb{R}$ 전체가 아니다.**

경우 4 ($a < c < d < b$, $a + b > c + d$). 이는 바깥쪽 거동이 뒤바뀐 경우 3이다. 왼쪽 멀리에서 f는 1보다 조금 크고 증가한다. 극댓값 $M > 1$에 이른 뒤 $x_0 < a$에서 $y = 1$을 가로지르고, a를 지나 c에서 $-\infty$로 내려간다. 가운데 가지는 앞에서처럼 극솟값 m을 갖는 U자 모양이다. d의 오른쪽에서 곡선은 $-\infty$에서 b를 지나 아래에서 1을 향해 올라간다. 이번에도 (M, m)이 빠진다. **치역은 $\mathbb{R}$ 전체가 아니다.**

검산

- 항등식: 임의의 a, b, c, d, x에서 $x\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)$를 유한차분(finite-difference)으로 근사한 값은 우변과 약 10^{-9} 이내로 일치한다.
- $a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$인 경우 1: 이때 $P = \frac{15}{2}$, $Q = \frac{5}{2}$, $(c-d)^2 = \frac{25}{4}$이고, $G(z) = 0$에서 $z = -\frac{8}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{3}$, 즉 약 -0.2144와 -2.9856을 얻는다. 이 값들은 $\mathrm{f}'(x) = 0$을 풀어 구한 ($x \approx -0.515$와 $x \approx 1.060$에서의) 정류점의 함숫값과 정확히 같다. 4×10^5개의 점에서 f를 계산해 보아도 두 값 사이에 엄격히 놓이는 값은 하나도 나오지 않는다.
- 경우 3과 4(그림에 쓴 값): 빠지는 구간은 $(1.4007, 7.9327)$이며, 역시 정류점의 함숫값과 일치한다. 경우 2에서 $\mathrm{f}'(x) = 0$은 실수해를 갖지 않는다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}(x) = z$가 이차방정식인 것은 $z \neq 1$일 때뿐임을 잊는 것: $z = 1$인 경우는 따로 한 문장을 써서 다루어야 한다.
- 곡선이 양 끝에서 같은 쪽으로 $y = 1$에 다가간다고 가정하는 것. 그렇지 않다. $\mathrm{f} - 1 \approx (c + d - a - b)/x$는 x에 따라 부호가 바뀐다.

STEP 너머

"f의 치역은 무엇인가?"를 "어떤 z에 대해 $\mathrm{f}(x) = z$가 해를 갖는가?"로 바꾸는 것은 원상(preimage)의 개념이며, 정류점의 함숫값이 두 해가 합쳐지는 곳이라는 관찰은 임계값(critical values) 이론의 출발점이다. 이와 같은 2차 유리함수(rational function)는 2대1 사상이며, 복소수(complex numbers) 위에서는 그 거동이 훨씬 깔끔해진다. 복소수 위에서는 모든 값이 (중복도(multiplicity)를 세어) 정확히 두 번씩 나타나기 때문이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP II 1989, 문제 5

순수수학 • 극곡선과 반사

STEP II 1989, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q5

핵심 아이디어

소문항 (i)은 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$에 대하여 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$를 계산하는 것일 뿐이다. 거울에 대해서는 O를 중심으로 하는 극좌표(polar coordinates)를 쓰는 것이 자연스럽다. 반사된 광선이 언제나 반지름을 따라 극으로 되돌아오기 때문이다. 그러면 반사의 법칙(law of reflection)에 의해 각 점에서의 법선(normal)의 방향을 θ만으로 나타낼 수 있고, 소문항 (i)을 이용하면 이것이 $r(\theta)$에 대한 변수분리형(separable) 일계 미분방정식(first-order differential equation)이 된다.

풀이

소문항 (i)

극좌표가 (r,θ)인 점의 직교좌표는 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이다. 곡선 $r = r(\theta)$ 위에서는 두 좌표가 모두 θ의 함수이고, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

이다. (매개변수로 나타낸 곡선(parametrised curve)에 대한) 연쇄법칙(chain rule)에 의해, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$인 곳에서는

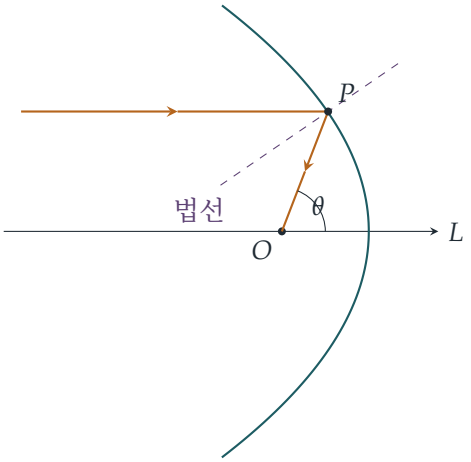
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

이다. 마지막 단계에서는 분자와 분모를 $\cos\theta$로 나누었는데, 이는 $\cos\theta \neq 0$일 때 가능하다. 이것이 구하는 공식이다.

소문항 (ii)

평면곡선으로 줄이기. L을 포함하는 임의의 평면 Π와, Π 위에 있는 거울 위의 점 P를 잡자. P를 지나고 L에 평행한 광선은 Π 안에 있고, O도 Π 안에 있다. 따라서 반사광선(reflected ray) PO도 Π 안에 있다. P에서의 법선은 Π 안의 두 직선이 이루는 각을 이등분하므로 역시 Π 안에 있다. 거울과 Π가 만나서 생기는 곡선 C의 P에서의 접선은 Π와 거울의 접평면(tangent plane)에 동시에 들어 있으므로 법선에 수직이다. 따라서 평면 Π 안에서, P에서의 C의 법선은 입사광선(incident ray)과 반사광선이 이루는 각을 이등분한다. 즉 문제는 2차원 문제가 된다.

좌표. Π에서 극을 O로, 시초선을 L 방향으로 잡은 극좌표를 쓰되, 들어오는 광선이 $\theta = 0$ 방향으로 진행하도록 방향을 정한다(그림에서처럼, 광선은 거울의 열린 쪽 너머에 있는 L의 쪽에서 들어온다). $P = (r, \theta)$가 C 위의 점이라 하자.



법선의 방향. P에서 보면 입사광선은 $(-1, 0)$ 방향으로 되돌아가고, 반사광선은 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ 방향으로 O를 향한다. 둘 다 단위벡터(unit vector)이므로 그 합은 두 벡터가 이루는 각의 이등분선(bisector) 방향, 즉 법선 방향을 가리킨다.

$$(-1-\cos\theta, -\sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

여기서 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 이용하였다. 따라서 P에서의 법선은 L과 각 $\frac{\theta}{2}$를 이루고, 접선은 이에 수직이므로 P에서 C의 기울기(gradient)는

$$m = -\cot\tfrac{\theta}{2}.$$

이다.

미분방정식. $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$, $t = \tan\theta$, $\tau = \tan\frac{\theta}{2}$라 두면 $t = \dfrac{2\tau}{1-\tau^2}$이고 $m = -\dfrac{1}{\tau}$이다. 소문항 (i)에 의해

$$\frac{r't + r}{r' - rt} = m \quad\Longrightarrow\quad r'(t-m) = -r(1+mt) \quad\Longrightarrow\quad \frac{r'}{r} = -\frac{1+mt}{t-m}.$$

이다. 그런데

$$1+mt = 1-\frac{2}{1-\tau^2} = -\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \qquad t-m = \frac{2\tau}{1-\tau^2}+\frac{1}{\tau} = \frac{1+\tau^2}{\tau(1-\tau^2)},$$

이므로

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

이다.

생각해 보기 소문항 (i)은 $\cos\theta = 0$인 곳에서 성립하지 않는다. 그렇다면 빈틈이 생기지 않는가?

그렇지 않다. 방정식 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$는 $-\pi < \theta < \pi$에서 θ의 연속함수만을 포함한다. 이 식은 고립된 값 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$(그리고 접선이 수직이 되는 고립된 점들)를 제외한 모든 점에서 성립하므로, r'의 연속성에 의해 그 점들에서도 성립한다. (또 다른 방법으로, 반지름과 접선이 이루는 각 ψ는 $\tan\psi = r/r'$를 만족하고, 기하학적으로 곧바로 $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$를 얻을 수 있으며, 이 경우에는 예외인 점이 없다.)

풀기. $-\pi < \theta < \pi$에서 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$임에 유의하여 적분하면

$$\ln r = \int \tan\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + \text{상수}, \qquad \text{따라서} \qquad r = \frac{k}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2k}{1+\cos\theta}$$

이고, 여기서 $k > 0$은 상수이다($r > 0$이므로). $\ell = 2k$라 두자. 그러면 $r + r\cos\theta = \ell$, 즉 $r = \ell - x$이다. $r^2 = x^2 + y^2$를 이용하여 양변을 제곱하면

$$x^2 + y^2 = (\ell - x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = \ell^2 - 2\ell x.$$

이다. 이것은 축(axis)이 L이고 초점(focus)이 O인 포물선(parabola)이다($X = \frac{\ell}{2} - x$, $a = \frac{\ell}{2}$로 두면 $Y^2 = 4aX$ 꼴이므로 초점은 $x = \frac{\ell}{2} - a = 0$에 있다). Π는 L을 포함하는 임의의 평면이었으므로, 거울은 그러한 모든 평면과 포물선에서 만난다. 이것으로 증명이 끝난다. (사실 상수 ℓ이 모든 평면에서 같은 것은 거울이 하나의 회전포물면(paraboloid of revolution)일 때뿐이지만, 이 문제에서는 그것까지 필요하지 않다.)

검산

- $\theta = 0$일 때 $r = \frac{\ell}{2}$이다. 즉 꼭짓점(vertex)은 O와 준선(directrix) $x = \ell$의 한가운데에 있으며, 초점이 O인 포물선이라면 당연히 그래야 한다.
- $\ell = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 점은 $P = (0,2)$이고, 이 점에서 $y^2 = 4 - 4x$의 기울기는 $-1 = -\cot\frac{\pi}{4}$이다. 방향 $(1,0)$을 이 접선에 대하여 반사하면 $(0,-1)$이 되어 곧장 아래로 O를 향한다.

- 수치적 검산: (i)의 기울기 공식은 무작위로 만든 곡선 2000개에서 유한차분(finite differences)과 (10^{-8}까지) 일치하였다. $r(0) = 1.35$에서 시작하여 $r' = r\tan\frac{\theta}{2}$를 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 풀면 $r(2.5) = 13.5776380$을 얻었고, 이는 $2.7/(1+\cos 2.5)$와 일치하였다. 또 L에 평행한 광선을 $y^2 = \ell^2 - 2\ell x$ 위의 무작위 점 1000개에서 반사시켰더니 모두 O를 지났다.

흔한 실수

- 이등분선을 잘못 잡는 것: 광선을 따라 P에서 **멀어지는** 방향의 두 단위벡터의 합이 법선을 주고, 그 차는 접선을 준다.
- 문제가 왜 평면 문제가 되는지 설명하지 않는 것: L을 지나는 평면은 입사광선과 O를 포함하므로 반사광선과 법선도 포함한다.
- 적분상수 없이 $\ln r = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$라고 쓰는 것: 이렇게 하면 포물선족 전체를 잃어버린다.

STEP 너머

방정식 $r(1+\cos\theta) = \ell$은 초점이 극에 있고 이심률(eccentricity)이 1인 원뿔곡선(conic)의 극방정식이다. 1을 e로 바꾸면 타원(ellipse)과 쌍곡선(hyperbola)을 얻는데, 이것이 바로 뉴턴(Newton)의 운동방정식을 극좌표로 풀 때 행성의 궤도가 나타나는 방식이다. 위의 반사 논증은 위성 안테나와 자동차 전조등이 회전포물면 모양인 이유이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서는 원뿔곡선 궤도를 이와 같은 방법으로 유도한다.

풀이

STEP II 1989, 문제 6

순수수학 • 역함수의 적분

STEP II 1989, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q6

핵심 아이디어

우변에는 g를 y에 대해 적분한 것이 들어 있으므로, 자연스러운 방법은 좌변의 적분을 $y = \mathrm{f}(x)$로 다시 쓰는 것, 즉 $x = \mathrm{g}(y)$로 치환(substitution)하는 것이다. 새로운 피적분함수(integrand)에는 $y\,\mathrm{g}'(y)$가 들어 있는데, 이는 부분적분(integration by parts)을 하라고 외치는 꼴이며, 경계항(boundary terms)이 직사각형들을 만들어 낸다. 두 번째 공식도 정확히 같은 방식으로 풀리는데, x가 $x^2/2$로, 넓이가 y축을 중심으로 한 회전체의 부피(volume of revolution)로 바뀔 뿐이다.

풀이

첫 번째 공식

$[a, b]$에서 $\mathrm{f}'(x) > 0$이므로 f는 그 구간에서 순증가(strictly increasing)하고, 따라서 $[a, b]$에서 $[\alpha, \beta]$ 위로의 전단사(bijection)이며 역함수(inverse function) $\mathrm{g}\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$가 존재한다. 또한 g는 미분가능(differentiable)하며

$$\mathrm{g}'(y) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{g}(y))},$$

이다. f'이 결코 0이 되지 않으므로 이 식은 의미가 있다.

$x = \mathrm{g}(y)$로 치환하면 $\mathrm{f}(x) = y$이고 $\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$이다. $x = a$일 때 $y = \mathrm{f}(a) = \alpha$이고, $x = b$일 때 $y = \beta$이다. 따라서

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

이제 $u = y$, $\mathrm{d}v = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$로 두고 부분적분하면 $v = \mathrm{g}(y)$이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y &= \Big[y\,\mathrm{g}(y)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \beta\,\mathrm{g}(\beta) - \alpha\,\mathrm{g}(\alpha) - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= b\beta - a\alpha - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

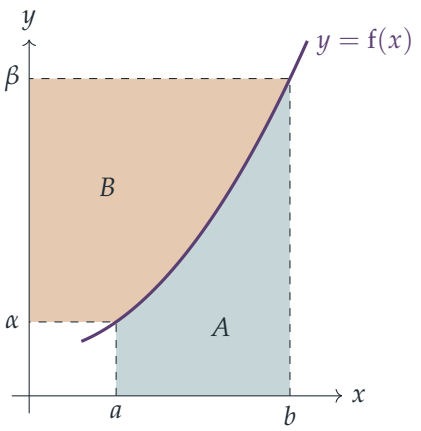
여기서 마지막 등호는 $\mathrm{g}(\beta) = b$이고 $\mathrm{g}(\alpha) = a$이기 때문이다. 이것이 구하는 공식이다.

기하학적 의미

$a > 0, \alpha > 0$이라 하자. f가 증가함수이므로 $0 < a < b$이고 $0 < \alpha < \beta$이며, 따라서 (a, α)에서 (b, β)까지의 $y = \mathrm{f}(x)$의 호는 제1사분면에 놓인다. 공식을 다음과 같이 쓰자.

$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{넓이}A} + \underbrace{\int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y}_{\text{넓이}B} = b\beta - a\alpha.$$

여기서 A는 $a \le x \le b$에서 곡선과 x축 사이의 넓이이고, B는 $\alpha \le y \le \beta$에서 곡선과 y축 사이의 넓이이다(곡선을 옆에서 본 $x = \mathrm{g}(y)$로 생각한다). 둘을 합치면 직사각형 $[0, b] \times [0, \beta]$에서 작은 직사각형 $[0, a] \times [0, \alpha]$를 뺀 영역을 채우며, 이 L자 모양 영역의 넓이는 $b\beta - a\alpha$이다.



두 번째 공식

같은 치환 $x = \mathrm{g}(y)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$를 쓰면

$$2\pi \int_a^b x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}(y)\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

? 생각해 보기 이번에는 어느 인수를 적분해야 할까?

연쇄법칙(chain rule)에 의해 $g(y)\,g'(y)$는 $\frac{1}{2}[g(y)]^2$의 도함수임에 주목하자. 그러므로 $u = y$, $v = \frac{1}{2}[g(y)]^2$로 두고 부분적분하면

$$\begin{aligned} 2\pi \int_\alpha^\beta y\,g(y)\,g'(y)\,dy &= 2\pi \left(\left[\tfrac{1}{2} y\,[g(y)]^2\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[g(y)]^2\,dy \right) \\ &= \pi(\beta b^2 - \alpha a^2) - \pi \int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,dy, \end{aligned}$$

이며, 여기서도 $g(\beta) = b$와 $g(\alpha) = a$를 이용하였다. 이것이 두 번째 공식이다.

두 번째 공식의 기하학적 의미

이번에도 $a > 0$, $\alpha > 0$이라 하고, 위의 그림을 y축을 중심으로 한 바퀴 회전시키자.

- 영역 A가 휩쓸고 지나가며 만드는 입체의 부피는 원통껍질법(method of cylindrical shells)에 의해 $2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx$이다. 축에서 거리 x만큼 떨어져 있고 높이가 $f(x)$, 폭이 dx인 가는 띠는 부피가 약 $2\pi x\,f(x)\,dx$인 원통껍질이 된다.
- 영역 B가 휩쓸고 지나가며 만드는 입체의 부피는 원판법(method of discs)에 의해 $\pi \int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,dy$이다. 높이 y에 있는 띠는 반지름이 $g(y)$인 원판이 된다.
- 두 입체를 합치면 반지름 b, 높이 β인 원기둥에서 그 밑면으로부터 반지름 a, 높이 α인 같은 축의 원기둥을 뺀 입체를 채우며, 그 부피는 $\pi b^2\beta - \pi a^2\alpha$이다.

따라서 이 공식은 원통껍질법으로 구한 부피와 원판법으로 구한 부피의 합이 두 원기둥의 부피의 차와 같다는 것을 말해 준다. 조건 $a > 0$과 $\alpha > 0$은 두 영역이 모두 축의 한쪽에, 그리고 x축 위쪽에 놓이도록 보장한다. 그래서 적분이 실제로 부피를 나타내고 두 입체가 겹치지 않는다.

검산

$f(x) = x^2$을 $[1, 2]$에서 시험해 보자. 그러면 $\alpha = 1$, $\beta = 4$이고 $g(y) = \sqrt{y}$이다. 첫 번째 공식의 좌변은 $\frac{7}{3}$, 우변은 $8 - 1 - \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{7}{3}$이다. 두 번째 공식의 좌변은 $2\pi \cdot \frac{15}{4} = \frac{15\pi}{2}$, 우변은 $\pi(16 - 1) - \pi \cdot \frac{15}{2} = \frac{15\pi}{2}$이다. 또한 g를 이분법(bisection)으로 구하고 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 수치 계산하여, $[\frac{1}{2}, 2]$에서의 $x^3 + x$를 포함한 여러 함수에 대해 두 공식을 모두 확인하였다. 이 경우 첫 번째 공식의 양변은 모두 5.859375이다.

흔한 실수

- 적분 구간을 바꾸는 것을 잊는다. $x = \mathrm{g}(y)$로 치환한 뒤에는 적분 구간의 끝이 a와 b가 아니라 α와 β가 된다.
- g가 존재하고 미분가능한 이유를 밝히지 않는다. 조건 $\mathrm{f}' > 0$은 바로 이를 위해 주어진 것이다.
- 영역 B를 곡선 아래에 놓인 영역으로 묘사한다. 이 영역은 곡선과 y축 사이에 놓여 있다.

STEP 너머

첫 번째 공식은 f와 f^{-1}의 그래프가 $y = x$에 대해 서로 대칭이라는 사실을 적분으로 표현한 것이다. 이것은 영 부등식(Young's inequality), 즉 $\mathrm{f}(0) = 0$인 증가함수 f와 $a, b \geq 0$에 대해 $ab \leq \int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$가 성립한다는 부등식의 바탕이 되는 아이디어이며, 볼록 해석(convex analysis)과 해밀턴 역학(Hamiltonian mechanics)에서 쓰이는 르장드르 변환(Legendre transform)의 바탕이기도 하다. 또한 arcsin이나 ln 같은 역함수의 적분을 기발한 치환 없이 구하는 방법이기도 하다. 치환과 역함수에 대한 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

풀이

STEP II 1989, 문제 7

순수수학 • 2계 미분방정식

STEP II 1989, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q7

핵심 아이디어

$x\,y''$ 항과 $-b\,y'$ 항은 함께 있으면 다루기 어색해 보이지만, 독립변수(independent variable)를 $t = x^{\alpha}$로 바꾸면 y''에서 1계 도함수 항이 생겨나고, 이 항이 $-b\,y'$를 정확히 상쇄하도록 만들 수 있다. 그렇게 되도록 α를 고르면 t에 대한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)만 남는다. 그다음 $x \to 0$일 때의 거동은 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$에 들어 있는 인수 x^{b}가 어떻게 행동하느냐에 달려 있고, 이는 b의 부호에 따라 달라진다.

풀이

변수 바꾸기

α는 나중에 정하기로 하고 $t = x^{\alpha}$로 놓은 뒤, y를 t의 함수로 본다. $\dot{y} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$라 하면 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}\dot{y},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\dot{y} + \alpha^2 x^{2\alpha-2}\ddot{y},$$

이다. 여기서 둘째 줄은 곱의 미분법(product rule)과 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y} = \alpha x^{\alpha-1}\ddot{y}$를 이용한 것이다. 이를 대입하면

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha^2 x^{2\alpha-1}\ddot{y} + \alpha(\alpha-1-b)\,x^{\alpha-1}\dot{y}.$$

$\alpha = b+1$로 고르면 $\dot{y}$ 항이 사라지고, $b > -1$이므로 이 값은 0이 아니다. 그러면 $2\alpha - 1 = 2b+1$이므로 방정식은

$$(b+1)^2 x^{2b+1}\ddot{y} + x^{2b+1}y = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} + \frac{y}{(b+1)^2} = 0,$$

이 된다. 여기서 $x^{2b+1} \neq 0$으로 나누었다($x > 0$이다). 이것은 각진동수(angular frequency)가 $1/(b+1)$인 t에 대한 단순 조화 운동이므로

$$\boxed{y = A\cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right)}$$

이고, A, B는 임의의 상수이다. 2계 방정식(second-order equation)에 상수가 두 개 있으므로, 이것이 일반해(general solution)이다.

$x \to 0$일 때의 거동

$u = x^{b+1}/(b+1)$로 쓰자. $b+1 > 0$이므로 $x \to 0^+$일 때 $u \to 0^+$이고, 따라서

$$y \to A\cos 0 + B\sin 0 = A.$$

그러므로 $y \to 1$이려면 $A = 1$이어야 한다. $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = x^b$를 이용하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^b(-\sin u + B\cos u) \qquad (A = 1).$$

$b > 0$인 경우. 이때 $x^b \to 0$이고, 괄호 안은 유한한 값 B로 수렴한다. 따라서 B의 값에 관계없이 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to 0$이다. 다음 해족의 모든 원소

$$y = \cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right), \qquad B \in \mathbb{R},$$

가 두 조건을 모두 만족한다. 문제에서 요구한 대로, 해는 존재하지만 유일하지 않다.

> ? **생각해 보기** 보통의 2계 방정식에서는 y의 값 하나와 y'의 값 하나가 해를 결정한다. 여기서는 왜 그렇지 않은가?

유일성 정리(uniqueness theorem)는 방정식이 $y'' = f(x, y, y')$ 꼴이고 f가 충분히 좋은 함수일 것을 요구한다. x로 나누면 $y'' = (b/x)\,y' - x^{2b}y$가 되는데, 계수 b/x는 $x = 0$에서 발산한다. 점 $x = 0$은 **특이점**(*singular point*)이므로, 그곳에서는 통상적인 보장이 적용되지 않는다.

$b = 0$인 경우. 이때 $x^b = 1$이고 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to B$이다. 조건에 의해 $B = 0$이어야 하므로 유일한 해 $y = \cos x$를 얻는다. (이는 그냥 $y'' + y = 0$이다.)

$-1 < b < 0$인 경우. 이때 $x^b \to \infty$이다. $B \neq 0$이면 $Bx^b\cos u \to \pm\infty$인 반면, 다른 항은 작다. $\sin u \leq u$이므로

$$\left|x^b \sin u\right| \leq x^b \cdot \frac{x^{b+1}}{b+1} = \frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

더 정확히는 $\sin u/u \to 1$이므로 $x^b \sin u \sim x^{2b+1}/(b+1)$이다. 따라서 $B = 0$이어야 하고, 그러면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x^b \sin u \sim -\frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

이것은 $2b+1>0$, 즉 $b>-\frac{1}{2}$일 때, 그리고 그때에만 0으로 수렴한다. $b=-\frac{1}{2}$이면 -2로 수렴하고, $b<-\frac{1}{2}$이면 유계가 아니다. 따라서 $-\frac{1}{2}<b<0$이면 해는 $y=\cos\left(x^{b+1}/(b+1)\right)$ 하나뿐이고, $-1<b\leq-\frac{1}{2}$이면 해가 없다.

결론

조건이 유일한 해를 결정하는 것은 정확히

$$-\tfrac{1}{2}<b\leq 0,$$

일 때이고, 그 해는 $y=\cos\left(x^{b+1}/(b+1)\right)$이다.



검산

- $b=0$이면 $y''+y=0$이 되고, 그 해 $A\cos x+B\sin x$는 공식과 일치한다.
- 수치적으로, 일반해는 반올림 오차 범위 안에서 방정식을 만족한다(임의의 x, b, A, B에서 유한 차분(finite differences)으로 확인). $b=-\frac{1}{4}$, $B=0$일 때 $x=10^{-9}$에서 $y'\approx-4.2\times10^{-5}$였고, 0으로 수렴해 갔다. $b=-\frac{1}{2}$이면 값이 -2에 머물고, $b=1$, $B=5$이면 $x=10^{-9}$에서 5×10^{-9}이다.

흔한 실수

- "$b\leq0$이면 유일하다"에서 멈추는 것: $-1<b\leq-\frac{1}{2}$이면 코사인 해조차 $y'\not\to0$이므로, 해가 아예 없다.
- $\alpha x^{\alpha-1}\dot{y}$를 x에 대해 미분할 때 곱의 미분법을 잊는 것. 추가로 생기는 항이 바로 $-by'$를 상쇄하는 항이다.

STEP 너머

점 $x=0$은 이 방정식의 **정칙 특이점**(*regular singular point*)이다. 이런 점 근처에서 프로베니우스(Frobenius) 방법은 $x^r\sum c_nx^n$ 꼴의 해를 찾으며, 여기서 결정방정식(indicial equation)의 근은 $r=0$과 $r=b+1$이다. 특이점에서 어떤 조건이 해를 확정하는지는 이 지수들에 따라 달라지며, 이는 우리가 본 그대로이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary*

Differential Equations(미분방정식 입문서)가 급수해(series solution)와 정칙 특이점을 다룬다.

풀이

STEP II 1989, 문제 8

순수수학 • 변환의 군

STEP II 1989, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q8

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 항등식(identity) $\Omega^3 = -1$에 달려 있다. 이로부터 Ω는 첫 줄의 이차방정식(quadratic equation)을 만족하고, 그 덕분에 Ω의 어떤 거듭제곱이든 Ω에 대한 일차식으로 줄일 수 있다. R와 T가 네 점을 어떻게 뒤섞는지 알고 나면, 개수 세기는 공식이 아니라 네 점에 관한 문제가 된다. 군(group)은 z_0을 네 점 각각으로 옮길 수 있어야 하고, 이미 z_0을 그대로 두는 서로 다른 세 사상을 포함하고 있다. 마지막 부분에서는 R와 T가 어떤 종류의 치환(permutation)인지 생각해 보자.

풀이

항등식

$\Omega = e^{i\pi/3}$이므로 $\Omega^3 = e^{i\pi} = -1$이고, 따라서

$$0 = \Omega^3 + 1 = (\Omega + 1)(\Omega^2 - \Omega + 1).$$

$\Omega \neq -1$이므로 두 번째 인수가 0이 된다. 즉 요구한 대로 $\Omega^2 - \Omega + 1 = 0$이다.

이 식을 다음과 같은 형태로 사용할 것이다.

$$\Omega^2 = \Omega - 1, \qquad \Omega^3 = -1, \qquad \Omega^4 = -\Omega.$$

또한 $2\Omega - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 + 2i\sin\frac{\pi}{3} = i\sqrt{3} \neq 0$임에 주의하자.

R와 T는 네 점을 치환한다

R의 경우, $\Omega^2 = e^{2i\pi/3}$를 곱하는 것은 0을 중심으로 한 120° 회전이다.

$$R(0) = 0, \qquad R(1) = \Omega^2, \qquad R(\Omega^2) = \Omega^4 = -\Omega, \qquad R(-\Omega) = -\Omega^3 = 1.$$

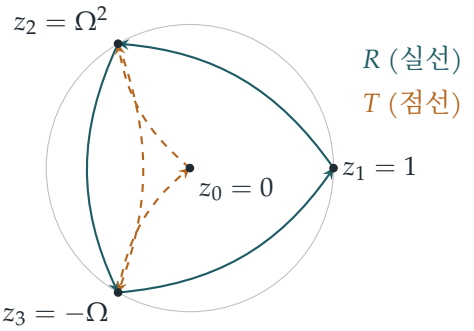
따라서 R는 z_0을 고정하고 $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$로 보낸다.

T의 경우, 각 점을 대입한 뒤 $\Omega^2 = \Omega - 1$을 이용해 정리한다.

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{\Omega^2}{1} = z_2, \\ T(1) &= \frac{\Omega + \Omega^2}{2\Omega^2 + 1} = \frac{2\Omega - 1}{2\Omega - 1} = 1 = z_1, \\ T(\Omega^2) &= \frac{\Omega^3 + \Omega^2}{2\Omega^4 + 1} = \frac{\Omega - 2}{1 - 2\Omega} = -\Omega = z_3, \\ T(-\Omega) &= \frac{-\Omega^2 + \Omega^2}{-2\Omega^3 + 1} = \frac{0}{3} = 0 = z_0. \end{aligned}$$

셋째 줄에서 $\Omega^3 + \Omega^2 = -1 + (\Omega - 1) = \Omega - 2$이고, 마지막 단계는 $-\Omega(1 - 2\Omega) = -\Omega + 2\Omega^2 = -\Omega + 2\Omega - 2 = \Omega - 2$이기 때문에 성립한다. 분모는 모두 0이 아니다(각각 $1, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 3$이다).

따라서 T는 z_1을 고정하고 $z_0 \to z_2 \to z_3 \to z_0$로 보낸다. R와 T 모두 네 점을 치환하며, 각각은 3-순환(3-cycle)이다.



군의 위수는 적어도 12이다

G를 R와 T를 포함하는 가장 작은 변환(transformation)의 군이라 하자. 즉 R, T와 그 역변환(inverse)들을 합성(composition)하여 만들 수 있는 모든 것이다. R와 T가 집합 $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$을 자기 자신으로 보내므로(그리고 이 유한집합의 전단사(bijection)의 역이므로 그 역변환들도 마찬가지이다), G의 모든 원소는 이 집합을 자기 자신 위로 보낸다.

z_0을 고정하는 세 사상. 집합 $H = \{I, R, R^2\}$는 G에 속하고, 모든 원소가 z_0을 고정하며, 세 원소는 서로 다른 변환이다(0°, 120°, 240° 회전).

z_0을 모든 점으로 보내는 사상. 위에서 구한 순환을 이용하면

$$g_0 = I, \qquad g_1 = R^2T, \qquad g_2 = T, \qquad g_3 = RT$$

는 $g_k(z_0) = z_k$를 만족한다. 예를 들어 $RT(z_0) = R(z_2) = z_3$이고 $R^2T(z_0) = R^2(z_2) = R(z_3) = z_1$이다.

이제 $k \in \{0,1,2,3\}$, $h \in H$에 대한 열두 개의 곱 g_kh를 생각하자. $h(z_0) = z_0$이므로 $g_kh(z_0) = z_k$이다.

생각해 보기 이 열두 개의 곱 중 두 개가 같은 변환일 수 있을까?

그럴 수 없다. $g_kh = g_lh'$이면 양변을 z_0에 적용하여 $z_k = z_l$, 즉 $k = l$을 얻는다. 그러면 왼쪽에서 g_k^{-1}를 합성하여 $h = h'$을 얻는다. 따라서 열두 개의 곱은 G의 서로 다른 원소이고, $|G| \geq 12$이다. (군론의 언어로 말하면, z_0의 궤도(orbit)의 크기는 4이고 그 안정자(stabiliser)의 크기는 적어도 3이므로, 궤도-안정자 정리(orbit–stabiliser theorem)에 의해 $|G| \geq 4 \times 3$이다.)

마지막 부분

그렇다. 네 점의 24가지 치환 중 정확히 절반은 결코 만들어질 수 없다.

생각해 보기 치환으로서 R와 T의 공통점은 무엇인가?

각각은 3-순환이고, 3-순환은 **짝치환**(*even permutation*)이다. 예를 들어 $(z_1\,z_2\,z_3) = (z_1\,z_3)(z_1\,z_2)$로, 두 호환(transposition)의 곱이다. 이들의 역도 3-순환이다. 짝치환의 합성은 짝치환이므로, R와 T로 만들어지는 점들의 치환은 모두 짝치환이다. 네 대상의 짝치환은 12개뿐이므로, 나머지 12개, 즉 홀치환은 결코 만들어지지 않는다. 예를 들어 z_2와 z_3을 고정하면서 z_0과 z_1을 맞바꾸는 것은 하나의 호환이므로 홀치환이고, 따라서 얻을 수 없다.

사실 앞의 결과와 합치면 G를 정확히 결정할 수 있다. R와 T는 뫼비우스 변환(Möbius map)이고(T는 $ad - bc = \Omega - 2\Omega^4 = 3\Omega \neq 0$이다), 세 점을 고정하는 뫼비우스 변환은 항등변환이므로, G의 각 원소는 네 점을 어떻게 치환하는지에 의해 결정된다. 따라서 $|G| \leq 12$이고, 앞의 결과와 함께 $|G| = 12$이다. 즉 G는 네 점 위에 짝치환 전체의 군 A_4로 작용한다.

검산

- 수치적으로 $|\Omega^2 - \Omega + 1| \approx 2 \times 10^{-16}$이고, 네 점에서 R와 T의 값을 계산하면 정확히 위의 두 3-순환이 나온다.
- $R^3 = I$는 자명하다. 그리고 3-순환이라면 당연히 그래야 하듯 $T^3 = I$이기도 하다(임의

의 점에서 10^{-16} 정밀도로 확인하였다).

- 컴퓨터로 R와 T의 모든 합성을 생성하면 정확히 12개의 서로 다른 사상이 나오며, 모두 짝치환을 유도하고, z_0은 네 점 모두로 옮겨지며, z_0을 고정하는 사상은 3개이다.

흔한 실수

- "G가 위수(order) 3인 원소를 포함하므로 $|G| \geq 12$이다"라고 논증하는 것. 위수 3인 원소만으로는 3이 $|G|$를 나눈다는 사실밖에 얻지 못한다. 인수 4를 주는 것은 네 점 위에서의 추이성(transitivity)이다.
- Ω의 거듭제곱을 정리하지 않고 두어서 $T(\Omega^2) = -\Omega$가 틀린 것처럼 보이는 것. 먼저 모든 것을 $a + b\Omega$ 꼴로 줄이자.

STEP 너머

$|G| = (\text{궤도의 크기}) \times (\text{안정자의 크기})$라는 개수 세기는 궤도-안정자 정리이고, 짝치환들은 교대군(alternating group) A_4를 이루며, 이는 정사면체(regular tetrahedron)의 회전군이기도 하다. 여기서 이런 일이 일어나는 데에는 멋진 이유가 있다. 뫼비우스 변환은 네 점의 복비(cross-ratio)를 보존하는데, 이 네 점의 복비는 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$로, 정확히 짝치환만이 이를 보존하는 특별한 "등비조화(equianharmonic)" 값이다. 군과 군의 작용에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를, 뫼비우스 변환과 리만 구(Riemann sphere)에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

풀이

STEP II 1989, 문제 9

순수수학 • 행렬 지수함수와 연립 미분방정식

STEP II 1989, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q9

핵심 아이디어

모든 것은 작은 계산 하나에 달려 있다. $\mathbf{A}^2$을 계산해 보면 항등행렬(identity matrix)이 된다. 그러면 $\mathbf{A}$의 짝수 거듭제곱은 모두 $\mathbf{I}$이고 홀수 거듭제곱은 모두 $\mathbf{A}$이므로, 급수는 지수급수(exponential series)의 짝수 부분과 홀수 부분으로 나뉜다. 이 두 부분이 바로 $\cosh t$와 $\sinh t$이다. 미분방정식(differential equation)은 스칼라 경우의 적분인자(integrating factor) 방법을 그대로 따라 풀며, 이때 행렬 $\mathbf{F}$가 $\mathrm{e}^{\int a\,\mathrm{d}t}$의 역할을 한다.

풀이

행렬 $\mathbf{F}$

곱을 전개하면

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & 3-3 \\ -24+24 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

따라서 모든 $k \geq 0$에 대하여 $\mathbf{A}^{2k} = (\mathbf{A}^2)^k = \mathbf{I}$이고 $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}^{2k}\mathbf{A} = \mathbf{A}$이다. $\mathbf{I} = \frac{t^0}{0!}\mathbf{A}^0$으로 쓰고 급수를 n이 짝수인 항과 홀수인 항으로 나누면(행렬 급수의 각 성분은 절대수렴(absolutely convergent)하는 스칼라 급수를 재배열한 것이므로 이렇게 해도 된다)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathbf{A}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{A}^{2k+1} \\ &= \mathbf{I}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t,\end{aligned}$$

이다. 여기서 매클로린 급수(Maclaurin series) $\cosh t = \sum t^{2k}/(2k)!$와 $\sinh t = \sum t^{2k+1}/(2k+1)!$를 이용하였다. 이것이 요구된 꼴이다.

역행렬

$\mathbf{G} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$라 하자. $\mathbf{I}$와 $\mathbf{A}$는 교환(commute)하므로 보통의 수처럼 곱을 전개할 수 있다.

$$\mathbf{FG} = \mathbf{I}\cosh^2 t - \mathbf{A}^2\sinh^2 t + (\mathbf{A} - \mathbf{A})\cosh t \sinh t = \mathbf{I}(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = \mathbf{I},$$

여기서 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$와 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$을 이용하였다. 같은 계산으로 $\mathbf{GF} = \mathbf{I}$도 얻으므로 $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$이다.

도함수

성분별로 미분하면(행렬 $\mathbf{I}$와 $\mathbf{A}$는 상수이다)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{I}\sinh t + \mathbf{A}\cosh t, \qquad \text{한편} \qquad \mathbf{FA} = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{A}^2\sinh t = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{I}\sinh t.$$

두 식이 일치하므로 $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FA}$이다. 또한 $\mathbf{F}$는 $\mathbf{I}$와 $\mathbf{A}$로 만들어졌으므로 $\mathbf{FA} = \mathbf{AF}$임에 주의한다.

미분방정식

스칼라 방정식 $r' + ar = 0$에서는 도함수가 $\mathrm{e}^{at}a$인 e^{at}를 곱하여 좌변이 어떤 함수의 도함수가 되게 한다. 행렬 $\mathbf{F}$는 바로 이 성질 $\mathbf{F}' = \mathbf{FA}$를 가지므로, 방정식의 **왼쪽**에 $\mathbf{F}$를 곱한다.

$$\mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{FAr} = \mathbf{0}.$$

곱의 미분법(product rule)에 의하여(인수의 순서만 지키면 행렬의 곱에서도 성립한다)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FAr} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},$$

이고, 이것은 정확히 좌변과 같다. 따라서 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \mathbf{0},$$

을 뜻하고, $\mathbf{Fr}$는 상수 벡터 $\mathbf{c}$이다.

? **생각해 보기** 왜 오른쪽이 아니라 왼쪽에 곱하는가? 그리고 $\mathbf{c}$는 어떻게 구하는가?

곱 $\mathbf{rF}$는 정의조차 되지 않는다($\mathbf{r}$는 2×1 열벡터이다). 또 곱의 미분법에서 나온 $\mathbf{FAr}$는 $\mathbf{F}$가 왼쪽에 있을 때에만 항 $\mathbf{F}(\mathbf{Ar})$와 일치한다. 상수를 구하려면 $t = 0$을 대입한다. 이때 $\cosh 0 = 1$, $\sinh 0 = 0$이므로 $\mathbf{F} = \mathbf{I}$이고

$$\mathbf{c} = \mathbf{I}\,\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

이제 $\mathbf{Fr} = \mathbf{c}$의 왼쪽에 앞에서 구한 $\mathbf{F}^{-1}$를 곱한다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \cosh t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} - \sinh t\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 8 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \cosh t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} - \sinh t\begin{pmatrix}-3\alpha-\beta\\ 8\alpha+3\beta\end{pmatrix}.$$

성분을 읽으면

$$x(t) = \alpha\cosh t + (3\alpha+\beta)\sinh t,$$
$$y(t) = \beta\cosh t - (8\alpha+3\beta)\sinh t,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

검산

- $t = 0$에서 이 식들은 당연히 그래야 하듯이 $x = \alpha$, $y = \beta$를 준다.
- 직접 대입: $x' = \alpha\sinh t + (3\alpha+\beta)\cosh t$이고, $-(-3x-y) = 3x+y = (3\alpha+\beta)\cosh t + \alpha\sinh t$이다($9\alpha+3\beta-8\alpha-3\beta = \alpha$를 이용). 따라서 $x' = -$(다음 벡터의 첫째 성분: $\mathbf{Ar}$)이고, y에 대해서도 마찬가지이다.
- 수치적으로, 급수를 60개 항까지 더한 값은 $\mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t$와 일치하고, $\alpha = 1$, $\beta = 0$일 때 연립방정식을 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 풀면 $x(2) \approx 14.6428$을 얻어 $\cosh 2 + 3\sinh 2$와 일치한다.

흔한 실수

- $\mathbf{F}$를 오른쪽에 곱하거나, 여기서 왜 그래도 되는지 밝히지 않고 $\mathbf{AF}$와 $\mathbf{FA}$를 바꾸어 쓰는 것($\mathbf{F}$가 $\mathbf{I}$와 $\mathbf{A}$의 일차결합이므로 둘은 교환한다).
- 급수를 나눌 때 $\mathbf{I}$ 항($n = 0$인 항)을 빠뜨려 $\cosh t$의 상수항 1을 잃는 것.
- $-\mathbf{A}$를 $(\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$에 곱할 때 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

행렬 $\mathbf{F}$는 행렬 지수함수(matrix exponential) $\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$이며, 여기서 쓴 방법은 $\mathbf{r}' = \mathbf{Mr}$의 해가 항상 $\mathbf{r} = \mathrm{e}^{t\mathbf{M}}\mathbf{r}(0)$임을 보여 준다. 이 문제에서는 $\mathbf{M} = -\mathbf{A}$이고, 그래서 답에 $\mathbf{F}^{-1} = \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}}$가 나타난다. 일반적으로 $\mathrm{e}^{t\mathbf{M}}$은 $\mathbf{M}$을 대각화(diagonalisation)하여 계산한다. 이 문제의 $\mathbf{A}$는 고윳값(eigenvalue) ±1을 가지며($\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$가 말해 주는 것이 바로 이것이다), 여기서 $\mathrm{e}^{\pm t}$가 나오고, 따라서 cosh와 sinh가 나온다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에는 행렬 지수함수와 연립 미분방정식을 다루는 좋은 장이 있고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 선형 연립방정식을 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 1989, 문제 10

순수수학 • 직선과 평면

> **STEP II 1989, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q10

핵심 아이디어

공간에서 두 직선이 정확히 한 점에서 만나지 않는 경우는 세 가지이다. 두 직선이 같은 직선일 수도 있고, 평행할 수도 있고, 서로 다른 평면에 놓여 엇갈리는 **꼬인 위치**(*skew*)에 있을 수도 있다. 따라서 "정확히 한 점"이 되려면 두 조건이 필요하다. 방향이 평행하지 않아야 하고, 두 직선이 한 평면 위에 있어야 한다. 외적(cross product)은 이 두 조건을 한꺼번에 다룬다. 평면의 경우, 교선은 두 법선벡터의 외적 방향으로 놓이며, 마지막 부분은 사실 첫 부분이 모습을 바꾸어 다시 나타난 것이다.

풀이

첫 부분: 두 직선이 정확히 한 점에서 만나는 조건

두 직선은 $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mu\mathbf{v}$인 곳에서 만난다. 즉

$$\lambda\mathbf{u} - \mu\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

인 곳에서 만난다. 이것들이 진짜 직선이 되려면 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$이고 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$이어야 한다. 그러면 다음이 성립한다.

- $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 평행하면($\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$), 두 직선은 평행하고 서로 다르거나(공통점 없음) 일치한다(공통점이 무수히 많음). 어느 쪽이든 정확히 한 점은 아니다.
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$이면 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 한 평면을 생성(span)하고, 위 방정식은 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$가 그 평면 위에 있을 때, 즉 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$에 수직일 때 그리고 그때에만 해를 가진다. 해가 존재하면 그 해는 유일하다. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 일차독립(linearly independent)이기 때문이다.

따라서 조건은

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0.$$

이다. (처음 두 조건은 세 번째 조건에 포함되지만, 밝혀 두는 것이 좋다.) 마지막 조건이 성립하지 않으면 두 직선은 꼬인 위치에 있다.

둘째 부분: 두 평면

법선벡터(normal vector)는 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, b)$와 $\mathbf{n}_2 = (b, b, 1)$이고,

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \big(1 - b^2,\ b^2 - 1,\ 0\big) = (1 - b^2)(1, -1, 0).$$

이다. 두 평면이 한 직선에서 만나지 않는 것은 법선벡터가 평행할 때 그리고 그때에만이며, 여기서는 $1 - b^2 = 0$일 때, 즉 $b = 1$ 또는 $b = -1$일 때이다.

- $b = 1$: 두 방정식 모두 $x + y + z = 3$이 된다.
- $b = -1$: 두 방정식은 $x + y - z = 1$과 $-x - y + z = -1$이고, 역시 같은 평면이다.

따라서 두 경우 모두 두 평면은 평행하게 떨어져 있는 것이 아니라 일치한다.

이제 $b \neq \pm 1$이라 하자. 교선은 $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ 방향으로 놓이므로 $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$을 쓸 수 있다. 교선 위의 점을 찾기 위해, x와 y가 $s = x + y$의 형태로만 나타난다는 점에 주목하자.

$$s + bz = b + 2, \qquad bs + z = 2b + 1.$$

둘째 식에서 첫째 식의 b배를 빼면 $(1 - b^2)z = 1 - b^2$이므로 $z = 1$이고($b^2 \neq 1$이므로 나눌 수 있다), 따라서 $s = 2$이다. 그러므로 교선은 $x + y = 2$, $z = 1$이며, b와 무관하다.

이 직선 위에서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$, 즉 $x - y = 0$을 만족하는 점 $\mathbf{a}$가 필요하다. $x + y = 2$와 함께 쓰면 $x = y = 1$이므로

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b \neq \pm 1.$$

이다. 점 $\mathbf{a}$는 원점에서 이 직선에 내린 수선의 발이다.

마지막 부분

두 방정식 $(*)$를 모두 만족하는 점들은 $b \neq \pm 1$일 때 위의 직선을 이루고, $b = \pm 1$일 때 평면 전체를 이룬다. 두 경우를 나누어 다룬다.

생각해 보기 $b = \pm 1$일 때 두 방정식을 모두 만족하는 점의 집합은 무엇인가?

두 평면이 일치함을 앞에서 보였으므로, 그것은 공집합이 아니라 평면 전체이다. 이 사실이 그 경우들의 답을 완전히 바꾼다.

$b \neq \pm 1$**인 경우.** 주어진 직선이 직선 $\mathbf{r} = (1,1,1) + \lambda(1,-1,0)$과 정확히 한 점에서 만나야 한다. 첫 부분의 결과를 $\mathbf{a} = (1,1,1)$, $\mathbf{u} = (1,-1,0)$, $\mathbf{b} = (0,0,c)$, $\mathbf{v} = (1,d,0)$에 적용하면

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0,\, 0,\, d+1), \qquad (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (-1,-1,c-1) \cdot (0,0,d+1) = (c-1)(d+1).$$

이다. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$이어야 하므로 $d \neq -1$이고, 그러면 $(c-1)(d+1) = 0$에서 $c = 1$이어야 한다. 따라서 조건은 $c = 1$이고 $d \neq -1$인 것이다. (직접 확인하면: 주어진 직선은 $z = c$이므로 $c = 1$일 때에만 $z = 1$과 만나고, 그때 $x + y = \mu(1+d) = 2$는 $d \neq -1$이면 유일한 해 $\mu = 2/(1+d)$를 가진다.)

$b = \pm 1$**인 경우.** 이제 주어진 직선이 한 평면과 정확히 한 점에서 만나야 한다. 점 $(\mu, d\mu, c)$는 $\mu(1+d) = 3-c$일 때 $x+y+z = 3$ 위에 있고($b = 1$인 경우), $\mu(1+d) = 1+c$일 때 $x+y-z = 1$ 위에 있다($b = -1$인 경우). 각 방정식은 $1+d \neq 0$일 때 그리고 그때에만 μ에 대한 해를 정확히 하나 가진다. $d = -1$이면 직선이 평면과 평행하여 해가 없거나 무수히 많다. 이 경우 c는 어떤 값이어도 된다.

답. 그러한 점이 정확히 하나 존재할 필요충분조건은

$$d \neq -1 \quad \text{그리고} \quad \big(c = 1 \text{ 또는 } b = \pm 1\big),$$

이며, 간단히 $d \neq -1$이고 $(b^2-1)(c-1) = 0$이라고 쓸 수 있다.

검산

- $(1+\lambda, 1-\lambda, 1)$을 $(*)$에 대입하면 모든 b와 λ에 대해 $2+b = b+2$, $2b+1 = 2b+1$이다.
- $b = 2$, $c = 1$, $d = 3$이면 $\mu = \frac{1}{2}$, 즉 점 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$이다. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 = 4 = b+2$이고 $1+3+1 = 5 = 2b+1$이다.
- 컴퓨터로 $\{-3, \ldots, 3, \frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\}$의 모든 b, c, d(729가지 경우)에 대해 정확한 산술로 μ를 직접 구해 보았고, 해의 개수는 위의 조건이 성립할 때 그리고 그때에만 하나였다.

흔한 실수

- 두 직선이 평행하지 않다는 이유만으로 한 점에서 만난다고 말하는 것. 3차원에서는 꼬인 위치에 있을 수 있다.
- $b = \pm 1$일 때 두 평면이 평행하게 떨어져 있다고 가정하고, 점이 전혀 없다고 결론짓는 것. 우변을 확인해 보라. 두 평면은 일치한다.

▶ $1 - b^2$이 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 $1 - b^2$으로 나누는 것.

STEP 너머

이 문제는 사실 작은 연립일차방정식(system of linear equations)이다. 미지수가 세 개인 방정식 두 개는 계수행렬(coefficient matrix)의 계수(rank)가 2이면 직선 모양의 해를 가지고, 계수가 1이면 평면 모양의 해를 가지거나 해가 없다. 직선의 매개변수 표현을 덧붙이면 μ에 대한 과결정 연립방정식(overdetermined system)이 되고, "해가 정확히 하나"라는 것은 계수와 일관성(consistency)에 관한 명제가 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 여기 나오는 행 관점(평면들이 만나는 모습)과 열 관점(벡터들의 일차결합)으로부터 이 모든 내용을 쌓아 올린다.

풀이

STEP II 1989, 문제 11

역학 • 연결된 입자와 충격량

> **STEP II 1989, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q11

핵심 아이디어

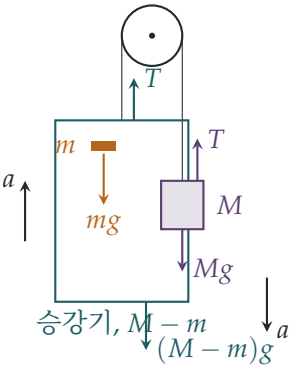
처음에 승강기(lift)와 평형추(counterweight)가 균형을 이루고 있으므로, 승강기의 질량 M에는 타일이 포함되어 있어야 한다. 타일이 떨어져 나가면 승강기는 평형추보다 가벼워져 **위쪽으로** 가속하고, 타일은 자유낙하(free fall)한다. 따라서 바닥이 올라와 타일을 맞이하게 된다. 충돌을 다룰 때에는 승강기, 케이블, 평형추를 케이블을 따라 움직이는 하나의 계로 본다. 이 계의 "케이블 방향 운동량(momentum)"은 중력에 의해서만 변하며, 충돌에서 생기는 충격량(impulse)은 이 계의 내부에서 주고받는 것이다.

풀이

모형 세우기

승강기, 평형추, 타일을 질점으로 보고, 케이블은 매끄럽고 가벼운 도르래에 걸린 가볍고 늘어나지 않는 줄로 본다. 안내 레일은 매끄러우므로 연직 방향의 힘을 주지 않는다. 타일이 떨어지기 전에 계는 양쪽에 질량 M과 M이 걸린 채 정지해 있다. 따라서 승강기의 질량 M에는 타일이 포함된다. (그렇지 않다면 승강기 쪽의 무게는 $(M+m)g$, 반대쪽은 Mg가 되어 정지해 있을 수 없다.)

타일이 떨어져 나간 뒤 승강기의 질량은 $M-m$, 평형추의 질량은 M이고, 타일은 자유로운 질점이다.



바닥에 닿을 때까지 걸리는 시간

승강기가 위쪽으로 가속도 a로 움직인다고 하자. 그러면 평형추는 아래쪽으로 가속도 a로 움직인다. 케이블의 장력(tension)을 T라 하자. 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙에 의해

$$\begin{aligned} \text{승강기 (위쪽):} \quad & T-(M-m)g=(M-m)a, \\ \text{평형추 (아래쪽):} \quad & Mg-T=Ma. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 T가 소거되어

$$a=\frac{mg}{2M-m}, \qquad T=M(g-a)=\frac{2M(M-m)g}{2M-m}>0,$$

이므로 케이블은 팽팽한 상태를 유지한다.

생각해 보기 왜 그냥 타일이 중력을 받아 거리 h만큼 떨어진다고 할 수 없을까?

바닥도 움직이고 있기 때문이다. 타일은 아래로 가속도 g로, 바닥은 위로 가속도 a로 움직이며, 둘 다 정지 상태에서 출발한다. 따라서 둘 사이의 간격은 일정한 상대 가속도(relative acceleration)

$$g+a=g+\frac{mg}{2M-m}=\frac{2Mg}{2M-m}.$$

로 줄어든다. 처음 간격은 h이므로, 타일은 $\frac{1}{2}(g+a)t^2=h$일 때 바닥에 닿고, 이로부터

$$t^2=\frac{2h}{g+a}=\frac{(2M-m)h}{Mg}, \qquad t=\sqrt{\frac{(2M-m)h}{Mg}}.$$

을 얻는다. 이것은 문제에 인쇄된 식과 **다르다**. 인쇄된 식에는 $2M-m$ 대신 $2(M-m)$이 들어 있다. 두 식은 $m=0$일 때만 일치하며, 우리가 구한 값은 아래에서 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하여 확인한다. 인쇄된 식이 나오려면 승강기의 가속도가 $mg/(M-m)$이어야 한다. 이는 평형추도 함께 가속되어야 한다는 사실을 잊고 장력이 Mg로 유지된다고 볼 때 나오는 값이다. 인쇄된 식은 원래 문제의 오식이나 실수라고 생각한다. 문제의 나머지 부분은 이 식에 의존하지 않는다.

충돌

충돌 직전에 승강기는 위로, 평형추는 아래로 둘 다 속력 $u = at$로 움직인다. 타일은 아래로 속력 $v = gt$로 움직인다. 그러면

$$(2M - m)u = (2M - m) \cdot \frac{mg}{2M - m}\, t = mgt = mv.$$

이제 충돌을 살펴보자. 케이블이 둘을 함께 움직이는 방향, 즉 승강기는 위쪽 / 평형추는 아래쪽을 "양의 방향"으로 잡는다. 충돌 시간은 매우 짧으므로 유한한 힘(무게)이 주는 충격량은 무시할 수 있다. 충격량은 승강기와 타일 내부에서 주고받는 타일–바닥 사이의 충격량과, 케이블에 생기는 충격 장력 J뿐이다. 충돌 후의 공통 속력을 w라 하자(질량 M인 승강기와 타일은 위쪽, 평형추는 아래쪽). 충돌은 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이므로 타일은 결국 바닥과 함께 움직인다. 그러면

$$\begin{aligned} \text{승강기와 타일:} \quad & Mw - \big[(M - m)u - mv\big] = J, \\ \text{평형추:} \quad & Mw - Mu = -J. \end{aligned}$$

두 식을 더하면

$$2Mw = (M - m)u + Mu - mv = (2M - m)u - mv = 0,$$

이므로 $w = 0$이다. 즉 승강기는 정지하게 된다. (또한 $J = Mu > 0$이므로 케이블은 느슨해지는 것이 아니라 실제로 팽팽하게 당겨지며, 이는 우리의 가정과 맞는다.) 충돌 후 질량은 다시 M과 M이 되어 균형을 이루므로 모든 것이 정지한 채로 있다.

? 생각해 보기 충돌 직전의 전체 "케이블 방향 운동량"은 왜 0일까?

충돌 전에 세 물체에 작용하는 외력 가운데 운동 방향으로 작용하는 것은 중력뿐이며, 앞에서 정한 양의 방향으로 그 합은 $Mg - (M - m)g - mg = 0$이다. (도르래의 반작용은 일을 하지 않고, 케이블은 계 내부에 있다.) 따라서 이 운동량은 내내 처음 값인 0을 유지한다. 충돌 역시 이를 바꿀 수 없다.

잃어버린 에너지

계는 정지 상태에서 시작하여 정지 상태로 끝나므로, 잃어버린 역학적 에너지는 처음과 끝 사이의 중력 위치 에너지(potential energy) 감소량과 같다. 낙하하는 동안 승강기가 s_1만큼 올라가고(따라서 평형추는 s_1만큼 내려가고) 타일이 s_2만큼 떨어진다고 하자. 타일이 간격 h를 메우므로 $s_1 + s_2 = h$이다. 위치 에너지의 변화량은

$$(M - m)g\, s_1 - Mg\, s_1 - mg\, s_2 = -mg(s_1 + s_2) = -mgh.$$

이다. 충돌 후에는 아무것도 움직이지 않으므로, 잃어버린 에너지는 요구된 대로 mgh이다. 충돌 직전에 있던 운동 에너지는 충돌에서 모두 사라진다. 이 논증은 t의 값을 전혀 사용하지 않는다는 점에 주목하자.

검산

- $m \to 0$이면 $a \to 0$이고 $t \to \sqrt{2h/g}$인데, 이는 정지한 바닥으로의 자유낙하이다. 두 식 모두 이 검사를 통과하므로, 이것으로는 둘을 구별할 수 없다.
- $M = 5, m = 1, h = 1, g = 9.8$로 두고 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하면 $t \approx 0.4286\,\text{s}$를 얻으며, 이는 $\sqrt{9/49} \approx 0.4286$과 일치한다. 인쇄된 식은 $\sqrt{8/49} \approx 0.404\,\text{s}$를 준다.
- 같은 시뮬레이션에서 충돌 직전의 운동 에너지는 유효숫자 다섯 자리까지 mgh와 같고, 충돌 후의 속력은 반올림 오차 범위에서 0이다.

흔한 실수

- 승강기의 질량을 M에 타일을 **더한** 것으로 보는 것: 그러면 계가 정지 상태에서 출발할 수 없다.
- 평형추의 관성을 잊어 승강기의 가속도를 $mg/(M-m)$으로 구하는 것.
- 충돌에서 승강기와 타일만으로 선운동량 보존을 적용하는 것: 이는 케이블의 충격 장력을 무시한 것이다.

STEP 너머

여기서 사용한 "케이블 방향 운동량"은 **일반화 운동량**(generalised momentum)이다. 자유도(degree of freedom)가 하나인 계에서 좌표는 도르래를 지나간 케이블의 길이이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 이를 체계적으로 다룬다. 힘이 알짜 효과를 주지 않는 좌표마다 보존되는 일반화 운동량이 하나씩 대응하며, 충격적인 구속 조건(constraint)도 같은 방식으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 줄과 도르래로 연결된 계, 그리고 충돌에서의 충격량과 에너지를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1989, 문제 12

역학 • 강체의 평형

> **STEP II 1989, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q12

핵심 아이디어

얇은 판(lamina)에 작용하는 힘은 무게와 두 못의 반작용력, 이렇게 세 가지뿐이다. 매끄러운(smooth) 못은 닿아 있는 변에 수직으로 밀고, 직사각형에서는 이것이 곧 각 반작용력이 **다른 변과 평행하다**는 뜻이다. 평행하지 않은 세 힘에 의해 평형(equilibrium)을 이루는 물체에서는 세 힘의 작용선(line of action)이 한 점에서 만나야 한다. 따라서 두 반작용력이 교차하는 점은 중심을 지나는 연직선 위에 있어야 한다. 두 결과 모두 이 한 가지 사실과 못들의 높이가 같다는 조건으로부터 나온다.

풀이

설정하기

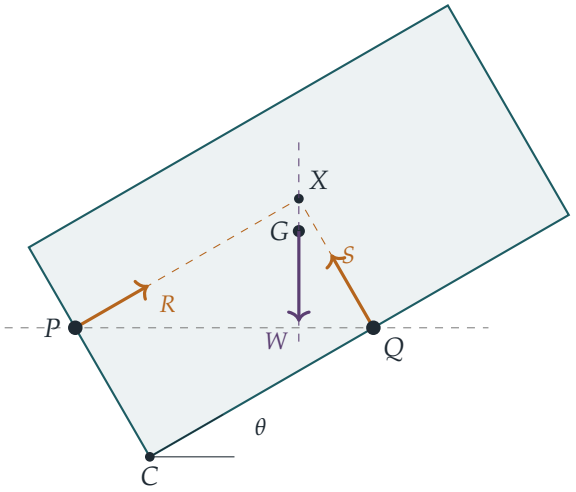
얇은 판을 무게가 W이고 중심이 G인 균일한 강체(rigid body) 직사각형으로, 못을 같은 높이에 있는 매끄러운 점 P와 Q로 모형화한다. 가장 낮은 꼭짓점을 C라 하자. C를 지나는 길이 $2a$인 변이 P 위에 놓이고 $CP = p$이며, C를 지나는 길이 $2b$인 변이 Q 위에 놓이고 $CQ = q$이다. 길이 $2b$인 변은 수평과 예각 θ를 이루므로, (그 변에 수직인) 길이 $2a$인 변은 연직과 각 θ를 이룬다.

변을 따르는 좌표를 쓰는 것이 가장 쉽다. C에서부터 길이 $2b$인 변을 따라 u를, 길이 $2a$인 변을 따라 v를 잰다. 그러면

$$C = (0,0), \qquad P = (0,p), \qquad Q = (q,0), \qquad G = (b,a).$$

점 (u,v)의 C로부터의 수평 변위와 연직 변위는 다음과 같다.

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \qquad y = u\sin\theta + v\cos\theta.$$



반작용력은 G를 지나는 연직선 위에서 만난다

P에서의 반작용력 R은 길이 $2a$인 변에 수직이므로 길이 $2b$인 변과 평행하다. 즉 그 작용선은 $v = p$이다. 마찬가지로 Q에서의 반작용력 S는 $u = q$를 따라 작용한다. 이 두 직선은 직사각형 $CPXQ$의 네 번째 꼭짓점 $X = (q, p)$에서 만난다.

X에 대한 모멘트(moment)를 취하면 두 반작용력의 모멘트는 0이므로, 무게의 모멘트도 0이어야 한다. 즉 G를 지나는 연직선은 X를 지난다. 다시 말해 X와 G의 수평 좌표가 같다.

$$q\cos\theta - p\sin\theta = b\cos\theta - a\sin\theta, \qquad \text{즉} \qquad (q-b)\cos\theta = (p-a)\sin\theta. \qquad (1)$$

(힘을 분해하면 $R = W\sin\theta$, $S = W\cos\theta$로 둘 다 양수이므로, 못이 실제로 이 힘들을 제공할 수 있다.)

첫 번째 결과

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta$와 $\sin\theta$는 모두 양수이고, 따라서 (1)에 의해 $q - b$와 $p - a$의 부호는 같다. $p < a$이면 (1)의 우변이 음수이므로 $q - b < 0$, 즉 $q < b$이다. 이것이 구하는 결과이다. 꼭짓점이 길이 $2a$인 변 위의 못으로부터 a보다 가까이 있으면, 다른 못으로부터는 b보다 가까이 있다.

? **생각해 보기** 왜 여기서 문제가 끝나지 않을까? d는 어디에 등장하는가?

식 (1)은 모멘트 조건만 사용한다. 아직 d와는 관련이 없고, p와 q는 서로 독립이 아니다. 두 못은 높이가 같고, 서로 d만큼 떨어져 있다. 이제 이 두 사실을 이용한다.

d와의 관계

두 못은 같은 높이에 있으므로 P와 Q의 y좌표가 같다.

$$p\cos\theta = q\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad p = q\tan\theta. \tag{2}$$

두 못의 수평 거리는 d이다.

$$d = x_Q - x_P = q\cos\theta + p\sin\theta = q\cos\theta + \frac{q\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{q}{\cos\theta}. \tag{3}$$

(같은 말로, 삼각형 CPQ는 C에서 직각이고 빗변 $PQ = d$가 수평이므로 $q = d\cos\theta$, $p = d\sin\theta$이다.)

이제 $q = d\cos\theta$와 $p = d\sin\theta$를 (1)의 첫 번째 형태의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} b\cos\theta - a\sin\theta &= q\cos\theta - p\sin\theta \\ &= d\cos^2\theta - d\sin^2\theta \\ &= d\cos 2\theta, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 정사각형인 경우 $a = b, \theta = \frac{\pi}{4}$: 양변이 모두 0이다. 대칭성에 의해 대각선 CG가 연직이므로 이는 모순이 없고, 정사각형이 대칭적으로 놓여 있을 때 그래야 하듯이 모든 d에 대해 성립한다.
- $a = 1, b = 2, \theta = \frac{\pi}{6}$일 때, 평형이 되려면 $q = d\cos\theta$이고 $d = (b\cos\theta - a\sin\theta)/\cos 2\theta \approx 2.4641$이어야 한다. 이로부터 $p \approx 1.2321 > a, q \approx 2.1340 > b$를 얻으며, 이는 (1)과 일치한다. $R = W\sin\theta, S = W\cos\theta$로 G에 대한 모멘트를 취하면 0이 된다.
- 수치적으로, 10^5개가 넘는 무작위 평형 상태(못이 변 위에 있도록 무작위로 고른 a, b, θ)가 모두 10^{-14} 이내의 오차로 항등식을 만족하며, "$p < a \Rightarrow q < b$"를 어기는 경우는 한 번도 없다.

흔한 실수

- 못에서의 반작용력을 연직 방향으로 잡는 것. 매끄러운 접촉면은 지면에 수직인 방향이 아니라 **접촉면**(여기서는 얇은 판의 변)에 수직인 방향으로 민다.
- 어느 변이 수평과 각 θ를 이루는지 혼동하는 것. 길이 $2a$인 변은 **연직**과 각 θ를 이룬다.

STEP 너머

세 힘의 원리는 강체 정역학(statics)의 일반 이론의 특수한 경우이다. 힘의 계는 합력과 임의의 한 점에 대한 합모멘트가 모두 0일 때, 그리고 그때에만 평형을 이룬다. 대학에서는 이것이 렌치(wrench)와 가상일(virtual work)의 언어가 된다. 가상일 접근법에서는 얇은 판이 못과의 접촉을 유지한다는 조건 아래 G의 높이를 최소화하여 이 평형을 찾는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 토크(torque)를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1989, 문제 13

역학 • 관성 모멘트

> **STEP II 1989, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.7 절 **막대 속의 심프슨 공식**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/simpsons-rod.html

핵심 아이디어

모든 것은 관성 모멘트(moment of inertia)에 관한 두 가지 사실에 기대고 있다. 평행축 정리(parallel axis theorem)에 따르면, 임의의 축에 대한 관성 모멘트는 질량, 질량 중심(centre of mass), 그리고 질량 중심을 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트로 정해진다. 또 관성 모멘트는 **가법적**(*additive*)이므로, 물체를 여러 조각으로 자르고 각 조각을 동등한 다른 것으로 바꾸어 놓을 수 있다. 얇은 판(lamina)은 가는 막대(rod)들을 쌓아 놓은 것이므로, 막대 하나를 바꾸는 방법을 알면 판 전체를 바꿀 수 있다.

풀이

모든 축에 대한 동등성

ℓ을 임의의 축이라 하고, ℓ_O를 O를 지나며 ℓ에 평행하고 ℓ로부터 거리 d만큼 떨어진 축이라 하자. 물체와 입자계는 둘 다 질량이 m이고 질량 중심이 O이므로, 각각에 평행축 정리를 적용할 수 있다.

$$I_\ell^{\text{물체}} = I_{\ell_O}^{\text{물체}} + md^2, \qquad I_\ell^{\text{입자}} = I_{\ell_O}^{\text{입자}} + md^2.$$

ℓ_O는 O를 지나므로 가정에 의해 $I_{\ell_O}^{\text{물체}} = I_{\ell_O}^{\text{입자}}$이다. 따라서 두 우변은 같고, 모든 축 ℓ에 대해 $I_\ell^{\text{물체}} = I_\ell^{\text{입자}}$이다. 이것이 보이려던 것이다.

균일한 막대

막대를 x축 위에 $x = -a$부터 $x = a$까지 놓으면, 질량 중심 O는 원점이다. 질량이 p, q, r인 입자를 각각 $x = -a, 0, a$에 놓는다. 전체 질량이 m이고 질량 중심이 O이려면

$$p + q + r = m, \qquad -pa + ra = 0,$$

이어야 하므로 $r = p$이고 $q = m - 2p$이다.

이제 O를 지나고 막대와 각 θ를 이루는 임의의 축을 생각하자. 막대 위의 위치 x에 있는 점은 이 축으로부터 거리 $|x| \sin\theta$만큼 떨어져 있다. 따라서 O를 지나는 축에 대한 관성 모멘트는 모두 $\sum$(질량) x^2의 $\sin^2\theta$배이고, 이 합 하나만 일치시키면 된다. 각 미소 부분의 질량이 $\frac{m}{2a}\,\mathrm{d}x$인 막대에 대해서는

$$\int_{-a}^{a} \frac{m}{2a} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{m}{2a} \cdot \frac{2a^3}{3} = \tfrac{1}{3}ma^2,$$

이고, 입자들에 대해서는 $pa^2 + q \cdot 0 + pa^2 = 2pa^2$이다. $p = \frac{1}{6}m$이면 모든 θ에 대해 이 둘이 일치한다. 따라서 막대는 다음 입자계와 동역학적으로 동등(dynamically equivalent)하다.

$$\tfrac{1}{6}m \text{ (양 끝에 각각)}, \qquad \tfrac{2}{3}m \text{ (중점에)}.$$

첫 번째 부분에 의해, 이제 둘은 O를 지나는 축뿐 아니라 **임의의** 축에 대해 같은 관성 모멘트를 가진다.

직사각형 판

직사각형의 중심을 O라 하고, 변의 길이를 $2a$(x축에 평행)와 $2b$라 하면, 단위 넓이당 질량은 $M/(4ab)$이다. 이 판을 x축에 평행한 가는 띠로 자른다. 높이 y에 있는 폭 δy의 띠는 길이가 $2a$이고 질량이 $\delta M = \frac{M}{2b}\,\delta y$인 균일한 막대이다.

> **생각해 보기** 띠의 중심은 O에 있지 않다. 그런데도 각 띠를 세 입자로 바꾸어 놓아도 되는 이유는 무엇인가?

첫 번째 부분이 바로 이것을 위한 것이다. 각 띠는 띠 자신의 중심을 지나는 축뿐 아니라 **모든** 축에 대해 세 입자와 같은 관성 모멘트를 가진다. 관성 모멘트는 더해지므로, 판은 임의의 축에 대해 대체한 입자 전체의 모임과 같은 관성 모멘트를 가진다. 각 띠를 대체한 입자들은 그 띠와 같은 질량과 같은 질량 중심을 가지므로, 이 입자 전체의 모임 역시 전체 질량이 M이고 질량 중심이 O이다.

높이 y의 띠는 $(\pm a, y)$ 각각에 놓인 $\frac{1}{6}\delta M = \frac{M}{12b}\,\delta y$와 $(0, y)$에 놓인 $\frac{2}{3}\delta M = \frac{M}{3b}\,\delta y$로 바뀐다. y가 $-b$부터 b까지 움직이면 이 입자들은 길이가 $2b$인 균일한 막대 세 개를 채운다.

▶ 두 변 $x = \pm a$를 따라 하나씩 있는 막대로, 각각의 질량은 $\frac{M}{12b} \cdot 2b = \frac{1}{6}M$이다.

- 중심선 $x = 0$을 따라 있는 막대로, 질량은 $\frac{M}{3b} \cdot 2b = \frac{2}{3}M$이다.

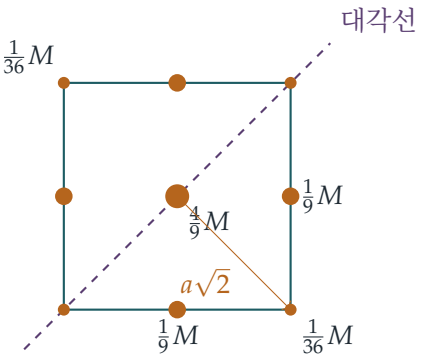
이제 같은 가법성 논리로 각 막대에 막대에 대한 결과를 적용한다.

- 각 변의 막대($\frac{1}{6}M$)는 꼭짓점인 양 끝에 각각 $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}M = \frac{1}{36}M$, 그리고 길이 $2b$인 변의 중점인 막대의 중점에 $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}M = \frac{1}{9}M$이 된다.
- 가운데 막대($\frac{2}{3}M$)는 길이 $2a$인 변의 중점인 양 끝에 각각 $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}M = \frac{1}{9}M$, 그리고 중심에 $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}M = \frac{4}{9}M$이 된다.

따라서 각 꼭짓점에 $\frac{1}{36}M$, 각 변의 중점에 $\frac{1}{9}M$, 중심에 $\frac{4}{9}M$이 놓인다. 합은 $\frac{4}{36}M + \frac{4}{9}M + \frac{4}{9}M = M$이고, 대칭성에 의해 질량 중심은 O이다. 이것이 구하려던 동등한 입자계이다.

대각선에 대한 정사각형

한 변의 길이가 $2a$인 정사각형의 꼭짓점을 $(\pm a, \pm a)$에 두고, 대각선 $y = x$를 택한다. 점 (x_0, y_0)와 이 직선 사이의 거리는 $|x_0 - y_0|/\sqrt{2}$이다.



- 꼭짓점 (a, a), $(-a, -a)$와 중심은 대각선 위에 있으므로 기여하지 않는다.
- 꼭짓점 $(a, -a)$, $(-a, a)$는 거리 $2a/\sqrt{2} = a\sqrt{2}$에 있다.
- 각 중점 $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$는 거리 $a/\sqrt{2}$에 있다.

따라서

$$I_{\text{대각선}} = 2 \cdot \tfrac{1}{36}M \cdot 2a^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{9}M \cdot \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{1}{9}Ma^2 + \tfrac{2}{9}Ma^2 = \tfrac{1}{3}Ma^2.$$

균일하지 않은 막대

막대의 길이를 $2a$라 하고, x축 위에 $x = 0$부터 $x = 2a$까지 놓으며, 선밀도(line density)를 kx라 하자. 그러면

$$m = \int_0^{2a} kx \, \mathrm{d}x = 2ka^2, \qquad \text{따라서} \qquad k = \frac{m}{2a^2}.$$

질량 중심은

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^{2a} kx^2\,\mathrm{d}x = \frac{k}{m}\cdot\frac{8a^3}{3} = \frac{4a}{3},$$

에 있고,

$$\int_0^{2a} kx^3\,\mathrm{d}x = \frac{k\,(2a)^4}{4} = 4ka^4 = 2ma^2.$$

이다. 균일한 막대와 마찬가지로 모든 점이 한 직선 위에 있으므로, 질량 중심을 지나고 막대와 각 θ를 이루는 축에 대한 관성 모멘트는 $\sin^2\theta\sum(\text{질량})(x-\bar{x})^2$이다. 질량과 질량 중심이 일치하면 $\sum(\text{질량})(x-\bar{x})^2 = \sum(\text{질량})x^2 - m\bar{x}^2$이므로, 끝점 $x=0$을 지나는 수직인 축에 대한 관성 모멘트인 $\sum(\text{질량})\,x^2$만 일치시키면 충분하다.

입자를 $x=0$에 p_0, $x=a$에 p_1, $x=2a$에 p_2라 하자. 질량, 1차 모멘트, 2차 모멘트를 일치시키면 다음 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 &= m,\\ p_1 a + 2p_2 a &= \tfrac{4}{3}ma,\\ p_1 a^2 + 4p_2 a^2 &= 2ma^2. \end{aligned}$$

세 번째 식(a^2으로 나눈 것)에서 두 번째 식(a로 나눈 것)을 빼면 $2p_2 = \frac{2}{3}m$이므로 $p_2 = \frac{1}{3}m$이다. 그러면 $p_1 = \frac{4}{3}m - \frac{2}{3}m = \frac{2}{3}m$이고, 마지막으로 $p_0 = m - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3}m = 0$이다.

가벼운 끝의 입자는 질량이 0이므로 입자 두 개만 있으면 된다. 중점에 $\frac{2}{3}m$, 무거운 끝에 $\frac{1}{3}m$이다.

검산

- 한 변의 길이가 $2a$인 정사각형 판에 대해, 판의 평면 위에 있고 중심을 지나며 한 변에 평행한 축에 대한 관성 모멘트는 잘 알려진 대로 $\frac{1}{3}Ma^2$이다. 수직축 정리(perpendicular axis theorem)와 대칭성에 의해 중심을 지나는 평면 위의 모든 축에 대해 같은 값이 나오므로, 대각선에 대해서도 그래야 한다. 결과와 일치한다.
- 균일하지 않은 막대에 대해, 두 입자는 질량 m, 1차 모멘트 $\frac{2}{3}m\cdot a + \frac{1}{3}m\cdot 2a = \frac{4}{3}ma$(따라서 질량 중심은 $\frac{4}{3}a$), 2차 모멘트 $\frac{2}{3}ma^2 + \frac{4}{3}ma^2 = 2ma^2$을 주며, 모두 요구한 대로이다.
- 수치적으로, 촘촘한 격자의 점질량으로 각 물체를 나타내고 (중심을 지나지 않는) 공간 속의 무작위 축 100–200개에 대해 입자계와 비교하였다. 막대와 밀도가 변하는 막대는 10^{-7}보다 작은 오차로 일치했고, 직사각형은 4×10^{-5} 이내(격자 오차)로 일치했으며, 대각선에 대한 정사각형은 $M=a=1$일 때 0.33332를 주었다.

흔한 실수

- 그래도 되는 이유를 말하지 않고 각 띠를 세 입자로 바꾸는 것. 띠의 중심은 O에 있지 않으므로 첫 번째 부분의 "임의의 축" 결과가 필요하다.
- 마지막 부분에서 질량과 질량 중심 조건만 거는 것. 방정식 두 개로는 질량 세 개를 정할 수 없다. $p_0 = 0$을 강제하는 것은 관성 모멘트 조건이다.

STEP 너머

공간에서 움직이는 강체에서 동역학적으로 중요한 것은 질량, 질량 중심, 그리고 **관성 텐서**(*inertia tensor*)이다. 관성 텐서는 질량 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트를 알려 주는 3×3 대칭 행렬이다. 이것들이 같은 두 물체는 같은 힘을 받으면 똑같이 움직이며, 그래서 "동역학적으로 동등하다"는 이름이 잘 어울린다. 분포의 처음 몇 개의 모멘트를 몇 개의 점질량으로 일치시키는 것은 수치 적분(numerical integration)의 바탕이 되는 아이디어이기도 하다. 균일한 막대에 대한 가중치 $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$은 정확히 심프슨 공식(Simpson's rule)이며, 가중치뿐 아니라 위치까지 고르면 가우스 구적법(Gaussian quadrature)에 이른다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 관성 텐서와 강체 운동을 전개한다.

풀이

STEP II 1989, 문제 14

역학 • 원운동

STEP II 1989, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

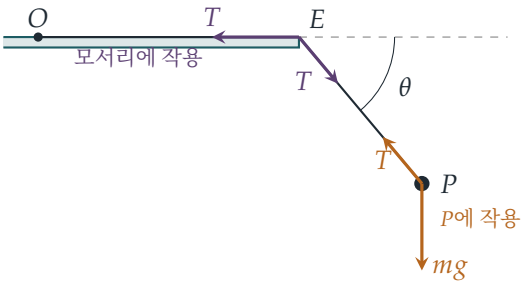
step.maths.org/questions/89-s2-q14

핵심 아이디어

입자를 놓은 뒤에도 탁자 위에 놓인 실 부분은 움직이지 않는다. 이 부분은 고정된 끝과 모서리 사이에서 팽팽하게 당겨져 있기 때문이다. 따라서 모서리는 고정된 회전축 역할을 하고, 입자는 그 점을 중심으로 반지름 a인 원 위를 움직인다. 이는 수평 위치에서 놓은 단진자(simple pendulum)와 똑같다. 에너지로 속력을 구하고, 지름 방향의 운동 방정식(equation of motion)으로 장력(tension)을 구한다. 모서리는 매끄러우므로 모서리 양쪽의 장력은 같고, 모서리가 받는 힘은 두 실 조각을 따라 당기는 크기가 같은 두 장력의 벡터(vector) 합이다.

풀이

모형. 실은 가볍고 늘어나지 않으며, 탁자 윗면은 매끄럽고 얇고, 입자는 질점이다. 실의 고정된 끝을 O, 실이 모서리를 지나는 점을 E라 하면 $OE = l - a$이고 매달린 부분 EP의 길이는 a이다. 매달린 부분이 수평(탁자에서 멀어지는 쪽을 가리키는 처음 방향) 아래로 돌아간 각을 θ라 하자.



O는 고정되어 있고 실은 팽팽한 상태를 유지하므로(아래에서 $T > 0$임을 확인한다) 부분 OE는 탁자 위에 정지한 채로 있다. 따라서 P는 중심이 E이고 반지름이 a인 원 위를 움직인다.

속력. 탁자는 매끄럽고 장력은 항상 P의 운동 방향에 수직이므로 어느 쪽도 일을 하지 않으며, 역학적 에너지가 보존된다(conservation of mechanical energy). 실이 θ만큼 돌아갔을 때 P는 높이 $a\sin\theta$만큼 내려왔으므로, 정지 상태에서 출발한 것을 이용하면

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad v^2 = 2ga\sin\theta.$$

장력. PE를 따라 중심 E 쪽으로 힘을 분해하자. 장력은 PE를 따라 작용하고, 무게의 PE 방향 성분은 E에서 **멀어지는** 방향으로 $mg\sin\theta$이다($0 < \theta < \pi$에서 P는 E보다 아래에 있다). 따라서

$$T - mg\sin\theta = \frac{mv^2}{a} = 2mg\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad \boxed{T = 3mg\sin\theta.}$$

이 값은 $0 < \theta < \pi$에서 양수이므로 실은 운동 내내 팽팽하다. $\theta = \pi$에서는 $v = 0$이다. 즉 입자는 E와 같은 높이인 탁자 아랫면에 겨우 닿은 뒤 되돌아온다. 따라서 운동은 $0 \le \theta \le \pi$에서 일어난다.

모서리가 받는 힘. 모서리는 매끄러우므로 모서리 양쪽의 장력은 모두 T이다. 실은 크기가 T인 두 힘으로 모서리를 누른다. 하나는 EO를 따라 고정된 끝 쪽으로 향하는 수평 방향의 힘이고, 다른 하나는 EP를 따르는 힘이다. 탁자에서 멀어지는 수평 방향을 x, 연직 위쪽을 y로 잡자. EO와 EP 방향의 단위벡터는 $(-1, 0)$과 $(\cos\theta, -\sin\theta)$이므로 모서리가 받는 힘은

$$\mathbf{F} = T\,(\cos\theta - 1,\ -\sin\theta).$$

그 크기는

$$|\mathbf{F}| = T\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = T\sqrt{2 - 2\cos\theta} = 2T\sin\tfrac{\theta}{2}$$

이다. 여기서 $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$와 $0 \le \theta \le \pi$에서 $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$임을 이용했다. (기하적으로 보면, 사이각이 $\pi - \theta$인 크기 T의 두 힘을 더하면 $2T\cos\frac{\pi-\theta}{2}$가 되어 같은 결과이다.) T와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 대입하면

$$|\mathbf{F}| = 6mg\sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2} = 12mg\,s^2\sqrt{1-s^2}, \qquad \text{여기서} s = \sin\tfrac{\theta}{2} \in [0, 1].$$

생각해 보기 $s^2\sqrt{1-s^2}$를 어떻게 깔끔하게 최대화할 수 있을까?

이 값은 음이 아니므로 그 제곱 $h(u) = u^2(1-u)$를 $u = s^2 \in [0,1]$에서 최대화하면 충분하다. 그러면 $h'(u) = 2u - 3u^2 = u(2-3u)$이고, 이는 $0 < u < \frac{2}{3}$에서 양수, $\frac{2}{3} < u \leq 1$에서 음수이다. 따라서 h는 $[0,1]$에서 $u = \frac{2}{3}$일 때 최댓값 $h = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$을 가진다. 그러므로 $s^2\sqrt{1-s^2}$의 최댓값은 $\sqrt{4/27} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$이고,

$$|\mathbf{F}|_{\max} = 12mg \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8mg}{\sqrt{3}},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 최대는 $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3}$, 즉 $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{3}$일 때, 곧 $\theta \approx 109.5°$일 때 일어난다. 이때 입자는 이미 모서리 아래를 지나 탁자 밑으로 흔들려 들어가고 있다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$(실이 연직)에서 속력은 $\sqrt{2ga}$이고 $T = 3mg$인데, 이는 수평 위치에서 놓은 진자에 대해 잘 알려진 결과이다. 이때 모서리가 받는 힘은 $T\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,mg \approx 4.24mg$로, $8mg/\sqrt{3} \approx 4.62mg$보다 조금 작다. 이는 최댓값이 연직 위치를 지난 곳에 있다는 사실과 일치한다.
- $\theta = 0$과 $\theta = \pi$에서 입자는 모서리와 같은 높이에서 순간적으로 정지하므로 $T = 0$이고, 공식이 말해 주듯 모서리는 아무 힘도 받지 않는다.
- 운동 방정식 $\ddot{\theta} = (g/a)\cos\theta$를 수치적으로 적분해 보았다. 지름 방향 방정식에서 얻은 T는 10^{-12} 이내로 $3mg\sin\theta$와 일치했고, 모서리가 받는 가장 큰 힘은 $\theta \approx 1.9106$(즉 $\arccos(-\frac{1}{3})$)에서 $4.6188\,mg$로 나와 $8/\sqrt{3}$과 일치했다.

흔한 실수

- 모서리가 받는 힘을 단순히 T로, 또는 매달린 실이 당기는 힘의 연직 성분만으로 잡는 것. 탁자 위의 실도 모서리를 수평 방향으로 당기므로, 두 힘을 벡터로 더해야 한다.
- 최대화를 $\theta \leq \frac{\pi}{2}$에서 멈추는 것. 입자는 탁자 밑으로 계속 움직이며, 최댓값은 그 이후 단계에 있다.

STEP 너머

여기서 장력은 **구속력**(constraint force)이다. 구속력은 일을 하지 않으며, 입자를 원 위에 붙잡아 두는 데 필요한 만큼의 크기를 가진다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 이런 힘이 운동 방정식에서 완전히 사라지고, 나중에 (우리가 지름 방향 방정식으로 했듯이) 다시 구하거나 라그랑주 승수(Lagrange multipliers)를 사용해 구한다. Kleppner와

Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원운동, 구속 조건, 에너지 방법을 이 수준에서 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1989, 문제 15

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP II 1989, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q15

핵심 아이디어

"둘레(perimeter) 위에서 임의로" 고른 점은 길이에 대하여 균등(uniform)하게 분포하므로, 모든 계산은 전체 길이 $\pi + 2$에서 출발한다. 삼각형은 언제나 중심 O를 한 꼭짓점으로 가지므로, 그 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin C$이다. 여기서 a와 b는 O로부터의 거리이고 C는 O에서의 각이다. 그러면 각 조건부 경우는 간단한 기댓값(expectation) 계산으로 귀결되고, 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)이 이들을 하나로 이어 준다.

풀이

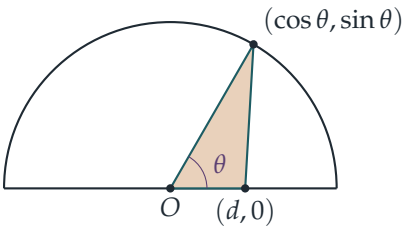
O를 원점에 두고, 지름(diameter)은 x축을 따라 $(-1,0)$에서 $(1,0)$까지 놓으며, 호(arc)는 $y \geq 0$ 영역에 놓는다. 둘레의 길이는 $2 + \pi$이다. 지름이 2, 호가 π를 차지한다. 각 점은 둘레를 따라 균등하게 분포하므로

$$\mathrm{P}(\text{점이 지름 위에 있다}) = \frac{2}{\pi + 2}, \qquad \mathrm{P}(\text{점이 호 위에 있다}) = \frac{\pi}{\pi + 2}.$$

점이 호 위에 있다는 조건 아래에서 그 점은 $(\cos\theta, \sin\theta)$이고, θ는 $[0, \pi]$에서 균등하게 분포한다. 점이 지름 위에 있다는 조건 아래에서 그 점은 $(d, 0)$이고, d는 $[-1, 1]$에서 균등하게 분포한다.

두 점은 서로 독립(independent)이며, "정확히 한 점이 지름 위에 있다"는 사건은 첫 번째 점이 지름 위에 있는 경우와 두 번째 점이 지름 위에 있는 경우 모두로 일어날 수 있으므로

$$\mathrm{P}(\text{정확히 한 점이 지름 위에 있다}) = 2 \cdot \frac{2}{\pi + 2} \cdot \frac{\pi}{\pi + 2} = \frac{4\pi}{(\pi + 2)^2}.$$



소문항 (i)

한 점을 지름 위의 $(d,0)$, 다른 점을 호 위의 $(\cos\theta,\sin\theta)$라 하자. O에서 나가는 두 변의 길이는 $|d|$와 1이고, 그 사이의 각은 θ이다($d<0$이면 그 각은 $\pi-\theta$인데, 사인값은 같다). 따라서

$$A=\tfrac{1}{2}\,|d|\sin\theta.$$

이 경우라는 조건 아래에서 d와 θ는 독립이므로, 곱의 기댓값은 기댓값의 곱이다. d가 $[-1,1]$에서 균등하게 분포하므로 $|d|$는 $[0,1]$에서 균등하게 분포하고 $\mathrm{E}|d|=\frac{1}{2}$이다. 또한

$$\mathrm{E}(\sin\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}.$$

그러므로

$$\mathrm{E}(A\mid \text{정확히 한 점이 지름 위에 있다})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2\pi}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

이제 두 점이 모두 호 위에 있고, 각각의 각은 θ_1과 θ_2로서 서로 독립이며 $[0,\pi]$에서 균등하게 분포한다. 두 점 모두 O로부터 거리가 1이고, O에서 두 점 사이의 각은 $X=|\theta_1-\theta_2|$이며 이는 $[0,\pi]$에 속한다. 따라서

$$A=\tfrac{1}{2}\sin X.$$

? **생각해 보기** 왜 X에 대하여 주어진 확률밀도함수(density)를 쓸 수 있는가?

각 θ는 단위 반원을 따라 잰 호의 길이이므로, 호 위에서 두 점을 균등하게 고르는 것은 길이가 π인 선분 위에서 두 점을 균등하게 고르는 것과 같다. 각 X는 바로 그 두 점 사이의 거리이므로, X는 $[0,\pi]$에서 확률밀도함수 $2(\pi-x)/\pi^2$를 가진다. 따라서

$$\mathrm{E}(\sin X)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

적분을 나누면 $\int_0^{\pi}\pi\sin x\,\mathrm{d}x=2\pi$이고, $u=x$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\int_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=\pi+0=\pi.$$

그러므로 $\int_0^\pi (\pi - x)\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi - \pi = \pi$이고, $\mathrm{E}(\sin X) = \dfrac{2}{\pi}$이며

$$\mathrm{E}(A \mid \text{어느 점도 지름 위에 있지 않다}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

A의 기댓값

세 번째 경우가 있다. 두 점이 모두 지름 위에 있으면 "삼각형"은 퇴화(degenerate)한다(세 점이 모두 x축 위에 있다). 따라서 $A = 0$이다. 어느 점도 지름 위에 있지 않을 확률은 $\left(\frac{\pi}{\pi+2}\right)^2$이다. 전체 기댓값의 법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2}\\ &= \frac{1}{2+\pi}\end{aligned}$$

이고, 이것이 우리가 원하던 결과이다.

검산

- 세 경우의 확률 $\frac{4}{(\pi+2)^2}$, $\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}$, $\frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}$를 더하면 $\frac{(2+\pi)^2}{(\pi+2)^2} = 1$이다.
- 당연히 그래야 하듯이 $\mathrm{E}(A) \le \frac{1}{2}$이다. 이 값은 가능한 가장 큰 넓이(두 반지름이 직각을 이룰 때)이다. 실제로 $\frac{1}{2+\pi} \approx 0.1945$이다.
- 점의 쌍 2×10^6개로 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)을 한 결과 P(정확히 한 점) ≈ 0.4757(정확한 값 0.4754), 조건부 평균 0.1591과 0.3184(정확한 값 $\frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$와 $\frac{1}{\pi} \approx 0.3183$), 그리고 $\mathrm{E}(A) \approx 0.1944$를 얻었다.

흔한 실수

- P(정확히 한 점)에서 인수 2를 빠뜨리는 것. 두 점 중 어느 것이든 지름 위에 있는 점이 될 수 있다.
- "지름 위에 있을" 확률을 $\frac{1}{2}$로 보는 것. 점은 경계의 어느 조각인지가 아니라 길이에 따라 균등하게 고른다.
- 소문항 (ii)에서 반지름 **사이의** 각의 사인 대신 $\sin\theta_1 \sin\theta_2$ 같은 것을 쓰는 것.

STEP 너머

기댓값을 경우들의 분할(partition)에 따라 나누어 $\mathrm{E}(A) = \sum_i \mathrm{E}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$로 쓰는 것이 전체 기댓값의 법칙이며, 대학 1학년 확률론의 핵심 도구 가운데 하나이다. 그 일반형 $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(A \mid Y)\big)$는 분기 과정(branching process)에서 마르코프 연쇄(Markov chain)에 이르기까지 어디에서나 등장한다. 소문항 (ii)에서 인용한 X의 확률밀도함수는 그 자체로 좋은 연습 문제이다. 이는 정사각형 $[0,\pi]^2$ 안의 띠 모양 영역의 넓이에서 나온다. 이와 같은 문제는 기하 확률(geometric probability)에 속한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 조건부 기댓값(conditional expectation)과 결합 확률밀도함수(joint density)를 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP II 1989, 문제 16

확률과 통계 • 이항분포

> **STEP II 1989, 16번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q16

핵심 아이디어

한 묶음(batch)을 서로 다르게 행동하는 두 부분, 곧 표본(sample)에 들어간 n개의 부품과 한 번도 검사받지 않는 나머지 N개로 나눈다. 각 부분의 불량품 개수는 이항분포(binomial distribution)를 따르고, 두 개수는 서로 독립(independent)이다. 모든 것은 표본에 달려 있다. 표본에 불량품이 두 개 이상 있으면 묶음은 결국 완벽한 상태가 되고, 그렇지 않으면 아무것도 바뀌지 않는다. 따라서 마지막에 불량품이 $k \geq 1$개인 묶음은 표본에 불량품이 0개 또는 1개 있었고, 나머지는 다른 N개 가운데 있었어야 한다.

풀이

$q = 1 - p$라 하자. X를 표본 속 불량 부품의 개수, Y를 묶음의 나머지 N개 가운데 불량 부품의 개수라 하자. 각 부품은 독립적으로 확률 p로 불량이므로

$$X \sim \mathrm{B}(n, p), \qquad Y \sim \mathrm{B}(N, p),$$

이고, X와 Y는 서로소인 부품 집합에서 불량품을 세므로 독립이다.

K를 품질 관리 후 묶음 속 불량 부품의 개수라 하자. $X \geq 2$이면 모든 불량이 바로잡혀 $K = 0$이다. $X \leq 1$이면 아무것도 바로잡히지 않아 $K = X + Y$이다. 따라서

$$K = \begin{cases} X + Y, & X \leq 1, \\ 0, & X \geq 2. \end{cases}$$

K의 분포

$1 \le k \le N$이라 하자. $k \ge 1$이므로 사건 $K = k$는 $X \ge 2$인 경우에서 나올 수 없고, 따라서 정확히 $X = 0,\ Y = k$ 또는 $X = 1,\ Y = k-1$일 때 일어난다. 이 두 사건은 서로 배반이고, 독립성에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K=k) &= \mathrm{P}(X=0)\,\mathrm{P}(Y=k) + \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(Y=k-1)\\ &= q^n\binom{N}{k}p^k q^{N-k} + npq^{n-1}\binom{N}{k-1}p^{k-1}q^{N-k+1}\\ &= \left[\binom{N}{k} + n\binom{N}{k-1}\right]p^k q^{N+n-k}.\end{aligned}$$

두 항의 p의 거듭제곱과 q의 거듭제곱이 같다는 점 덕분에 두 항을 하나로 묶을 수 있다. 이제 이항계수(binomial coefficient)를 공통분모 $k!\,(N-k+1)!$로 통분하면

$$\binom{N}{k} = \frac{N!\,(N-k+1)}{k!\,(N-k+1)!}, \qquad n\binom{N}{k-1} = \frac{n\,N!\,k}{k!\,(N-k+1)!}.$$

더하면 분자는 $N!\,(N-k+1+nk) = N!\,[N+1+k(n-1)]$이므로

$$\mathrm{P}(K=k) = \frac{[N+1+k(n-1)]\,N!}{(N-k+1)!\,k!}\,p^k(1-p)^{N+n-k},$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

> **생각해 보기** $k = 0$이면 어떻게 될까?

이 공식은 $k \ge 1$일 때만 성립한다. $k = 0$을 넣으면 $\frac{(N+1)N!}{(N+1)!}q^{N+n} = q^{N+n}$이 되는데, 이는 불량품이 전혀 없을 확률이다. 그러나 $K = 0$은 $X \ge 2$일 때마다 일어나기도 하므로, 실제로는

$$\mathrm{P}(K=0) = q^{N+n} + \mathrm{P}(X \ge 2) = q^{N+n} + 1 - q^n - npq^{n-1}.$$

문제의 "$k \le N$"은 $1 \le k \le N$으로 읽어야 한다.

$k = N+1$인 경우

$K = N+1$이려면 $X \le 1$이고 $X + Y = N+1$이어야 한다. $Y \le N$이므로 $X = 1,\ Y = N$일 수밖에 없고, 따라서

$$\mathrm{P}(K=N+1) = npq^{n-1}\cdot p^N = np^{N+1}q^{n-1}.$$

공식에 $k = N+1$을 넣으면 계수는

$$\frac{[N+1+(N+1)(n-1)]\,N!}{0!\,(N+1)!} = \frac{(N+1)\,n\,N!}{(N+1)!} = n,$$

이고 q의 거듭제곱은 $q^{N+n-(N+1)} = q^{n-1}$이다. 따라서 공식은 $np^{N+1}q^{n-1}$을 주며, 이는 올바르다. ($K \le N+1$이므로 $k \ge N+2$이면 확률은 0이다.)

불량품 개수의 기댓값

$k\,\mathrm{P}(K=k)$를 모두 더해도 되지만, X와 Y로 나타낸 K의 표현을 쓰는 편이 훨씬 빠르다. 사건 $X \le 1$의 지시함수(indicator)를 $\mathbf{1}_{\{X\le 1\}}$로 쓰면

$$K = (X+Y)\,\mathbf{1}_{\{X\le 1\}} = X\,\mathbf{1}_{\{X\le 1\}} + Y\,\mathbf{1}_{\{X\le 1\}}.$$

첫째 항 $X\,\mathbf{1}_{\{X\le 1\}}$은 $X=1$일 때 1이고 그 밖에는 0이므로, 그 기댓값(expectation)은 $\mathrm{P}(X=1) = npq^{n-1}$이다. 둘째 항에서 Y는 X와 독립이므로

$$\mathrm{E}\left[Y\,\mathbf{1}_{\{X\le 1\}}\right] = \mathrm{E}[Y]\,\mathrm{P}(X\le 1) = Np\left(q^n + npq^{n-1}\right).$$

두 항을 더하고 인수 pq^{n-1}을 묶어 내면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[K] &= npq^{n-1} + Np\,q^{n-1}(q+np)\\ &= pq^{n-1}\left[n + N(1-p) + Nnp\right]\\ &= \left[N + n + pN(n-1)\right]p(1-p)^{n-1},\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

검산

- 확률의 합은 1이어야 한다. $n=2$, $N=1$일 때 $\mathrm{P}(K=1) = (2+1)pq^2 = 3pq^2$, $\mathrm{P}(K=2) = 2p^2q$, $\mathrm{P}(K=0) = q^3 + p^2$이고, ($p^2 = p^2(p+q)$를 이용하면) 이들의 합은 $q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = 1$이다.
- n이 매우 크면 표본에 불량품이 있는 묶음은 거의 모두 수리되므로 기댓값은 0에 가까워지며, 이는 인수 $(1-p)^{n-1}$과 들어맞는다.
- $2 \le n \le 6$, $0 \le N \le 6$과 여러 p 값에 대해 모든 공식을 정확한 분수로 확인했고, 절차를 모의실험(simulation)으로도 돌려 보았다. $n=4$, $N=6$, $p=0.3$일 때 공식은 $\mathrm{E}[K] \approx 1.585$를 주고, 200 000개의 모의 묶음에서는 1.581이 나왔다.

흔한 실수

- "두 개 이상" 규칙을 묶음 전체의 불량품 개수에 적용하는 것. 불량을 바로잡을지는 오직 표본의 개수 X만이 결정한다.
- $K=0$에는 수리된 묶음에서 오는 몫이 더 있다는 점을 잊어, 공식이 $k=0$에서 성립하지 않는다는 것을 놓치는 것.
- $\mathrm{E}[K]$를 무작정 합을 계산해서 구하는 것. 그래도 답은 나오지만, 지시함수로 K를 쪼개고 독립성을 쓰는 편이 훨씬 짧다.

STEP 너머

확률변수(random variable)를 지시함수를 곱한 조각들의 합으로 쓰고 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용하는 것은 대학 1학년 확률론에서 가장 쓸모 있는 기법 가운데 하나이다. 평균만 필요할 때 분포를 구하는 수고를 덜어 준다. 이 문제는 품질 관리의 합격 판정 샘플링(acceptance sampling)을 작게 본뜬 모형이기도 하다. 여기서는 검사 비용과 빠져나가는 불량품 사이의 균형을 맞추도록 n을 정한다. 더 알고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 또는 처음부터 끝까지 지시함수를 활용하는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 보라.

풀이

STEP III 1989, 문제 1

순수수학 • 회전면

> **STEP III 1989, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q1

핵심 아이디어

구는 반원을 회전시켜 얻은 회전면(surface of revolution)이므로, 구대(zone)의 넓이는 표준적인 회전면 넓이 적분으로 구할 수 있다. 놀라운 점은 피적분함수가 상수가 된다는 것이며, 바로 이 때문에 답이 두 평면 사이의 거리에만 의존한다. 둘째 부분에서는 곡면이 원뿔(OP에서 생김)과 구대(호 PR에서 생김)로 나뉜다. 그러면 어려운 부분은 첫째 결과가 해결해 주고, 접선 조건이 필요한 직각삼각형을 제공한다.

인쇄된 방정식에 대해 한마디 하자면, 우변이 c^2이면 원이 O를 지나고 상수 a가 전혀 나타나지 않는다. 의도된 곡선은 분명히

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2,$$

즉 중심이 $C = (c, 0)$이고 반지름이 a인 원이다. $c > a$이므로 원점은 원의 바깥에 있고, 따라서 O에서 그은 접선이 존재한다. 이 곡선에 대하여 문제를 푼다.

풀이

구대의 넓이

중심이 원점이고 반지름이 r인 구를 생각하고, x축을 두 평면에 수직이 되도록 잡자. 두 평면은 $x = h_1$, $x = h_2$이고 $-r \le h_1 < h_2 \le r$이다. 구는 위쪽 반원 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$을 x축 둘레로 2π만큼 회전시켜 얻으므로, 구대의 넓이는

$$S = \int_{h_1}^{h_2} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

이다. 여기서 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$이므로 $|x| < r$일 때

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = r.$$

이다.

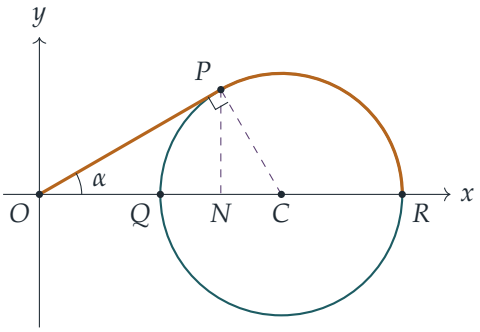
> **생각해 보기** $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 무한대가 되는 $x = \pm r$에서는 어떻게 되는가?

도함수(derivative)는 극점에서 발산하지만, 곱 $y\sqrt{1+(y')^2}$은 $(-r, r)$ 전체에서 r과 같으므로 유계이다. 평면이 구에 접하는 경우($h_1 = -r$ 또는 $h_2 = r$)에도 적분은 무해한 방식으로만 이상적분(improper integral)이 된다. $h_2 - \varepsilon$까지 적분한 다음 $\varepsilon \to 0$으로 보내면 된다. (또는 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$로 매개화하면 이 문제를 아예 피할 수 있다.) 따라서

$$S = \int_{h_1}^{h_2} 2\pi r\,\mathrm{d}x = 2\pi r\,(h_2 - h_1),$$

이고, 이는 $2\pi \times$ (반지름) $\times$ (두 평면 사이의 거리)이므로 증명이 끝난다.

곡면



$C = (c, 0)$을 중심이라 하고, N을 P에서 x축에 내린 수선의 발이라 하자. 그러면 $Q = (c-a, 0)$, $R = (c+a, 0)$이다. 호 PR은 Q를 지나지 않는 쪽의 호이다(호박색으로 표시). P에서 R까지의 다른 호는 Q를 지나 원의 아래쪽을 돌아가며, 이것을 회전시키면 구 전체가 만들어진다.

접선은 접점에서 반지름에 수직이므로 각 OPC는 직각이다. 삼각형 OPC에서 $OC = c$, $CP = a$이므로 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의하여

$$OP = \sqrt{c^2-a^2}.$$

이다. α를 각 POC라 하자. 그러면 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$이므로

$$PN = OP\sin\alpha = \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c}, \qquad ON = OP\cos\alpha = \frac{c^2-a^2}{c}.$$

이다.

원뿔. OP를 x축 둘레로 회전시키면 모선의 길이(slant height)가 $l = OP$이고 밑면의 반지름이 PN인 원뿔이 된다. 그 옆넓이는 $\pi \times$ (밑면의 반지름) $\times$ (모선의 길이)이므로

$$\pi \cdot \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \cdot \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\pi a(c^2 - a^2)}{c}.$$

이다.

구대. 호 PR을 회전시키면 구(중심 C, 반지름 a) 가운데 N을 지나고 축에 수직인 평면과 R에서의 접평면 사이에 놓인 부분이 된다. 이 두 평면 사이의 거리는

$$NR = (c + a) - \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{ac + a^2}{c} = \frac{a(c + a)}{c}$$

이므로, 첫째 결과에 의하여 구대의 넓이는

$$2\pi a \cdot \frac{a(c + a)}{c} = \frac{2\pi a^2(c + a)}{c}.$$

이다.

전체. 두 부분을 더하면

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \frac{\pi a}{c}\left[(c^2 - a^2) + 2a(c + a)\right] \\ &= \frac{\pi a}{c}\left(c^2 + 2ac + a^2\right) \\ &= \frac{\pi a(c + a)^2}{c}. \end{aligned}$$

이다.

검산

- $a = 1, c = 2$로 놓자. 그러면 $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이고, 원뿔의 넓이는 $\frac{3\pi}{2}$, 구대의 넓이는 3π이므로 전체는 $\frac{9\pi}{2} \approx 14.137$이다. 곡선을 20 000개의 짧은 선분으로 근사하고 그로부터 생기는 원뿔대들의 넓이를 더하면 14.13717을 얻는다.
- $a \to c$이면 P가 O에 가까워지고 원뿔은 사라진다. 곡면은 반지름이 c인 구 전체가 되며, 실제로 $\pi c(2c)^2/c = 4\pi c^2$이다.
- a를 고정하고 $c \to \infty$로 보내면 넓이는 πac처럼 커지는데, 이는 모선의 길이가 약 c이고 밑면의 반지름이 약 a인 길고 가는 원뿔의 넓이이다. 예상한 그대로이다.

흔한 실수

- 원뿔의 모선의 길이로 OP 대신 OC나 ON을 쓰는 것.

- 구대의 두께를 P에서 내린 수선의 발 N이 아니라 C나 Q에서부터 재는 것.
- 공식 $2\pi rh$에서 $r = a$ 대신 $r = c$를 쓰는 것. 잘리는 구는 C를 중심으로 하는 반지름 a인 구이며, O를 중심으로 하는 어떤 것도 아니다.

STEP 너머

구대에 관한 결과는 아르키메데스(Archimedes)의 정리이다. 구를 외접하는 원기둥에 수평으로 사영하면 넓이가 보존되는데, 이것이 람베르트(Lambert) 정적 도법(equal-area map projection)의 바탕이 되는 아이디어이다. 또한 이는 구 위에서 균등하게 고른 점의 높이가 균등분포(uniform distribution)를 따르는 이유도 설명해 준다. 회전면의 넓이는 대학 1학년 벡터 미적분학 강의에서 배우는 면적분(surface integral) $\iint |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$의 첫 번째 사례이다. 곡률과 곡면을 아름답게 기하학적으로 바라보는 관점은 Needham, *Visual Differential Geometry and Forms*(시각적 미분기하학과 미분형식)을 참고하라.

풀이

STEP III 1989, 문제 2

순수수학 • 3차원 공간의 평면

STEP III 1989, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q2

핵심 아이디어

좌표(coordinates)를 동쪽, 북쪽, 위쪽 방향으로 잡는다. 그러면 각 평면(plane)은 그래프 $z = px + qy + r$로 나타나고, 세 점이 주어지면 평면 하나가 정해진다. 평면이 얼마나 가파른지는 z가 수평 방향으로 얼마나 빠르게 변하는지에만 달려 있으므로, 각도는 p와 q로부터 구할 수 있다. 두 번째 부분에는 깔끔한 지름길이 있다. 지표면 아래 광층(seam)의 **깊이** 역시 위치에 대한 일차함수(linear function)이고, 광층은 바로 그 깊이가 0인 곳에서 지표면에 드러난다.

풀이

설정하기

A를 원점으로 하고, x축은 동쪽, y축은 북쪽, z축은 연직 위쪽을 향하도록 잡는다(길이의 단위는 모두 미터). 그러면

$$A = (0, 0, 0), \qquad B = (0, 100, -5), \qquad C = (60, 100, -10),$$

이다. B는 A보다 $5\,\mathrm{m}$ 아래에 있고, C는 B보다 다시 $5\,\mathrm{m}$ 아래에 있기 때문이다. 시추공(bore-hole)은 연직이므로, 시추공이 광층과 만나는 점은 이 점들의 바로 아래에 있다.

$$A' = (0, 0, -95), \qquad B' = (0, 100, -50), \qquad C' = (60, 100, -86).$$

광층의 기울기

A', B', C'는 평면도에서 한 직선 위에 있지 않은(collinear가 아닌) 세 점의 위쪽에 놓이므로, 광층은 연직이 아니다. 따라서 광층을 $z = px + qy + r$로 쓸 수 있다.

- A'에서: $r = -95$.
- A'에서 B'로 갈 때 y는 100, z는 45만큼 증가하므로 $100q = 45$이고 $q = \frac{9}{20}$이다.
- B'에서 C'로 갈 때 x는 60만큼 증가하고 z는 -36만큼 변하므로 $60p = -36$이고 $p = -\frac{3}{5}$이다.

따라서 광층은

$$z = -\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95,$$

이고, 이 평면의 법선벡터(normal vector)는 $\mathbf{n} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{9}{20}, 1\right)$, 또는 20배 하여 $(12, -9, 20)$이다.

두 평면이 이루는 각은 두 법선벡터가 이루는 각과 같다. 수평면의 법선벡터는 $\mathbf{k} = (0,0,1)$이므로, 광층이 수평면과 이루는 각 θ는

$$\cos\theta = \frac{|(12,-9,20)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}} = \frac{20}{\sqrt{144+81+400}} = \frac{20}{\sqrt{625}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

를 만족한다. 따라서 요구한 대로 광층은 수평면에 대하여 $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$만큼 기울어져 있다.

(다른 방법으로 볼 수도 있다. 최대경사선(line of greatest slope)을 따라가면 수평으로 1미터마다 z가 $\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{81}{400}} = \frac{3}{4}$만큼 변한다. 따라서 $\tan\theta = \frac{3}{4}$로 3–4–5 삼각형이 되고, $\cos\theta = \frac{4}{5}$이다.)

광층이 지표면에 드러나는 곳

지표면은 원점을 지나는 평면이다. 앞에서와 같은 방법으로, A에서 B로 북쪽으로 가면 100당 5만큼 낮아지고, B에서 C로 동쪽으로 가면 60당 5만큼 낮아지므로

$$z = -\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y.$$

이다.

> **생각해 보기** 두 평면의 방정식을 정말 연립하여 풀어야 할까?

꼭 그렇지는 않다. 수평 위치가 (x,y)인 점에서 지표면 아래 광층의 깊이를 $d(x,y)$라 하자. 이는 두 일차함수의 차이므로 그 자체로 일차함수이다.

$$d(x,y) = \left(-\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y\right) - \left(-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95\right) = \tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95.$$

검산해 보면 $d(0,0) = 95$, $d(0,100) = 45$, $d(60,100) = 45 + 31 = 76$으로, 세 시추공의 깊이와 일치한다. (사실 이 값들로부터 d를 바로 쓸 수도 있었다. 깊이는 북쪽으로 100 m 가면 50만큼 줄고, 동쪽으로 60 m 가면 31만큼 는다.)

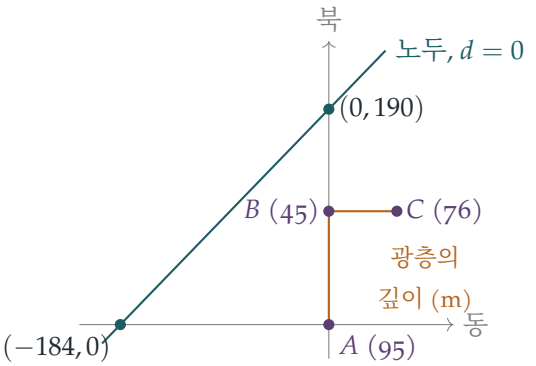
광층은 $d = 0$인 곳에서 지표면에 드러나며, 이는 평면도에서 직선

$$\tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad y = \tfrac{31}{30}x + 190.$$

이다. 이 직선을 따라 동쪽으로 30 m 움직이면 북쪽으로 31 m 움직인다. 따라서 이 직선이 정북 방향과 이루는 각 φ는

$$\tan\varphi = \frac{\text{동쪽}}{\text{북쪽}} = \frac{30}{31}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\tfrac{30}{31}\right) \approx 44.06^\circ.$$

를 만족한다. 그러므로 이 직선의 방위각(bearing)은 $\tan^{-1}\left(\frac{30}{31}\right) \approx 044^\circ$이다. 반대 방향으로 읽으면 224°이다. 직선은 두 방위각을 모두 가지며, 어느 쪽으로 나타내도 된다. 이 직선은 북동쪽보다 약간 서쪽으로 뻗어 있고, 평면도에서 A의 정북 방향 190 m 지점을 지난다.



검산

- 광층의 법선벡터 $(12, -9, 20)$의 길이는 정확히 25이므로 $\cos\theta = \frac{20}{25}$로, 문제에서 예고한 대로 깔끔한 3–4–5 답이 나온다.
- 깊이 공식 d가 세 시추공의 깊이를 모두 재현하므로, 두 평면 모두 옳다.
- 수치로 계산하면 $\tan^{-1}(30/31) = 44.0608^\circ$이다. 직선 $y = \frac{31}{30}x + 190$ 위의 임의의 점들은 반올림 오차 범위에서 두 평면 위의 높이가 같다.

흔한 실수

- 각 시추공 꼭대기로부터의 깊이를, 꼭대기들의 높이가 같은 것처럼 사용하는 실수. B와 C는 A보다 각각 5 m, 10 m 낮으므로, 그 지점에서 광층은 A의 높이보다 45 m와 76 m가 아니라 50 m와 86 m 아래에 있다.
- 노두(outcrop) 대신 광층 안의 수평선($-\frac{3}{5}x + \frac{9}{20}y$가 일정한 직선, 방위각 $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 037^\circ$)의 방위각을 답하는 실수. 지표면도 기울어져 있으므로 이 둘은 다르다.
- $\tan\varphi =$ 동쪽/북쪽을 북쪽/동쪽과 혼동하는 실수. 방위각은 북쪽에서 시계 방향으로 잰다.

STEP 너머

이것은 지질학자들이 다루는 "주향과 경사(strike and dip)" 문제이며, 사용하는 도구는 대학 1학년 벡터 기하학의 것이다. 즉 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ 꼴의 평면, 법선벡터를 이용한 두 평면 사이의 각, 그리고 교선(line of intersection)이다. 깊이를 이용한 요령은 일반적인 원리의 한 예이다. 두 아핀 함수(affine function)의 차는 아핀 함수이므로, 평행하지 않은 두 평면의 교선은 하나의 일차함수의 영점 집합(zero set)이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점을 일차방정식의 기하학 속에 녹여 낸다.

풀이

STEP III 1989, 문제 3

순수수학 • 행렬군

STEP III 1989, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q3

핵심 아이디어

$\mathbf{M}$은 $2\pi/m$만큼의 회전이므로 $\mathbf{M}^m = \mathbf{I}$이고, 그 거듭제곱의 합은 등비급수(geometric series)이다. 여기에 $\mathbf{I} - \mathbf{M}$을 곱하면 모든 항이 연쇄적으로 소거된다(telescope). 점화식(recurrence)은 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$을 직접 써 보면 규칙이 분명히 보인다. 그다음 군(group)은 하나의 항등식에서 나온다. 이 식들 가운데 하나를 다른 하나에 대입하면 첨자가 더해질 뿐이므로, 원소들은 m을 법으로 하는 정수처럼 행동한다.

풀이

$\mathbf{M}$의 거듭제곱의 합

$\mathbf{M}$은 원점을 중심으로 $\theta = 2\pi/m$만큼 시계 반대 방향으로 회전하는 행렬이다. 이를 k번 적용하면 $k\theta$만큼 회전하므로

$$\mathbf{M}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{특히} \qquad \mathbf{M}^m = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

($\mathbf{M}^{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{M}^k$이므로 $\mathbf{M}^k$에 대한 공식은 덧셈정리(compound-angle formulae)로부터 귀납법(induction)으로 얻어진다.)

$\mathbf{S} = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \cdots + \mathbf{M}^{m-1}$이라 하자. 이 행렬들은 모두 $\mathbf{M}$의 거듭제곱이므로 서로 교환 가능하고(commute), 곱은 연쇄적으로 소거된다.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^m = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

? **생각해 보기** 인수 $\mathbf{I} - \mathbf{M}$을 그냥 "약분"해도 될까?

$\mathbf{I}-\mathbf{M}$이 가역(invertible)일 때만 그렇다. 영행렬이 아닌 행렬들의 곱이 $\mathbf{O}$일 수도 있기 때문이다. 여기서

$$\det(\mathbf{I}-\mathbf{M}) = (1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2-2\cos\theta,$$

이고, $m>1$이므로 $0<\theta\le\pi$이다. 따라서 $\cos\theta\neq 1$이고 행렬식(determinant)은 0이 아니다. $(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{S}=\mathbf{O}$의 양변에 왼쪽에서 $(\mathbf{I}-\mathbf{M})^{-1}$을 곱하면 $\mathbf{S}=\mathbf{O}$를 얻으며, 이것이 증명하려던 결과이다.

$\mathbf{X}_k$에 대한 공식

처음 몇 항을 계산해 보면

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{P}\mathbf{X}_0+\mathbf{Q},\quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{P}^2\mathbf{X}_0+\mathbf{P}\mathbf{Q}+\mathbf{Q},\quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{P}^3\mathbf{X}_0+(\mathbf{P}^2+\mathbf{P}+\mathbf{I})\mathbf{Q},$$

이므로, $k\ge 0$에 대해 다음이 성립하리라고 추측할 수 있다.

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{P}^k\mathbf{X}_0+\mathbf{S}_k\mathbf{Q},\qquad \text{여기서}\quad \mathbf{S}_k = \mathbf{I}+\mathbf{P}+\cdots+\mathbf{P}^{k-1}\quad(\mathbf{S}_0=\mathbf{O}).$$

$k=0$일 때 이 식은 $\mathbf{X}_0=\mathbf{X}_0$이 되므로 참이다. 어떤 $k\ge 0$에 대해 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{X}_k+\mathbf{Q} &= \mathbf{P}^{k+1}\mathbf{X}_0+(\mathbf{P}+\mathbf{P}^2+\cdots+\mathbf{P}^k)\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\\ &= \mathbf{P}^{k+1}\mathbf{X}_0+\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{Q},\end{aligned}$$

이므로 $k+1$에 대해서도 성립하고, 귀납법에 의해 모든 $k\ge 0$에 대해 성립한다. 인수의 순서에 주의하라. $\mathbf{P}$는 처음부터 끝까지 왼쪽에서 곱해지며, $\mathbf{P}$와 $\mathbf{Q}$는 교환 가능하지 않을 수도 있다.

군

$\mathbf{X}_i$를 임의의 행렬 $\mathbf{X}_0$을 다른 행렬로 바꾸는 규칙, 즉 식 $\mathbf{P}^i\mathbf{X}_0+\mathbf{S}_i\mathbf{Q}$로 생각하자. $\mathbf{X}_0$ 자리에 $\mathbf{X}_j$를 대입하면

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_i * \mathbf{X}_j &= \mathbf{P}^i\left(\mathbf{P}^j\mathbf{X}_0+\mathbf{S}_j\mathbf{Q}\right)+\mathbf{S}_i\mathbf{Q}\\ &= \mathbf{P}^{i+j}\mathbf{X}_0+\left(\mathbf{P}^i\mathbf{S}_j+\mathbf{S}_i\right)\mathbf{Q}.\end{aligned}$$

이제 $\mathbf{P}^i\mathbf{S}_j = \mathbf{P}^i+\cdots+\mathbf{P}^{i+j-1}$이고, 여기에 $\mathbf{S}_i=\mathbf{I}+\cdots+\mathbf{P}^{i-1}$을 더하면 정확히 $\mathbf{S}_{i+j}$가 된다. 따라서 임의의 $\mathbf{P}$에 대해

$$\mathbf{X}_i * \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_{i+j}.$$

(이는 놀라운 일이 아니다. 점화식을 j단계 진행한 뒤 i단계를 더 진행하는 것은 $i+j$단계를 진행하는 것과 같다.)

이제 $\mathbf{P} = \mathbf{M}$으로 두자. 첫 부분에 의해 $\mathbf{M}^m = \mathbf{I}$이고 $\mathbf{S}_m = \mathbf{O}$이므로

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{X}_0,$$

즉 $\mathbf{X}_m$은 모든 행렬을 바꾸지 않고 그대로 두는 식이다. 그러면 임의의 k에 대해 $\mathbf{X}_{k+m} = \mathbf{X}_k * \mathbf{X}_m = \mathbf{X}_k$이므로, 식들의 수열은 주기 m으로 반복되고

$$G = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \ldots\} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m\}$$

는 유한집합이다. 군의 공리(group axioms)를 확인하자.

- **닫혀 있음**(*closure*). $\mathbf{X}_i * \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_{i+j}$이고 $i + j \geq 1$이므로 이는 G에 속한다.
- **결합법칙**(*associativity*). $(\mathbf{X}_i * \mathbf{X}_j) * \mathbf{X}_k$와 $\mathbf{X}_i * (\mathbf{X}_j * \mathbf{X}_k)$는 모두 $\mathbf{X}_{i+j+k}$와 같다. (더 일반적으로, 대입은 함수의 합성이며 함수의 합성은 항상 결합법칙을 만족한다.)
- **항등원**(*identity*). $\mathbf{X}_m * \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_{m+j} = \mathbf{X}_j$이고 $\mathbf{X}_j * \mathbf{X}_m = \mathbf{X}_j$이므로 $\mathbf{X}_m$이 항등원이다.
- **역원**(*inverses*). $1 \leq i < m$에 대해 $\mathbf{X}_i * \mathbf{X}_{m-i} = \mathbf{X}_{m-i} * \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_m$이고, $\mathbf{X}_m$은 자기 자신의 역원이다. 각 역원은 G에 속한다.

따라서 G는 $*$에 대한 유한군이다.

실제로 이 군은 정확히 m개의 원소를 가진다. $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$의 계수 $\mathbf{M}^1, \ldots, \mathbf{M}^m$은 $(0, 2\pi]$에 속하는 서로 다른 각만큼의 회전이므로, 이들은 서로 다른 식이기 때문이다. 모든 원소가 $\mathbf{X}_1$의 "거듭제곱"이므로 G는 위수(order)가 m인 순환군(cyclic group)이다.

검산

- $m = 2$이면 $\mathbf{M} = -\mathbf{I}$이고 합은 $\mathbf{I} + (-\mathbf{I}) = \mathbf{O}$이다. $m = 4$이면 $\mathbf{M}$은 4분의 1 회전이고 $\mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^3 = \mathbf{I} + \mathbf{M} - \mathbf{I} - \mathbf{M} = \mathbf{O}$이다.
- 수치적으로 확인하면, 2부터 39까지의 모든 m에 대해 거듭제곱의 합은 (반올림 오차 범위에서) $\mathbf{O}$이다. 또한 임의로 고른 $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{X}_0$에 대해 $\mathbf{X}_k$의 공식이 점화식과 일치하며, $\mathbf{P} = \mathbf{M}$이고 $\mathbf{Q}$와 $\mathbf{X}_0$을 임의로 고르면 점화식을 m단계 진행했을 때 정확히 $\mathbf{X}_0$으로 돌아온다.

흔한 실수

- $\mathbf{I} - \mathbf{M}$이 가역인지 확인하지 않고 약분하는 것.
- $\mathbf{QS}_k$나 $\mathbf{X}_0\mathbf{P}^k$로 쓰는 것. 행렬의 곱은 교환 가능하지 않으며, 점화식은 $\mathbf{P}$를 왼쪽에 둔다.
- $\mathbf{X}_0$을 항등원으로 보는 것. 위에 나열한 대로라면 $\mathbf{X}_0$은 G에 속하지 않는다. 항등원은 $\mathbf{X}_m$이며, 이것이 $\mathbf{X}_0$과 같은 것은 오직 $\mathbf{S}_m = \mathbf{O}$이기 때문이다.

STEP 너머

각 $\mathbf{X}_i$는 아핀 사상(affine map) $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$이고, $\mathbf{A}$가 가역인 아핀 사상들은 합성에 대해 군을 이룬다. 여기서 우리는 m제곱이 항등사상인 하나의 사상으로 생성되는, 위수 m의 순환 부분군을 찾은 것이다. $\mathbf{I} + \mathbf{M} + \cdots + \mathbf{M}^{m-1} = \mathbf{O}$라는 사실은 1의 m제곱근들의 합이 0이라는 사실의 행렬 버전이며, 그 일반적인 아이디어, 즉 군이 변환을 통해 집합에 작용한다는 생각은 군론(group theory) 첫 강의의 핵심이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 이 내용을 발전시킨다.

풀이

STEP III 1989, 문제 4

순수수학 • 곡선 그리기와 근

STEP III 1989, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q4

핵심 아이디어

분수식을 다항식(polynomial)과 진분수(proper fraction)의 합으로 나누면 기울어진 점근선(oblique asymptote)이 곧바로 드러나고, 도함수(derivative)를 구하기도 쉬워진다. 도함수는 모든 곳에서 2보다 크므로, 세 개의 가지(branch)는 각각 $-\infty$에서 $+\infty$까지 올라간다. 그러면 후반부의 각 방정식은 사실상 "곡선 = 더 간단한 곡선"의 꼴이다. 이제 각 가지에서 차의 강한 단조성(strict monotonicity)을 이용하면 교점의 개수를 정확히 셀 수 있다.

풀이

곡선

$2x(x^2-5) = 2x(x^2-4) - 2x$이므로

$$y = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

이 함수는 기함수(odd function)이므로, 곡선은 원점에 대하여 2차 회전대칭(rotational symmetry)을 가진다. 곡선은 $x(x^2-5) = 0$인 곳, 즉 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{5}$에서만 축과 만난다.

점근선. 분모는 $x = \pm 2$에서 0이 되고(이때 분자는 $\mp 4 \neq 0$이다), 따라서 $x = 2$와 $x = -2$는 수직점근선(vertical asymptote)이다. $|x| \to \infty$일 때 $\frac{2x}{x^2-4} \to 0$이므로 $y = 2x$는 기울어진 점근선이다. 또한 $y - 2x = -\frac{2x}{x^2-4}$는 x가 큰 양수일 때 음수이고, x가 큰 음수일 때 양수이다. 따라서 곡선은 오른쪽에서는 아래쪽에서, 왼쪽에서는 위쪽에서 $y = 2x$에 다가간다.

기울기. 나누어 놓은 꼴을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} > 2.$$

따라서 정류점(stationary point)은 없고, y는 구간 $x<-2$, $-2<x<2$, $x>2$ 각각에서 순증가한다. 한 번 더 미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$이므로, 변곡점(point of inflection)은 원점뿐이다.

원점에서의 접선. $x=0$에서 기울기는 $2+\frac{2\cdot 4}{16} = \frac{5}{2}$이므로, 그 점에서의 접선(tangent)은

$$y = \tfrac{5}{2}x.$$

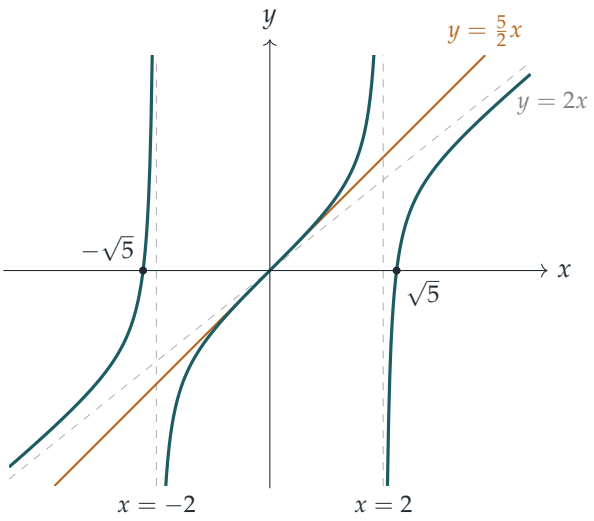
$x=\pm 2$ 근처에서의 모양. $x=2$ 근처에서는 항 $-\frac{2x}{x^2-4}$가 지배적이다. 이 항은 $x\to 2^+$일 때 $-\infty$로, $x\to 2^-$일 때 $+\infty$로 가고, 대칭성에 의해 $x\to -2^-$일 때 $+\infty$로, $x\to -2^+$일 때 $-\infty$로 간다. 따라서

- $x<-2$에서 y는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 증가하며 $-\sqrt{5}$에서 축을 지난다.
- $-2<x<2$에서 y는 원점을 지나며 $-\infty$에서 $+\infty$까지 증가한다.
- $x>2$에서 y는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 증가하며 $\sqrt{5}$에서 축을 지난다.

유용한 사실이 하나 더 있다. $0<x<2$일 때

$$y - \tfrac{5}{2}x = \frac{x\left[4(x^2-5) - 5(x^2-4)\right]}{2(x^2-4)} = \frac{-x^3}{2(x^2-4)} > 0,$$

이므로 이 구간에서 곡선은 원점에서의 접선보다 위에 있다(대칭성에 의해 $-2<x<0$에서는 아래에 있다).



소문항 (i)

$x = 0$(좌변 0, 우변 8)도 $x = \pm 2$(좌변 -16, 우변 0)도 근(root)이 아니다. 따라서 $2x(x^2 - 4)$로 나눌 수 있고, 방정식은

$$\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = \frac{5x-2}{2x} = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}.$$

이 된다. 그러므로 근은 곡선과 쌍곡선(hyperbola) $H\colon y = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}$의 교점의 x좌표이다. 가지별로 살펴보자.

- $x < -2$: 여기서 H의 기울기는 $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{4}$이고, 곡선의 기울기는 > 2이다. 따라서 차(곡선 $-$ H)는 순증가한다. H가 $\frac{5}{2}$와 3 사이에 머무르므로, 이 차는 $x \to -\infty$일 때 $-\infty$로, $x \to -2^-$일 때 $+\infty$로 간다. 근은 정확히 하나이다.
- $-2 < x < 0$: 곡선은 $y < 0$이지만(세 인수 x, $x^2 - 5$, $x^2 - 4$가 모두 음수이다), H는 $y > \frac{5}{2}$이다. 근이 없다.
- $0 < x < 2$: 앞의 사실에 의해 $y > \frac{5}{2}x$이다. 또한

  $$\tfrac{5}{2}x - \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{x}\right) = \frac{5x^2 - 5x + 2}{2x} > 0,$$

  인데, $5x^2 - 5x + 2$의 판별식(discriminant)이 $25 - 40 < 0$이기 때문이다. 따라서 곡선은 H보다 엄격히 위에 있다. 근이 없다.
- $x > 2$: 첫 번째 경우와 마찬가지로 차는 순증가한다(기울기 $> 2 - \frac{1}{4}$). H가 2와 $\frac{5}{2}$ 사이에 머무르므로, 이 차는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 간다. 근은 정확히 하나이다.

따라서 방정식 (i)은 정확히 **두 개**의 실근을 가지며, 하나는 -2보다 작고 하나는 2보다 크다.

> **생각해 보기** (ii)의 방정식은 양변에 제곱이 있는데, 어떻게 곡선에서 읽어 낼 수 있을까?

$(x^2 - 4)^2$으로 나눈다. 그러면 좌변은 y^2이 되므로, 방정식은 $y^2 = x^2 + 1$을 뜻한다.

소문항 (ii)

이번에도 $x = \pm 2$는 근이 아니다(좌변 16, 우변 0). 따라서 방정식은 $y^2 = x^2 + 1$이고, 여기서 y는 곡선의 세로좌표(ordinate)이다. 근은 곡선과 직각쌍곡선(rectangular hyperbola) $y^2 - x^2 = 1$의 두 가지 $y = \pm\sqrt{x^2+1}$의 교점이다.

위쪽 가지. $f(x) = y - \sqrt{x^2+1}$이라 하자. 그러면

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 2 - 1 > 0,$$

이므로 f는 세 구간 각각에서 순증가한다. 각 구간에서 y는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 변하는 반면 $\sqrt{x^2+1}$은 유한하게 머문다($x \to +\infty$일 때 $2x$에 비해 $|x|$ 정도로만 커지고, $x \to -\infty$일 때는 f의 두 항이 모두 음수이다). 따라서 f는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 가고, 각 구간에 근이 정확히 하나씩, 모두 세 개 있다.

아래쪽 가지. 사상 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$는 곡선을 자기 자신으로, 아래쪽 가지를 위쪽 가지로 보낸다. 따라서 아래쪽 가지와의 교점도 정확히 세 개이다.

두 근의 집합은 겹치지 않는다. 공통인 x에서 곡선은 하나의 y값만 가지며, 이 값이 양수이면서 동시에 음수일 수는 없기 때문이다. 따라서 방정식 (ii)는 정확히 **여섯 개**의 실근을 가진다. (검산하자면, 이 방정식은 차수(degree)가 6인 다항식 $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$이므로, 근이 모두 실수이다.)

> **생각해 보기** (iii)의 변수는 x가 아니라 z이고, z는 음수일 수도 있다. 곡선을 어떻게 끌어들일까?

$z > 0$이면 $x > 0$으로 $z = x^2$이라 놓는다. $z \le 0$인 경우는 따로 직접 다룬다.

소문항 (iii)

좌변은 결코 음수가 아니므로, 근은 $z+1 \ge 0$, 즉 $z \ge -1$을 만족해야 한다. 또한 $z = 0$은 근이 아니고(좌변 0, 우변 16), $z = 4$도 근이 아니다(좌변 64, 우변 0).

$z > 0$인 근. $x > 0$으로 $z = x^2$이라 놓으면, 각 양의 근 z는 정확히 하나의 $x > 0$에 대응한다. 방정식은 $4x^4(x^2-5)^2 = (x^2-4)^2(x^2+1)$이 된다. $x^2(x^2-4)^2$으로 나누면

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x^2}, \qquad \text{즉} \qquad y = \pm s(x), \quad s(x) = \sqrt{1+x^{-2}}.$$

여기서 s는 $+\infty$($x \to 0^+$일 때)에서 1($x \to \infty$일 때)까지 감소하고, $s'(x) = -\dfrac{1}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}$이므로 $|s'(x)| < \frac{1}{x^3}$이다.

- $y = s(x)$: 함수 $y - s$의 도함수는 $y' - s' > 2$이다. $(0,2)$에서 이 함수는 $-\infty$($y \to 0$이고 $s \to \infty$이므로)에서 $+\infty$까지 변한다. $(2,\infty)$에서도 $-\infty$에서 $+\infty$까지 변한다. 각 구간에 근이 하나씩, 따라서 근은 두 개이다.
- $(0,2)$에서 $y = -s(x)$: 그곳에서 곡선은 $y > 0 > -s$이다. 근이 없다.
- $(2,\infty)$에서 $y = -s(x)$: 함수 $y + s$의 도함수는 $y' + s' > 2 - \frac{1}{8} > 0$이고, 이 함수는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 변한다. 근은 하나이다.

따라서 양의 근 z는 정확히 세 개이다.

$-1 \le z < 0$인 근. $0 < t \le 1$로 $z = -t$라 쓰자. 방정식은

$$4t^2(t+5)^2 = (t+4)^2(1-t).$$

이 된다. $(0,1]$에서 좌변은 0($t \to 0$일 때)에서 144까지 순증가한다. 우변은 16에서 0까지 순감소한다. 두 변의 차는 순증가하고 부호가 바뀌므로, 근은 정확히 하나이다.

그러므로 방정식 (iii)은 정확히 **네 개**의 실근을 가진다. 세 개는 양수이고 하나는 $(-1,0)$에 있다. 전개하면 사차방정식(quartic) $4z^4 - 41z^3 + 107z^2 - 8z - 16 = 0$이므로, 네 근이 모두 실수이다.

검산

- $x = 1000$에서 $y - 2x \approx -0.002$이므로, 곡선이 아래쪽에서 $y = 2x$에 다가감을 확인할 수 있다.
- 수치적으로 (i)의 근은 $x \approx -2.143$과 2.401로, 예상대로 바깥쪽 두 가지에 하나씩 있다.
- (ii)의 근은 $x \approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$로, 쌍곡선의 각 가지마다 곡선의 가지 하나에 하나씩 있다.
- (iii)의 근은 $z \approx -0.332,\ 0.473,\ 4.799,\ 5.310$이다. 마지막 세 근은 $x = \sqrt{z} \approx 0.688,\ 2.191,\ 2.304$를 주고, 이때 곡선의 값은 $y \approx 1.77,\ -1.10,\ 1.09$로 경우 분석과 일치한다.

흔한 실수

- $x = 0$과 $x = \pm 2$가 근이 아님을 먼저 확인하지 않고 x나 $x^2 - 4$로 나누는 것.
- (ii)에서 $y = +\sqrt{x^2+1}$과의 교점만 세고 아래쪽 가지를 잊어, 6 대신 3을 답하는 것.
- (iii)에서 $z = x^2$을 대입하면서 z가 음수일 수 있음을 잊어, $(-1,0)$에 있는 근을 놓치는 것.

STEP 너머

여기서 사용한 개수 세기 논증은 중간값 정리(intermediate value theorem, 부호가 바뀌는 연속함수는 영점을 가진다)와 강한 단조성(영점을 많아야 하나 가진다)에 기대고 있다. 이 두 사실을 엄밀하게 만드는 것은 대학 해석학(analysis) 강의의 첫 과제 가운데 하나이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 두 가지를 모두 꼼꼼하고 읽기 쉽게 다룬다. 데카르트(Descartes)의 부호 법칙과 슈투름(Sturm) 열은 다항식의 실근의 개수를 세는 대수적 방법으로, 여기서 사용한 기하적 방법과 비교해 보면 흥미롭다.

풀이

STEP III 1989, 문제 5

순수수학 • 체비쇼프 다항식

> **STEP III 1989, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q5

핵심 아이디어

$x = \cosh\theta$로 놓는다. 그러면 $e^{\pm\theta}$는 정확히 $x \pm \sqrt{x^2-1}$이고, $y = \cosh n\theta$는 이 둘의 n제곱의 평균이다. 이 거듭제곱을 이항정리(binomial theorem)로 전개하면 $\sqrt{x^2-1}$의 홀수 제곱 항이 서로 소거되므로, 남는 것은 x에 대한 다항식(polynomial)이다. 이 다항식을 깔끔한 꼴로 정리하고 나면, 각 계수(coefficient)는 이항계수(binomial coefficient)의 짧은 합일 뿐이다.

풀이

닫힌 꼴

$\theta = \cosh^{-1} x$라 하면 $\theta \geq 0$이고 $x = \cosh\theta$이다. 이때 $\sinh\theta \geq 0$이고 $\sinh^2\theta = x^2 - 1$이므로 $\sinh\theta = \sqrt{x^2-1}$이다. 따라서

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta = x + \sqrt{x^2-1}, \qquad e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta = x - \sqrt{x^2-1}.$$

그러므로

$$y = \cosh n\theta = \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

y가 홀수차 항만 갖는 다항식인 이유

$s = \sqrt{x^2-1}$로 쓴다. 이항정리에 의해

$$(x+s)^n + (x-s)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j \left(1 + (-1)^j\right) = 2 \sum_{j \text{ 짝수}} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j.$$

s의 홀수 제곱 항은 소거되고, 짝수 제곱 $s^{2m} = (x^2-1)^m$은 모두 x에 대한 다항식이다. 따라서

$$y = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} x^{n-2m}(x^2-1)^m.$$

이제 $n = 2k+1$로 두면 m은 0부터 k까지 움직인다. 각 항은 홀수 제곱 $x^{2k+1-2m}$에 x^2에 대한 다항식을 곱한 것이므로 x의 홀수 제곱만 포함하고, 그 최고차는 x^{2k+1}이다. 따라서 $y = a_0x + a_1x^3 + \cdots + a_kx^{2k+1}$이다.

계수를 읽어 내기 위해 $j = k-m$으로 놓고 ($j = 0, \ldots, k$이다) $\binom{2k+1}{2k-2j} = \binom{2k+1}{2j+1}$을 이용하면

$$y = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} x^{2j+1}(x^2-1)^{k-j}.$$

첨자가 j인 항은 x^{2j+1}부터 시작한다. 따라서 x^{2r+1}은 $j \le r$인 항에서만 나오고, 그중 j번째 항에서는 $(x^2-1)^{k-j}$의 $(x^2)^{r-j}$ 항이 필요한데, 이는 $\binom{k-j}{r-j}(-1)^{k-r}$이다. 그러므로

$$a_r = (-1)^{k-r} \sum_{j=0}^{r} \binom{2k+1}{2j+1}\binom{k-j}{r-j}. \qquad (*)$$

a_0

$r = 0$이면 $j = 0$인 항만 기여한다.

$$a_0 = (-1)^k \binom{2k+1}{1} = (-1)^k(2k+1).$$

소문항 (i)

$r = 1$이면 $j = 0, 1$인 항이 기여한다.

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^{k-1}\left[(2k+1)\binom{k}{1} + \binom{2k+1}{3}\right] = (-1)^{k-1}(2k+1)\left[k + \frac{2k(2k-1)}{6}\right] \\ &= (-1)^{k-1}(2k+1)\,k\,\frac{3+2k-1}{3} = (-1)^{k-1}\,\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (ii)

x^5이 나타나려면 $k \ge 2$이어야 한다. $r = 2$이면 $j = 0, 1, 2$인 항이 기여한다.

$$a_2 = (-1)^k\left[(2k+1)\binom{k}{2} + \binom{2k+1}{3}\binom{k-1}{1} + \binom{2k+1}{5}\right].$$

각 항에 인수 $(2k+1)k(k-1)$이 있으므로 이를 묶어 내면

$$\begin{aligned} a_2 &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\left[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{3}+\frac{(2k-1)(2k-3)}{30}\right] \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{15+(20k-10)+(4k^2-8k+3)}{30} \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{4(k+1)(k+2)}{30} = (-1)^k\,\frac{2(k-1)k(k+1)(k+2)(2k+1)}{15}. \end{aligned}$$

세 번째 항에는 $\binom{2k+1}{5} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{120} = \frac{(2k+1)k(k-1)(2k-1)(2k-3)}{30}$을 이용했다.

> **생각해 보기** 우리가 얻은 답에는 (ii)에 인쇄된 식에 없는 인수 $(k+1)$이 있다. 어느 쪽이 맞을까?

$k=2$로 확인해 보자. 이때 $x=\cosh\theta$에 대하여 $y=\cosh(5\theta)$이고, $\cosh 5\theta = 16x^5 - 20x^3 + 5x$이므로 $a_2 = 16$이다. 우리의 식은 $2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5/15 = 16$을 준다. 인쇄된 식은 $2\cdot1\cdot2\cdot4\cdot5/15 = \frac{16}{3}$을 주는데, a_r는 정수이므로 이는 옳을 수 없다. 따라서 시험지에 오식이 있으며, 인수 $(k+1)$이 빠져 있다. 올바른 결과는 위에 보인 것이다.

계수의 합

다항식에 $x=1$을 대입한다. 항등식이 $x\geq 1$에서 성립하고 $x=1$도 허용되므로

$$\sum_{r=0}^{k} a_r = y(1) = \cosh\left(n\cosh^{-1}1\right) = \cosh 0 = 1.$$

검산

- $k=1$: $\cosh 3\theta = 4x^3 - 3x$이다. 공식은 $a_0=-3$, $a_1 = 2\cdot1\cdot2\cdot3/3 = 4$를 주고, $-3+4=1$이다.
- $k=3$: $\cosh 7\theta = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$이다. 공식은 $a_0=-7$, $a_1=56$, $a_2 = -2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7/15 = -112$를 주며, 계수의 합은 1이다.
- $k\leq 14$인 모든 경우에 대하여 컴퓨터로 $(*)$를 점화식(recurrence) $T_{m+1} = 2xT_m - T_{m-1}$과 대조해 확인했고, 임의의 $x\geq 1$에서 다항식의 값을 $\cosh(n\cosh^{-1}x)$와 비교했다.

흔한 실수

- x^{2r+1}이 전개식의 한 항이 아니라 여러 항에서 기여를 받는다는 사실을 잊는다.
- 부호 실수: a_r에 대한 모든 기여는 같은 부호 $(-1)^{k-r}$을 가지므로, 이를 먼저 묶어 낸다.

▶ 계산을 억지로 (ii)에 인쇄된 꼴로 맞추려 한다. $k = 2$ 같은 작은 경우를 확인해 보면 오식임을 알 수 있다.

STEP 너머

다항식 y는 체비쇼프(Chebyshev) 다항식 $T_n(x)$로, 보통 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$로 정의한다. 우리가 다룬 쌍곡함수 버전은 $x \geq 1$에서의 같은 항등식이며, 다항식은 임의의 구간에서의 값으로 결정되므로 두 정의는 일치한다. 체비쇼프 다항식은 근사 이론(approximation theory)에서 핵심적인데, 최고차항의 계수가 1인 n차 다항식(monic polynomial) 가운데 $2^{1-n}T_n$이 $[-1, 1]$에서 최댓값의 크기가 가장 작기 때문이다. 이 다항식은 수치해석(numerical analysis) 입문 강의라면 어디서든 다시 등장한다. 이런 종류의 계산을 STEP 스타일로 더 연습하려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 풀어 보라.

풀이

STEP III 1989, 문제 6

순수수학 • 이차곡선의 극방정식

STEP III 1989, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q6

핵심 아이디어

극좌표(polar coordinates)에서 원점을 지나지 않는 직선은 $1/r$이 $\cos\theta$와 $\sin\theta$의 일차결합으로 나타나며, 이를 $A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$ 꼴로 쓰면 원뿔곡선(conic) 자체의 $\cos\theta$ 항과 정확히 맞출 수 있다. $e\cos\theta$ 부분이 일치하고 나면 현(chord)의 방정식은 코사인 하나만 맞추면 되고, 나머지는 $\theta=\gamma$에 대한 대칭(symmetry)이 해결해 준다. 현을 한 점으로 줄여 가면 접선(tangent)을 얻고, 접선의 방정식으로부터 이등분선(bisector) 성질은 거의 저절로 나온다.

풀이

이 풀이 전체에서 (r,θ)는 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$인 극좌표이며, $r<0$도 허용한다(점 (r,θ)는 $(-r,\theta+\pi)$와 같은 점이다). 원뿔곡선의 초점(focus) S는 원점에 있다.

극형식으로 나타낸 직선

$lx+my=1$은 원점을 지날 수 없으므로 그 위에서 $r\neq 0$이고, r로 나누면

$$\frac{1}{r} = l\cos\theta + m\sin\theta.$$

을 얻는다. 제시된 꼴을 전개하면

$$A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma) = (A + B\cos\gamma)\cos\theta + B\sin\gamma\,\sin\theta.$$

이다. $B\sin\gamma = m$이고 $A + B\cos\gamma = l$이면 두 식은 모든 θ에 대하여 일치한다. $\sin\gamma\neq 0$이므로

$$B = \frac{m}{\sin\gamma}, \qquad A = l - m\cot\gamma,$$

로 잡을 수 있고, 이것이 구하는 극방정식이다. 역으로, 두 계수가 모두 0이 되지 않는 A, B에 대하여 방정식 $1/r = A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$는 $l = A + B\cos\gamma$, $m = B\sin\gamma$인 직선 $lx + my = 1$이다. 이 꼴은 $(r,\theta) \to (-r,\theta+\pi)$에 의해 변하지 않으므로, r의 부호를 어느 쪽으로 쓰든 직선 전체를 나타낸다는 점에 유의한다.

현 PQ

현을 $a/r = A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$ 꼴로 찾아보자. P와 Q에서는 $\theta = \gamma \mp \delta$이고 $a/r = 1 + e\cos\theta$이므로

$$A\cos(\gamma\mp\delta) + B\cos(\mp\delta) = 1 + e\cos(\gamma\mp\delta).$$

이 성립해야 한다. 두 점 모두에서 $\cos(\mp\delta) = \cos\delta$이므로, $A = e$, $B\cos\delta = 1$로 택하면 두 방정식이 한꺼번에 만족되며, $\cos\delta \neq 0$이므로 B를 구할 수 있다. 서로 다른 두 점은 직선 하나를 결정하므로 현 PQ는

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \sec\delta\,\cos(\theta-\gamma).}$$

이다. ($\cos\delta = 0$이면 P와 Q는 $\theta = \gamma \mp \frac{\pi}{2}$에 있고, PQ는 초점현(focal chord)이 된다. 원점을 지나는 직선은 $1/r = \ldots$ 꼴의 방정식을 갖지 않으며, 이 때문에 그 경우는 제외된다.)

? **생각해 보기** 현이 원뿔곡선과 P와 Q에서만 만난다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

각 θ에서 원뿔곡선 위의 점은 $a/r = 1 + e\cos\theta$인 점 하나뿐이다. 현이 그 점을 지나는 것은 $1 + e\cos\theta = e\cos\theta + \sec\delta\cos(\theta-\gamma)$, 즉 $\cos(\theta-\gamma) = \cos\delta$일 때이고, 따라서 $\theta = \gamma \pm \delta$일 때뿐이다. $e\cos\theta$ 항이 소거되는데, 바로 이것이 $A = e$로 택한 이유이다.

$\theta = \gamma$에서의 접선

$\theta = \gamma$인 점 G에서의 접선은 P와 Q가 G로 다가갈 때, 즉 $\delta \to 0$일 때 현 PQ의 극한이다. 현의 방정식은 δ에 연속적으로 의존하고 $\sec\delta \to 1$이므로 접선은

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta-\gamma).}$$

이다. 확인해 보면, 이 직선은 원뿔곡선과 $\cos(\theta-\gamma) = 1$인 곳, 즉 G에서만 만나므로 접선답게 행동한다. 더 결정적으로, 직교좌표로 쓰면 접선은 $(e+\cos\gamma)x + (\sin\gamma)y = a$이고 법선벡터(normal vector)는 $(e+\cos\gamma,\ \sin\gamma)$이다. 원뿔곡선은 $r = a - ex$이며, 곡선을 따라 미분하면 $(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)/r = -e\,\mathrm{d}x$, 즉 $(e + x/r)\,\mathrm{d}x + (y/r)\,\mathrm{d}y = 0$을 얻는다. G에서 $x/r = \cos\gamma$이고 $y/r = \sin\gamma$이므로, 그 점에서 곡선의 법선은 같은 벡터이다.

마지막 부분

초점 S를 원점에 두어 원뿔곡선을 $a/r = 1 + e\cos\theta$라 하고, L과 M을 각각 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$인 점이라 하자.

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \qquad \delta = \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha),$$

로 두면 L과 M은 위의 P, Q와 똑같이 $\theta = \gamma - \delta$와 $\gamma + \delta$에 있다. 앞의 결과에 의해 L과 M에서의 접선은

$$\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha), \qquad \frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta).$$

이다. T에서는 두 식이 모두 성립하므로 $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$이다. 따라서 $\theta - \alpha = \theta - \beta + 2k\pi$이거나(이 경우 $L = M$이 된다)

$$\theta - \alpha = -(\theta - \beta) + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + k\pi = \gamma + k\pi.$$

이다. 그러므로 T는 S를 지나고 방향이 $\theta = \gamma$인 직선 위에 있으며,

$$r_T = \frac{a}{e\cos\gamma + \cos\delta}$$

이다(두 접선이 평행하여 T가 존재하지 않는 것은 정확히 $e\cos\gamma + \cos\delta = 0$일 때이다).

반직선 SL과 SM은 각각 $\alpha = \gamma - \delta$와 $\beta = \gamma + \delta$ 방향을 향한다(타원(ellipse)이나 포물선(parabola)처럼 L과 M에서 $r > 0$인 보통의 경우를 생각한다). 직선 $\theta = \gamma$는 이 두 반직선 각각과 각 δ를 이루므로, 직선 ST는 각 LSM을 이등분한다. ($r_T < 0$이면 T는 반대쪽 반직선 위에 있고, ST는 우각(reflex angle) LSM을 이등분한다. 이때에도 각 LST와 MST는 여전히 같다.)

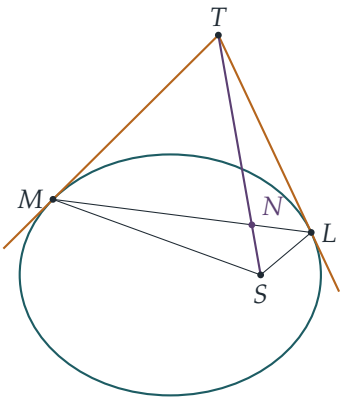
ST가 LM과 만나는 점을 구하기 위해 그 점을 N이라 하자. 현 LM은 $a/r = e\cos\theta + \sec\delta\cos(\theta - \gamma)$이고, ST 위에서는 $\theta = \gamma$이므로

$$\frac{a}{SN} = e\cos\gamma + \sec\delta \quad \Longrightarrow \quad SN = \frac{a\cos\delta}{1 + e\cos\gamma\cos\delta}.$$

이다. $2\cos\gamma\cos\delta = \cos(\gamma - \delta) + \cos(\gamma + \delta) = \cos\alpha + \cos\beta$를 이용하면 이는

$$\boxed{N\text{의 위치는} \theta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad r = \frac{2a\cos\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{2 + e\cos\alpha + e\cos\beta}.}$$

가 된다. LM이 초점현일 때($\cos\delta = 0$) 이 식은 당연히 $N = S$를 준다.



검산

- 원(circle)($e = 0$, 반지름 a)으로 확인해 보자. 접선은 $a/r = \cos(\theta - \gamma)$, 즉 $x\cos\gamma + y\sin\gamma = a$가 되며, 이는 익숙한 $x^2 + y^2 = a^2$의 접선이다.
- 삼각형 LSM에서 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)에 따르면 $LN : NM = SL : SM$이다. $a = 1.5$, $e = 0.6$, $\alpha = 40°$, $\beta = 160°$(그림의 경우)로 두면 $SN \approx 0.791$이고, 비율도 수치적으로 맞는다.
- 컴퓨터로 수천 개의 무작위 원뿔곡선과 점에 대하여 현과 접선의 방정식, ST의 방향, 각의 상등, SN의 공식을 검사하였다.

흔한 실수

- $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$를 $+$ 부호만으로 푸는 것. 그 갈래에서는 아무것도 얻지 못하며($\alpha = \beta$가 필요하다), 쓸모 있는 해는 $-$ 부호에서 나온다.
- A를 자유롭게 고를 수 있다는 점을 활용하지 않는 것. $A = e$로 택해야 원뿔곡선과의 교점을 구할 때 $e\cos\theta$ 항이 소거된다.

STEP 너머

ST가 $\angle LSM$을 이등분한다는 결과는 원뿔곡선의 고전적인 초점 성질이며, 직선 LM은 원뿔곡선에 대한 T의 **극선**(polar)이다. 극–극선 쌍대성(pole–polar duality)은 사영기하학(projective geometry)으로 들어가는 관문으로, 사영기하학에서는 비퇴화(non-degenerate) 원뿔곡선이 모두 동등하며 접함(tangency)과 결합(incidence)이 순수하게 대수적인 문제가 된다. Brannan, Esplen, Gray의 *Geometry*(기하학)는 원뿔곡선과 사영기하학을 대학 1학년 수준에서 잘 다룬 책이다.

풀이

STEP III 1989, 문제 7

순수수학 • 층밀림 행렬

> **STEP III 1989, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q7

핵심 아이디어

모든 것은 두 단위벡터(unit vector)로 나타낼 때 가장 쉽다. 하나는 직선 $L\colon y = x\tan\alpha$ 방향의 $\mathbf{u}$이고, 다른 하나는 그에 수직인 $\mathbf{n}$이다. 층밀림(shear)은 각 점을 $\mathbf{u}$에 평행하게, L로부터의 부호 있는 거리(signed distance)에 비례하는 만큼 옮기므로 $\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$이다. 두 번째 부분에서는, 어떤 행렬이 $\mathbf{I} + k\mathbf{A}$와 교환 가능(commute)한 것은 $\mathbf{A}$와 교환 가능한 것과 정확히 동치라는 사실을 이용하면 번잡한 계산이 사라진다.

풀이

$s = \sin\alpha$, $c = \cos\alpha$라 하자. α가 예각이므로 $s > 0$이고 $c > 0$이다.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$$

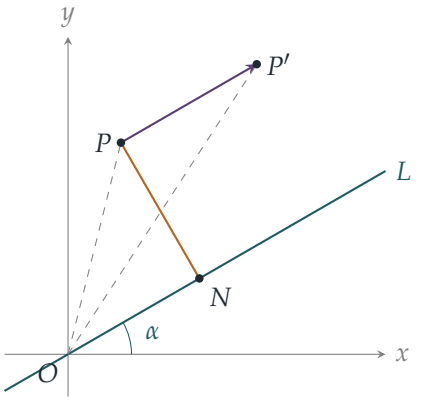
라 두면, $\mathbf{u}$는 L 방향으로 x축과 각 α를 이루는 단위벡터이고, $\mathbf{n}$은 L의 왼쪽 위를 향하는 단위 법선벡터(unit normal)이다.

M 구하기

$P = (x, y)$에 대해

$$d = \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OP} = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

라 하자. 이는 P에서 L까지의 **부호 있는** 거리이다. 그러면 $PN = |d|$이고, $d > 0$인 것은 P가 L 위쪽에 있는 것과 정확히 동치이다.



P를 L 위쪽에 잡자. 그러면 $d > 0$이다. (i)에 의해 $\overrightarrow{PP'}$는 $\mathbf{u}$ 방향이므로, $\overrightarrow{PP'} = \lambda\mathbf{u}$이고 $\lambda > 0$이다. 조건 (ii)도 이와 모순되지 않는다. 2차원 외적(cross product)은

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \times (\overrightarrow{OP} + \lambda\mathbf{u}) = \lambda\,(xs - yc) = -\lambda d < 0$$

이므로, OP에서 OP'으로의 회전은 요구한 대로 시계 방향이다. 조건 (iii)에서 $\lambda = k\,PN = kd$를 얻는다. (이 조건들이 함께 성립하려면 $k > 0$이어야 한다.) 따라서 L 위쪽의 모든 P에 대해

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + kd\,\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} + k\,\mathbf{u}\,(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP})$$

이다.

생각해 보기 지금까지 L 위쪽의 점만 사용했다. 그런데도 왜 $\mathbf{M}$이 완전히 결정되는가?

T는 선형(linear)이고, 사상 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + k\,\mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$도 선형이다. 두 사상은 L 위쪽의 열린 반평면에서 일치하며, 이 반평면은 일차독립(linearly independent)인 두 벡터(예를 들어 $\mathbf{n}$과 $\mathbf{n} + \mathbf{u}$)를 포함한다. 기저(basis)에서 일치하는 두 선형사상은 같다. 따라서 모든 벡터에 대해

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} + k\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & c \end{pmatrix} = \mathbf{I} + k\begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}$$

이다. 즉,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - k\sin\alpha\cos\alpha & k\cos^2\alpha \\ -k\sin^2\alpha & 1 + k\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}$$

이고, 이것이 요구한 결과이다. 검산 삼아 확인하면, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$이므로 $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}$이고, 따라서 L 위의 각 점은 고정된다. 또한 $\det\mathbf{M} = 1 - k^2s^2c^2 + k^2s^2c^2 = 1$인데, 층밀림이라면 마땅히 그래야 한다.

교환 조건

$\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix}$라 하자. $\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\mathbf{A}$이고 $\mathbf{I}$는 모든 행렬과 교환 가능하므로

$$\mathbf{X}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{X} = k(\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X})$$

이다. $k \neq 0$이므로, $\mathbf{X}$가 $\mathbf{M}$과 교환 가능한 것은 $\mathbf{A}$와 교환 가능한 것과 동치이다. 곱을 계산하면

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -psc - qs^2 & pc^2 + qsc \\ -rsc - ts^2 & rc^2 + tsc \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -psc + rc^2 & -qsc + tc^2 \\ -ps^2 + rsc & -qs^2 + tsc \end{pmatrix},$$

이므로

$$\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -(qs^2 + rc^2) & -c^2(t-p) + 2qsc \\ -s^2(t-p) - 2rsc & qs^2 + rc^2 \end{pmatrix}$$

이다. 이것이 영행렬인 것은 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad qs^2 + rc^2 = 0, \\ &\text{(b)} \quad c^2(t-p) = 2qsc, \\ &\text{(c)} \quad s^2(t-p) = -2rsc. \end{aligned}$$

$c \neq 0$이므로 (b)는 $t - p = 2q\tan\alpha$와 같다. $s \neq 0$이므로 (c)는 $t - p = -2r\cot\alpha$와 같다.

> ? **생각해 보기** 식은 세 개인데 문제에 주어진 조건에는 두 개만 있다. (a)는 어떻게 된 것인가?

(a)는 나머지 두 식에서 따라 나온다. $2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$이면, 양변에 $\frac{1}{2}sc$를 곱하여 $qs^2 = -rc^2$를 얻는데, 이것이 바로 (a)이다. 따라서

$$\mathbf{X}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{X} \iff t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$$

이다. 위의 모든 단계가 동치이므로 양방향 모두 성립한다. 이것이 구하는 필요충분조건(necessary and sufficient condition)이다.

검산

▶ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $k = 2$로 두면 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$를 얻는다. $y = x$ 위쪽으로 거리 $\frac{1}{\sqrt{2}}$만큼 떨어진 점 $(0,1)$은 $(1,2)$로 옮겨진다. 이는 45° 방향으로 $\sqrt{2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$만큼 이동한 것이며, 회전 방향은 시계 방향이다.

- $\mathbf{X} = \mathbf{M}$ 자신도 조건을 만족한다. $t - p = 2ksc$, $2q\tan\alpha = 2kc^2 \cdot \frac{s}{c} = 2ksc$이고 $-2r\cot\alpha = 2ks^2 \cdot \frac{c}{s} = 2ksc$이다. $\mathbf{I}$도 세 식의 값이 모두 0이 되어 조건을 만족한다.
- 수치적으로, 임의의 α, k와 L 위쪽의 임의의 P에 대해 $\mathbf{M}$은 (i)–(iii)을 재현했다. 조건을 만족하는 임의의 행렬은 10^{-8} 이내의 오차로 $\mathbf{M}$과 교환 가능했고, 조건을 만족하지 않는 임의의 행렬은 그렇지 않았다.

흔한 실수

- 모든 점에 대해 부호 없는 거리 PN을 사용하는 것. 변위는 **부호 있는** 거리의 k배이다. L 아래쪽의 점은 반대 방향으로 움직이며, 바로 이 때문에 T가 선형이 된다.
- 교환 조건에 대해 "if" 방향만(또는 "only if" 방향만) 증명하거나, $(1,1)$ 성분이 새로운 정보를 주지 않음을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

여기서 $\mathbf{M}$과 교환 가능한 행렬은 정확히 $a\mathbf{I} + b\mathbf{A}$ 꼴의 행렬이다. $t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$가 매개변수가 두 개인 족임을 확인해 보라. 이는 더 일반적인 사실의 한 예이다. $\mathbf{I}$의 상수배가 아닌 2×2 행렬에 대해, 그것과 교환 가능한 행렬은 정확히 $a\mathbf{I} + b\mathbf{M}$이다. $n \times n$ 행렬의 경우에는 최소다항식(minimal polynomial)이 특성다항식(characteristic polynomial)과 같을 때 이와 유사한 사실(교환 가능한 행렬은 $\mathbf{M}$의 다항식이다)이 성립한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 랭크 1 행렬(rank-one matrix) $\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$와 그 배경이 되는 아이디어를 전개한다.

풀이

STEP III 1989, 문제 8

순수수학 • 연립 미분방정식

> **STEP III 1989, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q8

핵심 아이디어

첫 번째 방정식은 y를 x와 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 나타낸다. 따라서 이 식을 한 번 더 미분하면 나타나는 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$를 두 번째 방정식으로 바꿔 넣을 수 있고, 그러면 y가 완전히 사라진다. 그 결과 상수계수(constant coefficients) 2계 선형 미분방정식(second-order linear differential equation)이 남는다. 이 방정식의 보조방정식(auxiliary equation)은 중근(repeated root)을 가지며, 강제항(forcing term) 가운데 하나가 바로 그 근과 일치한다. 이 공명(resonance)이 이 문제의 진짜 시험대이다.

풀이

y 소거하기

t에 대한 도함수를 점으로 나타낸다. $\dot{x} = 4(x - y)$를 미분하고 $\dot{y}$에 두 번째 방정식을 대입하면

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 4\dot{y} = 4\dot{x} - 4x + 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),$$

을 얻는다. 따라서

$$\boxed{\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),}$$

이고, 이 식에는 y가 들어 있지 않다.

x 구하기

여함수(*complementary function*). 보조방정식 $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$은 중근 $m = 2$를 가지므로 여함수는

$$x_c = (A + Bt)\,e^{2t}.$$

이다.

특수해(*particular integral*). 방정식이 선형이므로 두 강제항을 하나씩 따로 다룰 수 있다.

$48e^{-2t}$에 대해서는 $x = De^{-2t}$로 놓아 본다. 대입하면 $D(4+8+4)e^{-2t} = 48e^{-2t}$이므로 $D = 3$이다.

> **생각해 보기** $48e^{2t}$ 항에 대해서는 왜 Ce^{2t}는 물론이고 Cte^{2t}조차 통하지 않을까?

e^{2t}와 te^{2t}는 모두 이미 여함수에 들어 있으므로, 좌변은 이들을 0으로 보낸다. 2가 중근이므로 t^2e^{2t}까지 올라가야 한다. $x = Ct^2e^{2t}$로 놓아 보자. 깔끔하게 대입하는 방법은 $x = ue^{2t}$로 쓰는 것이다. 그러면

$$\dot{x} = (\dot{u} + 2u)e^{2t}, \qquad \ddot{x} = (\ddot{u} + 4\dot{u} + 4u)e^{2t},$$

이므로

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \ddot{u}\,e^{2t}.$$

이다. $u = Ct^2$이면 이 값은 $2Ce^{2t}$이므로 $2C = 48$, 곧 $C = 24$이다. (이 치환은 여함수가 왜 $(A+Bt)e^{2t}$인지도 보여 준다. $\ddot{u} = 0$이어야 하기 때문이다.)

따라서 일반해(general solution)는

$$x = (A + Bt)\,e^{2t} + 24t^2e^{2t} + 3e^{-2t}.$$

이다.

초기조건(*initial conditions*). 주어진 것은 $x(0) = 0$과 $y(0) = 0$뿐이다. 2계 방정식에는 $\dot{x}(0)$이 필요한데, 원래의 첫 번째 방정식이 이를 알려 준다. 곧 $\dot{x}(0) = 4\big(x(0) - y(0)\big) = 0$이다.

$x(0) = 0$에서 $A + 3 = 0$이므로 $A = -3$이다. 미분하면

$$\dot{x} = \big(B + 2A + 2Bt + 48t + 48t^2\big)e^{2t} - 6e^{-2t},$$

이므로 $\dot{x}(0) = B + 2A - 6 = 0$이고, 따라서 $B = 12$이다. 그러므로

$$\boxed{x = \left(24t^2 + 12t - 3\right)e^{2t} + 3e^{-2t}.}$$

이다.

y 구하기

첫 번째 방정식에서 $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$이므로 미분방정식을 또 풀 필요가 없다. $A = -3$, $B = 12$이면

$$\dot{x} = \left(48t^2 + 72t + 6\right)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

이므로

$$\begin{aligned} y &= \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t} - \left(12t^2 + 18t + \tfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(12t^2 - 6t - \tfrac{9}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

이다. 곧

$$\boxed{y = \tfrac{3}{2}\left(8t^2 - 4t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}.}$$

이다.

검산

- $t = 0$에서 $y(0) = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$이다. 이 조건은 직접 부과한 적이 없으므로 진정한 검산이 된다.
- y를 소거하는 데에만 사용한 두 번째 방정식도 성립해야 한다. 미분하면

  $$\dot{y} = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t},$$

  이고

  $$x - 12\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right) = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t}.$$

  이다. 두 식이 일치한다.
- 수치적으로, 룽게–쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 원래의 연립방정식을 $(0, 0)$에서부터 앞으로 진행시키면 $x(1) \approx 244.2449$, $y(1) \approx 11.6926$을 얻는다. 공식으로 구한 값은 $33\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-2}$와 $\frac{3}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2}$이며, 이들은 같은 값을 가진다.

흔한 실수

- 공명하는 항에 대해 $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$를 시도하는 것. 근 2가 중근이므로 $t^2\mathrm{e}^{2t}$가 필요하다.
- 두 번째 초기조건이 어디서 오는지 알아차리지 못하는 것. $\dot{x}(0) = 0$이라는 값은 첫 번째 방정식과 $x(0) = y(0)$ 속에 숨어 있다.
- y에 대한 2계 방정식을 따로 푸는 것. 그러면 새로운 상수가 두 개 생기고, 이를 다시 x와 맞추어야 한다. $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$를 이용하면 이런 수고를 피할 수 있다.

STEP 너머

y를 소거하는 것은 선형 연립방정식을 푸는 한 가지 방법이다. 대학에서는 이를 $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$로 쓴다. 여기서 M은 중복 고윳값(eigenvalue) 2를 가지지만 고유벡터(eigenvector)는 하나뿐이므로 대각화(diagonalisation)할 수 없으며, $t\,\mathrm{e}^{2t}$ 항이 생기는 이유가 바로 여기에 있다. 조르당 표준형(Jordan normal form)과 행렬 지수함수(matrix exponential) e^{Mt}를 쓰면 이를 엄밀하게 설명할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 고윳값이 중복되는 경우를 포함하여 선형 연립미분방정식을 다룬다.

풀이

STEP III 1989, 문제 9

순수수학 • 거듭제곱급수의 합

> **STEP III 1989, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q9

핵심 아이디어

각 급수는 익숙한 거듭제곱급수(power series) $\sum a_r x^r$에 특정한 x 값을 대입한 것이다. 따라서 할 일은 그것이 어느 급수인지 알아보는 것이다. 첫 번째와 두 번째 급수는 기하급수(geometric series) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$에서 나온다. 기하급수를 미분하면 인수 r이 앞으로 내려오고, 적분하면 r로 나누어진다. 세 번째 급수에 나오는, 홀수들의 곱을 계승으로 나눈 꼴은 음의 분수 지수를 가진 이항전개(binomial expansion)에서 나타나는 꼴이다.

풀이

풀이 전체에서 $|x| < 1$일 때 성립하는 다음 식을 사용한다.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1}.$$

문제에서 수렴(convergence)은 신경 쓰지 않아도 된다고 했으므로, 항별로(term by term) 자유롭게 미분하고 적분한다. (여기서 사용하는 세 x 값은 모두 수렴구간(interval of convergence)의 안쪽 깊숙이 있으므로, 실제로도 이렇게 해도 문제가 없다.)

소문항 (i)

일반항은 $r\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$이므로, $x = \frac{1}{2}$에서 $\sum r x^{r-1}$의 값을 구하면 된다. 기하급수를 항별로 미분하면

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$x = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

소문항 (ii)

일반항은 $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$이다. r로 나누는 것은 미분으로 되돌려지므로, 이번에는 적분한다. 기하급수를 0부터 x까지 적분하면

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x).$$

여기서는 지수가 하나씩 크므로 ($x \neq 0$일 때) x로 나눈다.

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} x^{r-1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

$x = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} + \cdots = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 2.$$

소문항 (iii)

다음과 같이 놓는다.

$$c_k = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!}, \qquad c_0 = 1.$$

? **생각해 보기** 홀수들의 곱을 $k!$로 나눈 꼴을 전에 어디에서 보았는가?

$(1+y)^{-1/2}$의 이항전개에서 보았다. y^k의 계수는

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_k.$$

따라서 $y = -2x$로 놓으면 부호와 2의 거듭제곱이 상쇄된다.

$$(1-2x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1 + x + \frac{1 \times 3}{2!}x^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{3!}x^3 + \cdots,$$

이 식은 $|2x| < 1$일 때 성립한다.

이제 주어진 급수를 주의 깊게 살펴보자. 일반항은 $c_k \cdot \frac{1}{3^{k-1}} = 3c_k\left(\frac{1}{3}\right)^k$이고, 급수는 $k = 2$부터 시작한다(첫째항이 $\frac{1\times3}{2!} \times \frac{1}{3}$이다). 따라서 주어진 급수는 위 급수에 $x = \frac{1}{3}$을 대입하고

$k=0, k=1$인 항을 뺀 것의 3배이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{1}{3^{k-1}} &= 3\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\tfrac{1}{3}\right)^k - c_0 - c_1 \cdot \tfrac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(\left(1-\tfrac{2}{3}\right)^{-1/2} - 1 - \tfrac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(\sqrt{3} - \tfrac{4}{3}\right) \\ &= 3\sqrt{3} - 4.\end{aligned}$$

여기서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{3}$이고, $x = \frac{1}{3}$은 $|2x| < 1$을 만족한다.

검산

- 소문항 (i): 부분합(partial sum) 1, 2, 2.75, 3.25, 3.5625, …은 4를 향해 조금씩 커지고, 200개 항을 더하면 기계 정밀도 수준에서 4가 된다.
- 소문항 (ii): $2\ln 2 \approx 1.3863$이고, 부분합 1, 1.25, 1.3333, 1.3646, …도 이와 일치한다.
- 소문항 (iii): 항은 0.5, 0.2778, 0.1620, …이고, 400개 항을 더하면 1.196152…가 되어 $3\sqrt{3}-4 \approx 1.1962$와 일치한다. 간단한 타당성 검사도 해 보자. 답은 양수이고 첫째항 0.5보다 커야 한다. 또한 $k=1$인 항을 빼는 것을 잊으면 $3\sqrt{3}-3 \approx 2.196$이 나오는데, 항들이 대략 기하급수적으로 줄어들므로 이 값은 너무 크다. 따라서 이런 실수는 걸러진다.

흔한 실수

- (ii)에서 x로 나누는 것을 잊는 실수: $x=\frac{1}{2}$에서 $-\ln(1-x)$는 $\ln 2$가 되는데, 이는 답의 절반이다.
- (iii)에서 급수가 $k=2$부터 시작한다는 것을 알아채지 못하거나, $\frac{1}{3^{k-1}} = 3\cdot\frac{1}{3^k}$에서 생기는 추가 인수 3을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

거듭제곱급수를 항별로 미분하고 적분하는 것은 수렴반지름(radius of convergence) 안에서 정당화된다. 거듭제곱급수는 수렴반지름보다 엄격히 안쪽에 있는 모든 닫힌구간에서 균등수렴(uniform convergence)하기 때문이다. 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준적인 결과이며, 이 문제에서 "수렴 문제는 고려하지 않아도 된다"고 해도 괜찮은 이유이다. 정수가 아닌 지수에 대한 이항급수도 바로 이런 종류의 거듭제곱급수이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 균등수렴과 거듭제곱급수를 명료하게 다룬다.

풀이

STEP III 1989, 문제 10

순수수학 • 리만 합

STEP III 1989, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.1 절 **적분이란 무엇인가?**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/riemann.html

핵심 아이디어

연속한 정수들의 곱은 r^5의 "하강 거듭제곱(falling power)" 판이며, r^5를 적분하는 것과 똑같이 망원급수(telescoping) 방식으로 합을 구할 수 있다. 즉 연속한 두 개의 여섯 항 곱의 차는 다섯 항 곱의 여섯 배이다. 소문항 (i)과 (ii)는 $\sum r^5$보다 조금 크고 조금 작은 곱의 합을 준다. 그러면 소문항 (iii)에서는 x^5의 두 리만 합(Riemann sum)을 이 경계들 사이에 끼워 넣는데, 두 경계는 같은 극한으로 수렴한다.

풀이

소문항 (i)

$P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$라 하자. 그러면 $P(r)$와 $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$는 다섯 개의 인수 $r(r+1)\cdots(r+4)$를 공통으로 가지므로

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\big[(r+5) - (r-1)\big] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

$r = 1$부터 n까지 더하면 우변이 차례로 소거된다.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) &= \tfrac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}\big[P(r) - P(r-1)\big] = \tfrac{1}{6}\big[P(n) - P(0)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5), \end{aligned}$$

이는 $P(0) = 0$이기 때문이다. (n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로도 똑같이 증명할 수 있으며, 귀납 단계는 같은 인수분해이다.)

이제 부등식을 이끌어 내자. $r \geq 1$이면 $k = 1, 2, 3, 4$에 대하여 각 인수가 $r + k > r > 0$을 만족하므로

$$r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \qquad (r \geq 1).$$

이 엄격한 부등식(strict inequality)들을 $r = 1, \ldots, n$에 대하여 더하면 $\sum_{r=1}^{n} r^5 < \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$를 얻으며, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)

이번에는 r^5보다 **작은** 곱이 필요하므로 인수들을 아래로 이동시켜 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$를 사용한다. $Q(r) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r(r+1)$이라 하면, 같은 인수분해에 의하여

$$\begin{aligned} Q(r) - Q(r-1) &= (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r\big[(r+1) - (r-5)\big] \\ &= 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r. \end{aligned}$$

$r = 0$부터 $n-1$까지 더하면

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n-1} (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r &= \tfrac{1}{6}\big[Q(n-1) - Q(-1)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}\,(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n, \end{aligned}$$

이는 $Q(-1) = (-5)(-4)(-3)(-2)(-1)\cdot 0 = 0$이기 때문이다.

> **생각해 보기** 합에 들어가는 모든 r에 대하여 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r < r^5$가 성립하는가?

꼭 그렇지는 않으며, 바로 여기서 $n > 1$이라는 조건이 필요하다. 항별로 비교해 보자.

- $r = 0$: 양변이 모두 0이므로 등호만 성립한다.
- $r = 1, 2, 3, 4$: 곱에 0인 인수가 있으므로 곱은 $0 < r^5$이다.
- $r \geq 5$: $k = 1, 2, 3, 4$에 대하여 모든 인수가 $0 < r - k < r$를 만족하므로 곱은 $< r^5$이다.

따라서 모든 $r \geq 0$에 대하여 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r \leq r^5$이고, $r \geq 1$이면 항상 엄격한 부등식이 성립한다. $n > 1$이면 $r = 0$부터 $n-1$까지의 합에 $r = 1$인 항이 들어가므로 적어도 하나의 부등식이 엄격하게 성립하고,

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

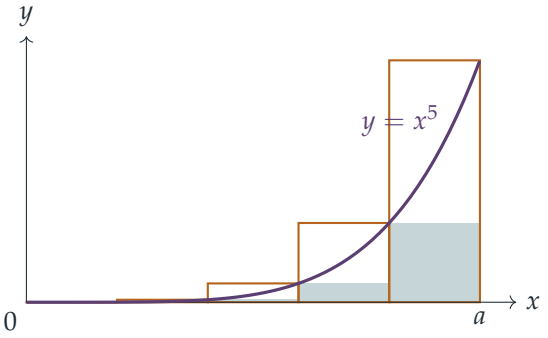
($n = 1$이면 양변이 모두 0이며, 이것이 조건이 필요한 이유이다.)

소문항 (iii)

증가함수(increasing function)인 $f(x) = x^5$을 택하자. 정의에 나오는 두 합은

$$L_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1} r^5, \qquad U_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n} r^5.$$

$a > 0$이면 이들은 곡선 아래와 위에 놓인 직사각형들의 넓이이다.



(색칠한 부분: L_n, 테두리: U_n, 여기서 $n = 5$이다.) 그러나 아래의 계산에는 $a > 0$이 필요하지 않다. $a \neq 0$인 모든 a에 대하여 $a^6 > 0$이고, $a = 0$이면 모든 합이 0이므로 자명하다.

L_n에는 소문항 (ii)를 ($n > 1$일 때), U_n에는 소문항 (i)을 적용하면

$$L_n > \frac{a^6}{6n^6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

$$U_n < \frac{a^6}{6n^6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

또한 $U_n - L_n = \frac{a^6}{n^6}(n^5 - 0^5) = \frac{a^6}{n} > 0$이므로, 이를 모두 합치면

$$\frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

$n \to \infty$일 때 각 괄호는 1로 수렴하므로 바깥쪽의 두 경계는 모두 $\frac{1}{6}a^6$으로 수렴한다. 조임 정리(squeeze theorem, sandwich theorem)에 의하여 L_n과 U_n은 모두 수렴하고, 그 극한은 같은 값 $\frac{1}{6}a^6$이다. 따라서 정의에 나오는 두 극한이 모두 존재하고 서로 같으므로

$$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}a^6.$$

검산

- (i)의 작은 경우: $n = 1$이면 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120 = \frac{1}{6}\cdot720$이고, $n = 2$이면 $120 + 720 = 840 = \frac{1}{6}\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$이다.

- (i)과 (ii)의 항등식과 두 부등식은 200 이하의 모든 n에 대하여 정확히 성립한다(컴퓨터로 확인함).
- $a = 1$, $n = 1000$이면 $L_n \approx 0.166167$, $U_n \approx 0.167167$로 $\frac{1}{6} \approx 0.166667$의 양쪽에 놓이고, $U_n - L_n = 0.001 = a^6/n$이다.

흔한 실수

- 모든 $r \geq 0$에 대하여 $(r-4)\cdots r < r^5$라고 주장하는 것: $r = 0$에서는 등호가 성립하므로, 엄격한 부등식을 얻으려면 $r = 1$인 항, 즉 $n > 1$이 필요하다.
- L_n과 U_n이 유계(bounded)라는 것만 보이거나, $U_n - L_n \to 0$이라는 것만 보이는 것. 정의에서는 두 극한이 모두 **존재**해야 하며, 조임 정리는 존재성과 그 값을 한꺼번에 준다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 리만 적분(Riemann integral, 또는 다르부 적분(Darboux integral))을 직접 손으로 다루어 보는 것이다. 함수의 하합(lower sum)과 상합(upper sum)을 서로 조여 붙일 수 있을 때 그 함수는 적분가능(integrable)하며, 단조함수(monotonic function)의 경우 그 차는 언제나 $(b-a)\,|f(b) - f(a)|/n$이므로 닫힌구간에서 정의된 모든 단조함수는 적분가능하다. (i)과 (ii)의 곱은 "상승 계승(rising factorial)" 거듭제곱과 "하강 계승(falling factorial)" 거듭제곱으로, 이를 이용하면 유한 차분법(calculus of finite differences)이 보통의 미적분과 똑같은 모습이 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 방식으로 적분을 전개한다.

풀이

STEP III 1989, 문제 11

역학 • 구의 비스듬한 충돌

STEP III 1989, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q11

핵심 아이디어

먼저 충돌 순간의 기하를 확정한다. 이것이 중심선(line of centres)을 결정하고, 나머지는 모두 여기서 따라 나온다. 그다음 한 구가 구속되어 있을 때 매끄러운 구들의 비스듬한 충돌(oblique impact)을 다루는 표준 절차를 따른다. 두 구 사이의 충격량(impulse)은 중심선을 따라 작용한다. 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)은 이 선 방향의 속도 성분에 적용된다. 그리고 운동량 보존(conservation of momentum)은 끈이나 회전축이 자체적으로 충격량을 가하기 때문에 성립하지 않으므로, 그 대신 구속이 영향을 주지 않는 방정식을 사용한다. 끈에 매달린 A에 대해서는 수평 방향 운동량을, 막대의 경우에는 O에 대한 각운동량(angular momentum)을 쓴다.

풀이

충돌 순간의 기하

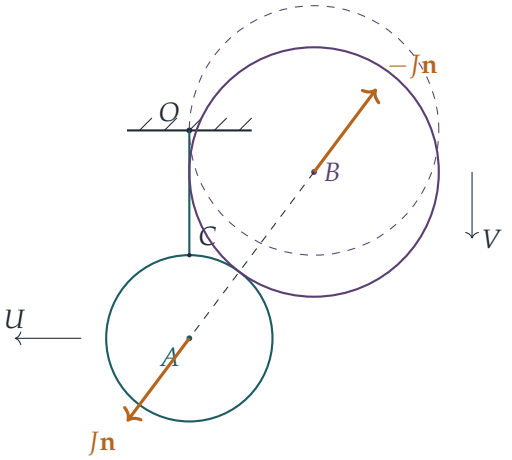
두 구는 모두 매끄럽고 균일하며, 끈은 가볍고 늘어나지 않는다고 모형화한다. 충돌 전에 끈은 수직으로 늘어져 있다. C가 직선 OA 위에 있으므로 $OA = 3a + 2a = 5a$이고, A는 O의 바로 아래에 있다.

구 B는 $OB = 3a$가 수평인 상태에서 출발하여 수직으로 떨어진다. B가 거리 h만큼 떨어졌다고 하자. 충돌 순간 두 구는 맞닿으므로 $AB = 2a + 3a = 5a$이다. A와 B의 수평 거리는 $3a$이므로, 수직 거리는 $\sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$이다. 따라서 B는 A보다 $4a$ 위, 곧 O의 높이보다 a 아래에 있고, $h = a$이다.

그러므로 중심선은 3–4–5 삼각형을 이룬다. B에서 A로 가면서 (OA 쪽으로) 수평 방향으로 $3a$, 아래로 $4a$ 간다. $\mathbf{n}$을 B에서 A를 향하는 단위벡터라 하고, x축을 OA에서 B를 향하는 수

평 방향으로 잡는다. 그러면

$$\mathbf{n} = \left(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}\right).$$



점선으로 그린 구는 B의 출발 위치를, 실선으로 그린 구는 충돌 순간의 위치를 나타낸다.

끈이 있을 때의 충돌

두 구 사이 충격량의 크기를 J라 하자. 그러면 A는 $J\mathbf{n}$을, B는 $-J\mathbf{n}$을 받는다. 두 구는 매끄러우므로 $J\mathbf{n}$은 중심선을 따라 작용하며 A를 지난다. 끈의 충격량은 OC 방향으로 작용하는데, 이 역시 A를 지난다. 따라서 구 A를 회전시키는 것은 아무것도 없고, A는 O를 중심으로 하는 반지름 $5a$인 원 위를 움직이는 입자처럼 운동한다. 충돌 직후 끈은 여전히 수직이므로 A는 음의 x 방향으로 속력 U로 수평 운동한다.

구 A, 수평 방향. 끈은 수평 방향 충격량을 주지 않으므로

$$3mU = \tfrac{3}{5}J, \qquad \text{곧} \qquad J = 5mU.$$

(수직 방향으로는 끈이 위쪽으로 충격량 $\frac{4}{5}J$를 가하여 $J\mathbf{n}$의 아래쪽 성분을 상쇄한다. 이 값이 양수이므로 끈은 실제로 팽팽한 상태를 유지한다.)

구 B. 충돌 전 $\mathbf{v}_B = (0, -V)$이고, 이것의 $\mathbf{n}$ 방향 성분은 $\frac{4}{5}V$이다. 충격량 $-J\mathbf{n}$은 이 성분만 바꾸며, 이를 $J/(25m)$만큼 줄인다.

$$\mathbf{v}_B' \cdot \mathbf{n} = \tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m} = \tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U.$$

? **생각해 보기** 왜 중심선 방향으로 그냥 운동량을 보존하면 안 될까?

끈이 A에 가하는 충격량은 수직 방향이고, 이는 $\mathbf{n}$ 방향 성분을 가진다. 그러므로 $\mathbf{n}$ 방향의 전체 운동량은 변한다. 외부 충격량이 작용하지 않는 유일한 방향은 수평 방향이며, 그래서 A에 대해 그 방정식을 사용한 것이다.

반발. A는 처음에 정지해 있으므로 $\mathbf{n}$ 방향의 접근 속력은 $\frac{4}{5}V - 0$이다. 분리 속력은 $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}'_B \cdot \mathbf{n}$이고, 여기서 $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} = (-U)(-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}U$이다. 따라서

$$\tfrac{3}{5}U - \left(\tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U\right) = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{4}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{4}{5}U = \tfrac{7}{5}V \quad\Longrightarrow\quad U = \tfrac{7}{4}V.$$

막대가 있을 때의 충돌

이제 구와 막대는 O를 중심으로 회전하는 하나의 강체를 이룬다. 회전축은 어느 방향으로든 충격량을 가할 수 있으므로 수평 방향 운동량은 더 이상 보존되지 않는다. 그러나 회전축의 충격량은 O에서 작용하므로 O에 대한 모멘트를 취한다. 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해 O에 대한 이 강체의 관성 모멘트(moment of inertia)는

$$I = \tfrac{2}{5}(3m)(2a)^2 + 3m(5a)^2 = \tfrac{24}{5}ma^2 + 75ma^2 = \tfrac{399}{5}ma^2.$$

충격량 $J\mathbf{n}$은 O보다 깊이 $5a$ 아래에 있는 A를 지나 작용한다. 이 중 수평 성분 $\frac{3}{5}J$만이 O에 대한 모멘트를 가지며, 그 모멘트는 $5a \cdot \frac{3}{5}J = 3aJ$이다. 충돌 직후 강체의 각속력을 ω라 하면 A는 속력 $U' = 5a\omega$로 수평 운동하고,

$$I\omega = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{399}{5}ma^2 \cdot \frac{U'}{5a} = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad J = \tfrac{133}{25}\,mU'.$$

B에 대한 방정식과 반발 방정식은 $\mathbf{n}$ 방향 성분만 포함하므로 앞에서와 똑같다. 따라서

$$\tfrac{3}{5}U' - \left(\tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m}\right) = \tfrac{3}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{133}{625}\right)U' = \tfrac{7}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{508}{625}U' = \tfrac{7}{5}V,$$

이므로 $U' = \frac{875}{508}V$이다. 이를 $U = \frac{7}{4}V$와 비교하면

$$\frac{U'}{U} = \frac{875}{508}\cdot\frac{4}{7} = \frac{500}{508} = \frac{125}{127},$$

이므로 충돌 직후 A의 속력은 요구한 대로 $125U/127$이다.

답이 앞의 경우보다 조금 작은 것은 이치에 맞다. 끈이 있을 때 A는 질량 $3m$인 입자처럼 수평 운동에 저항한다. 막대가 있을 때는 구가 회전도 시작해야 하므로, A에서의 유효 수평 질량은 $I/(5a)^2 = \frac{399}{125}m$이 되어 $3m$보다 약간 크다.

검산

- 에너지: $m = a = V = 1$로 두면 충돌 전 운동 에너지는 12.5이다. 충돌 후에는 끈의 경우 11.625, 막대의 경우 약 11.58이다. $e < 1$일 때 마땅히 그래야 하듯이 둘 다 더 작다.

- 탄성 극한: $e = 1$이고 끈이 있는 경우, 같은 단계를 거치면 $\frac{4}{5}U = \frac{8}{5}V$, 곧 $U = 2V$가 되고 운동 에너지가 정확히 보존된다. 이로써 부호가 맞음을 확인할 수 있다.
- $a = m = V = 1$로 두고 컴퓨터로 두 충돌을 정확한 분수로 풀었다. 그 결과 $U = 7/4$, $U' = 875/508$을 얻었고, 비는 $125/127$이었다. 또한 B의 접선 방향 속도가 변하지 않는다는 것과 B가 접촉 전에 거리 a만큼 떨어진다는 것도 확인하였다.

흔한 실수

- 중심선 방향으로 전체 운동량을 보존하는 것. 끈이나 회전축이 그 방향 성분을 가진 외부 충격량을 가한다.
- 막대에 달린 구가 회전한다는 사실을 잊는 것. O에 대한 관성 모멘트에는 $3m(5a)^2$뿐만 아니라 $\frac{2}{5}(3m)(2a)^2$ 항도 필요하다.
- 중심선을 45° 기울어진 것으로 보거나 수직인 것으로 보는 것. 맞닿는 조건이 중심선을 3–4–5 삼각형으로 확정한다.

STEP 너머

구속된 충돌은 **강체의 충격 운동**(impulsive motion of rigid bodies)을 처음 맛보는 것이다. 일반적인 규칙은 고정된 회전축에서의 충격량이 그 회전축에 대한 각운동량 방정식에서 빠진다는 것이다. 이는 **타격 중심**(centre of percussion)이라는 개념으로 이어진다. 타격 중심이란 회전축에 매달린 물체를 쳤을 때 회전축이 충격을 전혀 느끼지 않게 되는 점으로, 크리켓 배트에 "스위트 스폿"이 있는 이유가 바로 이것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 각운동량과 강체의 충격량을 정확히 이 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 1989, 문제 12

역학 • 회전 좌표계

> **STEP III 1989, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q12

핵심 아이디어

평면이 매끄럽고 막대는 가벼우며 자유롭게 회전하도록 고정되어 있으므로, P에 작용하는 수평 방향의 힘은 막대 방향으로만 작용한다. 따라서 AP에 수직인 방향으로 P의 가속도 성분은 0이어야 한다. 이 성분을 구한 뒤 이를 0으로 놓으면 ϕ에 대한 진자 방정식(pendulum equation)을 얻고, 흔히 쓰는 "ϕ를 곱한 뒤 적분하는" 기법으로 ϕ를 구할 수 있다.

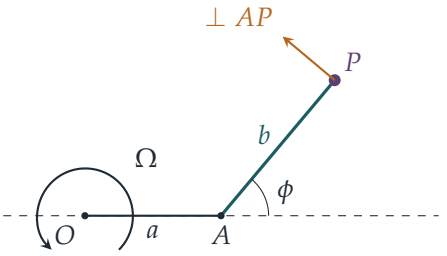
풀이

모형과 설정

P를 매끄러운 평면 위의 입자로, 막대를 A에서 자유롭게 회전하는 가볍고 휘지 않는 강체로 모형화한다. 고정된 좌표계, 즉 관성 좌표계(inertial frame)에서 생각한다. 평면 위의 위치를 복소수로 나타내되, O를 원점으로 하고 $t = 0$일 때의 OA 방향을 실축으로 잡으며, $\Omega > 0$을 시계 반대 방향으로 잡는다. A는 평면에 고정되어 있으므로 반지름이 a인 원 위를 움직이고, AP는 OA의 연장선과 각 ϕ를 이루는데, 이 연장선 자체는 Ωt만큼 회전해 있다. 따라서 $\theta = \Omega t + \phi$로 두면

$$z_A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \qquad z_P = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

여기서 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$는 AP 방향의 단위벡터이고, $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$는 ϕ가 증가하는 방향으로 AP에 수직인 단위벡터이다.



가속도의 수직 성분

$\dot\theta = \Omega + \dot\phi$이고 $\ddot\theta = \ddot\phi$임(Ω가 상수이므로)을 이용하여 미분하면

$$\dot z_P = \mathrm{i}a\Omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathrm{i}b(\Omega+\dot\phi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\ddot z_P = -a\Omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b\big(\mathrm{i}\ddot\phi - (\Omega+\dot\phi)^2\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

AP 방향과 그에 수직인 방향으로 분해하기 위해 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi)$로 쓴다. 그러면

$$\ddot z_P = \big[-a\Omega^2\cos\phi - b(\Omega+\dot\phi)^2\big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \big[\,b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi\,\big]\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

따라서 P의 가속도 중 AP에 수직이고 ϕ가 증가하는 방향의 성분은

$$\boxed{\,b\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + a\Omega^2\sin\phi\,}$$

이다. (첫째 항은 A를 중심으로 하는 원운동에서 익숙한 $b\ddot\phi$이다. 둘째 항은 A 자신이 O를 향해 갖는 구심가속도(centripetal acceleration) $a\Omega^2$를 막대에 수직인 방향으로 분해한 것에서 나온다.)

$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ 구하기

생각해 보기 왜 이 가속도 성분은 0이어야 하는가?

P에 작용하는 힘은 무게와 수직항력(둘 다 연직 방향이고 서로 평형을 이룬다), 그리고 막대가 주는 힘뿐이며, 마찰력은 없다(평면이 매끄럽기 때문이다). A에서 자유롭게 회전하도록 고정된 가벼운 막대는 자기 길이 방향으로만 밀거나 당길 수 있다. 따라서 AP에 수직인 수평 방향의 힘은 없으며, 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 의해

$$b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi = 0.$$

이것이 진자 방정식이다. $\dot\phi$를 곱하고 적분하면

$$\tfrac{1}{2}b\dot\phi^2 = a\Omega^2\cos\phi + C.$$

초기 조건. 처음에 O, A, P는 한 직선 위에 있다. $b > a$이므로 P는 O와 A 사이에 있을 수 없고, P가 A 너머에 있다고 하면 $t = 0$에서 $\phi = 0$이다. 그러면 두 지수함수가 모두 1이 되어

$$\dot{z}_P(0) = \mathrm{i}\big[(a+b)\Omega + b\dot{\phi}(0)\big],$$

이고, 이 속도는 OP(실축)에 수직이다. $(a+b)\Omega$는 바로 P 아래에 있는 평면 위 점의 속력이고, $b\dot{\phi}(0)$은 평면에 대한 P의 상대 속력임에 유의하자. 문제에 인쇄된 속력은 $(a+2\sqrt{ab})\Omega$이지만, 이는 $(a+b+2\sqrt{ab})\Omega = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\Omega$의 오식으로 보이며, 바로 이 값이 주어진 결과를 이끌어 낸다(끝의 참고 참조). 이 값을 쓰면 P는 평면에 대해 $2\sqrt{ab}\,\Omega$의 속력으로 움직이므로

$$\dot{\phi}(0) = 2\Omega\sqrt{a/b}.$$

에너지 방정식에 $\phi = 0$을 대입하면 $\frac{1}{2}b\cdot 4a\Omega^2/b = a\Omega^2 + C$이므로 $C = a\Omega^2$이고

$$\tfrac{1}{2}b\dot{\phi}^2 = a\Omega^2(1+\cos\phi) = 2a\Omega^2\cos^2\tfrac{\phi}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{\phi}^2 = \frac{4a\Omega^2}{b}\cos^2\tfrac{\phi}{2}.$$

처음에 $\dot{\phi} > 0$이고, $\dot{\phi}$의 부호가 바뀌려면 o을 지나야 하는데, 그러려면 $\cos\frac{\phi}{2} = 0$, 즉 $\phi = \pm\pi$여야 한다. 따라서 $-\pi < \phi < \pi$인 동안은 양의 제곱근을 택한다:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2\Omega\sqrt{\frac{a}{b}}\cos\frac{\phi}{2}}$$

P는 결코 OA를 가로지르지 않는다

? **생각해 보기** ϕ가 π까지 슬금슬금 다가가서 그것을 넘어갈 수는 없을까?

P가 직선 OA 위에 있는 것은 ϕ가 π의 배수일 때뿐이다($\phi = \pi$일 때는 O 너머로 거리 $b-a$만큼 떨어진 곳에 있다). $0 \le \phi < \pi$인 동안 $\dot{\phi} > 0$이므로 ϕ는 0에서부터 증가하고, 다시 직선 위로 돌아오는 유일한 방법은 $\phi = \pi$에 도달하는 것이다. 방정식을 풀어서 이런 일이 결코 일어나지 않음을 보이자. $k = \sqrt{a/b}$로 두고 변수분리(separation of variables)를 하면

$$\int_0^{\phi}\sec\tfrac{u}{2}\,\mathrm{d}u = 2k\Omega t \quad\Longrightarrow\quad \ln\Big(\sec\tfrac{\phi}{2}+\tan\tfrac{\phi}{2}\Big) = k\Omega t.$$

$s = \sin\frac{\phi}{2}$로 두면 $\sec\frac{\phi}{2}+\tan\frac{\phi}{2} = \frac{1+s}{\sqrt{1-s^2}} = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}$이므로, 좌변은 $\frac{1}{2}\ln\frac{1+s}{1-s} = \operatorname{artanh} s$이다. 따라서

$$\sin\frac{\phi}{2} = \tanh\Big(\Omega t\sqrt{\tfrac{a}{b}}\Big).$$

모든 $t > 0$에 대해 우변은 0과 1 사이에(양 끝은 제외하고) 있으므로, 모든 $t > 0$에 대해 $0 < \phi < \pi$이다. 그러면 P는 항상 직선 OA의 한쪽에만 엄격하게 머문다. $t \to \infty$일 때 직선(의 O 너머의 점)에 다가가지만 결코 도달하지 않으므로, P는 결코 OA를 가로지르지 않는다. ■

(풀지 않고도 알 수 있다: $\phi = \pi, \dot\phi = 0$은 진자 방정식의 평형점(equilibrium)이고, 그 근처에서 $\psi = \pi - \phi$는 $\dot\psi \approx -k\Omega\psi$를 만족하므로 ψ는 지수적으로 감소하며 결코 0이 되지 않는다.)

인쇄된 속력에 대한 참고. 속력을 글자 그대로 $(a + 2\sqrt{ab})\Omega$로 받아들이면 $\dot\phi(0) = (2k-1)\Omega$이고, 같은 방식으로 적분하면 $\dot\phi^2 = \Omega^2\left[(2k-1)^2 - 4k^2\sin^2\frac{\phi}{2}\right]$를 얻는다. 이는 깔끔한 식이 아니다. 이 경우 P는 $\phi = 0$을 중심으로 진동하거나(흔들릴 때마다 OA의 연장선을 가로지른다) $b < 16a$일 때 그렇고, $b > 16a$이면 한 바퀴 완전히 돌면서 OA를 가로지른다. 따라서 인쇄된 값은 의도된 것일 수 없다.

검산

- $a = 0$으로 두면 A가 O에 놓이고, 그러면 $\dot\phi \equiv 0$이다: P는 그저 평면과 함께 속력 $b\Omega$로 돈다. 초기 속력이 $b\Omega$가 되므로 이는 옳다.
- 단위: $\Omega\sqrt{a/b}$는 비율이므로 단위가 s^{-1}이며, 이는 $\dot\phi$의 단위로서 마땅하다.
- $b\ddot\phi = -a\Omega^2\sin\phi$를 $a = 1$, $b = 3$, $\Omega = 1.3$으로 두고 수치적으로(RK4) 계산했다. $t = 2$에서 $\phi \approx 2.2644$, $\dot\phi \approx 0.6375$를 얻었고, 이는 $2\arcsin\tanh(\Omega t\sqrt{a/b})$ 및 $2\Omega\sqrt{a/b}\cos\frac{\phi}{2}$와 유효숫자 10자리까지 일치한다. $t = 10$에서는 $\phi \approx 3.1394 < \pi$이다.

흔한 실수

- 좌표계 자체의 기여 $(a+b)\Omega$가 P의 초기 속도에 더해진다는 것을 잊고, 주어진 속력을 평면에 대한 상대 속력으로 취급하는 것.
- P의 가속도를 단순히 A를 중심으로 하는 원운동의 가속도로 쓰는 것. 회전축 A 자체가 가속하고 있으며, $a\Omega^2\sin\phi$ 항은 바로 여기서 나온다.
- $a\Omega^2\sin\phi$의 부호를 틀리는 것. 부호가 틀리면 $\phi = 0$이 불안정해지는데, "원심력"에 의한 당김은 O에서 멀어지는 방향이므로 이는 물리적으로 맞지 않는다.

STEP 너머

회전하는 평면에서 보면, P는 균일한 "중력" $a\Omega^2$ 속에 매달린 진자이며, 이 중력은 OA의 연장선 방향을 향한다. 코리올리 힘(Coriolis force)은 막대 방향으로 작용하므로 일을 하지 않아 식에서 사라진다. 초기 조건은 운동을 정확히 **분리선**(separatrix) 위에 놓는다. 분리선이란 흔들리는 운동과 꼭대기를 넘어가는 운동의 경계로, 이 위에서 진자는 거꾸로 선 위치에 도달하는 데 무한한 시간이 걸린다. 이와 같은 회전 좌표계, 겉보기 힘(fictitious force), 위상 평면(phase plane) 그림은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*에

서 다룬다.

풀이

STEP III 1989, 문제 13

역학 • 단순 조화 운동

STEP III 1989, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q13

핵심 아이디어

각 줄은 (탁자 아래의) O에서 출발하여 구멍을 지나 위로 올라온 뒤 탁자 위를 가로질러 P까지 이어진다. 탁자 아래에 있는 부분의 길이는 언제나 정확히 자연 길이(natural length) a이므로, 각 줄의 늘어난 길이(extension)는 단순히 P에서 그 줄의 구멍까지의 거리이다. 따라서 각 장력(tension)은 어떤 벡터에 비례하게 되고, 위치 벡터(position vector)를 쓰면 다섯 힘을 한 줄로 더할 수 있다. 다섯 구멍이 대칭적으로 놓여 있어서 그 위치 벡터들의 합이 영벡터이기 때문이다.

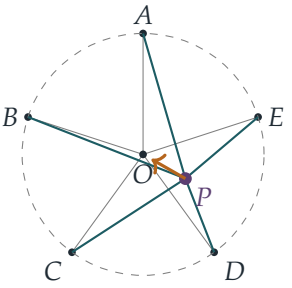
풀이

설정

P를 매끄러운 탁자 위의 입자로, 줄들을 가벼운 탄성 줄로, 구멍들을 매끄러운 것으로 모형화한다. 그러면 장력은 각 줄의 어느 곳에서나 같다. 탁자 위에서 O를 원점으로 잡고, P의 위치 벡터를 $\mathbf{r}$, $A, \ldots, E$의 위치 벡터를 각각 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$라 하자. 이들의 길이는 모두 a이다.

구멍 i를 지나는 줄은 (탁자 아래, 중심의 바로 밑에 있는) O에서 구멍까지 이어지는 길이 a의 수직 부분과, 탁자 위에 있는 길이 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$의 부분으로 이루어진다. 전체 길이는 $a + |\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$이므로 늘어난 길이는 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$이다. 이 값은 결코 음수가 아니므로, P가 어디에 있든 모든 줄은 팽팽하다(P가 구멍에 있을 때는 겨우 느슨해지기 직전이다). 즉 어떤 줄도 느슨해져서 방정식이 바뀌는 일은 없다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 장력은 $\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$이고, 탁자 위에서 이 장력은 P를 구멍 쪽으로, 즉 단위 벡터 $\frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|}$의 방향으로 당긴다. 따라서 줄 i가 P에 작용하는 힘은

$$\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| \cdot \frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|} = \frac{\lambda}{a}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}).$$



청록색 선은 위에서 내려다본 탁자 위의 다섯 줄이다. 호박색 화살표는 P에 작용하는 합력(resultant force)을 나타내며, 이 힘은 곧장 O를 향한다.

첫 번째 부분

P에 작용하는 수직 방향의 힘(무게와 수직항력)은 서로 상쇄된다. 다섯 개의 수평 방향 힘을 더하면

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda}{a}\sum_{i=1}^{5}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}) = \frac{\lambda}{a}\left(\sum_{i=1}^{5}\mathbf{a}_i\right) - \frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}.$$

생각해 보기 왜 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$일까?

그림 전체를 O를 중심으로 72° 회전하면 다섯 구멍의 자리가 서로 바뀔 뿐이므로, 합 $\mathbf{s} = \sum \mathbf{a}_i$는 변하지 않는다. 그런데 72° 회전으로 변하지 않는 벡터는 영벡터뿐이므로 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$이다. (같은 말로, 1의 다섯제곱근(fifth roots of unity)의 합은 0이다.)

따라서 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 의해

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}, \qquad \text{즉} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r} \quad \text{단,} \quad \omega^2 = \frac{5\lambda}{am}.$$

P는 F에서 정지 상태로 출발하므로 $\mathbf{r}(0) = \overrightarrow{OF}$이고 $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$이다. 해는 $\mathbf{r} = \cos(\omega t)\,\overrightarrow{OF}$이므로, P는 직선 FO를 따라 (O에 대한 F의 대칭점까지 갔다가 돌아오며) 왕복 운동하고, O로부터의 변위는 단진동(simple harmonic motion) 방정식을 만족한다. 주기(period)는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{am}{5\lambda}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (이 결과는 작은 변위에서만이 아니라 **임의의** 출발점 F에 대해 성립한다는 점에 주목하자. 힘의 법칙이 정확히 선형이기 때문이다.)

마지막 부분

이제 줄 PAO의 탄성 계수(modulus of elasticity)가 $k\lambda$이므로, 이 줄이 P에 작용하는 힘은 $\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{r})$이다. $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1$을 이용하면

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{r}) + \frac{\lambda}{a}\sum_{i=2}^{5}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}) \\ &= \frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{r}) + \frac{\lambda}{a}(-\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{r}) \\ &= \frac{\lambda}{a}\left[(k-1)\mathbf{a}_1 - (k+4)\mathbf{r}\right] = -\frac{(k+4)\lambda}{a}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right), \qquad \mathbf{r}_0 = \frac{k-1}{k+4}\,\mathbf{a}_1.\end{aligned}$$

따라서 평형 위치(equilibrium position)는 OA 위의 점 $\mathbf{r}_0$이고($\mathbf{F} = \mathbf{0}$인 곳),

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{(k+4)\lambda}{am}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

P를 $\mathbf{r}_0$에서 OA를 따라 옮겼다가 정지 상태에서 놓으면, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$은 처음에 $\mathbf{a}_1$과 평행하고, 가속도는 언제나 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$과 평행하며, 초기 속도는 0이다. 그러므로 앞에서와 똑같이 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \cos(\omega' t)(\mathbf{r}(0) - \mathbf{r}_0)$이다. 즉 P는 OA를 따라 직선 운동을 하며, $\mathbf{r}_0$을 중심으로 각진동수(angular frequency) ω'의 단진동을 한다. 여기서

$$\omega'^2 = \frac{(k+4)\lambda}{am}.$$

주기가 $T/2$인 것은 정확히 $\omega' = 2\omega$, 즉 $\omega'^2 = 4\omega^2$일 때이다.

$$\frac{(k+4)\lambda}{am} = \frac{20\lambda}{am} \quad\Longrightarrow\quad k + 4 = 20 \quad\Longrightarrow\quad k = 16.$$

$k = 16$일 때 평형 위치는 $\mathbf{r}_0 = \frac{15}{20}\mathbf{a}_1$로, O에서 A까지 가는 길의 4분의 3 지점이다. (모형이 성립하려면 진폭이 $\frac{1}{4}a$보다 작아서 P가 A의 구멍에 닿지 않아야 한다.)

검산

- $k = 1$로 두면 첫 번째 부분이 다시 나온다. 즉 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$이고 $\omega'^2 = 5\lambda/(am)$이다.
- 단위: λ는 힘이므로 $\lambda/(am)$의 단위는 $\mathrm{N}/(\mathrm{m\,kg}) = \mathrm{s}^{-2}$이고, T는 시간이다.
- 무작위로 고른 1000개의 위치에서($a = 1.3$, $m = 0.7$, $\lambda = 2.1$로 두고) 다섯 장력 벡터를 더해 보았더니 정확히 $-5\lambda\mathbf{r}/a$가 나왔고, $k = 16$일 때는 정확히 $-20\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/a$가 나왔다. $(0.4, -0.3)$에서 출발하는 운동을 수치적으로 계산하면 P는 O를 지나는 직선 위에 머물면서 시간 $T \approx 1.85$ 뒤에 출발점으로 돌아왔고, $k = 16$일 때 $\mathbf{r}_0 + 0.1a\,\hat{\mathbf{a}}_1$에서 출발하면 $T/2$ 뒤에 돌아왔다.

흔한 실수

- 늘어난 길이를 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| - a$나 $|\mathbf{r}|$로 잡는 것. 자연 길이 a는 탁자 아래 부분이 정확히 다 차지한다.
- 다섯 장력을 각도와 삼각함수로 분해하는 것. 그렇게 할 수도 있지만, 벡터를 쓰면 상쇄가 곧바로 드러난다.
- 새로운 진동의 중심이 여전히 O라고 가정하는 것. 더 뻣뻣한 줄이 평형 위치를 A 쪽으로 끌어당긴다.

STEP 너머

2차원에서 힘 $\mathbf{F} = -c\,\mathbf{r}$는 등방성 조화 진동자(isotropic harmonic oscillator)를 이룬다. (옆 방향의 초기 속도가 있는) 일반적인 운동은 평형점을 중심으로 하는 타원이며, 모든 궤도의 주기가 같다. 역제곱 법칙(inverse-square law)과 함께, 이것은 유계인 모든 궤도가 닫히는 단 두 가지 중심력(central force) 가운데 하나이다(베르트랑(Bertrand) 정리). Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동자와 중심력을 이러한 벡터 방식으로 다룬다.

풀이

STEP III 1989, 문제 14

역학 • 도르래와 충격량

> **STEP III 1989, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q14

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 원판을 얇은 고리들로 자른다. 각 고리는 모든 질량이 중심에서 같은 거리에 있으므로, 질량과 관성 모멘트(moment of inertia) 모두 r에 대한 하나의 적분으로 나타난다. 소문항 (ii)에서는 전체 계의 자유도(degree of freedom)가 하나(D의 깊이)뿐이므로, 운동 방정식(equation of motion) 하나로 가속도를 구할 수 있다. B가 갑자기 멈추면, 줄의 구속 조건(constraint)으로부터 그 뒤에 D가 얼마나 빠르게 움직일 수 있는지 바로 알 수 있고, 충격량(impulse)은 단지 운동량(momentum)의 변화일 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

(소문항 (i)의 축은 중심 O를 지나는 축이다. 시험지의 "C"는 오식이다.) O로부터 거리 r인 곳의 밀도(density)를 $\rho = kr$라 하자. 여기서 k는 상수이다. 반지름 r와 $r + \mathrm{d}r$ 사이의 얇은 고리는 넓이가 $2\pi r\,\mathrm{d}r$이므로 질량은 $2\pi kr^2\,\mathrm{d}r$이고, 그 위의 모든 점은 축으로부터 거리 r에 있다. 따라서

$$m = \int_0^a 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^3}{3}, \qquad I = \int_0^a r^2 \cdot 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^5}{5}.$$

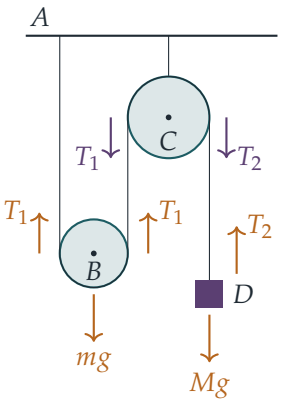
두 식을 나누면 $I/m = \frac{3}{5}a^2$이므로

$$I = \tfrac{3}{5}ma^2$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (이 값은 균일한 원판의 $\frac{1}{2}ma^2$보다 크며, 그래야 마땅하다. 질량이 가장자리 근처에 더 많이 몰려 있기 때문이다.)

소문항 (ii): B가 멈추기 전의 운동

모형: B는 질량 m인 매끄러운 도르래(pulley)이고, C는 (i)과 같은 종류의 원판으로 질량이 m, 반지름이 a이므로 고정된 축에 대한 관성 모멘트는 $\frac{3}{5}ma^2$이다. 줄은 가볍고 늘어나지 않으며 C 위에서 미끄러지지 않는다. B가 매끄러우므로 장력(tension) T_1은 두 줄 부분 AB와 BC에서 같다. 줄 부분 CD의 장력을 T_2라 하자. C는 거칠므로 T_2가 T_1과 같을 필요는 없다.



D가 가속도 f로 아래로 움직인다고 하자. B를 받치는 두 줄 부분은 각각 CD가 늘어나는 양의 절반만큼 짧아지므로, B는 가속도 $\frac{1}{2}f$로 올라간다. 또 줄이 C 위에서 미끄러지지 않으므로 C의 각가속도(angular acceleration)는 f/a이다. 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D\text{ (아래 방향)}: &\quad Mg - T_2 = Mf, \\ B\text{ (위 방향)}: &\quad 2T_1 - mg = \tfrac{1}{2}mf, \\ C\text{ (축에 대한 모멘트)}: &\quad (T_2 - T_1)a = \tfrac{3}{5}ma^2 \cdot \frac{f}{a}. \end{aligned}$$

마지막 식에 $T_2 = Mg - Mf$와 $T_1 = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mf$를 대입하면

$$Mg - Mf - \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{1}{4}mf = \tfrac{3}{5}mf \quad\Longrightarrow\quad f\left(M + \tfrac{17}{20}m\right) = g\left(M - \tfrac{1}{2}m\right),$$

이므로

$$f = \frac{10(2M - m)g}{20M + 17m}.$$

이 값은 상수이고, 양수가 되는 것은 정확히 $m < 2M$이기 때문이다. 바로 그래서 이 조건이 주어져 있다. 이로써 D가 정지 상태에서 실제로 내려간다는 것을 알 수 있다. 따라서 t초 뒤에 D는 속력

$$v = ft = \frac{10(2M - m)gt}{20M + 17m}$$

로 아래로 움직이고, B는 $\frac{1}{2}v$로 올라가며, C는 각속력 v/a로 회전한다.

(에너지로 검산해도 같은 f를 얻는다. D가 x만큼 떨어졌을 때 운동 에너지는 $\frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{4}m + \frac{3}{5}m\right)\dot{x}^2$이고, 잃은 위치 에너지는 $\left(M - \frac{1}{2}m\right)gx$이다.)

소문항 (ii): 충격량

생각해 보기 B가 멈춘 뒤에도 D가 계속 움직일 수 있을까?

줄이 팽팽한 동안 D의 속력은 언제나 B의 속력의 두 배이다. A가 고정되어 있고 AB와 BC의 길이가 각각 같은 양만큼 변하기 때문이다. B가 정지하면 이 두 길이가 모두 고정되므로 줄이 C를 돌아 지나갈 수 없고, 따라서 D도 멈추어야 하며 C도 마찬가지이다. 줄은 실제로 팽팽한 상태를 유지한다. D는 C로부터 멀어지고 있으므로 CD를 팽팽하게 당기고, 여전히 회전하고 있는 C는 BC 쪽에서 줄을 끌어올리므로 그 부분도 팽팽하게 당겨진다. (실제로 충격 장력을 계산하면 CD에서 Mv, BC에서 $(M+\frac{3}{5}m)v$로 둘 다 양수가 나오며, 이것이 위의 사실을 확인해 준다.)

따라서 D의 속도는 아래 방향 v에서 0으로 떨어지고, (줄이) D에 가하는 충격량은 운동량의 변화와 같다.

$$\text{충격량} D = Mv = \frac{10M(2M-m)gt}{20M+17m} \quad \text{연직 위 방향.}$$

검산

- $m \to 0$(가벼운 도르래)이면 $f \to g$이고 충격량은 Mgt이다. 예상대로 D는 그냥 자유 낙하한다.
- $m = 2M$이면 충격량은 0이다. 계가 평형 상태에 있어서 전혀 움직이기 시작하지 않는다.
- $M = 3$, $m = 2.5$, $g = 9.8$, $t = 1.3$으로 운동을 수치적으로 단계별 계산하면 $Mv \approx 13.0507$을 얻어 공식과 일치하며, 얻은 운동 에너지는 잃은 위치 에너지와 일치한다. 수치 적분으로 구한 관성 모멘트의 비는 0.6000이다.

흔한 실수

- C의 양쪽 장력을 같다고 놓는 것. 도르래 C는 질량이 있고 거칠기 때문에, 바로 그 장력의 차이가 도르래를 회전시킨다.
- B가 D의 절반 속력으로 움직인다는 것을 잊는 것. 이 때문에 유효 질량(effective mass)에는 m이 아니라 $\frac{1}{4}m$이 들어간다.
- 충격량의 방향을 빠뜨리는 것. 충격량은 D에 위 방향으로 작용한다.

STEP 너머

운동 에너지를 하나의 좌표로 $\frac{1}{2}M_{\text{eff}}\dot{x}^2$처럼 쓰는 것은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 라그랑주 역학에서는 도르래의 기하 같은 구속 조건이 처음부터 식에 반영되어 있어서 장력이 전혀 나타나지 않는다. B를 멈추는 것과 같은 갑작스러운 구속 조건도 충격 방정식을 써서 같은 방식으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체(rigid body)의 회전과 충격량을 이런 방식으로 다룬다.

풀이

STEP III 1989, 문제 15

확률과 통계 • 중앙값의 분포

> **STEP III 1989, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q15

핵심 아이디어

$2n+1$개 값의 중앙값(median)이 z 근처에 놓이는 것은 정확히 한 값이 z에 있는 아주 작은 구간에 들어가고, n개의 값이 그보다 작고, n개의 값이 그보다 클 때이다. 소문항 (i)과 (ii)는 "모두 아래"와 "모두 위"에 해당하는 부분의 확률을 주고, 어떤 값이 어떤 역할을 맡을지 고르는 경우의 수를 세면 밀도(density)를 얻는다. 그다음에는 밀도를 적분하면 1이 된다는 사실로 적분값을 거저 구할 수 있고, 같은 방법을 n 대신 $n+1$로 쓰면 분산(variance)을 얻는다.

풀이

이 풀이 전체에서 X는 $[-c, c]$에서 밀도 $\frac{1}{2c}$를 가지므로, $-c \le k \le c$에 대하여

$$\mathrm{P}(X > k) = \frac{c-k}{2c}, \qquad \mathrm{P}(X < k) = \frac{c+k}{2c}.$$

소문항 (i)

n개의 값은 서로 독립(independent)이므로 확률을 곱한다.

$$\mathrm{P}(n\text{개의 값이 모두} > k) = \left(\frac{c-k}{2c}\right)^n.$$

소문항 (ii)

같은 방법으로,

$$\mathrm{P}(n\text{개의 값이 모두} < k) = \left(\frac{c+k}{2c}\right)^n.$$

중앙값의 밀도

$X_1, \ldots, X_{2n+1}$을 표본(sample)이라 하고, Z를 그 중앙값, 즉 $(n+1)$번째로 작은 값이라 하자. X는 연속(continuous)이므로 같은 값이 나올 확률은 0이고, 따라서 이 경우는 무시한다. 모든 X_i가 $[-c, c]$에 있으므로 Z도 그렇다.

$(-c, c)$에서 z를 잡고 작은 $\delta z > 0$을 잡자. $(\delta z)^2$ 차수의 항을 무시하면, 사건 $z < Z \le z + \delta z$가 일어나는 것은 정확히 다음과 같을 때이다.

- 값 하나가 $(z, z+\delta z]$에 놓이고,
- 나머지 값 중 n개가 z보다 작고,
- 남은 n개의 값이 $z+\delta z$보다 크다.

(작은 구간에 두 개 이상의 값이 들어가는 배치의 확률은 $(\delta z)^2$ 차수이므로 극한에서는 영향을 주지 않는다.)

? 생각해 보기 $2n+1$개의 값을 이 세 가지 역할에 배정하는 방법은 몇 가지인가?

작은 구간에 들어갈 값을 고르는 방법이 $2n+1$가지이고, 그다음 나머지 중 어느 n개가 z 아래로 갈지 고르는 방법이 $\binom{2n}{n}$가지이다. 따라서 배정의 수는

$$(2n+1)\binom{2n}{n} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$$

이다. 이 배정들은 서로 배반이고, 각각의 확률은 같다. 하나의 배정을 고정하면, 독립성과 $k = z$로 둔 소문항 (i), (ii)에 의해 그 확률은

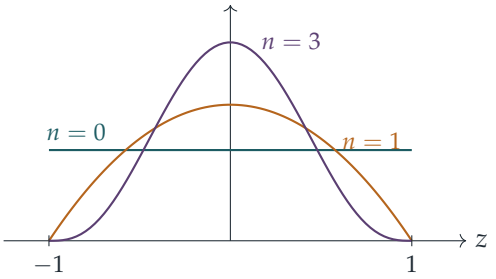
$$\frac{\delta z}{2c}\left(\frac{c+z}{2c}\right)^n\left(\frac{c-z-\delta z}{2c}\right)^n.$$

이다. 모든 배정에 대하여 더하고, δz로 나눈 뒤 $\delta z \to 0$으로 보내면 Z의 밀도는

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2c}\cdot\frac{(c+z)^n(c-z)^n}{(2c)^{2n}} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(2c)^{2n+1}}\,(c^2-z^2)^n, \qquad -c \le z \le c, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $(c+z)(c-z) = c^2 - z^2$을 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

아래 그림은 $c = 1$일 때의 밀도를 보여 준다. $n = 0$이면 "중앙값"은 값 하나이고, 이는 균등분포(uniform distribution)를 따른다. n이 커질수록 중앙값은 0 근처에 모인다.



적분

확률밀도는 그 범위 전체에서 적분하면 1이므로

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2(2c)^{2n+1}}\int_{-c}^{c}(c^2-z^2)^n\,\mathrm{d}z=1,$$

이고, 따라서

$$\int_{-c}^{c}(c^2-z^2)^n\,\mathrm{d}z=\frac{(n!)^2(2c)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

이다. 이 식은 모든 정수 $n\geq 0$에 대하여 성립하며, 곧 이 사실을 이용한다.

평균과 분산

밀도 g는 z의 우함수(even function)이므로 $zg(z)$는 기함수(odd function)이고, 대칭 구간 $[-c,c]$에서의 적분은 0이다.

$$\mathrm{E}(Z)=0.$$

따라서 $\mathrm{var}(Z)=\mathrm{E}(Z^2)$이다. $K_n=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(2c)^{2n+1}}$, $I_n=\displaystyle\int_{-c}^{c}(c^2-z^2)^n\,\mathrm{d}z=\frac{1}{K_n}$이라 두자.

생각해 보기 $z^2(c^2-z^2)^n$을 전개하지 않고 어떻게 적분할 수 있을까?

$z^2=c^2-(c^2-z^2)$으로 쓴다. 그러면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2)&=K_n\int_{-c}^{c}(c^2-(c^2-z^2))(c^2-z^2)^n\,\mathrm{d}z\\&=K_n\left(c^2I_n-I_{n+1}\right)=c^2-\frac{K_n}{K_{n+1}},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $K_nI_n=1$과, 적분 결과에서 n 대신 $n+1$을 넣은 $I_{n+1}=1/K_{n+1}$을 이용하였다. 이제

$$\frac{K_n}{K_{n+1}}=\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\cdot\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\cdot\frac{(2c)^{2n+3}}{(2c)^{2n+1}}=\frac{(n+1)^2\cdot 4c^2}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{2(n+1)c^2}{2n+3}.$$

따라서

$$\mathrm{var}(Z)=c^2\left(1-\frac{2n+2}{2n+3}\right)=\frac{c^2}{2n+3}.$$

검산

- $n = 0$이면 중앙값은 X의 값 하나일 뿐이다. 밀도는 $\frac{1}{2c}$가 되고, 적분값은 $2c$, 분산은 $\frac{c^2}{3}$이며, 이는 $[-c, c]$에서의 균등분포의 분산이다.
- $n = 1, c = 1$일 때 적분 공식은 $\int_{-1}^{1}(1 - z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{1 \cdot 8}{6} = \frac{4}{3}$을 주며, 이는 옳다.
- $c = 1.7$로 크기 5($n = 2$)인 표본 10^5개를 시뮬레이션(simulation)한 결과 중앙값의 분산은 0.415였고, 이론값은 $c^2/7 \approx 0.413$이다.

흔한 실수

- 가운데 값을 고르는 인수 $2n + 1$을 빠뜨리고 $\binom{2n}{n}$만 쓰는 실수.
- 가운데 값 자체의 밀도에 해당하는 인수 $\frac{1}{2c}$를 빠뜨려, 거듭제곱이 $(2c)^{2n+1}$ 대신 $(2c)^{2n}$으로 남는 실수.
- $\mathrm{E}(Z^2)$을 구하려고 $(c^2 - z^2)^n$을 이항전개(binomial expansion)하는 것. 가능은 하지만 그 합을 간단히 하기가 어렵다.

STEP 너머

중앙값은 표본의 **순서통계량**(*order statistics*) 가운데 하나이다. 같은 경우의 수 논법으로, 임의의 연속분포에서 뽑은 m개의 값 중 r번째로 작은 값의 밀도가 $\frac{m!}{(r-1)!\,(m-r)!}F^{r-1}(1 - F)^{m-r}f$임을 얻는다. 균등분포의 경우 이들은 **베타분포**(*beta distribution*)이고, 여러분이 유도한 적분은 베타함수(beta function) $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$의 한 경우이다. 분산 $c^2/(2n + 3)$은 $1/n$처럼 줄어드는데, 이는 표본 중앙값의 점근적 정규성(asymptotic normality)으로 가는 첫걸음이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 순서통계량과 베타분포를 잘 다룬다.

풀이

STEP III 1989, 문제 16

확률과 통계 • 확률과 가설검정

STEP III 1989, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q16

핵심 아이디어

세 가지 예/아니오 특성은 인구 전체를 여덟 개의 칸(cell)으로 나누고, 여덟 개의 진술은 그 칸들에 속하는 비율에 대한 일차방정식일 뿐이다. 먼저 녹색 눈 칸들을 채우고(그곳의 조건이 가장 구체적이다), 다음으로 담갈색 눈 칸들을 채운다. 그러면 통계 부분은 단 하나의 수, 즉 루리타니아 사람이 좁은 머리형일 확률(probability)에 달려 있게 되고, 그 값 아래에서 관측 결과가 놀라운 것인지를 묻는 문제가 된다.

풀이

인쇄된 시험지에는 세 군데의 오기가 있다. (iv)의 "arrow-headed"는 *narrow-headed*(좁은 머리형)로, (vi)의 "fair-headed"는 *fair-haired*(금발)로, (viii)의 "hazel-haired"는 *hazel-eyed*(담갈색 눈)로 읽는다. 세 가지 특성이 머리카락(금발 또는 흑발), 눈(녹색 또는 담갈색), 머리 모양(좁은 머리형 또는 넓은 머리형)이므로, 이것만이 말이 되는 해석이다.

좁은 머리형의 비율

루리타니아 사람 한 명을 임의로 고른다. 금발과 흑발을 F, D로, 녹색 눈과 담갈색 눈을 G, H로, 좁은 머리형과 넓은 머리형을 N, B로 나타낸다. 주어진 조건은 $\mathrm{P}(F) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(G) = \frac{1}{5}$이다.

녹색 눈 칸. (v)에 의해 $\mathrm{P}(N \mid G) = \mathrm{P}(B \mid G) = \frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(G \cap N) = \mathrm{P}(G \cap B) = \frac{1}{10}.$$

(vi)에 의해 녹색 눈의 넓은 머리형은 금발과 흑발로 똑같이 나뉜다.

$$\mathrm{P}(F \cap G \cap B) = \mathrm{P}(D \cap G \cap B) = \frac{1}{20}.$$

(iv)에 의해 $\mathrm{P}(F \cap G \cap N) = 0$이므로 $\mathrm{P}(D \cap G \cap N) = \frac{1}{10}$이다.

담갈색 눈 칸. 다음과 같이 놓는다.

$$a = \mathrm{P}(F \cap H \cap B), \quad b = \mathrm{P}(F \cap H \cap N), \quad c = \mathrm{P}(D \cap H \cap B), \quad d = \mathrm{P}(D \cap H \cap N).$$

- 금발: 녹색 눈의 금발은 $0 + \frac{1}{20}$을 차지하므로 $a + b = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$이다.
- 담갈색 눈: $a + b + c + d = \frac{4}{5}$이므로 $c + d = \frac{3}{5}$이다.
- 진술 (vii): $\mathrm{P}(B \cap D) = \frac{1}{20} + c = \frac{1}{2}$이므로 $c = \frac{9}{20}$이고, 따라서 $d = \frac{3}{20}$이다.
- 진술 (viii): $\mathrm{P}(F \cap B \mid H) = \mathrm{P}(D \cap N \mid H)$이다. 양변에 $\mathrm{P}(H)$를 곱하면 $a = d = \frac{3}{20}$이고, 따라서 $b = \frac{1}{20}$이다.

여덟 개의 비율을 모두 20분의 몇으로 나타내면 다음과 같다.

	$G \cap N$	$G \cap B$	$H \cap N$	$H \cap B$
F	0	1	1	3
D	2	1	3	9

모두 음이 아니고 합이 20이므로 이 모형은 모순이 없다. 좁은 머리형 열들을 더하면

$$\mathrm{P}(N) = \frac{0+2+1+3}{20} = \frac{3}{10}.$$

즉 이 모형에 따르면 루리타니아 사람의 30%가 좁은 머리형이다.

넓은 머리형인 지인 여섯 명

내 지인 여섯 명이 서로 독립(independent)인 임의표본(random sample)이라면, 여섯 명 모두가 넓은 머리형일 확률은

$$\left(\tfrac{7}{10}\right)^6 = 0.1176\ldots \approx 0.12.$$

생각해 보기 12%의 확률로 일어나는 사건이 이 모형에 반하는 좋은 증거가 될까?

그렇지 않다. 확률이 대략 8분의 1인 일은 드문 일이 아니며, 5%와 같은 통상적인 어떤 유의수준(significance level)에서도 유의하지 않다. 이 자료는 또 다른 면에서도 약하다. 지인들은 임의표본이 아니다. 같은 가족, 지역, 사회 집단에 속할 수 있으므로 서로 독립이라고 할 수 없고, 인구 전체를 대표한다고 할 수도 없다. 이 관측은 기껏해야 아주 약간의 의심을 불러일으킬 뿐이다.

크기 200인 임의표본

크기 200인 임의표본에 포함된 좁은 머리형의 수를 X라 하자. 인구가 크므로 각 추출은 사실상 독립이고, 모형 아래에서 $X \sim \mathrm{B}(200, \frac{3}{10})$이다. 이때

$$\mathrm{E}(X) = 60, \qquad \mathrm{Var}(X) = 200 \times 0.3 \times 0.7 = 42, \qquad \sqrt{42} \approx 6.481.$$

np와 $n(1-p)$가 모두 크므로 정규 근사(normal approximation) $X \approx \mathrm{N}(60, 42)$를 연속성 수정(continuity correction)과 함께 사용한다.

$$\mathrm{P}(X \le 50) \approx \Phi\left(\frac{50.5 - 60}{\sqrt{42}}\right) = \Phi(-1.466) \approx 0.071.$$

따라서 모형 아래에서 좁은 머리형이 50명 이하일 확률은 약 7%이다.

? 생각해 보기 이제 이 모형을 기각해야 할까?

5% 수준에서는 아니다. $p = 0.3$ 대 $p < 0.3$의 단측 검정(one-tailed test)을 하면 p-값(p-value)은 약 0.07이다. 하지만 이 결과는 모형에 어느 정도 의심을 던진다. 표본 비율 $\frac{50}{200} = 0.25$는 예측값보다 약 1.5 표준편차만큼 낮다. 또한 이는 예상보다 좁은 머리형이 적었던 내 지인들의 경우와 같은 방향을 가리킨다. 모형이 제시하는 30%라는 수치를 믿기 전에 자료를 더 모으는 것이 현명할 것이다. (양측 검정이라면 p-값은 약 0.14가 되어 증거는 더욱 약해진다.)

검산

- 여덟 개의 조건은 모두 표에서 바로 읽어 낼 수 있다. 예를 들어 (vii): $1 + 9 = 10$개의 20분의 $1 = \frac{1}{2}$.
- 컴퓨터로 확인하면 칸의 비율이 유일한 해이고, $\mathrm{P}(N) = \frac{3}{10}$이며, $(0.7)^6 = 0.117649$임이 확인된다. 정확한 이항 확률 $\mathrm{P}(X \le 50) = 0.0695$는 정규 근사값 0.0713에 가깝다.

흔한 실수

- (v)나 (vi)를 조건부 진술이 아니라 인구 전체에 대한 진술로 읽는 것. 녹색 눈 집단 안에서 "같은 정도로 가능하다"는 것은 $\frac{1}{5}$을 똑같이 반으로 나눈다는 뜻이다.
- 연속성 수정을 잊는 것. 50.5 대신 50을 쓰면 $\Phi(-1.543) \approx 0.061$이 된다.
- 아무 언급 없이 지인들을 임의표본으로 취급하는 것.

STEP 너머

마지막 부분은 가설 검정(hypothesis test)이며, 두 가지 증거는 자연스러운 질문을 하나 던진다. 여러 개의 약한 증거를 어떻게 결합해야 할까? 대학 통계학은 이 질문에 우도(likelihood)로 답하며(베이즈주의자라면 사후 확률(posterior probability)로 답한다), 이는 각 p의 값이 **모든** 자료를 함께 얼마나 잘 설명하는지를 잰다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 확률론의 배경 지식을 제공하고, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)는 베이즈 관점을 쉽게 설명한다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1989년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

