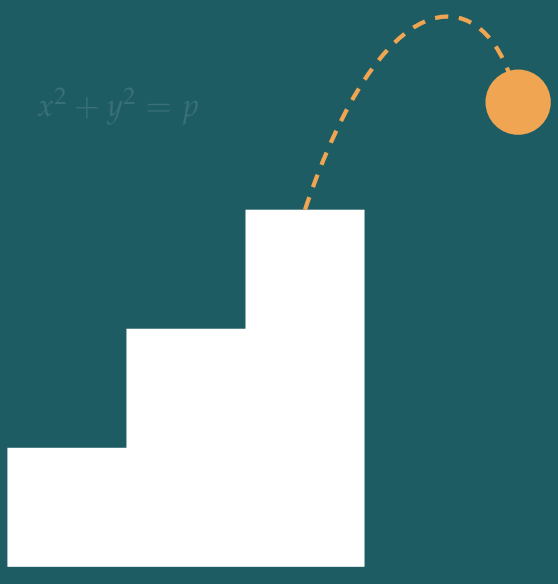
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1988년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1988년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1988년 풀이

1988년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 48개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 곡선 그리기 순수수학 3

Q2 정류점 순수수학 6

Q3 기하학적 극값 한계 순수수학 10

Q4 직선의 교점 개수 세기 순수수학 13

Q5 급수와 생성함수 순수수학 17

Q6 복소수와 기하 순수수학 20

Q7 이차식 도함수의 한계 순수수학 24

Q8 3차원 기하 순수수학 28

Q9 치환적분 순수수학 32

Q10 포물체 운동 역학 35

Q11 질량중심 역학 39

Q12 가변적인 힘에 의한 운동 역학 43

Q13 탄성 끈과 충돌 역학 47

Q14 중도절단 정규분포의 기댓값 확률과 통계 51

Q15 이항 가설검정 확률과 통계 55

Q16 연속 분포와 조건부 확률과 통계 58

STEP II

Q1 부분분수와 급수 순수수학 62

Q2 대칭 대수방정식 순수수학 65

Q3 근의 대칭성 순수수학 68

Q4 복소평면 위의 자취 순수수학 72

Q5 1의 거듭제곱근과 탄젠트 순수수학 77

Q6 쌍곡선 함수 부등식 순수수학 81

Q7 치환적분 순수수학 85
Q8 행렬과 고유벡터 순수수학 89
Q9 부분군과 합집합 순수수학 93
Q10 포물면의 벡터 기하 순수수학 97
Q11 기둥에 감기는 줄 역학 102
Q12 떨어지는 사슬 역학 106
Q13 마찰과 평형 역학 109
Q14 회전하는 강체 역학 112
Q15 이산균등분포의 합 확률과 통계 116
Q16 정규분포 확률과 통계 120

STEP III

Q1 곡선 그리기와 한계 순수수학 123
Q2 선형 점화식 순수수학 127
Q3 복소평면 위의 자취 순수수학 131
Q4 호의 길이 최적화 순수수학 135
Q5 점화식과 대출 순수수학 138
Q6 반복 미분 순수수학 142
Q7 미분방정식과 직교성 순수수학 145
Q8 포물선의 접선과 법선 순수수학 149
Q9 군 원소의 위수 순수수학 154
Q10 추적 곡선 순수수학 157
Q11 마찰이 있는 사다리의 평형 역학 161
Q12 비스듬한 충돌 역학 165
Q13 공기 저항을 받는 포물체 역학 169
Q14 매끄러운 철사 위의 운동 역학 173
Q15 기댓값의 점화식 확률과 통계 177
Q16 초기하분포 확률과 통계 181

풀이

STEP I 1988, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 1988, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q1

핵심 아이디어

방정식 $n^m = m^n$은 밑과 지수 사이에서 변수가 뒤섞여 있어서 다루기 까다롭다. 양변에 로그(logarithm)를 취하면 $m \ln n = n \ln m$이 되고, 이를 mn으로 나누면 두 변수가 완전히 분리된다: $\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m}$. 따라서 h가 같은 값을 갖는 서로 다른 두 정수를 찾으면 되고, 그래프의 모양을 보면 그런 쌍이 어디에 있을 수 있는지 정확히 알 수 있다.

풀이

h의 그래프

몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하면

$$\mathrm{h}'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$x^2 > 0$이므로 $\mathrm{h}'(x)$의 부호는 $1 - \ln x$의 부호와 같다. 따라서 h는 $(0, \mathrm{e})$에서 순증가(strictly increasing)하고 (e, ∞)에서 순감소하며, $x = \mathrm{e}$에서 최댓값

$$\mathrm{h}(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

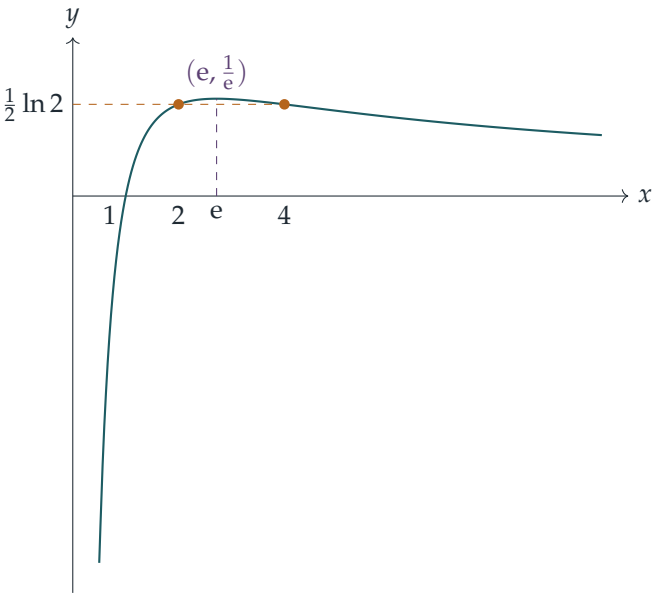
을 갖는다. 한 번 더 미분하면

$$\mathrm{h}''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3},$$

이므로 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$에서 변곡점(point of inflection)이 있고, 이때 $\mathrm{h} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3/2} \approx 0.335$이다. 곡선은 이 점의 왼쪽에서 위로 볼록(concave)하고 오른쪽에서 아래로 볼록(convex)하다.

다음으로 양 끝에서의 거동과 부호를 살펴보자.

- $x \to 0^+$일 때 $\ln x \to -\infty$이고 $\frac{1}{x} \to +\infty$이므로 $\mathrm{h}(x) \to -\infty$이다. 즉 y축이 점근선(asymptote)이다.
- $\mathrm{h}(1) = 0$이고, $\mathrm{h}(x)$의 부호는 $\ln x$의 부호와 같다. 즉 $(0,1)$에서 음수이고 $x > 1$에서 양수이다.
- $x \to \infty$일 때 $\frac{\ln x}{x} \to 0$이고(로그는 x의 어떤 양의 거듭제곱보다도 느리게 증가한다), 그 범위에서 $\mathrm{h}(x) > 0$이므로 곡선은 위쪽에서 x축에 가까워진다.



방정식 $n^m = m^n$

m과 n이 양수이므로 양변이 모두 양수이고, 따라서 로그를 취할 수 있다:

$$n^m = m^n \iff m \ln n = n \ln m \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m} \iff \mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(m),$$

여기서 가운데 단계에서 $mn > 0$으로 나누었다. 따라서 $\mathrm{h}(m) = \mathrm{h}(n)$을 만족하는 서로 다른 양의 정수를 찾으면 된다. 대칭성에 의해 $m < n$이라고 가정하자.

? **생각해 보기** 그래프에서 서로 다른 두 점의 높이가 같을 수 있는 곳은 어디인가?

h는 $(0,\mathrm{e}]$에서 순증가하고 $[\mathrm{e},\infty)$에서 순감소하므로, 각 구간에서 일대일(one-to-one)이다. 따라서 함숫값이 같은 서로 다른 두 입력값은 e의 서로 반대쪽에 있어야 한다: $m < \mathrm{e} < n$. m은 양의 정수이고 $\mathrm{e} \approx 2.718$이므로 $m = 1$ 또는 $m = 2$이다.

- $m = 1$이면 $\mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(1) = 0$이므로 $\ln n = 0$이어야 하고, 따라서 $n = 1 = m$이 되어 조건에 맞지 않는다. (직접 보면: $n^1 = 1^n$에서 $n = 1$이다.)
- $m = 2$이면 $\mathrm{h}(n) = \frac{1}{2}\ln 2$를 만족하는 정수 $n \geq 3$이 필요하다. 그런데 $n = 4$가 성립한다. 왜냐하면
$$\mathrm{h}(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = \mathrm{h}(2),$$
즉 $4^2 = 16 = 2^4$이기 때문이다. h는 $[\mathrm{e}, \infty)$에서 순감소하므로 그 구간에서 값 $\frac{1}{2}\ln 2$를 많아야 한 번 가진다. 따라서 가능한 것은 $n = 4$뿐이다.

그러므로 $n^m = m^n$을 만족하는 서로 다른 양의 정수의 쌍은

$$(m, n) = (2, 4) \quad \text{그리고} \quad (m, n) = (4, 2).$$

뿐이다.

검산

$1 \leq m, n \leq 300$인 모든 경우를 정확한 정수 연산으로 컴퓨터 탐색해 보면 $(2, 4)$와 $(4, 2)$만 나온다. 수치적으로 $\mathrm{h}(2) = \mathrm{h}(4) = 0.346574\ldots$이고, 그래프에서 보이듯이 최댓값 $1/\mathrm{e} = 0.367879\ldots$보다 조금 작다. $\mathrm{h}(3)$에서 해가 나오지 않는 이유도 알 수 있다. $\mathrm{h}(3) \approx 0.366$은 $\mathrm{h}(2)$보다 크므로, e의 왼쪽에 있는 짝은 2와 e 사이에 엄격하게 놓이고, 따라서 정수가 아니다.

흔한 실수

- 시행착오로 $(2, 4)$를 찾고 거기서 멈추는 것. 문제는 **모든** 쌍을 묻고 있으므로, 다른 쌍이 없음을 증명하는 단조성(monotonicity) 논증이 답의 핵심이다.
- 그래프 개형에서 점근적 거동을 빠뜨리는 것. 곡선은 y축 근처에서 $-\infty$로 곤두박질치지만, $x \to \infty$일 때는 0을 향해 천천히 다가갈 뿐 다시는 축을 가로지르지 않는다.

STEP 너머

실수까지 허용하면, $(1, \mathrm{e})$의 모든 a에 대해 $a^b = b^a$를 만족하는 짝 $b > \mathrm{e}$가 정확히 하나 존재하며, 이러한 쌍은 $t > 0$에 대해 $a = (1 + \frac{1}{t})^t$, $b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$로 깔끔하게 매개화(parametrise)할 수 있다. $t \to \infty$이면 둘 다 e로 수렴하는데, 이것이 그래프 꼭대기에서 두 값이 만나는 점이다. 우리가 사용한 극한 $\frac{\ln x}{x} \to 0$은 증가 속도를 비교하는 첫 번째 예로, 대학의 첫 해석학(analysis) 과목에서 엄밀하게 다룬다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP I 1988, 문제 2

순수수학 • 정류점

> **STEP I 1988, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q2

핵심 아이디어

g를 합성(composition)으로 보자. 즉 $h(t) = t + 1/t$에 대하여 $\mathrm{g} = h \circ \mathrm{f}$이다. 그러면 연쇄법칙(chain rule)에 의해 g′는 $\mathrm{f}' = 0$인 곳 또는 $h'(\mathrm{f}) = 0$인 곳, 즉 $\mathrm{f} = \pm 1$인 곳에서 0이 된다. $\cos 2x$를 $\sin x$로 나타내면 f는 $\sin x$에 대한 이차식이 되고, 이로부터 f의 크기와 모양을 모두 알 수 있다.

풀이

도함수

$\mathrm{g} = \mathrm{f} + \mathrm{f}^{-1}$을 연쇄법칙으로 미분하면

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{f}'(x) - \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)^2} = \mathrm{f}'(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right).$$

이를 곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\mathrm{f}^{-2}\right) = 2\mathrm{f}^{-3}\mathrm{f}'$를 이용하면

$$\mathrm{g}''(x) = \mathrm{f}''(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right) + \frac{2\,\mathrm{f}'(x)^2}{\mathrm{f}(x)^3}.$$

f의 크기

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$를 이용하고 $s = \sin x$로 놓으면

$$\mathrm{f}(x) = 5 + 2s - 2s^2 = \tfrac{11}{2} - 2\left(s - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

s가 $[-1,1]$ 전체를 움직일 때, 이 식은 $s=\frac{1}{2}$에서 가장 크고($\frac{11}{2}$), 구간의 양 끝 중 $\frac{1}{2}$에서 더 먼 쪽, 즉 $s=-1$에서 가장 작으며 그 값은 1이다. 따라서

$$1 \le \mathrm{f}(x) \le \tfrac{11}{2} \quad \text{모든} x$$

이고, $\mathrm{f}(x)=1$인 것은 $\sin x=-1$일 때뿐이다. 특히 f는 결코 0이 되지 않으므로 g는 모든 곳에서 정의된다.

정류점

$\mathrm{g}'(x)=0$인 것은 정확히 $\mathrm{f}'(x)=0$이거나 $\mathrm{f}(x)^2=1$일 때이다.

f′의 영점.

$$\mathrm{f}'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x = 2\cos x\,(1-2\sin x)$$

이므로, 이는 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$일 때 0이 된다. $[0,2\pi]$에서는

$$x = \tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{5\pi}{6},\ \tfrac{3\pi}{2}$$

이다.

$\mathrm{f}=\pm 1$인 점. $\mathrm{f}\ge 1$이므로 이는 $\mathrm{f}=1$, 즉 $\sin x=-1$, 즉 $x=\frac{3\pi}{2}$를 뜻하며, 이 점은 이미 위의 목록에 있다.

따라서 g는 $[0,2\pi]$에서 정확히 네 개의 정류점(stationary point)을 갖는다. (양 끝점은 여기에 포함되지 않는다. $\mathrm{g}'(0)=\mathrm{g}'(2\pi)=2\cdot\frac{24}{25}\neq 0$이기 때문이다.)

정류점의 분류

$\mathrm{f}''(x) = -4\cos 2x - 2\sin x$이다. 각 정류점에서 $\mathrm{f}'=0$이므로 g″의 둘째 항은 사라지고 $\mathrm{g}''=\mathrm{f}''\,(1-\mathrm{f}^{-2})$가 된다.

- $x=\frac{\pi}{6}$과 $x=\frac{5\pi}{6}$: 이때 $\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos 2x=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{f}=\frac{11}{2}$이고 $\mathrm{f}''=-2-1=-3$이다. 그러면 $\mathrm{g}''=-3\big(1-\frac{4}{121}\big)<0$이므로 두 점 모두 **극대**이고, 그 값은

  $$\mathrm{g} = \tfrac{11}{2} + \tfrac{2}{11} = \tfrac{125}{22}$$

  이다.

- $x=\frac{\pi}{2}$: 이때 $\sin x=1$, $\cos 2x=-1$이므로 $\mathrm{f}=5$이고 $\mathrm{f}''=4-2=2$이다. 그러면 $\mathrm{g}''=2\big(1-\frac{1}{25}\big)=\frac{48}{25}>0$이므로 **극소**이고, 그 값은 $\mathrm{g}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$이다.

- $x=\frac{3\pi}{2}$: 이때 $\mathrm{f}=1$이므로 $1-\mathrm{f}^{-2}=0$이고, 또한 $\mathrm{f}'=0$이다. 따라서 $\mathrm{g}''=0$이다.

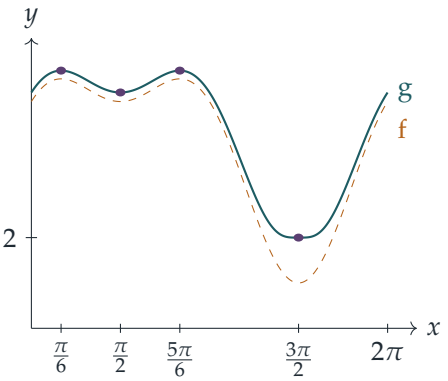
생각해 보기 $x = \frac{3\pi}{2}$에서는 이계도함수 판정법(second-derivative test)이 통하지 않는다. 다른 방법으로는 어떻게 판단할 수 있을까?

$h(t) = t + 1/t$로 돌아가 보자. $t > 0$일 때

$$t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$$

이고, 등호는 $t = 1$일 때만 성립한다. $\mathrm{f} > 0$이므로 이로부터 모든 x에 대하여 $\mathrm{g}(x) \geq 2$이고, 등호는 정확히 $\mathrm{f}(x) = 1$일 때 성립한다. $x = \frac{3\pi}{2}$에서 $\mathrm{g} = 2$이므로 이 점은 **극소**이다(사실 g의 전역 최솟값(global minimum)이다).

요약. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$에서 극대(값 $\frac{125}{22}$), $x = \frac{\pi}{2}$(값 $\frac{26}{5}$)와 $x = \frac{3\pi}{2}$(값 2)에서 극소이다.



검산

- h는 $t > 1$에서 증가하므로, $\mathrm{f} > 1$인 곳에서는 g가 f와 함께 증가하고 감소해야 한다. 그래프를 보면 실제로 f(점선)와 g의 꺾이는 점이 같다.
- 수치로 계산하면 $\mathrm{g}(\frac{\pi}{6}) \approx 5.6818 = \frac{125}{22}$이고 $\mathrm{g}(\frac{\pi}{2}) = 5.2$이다. $[0, 2\pi]$에서 g를 촘촘하게 조사하면 꺾이는 점은 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$에서만 나타나고, 최솟값은 2.000이다.
- g''의 공식은 임의의 점에서 유한 차분(finite difference)으로 구한 이계도함수와 일치한다.

흔한 실수

- 인수 $1 - \mathrm{f}^{-2}$를 빠뜨리는 것. 이 문제에서는 이 인수가 새로운 정류점을 만들지 않지만, 그것은 $\mathrm{f} = 1$인 곳이 마침 $\mathrm{f}' = 0$인 곳이기 때문일 뿐이다. 그래도 반드시 확인해야 한다.

- $g''(\frac{3\pi}{2}) = 0$으로부터 이 점이 변곡점(point of inflection)이라고 결론짓는 것. 이계도함수가 0이라는 사실만으로는 아무것도 알 수 없다.

STEP 너머

퇴화된 점 $x = \frac{3\pi}{2}$는 합성함수에서 흔히 나타난다. f가 극소인 곳에서 h도 극소이면 $h \circ f$는 그곳에서 더 "평평"해지고, 이계도함수가 0이 된다. 대학의 해석학에서는 이계도함수 판정법 대신 처음으로 0이 아닌 도함수를 보고 이런 점을 분류하는 테일러(Taylor) 정리(Taylor's theorem)를 쓰거나, (우리가 한 것처럼) 부등식을 직접 이용한다. 평균값 정리(mean value theorem)와 테일러 정리가 꼼꼼하게 전개되는 과정을 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋다.

풀이

STEP I 1988, 문제 3

순수수학 • 기하학적 극값 한계

STEP I 1988, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s1-q3

핵심 아이디어

정사각형의 점이 O에서 **멀리** 떨어져 있다면 어디에 있을 수 있는지 물어보자. 그런 점은 반대쪽 꼭짓점 근처의 작은 영역에 갇혀 있어야 한다. P와 Q가 모두 O에서 멀다면 둘 다 그 작은 영역 안에 있으므로 서로 가깝다. 수 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$는 바로 이 논증이 성립하게 만드는 크기이며, 정사각형 안에 대칭적으로 놓인 정삼각형(equilateral triangle)에서 나온다.

풀이

단위는 센티미터로 하고, O를 원점, 정사각형을 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$로 둔다. 다음과 같이 쓰고

$$s = \sqrt{6}-\sqrt{2}, \qquad s^2 = 6+2-2\sqrt{12} = 8-4\sqrt{3} \approx 1.072,$$

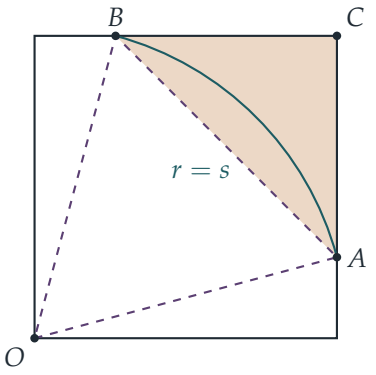
$t = 2-\sqrt{3} \approx 0.268$이라 하자. 점들을 다음과 같이 정의한다.

$$A = (1,t), \qquad B = (t,1), \qquad C = (1,1).$$

그러면

$$\begin{aligned} OA^2 = OB^2 &= 1+(2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AB^2 &= 2(1-t)^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AC = BC &= 1-t = \sqrt{3}-1 \approx 0.732 < s. \end{aligned}$$

따라서 OAB는 정사각형 안에 있는 한 변의 길이가 s인 정삼각형이다.



청록색 호는 O를 중심으로 하는 반지름 s인 원이다. 정사각형에서 이 호 바깥에 있는 부분은 색칠한 삼각형 ABC 안에 놓인다.

1단계: O에서 먼 점은 삼각형 ABC 안에 있다

직선 AB는 $x+y=1+t$이다. 정사각형 중에서 이 직선을 기준으로 O 쪽에 있는 부분 $\{x+y\le 1+t\}$를 생각하자. 이것은 다음 꼭짓점들을 갖는 오각형이다.

$$O=(0,0),\quad (1,0),\quad A,\quad B,\quad (0,1).$$

함수 x^2+y^2은 볼록(convex) 함수이므로, 이 볼록 오각형 위에서의 최댓값은 꼭짓점에서 얻어진다. 꼭짓점에서의 값은 $0, 1, s^2, s^2, 1$이고, 가장 큰 값은 s^2이다. 그러므로 정사각형의 모든 점에 대하여

$$x+y\le 1+t \implies x^2+y^2\le s^2$$

이다. 이를 뒤집어 말하면, 정사각형의 점 (x,y)와 O 사이의 거리가 s보다 **크면** $x+y>1+t$이고, $x\le 1, y\le 1$이므로 그 점은 삼각형 ABC 안에 있다.

? **생각해 보기** 삼각형의 두 점 사이의 거리 중 가장 큰 것이 왜 한 변의 길이일까?

Q를 고정하자. 거리 $|PQ|$는 P에 대한 볼록 함수이므로, 삼각형 위에서 P가 꼭짓점일 때 가장 크다. 이제 그 꼭짓점을 고정하고 Q를 움직이면, 같은 논증으로 Q도 꼭짓점으로 잡을 수 있다. 따라서 삼각형의 두 점 사이의 최대 거리는 두 꼭짓점 사이의 거리, 즉 가장 긴 변의 길이이다.

2단계: 모순

$OP>s$이고 $OQ>s$라고 가정하자. 그렇지 않으면 이미 증명이 끝난다. 1단계에 의해 P와 Q는 모두 삼각형 ABC 안에 있다. 이 삼각형의 가장 긴 변은 $AB=s$이다(나머지 두 변은 $\sqrt{3}-1<s$이다). 따라서 위 상자의 내용에 의해

$$PQ\le s.$$

그러므로 어떤 경우에도 OP, PQ, QO 중 적어도 하나는 $s = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,\text{cm}$ 이하이며, 이것이 보여야 할 내용이었다.

이 상계는 최선이다

$P = A$, $Q = B$로 잡으면 정확히 $OP = PQ = QO = s$이므로, 이보다 작은 수로는 성립하지 않는다. $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이므로 $s = \sec 15^\circ$이다. 즉 극단적인 삼각형은 대각선에 대해 대칭으로 놓인 정삼각형이며, OA와 OB는 각각 정사각형의 한 변과 15°를 이룬다.

검산

- $s \approx 1.0353$으로, 정사각형의 한 변보다 조금 크고 대각선 $\sqrt{2} \approx 1.414$보다는 훨씬 작으므로 타당하다.
- 수치적으로, 정사각형 안의 무작위 쌍 P, Q를 10^6개 뽑아 보았을 때 $\min(OP, PQ, QO)$가 s를 넘은 적은 한 번도 없었다(가장 큰 값은 약 1.0235였다). 가능한 최소값의 최댓값을 찾는 언덕 오르기 탐색(hill-climbing search)은 $P \approx (1, 0.26795)$, $Q \approx (0.26795, 1)$, 값 1.035276에 수렴했으며, 이는 A, B, s와 일치한다.

흔한 실수

- $OP, OQ > s$일 때 $\angle POQ < 60^\circ$라는 것만 논증하는 것. 이는 참이지만, 그것만으로 PQ가 가장 짧은 변이 되는 것은 아니므로 추가 논증 없이는 증명이 끝나지 않는다.
- 대칭적인 배치만 확인하는 것. 이는 상계를 더 개선할 수 없음을 보여 줄 뿐, 모든 P와 Q에 대해 상계가 성립함을 증명하지는 않는다.

STEP 너머

이것은 점을 배치하는 작은 극값 문제(extremal problem)이다. 한 영역 안의 세 점이 동시에 서로 얼마나 멀리 떨어질 수 있을까? 이런 질문은 채우기 문제와 덮기 문제(packing and covering problems)로 이어지고, 집합의 **지름**(diameter)이라는 개념으로도 이어진다. 집합의 지름은 그 볼록 껍질(convex hull)의 지름과 같다. 바로 이 사실 덕분에 2단계가 수월했다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 1988, 문제 4

순수수학 • 직선의 교점 개수 세기

> **STEP I 1988, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q4

핵심 아이디어

모든 선분을 한꺼번에 머릿속에 그리려 하지 말자. 대신 두 선분이 언제 교차하는지를 묻는다. 답은 두 선분의 끝점이 각 축 위에서 놓인 순서에만 달려 있으며, 이 덕분에 모든 교점은 각 축에서 두 점을 고르는 일로 바뀐다. 한 선분 위의 교점 개수를 셀 수 있게 되면, 가장 많거나 가장 적은 교점을 가진 선분과 마지막 평균(average)은 꼼꼼히 셈을 정리하는 것만으로 얻어진다.

풀이

y축 위의 점들을 원점 O로부터의 거리가 증가하는 순서대로 $B_1, \ldots, B_m$이라 하고, x축 위의 점들도 같은 방식으로 $A_1, \ldots, A_n$이라 하자. 선분(segment) B_iA_j를 s_{ij}로 나타낸다.

소문항 (i)

m개의 점 B_i 각각이 n개의 점 A_j 각각과 연결되므로, 선분은

$$mn$$

개이다.

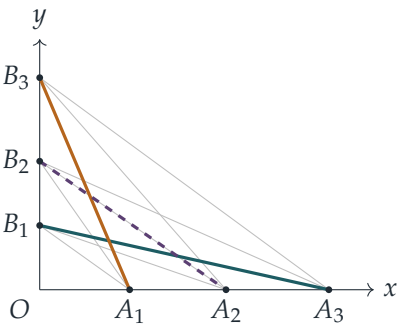
소문항 (ii)

서로 다른 두 선분 s_{ij}와 s_{kl}을 생각하자.

- $i = k$ 또는 $j = l$이면 두 선분은 끝점을 공유한다. 한 점에서 나온 서로 다른 두 선분은 그 점에서만 만나며, 이러한 만남은 세지 않는다.

- $i < k$이고 $j < l$이면, B_i와 A_j는 모두 직선 B_kA_l에 대하여 O와 같은 쪽에 있다(이 점들은 삼각형 OB_kA_l의 변 OB_k와 OA_l 위에 있고, B_k나 A_l과 일치하지 않는다). 끝점이 모두 어떤 직선의 한쪽에 엄격하게 놓인 선분은 그 쪽에 머무르므로, s_{ij}는 s_{kl}과 절대 만나지 않는다. 즉 그 아래에 "포개어져" 있다.
- $i < k$이고 $j > l$이면, B_i는 직선 B_kA_l에 대하여 O와 같은 쪽에 있고 A_j는 반대쪽에 있다. 따라서 s_{ij}는 그 직선을 가로지른다. 마찬가지로 A_l은 직선 B_iA_j에 대하여 O 쪽에 있고 B_k는 반대쪽에 있다. 각 선분이 다른 선분의 두 끝점을 갈라놓으므로, 두 선분은 끝점이 아닌 정확히 한 점에서 교차한다.

$i > k$인 경우는 두 선분의 역할을 바꾸면 똑같다.



그림($m = n = 3$)에서 청록색 s_{13}과 호박색 s_{31}은 끝점의 순서가 서로 반대이므로 교차한다. 점선 s_{22}도 이 두 선분과 각각 교차한다.

따라서 내부의 한 점에서 교차하는 선분의 쌍은 모두 두 점 B_i, B_k $(i < k)$와 두 점 A_j, A_l $(j < l)$을 고른 다음 s_{il}과 s_{kj}를 택하여 얻어진다. 역으로, 이러한 선택 하나하나는 정확히 하나의 교차하는 쌍을 준다. 어떤 세 선분도 내부의 한 점을 함께 지나지 않으므로, 서로 다른 쌍은 서로 다른 점을 준다. 그러므로 교점(point of intersection)의 개수는

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2} = \frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$$

이다.

평균

한 선분 위의 교점. 위의 규칙에 따라 s_{ij}가 s_{kl}과 교차할 필요충분조건은 $k < i$, $l > j$ 또는 $k > i$, $l < j$이다. 따라서 s_{ij} 위의 교점의 개수는

$$c_{ij} = (i-1)(n-j) + (m-i)(j-1).$$

이다.

$m = n$일 때 극단적인 선분. $N = n - 1, a = i - 1, b = j - 1$로 놓으면 $0 \le a, b \le N$이고

$$c_{ij} = a(N-b) + (N-a)b = N(a+b) - 2ab = \tfrac{1}{2}\big(N^2 - (N-2a)(N-2b)\big),$$

임을 전개하여 확인할 수 있다. $|N-2a| \le N$이고 $|N-2b| \le N$이므로, 곱 $(N-2a)(N-2b)$는 $-N^2$과 N^2 사이에 있다. 그러므로 $0 \le c_{ij} \le N^2$이고, 다음이 성립한다.

- $c_{ij} = N^2$인 것은 $(N-2a)(N-2b) = -N^2$, 즉 $\{a, b\} = \{0, N\}$일 때뿐이다. 이는 두 선분 s_{1n}과 s_{n1}이다.
- $c_{ij} = 0$인 것은 $(N-2a)(N-2b) = N^2$, 즉 $a = b = 0$ 또는 $a = b = N$일 때뿐이다. 이는 두 선분 s_{11}과 s_{nn}이다.

(여기서 $N \ge 2$이므로 이 네 선분은 서로 다르다.) 따라서 가장 많은 $(n-1)^2$개의 점을 가진 선분은 정확히 두 개이고, 가장 적은 0개의 점을 가진 선분도 정확히 두 개이다. 이들을 제거하면 $n^2 - 4$개의 선분이 남는다.

? 생각해 보기 정확히 무엇의 평균을 구하는 것인가?

네 선분을 제거한 뒤 남아 있는 교점, 즉 남은 두 선분 사이의 교점을 각 점마다 한 번씩 센다. 그런 다음 남은 선분의 개수로 나눈다. (그 대신 남은 각 선분 위의 교점 개수를 모두 더하면, 모든 점이 두 번씩 세어지고 사라진 점 일부도 여전히 세어진다. 그러면 $\frac{1}{2}(n-1)^2$이 나오는데, 이는 문제에 주어진 답이 아니다. 흔한 실수를 참고하라.)

사라지는 점. 선분 s_{11}과 s_{nn} 위에는 교점이 없으므로 이들을 제거해도 잃는 것이 없다. 선분 s_{1n}과 s_{n1} 위에는 각각 $(n-1)^2$개의 점이 있다. 이 두 선분은 서로 교차하므로($1 < n$이고 $n > 1$), 정확히 한 점이 두 선분 위에 함께 놓인다. 포함배제의 원리(inclusion–exclusion)에 따라 사라지는 점의 개수는 $2(n-1)^2 - 1$이다.

남는 점. $m = n$일 때 소문항 (ii)로부터 남는 점의 개수는

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n-1)^2}{4} - 2(n-1)^2 + 1 &= \frac{(n-1)^2(n^2-8)+4}{4} \\ &= \frac{n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4}{4} \\ &= \frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4}.\end{aligned}$$

이다. 인수분해(factorisation)는 $n = 2$일 때 이 사차식이 $16 - 16 - 28 + 32 - 4 = 0$이 되므로 $n - 2$가 인수라는 점에서 얻는다. $(n-2)(n^3 - 7n + 2) = n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4$로 전개하여 확인할 수 있다.

평균. 남은 $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$개의 선분으로 나누고 $n - 2 \ne 0$ ($n \ge 3$이므로)을 약분하면, 평균은

$$\frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4(n-2)(n+2)} = \frac{n^3 - 7n + 2}{4(n+2)},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

$n = 3$일 때 공식은 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$를 준다. 직접 확인해 보자. $s_{11}, s_{33}, s_{13}, s_{31}$을 제거하면 $s_{12}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{32}$가 남는다. 이 가운데 끝점의 순서가 서로 반대인 것은 s_{12}와 s_{21}, 그리고 s_{23}과 s_{32}뿐이므로, 5개의 선분 위에 2개의 점이 있고 평균은 $\frac{2}{5}$이다. 컴퓨터로도 검산하였다. 두 축 위에 무작위로 점을 놓고 정확한 산술로 모든 교점을 찾아 mn, $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$, c_{ij}를 확인하였다. 또한 3부터 29까지의 모든 n에 대하여 평균 공식도 확인하였다.

흔한 실수

- 남은 각 선분 위의 교점 개수를 모두 더하는 것. 각 점은 두 선분 위에 있으므로 이렇게 하면 두 번씩 세어지고, 제거된 선분과 공유하는 점도 여전히 포함된다. 그 결과는 주어진 공식이 아니라 $\frac{1}{2}(n-1)^2$이다.
- s_{1n}과 s_{n1}이 서로 교차한다는 사실을 잊고 $2(n-1)^2 - 1$ 대신 $2(n-1)^2$을 빼는 것.
- 교점의 개수를 선분의 쌍의 개수 $\binom{mn}{2}$로 세는 것. 대부분의 쌍은 끝점을 공유하거나 포개어져 있어서 교차하지 않는다.

STEP 너머

이 문제의 핵심은 전단사(bijection)이다. 교점은 각 축에서 두 점을 고르는 방법과 정확히 일대일로 대응한다. 이것은 조합론(combinatorics)의 기본 도구이다. 같은 그림이 완전 이분 그래프(complete bipartite graph) $K_{m,n}$의 "교차수(crossing number)"에서도 나타난다. Zarankiewicz의 그림(각 축의 양쪽에 점을 놓는다는 점을 빼면 바로 이 그림이다)은 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$개의 교점을 사용하는데, 이것이 언제나 가능한 최솟값인지는 아직 미해결 문제이다. 전단사를 이용한 세기를 더 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를, 그래프 이론에 대해서는 Wilson의 *Introduction to Graph Theory*(그래프 이론 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 1988, 문제 5

순수수학 • 급수와 생성함수

> **STEP I 1988, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q5

핵심 아이디어

각 인수를 등비급수(geometric series)로 전개하고(지수가 -1인 이항정리(binomial theorem)) 서로 곱한다. 그러면 c_m은 유한 등비합이 되고, 이는 깔끔한 닫힌 형태(closed form)를 갖는다. c_m^2을 세 개의 순수한 거듭제곱 $(a^2)^m$, $(ab)^m$, $(b^2)^m$의 결합으로 나타내고 나면, 마지막 급수는 세 개의 등비급수로 나뉜다. 나머지는 분수를 다루는 꼼꼼한 계산과, 각 급수가 어디에서 수렴(converge)하는지를 놓치지 않는 일이다.

풀이

c_m 구하기

지수가 -1인 이항정리에 의해

$$(1-ax)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k \quad (|ax|<1), \qquad (1-bx)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} b^j x^j \quad (|bx|<1).$$

$0<a<b$이므로 조건 $b|x|<1$에서 $a|x|<b|x|<1$을 얻고, 따라서 두 전개는 모두 성립한다. 두 급수는 모두 절대수렴(absolutely converge)하므로, 서로 곱한 뒤 x의 거듭제곱별로 정리해도 된다. x^m의 계수는 $k+j=m$인 순서쌍들에서 나온다.

$$c_m = \sum_{k=0}^{m} a^k b^{m-k} = b^m + ab^{m-1} + \cdots + a^{m-1}b + a^m.$$

이는 첫째항이 b^m, 공비가 a/b이고 항이 $m+1$개인 등비급수이다. $a \neq b$이므로 그 합은

$$c_m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{b-a}.$$

(같은 말로, $(b-a)c_m = b^{m+1} - a^{m+1}$이다. 곱을 전개하면 합의 항들이 연쇄적으로 상쇄(telescope)되기 때문이다.)

c_m^2에 대한 공식

제곱하고 $(b-a)^2 = (a-b)^2$을 이용하면

$$c_m^2 = \frac{\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)^2}{(b-a)^2} = \frac{a^{2m+2} - 2(ab)^{m+1} + b^{2m+2}}{(a-b)^2},$$

이므로 요구된 식을 얻는다.

급수 $\sum c_m^2 x^m$

앞의 공식의 요점은 각 항이 상수와 m제곱의 곱이라는 것이다.

$$c_m^2 x^m = \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^2\,(a^2x)^m - 2ab\,(abx)^m + b^2\,(b^2x)^m\right).$$

따라서 $\sum c_m^2 x^m$은 공비가 a^2x, abx, b^2x인 세 등비급수의 결합이다.

생각해 보기 어떤 x에 대해 세 등비급수가 모두 수렴하는가?

$|a^2x| < 1$, $|abx| < 1$, $|b^2x| < 1$이 필요하다. $0 < a^2 < ab < b^2$이므로 마지막 조건이 가장 강하고, 나머지 두 조건은 이로부터 따라 나온다. 따라서 세 급수가 모두 수렴하는 것은 정확히 $|x| < 1/b^2$일 때이다. 이때 각 등비급수를 합하면

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 x^m = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2x} - \frac{2ab}{1-abx} + \frac{b^2}{1-b^2x}\right).$$

모든 항을 공통분모 $(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)$로 통분한다. 분자는

$$N = a^2(1-abx)(1-b^2x) - 2ab(1-a^2x)(1-b^2x) + b^2(1-a^2x)(1-abx).$$

이를 x의 거듭제곱별로 정리한다.

$$\begin{aligned}
\text{상수항:}\quad & a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,\\
\text{계수}x:\quad & -a^2(ab+b^2) + 2ab(a^2+b^2) - b^2(a^2+ab)\\
& \qquad = a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a-b)^2,\\
\text{계수}x^2:\quad & a^2\cdot ab^3 - 2ab\cdot a^2b^2 + b^2\cdot a^3b = 0.
\end{aligned}$$

따라서 $N = (a-b)^2(1+abx)$이다. 인수 $(a-b)^2$이 약분되어 다음이 남는다.

$$c_0^2 + c_1^2x + c_2^2x^2 + \cdots = \frac{1+abx}{(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)} \qquad \text{단, } -\frac{1}{b^2} < x < \frac{1}{b^2}.$$

이 구간은 더 넓어질 수 없다. $x = \pm 1/b^2$에서 각 항은

$$|c_m^2 x^m| = \frac{\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)^2}{(b-a)^2\, b^{2m}} = \frac{b^2\left(1 - (a/b)^{m+1}\right)^2}{(b-a)^2} \to \frac{b^2}{(b-a)^2} \neq 0,$$

을 만족하므로 급수는 그 점에서 발산(diverge)한다. 또한 $|x| > 1/b^2$에서는 항이 한없이 커지므로 역시 발산한다.

검산

$a = 1, b = 2$로 놓자. 그러면 $c_m = 2^{m+1} - 1$이므로 $c_0, c_1, c_2 = 1, 3, 7$이고, 직접 계산해도 $\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + 2x + 4x^2 + \dots) = 1 + 3x + 7x^2 + \cdots$이다. 제곱은 $1, 9, 49$이다. 반대쪽에서는 $\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-4x)} = 1 + 7x + 35x^2 + \cdots$이고, 여기에 $1 + 2x$를 곱하면 $1 + 9x + 49x^2 + \cdots$가 되어 예상대로 맞는다. 수치적으로도 $a = 0.7$, $b = 1.3$, $x = 0.3$일 때 $c_m^2 x^m$을 많은 항까지 더하면 $4.163878\ldots$이 나와 닫힌 형태와 일치한다.

흔한 실수

- 앞 소문항의 조건을 그대로 가져와 구간을 $b|x| < 1$로 답하는 것. 새 급수의 공비는 a^2x, abx, b^2x이므로 조건은 $b^2|x| < 1$이다.
- c_m을 합의 꼴로 그대로 두는 것. 닫힌 형태 $(b^{m+1} - a^{m+1})/(b-a)$가 있어야 문제의 나머지 부분이 풀린다.
- N에서 x의 계수를 구할 때 부호를 틀리는 것. 요령을 부리기보다 각 곱을 항별로 꼼꼼히 전개하는 편이 더 빠르다.

STEP 너머

급수 $\sum c_m x^m$은 수열 c_m의 **생성함수**(generating function)이며, 이 문제는 어떤 수열이 유리 생성함수를 가지면 그 제곱들의 수열도 유리 생성함수를 가진다는 것을 보여 준다. 이는 두 유리 멱급수의 **아다마르 곱**(Hadamard product)이 항상 유리함수라는 사실의 특수한 경우이다. 여기서 구한 구간은 **수렴반지름**(radius of convergence)의 한 예이다. 유리함수의 멱급수(power series)는 가장 가까운 극(pole)까지 수렴하며, 여기서는 그 극이 $x = 1/b^2$이다. 생성함수는 Wilf의 *generatingfunctionology*에서 아름답게 전개되고, 멱급수와 그 수렴은 Abbott의 *Understanding Analysis*에서 꼼꼼하게 다루어진다.

풀이

STEP I 1988, 문제 6

순수수학 • 복소수와 기하

STEP I 1988, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s1-q6

핵심 아이디어

아르강 도표(Argand diagram)에서 벡터 $\overrightarrow{P_jP_k}$는 그저 복소수 $z_k - z_j$이다. 따라서 두 벡터가 같다는 것은 두 차가 같다는 것이 되고, 수직(perpendicular)이라는 것은 "한 차를 다른 차로 나눈 값이 순허수(purely imaginary)이다"라는 것이 된다. 주어진 값을 대입하면 조건 (i)에 의해 z_4와 w가 z로 결정되고, 조건 (ii)에 의해 z의 허수부(imaginary part)가 정해진다. 그러면 이 육각형(hexagon)은 그 중심에 대하여 대칭임이 드러나고, 덕분에 볼록성과 마지막 각을 쉽게 다룰 수 있다.

풀이

명제를 식으로 옮기기

$\overrightarrow{P_jP_k}$는 $z_k - z_j$로 나타내어지므로, 명제 (i)은 다음과 같다.

$$z_2 - z_1 = z_4 - z_5 \qquad \text{그리고} \qquad z_3 - z_2 = z_5 - z_6.$$

(ii)의 경우, 영이 아닌 두 벡터 u와 v가 수직일 필요충분조건은 두 벡터의 편각(argument)의 차가 $\pm\frac{\pi}{2}$인 것, 즉 u/v가 순허수인 것이다. 점들은 서로 다르므로 $z_4 - z_2 \neq 0$이고 $z_6 - z_3 \neq 0$이며, 명제 (ii)는 다음과 같다.

$$\frac{z_4 - z_2}{z_6 - z_3} \text{ 는 순허수이다,} \qquad \text{동치로} \qquad \operatorname{Re}\left[(z_4 - z_2)\,\overline{(z_6 - z_3)}\right] = 0.$$

(i)에서 얻는 결과

(i)의 두 식을 더하면 z_2와 z_5 항이 소거된다.

$$z_3 - z_1 = z_4 - z_6, \qquad \text{따라서} \qquad z_4 - z_3 = z_6 - z_1,$$

이것이 바로 요구된 명제 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$이다.

육각형

이제 $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = z, z_5 = \mathrm{i}, z_6 = w$로 놓자. (i)의 첫째 식에서

$$z_4 = z_5 + z_2 - z_1 = 1 + \mathrm{i},$$

를 얻고, 둘째 식에서 $z - 1 = \mathrm{i} - w$를 얻으므로

$$w = 1 + \mathrm{i} - z.$$

이다. $z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6 = 1 + \mathrm{i}$임에 주목하자. 마주 보는 꼭짓점들이 점 $\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$에 대하여 대칭이므로, 이 육각형은 대칭중심(centre of symmetry)을 가진다.

(ii)에서 $z_4 - z_2 = \mathrm{i}$이고 $z_6 - z_3 = w - z = 1 + \mathrm{i} - 2z$이다. 몫 $\mathrm{i}/(1 + \mathrm{i} - 2z)$가 순허수일 필요충분조건은 $1 + \mathrm{i} - 2z$가 실수인 것, 즉 $1 - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0$인 것이다. 따라서

$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{그러면} \qquad \mathrm{Im}(w) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

a를 실수로 하여 $z = a + \frac{1}{2}\mathrm{i}$로 쓰자. 그러면 $w = (1-a) + \frac{1}{2}\mathrm{i}$이므로 항상 $\mathrm{Re}(w) = 1 - \mathrm{Re}(z)$이다. 여섯 꼭짓점은

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (a, \tfrac{1}{2}), \quad (1,1), \quad (0,1), \quad (1-a, \tfrac{1}{2}) :$$

이다. 즉 단위정사각형의 두 세로변 각각의 중간 높이에 "뾰족한 점"을 하나씩 덧붙인 모양이다.

? 생각해 보기 그림에 기대지 않고 볼록성을 어떻게 판정할 수 있을까?

육각형의 둘레를 순서대로 따라 걸어 보자. 육각형이 볼록(convex)일 필요충분조건은 각 꼭짓점에서 항상 같은 방향으로 꺾는 것이다. 한 꼭짓점에서 꺾는 방향은 들어오는 변 u와 나가는 변 v의 외적(cross product) $\mathrm{Im}(\bar{u}v) = u_x v_y - u_y v_x$의 부호로 측정된다. 변들은

$$P_1P_2 = (1,0), \quad P_2P_3 = (a-1, \tfrac{1}{2}), \quad P_3P_4 = (1-a, \tfrac{1}{2}),$$
$$P_4P_5 = (-1,0), \quad P_5P_6 = (1-a, -\tfrac{1}{2}), \quad P_6P_1 = (a-1, -\tfrac{1}{2}),$$

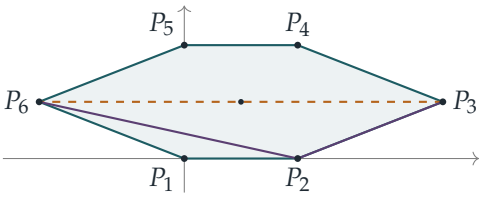
이고, $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_1$에서의 외적은 차례로

$$\tfrac{1}{2}, \qquad a-1, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad a-1, \qquad \tfrac{1}{2}.$$

이다. 이 중 넷은 a의 값과 관계없이 양수이므로, 육각형이 볼록일 필요충분조건은 $a-1>0$이다. ($a=1$이면 P_3이 선분 P_2P_4 위에 놓이므로 진짜 육각형이 되지 않는다.) 기하적으로 말하면, P_3은 정사각형의 변 $x=1$보다 오른쪽에 있어야 하고, 대칭성에 의해 P_6은 $x=0$보다 왼쪽에 있어야 한다. 따라서 조건은

$$\boxed{\mathrm{Re}(z)>1 \quad \text{이고} \quad \mathrm{Re}(w)=1-\mathrm{Re}(z) \ \ (\text{따라서} \mathrm{Re}(w)<0)}$$

이다. (여기에 (ii)가 이미 강제하는 $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(w)=\frac{1}{2}$가 함께 성립한다.)



거리 P_3P_6

P_2에서 뻗어 나가는 두 팔은

$$z_3-z_2=(a-1)+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_6-z_2=-a+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

이다. 각 $\theta=\angle P_3P_2P_6$ (0과 π 사이)에 대하여, 두 팔의 내적(dot product)은 $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\cos\theta$이고, 외적의 크기는 $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\sin\theta$이다.

$$\text{내적}=-a(a-1)+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}(1+4a-4a^2), \qquad \text{외적}=(a-1)\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot(-a)=\tfrac{1}{2}(2a-1).$$

$a>1$이면 외적이 양수이므로 이것이 정확히 $\sin\theta$ 항이 되고,

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}(2a-1)}{\frac{1}{4}(1+4a-4a^2)}=\frac{2(2a-1)}{1+4a-4a^2}.$$

이다. 이 값을 $-\frac{2}{3}$과 같다고 놓으면

$$3(2a-1)=-(1+4a-4a^2) \quad\Longrightarrow\quad 4a^2-10a+2=0 \quad\Longrightarrow\quad 2a^2-5a+1=0,$$

이므로 $a=\frac{1}{4}(5\pm\sqrt{17})$이다. 음의 부호를 택하면 $a\approx 0.22$가 되어 볼록성 조건 $a>1$을 어기고, 양의 부호를 택하면 $a\approx 2.28>1$이다. (이때 분모 $1+4a-4a^2$는 음수이므로, 탄젠트가 음수라는 조건에 맞게 θ는 둔각이다.)

마지막으로 P_3과 P_6은 허수부가 같으므로

$$P_3P_6=|z-w|=|2a-1|=2a-1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}-1=\boxed{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\approx 3.56.$$

이다.

볼록성 조건을 빼면, 같은 방법(이번에는 분자에 $|2a-1|$을 둔다)으로 해가 하나 더 나온다. 바로 $a = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{17})$이다. 이것은 z와 w를 맞바꾸는 대칭 $a \mapsto 1-a$에 의한 거울상일 뿐이며, 같은 거리 $\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$를 준다.

검산

- 대칭성: $z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6$이므로, 결과 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$는 점대칭(centrally symmetric) 육각형의 세 번째 대변 쌍에 대한 사실일 뿐이다.
- $a = \frac{1}{4}(5+\sqrt{17}) \approx 2.2808$로 두고 $\arg\left((z_6-z_2)/(z_3-z_2)\right)$를 직접 계산하면 탄젠트가 -0.66667인 각을 얻고, $|z-w| \approx 3.5616 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$이다.
- a를 -5부터 5까지 바꾸어 가며 볼록성을 수치적으로 시험해 보면, 육각형이 볼록인 것은 정확히 $a > 1$일 때임이 확인된다.

흔한 실수

- 벡터의 방향을 거꾸로 잡는 것: $\overrightarrow{P_5P_4}$는 $z_5 - z_4$가 아니라 $z_4 - z_5$이다.
- 수직 조건을 "기울기의 곱이 -1이다"로 쓰고 나서 수직선인 경우를 놓치는 것. 여기서 $\overrightarrow{P_2P_4}$는 수직선 방향이며, 몫을 이용한 판정법은 이 경우를 깔끔하게 처리한다.
- 근 $a = \frac{1}{4}(5-\sqrt{17})$를 버리지 않는 것. 이 값은 볼록 육각형을 주지 않는다(실제로 이때는 $\tan\theta > 0$이 된다).

STEP 너머

점을 복소수로 다루면 기하가 대수로 바뀐다. 평행이동은 덧셈이 되고, 회전과 확대·축소는 곱셈이 된다. "u/v가 순허수이다"라는 판정법은 각이 편각으로 바뀌는 한 예이다. 볼록성을 판정하는 외적 부호 판정법은 계산기하학에서 표준적인 볼록 껍질(convex hull) 알고리즘의 바탕이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(복소해석을 시각적으로 다룬 책)는 복소수에 대한 이러한 기하적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP I 1988, 문제 7

순수수학 • 이차식 도함수의 한계

STEP I 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s1-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.6 절 **기울기의 한계**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/markov-bound.html

핵심 아이디어

이차식(quadratic)은 세 점에서의 값으로 완전히 결정되므로, f'을 $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$으로 다시 나타낼 수 있다. 일단 f'을 이렇게 쓰고 나면, 가정 $|f| \le 1$이 세 계수를 각각 통제하고, 나머지는 삼각부등식(triangle inequality)이 해결한다. 마지막 부분에서는 f가 어떤 값을 가질 때 증명에 나온 모든 부등식이 등식이 되는지 살펴본다.

풀이

$f'(x)$에 대한 항등식

$f(1) = a + b + c$, $f(-1) = a - b + c$, $f(0) = c$이다. 우변을 x의 거듭제곱에 따라 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &f(1)\left(x + \tfrac{1}{2}\right) + f(-1)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) - 2f(0)x \\ &\quad = \left[(a+b+c) + (a-b+c) - 2c\right]x + \tfrac{1}{2}\left[(a+b+c) - (a-b+c)\right] \\ &\quad = 2ax + b. \end{aligned}$$

$f'(x) = 2ax + b$이므로, 이것이 바로 구하는 항등식이다.

부등식 $|f'(x)| \le 4$

$|x| \le 1$일 때마다 $|f(x)| \le 1$이라고 하자. 특히 $|f(1)|$, $|f(-1)|$, $|f(0)|$은 모두 1 이하이다. $|x| \le 1$인 임의의 x를 잡자. 항등식과 삼각부등식에 의해

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le |f(1)|\left|x+\tfrac{1}{2}\right| + |f(-1)|\left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|f(0)|\,|x| \\ &\le \left|x+\tfrac{1}{2}\right| + \left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|x|. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** $|x| \le 1$일 때 $\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right|$은 얼마나 커질 수 있을까?

이것은 x에서 $\frac{1}{2}$까지의 거리와 $-\frac{1}{2}$까지의 거리의 합이다. $|x| \le \frac{1}{2}$이면 x는 두 점 사이에 있으므로 합은 정확히 1이다. $|x| > \frac{1}{2}$이면 두 점이 모두 x의 같은 쪽에 있으므로 합은 $2|x|$이다. 어느 경우든 $|x| \le 1$이면 이 합은 2 이하이다. 또한 $2|x| \le 2$이므로

$$|f'(x)| \le 2 + 2 = 4 \qquad \text{단, } |x| \le 1,$$

이 되어 증명이 끝난다.

(다른 방법으로 보면, f'은 일차함수이므로 $[-1, 1]$에서 그 절댓값은 끝점에서 가장 크고, $x = \pm 1$에서의 부등식은 $|f'(\pm 1)| \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4$가 된다.)

등호가 성립하는 경우

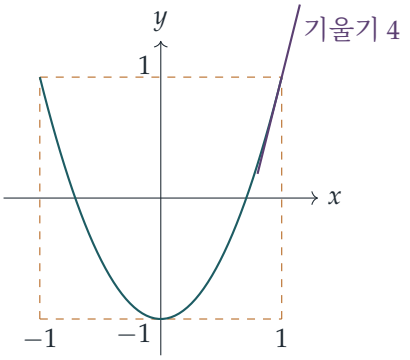
$x = 1$에서 등호가 성립하려면 위의 모든 단계가 그 점에서 등식이 되어야 한다. $x = 1$에서 계수 $x + \frac{1}{2}$, $x - \frac{1}{2}$, $-2x$는 각각 $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, -2이다. 따라서 $f'(1) = +4$를 얻으려면 다음이 필요하다.

$$f(1) = 1, \qquad f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1.$$

이로부터 $c = -1$, $a + b + c = 1$, $a - b + c = 1$이므로 $b = 0$, $a = 2$이다.

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -1, \qquad f(x) = 2x^2 - 1.$$

이제 조건을 확인하자. $|x| \le 1$이면 $0 \le x^2 \le 1$이므로 $-1 \le 2x^2 - 1 \le 1$, 즉 $|f(x)| \le 1$이다. 그리고 $f'(x) = 4x$이므로, 구간 안의 점 $x = 1$에서 $f'(1) = 4$이다. 이것이 우리가 찾는 예이다.



곡선 $y = 2x^2 - 1$(청록색)은 정사각형 $|x| \le 1, |y| \le 1$ 안에 머물면서 위에서 아래로 내려갔다가 다시 올라오므로, 양 끝에서 가능한 한 가장 가파르다.

($\pm(2x^2 - 1)$ 중 어느 것이든 $|f'(\pm 1)| = 4$를 준다. $f(x) = 2x^2 - 1$로 택하면 $f'(1) = +4$이고, $-(2x^2 - 1)$도 $x = -1$에서 같은 값을 준다.)

검산

- $f(x) = x^2 + x + 1$로 시험해 보자. $f(1) = 3, f(-1) = 1, f(0) = 1$이다. $x = 2$에서 항등식은 $3 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 2 = 5 = f'(2)$를 준다.
- $\max_{|x|\le 1} |f(x)| = 1$이 되도록 크기를 조정한 20,000개의 이차식을 무작위로 탐색했을 때, $\max_{|x|\le 1} |f'(x)| = 2|a| + |b|$가 4를 넘는 경우는 한 번도 없었고(가장 큰 값은 약 3.91이었다), $2x^2 - 1$은 정확히 4에 도달한다.

흔한 실수

- $\left|x + \frac{1}{2}\right|$과 $\left|x - \frac{1}{2}\right|$을 각각 따로 $\frac{3}{2}$로 어림하는 것. 그러면 $|f'(x)| \le 5$밖에 얻지 못한다. 두 거리는 함께 어림해야 한다.
- 0과 ± 1에서만이 아니라 구간 전체에서 $|f(x)| \le 1$인지 확인하지 않고 예를 제시하는 것.

STEP 너머

이것은 마르코프 부등식(Markov's inequality)의 이차인 경우이다. 즉 차수가 n인 다항식 p가 $[-1, 1]$에서 $|p| \le 1$을 만족하면, 그 구간에서 $|p'| \le n^2$이다. 등호는 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial) $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$에서 성립하며, $2x^2 - 1 = T_2(x)$이다. 다항식을 선택한 점들에서의 값으로 나타내는 것은 라그랑주 보간법(Lagrange interpolation)으로, 수치해석과 근사 이론의 기본 도구이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced*

*Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP I 1988, 문제 8

순수수학 • 3차원 기하

STEP I 1988, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

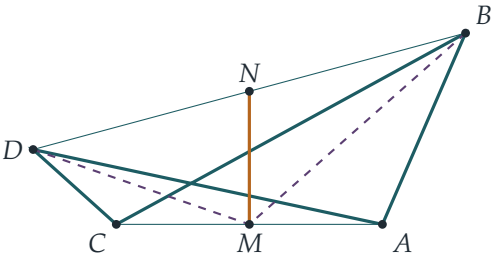
step.maths.org/questions/88-s1-q8

핵심 아이디어

각 대각선(diagonal)은 사각형을 두 삼각형으로 나누고, 마주 보는 변의 길이가 같다는 조건 때문에 이 두 삼각형은 합동(congruent)이다(SSS). 합동인 삼각형은 중선(median)의 길이도 같으므로, 한 대각선의 중점(midpoint)은 다른 대각선의 두 끝점에서 같은 거리에 있다. 선분의 두 끝점에서 같은 거리에 있는 점을 그 선분의 중점과 이으면 선분에 수직(perpendicular)인 직선을 얻는다. 이것은 바로 이등변삼각형(isosceles triangle)의 성질이다.

풀이

AC의 중점을 M, BD의 중점을 N이라 하자.



이 그림은 꼬인 사각형(skew quadrilateral)을 평면에 투영한 것이다. 점선 MB와 MD는 아래에서 사용하는 중선이고, 호박색 선분은 MN이다.

먼저, $M \neq N$

직선 MN은 M과 N이 서로 다른 점일 때에만 의미가 있다. 만약 $M = N$이면 대각선 AC와 BD는 한 공통점에서 서로를 이등분한다. 한 공통점을 지나는 두 직선은 한 평면 위에 있으므로 A, B, C, D는 모두 그 평면 위에 있게 되고, $ABCD$는 (평면) 평행사변형(parallelogram)이 된다. $ABCD$는 꼬인 사각형이므로 $M \neq N$이다. 바로 여기에서 "꼬인"이라는 조건이 쓰인다. 평행사변형에서는 마주 보는 변의 길이가 같지만 두 중점이 일치한다.

MN은 BD에 수직이다

대각선 AC를 공유하는 삼각형 ABC와 CDA를 살펴보자.

$$AB = CD, \qquad BC = DA, \qquad CA = AC,$$

이므로 두 삼각형은 $A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D, C \leftrightarrow A$의 대응으로 합동이다(SSS). 이 대응에서 삼각형 ABC의 B에서 AC의 중점으로 가는 중선은 삼각형 CDA의 D에서 CA의 중점으로 가는 중선에 대응한다. 두 중선은 모두 같은 점 M에서 끝나므로

$$MB = MD.$$

? 생각해 보기 합동인 삼각형은 왜 중선의 길이가 같아야 하는가?

중선은 변의 길이만으로 완전히 결정된다. 예를 들어 코사인 법칙(cosine rule)(또는 아폴로니우스(Apollonius) 정리)에 의해, 삼각형 ABC에서 B로부터 그은 중선의 길이 m은 $4m^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$를 만족한다. 변의 길이가 같으면 중선의 길이도 같으므로 $MB^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) = \frac{1}{4}(2CD^2 + 2DA^2 - CA^2) = MD^2$이다.

이제 M은 B와 D에서 같은 거리에 있고, N은 BD의 중점이다. 삼각형 MNB와 MND는 $MB = MD$, $NB = ND$이고 공통변 MN을 가지므로 합동이며(SSS), 각 $\angle MNB$와 $\angle MND$는 같다. 또한 B, N, D가 한 직선 위에 있으므로 두 각은 서로 보각(supplementary)이다. 따라서 두 각은 각각 직각이고, $MN \perp BD$이다. (이 삼각형들은 퇴화(degenerate)하지 않은 진짜 삼각형이다. 만약 M이 $MB = MD$를 만족하면서 직선 BD 위에 있다면 M은 중점 N이 되는데, 이는 앞에서 배제하였다.)

MN은 AC에 수직이다

두 대각선의 역할을 바꾸어도 같은 논증이 성립한다. 삼각형 ABD와 CDB는 대각선 BD를 공유하고

$$AB = CD, \qquad AD = CB, \qquad BD = DB,$$

이므로 $A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D, D \leftrightarrow B$의 대응으로 합동이다. A와 C에서 그은 중선은 모두 BD의 중점 N에서 끝나므로 $NA = NC$이다. M은 AC의 중점이고 $N \neq M$이므로, 앞의 이등변삼

각형 논증에 의해 $MN \perp AC$이다.

따라서 두 대각선의 중점을 잇는 직선은 각 대각선에 수직이고, 증명이 끝난다.

벡터를 이용한 풀이

원점을 M에 잡으면 위치벡터로 $C = -A$이고, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$이다. 주어진 두 등식을 제곱하면

$$AB^2 = CD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d},$$
$$BC^2 = AD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}.$$

두 식을 빼면 $4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -4\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$, 즉 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{d}) = 0$이다. $\overrightarrow{AC} = -2\mathbf{a}$이므로 이는 $\overrightarrow{MN} \perp AC$를 뜻한다. 원점을 N에 잡으면 같은 방법으로 $MN \perp BD$를 얻는다.

검산

$A = (1,0,0)$, $B = (1,2,1)$, $C = (-1,0,0)$, $D = (-1,-2,1)$로 놓아 보자. 그러면 $AB = CD = \sqrt{5}$, $BC = AD = 3$이고, 네 점은 한 평면 위에 있지 않다(coplanar가 아니다)(스칼라 삼중곱(scalar triple product) $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})$의 값이 8이다). 이때 $M = (0,0,0)$, $N = (0,0,1)$이므로 MN은 z축 방향이고, AC는 x축 방향이며 $\overrightarrow{BD} = (-2,-4,0)$은 z성분이 없다. 따라서 둘 다 MN에 수직이다. 또한 마주 보는 변의 길이가 같은 꼬인 사각형 20 000개를 무작위로 만들어 시험해 보았는데, MN과 각 대각선이 이루는 각의 코사인 값은 한 번도 4×10^{-12}를 넘지 않았다.

흔한 실수

- $M \neq N$인 이유를 설명하지 않는다. 꼬인 사각형이라는 조건이 없으면 결과가 성립하지 않는다. 평행사변형에서는 직선 MN 자체가 존재하지 않기 때문이다.
- 합동인 삼각형을 밝히지 않고 "대칭에 의해" $MB = MD$라고 주장한다.
- 한 대각선에 대한 수직만 증명한다. 두 번째 대각선에 대해서는 다른 합동 삼각형 쌍이 필요하다.

STEP 너머

위의 예에서 z축(직선 MN)을 축으로 하는 반회전(half-turn)은 A와 C를, B와 D를 서로 바꾼다. 이는 일반적으로 성립한다. 마주 보는 변의 길이가 같은 모든 꼬인 사각형은 MN을 축으로 180° 회전하면 자기 자신으로 옮겨진다. (이 회전은 M을 고정하고 MN에 수직인 모든

방향을 반대로 뒤집으므로 A를 C로 보낸다. 마찬가지로 B를 D로 보낸다.) 거꾸로, 이 반회전을 보면 변의 길이가 같다는 사실이 자명해진다. 기하학적 사실을 대칭, 즉 공간의 등거리변환(isometry)의 결과로 보는 관점은 대학 1학년 기하학과 군론(group theory)의 핵심 아이디어이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 군론 쪽을 전개하고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 STEP 형식의 기하 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 1988, 문제 9

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1988, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q9

핵심 아이디어

두 적분 모두 다룰 부분을 제대로 고르기만 하면 표준적인 기법으로 풀린다. (i)에서는 $\ln x$와 x의 거듭제곱의 곱이 있으므로 부분적분(integration by parts)을 쓰며, 로그를 미분하여 없앤다. (ii)에서 다루기 까다로운 부분은 제곱근이므로, 이것을 새로운 변수로 삼는다. $\cos x\,\mathrm{d}x$는 바로 이 치환(substitution)에 필요한 것이고, 남는 것은 부분분수(partial fractions)로 처리할 수 있는 유리함수(rational function)이다.

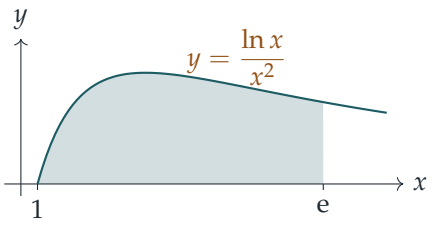
풀이

소문항 (i)

$u = \ln x$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2}$로 두고 부분적분한다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$이고 $v = -\dfrac{1}{x}$이다.

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{\mathrm{e}} - 0\right) + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

여기서 $\ln \mathrm{e} = 1$과 $\ln 1 = 0$을 이용하였다. 답은 양수인데, 피적분함수(integrand)가 $(1, \mathrm{e}]$에서 양수이므로 당연히 그래야 한다.



색칠한 부분의 넓이는 $1 - 2/\mathrm{e} \approx 0.264$이다.

소문항 (ii)

피적분함수는 $\sin x \neq 0$이고 $1 + \sin x > 0$일 때 정의된다. 다음과 같이 놓는다.

$$u = \sqrt{1+\sin x}, \qquad \text{그러면} u^2 = 1 + \sin x, \quad 2u\,\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x, \quad \sin x = u^2 - 1.$$

이때 $u > 0$이고, $\sin x \neq 0$이므로 $u \neq 1$이다. 그러면

$$\int \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2u}{(u^2-1)\,u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u.$$

? **생각해 보기** $\cos x$는 어떻게 되었는가? 이것을 u로 나타내야 하는가?

그럴 필요가 없다. $\cos x\,\mathrm{d}x$ 전체가 $2u\,\mathrm{d}u$로 바뀌며, 바로 이 때문에 이 치환이 이토록 깔끔하게 통한다. 만약 분자가 다른 것이었다면 $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$가 필요했을 것이고, 부호 문제로 골치를 앓았을 것이다.

부분분수로 분해하면 $\dfrac{2}{u^2-1} = \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}$이므로

$$\int \frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \ln|u-1| - \ln|u+1| + C = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

x로 되돌리면

$$\int \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sqrt{1+\sin x}+1}\right| + C.$$

절댓값 기호(modulus signs)가 중요하다. $-1 < \sin x < 0$일 때 $0 < u < 1$이므로 $\dfrac{u-1}{u+1}$은 음수이다. (엄밀히 말하면, 정의역(domain)이 $\sin x$의 영점들에 의해 나뉘므로, 피적분함수가 정의되는 각 구간마다 상수가 다를 수 있다.)

분수의 분자와 분모에 $u-1$을 곱하면 동치인 다른 형태를 얻는다. $(u+1)(u-1) = u^2 - 1 = \sin x$이므로 답은 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$2\ln\left|\sqrt{1+\sin x}-1\right| - \ln|\sin x| + C.$$

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_1^{\mathrm{e}} x^{-2}\ln x\,\mathrm{d}x \approx 0.264241$이며, 이는 $1-2/\mathrm{e} = 0.264241\ldots$와 일치한다.
- (ii)는 답을 미분해 보면 된다. 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right| = \dfrac{2}{u^2-1}\cdot\dfrac{\cos x}{2u}$이고, 이것은 피적분함수와 같다. 수치적으로는 심프슨 공식으로 피적분함수의 $\int_{0.3}^{1.2}$를 구하면 0.926006이며, 이는 역도함수(antiderivative)의 차와 일치한다. $[-1.2, -0.2]$처럼 $\sin x < 0$인 구간에서도 똑같이 잘 일치하며, 이 구간에서 적분값은 -2.361027이다.

흔한 실수

- (i)에서 거꾸로 $u = 1/x^2$, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \ln x$로 고르는 것. 원리상으로는 가능하지만 훨씬 복잡해진다. 로그를 미분하는 쪽을 택하라.
- (ii)에서 절댓값 기호를 빠뜨려서, $\sin x < 0$일 때마다 답이 정의되지 않게 되는 것.
- $2u\,\mathrm{d}u$의 인수 2를 빠뜨려서 답이 절반이 되는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 일반적인 원리의 한 예이다. x와 $\sqrt{ax+b}$의 유리함수인 피적분함수는 치환 $u = \sqrt{ax+b}$를 하면 u의 유리함수가 되고, 유리함수는 언제나 부분분수로 적분할 수 있다. 여기서는 $\sin x$가 x의 역할을 한다. 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서는 이 이야기의 다른 면을 만나게 된다. 즉 치환적분과 부분적분을 정당화하는 정리들, 그리고 적분상수(constant of integration)가 정의역의 분리된 구간마다 다를 수 있는 이유를 배운다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)가 이 두 가지를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1988, 문제 10

역학 • 포물체 운동

> **STEP I 1988, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q10

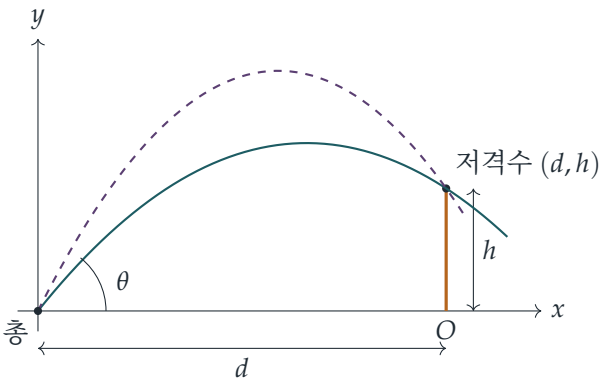
핵심 아이디어

질문을 뒤집어 보자. 총이 나무 밑동에서 수평 거리 d인 곳에 있다고 두고, 속력 v로 발사된 총알이 나무 꼭대기를 지나가게 하는 앙각(angle of elevation)이 **하나라도** 있는지 묻는다. $\tan\theta$로 나타낸 궤적 방정식(trajectory equation)은 $\tan\theta$에 대한 이차방정식이므로, 답이 "그렇다"인 것은 정확히 그 이차방정식이 실근을 가질 때이다. 그러면 판별식(discriminant) 조건은 d만에 대한 부등식이 된다.

풀이

모형

총알을 공기 저항 없이 중력만 받아 움직이는 입자로 보고, 지면 높이에서 속력 v로 수평면 위 각 θ 방향으로 발사된다고 하자. 여기서 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$이다. 총의 위치를 모르므로, 총이 나무의 밑동 O에서 거리 $d \geq 0$인 곳에 있다고 하고, 총의 위치를 원점으로 하여 x축은 나무를 향하는 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. 그러면 나무 꼭대기는 점 (d, h)이다.



저격수 맞히기

시각 t에서 총알의 위치는 $x = vt\cos\theta$, $y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$이다. $\theta < \frac{\pi}{2}$이면 $t = x/(v\cos\theta)$를 소거하고 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하여 다음 궤적을 얻는다.

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2}(1 + \tan^2\theta).$$

총알이 저격수를 맞히는 것은 (d, h)가 이 곡선 위에 있을 때이고, 그때뿐이다. 먼저 $d > 0$이라고 하자. $T = \tan\theta, k = \dfrac{gd^2}{2v^2} > 0$으로 두면 조건은 다음과 같다.

$$kT^2 - dT + (h + k) = 0.$$

모든 실수 T는 정확히 하나의 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 대한 $\tan\theta$이다. 그런데 근이 음수일 수도 있을까? 두 근의 곱은 $(h + k)/k > 0$이고 합은 $d/k > 0$이므로, 실근이 있다면 둘 다 양수이고 실제 앙각 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$를 준다. 따라서 가능한 앙각이 존재하는 것은 정확히 이 이차방정식이 실근을 가질 때, 곧 판별식이 음이 아닐 때이다.

$$\begin{aligned} d^2 - 4k(h + k) \geq 0 &\iff d^2 \geq \frac{2gd^2}{v^2}\left(h + \frac{gd^2}{2v^2}\right) \\ &\iff v^4 \geq 2ghv^2 + g^2d^2 \qquad (d^2 > 0\text{으로 나누고 } v^4\text{를 곱함}) \\ &\iff d^2 \leq \frac{v^2}{g^2}(v^2 - 2gh). \end{aligned}$$

생각해 보기 총이 나무 밑동 바로 그 자리에 있어서 $d = 0$이고 위의 궤적 방정식을 쓸 수 없다면 어떻게 될까?

그때는 총알이 연직으로($\theta = \frac{\pi}{2}$) 발사되었어야 하고, 나중 속력이 0 이상이라는 조건과 $v^2 = u^2 - 2gs$에 의해 총알이 높이 h에 도달하는 것은 $v^2 \geq 2gh$일 때이고 그때뿐이다. 이것은 $d = 0$일 때의 같은 조건이므로, 이 부등식은 모든 경우를 포괄한다.

$d \geq 0$이므로 음이 아닌 제곱근을 취하면 다음을 얻는다.

$$d \leq \frac{v}{g}\sqrt{v^2 - 2gh}.$$

따라서 총은 수평한 지면 위에서 나무 밑동으로부터의 거리가 많아야 $(v/g)\sqrt{v^2 - 2gh}$인 점에 있었다. 즉 총은 나무 밑동을 중심으로 하고 그 길이를 반지름으로 하는 원의 내부(또는 극단적인 경우 원 위)에 있었고, 이것이 보이려던 것이다. 실제로 발사가 일어났다는 것을 알기 때문에 이 제곱근은 실수이다. $d = 0$일 때 부등식은 $v^2 \geq 2gh$를 강제하는데, 이는 단지 총알이 높이 h까지 올라갈 만큼의 에너지를 가진다는 뜻이다.

이 조건은 충분조건이기도 하다. 원 내부의 어느 점에서든 이차방정식은 두 양의 실근을 가지므로 가능한 앙각이 두 개(그림에서처럼 낮은 궤적과 높은 궤적) 있고, 원 위에서는 이 둘이 하나로 합쳐진다.

검산

- $h = 0$이면 반지름은 v^2/g로, 평지에서의 익숙한 최대 도달 거리(maximum range)이다. $v^2 \to 2gh$이면 반지름은 0으로 줄어든다. 즉 총은 밑동에서 바로 위로 쏘아야만 겨우 저격수에 닿을 수 있다.
- 단위: $(v/g)\sqrt{v^2}$의 단위는 $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$이다.
- 수치로 확인하면, $g = 9.8$, $v = 20$, $h = 8$일 때 반지름은 약 31.8 m이다. $d = 31.8\,\mathrm{m}$에서 유일하게 허용되는 앙각 $\tan\theta = v^2/(gd)$로 운동을 단계적으로 진행시키면, 총알은 나무 위치에서 높이 8.000 m에 이른다. 모든 앙각을 훑어보면 원 밖으로 몇 퍼센트 벗어난 점에는 도달할 수 없고 원 안의 점에는 도달할 수 있음이 확인된다.

흔한 실수

- 최대 도달 거리 v^2/g나 최대 높이만 사용하는 것. 저격수는 높이 h에 있으므로 두 좌표가 동시에 중요하다.
- $\tan\theta$에 대한 근이 수평면 위쪽의 앙각을 주는지 확인하지 않거나, 연직 발사 $d = 0$을 무시하는 것.

STEP 너머

v를 고정하면, 총에서 도달할 수 있는 점들은 포물선 $y = \dfrac{v^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v^2}$ 아래 영역을 채운다. 이 포물선은 궤적들로 이루어진 곡선족의 **포락선**(envelope)으로, "안전 포물선(parabola of

safety)"이라고 부른다. 우리의 판별식 조건은 정확히 $h \leq (x = d$에서의 이 포락선의 값$)$이라는 것이다. 곡선족의 포락선은 변분법(calculus of variations)과 일계 미분방정식 이론에서 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 문제를 이처럼 세심하게 다루는 다음 단계로 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1988, 문제 11

역학 • 질량중심

> **STEP I 1988, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q11

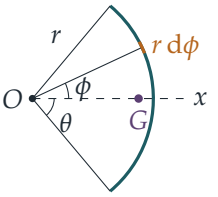
핵심 아이디어

호(arc)의 경우, 대칭성에 의해 질량중심(centre of mass)은 호를 이등분하는 반지름(bisecting radius) 위에 있고, 각에 대한 적분 하나로 중심으로부터의 거리를 구할 수 있다. 틀(framework)의 경우, 놀라운 사실은 이 틀이 반원 위의 **모든** 점에서 균형을 이룬다는 것이다. 바닥의 반작용(reaction)은 항상 반원의 반지름을 따라 작용하고, 그 모든 반지름 위에 놓인 점은 중심뿐이다. 따라서 틀 전체의 질량중심은 반원의 중심이어야 하고, 그 점에 대한 모멘트(moment)를 취하면 h에 대한 방정식을 얻는다.

풀이

균일한 호

호의 중심을 O, 단위 길이당 밀도(density)를 ρ라 하자. 각 ϕ를 이등분 반지름으로부터 재어, 호가 $-\theta \le \phi \le \theta$가 되도록 한다. x축을 이등분선을 따라 잡는다. 이 축에 대한 대칭성에 의해 질량중심은 이 축 위에 있으므로, $\bar{x}$만 구하면 된다.



ϕ와 $\phi + \mathrm{d}\phi$ 사이의 미소 부분은 길이가 $r\,\mathrm{d}\phi$이므로 질량은 $\rho r\,\mathrm{d}\phi$이고, 그 x좌표는 $r\cos\phi$이

다. 전체 질량은 $\rho r \cdot 2\theta$이다. 따라서

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{-\theta}^{\theta} r\cos\phi \; \rho r \, \mathrm{d}\phi}{2\rho r\theta} = \frac{r\left[\sin\phi\right]_{-\theta}^{\theta}}{2\theta} = \frac{r\sin\theta}{\theta}.$$

즉 질량중심은 이등분 반지름 위에 있으며, 중심으로부터의 거리는

$$\boxed{\bar{x} = \frac{r\sin\theta}{\theta}}$$

이다. 반원호의 경우 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 이 값은 $\dfrac{2r}{\pi}$가 되는데, 이것이 다음에 필요한 경우이다.

틀: 질량중심은 어디에 있어야 하는가?

틀은 강체(rigid)이며 단위 길이당 밀도가 ρ로 같은 균일하고 가는 막대들로 이루어져 있고, 바닥은 수평이라고 모형화한다. O를 반원의 중심, 즉 직사각형 아랫변의 중점이라 하자.

> **생각해 보기** 왜 "반원 위의 어느 점에서든 평형"이라는 조건이 질량중심을 완전히 결정하는가?

틀이 반원 위의 점 P를 바닥에 대고 놓여 있다고 하자. 바닥은 P에서 반원에 접하므로, P를 지나는 연직선은 그 접선(tangent)에 수직이다. 즉 그것은 반지름 직선 OP이다. 작용하는 힘은 질량중심 G에 작용하는 무게와 P에서의 반작용, 이렇게 두 가지뿐이다. 평형(equilibrium)을 이루려면 두 힘은 같은 직선을 따라 작용해야 하므로, G는 P를 지나는 연직선, 곧 직선 OP 위에 있다. 이는 반원 위의 모든 P에 대해 성립한다. 서로 다른 두 점 P는 O를 지나는 서로 다른 두 직선을 주고, 이 두 직선은 O에서만 만난다. 따라서 $G = O$이다.

역으로, $G = O$이면 모든 P에 대해 무게가 OP를 따라, 곧바로 접점을 지나도록 작용하므로, 틀은 바닥의 어느 곳에 닿든 평형을 이룬다. 따라서 이 조건은 정확히 "G가 O에 있다"는 것과 같다.

아랫변에 대한 모멘트

아랫변이 놓인 직선에 대한 모멘트를 취하고, 높이는 O로부터 위쪽으로 잰다(따라서 반원은 이 직선 아래에 있다). 각 부분은 다음과 같다.

부분	질량	질량중심의 높이	모멘트
윗변 막대	$2r\rho$	$2h$	$4rh\rho$
양 옆 막대 두 개	$2 \times 2h\rho$	h	$4h^2\rho$
아랫변 막대	$2r\rho$	0	0
반원	$\pi r\rho$	$-\dfrac{2r}{\pi}$	$-2r^2\rho$

반원의 질량중심은 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때의 호 공식에서 얻으며, O보다 **아래**에 있다. G의 높이가 0이므로 전체 모멘트를 0으로 놓고 2ρ로 나누면

$$2h^2 + 2rh - r^2 = 0.$$

이것은 h에 대한 이차방정식(quadratic)이고, 그 근은

$$h = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 8r^2}}{4} = \frac{(-1 \pm \sqrt{3})\, r}{2}.$$

$h > 0$이므로 양의 근을 택한다.

$$\boxed{h = \frac{(\sqrt{3} - 1)\, r}{2} \approx 0.366\, r}$$

아랫변 막대는 자기 자신이 놓인 직선에 대해 모멘트가 0임에 주목하자. 틀이 이 막대를 포함하든 포함하지 않든 답은 같으므로, 그림을 조금 다르게 해석하더라도 문제가 되지 않는다.

검산

- $\theta \to 0$일 때 $\frac{r\sin\theta}{\theta} \to r$이다. 즉 아주 짧은 호는 질량중심이 호 자체 위에 있다. 원 전체, 즉 $\theta = \pi$일 때는 0, 곧 중심이 나오며, 이는 대칭성이 요구하는 바와 같다.
- $h = \frac{(\sqrt{3}-1)r}{2}$일 때 $2h^2 = (2 - \sqrt{3})r^2$이고 $2rh = (\sqrt{3} - 1)r^2$이며, 이 둘을 더하면 요구대로 r^2이 된다.
- 모든 막대를 20 000개의 조각으로 나누어 질량중심을 수치적으로 계산하였다. $r = 1$, $h \approx 0.36603$일 때 질량중심은 O로부터 10^{-9} 이내에 있다. h를 10% 늘리면 질량중심이 약 0.03만큼 위로 올라가므로, 틀은 더 이상 균형을 이루지 못한다.

흔한 실수

- 반원 **철사**에 대한 $\frac{2r}{\pi}$ 대신 반원 **박판**(lamina)에 대한 $\frac{4r}{3\pi}$를 사용하는 것.
- 길이가 아니라 각으로 가중치를 주는 것. 미소 부분의 질량은 $\rho r\, \mathrm{d}\phi$이며, 인수 r이 약분되는 것은 전체 질량에도 그것이 나타나기 때문일 뿐이다.
- 이유 없이 G가 O에 있다고 단정하는 것. 근거는 반작용이 항상 반지름을 따라 작용한다는 것이다.

STEP 너머

호에 대한 적분은 곡선을 따라가는 **선적분**(line integral) $\int \mathbf{r}\rho\,ds$로서의 질량중심의 가장 간단한 예이다. 대학 1학년 과정에서는 이중적분(double integral)과 삼중적분(triple integral)을 사용하여 곡면과 입체로 나아가며, 파푸스(Pappus)의 정리는 이러한 질량중심을 회전체의 넓이 및 부피와 연결한다. 균형에 관한 이 논증은 흔들림 안정성(rocking stability)의 바탕이 되는 아이디어이기도 한데, 곡면 위에 놓인 물체는 질량중심이 곡률 중심(centre of curvature)보다 아래에 있으면 안정하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 질량중심과 강체의 평형을 다룬다.

풀이

STEP I 1988, 문제 12

역학 • 가변적인 힘에 의한 운동

> **STEP I 1988, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q12

핵심 아이디어

각 방법에 대해 스케이터가 둑 쪽으로 가장 멀리 나아가는 거리를 구한다. 적어도 한 방법에서 d가 그 거리보다 클 때, 그리고 그때에만 그녀는 안전하다. 방향을 트는 것은 전형적인 원운동(circular motion)이다. 속도에 수직인 일정한 크기의 힘은 반지름이 일정한 원운동을 만들고, 그 반지름이 바로 그녀가 앞으로 더 나아가는 거리이다. 제동은 힘이 속력에 따라 달라지는 변력 문제인데, 우리가 원하는 것은 거리이므로 가속도를 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰라는 신호이다.

풀이

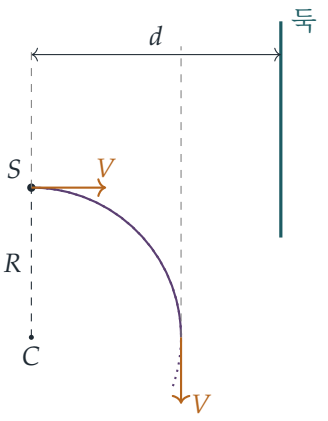
모형

스케이터를 매끄러운 수평 얼음 위에 있는 질량 M인 질점(particle)으로 본다. 그녀에게 작용하는 수평 방향의 힘은 그녀 자신이 가하는 힘뿐이다. 무게와 수직항력(normal reaction)은 서로 상쇄되므로 이후로는 아무 역할도 하지 않는다. 출발점에서 둑 쪽으로 잰 거리를 x라 하면 둑은 $x = d$에 있다.

방법 1: 원을 그리며 방향 틀기

속도에 수직인 힘은 일을 하지 않으므로 그녀의 속력은 V로 유지된다. 일정한 속력 V의 속도에 항상 수직으로 작용하는 일정한 크기 F의 힘은 반지름 R인 원운동의 구심력(centripetal force)이 되며, 이때

$$F = \frac{MV^2}{R}, \qquad \text{따라서} \qquad R = \frac{MV^2}{F}.$$



그녀는 S에서 둑을 향해 똑바로 움직이며 출발하므로, 원의 중심 C는 S를 지나고 둑과 **평행한** 직선 위에, S로부터 거리 R인 곳에 있다. 각 θ만큼 돌았을 때 둑 쪽으로 나아간 거리는 $x = R\sin\theta$이고, 이것은 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 R을 가진다. 그 지점에서 그녀는 둑과 평행하게 움직이며, 그 뒤로는 둑에서 멀어지는 쪽으로 휘어 간다. 따라서

$$d > \frac{MV^2}{F}.$$

이면 그녀는 둑에 부딪히지 않는다. (정확히 $d = MV^2/F$이면 그녀는 둑을 따라 움직이며 둑에 살짝 스친다.)

방법 2: 제동

이번에는 힘이 운동 방향의 정반대로 작용하므로, 그녀는 둑을 향해 직선으로 움직이며 느려진다. 시간이 아니라 거리를 구하고자 하므로 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰면, 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)에 의해

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{F(V^2+v^2)}{2V^2}.$$

변수를 분리(separating the variables)하여 $v = V$인 $x = 0$부터 그녀가 멈추는 지점 $x = X$까지 적분하면

$$\int_V^0 \frac{v}{V^2+v^2}\,\mathrm{d}v = -\frac{F}{2MV^2}\int_0^X \mathrm{d}x,$$
$$\left[\tfrac{1}{2}\ln(V^2+v^2)\right]_V^0 = -\frac{FX}{2MV^2},$$
$$\tfrac{1}{2}\ln\frac{V^2}{2V^2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2 = -\frac{FX}{2MV^2},$$

이므로 정지 거리(stopping distance)는

$$X = \frac{MV^2}{F}\ln 2.$$

생각해 보기 그녀는 실제로 정지하는가, 아니면 영원히 조금씩 앞으로 나아가면서 속력이 0에 가까워지기만 하는가?

제동력은 결코 $\frac{1}{2}F$ 아래로 떨어지지 않으므로, 그녀의 속력은 유한한 시간 안에 0이 된다. 구체적으로 $M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{F}{2V^2}(V^2+v^2)$를 적분하면 $\frac{2MV}{F}\left(\arctan 1 - \arctan\frac{v}{V}\right) = t$이므로, 그녀는 유한한 거리 X를 간 뒤 $t = \pi MV/(2F)$에 멈춘다. (정지한 뒤에는 더 이상 힘을 가하지 않는다.) 따라서 $d > X$이면 제동으로 살아남는다. $d = X$이면 그녀는 속력 0으로 둑에 도달하여 아무 충격 없이 둑에 닿는다.

두 방법 비교

$\ln 2 \approx 0.693 < 1$이므로 정지 거리는 회전 반지름보다 짧다. 즉 제동이 더 나은 방법이며, 방향 틀기가 통하는 경우에는 언제나 제동도 통한다. 따라서 그녀가 둑에 부딪히지 않을 수 있을 필요충분조건은

$$\boxed{d > \frac{MV^2}{F}\ln 2}$$

이다. ($d = \frac{MV^2}{F}\ln 2$는 그녀가 정지한 상태로 둑에 도달하는 경계의 경우이다.)

질점 가정

실제 스케이터는 크기가 있다. 몸과 팔이 질량중심보다 어느 정도 앞으로 뻗어 있으므로, 실제로는 d가 위의 값보다 대략 그만큼 더 커야 한다. 더 중요한 점은 힘이 얼음 위의 스케이트 날에서 나온다는 것이다. 방향을 틀려면 곡선 안쪽으로 몸을 기울여야 하고, 세게 제동하려면 날을 운동 방향에 가로질러 비틀어야 하는데(하키 스톱), 그러면 몸이 옆으로 돌아간다. 이런 회전과 자세야말로 질점 모형이 무시하는 것들이다. 또한 이 모형은 얼음이 매끄럽다고 하면서도 얼음이 이런 힘을 제공할 수 있다고 슬며시 가정한다. 날을 따르는 방향으로는 마찰이 없어도 날은 옆 방향으로는 얼음을 붙잡는다.

검산

- 단위: MV^2/F는 $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}/N} = \mathrm{m}$로, 당연히 그래야 하듯 길이이다.
- 범위: 제동력은 $\frac{1}{2}F$와 F 사이에 있다. 일정한 힘 F라면 $MV^2/(2F)$에서, 일정한 힘 $\frac{1}{2}F$라면 MV^2/F에서 멈출 것이고, 실제로 $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$이다.
- 수치 확인: 임의의 M, V, F(예를 들어 $R = MV^2/F = 7.0747$)에 대해 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 적분기로 두 운동을 단계별로 계산하면, 방향 틀기에서는 최대 전진 거리 7.0747, 제동에서는 정지 거리 $4.9038 = R\ln 2$와 정지 시간 $\pi MV/(2F)$를 얻었다.

흔한 실수

- 원의 중심을 그녀 옆에 두어 도달 거리를 R로 얻는 대신, 중심을 운동 직선 위(또는 둑 위)에 두어 도달 거리를 $2R$나 0으로 얻는 것.
- 제동에 $\frac{dv}{dt}$를 써서 거리를 구하느라 고생하는 것. $v\,\frac{dv}{dx}$를 쓰면 한 번의 적분으로 거리가 나온다.
- 두 조건을 비교하지 않고 따로따로 제시하는 것. 문제는 그녀가 탈출할 **수 있는** d의 집합을 묻고 있으므로, 두 방법 중 더 나은 쪽이 필요하다.

STEP 너머

$\ddot{x} = v\,\frac{dv}{dx}$로 쓰는 것은 에너지 방법으로 가는 첫걸음이다. 위치에만 의존하는 힘에 대해 이것은 일-에너지 정리(work–energy theorem)이며, 대학 역학에서는 퍼텐셜(potential)과 운동의 위상 평면(phase plane) 그림으로 발전한다. 방향 틀기와 제동 사이에서 스케이터가 하는 선택은 간단한 최적 제어(optimal control) 문제이기도 하다. 제한된 힘을 써서 장애물을 피하는 가장 좋은 방법은 무엇인가? Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘과 원운동을 바로 다음 수준에서 다룬다.

풀이

STEP I 1988, 문제 13

역학 • 탄성 끈과 충돌

STEP I 1988, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s1-q13

핵심 아이디어

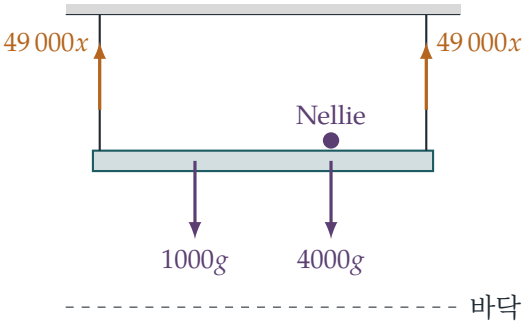
이 문제는 세 단계로 나뉘며, 단계마다 적용되는 보존 법칙(conservation law)이 다르다. Nellie가 판자에 내려앉는 것은 순간적인 비탄성 충돌(inelastic collision)이므로 운동량(momentum)은 보존되지만 에너지는 보존되지 않는다. 판자가 바닥까지 내려가는 동안에는 중력과 탄성 밧줄만 작용하므로 에너지가 보존된다. Nellie가 내려간 뒤에도 다시 에너지가 보존되며, 이때는 저장된 탄성 에너지(elastic energy)가 판자를 밧줄이 자연 길이(natural length)가 되는 지점 너머까지 들어 올리기에 충분한지를 따져야 한다.

풀이

판자는 수평을 유지하는 강체(rigid body)로 모형화하므로, 연직 방향으로 움직이는 질량 1000 kg의 질점(particle)으로 다룰 수 있다. Nellie는 질량 4000 kg의 질점이고, 밧줄은 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 탄성 줄이다. 두 밧줄의 늘어난 길이(extension)는 항상 같은 값 x이므로, 두 밧줄이 함께 작용하는 위쪽 방향의 힘은

$$2 \cdot \frac{490\,000}{10}\, x = 98\,000\, x \text{ N}.$$

이다. 따라서 두 밧줄은 강성(stiffness)이 $K = 98\,000 \text{ N m}^{-1}$인 하나의 용수철처럼 작용하며, 그 탄성 에너지는 $\frac{1}{2}Kx^2 = 49\,000\, x^2$ J이다.



처음 위치

Nellie가 오기 전에 판자는 평형(equilibrium) 상태로 매달려 있으므로, 늘어난 길이 e_0은

$$98\,000\,e_0 = 1000 \times 9.8 \quad \Longrightarrow \quad e_0 = 0.1 \text{ m}.$$

를 만족한다.

착지

Nellie는 판자에 내려앉은 뒤 그대로 머무르므로, 이것은 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이다. 충돌은 매우 짧은 시간 동안 일어나고, 밧줄의 장력(tension)과 무게는 유한한 힘이므로 충돌하는 동안 이들이 주는 충격량(impulse)은 무시할 수 있다. 따라서 운동량이 보존되고, 충돌 직후의 공통 속력 v는

$$4000 \times 5 = 5000\,v \quad \Longrightarrow \quad v = 4 \text{ m s}^{-1}.$$

를 만족한다.

생각해 보기 Nellie가 도착하는 순간부터 곧바로 에너지 보존을 쓸 수 있을까?

그럴 수 없다. 코끼리가 판자에 내려앉아 그대로 머무르면 많은 운동 에너지가 열과 소리로 바뀐다. 여기서는 $\frac{1}{2} \cdot 4000 \cdot 5^2 = 50\,000$ J가 $\frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 4^2 = 40\,000$ J로 바뀌므로 10 000 J를 잃는다. 에너지는 착지 직후의 순간부터만 보존된다.

하강

판자의 처음 높이를 바닥으로부터 h라 하자. 판자와 Nellie(전체 질량 5000 kg)는 속력 4 m s^{-1}로 출발하여 거리 h만큼 아래인 바닥에서 정지하며, 이때 늘어난 길이는 $0.1 + h$이

다. 일을 하는 힘은 중력과 밧줄의 힘뿐이므로

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot 5000\cdot 4^2}_{\text{잃은 운동 에너지}} + \underbrace{5000\cdot 9.8\,h}_{\text{잃은 중력 위치 에너지}} = \underbrace{49\,000\left[(0.1+h)^2-0.1^2\right]}_{\text{얻은 탄성 에너지}},$$

$$40\,000 + 49\,000\,h = 49\,000\,(0.2h + h^2).$$

이다. 양변을 49 000으로 나누고 정리하면

$$h^2 - 0.8\,h - \tfrac{40}{49} = 0, \qquad \text{이므로} \qquad h = 0.4 + \sqrt{0.16 + \tfrac{40}{49}} = \frac{14+2\sqrt{299}}{35},$$

이다. 여기서 $h > 0$이므로 양의 근을 택하였다. 따라서

$$h \approx 1.39\ \text{m}.$$

이다. 판자가 내려갈수록 늘어난 길이는 커지기만 하므로, 이 단계 내내 밧줄은 팽팽하게 유지된다.

Nellie가 내린 뒤

Nellie는 조심스럽게 내려가므로, 판자만(1000 kg) 바닥에서 정지해 있고 이때 늘어난 길이는

$$X = 0.1 + h \approx 1.488\ \text{m}.$$

이다. 판자가 충분히 올라가서 늘어난 길이가 0이 되면, 즉 높이 X만큼 올라가면 밧줄은 느슨해진다(slack). 밧줄이 팽팽한 동안에는 에너지가 보존되므로, 저장된 탄성 에너지가 위치 에너지의 증가량보다 크면 판자는 그 높이에 도달한다.

$$\tfrac{1}{2}KX^2 = 49\,000\,X^2 \approx 108\,500\ \text{J}, \qquad 1000\cdot 9.8\cdot X \approx 14\,600\ \text{J}.$$

앞의 값이 훨씬 크므로, 판자는 밧줄이 자연 길이가 되는 위치에 도달했을 때에도 여전히 위로 움직이고 있으며, 그때의 운동 에너지는 약 93 900 J(속력 약 $13.7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$)이다. 이 지점보다 위에서는 밧줄이 자연 길이보다 짧아져야 하므로, 밧줄은 느슨해진다. **그렇다, 밧줄은 느슨해진다.**

> **생각해 보기** 그냥 단진동을 이용하면 안 될까?

밧줄이 팽팽한 동안에는 이용할 수 있다. 판자만 남으면 판자는 평형 상태의 늘어난 길이 0.1 m를 중심으로 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 그보다 $h \approx 1.39$ m 아래에서 출발하므로 진폭(amplitude)은 1.39 m이다. 진동의 최고점에서 늘어난 길이는 $0.1 - 1.39 < 0$이 되는데, 이는 팽팽한 밧줄에서는 불가능하다. 따라서 판자가 최고점에 이르기 전에 밧줄은 반드시 느슨해진다. (실제로 단진동을 이용한 논증은 $h > 0.1$이기만 하면 바로 답을 준다.)

밧줄이 느슨해지면 판자는 중력만 받으며 자유롭게 움직여 $13.7^2/(2\times 9.8)\approx 9.6\,\mathrm{m}$만큼 더 올라간다. 이는 $10\,\mathrm{m}$보다 작으므로, 판자는 (아슬아슬하게!) 밧줄이 고정된 지점에 닿지 않고 다시 떨어진다.

검산

- 에너지 방정식에 $h=1.3881$을 대입하면 양변이 모두 가장 가까운 줄 단위로 $108\,017\,\mathrm{J}$이다.
- $x=0.1$, $\dot{x}=4$에서 시작하여 $\ddot{x}=g-Kx/5000$을 수치적으로 단계별 계산하면, 판자는 $1.3881\,\mathrm{m}$ 내려간 뒤 멈춘다.
- Nellie가 떠난 뒤 판자의 운동을 단계별로 계산하면, 판자가 $13.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 위로 움직이는 동안 늘어난 길이가 0이 되고, 최고점은 바닥에서 $11.07\,\mathrm{m}$ 위로 $X+9.58$과 일치한다.
- 단위: $490\,000\,\mathrm{N}$ / $10\,\mathrm{m}$는 $\mathrm{N\,m^{-1}}$이므로, 에너지 방정식의 모든 항의 단위는 줄이다.

흔한 실수

- 착지 과정에서도 에너지 보존을 적용하는 것. 이렇게 하면 합쳐진 속력이 $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 대신 $\sqrt{20}\approx 4.47\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 나온다.
- 탄성 에너지를 자연 길이로부터 재면서 처음 늘어난 길이 $0.1\,\mathrm{m}$를 잊는 것. 얻은 에너지는 $49\,000\,h^2$이 아니라 $49\,000[(0.1+h)^2-0.1^2]$이다.
- 두 밧줄이 아니라 밧줄 하나의 강성을 쓰는 것.

STEP 너머

두 밧줄은 비선형 용수철(nonlinear spring)이다. 늘어나면 잡아당기지만 압축되면 밀어낼 수 없다. 이처럼 서로 다른 운동 방정식 사이를 오가는 계를 구간별 선형(piecewise-linear) 진동자 또는 "충돌(impact)" 진동자라고 하며, 단순한 것조차 놀라울 만큼 복잡하게 행동할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 문제 전체의 바탕이 되는 에너지, 충돌, 진동을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1988, 문제 14

확률과 통계 • 중도절단 정규분포의 기댓값

> **STEP I 1988, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q14

핵심 아이디어

확률변수 X_M은 그냥 $\min(X, M)$이다. 즉 정규분포를 따르는 확률변수에서 M보다 큰 값을 모두 M으로 눌러 놓은 것이다. 그 기댓값(expectation)은 $x < M$ 범위에서의 적분과, 상수에 꼬리 확률(tail probability)을 곱한 항으로 나뉜다. 이때 $x\phi(x)$는 부호를 제외하면 $\phi(x)$의 도함수이므로 적분은 쉽다. 관광객 이야기는 같은 아이디어가 모습만 바꾼 것이다. 버스 차량단이 태우는 승객 수는 $\min$(수요, 수용 인원)이고, 정규근사(normal approximation)를 하면 이것은 정확히 X_M 꼴이 된다.

풀이

X_M의 기댓값

$\{X < M\}$에서는 $X_M = X$이고 $\{X \geq M\}$에서는 $X_M = M$이므로

$$\mathrm{E}(X_M) = \int_{-\infty}^{M} x\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \;+\; M\,\mathrm{P}(X \geq M) = \int_{-\infty}^{M} x\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \;+\; M(1-\Phi(M)).$$

> ? **생각해 보기** 도함수가 $x\phi(x)$인 함수가 있을까?

있다. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$이므로 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $\phi'(x) = -x\phi(x)$이다. 따라서

$$\int_{-\infty}^{M} x\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\phi(x)\Big]_{-\infty}^{M} = -\phi(M) + 0,$$

이다. $x \to -\infty$일 때 $\phi(x) \to 0$이기 때문이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(X_M) = -\phi(M) + M(1-\Phi(M)),$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

간단히 확인해 보자. $M \to \infty$이면 $M(1-\Phi(M)) \to 0$이므로 $\mathrm{E}(X_M) \to 0 = \mathrm{E}(X)$이다. $M \to -\infty$이면 $\mathrm{E}(X_M) \approx M$이 되는데, 당연히 그래야 한다.

버스

한 번의 방문에서 버스 정류장으로 보내지는 관광객 수를 N이라 하자. 1024명의 관광객이 각각 독립적으로, 양쪽 방향에 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 안내된다고 가정한다. 그러면

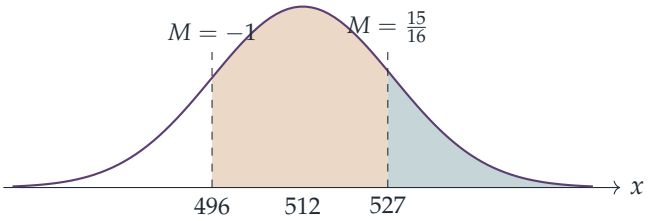
$$N \sim \mathrm{B}(1024, \tfrac{1}{2}), \qquad \mathrm{E}(N) = 512, \qquad \mathrm{Var}(N) = 1024 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 256 = 16^2.$$

이다. $n = 1024$처럼 충분히 크면 N은 X가 표준정규분포를 따를 때 $512 + 16X$로 매우 잘 근사된다.

버스가 16대이면 수용 인원은 $16 \times 31 = 496$이고, 17대이면 527이다. 수용 인원이 C인 차량 단은 승객 $\min(N, C)$명을 태우므로, 한 번의 방문에서 얻는 이익은 블로스카 단위로

$$\begin{aligned}\min(N, C) &\approx \min(512 + 16X,\ C) \\ &= 512 + 16\min\Big(X, \frac{C-512}{16}\Big) = 512 + 16\,X_M, \qquad \text{여기서} M = \frac{C-512}{16}.\end{aligned}$$

이다. 따라서 $C = 496$이면 $M = -1$이고, $C = 527$이면 $M = \frac{15}{16}$이다.



수요가 호박색 구간에 떨어지면 17번째 버스는 496을 넘는 초과분을 태운다. 수요가 청록색 꼬리에 떨어지면 17번째 버스는 꽉 찬 31명을 태운다.

$\phi(1) \approx 0.24197$, $\Phi(1) \approx 0.84134$를 쓰고 $1 - \Phi(-1) = \Phi(1)$임에 주목하면

$$\mathrm{E}(X_{-1}) = -\phi(1) - \big(1 - \Phi(-1)\big) = -\phi(1) - \Phi(1) \approx -0.24197 - 0.84134 = -1.08332.$$

이다. $\phi(0.9375) \approx 0.25707$, $1 - \Phi(0.9375) \approx 0.17425$를 쓰면

$$\mathrm{E}(X_{15/16}) \approx -0.25707 + 0.9375 \times 0.17425 \approx -0.25707 + 0.16336 = -0.09371.$$

이다. 따라서 버스를 한 대 더 두면 방문당 기대 이익이

$$16\big(\mathrm{E}(X_{15/16}) - \mathrm{E}(X_{-1})\big) \approx 16 \times 0.98961 \approx 15.83 \text{ 블로스카.}$$

만큼 늘어난다. 방문은 한 해에 50번이므로 추가 버스의 가치는 약

$$50 \times 15.83 \approx 792 \text{ 블로스카(연간)}.$$

이다. 이것이 고려할 만한 연간 뇌물의 최댓값이다. 기대 추가 이익보다 많이 지불하면 협동조합은 평균적으로 손해를 보게 된다.

> **생각해 보기** N이 이산적이니 연속성 보정(continuity correction)을 해야 하지 않을까?

여기서는 필요 없다. 연속성 보정은 $\mathrm{P}(N \le c)$처럼 평균을 내는 함수가 정수에서 불연속적으로 뛰는 확률을 근사할 때 도움이 된다. 함수 $k \mapsto \min(k, C)$에는 그런 도약이 없고, 보정하지 않은 정규근사가 이 함수에 대해 매우 정확하다. 이항분포(binomial distribution)로 정확히 계산하면 791.68이 나오는데, 이는 위의 값과 소수점 아래 두 자리까지 일치한다. 수용 인원을 $\frac{1}{2}$만큼 옮기면 오히려 결과가 나빠져서 775가 나온다.

검산

- $\int_{-\infty}^{M} x\phi(x)\,\mathrm{d}x + M(1-\Phi(M))$를 중점 구적법(midpoint quadrature)으로 계산하면 여러 M값에 대해 공식과 소수점 아래 여덟 자리까지 일치한다. 표본 4×10^5개로 $\min(X, M)$을 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)한 결과도 일치한다.
- $\mathrm{B}(1024, \frac{1}{2})$에 대해 정확히 합을 구하면 방문당 기대 추가 이익은 15.8337, 즉 한 해에 791.68이 되어 정규근사와 들어맞는다.
- 대략적인 타당성 확인: 추가 버스는 $N > 496$일 때마다 무언가를 벌어들이는데, 이는 확률 약 0.84로 일어나며 버스가 꽉 차는 경우도 많다. 따라서 방문당 31의 절반을 조금 넘는 값은 그럴듯하다.

흔한 실수

- 척도 변환을 잊는 것: $\min(N, C)$는 $512 + 16X_M$이므로 $\mathrm{E}(X_M)$의 차에 표준편차(standard deviation) 16을 곱하고, 다시 50을 곱해야 한다.
- $M = -1$에서의 부호 실수: 항 $M(1-\Phi(M))$은 $-(1-\Phi(1))$이 아니라 $-(1-\Phi(-1)) = -\Phi(1)$이다.

STEP 너머

$\mathrm{E}\min(X, M)$은 **중도절단**(*censored*) 정규 확률변수의 기댓값이다. $\mathrm{E}(X-M)^+ = \phi(M) - M(1-\Phi(M))$과 같은 밀접한 식들은 재고 이론(inventory theory, "신문팔이 문제(newsvendor problem)")과 옵션(option)의 블랙-숄즈(Black–Scholes) 가격의 근간이다. 항등식 $\mathrm{E}\min(N, C+1) - \mathrm{E}\min(N, C) = \mathrm{P}(N > C)$는 수용 인원을 한 단위 늘릴 때마다 얻는 가치를 깔끔하게 보여 준다. 이러한 아이디어를 더 알고 싶다면 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)을 참고하라.

풀이

STEP I 1988, 문제 15

확률과 통계 • 이항 가설검정

> **STEP I 1988, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q15

핵심 아이디어

"점수의 절반 넘게를 파울로 얻는다"는 조건을 파울 수와 골 수 사이의 간단한 부등식(inequality)으로 바꾼다. 그다음 골 수에 대해 조건부(conditioning)로 생각하면, 같은 확률로 일어나는 파울 값의 개수를 세는 문제만 남는다. 둘째 부분에서는 **예전** 분포를 따른다면 300번의 시도에서 파울 아홉 번인 경우가 몇 번쯤 나올 것으로 기대되는지, 그리고 아무것도 바뀌지 않았다면 관찰된 횟수가 얼마나 놀라운지를 묻는다.

풀이

확률

어떤 경기에서 특정한 한 팀에 대하여, 그 팀이 넣은 골 수를 G, 그 팀을 상대로 범한 파울 수를 F라 하자. 그러면 G와 F는 독립(independent)이고,

$$\mathrm{P}(G=0),\ \ldots,\ \mathrm{P}(G=4) \;=\; \tfrac{1}{9},\ \tfrac{2}{9},\ \tfrac{3}{9},\ \tfrac{2}{9},\ \tfrac{1}{9}, \qquad \mathrm{P}(F=f)=\tfrac{1}{10} \quad (f=0,1,\ldots,9).$$

이다. 팀은 골로 $2G$점, 파울로 F점을 얻으므로 총점은 $2G+F$이다. 점수의 절반 넘게를 파울로 얻는 것은 정확히

$$F > \tfrac{1}{2}(2G+F) \iff F > 2G.$$

일 때이다. (팀이 점수를 전혀 얻지 못하면 $F=0=2G$이므로 이 경우는 세지 않는데, 엄격한 부등식이 이를 올바르게 처리한다.)

$G=g$일 때 유리한 F의 값은 $2g+1,\ldots,9$이고, 이는 같은 확률을 갖는 열 개의 값 가운데 $9-2g$개이다. 따라서 F와 G의 독립성을 이용하면

$$\mathrm{P}(F>2G \mid G=g)=\frac{9-2g}{10}, \qquad g=0,1,2,3,4,$$

이고, 그 값은 차례로 $\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, \frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}$이다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$\mathrm{P}(F > 2G) = \frac{1\cdot 9 + 2\cdot 7 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 1\cdot 1}{9\times 10} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

답이 깔끔하게 나오는 데에는 이유가 있다. 골의 분포는 2에 대하여 대칭이고 $(9-2g)/10$은 g에 대한 일차식이므로, 그 평균은 $g=2$에서의 값, 곧 $\frac{1}{2}$과 같다.

파울 분포가 바뀌었는가?

한 팀이 범하는 파울 수는 그 상대 팀을 상대로 범한 파울 수이므로, 예전 규칙에서는 각 팀이 한 경기에서 파울을 9번 범할 확률이 $\frac{1}{10}$이다. 300개의 팀-경기 가운데 팀이 파울을 9번 범한 경우의 수를 X라 하자. 우리는

$$H_0:\ p = \tfrac{1}{10}\quad (\text{변화 없음}) \qquad \text{대} \qquad H_1:\ p < \tfrac{1}{10},$$

를 검정한다. 여기서 p는 한 팀이 한 경기에서 파울을 9번 범할 확률이다. 규칙 변경은 파울이 많이 나오는 경우를 덜 일어나게 하려는 것이었으므로, 대립가설(alternative hypothesis)은 단측(one-sided)이다.

? **생각해 보기** 여기서 이항(binomial) 모형을 쓰는 것이 정당한가?

300개의 팀-경기가 서로 독립이고, 각각 같은 확률 p를 가져야 한다. 문제에서 한 경기 안에서의 독립성은 주어져 있고, 서로 다른 경기들도 독립이라고 가정하는 것이 합리적이다. 따라서 H_0 아래에서 $X \sim \mathrm{B}(300, \frac{1}{10})$이고,

$$\mathrm{E}(X) = 30, \qquad \mathrm{Var}(X) = 300\times\tfrac{1}{10}\times\tfrac{9}{10} = 27, \qquad \text{표준편차} \sqrt{27} \approx 5.20.$$

이다. 관찰값은 $X=12$로, 기댓값 30보다 18만큼 작으며 이는 약 3.5 표준편차(standard deviation)에 해당한다. 정규근사(normal approximation)와 연속성 수정(continuity correction)을 쓰면

$$\mathrm{P}(X \le 12) \approx \Phi\left(\frac{12.5-30}{\sqrt{27}}\right) = \Phi(-3.37) \approx 0.0004.$$

이다. 정확한 이항 확률은 이보다 더 작아서 약 0.0001이다. 어느 쪽이든, 아무것도 바뀌지 않았다면 이만큼 극단적인 결과는 천 시즌에 한 번도 채 일어나지 않는다. 이는 흔히 쓰는 5% 또는 1% 유의수준(significance level)조차 훨씬 넘어서므로, H_0을 기각한다. 이는 파울 수의 분포가 바뀌었다는 좋은 증거가 **맞으며**, 바뀐 방향도 기대했던 대로이다. 파울 아홉 번인 경기가 더 드물어진 것이다.

두 가지 주의할 점을 짚어 둘 만하다. 이 검정은 P(9번 파울)이 줄어들었다는 것만 보여 줄 뿐, 분포의 나머지 부분이 어떻게 바뀌었는지는 보여 주지 않는다(그렇게 보는 것이 자연스러운 설명이기는 하지만). 또한 시즌 사이에 다른 요인들도 바뀌었을 수 있으므로, 통계만으로는 규칙 변경이 감소를 **일으켰다**고 증명할 수 없다.

검산

- 골 확률 $\frac{1}{9}(1+2+3+2+1)$의 합은 당연히 1이다.
- 5×10개의 순서쌍 (g, f)를 모두 정확한 분수로 나열하면 $\mathrm{P}(F > 2G) = \frac{1}{2}$을 얻고, 200,000경기를 시뮬레이션하면 0.4997이 나왔다.
- 이항 확률을 직접 더하면 $X \sim \mathrm{B}(300, 0.1)$에 대하여 $\mathrm{P}(X \leq 12) = 9.2 \times 10^{-5}$이다. 정규 근사($3.8 \times 10^{-4}$)와 평균이 30인 푸아송 근사(Poisson approximation)(1.7×10^{-4}) 모두 이 값이 매우 작다는 데 일치한다.

흔한 실수

- F를 $2G$가 아니라 G와 비교하는 것: 한 골은 2점이다.
- $F > 2G$ 대신 $F \geq 2G$를 세는 것. "절반 넘게"는 엄격한 조건이고, 점수가 없는 팀은 파울로 얻은 점수도 없다.
- 표본 크기로 300개의 팀-경기 대신 150경기를 쓰는 것, 또는 계산하기 전에 귀무가설(null hypothesis)과 이항 모형을 밝히는 것을 잊는 것.

STEP 너머

둘째 부분은 이항 비율에 대한 가설검정(hypothesis test)이고, 우리가 구한 꼬리 확률은 p-값(p-value)이다. 대학에서는 우도비 검정(likelihood ratio test)과 카이제곱 검정(chi-squared test)을 배우게 되는데, 이들은 한 값만이 아니라 관찰된 파울 수의 분포 전체를 예전 분포와 비교한다. Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 확률 쪽 내용(조건부 확률, 이항분포와 정규근사)을 매우 명료하게 다룬다.

풀이

STEP I 1988, 문제 16

확률과 통계 • 연속 분포와 조건부

STEP I 1988, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s1-q16

핵심 아이디어

첫 부분은 정규화(normalisation)와 적분 연습이다. 밀도함수(density)가 상수배를 제외하고만 주어져 있으므로, 전체 확률이 1이 되어야 한다는 조건으로 그 상수를 구해야 한다. 또 $t^2/(1+t^2)^2$의 적분은 이를 $1/(1+t^2)$와 $t/(1+t^2)$의 도함수로 나누면 풀린다. 그다음 검사 방식은 짧은 경우의 수 나무로 정리된다. 나이 3 이전에는 어떤 차도 녹슬지 않으므로 의미가 있는 것은 나이 4와 5의 검사뿐이다. 그래서 네 번째 검사 때 차가 이미 녹슬어 있었는지에 따라 경우를 나누고, 마지막 부분은 같은 나무에 베이즈 정리(Bayes' theorem)를 적용한다.

풀이

녹이 생기기 시작하는 시점의 분포

차가 나이 $3+T$에 녹슬기 시작한다고 하자. 여기서 $T \geq 0$는 어떤 상수 k에 대하여 밀도함수 $f(t) = k\,t^2/(1+t^2)^2$를 가진다. 핵심 적분은 다음을 알아차리는 데서 나온다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right),$$

이는 괄호 안을 공통분모 $(1+t^2)^2$로 통분하여 확인할 수 있다. 분자는 $(1+t^2)-(1-t^2) = 2t^2$이다. 그러므로

$$\int_0^t \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\arctan t - \frac{t}{1+t^2}\right).$$

$t \to \infty$일 때 $\arctan t \to \frac{\pi}{2}$이고 $t/(1+t^2) \to 0$이므로, $[0,\infty)$에서의 적분값은 $\frac{\pi}{4}$이다. f가 밀도함수가 되려면 $k \cdot \frac{\pi}{4} = 1$이어야 하므로 $k = 4/\pi$이다. 따라서

$$\boxed{F(t) = \mathrm{P}(\text{다음 나이 이전에 녹슮: } 3+t) = \mathrm{P}(T < t) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan t - \frac{t}{1+t^2}\right), \quad t \geq 0.}$$

($F(t) \to 1$임에 주목하자. 모든 차는 결국 녹슨다.)

필요한 두 값은 다음과 같다.

$$F(1) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \approx 0.1817,$$
$$F(2) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan 2 - \frac{2}{5}\right) \approx 0.4502.$$

5주년 검사에서 불합격할 확률

나이 3 이전에는 어떤 차도 녹슬지 않으므로, 나이 1, 2, 3의 검사는 반드시 통과한다(세 번째 검사 순간에 정확히 녹이 생기기 시작할 확률은 0이다). 나이 5에 불합격하려면 차는 나이 4의 검사를 통과하고 나이 5의 검사에서 불합격해야 하며, 불합격하려면 나이 5에 녹슬어 있어야 한다. 녹은 결코 사라지지 않으므로, 이런 일이 일어나는 방식은 서로 배반(disjoint)인 두 가지이다.

- **나이 4에 이미 녹슬어 있는 경우** (확률 $F(1)$). 확률 $\frac{1}{2}$로 네 번째 검사를 통과하고, 여전히 녹슨 채로 확률 $\frac{1}{2}$로 다섯 번째 검사에서 불합격한다. 기여분: $\frac{1}{4}F(1)$.
- **나이 4와 5 사이에 녹이 생기기 시작하는 경우** (확률 $F(2) - F(1)$). 네 번째 검사는 반드시 통과하고, 확률 $\frac{1}{2}$로 다섯 번째 검사에서 불합격한다. 기여분: $\frac{1}{2}\big(F(2) - F(1)\big)$.

여기서는 문제가 의도한 대로, 녹슨 차에 대한 서로 다른 검사의 결과가 서로 독립(independent)이고 녹이 생기기 시작한 시점과도 독립이라고 가정한다.

? 생각해 보기 왜 나이 1, 2, 3의 검사를 통과할 확률을 곱하지 않는가?

그 검사들은 어떤 차도 녹슬 수 없는 시기에 이루어지므로 모든 차가 통과하기 때문이다. 그 인수는 1이다.

두 경우를 더하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{불합격 시점: 나이5}) &= \tfrac{1}{4}F(1) + \tfrac{1}{2}\big(F(2) - F(1)\big) = \tfrac{1}{2}F(2) - \tfrac{1}{4}F(1)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan 2 - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi}\\ &= \boxed{\frac{1}{\pi}\left(\arctan 2 - \frac{3}{20}\right) - \frac{1}{8} \approx 0.1797.}\end{aligned}$$

다섯 번째 검사 후 폐차되었을 때, 네 번째 검사 때 녹슬어 있었을 확률

다섯 번째 검사 직후 폐차되는 차는 정확히 (이전 검사를 모두 통과하고) 그 검사에서 불합격한 차이며, 이는 방금 구한 사건이다. 네 번째 검사 때 녹슬어 있었다는 사건을 A, 다섯 번째 검사에서 불합격했다는 사건을 D라 하자. 위의 첫 번째 항목이 바로 $A \cap D$이므로

$$\mathrm{P}(A \cap D) = \tfrac{1}{4}F(1) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} = \frac{\pi - 2}{8\pi}.$$

조건부 확률(conditional probability)의 정의에 의해

$$\mathrm{P}(A \mid D) = \frac{\mathrm{P}(A \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{\dfrac{\pi - 2}{8\pi}}{\dfrac{1}{\pi}\left(\arctan 2 - \dfrac{3}{20}\right) - \dfrac{1}{8}}.$$

분자와 분모에 8π를 곱하면

$$\boxed{\mathrm{P}(A \mid D) = \frac{\pi - 2}{8\arctan 2 - \frac{6}{5} - \pi} = \frac{5(\pi - 2)}{40\arctan 2 - 6 - 5\pi} \approx 0.253.}$$

따라서 5년째에 폐차된 차 가운데 이미 녹슨 상태로 네 번째 검사를 빠져나간 차는 약 4분의 1에 불과하고, 대부분은 다섯 번째 해 동안 녹슨 것이다.

검산

- 분포함수(distribution function)라면 그래야 하듯이 $F(0) = 0$이고 $t \to \infty$일 때 $F(t) \to 1$이다. $\frac{4}{\pi}\int_0^2 t^2/(1+t^2)^2\,\mathrm{d}t$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.45018이 나와 $F(2)$와 일치한다.
- 차 400 000대에 대한 시뮬레이션(simulation)(녹이 생기기 시작하는 시점을 표본추출하고 매년 검사를 실행)에서 5년째에 불합격할 확률은 0.1789, 조건부 확률은 0.255로 나왔으며, 정확한 값은 각각 0.1797과 0.2528이다.
- 타당성 점검: $\mathrm{P}(D)$는 $\frac{1}{2}F(2) \approx 0.225$(이전의 폐차를 무시했을 때 5년째에 녹슬어 있고 불합격할 확률)보다 작아야 하며, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- 정규화를 잊는 것. 밀도함수는 $t^2/(1+t^2)^2$에 **비례**할 뿐이며, 인수 $4/\pi$를 빠뜨리면 이후의 모든 답이 틀어진다.
- "나이 5에 녹슬어 있음"을 확률 $F(2)$인 하나의 경우로 보고 $\frac{1}{2}$을 곱하는 것. 이는 나이 4에 녹슬어 있었고 그 검사에서 폐차된 차들을 무시한다.
- 마지막 부분에서 "나이 5에 불합격함" 대신 "나이 5에 녹슬어 있음"을 조건으로 삼는 것.

STEP 너머

여기서 함수 F는 분포함수이고, 비 $f(t)/(1-F(t))$는 **위험률**(hazard rate), 즉 지금까지 차가 녹슬지 않고 버텼다는 조건에서 순간적으로 녹슬 가능성이다. 이는 생존 분석(survival analysis)과 신뢰성 이론(reliability theory)의 중심 대상이다. 마지막 부분은 필터링(filtering)의 작은 예로, 불완전한 관측(검사)으로부터 숨겨진 상태(녹슬었는지 아닌지)를 추론하는 것이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이러한 관점에서 연속분포와 조건부 확률을 다룬다.

풀이

STEP II 1988, 문제 1

순수수학 • 부분분수와 급수

STEP II 1988, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q1

핵심 아이디어

f를 부분분수(partial fractions)로 분해하면, 모든 것이 두 개의 간단한 분수 $\frac{1}{x-1}$과 $\frac{1}{x-2}$를 등비급수(geometric series)로 전개하는 문제로 귀결된다. 실제로 결정해야 할 것은 각 분수를 **어느 방향으로** 전개할지뿐이다. 등비급수 $\sum r^n$은 $|r| < 1$일 때에만 수렴(converge)하므로, 각 분수에서 분모의 두 항 가운데 크기가 더 큰 쪽을 묶어 낸다. 이 선택은 $|x|$가 1을 지나고 다시 2를 지날 때 바뀌며, 바로 이 때문에 서로 다른 세 가지 전개가 생긴다.

풀이

부분분수

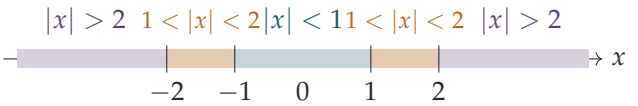
$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$로 놓는다. 가리기 규칙(cover-up rule)에 의해 $A = \frac{1}{1-2} = -1$, $B = \frac{1}{2-1} = 1$이므로

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

필요한 두 가지 기본 재료는 등비급수

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \qquad (|r| < 1),$$

이며, 여기서 r로는 x, $\frac{x}{2}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x}$ 가운데 지금 다루는 범위에서 절댓값(modulus)이 1보다 작은 것을 쓴다.



범위 $|x| < 1$

이 범위에서는 $|x| < 1$이고 또한 $|\frac{x}{2}| < \frac{1}{2} < 1$이므로, 두 분수를 모두 x의 거듭제곱으로 전개할 수 있다.

$$-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$
$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

두 식을 더하면

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (|x| < 1),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

범위 $1 < |x| < 2$

두 번째 분수는 그대로이다. 여전히 $|\frac{x}{2}| < 1$이므로 앞에서와 똑같이 $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(\frac{x}{2})^n$이다.

? **생각해 보기** 첫 번째 분수에 대해 왜 계속 $\sum x^n$을 쓸 수 없을까?

이제 $|x| > 1$이므로 항 x^n이 0으로 가지 않고, 따라서 $\sum x^n$은 발산(diverge)하기 때문이다. 그 대신 분모에서 더 큰 항인 x를 묶어 내면, $|\frac{1}{x}| < 1$인 공비 $\frac{1}{x}$가 남는다.

$$-\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{-(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n},$$

여기서 마지막 단계는 $n+1$을 n으로 다시 이름 붙인 것일 뿐이다. 두 부분을 더하면

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (1 < |x| < 2),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

범위 $|x| > 2$

$|\frac{1}{x}| < \frac{1}{2} < 1$이므로 첫 번째 분수는 앞 범위에서의 전개를 그대로 유지한다. 그러나 이제 $|\frac{x}{2}| > 1$이므로, 두 번째 분수도 같은 방식으로 방향을 바꾸어야 한다. 즉 x를 묶어 내면 $|\frac{2}{x}| < 1$인 공비 $\frac{2}{x}$가 남는다.

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n}.$$

따라서 $|x| > 2$일 때

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^{-n}.$$

$n = 1$일 때의 계수는 $2^0 - 1 = 0$이므로, 이 급수는 실제로 x^{-2}부터 시작한다.

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1)x^{-n} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{7}{x^4} + \frac{15}{x^5} + \cdots \qquad (|x| > 2).$$

(두 급수가 각각 수렴하므로 두 급수를 항별로 합치는 것은 정당하다.) 두 급수로 나타낸 꼴과 하나로 합친 꼴 모두 올바른 답이다.

검산

- **주된 거동.** $|x|$가 클 때 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \approx \frac{1}{x^2}$이며, 이는 마지막 전개의 첫째 항과 일치한다. x^{-1}의 계수가 0이 되는 것은 우연이 아니다. 두 부분분수가 크기는 같고 부호는 반대인 $\frac{1}{x}$ 거동을 갖기 때문이다.
- **특정한 값.** $x = 3$에서 $\mathrm{f}(3) = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$이고, $\sum_{n \geq 2}(2^{n-1} - 1)3^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n \geq 2}(\frac{2}{3})^n - \sum_{n \geq 2}(\frac{1}{3})^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$이다. 마찬가지로 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$과 $\mathrm{f}(\frac{3}{2}) = -4$도 처음 두 전개와 일치한다.
- 수치적으로, 세 급수 모두(4000개 항까지 합하면) 각자의 범위 안에 있는 양수와 음수의 무작위 점 수백 개에서 약 10^{-14}의 오차 이내로 f와 일치한다.

흔한 실수

- $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - x/2}$에서 부호를 틀리는 것. 묶어 내는 인수는 2가 아니라 -2이다.
- $\frac{1}{x}$을 곱한 뒤 첨자를 하나 어긋나게 쓰는 것. $\frac{1}{x}\sum_{n \geq 0} x^{-n}$은 x^{-1}부터 시작하므로, 다시 이름 붙인 합은 $n = 1$부터 시작한다.
- 공비의 절댓값이 1보다 작은지 확인하지 않고 모든 범위에서 같은 전개를 쓰는 것.

STEP 너머

이 세 가지 전개는 복소해석학(complex analysis)의 **로랑 급수**(*Laurent series*)가 실변수 세계에 드리운 그림자이다. 복소수 z에 대해 함수 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$는 영역 $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $|z| > 2$ 각각에서 서로 다른 로랑 전개를 갖는다. 이 영역들은 극(pole)을 지나는 원으로 둘러싸인 원판 하나와 원환(annulus) 두 개이며, 원 $|x| = 1$과 $|x| = 2$가 복소평면에서 바로 이 원들이 된다. 이러한 전개에서 z^{-1}의 계수(유수(residue))가 경로적분(contour integral)을 좌우한다는 사실이 밝혀진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 거듭제곱급수와 로랑 급수를 아름답게 기하학적으로 설명한다.

풀이

STEP II 1988, 문제 2

순수수학 • 대칭 대수방정식

> **STEP II 1988, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q2

핵심 아이디어

분모를 없앤 뒤 한 식에서 다른 식을 뺀다. 우변의 제곱의 차(difference of two squares)에서 인수 $y-z$가 나오는데, 이것은 좌변에 나타나는 $y-z$와 맞아떨어지며, 가정(hypothesis) $y \neq z$가 바로 이 인수를 약분할 수 있게 해 준다. 그다음에는 모든 것이 x, y, z에 대한 하나의 대칭(symmetric)식으로 귀결되고, 나머지는 대칭성이 해결해 준다.

풀이

$x+y+z=a$의 증명

$y \neq 0$이고 $z \neq 0$이므로 양변에 곱할 수 있다.

$$2ay - 3y^2 = (z-x)^2, \tag{1}$$
$$2az - 3z^2 = (x-y)^2. \tag{2}$$

(1)에서 (2)를 빼고 우변에 제곱의 차를 이용하면

$$\begin{aligned} 2a(y-z) - 3(y^2-z^2) &= (z-x)^2 - (x-y)^2 \\ &= \big[(z-x)-(x-y)\big]\big[(z-x)+(x-y)\big] \\ &= (y+z-2x)(z-y). \end{aligned}$$

좌변은 $(y-z)\big[2a-3(y+z)\big]$이므로

$$(y-z)\big[2a-3(y+z)\big] = -(y-z)(y+z-2x).$$

? **생각해 보기** $y \neq z$가 정확히 어디에서 필요한가?

바로 여기다. $y - z \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고, 그러면

$$2a - 3y - 3z = 2x - y - z \quad \Longrightarrow \quad 2a = 2x + 2y + 2z,$$

따라서 요구한 대로 $x + y + z = a$이다.

세 번째 등식의 증명

$a = x + y + z$를 (1)에 다시 대입하면

$$y(2x + 2y + 2z - 3y) = (z - x)^2 \implies 2xy - y^2 + 2yz = z^2 - 2zx + x^2,$$

이고, 이를 정리하면

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0. \tag{3}$$

눈에 띄는 점은 (3)이 x, y, z에 대하여 **대칭**이라는 것이다. 이제 보이고자 하는 것을 살펴보자. $x \neq 0$이므로 등식 $2a - 3x = \dfrac{(y-z)^2}{x}$는

$$x(2a - 3x) = (y - z)^2,$$

와 동치이고, $a = x + y + z$를 쓰면 이것은

$$x(2y + 2z - x) = y^2 - 2yz + z^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0,$$

이 되어 정확히 (3)이다. 따라서

$$2a - 3x = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

(사실 세 등식은 모두 (3)과 $a = x + y + z$를 함께 놓은 것을 각각 한 변수의 관점에서 쓴 것에 불과하다.)

$y = z$일 때도 마지막 등식이 성립할 수 있는가?

그렇다. $y = z$이면 주어진 두 등식은 같은 등식 $2a - 3y = \dfrac{(y-x)^2}{y}$가 되고, 마지막 등식은 $2a - 3x = 0$, 즉 $a = \frac{3}{2}x$가 된다. $a = \frac{3}{2}x$를 첫 번째 등식에 대입하면

$$3x - 3y = \frac{(x-y)^2}{y} \iff 3y(x - y) = (x - y)^2 \iff (x - y)(x - 4y) = 0.$$

따라서 예를 들어 $x = y = z = 1, a = \frac{3}{2}$는 세 등식을 모두 만족한다.

$$2a - 3y = 0 = \frac{(z-x)^2}{y}, \qquad 2a - 3z = 0 = \frac{(x-y)^2}{z}, \qquad 2a - 3x = 0 = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

또 다른 예는 $x = 4, y = z = 1, a = 6$이다. 이때 처음 두 등식 각각에 대해 $2a - 3y = 9 = \frac{(1-4)^2}{1}$이고, $2a - 3x = 0 = \frac{0^2}{4}$이다.

그러므로 마지막 등식은 $y \neq z$일 때에만 성립하는 것이 **아니다**. 조건 $y \neq z$는 그 등식이 성립함을 보장하지만, $y = z$일 때에도 성립할 수 있다. $y = z$일 때 무너지는 것은 **보장**이다. 예를 들어 $x = 1, y = z = 2, a = \frac{13}{4}$은 주어진 두 등식을 만족하지만(각 변이 $\frac{1}{2}$이다), $2a - 3x = \frac{7}{2} \neq 0$이다. 또한 첫 번째 예에서는 $x + y + z = 3 \neq a$이므로, $y = z$이면 첫 번째 결론조차 성립하지 않을 수 있다는 점에도 주목하자.

검산

- (3)을 만족하는 $x = 9, y = 4, z = 1$을 택하자. $81 + 16 + 1 - 72 - 8 - 18 = 0$이다. 그러면 $a = 14$이고 $2a - 3y = 16 = \frac{(1-9)^2}{4}$, $2a - 3z = 25 = \frac{(9-4)^2}{1}$, $2a - 3x = 1 = \frac{(4-1)^2}{9}$이다. 세 등식이 모두 성립한다.
- 수치 검사를 통해 무작위로 고른 유리수(rational) 세 쌍 10,000개에서 항등식(identity) $(1) - (2) = (y - z)\big(2a - 2(x + y + z)\big)$가 정확히 성립함을 확인했고, $y \neq z$인 (3) 위의 무작위 점 약 1,900개와 위의 $y = z$인 세 예에서 세 등식이 모두 성립함을 확인했다.

흔한 실수

- 왜 허용되는지 밝히지 않고 $y - z$로 나누는 것. 그 단계가 바로 가정이 주어진 이유의 전부이다.
- 마지막 문항에 예 없이 "아니다" 또는 "그렇다"로만 답하는 것. $y = z$인 구체적인 세 쌍 하나면 결론이 난다.
- $y = z$이면 마지막 등식이 거짓이 된다고 생각하는 것. 단지 보장이 사라질 뿐이다.

STEP 너머

등식 (3)은 이차형식(quadratic form)이고, 그 영점 집합은 (x, y, z)-공간의 이중 원뿔(double cone)이다. $x, y, z > 0$이면 $x = p^2, y = q^2, z = r^2$으로 쓰자. 그러면 (3)은

$$-(p + q + r)(-p + q + r)(p - q + r)(p + q - r) = 0,$$

으로 인수분해(factorise)되는데, 좌변은 세 변의 길이가 p, q, r인 삼각형의 넓이의 제곱의 16배이다(헤론(Heron)의 공식). 따라서 (3)은 $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$가 퇴화 삼각형(degenerate triangle)을 이룬다는 뜻이며, 예를 들어 위의 검산에서는 $\sqrt{9} = \sqrt{4} + \sqrt{1}$이다. 이차형식과 그 분류는 대학 1학년 선형대수(linear algebra)의 표준적인 주제이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 1988, 문제 3

순수수학 • 근의 대칭성

> **STEP II 1988, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q3

핵심 아이디어

계수부터 다루지 말고 근의 집합을 다룬다. 주어진 성질은 근의 집합이 연산 $k \mapsto 1/k$에 의해 변하지 않는다는 뜻이므로, 두 근이 서로 바뀌거나 각 근이 고정된다. 두 번째 연산 $k \mapsto 1-k$를 추가해도 같은 방식으로 작동한다. 삼차방정식에서는 두 연산을 반복해서 적용하면 하나의 근에서 최대 여섯 개의 값이 만들어지는데, 삼차방정식에는 근이 세 개까지만 들어갈 수 있다. 따라서 근은 여섯 개의 값 가운데 일부가 겹치는 특별한 점에 있어야 한다.

풀이

역수 성질

두 근을 α와 β라 하자(같을 수도 있고 복소수일 수도 있다). 그러면 $\alpha+\beta=-b$이고 $\alpha\beta=c$이다. 먼저, 0^{-1}은 존재하지 않으므로 0은 근이 될 수 없다. 따라서 $c\neq 0$이다.

사상(map) $k \mapsto 1/k$는 각 근을 근으로 보내야 하므로 $1/\alpha \in \{\alpha, \beta\}$이다.

- $1/\alpha=\beta$이면 $\alpha\beta=1$, 즉 $c=1$이다. 역으로 $c=1$이면 두 근은 0이 아니고 $\beta=1/\alpha$이므로 각 근의 역수는 다른 근이 되며, 이 성질은 **모든** 실수 b에 대해 성립한다. (여기에는 $b=\mp 2$일 때의 중근 ± 1과 $|b|<2$일 때 단위원 위에 있는 복소수 근이 포함된다.)
- $1/\alpha=\alpha$이지만 $1/\alpha\neq\beta$이면 $\alpha=\pm 1$이고 $\alpha\beta\neq 1$이다. 이 성질을 β에 적용하면, $\alpha\beta\neq 1$이므로 β의 역수는 α가 아니다. 따라서 $1/\beta=\beta$이고 $\beta=\pm 1$이기도 하다. $\alpha\beta\neq 1$이므로 두 근은 1과 -1이어야 하고, 이로부터 $x^2-1=0$, 즉 $b=0, c=-1$을 얻는다. 이 방정식은 실제로 이 성질을 가진다.

따라서 이 성질은 정확히 다음과 같은 경우에 성립한다.

$$c = 1 \ (b\text{는 임의의 실수}), \qquad \text{또는} \qquad b = 0,\ c = -1.$$

성질 $k \mapsto 1-k$ 추가하기

$1/k$ 대신 $1-k$를 넣어 같은 논증을 한다. $1-\alpha = \beta$이어서 $\alpha+\beta = 1$이거나, 두 근이 모두 고정되어 $1-\alpha = \alpha$이고 $1-\beta = \beta$이다. 후자의 경우 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$이므로 역시 $\alpha+\beta = 1$이다. 어느 경우든 $b = -1$이고, 역으로 $b = -1$이면 두 근이 α와 $1-\alpha$가 되므로 이 성질이 성립한다.

$b = 0, c = -1$인 경우는 이 조건을 만족하지 않으므로 $c = 1$이고 $b = -1$이어야 한다.

$$b = -1, \qquad c = 1,$$

이로부터 $x^2 - x + 1 = 0$을 얻고, 그 근은 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$이다. 각 근은 절댓값(modulus)이 1이고 실수부가 $\frac{1}{2}$이므로, $1/k$와 $1-k$는 모두 켤레복소수(complex conjugate) $\bar{k}$, 즉 다른 근과 같다.

삼차방정식

이제 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$이 실수 계수를 가지고 두 성질을 모두 만족한다고 하자. 앞에서와 마찬가지로 0은 근이 아니며, 1도 근이 아니다(그렇지 않으면 $1-1=0$이 근이 되기 때문이다).

실수 계수 삼차방정식(cubic)은 적어도 하나의 실근을 가지므로, 그것을 a라 하자. 두 연산을 반복해서 적용하면 다음이 모두 근이다.

$$a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1-a, \quad \frac{1}{1-a}, \quad 1-\frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}, \quad \frac{1}{(a-1)/a} = \frac{a}{a-1}.$$

(네 번째는 세 번째의 역수이고, 다섯 번째는 1 − (두 번째)이며, 여섯 번째는 다섯 번째의 역수이다.) 이들은 여섯 개의 실수이지만 삼차방정식의 서로 다른 근은 많아야 세 개이므로, 이 중 두 개는 같다.

> **?** **생각해 보기** "이 중 두 개가 같다"는 사실이 어떻게 a를 결정하는가?

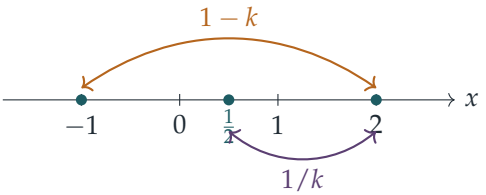
여섯 개의 사상을 $f_1, \ldots, f_6$이라 하고, f_1을 항등사상(identity)이라 하자. 각 사상은 목록 안에 역사상(inverse)을 가진다. $\frac{1}{k}$, $1-k$, $\frac{k}{k-1}$은 자기 자신이 역사상이고, $\frac{1}{1-k}$와 $\frac{k-1}{k}$는 서로의 역사상이다. 또한 임의의 두 사상을 합성하면 목록 안의 다른 사상이 된다는 것도 확인할 수 있다. 따라서 $i \neq j$에 대해 $f_i(a) = f_j(a)$이면, f_i^{-1}을 적용하여 $a = g(a)$를 얻는다. 여기서 $g = f_i^{-1} \circ f_j$는 여섯 사상 중 하나이며 항등사상이 아니다. 따라서 a는 항등사상이 아

닌 다섯 사상 중 하나의 고정점(fixed point)이다.

$$\frac{1}{a} = a \iff a = \pm 1, \qquad \frac{1}{1-a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$1 - a = a \iff a = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{a-1}{a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$\frac{a}{a-1} = a \iff a(a-2) = 0.$$

이차식 $a^2 - a + 1$은 실근을 갖지 않으며(앞에서 본 이차식이다), $a \neq 0, 1$이다. 따라서 $a \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$이다.

a가 이 중 어느 것이든, 위의 여섯 값은 정확히 -1, 2, $\frac{1}{2}$를 지나간다. 사상 $1-k$는 -1과 2를 서로 바꾸고 $\frac{1}{2}$를 고정하며, $1/k$는 2와 $\frac{1}{2}$를 서로 바꾸고 -1을 고정한다.



따라서 -1, 2, $\frac{1}{2}$는 삼차방정식의 서로 다른 세 근이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차식(monic cubic)은 세 근에 의해 결정되므로, 그 식은 다음과 같아야 한다.

$$(x+1)(x-2)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = (x^2 - x - 2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1.$$

역으로, 이 삼차식의 근의 집합 $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$는 $k \mapsto 1/k$와 $k \mapsto 1-k$에 의해 자기 자신으로 보내지므로, 이 삼차식은 실제로 두 성질을 모두 가진다. 따라서

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1 = 0$$

이 그러한 유일한 삼차방정식이며, 이것으로 증명이 끝난다.

검산

$x = 2$를 대입하면 $8 - 6 - 3 + 1 = 0$이고, $x = -1$을 대입하면 $-1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 0$이다. 근의 곱은 $-1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -1 = -r$이고, 근의 합은 $\frac{3}{2} = -p$이다. 삼차식의 계수가 부호를 제외하면 앞에서 읽으나 뒤에서 읽으나 같다는 점$(1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$에 주목하자. 이 회문(palindromic) 꼴이 바로 $k \mapsto 1/k$가 강제하는 것이다. 무작위로 고른 20,000개의 (b, c)에 대한 컴퓨터 검사로 역수 조건을 확인했고, $0, \pm 1, \frac{1}{2}, 2$에서 떨어진 무작위 실수 a는 언제나 서로 다른 여섯 개의 값을 주었다.

흔한 실수

- 첫 번째 부분에서 "$c = 1$"만 답하는 것. 각 근이 자기 자신의 역수인 경우에서 $b = 0$, $c = -1$이 추가된다.
- 두 사상에 대해 닫혀 있는 쌍 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$를 놓치는 것. 이 쌍을 배제하는 것은 **실근**에서 출발한다는 점이다. 실수 계수 삼차방정식은 실근을 가지며, 그 근의 여섯 값에는 이 복소수들이 포함될 수 없다.
- 주어진 삼차방정식이 성립한다는 것만 증명하는 것. 문제는 그것이 **유일한** 삼차방정식임을 보이라고 요구한다.

STEP 너머

여섯 사상 $k \mapsto k$, $1/k$, $1-k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{k-1}$은 합성에 대해 군(group)을 이루며, 이는 대칭군(symmetric group) S_3와 같은 구조이다. 이 군은 세 점 $0, 1, \infty$를 치환하고, 여섯 값은 네 점의 가능한 비조화비(cross-ratio)들이다. 개수를 세는 단계는 궤도-안정자 정리(orbit–stabiliser theorem)이다. 궤도의 길이는 항등원이 아닌 어떤 원소에 의해 고정되는 점에서만 6보다 짧아진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 집합에 작용하는 군을 전개하며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 사상들을 평면의 뫼비우스 변환(Möbius transformation)으로 보여 준다.

풀이

STEP II 1988, 문제 4

순수수학 • 복소평면 위의 자취

STEP II 1988, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q4

핵심 아이디어

복소수(complex number)를 $a + \mathrm{i}b$ 꼴로 쓰고, "실수이다" 또는 "허수이다"라는 조건을 a와 b에 관한 하나의 실수 방정식으로 바꾼다. 그러면 아르강 도표(Argand diagram)에서 익숙한 곡선이 나온다. 이제 제곱은 평면에서 평면으로 가는 사상(map)이 되고, x와 y(또는 p와 q)를 a와 b로 나타낸 뒤 소거(elimination)하여 그 곡선이 어디로 옮겨지는지 찾는다.

인쇄된 문제에 대해 한마디 해 둔다. 문제에는 $w^2 - 2x$라고 적혀 있지만, 그 시점에서는 x가 아직 도입되지 않았고, 마지막 부분($t^2 - 2t$가 나오는 부분)을 보면 의도한 조건이 무엇인지 알 수 있다. 따라서 이 조건을 $w^2 - 2w$**가 실수이다**로 읽는다.

풀이

소문항 (i)

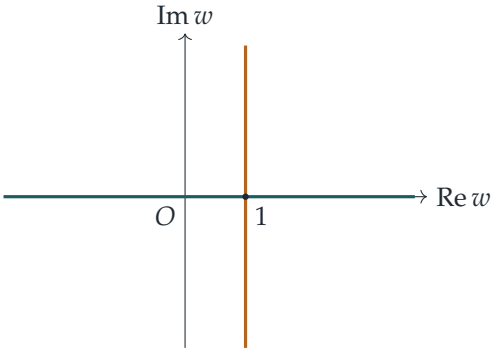
a, b를 실수로 하여 $w = a + \mathrm{i}b$라 하자. 그러면

$$w^2 - 2w = (a^2 - b^2 - 2a) + \mathrm{i}\,(2ab - 2b) = (a^2 - b^2 - 2a) + 2\mathrm{i}\,b(a - 1).$$

이 값은 허수부가 0일 때, 그리고 그때에만 실수이므로, 조건은

$$b(a - 1) = 0, \qquad \text{즉,} \qquad b = 0 \ \text{또는}\ a = 1.$$

따라서 w의 자취(locus)는 실수축(real axis)과 수직선 $\mathrm{Re}\, w = 1$을 합친 것이다. 두 직선은 $w = 1$에서 만난다.



소문항 (ii)

두 직선을 각각 따로 제곱한다.

실수축. $b = 0$이면 $w = a$는 실수이고 $w^2 = a^2$이다. 따라서 $y = 0$이고 $x = a^2 \geq 0$이며, a가 실수 전체를 움직일 때 a^2은 $[0, \infty)$의 모든 값을 취한다. 자취의 이 부분은 x축의 음이 아닌 부분, 즉 반직선(half-line) $y = 0, x \geq 0$이다.

직선 $a = 1$. $w = 1 + \mathrm{i}b$이면

$$w^2 = 1 - b^2 + 2\mathrm{i}b, \qquad \text{따라서} \qquad x = 1 - b^2, \quad y = 2b.$$

$b = \frac{1}{2}y$를 소거하면

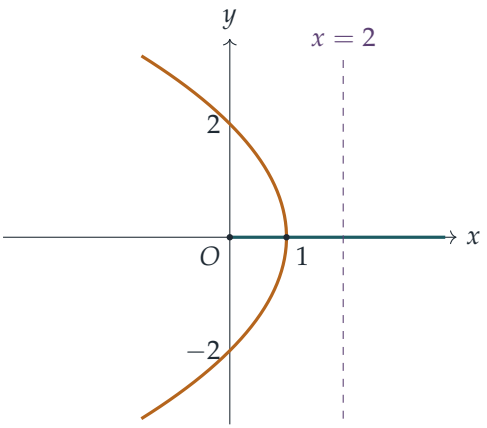
$$x = 1 - \tfrac{1}{4}y^2, \qquad \text{또는} \qquad y^2 = 4(1 - x) = -4(x - 1).$$

$b = \frac{1}{2}y$로 잡으면 이 곡선의 모든 점에 도달한다. 이것은 축이 x축 위에 있고 꼭짓점(vertex)이 $(1, 0)$이며 x의 음의 방향으로 열린 포물선(parabola)이다. 표준형 $Y^2 = 4cX$와 비교하면, $X = x - 1$일 때 $c = -1$이다. 따라서 초점(focus)은 $X = -1$, 즉 원점이고, 준선(directrix)은 $X = 1$, 즉 직선 $x = 2$이다. 실제로 $x^2 + y^2 = x^2 + 4 - 4x = (2 - x)^2$이므로, 모든 점은 O까지의 거리와 직선 $x = 2$까지의 거리가 같다. 포물선은 y축과 $(0, \pm 2)$에서 만난다.

? 생각해 보기 반직선이 왜 x의 음의 방향으로는 뻗지 않을까?

w평면의 실수축은 (a와 $-a$에 의해) 두 번 덮이지만, 실수를 제곱하면 결코 음수가 나오지 않는다. 그래서 실수축 전체가 음이 아닌 절반 위로 접힌다. 마찬가지로 $b \mapsto 2b$가 일대일(one-to-one)이므로, 직선 $\mathrm{Re}\, w = 1$은 포물선 위로 한 번씩만 옮겨진다.

따라서 (x, y)의 자취는 초점이 원점이고 준선이 $x = 2$인 포물선 $y^2 = 4(1 - x)$와 반직선 $y = 0, x \geq 0$을 합친 것이다. 이 반직선은 초점에서 출발하여 꼭짓점 $(1, 0)$을 지나는데, 이 꼭짓점은 소문항 (i)의 두 직선이 만나는 점 $w = 1$의 상(image)이다.



마지막 부분

$t = a + ib$라 하자. 여기서 "허수이다"는 순허수(purely imaginary)라는 뜻이므로, $t^2 - 2t$의 실수부가 0이어야 한다.

$$a^2 - b^2 - 2a = 0, \qquad \text{즉,} \qquad (a-1)^2 - b^2 = 1.$$

따라서 t는 중심이 1이고 꼭짓점이 $t = 0$과 $t = 2$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola) 위에 있다. 이 곡선 위에서 $b^2 = a^2 - 2a = a(a-2) \geq 0$이므로 $a \leq 0$ 또는 $a \geq 2$이다.

이제 $t^2 = p + iq$로 두면

$$p = a^2 - b^2 = 2a, \qquad q = 2ab,$$

이다. 여기서 p를 간단히 하는 데 쌍곡선의 방정식 $a^2 - b^2 = 2a$를 썼다. 따라서 $a = \frac{1}{2}p$이고,

$$q^2 = 4a^2b^2 = 4a^2(a^2 - 2a) = p^2\left(\tfrac{1}{4}p^2 - p\right), \qquad \text{따라서} \qquad 4q^2 = p^3(p-4).$$

조건 $a \leq 0$ 또는 $a \geq 2$는 $p \leq 0$ 또는 $p \geq 4$가 되는데, 이것은 정확히 $p^3(p-4) \geq 0$인 범위이다. 역으로 이 곡선 위의 한 점을 잡자. $p \neq 0$이면 $a = \frac{1}{2}p$, $b = q/p$로 둔다. 그러면 $b^2 = q^2/p^2 = \frac{1}{4}p(p-4) = a^2 - 2a$이므로 t는 쌍곡선 위에 있고, $t^2 = (a^2 - b^2) + 2iab = p + iq$이다. $p = 0$이면 $q = 0$이고, 이 점은 $t = 0$에서 온다. 따라서 자취는 곡선

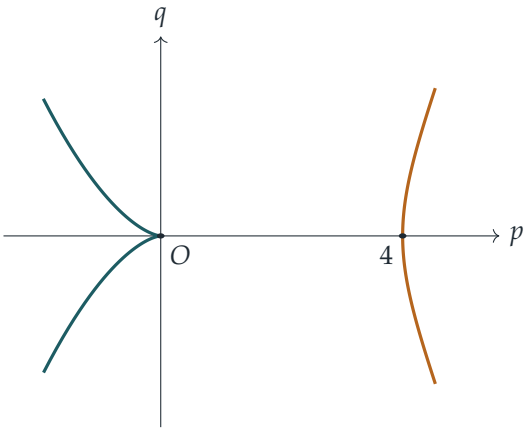
$$4q^2 = p^3(p-4).$$

전체이다.

곡선의 모양은 다음과 같다.

- q^2만 나타나므로 p축에 대하여 대칭이다.
- $0 < p < 4$인 점은 없다. 곡선은 두 조각으로 이루어지며, 각 조각은 쌍곡선의 각 가지에서 하나씩 나온다.

- 오른쪽 조각은 $t = 2$의 상인 $(4, 0)$에서 시작한다. 그 근처에서 $q^2 \approx 16(p-4)$이므로 접선(tangent)은 수직이다.
- 왼쪽 조각은 $t = 0$의 상인 원점을 지난다. 그 근처에서 $q^2 \approx -p^3$이므로 $|q| \approx |p|^{3/2}$이고, 이는 오른쪽을 향하는 첨점(cusp)으로, 두 갈래 모두 p축에 접한다.
- $|p|$가 클 때 $|q| \approx \frac{1}{2}p^2$이므로, 두 조각 모두 포물선처럼 벌어진다.



(세로 방향은 축소하여 그렸다. 청록색 조각은 쌍곡선에서 $\mathrm{Re}\, t \leq 0$인 가지에서, 호박색 조각은 $\mathrm{Re}\, t \geq 2$인 가지에서 나온다.)

검산

- 소문항 (i): $w = 1 + 2\mathrm{i}$이면 $w^2 - 2w = (-3 + 4\mathrm{i}) - (2 + 4\mathrm{i}) = -5$로 실수이다. 소문항 (ii): 그 제곱 $-3 + 4\mathrm{i}$는 $16 = 4(1 - (-3))$을 만족한다.
- 마지막 부분: $t = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$은 $1 - 3 + 2 = 0$을 만족한다. 그 제곱은 $-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$이고, $4q^2 = 48 = (-8)(-6) = p^3(p-4)$이다.
- 수천 개의 무작위 점에서 수치적으로 확인하여, 각 자취가 제시한 곡선 위로 옮겨지고 각 곡선의 모든 점에 도달함을 검증하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 실수축을 빠뜨려 소문항 (ii)에서 반직선을 놓치는 경우. 또는 $x \geq 0$인 부분만이 아니라 x축 전체를 그리는 경우.
- $a^2 - b^2 = 2a$를 이용해 $p = 2a$를 얻지 않는 경우. 이것 없이는 소거가 훨씬 복잡해진다.
- 마지막 그림에서 빈 구간 $0 < p < 4$나 원점의 첨점을 놓치는 경우.

STEP 너머

제곱 사상 $z \mapsto z^2$은 가장 간단한 등각사상(conformal map)이다. 이 사상은 각을 두 배로 만들며, 그래서 여기서 직선과 쌍곡선이 포물선과 첨점이 있는 곡선으로 바뀐다. $z = 0$에서는 도함수(derivative)가 0이 되어 각이 더 이상 보존되지 않는데, 첨점은 바로 여기서 생긴다. 유체 흐름과 정전기학에서는 이런 사상을 이용해 다루기 어려운 영역을 쉬운 영역으로 바꾸는 것이 표준적인 기법이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 사상을 그림으로 훌륭하게 설명한다.

풀이

STEP II 1988, 문제 5

순수수학 • 1의 거듭제곱근과 탄젠트

> **STEP II 1988, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q5

핵심 아이디어

$z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$로 놓고 이항정리(binomial theorem)로 z^7을 전개한다. 허수부(imaginary part)는 $\sin 7\theta$이고, 이를 $\cos^7\theta$로 나누면 $t = \tan\theta$에 대한 다항식(polynomial)이 된다. 1의 7제곱근(seventh roots of unity)은 $\sin 7\theta$를 0으로 만들므로, 7차 다항식의 근 일곱 개를 거저 얻게 된다. 그다음 탄젠트의 곱은 근들의 곱일 뿐이며, 상수항(constant term)에서 바로 읽어 낼 수 있다.

풀이

6차 다항식(sextic)의 근

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)에 의해 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta$이다. $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$로 쓰자. 좌변을 이항정리로 전개하고 is의 홀수 제곱이 들어 있는 항만 남기면

$$\sin 7\theta = 7c^6 s - 35c^4 s^3 + 21c^2 s^5 - s^7.$$

을 얻는다. $\cos\theta \neq 0$이면 c^7로 나누고 $t = \tan\theta$로 놓을 수 있다.

$$\frac{\sin 7\theta}{\cos^7\theta} = 7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7 = -t\,(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7). \qquad (*)$$

$z^7 = 1$의 근은 $\theta = \frac{2k\pi}{7}$일 때의 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$이고, 이때 $z^7 = 1$의 허수부인 $\sin 7\theta = \sin 2k\pi = 0$이다. $\theta = \frac{k\pi}{7}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$을 쓰는 편이 조금 더 깔끔한데, 이 경우에도 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$이다(그리고 tan의 주기가 π이므로 같은 탄젠트 값들의 집합을 얻는다).

이러한 각 θ에 대하여

- $\frac{k\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$가 되려면 $2k = 7$이어야 하므로 $\cos\theta \neq 0$이다. 따라서 $(*)$가 성립한다.
- $\sin 7\theta = 0$이므로 $(*)$에 의해 수 $t = \tan\frac{k\pi}{7}$은 $p(t) = t^7 - 21t^5 + 35t^3 - 7t$의 근이다.

일곱 개의 값 $\tan\frac{k\pi}{7}$ $(k = 0, \ldots, 6)$은 서로 다르다. 각 $0, \frac{\pi}{7}, \ldots, \frac{6\pi}{7}$은 $[0, \pi)$의 서로 다른 점이고 어느 것도 $\frac{\pi}{2}$와 같지 않으며, tan은 $[0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$에서 일대일(one-to-one)이기 때문이다($[0, \frac{\pi}{2})$에서는 양수이면서 증가하고, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에서는 음수이면서 역시 증가하며, 두 조각은 각각 $[0, \infty)$와 $(-\infty, 0)$의 값을 가진다).

? **생각해 보기** 근의 일부가 아니라 **모든** 근을 찾았다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

7차 다항식의 근은 많아야 7개이다. 서로 다른 근을 7개 찾았으므로 이것이 근의 전부이다. $k = 0$일 때 $t = 0$이 되는데, 이는 인수 t에서 나오는 근이다. 따라서 $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0$의 근은 정확히

$$t = \tan\frac{k\pi}{7}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

이고, $\tan\frac{(7-k)\pi}{7} = -\tan\frac{k\pi}{7}$이므로 이는 곧 $\pm\tan\frac{\pi}{7}, \pm\tan\frac{2\pi}{7}, \pm\tan\frac{3\pi}{7}$이다.

곱 $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7}$

차수가 짝수인 모닉 다항식(monic polynomial, 최고차항의 계수가 1인 다항식)에서 근들의 곱은 상수항과 같다. 따라서

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{3\pi}{7}\right) = -7,$$

이고, 이는

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\tan\tfrac{2\pi}{7}\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)^2 = 7.$$

임을 뜻한다. 세 각은 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있으므로 각 탄젠트는 양수이고, 곱은 양의 제곱근이다. $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$.

이제 $\tan(\pi - x) = -\tan x$를 이용하면 $\tan\frac{4\pi}{7} = -\tan\frac{3\pi}{7}$이고 $\tan\frac{6\pi}{7} = -\tan\frac{\pi}{7}$이다. 두 음의 부호가 상쇄되므로

$$\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} = \tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}\tan\frac{\pi}{7} = \sqrt{7},$$

이 되어 증명이 끝난다.

$n = 9$와 $n = 11$인 경우

같은 논증이 임의의 홀수 $n = 2m + 1$에 대해 성립한다. $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$의 허수부를 취하고 $\cos^n\theta$로 나누면

$$\frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta} = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{n}{2r+1}t^{2r+1} = t\,q_n(t),$$

이다. 여기서 q_n은 차수가 $2m = n-1$이고 최고차항 계수(leading coefficient)가 $(-1)^m$이며 상수항이 $\binom{n}{1} = n$이다. 구체적으로 쓰면

$$q_9(t) = t^8 - 36t^6 + 126t^4 - 84t^2 + 9,$$
$$q_{11}(t) = -t^{10} + 55t^8 - 330t^6 + 462t^4 - 165t^2 + 11.$$

이다. 앞에서와 똑같이(n이 홀수이므로 어떤 $\frac{k\pi}{n}$도 $\frac{\pi}{2}$와 같지 않다), q_n의 근은 서로 다른 $n-1$개의 수 $\tan\frac{k\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n-1$이고, 이들은 $k = 1, \dots, m$에 대하여 $\pm\tan\frac{k\pi}{n}$으로 짝을 이룬다. 차수가 짝수이므로 q_n의 근들의 곱은 (상수항)/(최고차항 계수)이다.

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{m} \tan^2\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{(-1)^m} \quad\Longrightarrow\quad \prod_{k=1}^{m} \tan\frac{k\pi}{n} = \sqrt{n},$$

이때 이 각들이 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있으므로 양의 제곱근을 택한다. $n = 9$일 때 이는 q_9의 상수항 9를 최고차항 계수 1로 나눈 것이고, $n = 11$일 때는 $11/(-1) = -11 = (-1)^5\prod\tan^2$이다. 어느 경우든 $k = 1, \dots, m$에 대한 $\tan\frac{k\pi}{n}$의 곱은 $n = 9$일 때 3, $n = 11$일 때 $\sqrt{11}$이다.

> ? **생각해 보기** 구하려는 곱의 각은 $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots$이 아니라 $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots$이다. 한쪽에서 다른 쪽으로 어떻게 넘어갈 수 있으며, 부호는 어떻게 될까?

$2j \le m$인 짝수 배수는 이미 목록 $1, \dots, m$에 들어 있다. $2j > m$인 짝수(즉 $2j > \frac{n}{2}$)는 $\tan\frac{2j\pi}{n} = -\tan\frac{(n-2j)\pi}{n}$을 주며, $n-2j$는 홀수이고 m 이하이다. 짝수는 첫째 경우에서, 홀수는 둘째 경우에서 나오므로, 1부터 m까지의 모든 수가 이런 식으로 정확히 한 번씩 나타난다. 따라서 구하려는 곱은 $\pm\sqrt{n}$이고, $\frac{n}{2}$와 n 사이의 짝수 하나마다 음의 부호가 하나씩 붙는다.

- $n = 9$: 짝수는 $2, 4, 6, 8$이고, 그중 4.5보다 큰 것은 $6, 8$이므로 음의 부호가 두 개이다. 따라서
$$\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{6\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9} = \sqrt{9} = 3.$$
- $n = 11$: 짝수는 $2, 4, 6, 8, 10$이고, 그중 5.5보다 큰 것은 $6, 8, 10$이므로 음의 부호가 세 개이다. 따라서
$$\tan\frac{2\pi}{11}\tan\frac{4\pi}{11}\tan\frac{6\pi}{11}\tan\frac{8\pi}{11}\tan\frac{10\pi}{11} = -\sqrt{11}.$$

($n = 7$일 때는 3.5보다 큰 짝수가 $4, 6$으로 부호가 두 개이며, 그래서 그 곱이 양수로 나왔던 것이다.)

검산

- $n = 9$는 부분적으로 쉽게 검산할 수 있다. $\tan\frac{6\pi}{9} = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$이고, 수치적으로 $\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9} \approx 0.8391 \times 5.6713 \times (-0.3640) \approx -1.732 = -\sqrt{3}$이므로 전체 곱은 3이다.

- 계산기로 계산하면 $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} \approx 2.645751$이고 $\sqrt{7} \approx 2.645751$이다. $n = 11$의 곱은 $\approx -3.316625 = -\sqrt{11}$이다.
- $\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$을 대입하면 예상대로 $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 \approx 0$이 된다.

흔한 실수

- $\cos^7\theta$가 0이 아님을 확인하지 않고 나누거나, 일곱 개의 탄젠트 값이 서로 다르다는 것을 논증하지 않는 것. 이 점들을 짚지 않으면 **모든** 근을 찾았음을 보인 것이 아니다.
- $n = 11$에서 부호를 틀리는 것. 곱의 제곱은 쉽게 구할 수 있지만, 부호를 정하려면 음수인 탄젠트의 개수를 세어야 한다.
- $a_d t^d + \cdots + a_0$의 근들의 곱이 $(-1)^d a_0/a_d$라는 것을 잊는 것. 이는 최고차항 계수가 -1인 $n = 11$에서 중요하다.

STEP 너머

수 $\tan\frac{k\pi}{n}$은 대수적 수(algebraic number)이고, 다항식 q_n은 (n이 소수일 때) 유리수체 위에서 이 수들의 최소다항식(minimal polynomial)이다. $\prod\tan\frac{k\pi}{n} = \sqrt{n}$과 같은 항등식은 가우스(Gauss) 합(Gauss sum)의 그림자이다. 가우스 합은 $\sqrt{\pm p}$가 1의 p제곱근들로 생성되는 체에 속함을 보여 주며, 이는 대수적 정수론(algebraic number theory)의 초석이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 이러한 아이디어들로 부드럽게 들어가는 입문서이고, Needham의 *Visual Complex Analysis*는 1의 거듭제곱근에 대한 기하학적 감각을 길러 준다.

풀이

STEP II 1988, 문제 6

순수수학 • 쌍곡선 함수 부등식

> **STEP II 1988, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q6

핵심 아이디어

세 함수는 모두 $x = 0$에서 값이 0이므로, $x > 0$에서 증가(increasing)함을 보이면 충분하다. 도함수(derivative)들은 각 소문항이 다음 소문항으로 이어지도록 짜여 있다. (ii)의 도함수에는 (i)의 함수가 들어 있고, (iii)의 도함수는 (ii)의 함수를 변수만 바꾸어 놓은 것이다. f에 대해서는 로그미분(logarithmic differentiation)을 하면 f′의 부호가 (iii)의 함수의 부호로 바뀌는데, 분명히 그 소문항은 바로 이것을 위해 마련된 것이다.

풀이

풀이 전체에서 다음 원리를 쓴다. $F(0) = 0$이고 모든 $x > 0$에 대하여 $F'(x) > 0$이면, 모든 $x > 0$에 대하여 $F(x) > 0$이다. (평균값 정리(mean value theorem)에 의하여 어떤 $\xi \in (0, x)$에 대하여 $F(x) = F(x) - F(0) = xF'(\xi)$이기 때문이다.)

소문항 (i)

$g(x) = x - \tanh x$라 하자. 그러면 $g(0) = 0$이고, $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$를 이용하면

$$g'(x) = 1 - \operatorname{sech}^2 x = \tanh^2 x,$$

이다. $x > 0$이면 $\tanh x > 0$이므로 $g'(x) > 0$이다. 따라서 $x > 0$에서 $x - \tanh x > 0$이다.

소문항 (ii)

$h(x) = x \sinh x - 2\cosh x + 2$라 하자. 그러면 $h(0) = 0 - 2 + 2 = 0$이고

$$h'(x) = \sinh x + x\cosh x - 2\sinh x = x\cosh x - \sinh x = \cosh x\,(x - \tanh x).$$

$x > 0$이면 $\cosh x > 0$이고, 소문항 (i)에 의하여 $x - \tanh x > 0$이므로 $h'(x) > 0$이다. 따라서 $x > 0$에서 $h(x) > 0$이다.

소문항 (iii)

$k(x) = 2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x$라 하자. 그러면 $k(0) = 0$이고

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2\cosh 2x + 4x\sinh 2x - 6\cosh 2x + 4 \\ &= 4x\sinh 2x - 4\cosh 2x + 4. \end{aligned}$$

생각해 보기 이 조합을 전에 어디에서 보았는가?

$u = 2x$로 놓으면 이 식은 $2u\sinh u - 4\cosh u + 4 = 2\left(u\sinh u - 2\cosh u + 2\right) = 2h(u)$이다. $2x > 0$이므로 소문항 (ii)에 의하여

$$k'(x) = 2h(2x) > 0 \quad \text{단, } x > 0,$$

이다. 따라서 $x > 0$에서 $k(x) > 0$이다.

f에는 극점이 없다

$x > 0$이면 $\mathrm{f}(x)$의 모든 인수가 양수이므로 $\mathrm{f}(x) > 0$이고, 따라서 로그를 취할 수 있다.

$$\ln \mathrm{f}(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cosh x - \ln\sinh x.$$

미분하면

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\sinh x}{3\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x}{3x\sinh x\cosh x}.$$

이제 $\sinh x\cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x$, $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$, $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$을 이용하여 분자를 배각(double angle)으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} 3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x + \tfrac{x}{2}(\cosh 2x - 1) - \tfrac{3x}{2}(\cosh 2x + 1) \\ &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x - x\cosh 2x - 2x \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x\right). \end{aligned}$$

그러므로

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{\mathrm{f}(x)\left(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x\right)}{6x\sinh x\cosh x}.$$

$x > 0$이면 괄호 안은 소문항 (iii)에 의하여 양수이고, $\mathrm{f}(x)$, x, $\sinh x$, $\cosh x$도 모두 양수이다. 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $\mathrm{f}'(x) < 0$이다. 즉 f'은 결코 0이 되지 않으므로 f에는 극점(turning point)이 없으며, 실제로 f는 $x > 0$에서 순감소(strictly decreasing)한다.

그래프 그리기

양 끝에서의 행동을 알아야 한다.

$x \to 0^+$**일 때:** $x/\sinh x \to 1$이고 $(\cosh x)^{1/3} \to 1$이므로 $f(x) \to 1$이다. 좀 더 자세히 보면 $(\cosh x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$이고 $x/\sinh x = 1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$이므로 x^2 항은 서로 소거된다. 각 급수에서 항을 하나씩 더 구하면

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{45}x^4 + O(x^6).$$

따라서 곡선은 (포함되지 않는) 점 $(0,1)$에서 기울기 0으로 매우 평평하게 출발한다.

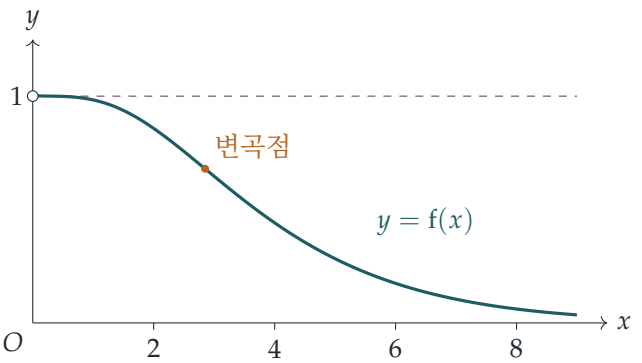
$x \to \infty$**일 때:** $\cosh x \sim \frac{1}{2}e^x$이고 $\sinh x \sim \frac{1}{2}e^x$이므로

$$f(x) \sim \frac{x\,(\frac{1}{2}e^x)^{1/3}}{\frac{1}{2}e^x} = 2^{2/3}\,x\,e^{-2x/3} \to 0,$$

이다. 지수함수가 x의 거듭제곱보다 빠르게 변하기 때문이다. x축은 점근선(asymptote)이고, $f > 0$이므로 곡선은 항상 x축 위에 있다.

> **생각해 보기** 곡선은 평평하게 시작해서 평평하게 끝나지만 언제나 감소한다. 이로부터 무엇이 반드시 성립하는가?

0 근처에서 곡선은 아래로 휘고(곡선은 $1 - x^4/45$와 같다), x가 클 때는 감소하는 지수함수이므로 위로 휜다. 따라서 그 사이에 변곡점(point of inflection)이 적어도 하나 있어야 한다. 수치적으로 계산하면 변곡점은 하나이고, $x \approx 2.85$ 근처에 있으며 이때 $f \approx 0.68$이다. 몇 가지 값은 다음과 같다. $f(1) \approx 0.983$, $f(2) \approx 0.858$, $f(4) \approx 0.441$, $f(6) \approx 0.174$.



검산

- $x = 1$에서: $1 - \tanh 1 \approx 0.238$, $\sinh 1 - 2\cosh 1 + 2 \approx 0.089$, $2\cosh 2 - 3\sinh 2 + 4 \approx 0.643$으로 모두 양수이다.

- 항등식 $\mathrm{f}'/\mathrm{f} = -k(x)/(6x\sinh x\cosh x)$는 아무 점에서나 확인해 볼 수 있다. $x = 1$에서 양변은 모두 약 -0.0592이고, f의 수치 미분값도 이와 일치한다.
- 수치적으로 x가 작을 때 $(1-\mathrm{f}(x))/x^4 \approx 0.0222 \approx \frac{1}{45}$이고, x가 클 때 $\mathrm{f}(x)/(2^{2/3}xe^{-2x/3}) \to 1$이다.

흔한 실수

- 도함수가 양수라는 것만 보이고, $x = 0$에서 함수값이 0인지 확인하는 것을 잊는 실수. 두 가지 모두 필요하다.
- 몫의 미분법(quotient rule)과 곱의 미분법(product rule)으로 f를 직접 미분하려는 시도. 이 방법도 되기는 하지만, 로그미분이 훨씬 깔끔하고 (iii)과의 연결을 분명히 보여 준다.
- 곡선이 x축을 가로지르거나 원점에서 출발하도록 그리는 실수. 곡선은 높이 1(이 값에 도달하지는 않는다)에서 출발하고 항상 양수이다.

STEP 너머

$F(0) = 0$과 $F' > 0$으로부터 $F(x) > 0$을 증명하는 기법은 평균값 정리를 실제로 활용하는 예이며, 이 풀이에서 k', h', g'을 거쳐 간 것처럼 이를 연쇄적으로 적용하는 것은 해석학(analysis)에서 함수 사이의 부등식을 증명하는 표준적인 방법이다. 전개식 $\mathrm{f}(x) = 1 - x^4/45 + \cdots$은 거듭제곱급수(power series)를 다루는 맛보기로, 대학 1학년 해석학에서 이를 엄밀한 기초 위에 세운다. 두 가지를 모두 읽어 보기에 좋은 책은 Abbott, *Understanding Analysis*이다.

풀이

STEP II 1988, 문제 7

순수수학 • 치환적분

STEP II 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q7

핵심 아이디어

여기서 나오는 모든 등식은 치환(substitution)으로 얻어지며, 어려운 부분은 알맞은 치환을 찾는 것이다. 첫 단계에서는 $[1,2]$를 $[0,1]$로 보내면서 $2-2x+x^2$를 $1+t^2$가 들어 있는 식으로 바꾸어 주는 치환이 필요하다. 뫼비우스(Möbius) 사상 $x=2/(1+t)$가 바로 그 역할을 한다. 일단 $1+t^2$가 나타나면 $t=\tan\theta$로 놓는 것이 자연스러운 다음 수순이다. θ에 대한 피적분함수(integrand)는 $\theta=\frac{1}{8}\pi$에 대하여 대칭(symmetric)이고, 구간의 절반에서 $t=\tan\theta$를 되돌리면 $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$이 등장한다. 마지막 결론은 같은 치환들을 거꾸로 사용하여 얻는다.

풀이

이 풀이 전체에서 k는 임의의 실수 상수이다. 거듭제곱의 밑은 해당 구간에서 모두 양수이므로, 정수가 아닌 지수도 아무 문제를 일으키지 않는다.

$[1,2]$에서 $[0,1]$로

$x=\dfrac{2}{1+t}$로 놓으면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=0$이고, $\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$이다. 그러면

$$2-2x+x^2=\frac{2(1+t)^2-4(1+t)+4}{(1+t)^2}=\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2},\qquad x^{k+1}=\frac{2^{k+1}}{(1+t)^{k+1}}.$$

따라서 피적분함수는

$$\frac{2^k(1+t^2)^k}{(1+t)^{2k}}\cdot\frac{(1+t)^{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}=\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}},$$

이 되고, $\mathrm{d}x$의 음의 부호가 적분 구간을 $\int_1^0$에서 $\int_0^1$로 뒤바꾼다.

$$I = \int_0^1 \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t.$$

삼각함수 꼴

이제 $t = \tan\theta$로 놓고, θ는 0부터 $\frac{1}{4}\pi$까지 움직인다. 그러면 $1+t^2 = \sec^2\theta$, $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고,

$$1 + t = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)}{\cos\theta},$$

이다. 여기서 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi\cos\theta + \sin\frac{1}{4}\pi\sin\theta\right)$를 이용하였다. 피적분함수는

$$\sec^{2k}\theta \cdot \frac{\cos^{k+1}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}} \cdot \sec^2\theta = \frac{\cos^{-(k+1)}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}} = \frac{1}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}},$$

이 된다. $\cos\theta$의 지수를 모두 더하면 $-2k + (k+1) - 2 = -(k+1)$이기 때문이다. 두 코사인은 $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 모두 양수이므로, 이 식은 모든 실수 k에 대하여 성립한다. 이로써 I의 두 번째 꼴을 얻는다.

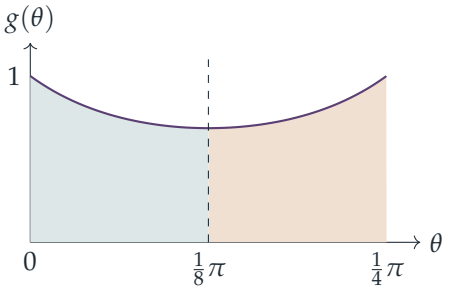
? 생각해 보기 왜 $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서의 적분이 $[0, \frac{1}{8}\pi]$에서의 적분의 두 배가 되어야 할까?

θ에 대한 피적분함수를 $g(\theta)$라 하자. θ를 $\frac{1}{4}\pi - \theta$로 바꾸면 두 인수 $\cos\theta$와 $\cos(\frac{1}{4}\pi - \theta)$가 서로 자리를 바꿀 뿐이므로 $g(\frac{1}{4}\pi - \theta) = g(\theta)$이다. 즉 g의 그래프는 $\theta = \frac{1}{8}\pi$에 대하여 대칭이다. (이는 직접 확인할 수도 있다. $\sqrt{2}\cos\theta\cos(\frac{1}{4}\pi - \theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\cos(2\theta - \frac{1}{4}\pi)\right)$이고, 이 값은 θ와 $\frac{1}{8}\pi$ 사이의 거리에만 의존한다.) 엄밀하게는 $\phi = \frac{1}{4}\pi - \theta$로 치환하면

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/8} g(\tfrac{1}{4}\pi - \phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/8} g(\phi)\,\mathrm{d}\phi,$$

이므로 $[0, \frac{1}{4}\pi]$의 두 절반이 같은 값을 기여하고,

$$I = 2\int_0^{\pi/8} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}}.$$



그림은 $k = 1$일 때의 g를 나타낸다. 색칠한 두 절반은 서로 거울상이다.

따라서 $\sqrt{2}-1$까지의 적분

이제 $[0, \frac{1}{8}\pi]$에서 치환 $t = \tan\theta$를 거꾸로 적용한다. 위 계산의 모든 단계는 그대로이고, 위끝만 $t = \tan\frac{1}{8}\pi$로 바뀐다. $\tau = \tan\frac{1}{8}\pi$라 하면 $\tan\frac{1}{4}\pi = \dfrac{2\tau}{1-\tau^2} = 1$로부터 $\tau^2 + 2\tau - 1 = 0$을 얻으므로 $\tau = -1 \pm \sqrt{2}$이고, 양의 근을 택하면 $\tan\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2}-1$이다. 따라서

$$I = 2\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. 이를 같은 피적분함수에 대한 $I = \int_0^1$과 비교하면, $[0, \sqrt{2}-1]$에서의 적분과 $[\sqrt{2}-1, 1]$에서의 적분이 둘 다 $\frac{1}{2}I$와 같다는 사실을 알게 된다. 이것이 다음 단계에서 쓰는 사실이다.

결론 이끌어 내기

좌변. $u = x^2$이라 하면 $\dfrac{2-2x^2+x^4}{x^2} = \dfrac{2-2u+u^2}{u}$로 쓸 수 있다. 그러면 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{2u}$이고, u는 1부터 2까지 움직인다.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2-2x^2+x^4}{x^2}\right)^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(2-2u+u^2)^k}{u^k}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}I.$$

우변. 피적분함수는 $\dfrac{(2-2x+x^2)^k}{x^{k+1}}$로 I의 정의에 있는 것과 같지만, 구간이 $[1, \sqrt{2}]$이다. 첫 번째 치환 $x = 2/(1+t)$를 다시 사용한다. 이번에는 $x = \sqrt{2}$가 $1+t = \sqrt{2}$, 즉 $t = \sqrt{2}-1$에 대응하므로

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2-2x+x^2}{x}\right)^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= I - \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t = I - \tfrac{1}{2}I = \tfrac{1}{2}I.\end{aligned}$$

양변이 모두 $\frac{1}{2}I$와 같으므로 두 값은 서로 같고, 이것이 증명하려던 결과이다.

검산

- $k = 0$: $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$이고, 마지막 항등식의 양변은 모두 $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- $k = 1$: $I = \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)\mathrm{d}x = 2 - 2\ln 2 \approx 0.61371$이다. I의 다섯 가지 꼴 모두와 마지막 항등식의 양변에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열 자리까지 일치한다(각 변은 ≈ 0.30685이다). $k = 0.5$, $k = -0.7$, $k = 4.3$처럼 정수가 아니거나 음수인 k에 대해서도 마찬가지로 일치한다.

흔한 실수

- $\cos\theta + \sin\theta$를 하나의 코사인으로 나타낼 때 인수 $\sqrt{2}$를 빠뜨려서, 엉뚱한 $2^{(k+1)/2}$가 남는 실수.
- I의 값을 직접 계산하려 드는 것. 일반적인 k에 대해서는 닫힌 형태(closed form)가 없으며, 그럴 필요도 없다. 모든 단계는 변수변환(change of variable)이거나 대칭성이다.
- 결론을 이끌어 낼 때, 우변이 I의 **일부**일 뿐이어서 마무리하려면 "따라서(hence)" 부분의 결과가 필요하다는 점을 놓치는 것.

STEP 너머

사상 $x \mapsto 2/(1+t)$는 뫼비우스 변환(분수 선형 변환, fractional linear transformation)이다. 이러한 사상은 원과 직선을 원과 직선으로 보내며, 이차식으로 이루어진 피적분함수에 대한 자연스러운 변수변환이다. 여기서 $\theta \mapsto \frac{1}{4}\pi - \theta$의 경우처럼 피적분함수에 숨어 있는 대칭성을 알아차리는 것은, 초등함수인 원시함수(antiderivative)가 없는 정적분(definite integral)을 계산할 때 쓰는 표준적인 기법이다. 뫼비우스 변환에 대해 더 알고 싶다면 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보라. 이런 유형의 적분을 훨씬 더 많이 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 고급 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP II 1988, 문제 8

순수수학 • 행렬과 고유벡터

STEP II 1988, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q8

핵심 아이디어

모형의 한 해는 선형사상(linear map)이므로 2×2 행렬 M을 곱하는 것과 같다. 비율이 결코 변하지 않는 개체군은 M이 크기만 바꾸는 벡터, 곧 **고유벡터**(*eigenvector*)이다. 두 고유벡터를 구하고 나면 어떤 초기 개체군이든 각 고유벡터 방향의 성분으로 나눌 수 있고, 각 성분은 해마다 자기 고윳값(eigenvalue)이 곱해질 뿐이다. 따라서 장기적인 운명은 어느 고윳값이 더 큰지, 그리고 그 앞에 붙은 계수의 부호가 무엇인지에 따라 정해진다.

풀이

변하지 않는 비율

개체 수를 열벡터로 쓰면 모형의 한 해는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

비율 $A : B$가 변하지 않는 것은 어떤 수 λ에 대하여 $(A', B') = \lambda(A, B)$일 때, 즉 (A, B)가 M의 고유벡터일 때와 정확히 같다. 고윳값은 다음을 만족한다.

$$\det(M - \lambda I) = \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right)\left(\tfrac{3}{2} - \lambda\right) + \tfrac{3}{8} = \lambda^2 - \tfrac{7}{4}\lambda + \tfrac{3}{4} = 0,$$

따라서 $4\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)(4\lambda - 3) = 0$이고, $\lambda = 1$ 또는 $\lambda = \frac{3}{4}$이다.

- $\lambda = 1$: 첫째 행에서 $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = A$이므로 $A = B$이다. 비율은 1이고, 이러한 개체군은 해마다 정확히 그대로 유지된다.
- $\lambda = \frac{3}{4}$: 첫째 행에서 $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = \frac{3}{4}A$이므로 $A = \frac{3}{2}B$이다. 비율은 $\frac{3}{2}$이다. 둘째 행을 확인하면 $\frac{3}{2}B - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}B = \frac{3}{4}B$이다. 두 종 모두 해마다 $\frac{3}{4}$배로 줄어든다.

행렬 없이 같은 것을 보일 수도 있다. $A = rB$이면 새로운 비율은 $\dfrac{\frac{1}{4}r + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}r}$이고, 이것을 r과 같다고 놓으면 $2r^2 - 5r + 3 = 0$이므로 $r = 1$ 또는 $r = \frac{3}{2}$이다. 어느 방법으로든, 비율이 고정될 수 있는 것은 그 비율이 1 또는 $\frac{3}{2}$일 때뿐이며, 이것이 보이려던 것이다. $x = 1, y = \frac{3}{2}$로 둔다.

이후의 해

다음과 같이 쓰자.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

성분을 비교하면 $p + \frac{3}{2}q = a$, $p + q = b$이다. 두 식을 빼면 $\frac{1}{2}q = a - b$이므로

$$q = 2(a - b), \qquad p = b - q = 3b - 2a.$$

M이 선형이므로 한 해가 지나면 첫째 성분에는 1이, 둘째 성분에는 $\frac{3}{4}$가 곱해진다. 따라서 n년 뒤에는 (모형이 여전히 적용되는 한) 다음을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = (3b - 2a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2(a - b)\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

즉,

$$a_n = (3b - 2a) + 3(a - b)\left(\frac{3}{4}\right)^n,$$
$$b_n = (3b - 2a) + 2(a - b)\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

$(\frac{3}{4})^n \to 0$이므로 개체 수는 평형선 $a = b$ 위의 점 $(3b - 2a,\ 3b - 2a)$로 다가간다.

분류하기 전에 안심할 점이 하나 있다. 땅돼지는 결코 문제를 일으키지 않는다. $a_n \geq 0$이고 $b_n > 0$이면 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n > 0$이므로, 물소가 살아 있는 동안에는 땅돼지의 수도 양수로 유지된다. 따라서 살펴볼 것은 b_n의 부호뿐이며, 평면에서 $a \geq 0, b > 0$인 영역만 다루면 된다.

> **생각해 보기** b_n이 한동안 0 아래로 내려갔다가 다시 양의 극한을 향해 회복될 수 있을까?

그럴 수 없다. b_n의 식에서 n에 의존하는 것은 $(\frac{3}{4})^n$뿐이고, 이것은 1에서 0으로 꾸준히 감소한다. 따라서 b_n은 $b_0 = b$에서 극한 $3b - 2a$를 향해 단조롭게 움직이고, 모든 b_n은 b와 $3b - 2a$ 사이에 있다. 덕분에 분류가 깔끔해진다.

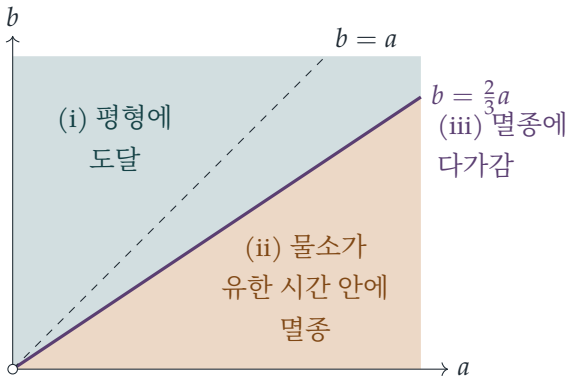
세 영역

(i) $3b - 2a > 0$, 즉 $b > \frac{2}{3}a$이면 b와 $3b - 2a$가 모두 양수이므로 모든 b_n이 양수이고 모형은 영원히 적용된다. 개체군은 영이 아닌 평형(equilibrium) $(3b - 2a,\ 3b - 2a)$로 수

렴한다. 이것은 직선 $b = \frac{2}{3}a$ 위쪽 영역이다(b축 $a = 0$ 포함).

(ii) $3b - 2a < 0$, 즉 $b < \frac{2}{3}a$이면 $a > \frac{3}{2}b > b$이므로 $a - b > 0$이고, b_n은 음수 $3b - 2a$를 향해 순감소한다. 따라서 어떤 유한한 n에서 $b_n \leq 0$이 된다. 즉 물소는 유한한 시간 안에 멸종한다. 이것은 직선 $b = \frac{2}{3}a$와 a축 사이의 영역이다.

(iii) $3b - 2a = 0$, 즉 $a > 0$이고 $b = \frac{2}{3}a$이면 $p = 0$이고 개체군은 순전히 $(\frac{3}{2}, 1)$의 상수배이다. $b_n = b\,(\frac{3}{4})^n$은 모든 n에 대하여 양수이지만 0으로 수렴한다. 물소(와 땅돼지)는 멸종에 다가가지만 결코 멸종에 이르지는 않는다. 이것은 반직선 $b = \frac{2}{3}a$, $a > 0$뿐이다.



점선 $b = a$는 이미 평형 상태에 있는 개체군들로 이루어져 있다. 영역 (i)의 모든 출발점은 직선 $b = \frac{2}{3}a$와 평행하게 미끄러지며 이 점선으로 다가간다($(\frac{3}{2}, 1)$ 방향 성분은 줄어들어 사라지고 $(1, 1)$ 성분은 고정되어 있기 때문이다).

검산

- $n = 0$이면 식에서 $a_0 = 3b - 2a + 3a - 3b = a$, $b_0 = 3b - 2a + 2a - 2b = b$이며, 당연히 그래야 한다.
- 영역 (i)에 있는 $(a, b) = (1, 3)$에서 출발하자. 모형의 한 해를 적용하면 $(\frac{1}{4} + \frac{9}{4},\ \frac{9}{2} - \frac{1}{2}) = (\frac{5}{2}, 4)$이고, 식으로 구하면 $7 - 6(\frac{3}{4}) = \frac{5}{2}, 7 - 4(\frac{3}{4}) = 4$이다. 극한은 $(7, 7)$이다.
- 컴퓨터로 3000개의 무작위 출발점에서 모형을 (분수를 써서) 정확히 반복 계산하여 40년 동안 닫힌 형태의 식이 맞음을 확인했고, 모든 경우에 $3b - 2a$의 부호가 결과를 올바르게 예측함을 확인했다. 여기에는 $b = \frac{2}{3}a$ 위의 점들도 포함되는데, 예를 들어 $(3, 2)$는 5년 뒤 $(\frac{729}{1024}, \frac{243}{512})$가 되어 출발점의 $(\frac{3}{4})^5$배가 된다.

흔한 실수

- 비율을 거꾸로 구하는 것: 문제는 땅돼지 대 물소의 비율을 묻고 있으므로 답은 1과 $\frac{2}{3}$이 아니라 1과 $\frac{3}{2}$이다.
- $b_n \leq 0$이 되면 모형이 멈춘다는 것을 잊고, 음수 "극한"을 갖는 경우까지 포함하여 모든 개체군이 $(3b - 2a, 3b - 2a)$로 수렴한다고 주장하는 것.
- 영역 (iii)을 넓이가 있는 영역으로 설명하는 것: 이것은 (i)과 (ii)의 경계인 반직선 $b = \frac{2}{3}a$일 뿐이다.

STEP 너머

이것은 이산 선형 동역학계(discrete linear dynamical system)이며, 여기서 쓴 방법(대각화(diagonalise)한 다음 각 고윳값을 n제곱하기)은 대학 1학년 선형대수학에서 M^n을 계산하는 방법과 정확히 같다. 고윳값 1은 고정점(fixed point)들로 이루어진 직선을 주고, 고윳값 $\frac{3}{4} < 1$은 감쇠하는 방향을 준다. 시간을 연속으로 바꾸고 λ^n 대신 $e^{\lambda t}$를 쓰면, 같은 그림이 선형 미분방정식(differential equation) 연립계를 지배한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에는 차분방정식(difference equation)과 행렬의 거듭제곱에 관한 좋은 장이 있고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)는 연속 버전을 다룬다.

풀이

STEP II 1988, 문제 9

순수수학 • 부분군과 합집합

STEP II 1988, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q9

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.6 절 **부분군의 합집합**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/subgroup-unions.html

핵심 아이디어

귀류법(proof by contradiction)으로 논증한다. 두 부분군(subgroup) 중 어느 것도 군(group) 전체가 아니라면, G_2에만 속하는 원소 하나와 G_1에만 속하는 원소 하나를 고른 뒤, 그 곱(product)이 어디에 속하는지 묻는다. 곱셈에 대한 닫힘성(closure)과 역원(inverse)의 존재를 이용하면, 곱을 어느 부분군에 넣든 모순이 생긴다. 부분군이 세 개라면 곱이 갈 수 있는 다른 곳이 생긴다. 시도해 볼 만한 자연스러운 군은 모든 원소가 자기 자신의 역원인 군이다.

풀이

부분군이 두 개인 경우

G의 모든 원소가 G_1 또는 G_2에 속한다고 하고, 모순을 이끌어 내기 위해 $G_1 \neq G$이고 $G_2 \neq G$라고 가정하자.

$G_1 \neq G$이고 $G_1 \subseteq G$이므로, $a \notin G_1$인 원소 $a \in G$가 존재한다. 모든 원소는 G_1 또는 G_2에 속하므로 $a \in G_2$이다.

같은 방법으로, $G_2 \neq G$이므로 $b \notin G_2$인 원소 $b \in G$가 존재하고, 따라서 $b \in G_1$이다.

그러므로 다음을 얻는다.

$$a \in G_2, \quad a \notin G_1, \qquad\qquad b \in G_1, \quad b \notin G_2.$$

이제 곱 $ab \in G$를 살펴보자. 가정에 의해 이 곱은 G_1 또는 G_2에 속한다.

- $ab \in G_1$인 경우: $b \in G_1$이고 G_1은 부분군이므로 $b^{-1} \in G_1$이고, 따라서 닫힘성에 의해

$$a = (ab)\, b^{-1} \in G_1,$$

  이 되어 $a \notin G_1$에 모순이다.

- $ab \in G_2$인 경우: $a \in G_2$이므로 $a^{-1} \in G_2$이기도 하고, 따라서

$$b = a^{-1}(ab) \in G_2,$$

  이 되어 $b \notin G_2$에 모순이다.

두 경우 모두 불가능하므로 가정이 틀렸다. 즉 $G_1 = G$ 또는 $G_2 = G$이다. ■

? 생각해 보기 G가 유한하다는 사실은 어디에서 사용했는가?

사용하지 않았다. 이 논증은 부분군의 성질(닫힘성과 역원)만 사용하므로, 유한이든 무한이든 모든 군에서 성립한다. 같은 말로, 군은 결코 두 진부분군(proper subgroup)의 합집합(union)이 될 수 없다.

부분군이 세 개인 경우

H를 클라인 4원군(Klein four-group)

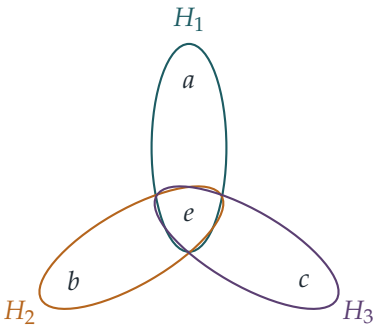
$$H = \{e,\ a,\ b,\ c\}, \qquad a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad ab = ba = c,\ bc = cb = a,\ ca = ac = b.$$

으로 잡자. 구체적으로 H는 각 좌표마다 2를 법으로 하는 덧셈에 대한 $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$이며, 정사각형이 아닌 직사각형의 대칭군(항등변환, 두 개의 반사, 반바퀴 회전)이기도 하다.

항등원(identity)이 아닌 모든 원소의 위수(order)가 2이므로,

$$H_1 = \{e, a\}, \qquad H_2 = \{e, b\}, \qquad H_3 = \{e, c\}$$

는 각각 부분군이다. 각각은 e를 포함하고, 곱셈에 대해 닫혀 있으며(자명하지 않은 곱은 $a \cdot a = e$뿐이고, b와 c도 마찬가지이다), 각 원소가 자기 자신의 역원이다. 각각의 원소는 2개이므로 어느 것도 H가 아니다. 그러나 이들을 모두 합치면 e, a, b, c를 포함하고, 이는 H의 모든 원소이다.



따라서 세 개의 진부분군으로 군을 덮을 수 있다. 또 다른 예로 사원수군(quaternion group) $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$이 있는데, 이 군은 위수가 각각 4인 세 순환 부분군 $\{\pm 1, \pm i\}$, $\{\pm 1, \pm j\}$, $\{\pm 1, \pm k\}$의 합집합이다.

앞의 논증이 여기서 왜 무너지는지 주목하자. $a \notin H_2$이고 $b \notin H_1$일 때, 곱 $ab = c$는 세 번째 부분군 H_3으로 자유롭게 빠져나갈 수 있다.

검산

- 위수가 1부터 12까지인 순환군(cyclic group), S_3, S_4, 위수가 8인 이면체군(dihedral group), Q_8, $\mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^3$의 모든 부분군을 전수 탐색한 결과(진부분군의 순서쌍 1278개), 합집합이 군 전체가 되는 쌍은 하나도 없었다.
- 같은 탐색으로 $\{e, a\} \cup \{e, b\} \cup \{e, ab\}$가 클라인 4원군 전체이고, Q_8이 $\langle i \rangle$, $\langle j \rangle$, $\langle k \rangle$의 합집합임을 확인했다. 흥미롭게도 조사한 순환군 중 어느 것도, 그리고 S_3이나 S_4도, 세 진부분군의 합집합이 아니었다.
- 첫 번째 부분에 대한 간단한 확인: 순환군에서 생성원(generator)은 어떤 진부분군에도 속하지 않으므로, 순환군은 진부분군을 몇 개를 써도 덮을 수 없다.

흔한 실수

- 개수 세기로 논증하기: 두 진부분군은 각각 원소가 많아야 $\frac{1}{2}|G|$개이지만 e를 공유하므로, 합집합의 원소는 많아야 $|G| - 1$개이다. 이 개수 세기 증명은 (라그랑주(Lagrange) 정리에 의해) 옳고 짧지만, 유한성과 라그랑주 정리가 반드시 필요하다. 둘 다 명시해야 한다.
- $a \notin G_1$과 $b \notin G_2$를 골라 놓고 $a \in G_2$와 $b \in G_1$을 사용하는 것을 잊는 것. 이 두 사실이 없으면 모순이 나오지 않는다.
- 세 부분군을 제시하면서 모두 진부분군이 아니거나, 아예 부분군이 아닌 것을 제시하는

것(예를 들어 $\{e, a, b\}$는 $ab = c$이므로 닫혀 있지 않다).

STEP 너머

어떤 군이 세 진부분군의 합집합일까? Scorza의 정리(1926)가 답을 준다. 정확히 클라인 4원군과 동형(isomorphic)인 몫군(quotient group)을 갖는 군이며, 이 때문에 클라인 군이 기본적인 예가 된다. 같은 "두 개의 합집합은 불가능" 이라는 사실은 선형대수학(linear algebra)에서도 나타나는데, 무한체(infinite field) 위의 벡터공간(vector space)은 결코 유한 개의 진부분공간(proper subspace)의 합집합이 될 수 없다. 군론 입문서로는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보자.

풀이

STEP II 1988, 문제 10

순수수학 • 포물면의 벡터 기하

> **STEP II 1988, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q10

핵심 아이디어

이 방정식은 기하학적 의미가 분명한 두 부분으로 이루어져 있다. r는 O로부터의 거리이고, $(a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/a$는 평면 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$로부터의 부호 있는 거리(signed distance)이다. 따라서 S는 O를 초점(focus)으로, 그 평면을 준선(directrix)으로 하는 회전포물면(paraboloid of revolution)이다. 나머지는 O를 지나는 직선을 따라 계산하면 된다. 직선 OP 위의 점을 $\lambda\mathbf{p}$로 쓰고, O를 지나며 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{p}$에 수직인 직선 위의 점을 $\mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$로 쓴다. 그런 다음 이를 S의 방정식에 대입한다. $|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda|p$이므로 λ의 부호가 중요하다.

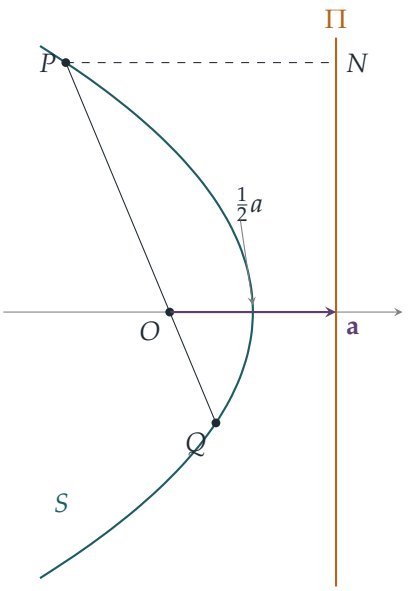
풀이

자취

Π를 평면 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$라 하자. 이 평면의 단위 법선벡터(unit normal)는 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$이고, 이 평면은 O로부터 $\mathbf{a}$ 쪽으로 거리 a만큼 떨어져 있다. 점 $\mathbf{r}$에서 Π까지의 수직 거리는

$$d(\mathbf{r}) = |\,a - \hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r}\,| = \frac{|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|}{a}.$$

이다.



그림은 $\mathbf{a}$를 포함하는 평면으로 자른 S의 단면을 보여 준다. 점 P는 O와, Π 위로 내린 수선의 발 N으로부터 같은 거리에 있다. 이 곡면은 O와 Π의 한가운데인 $\frac{1}{2}\mathbf{a}$에서 축과 만난다.

S 위의 점은 두 거리가 같다. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + ar = a^2$이면 $a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = ar \geq 0$이다. 따라서

$$d(\mathbf{r}) = \frac{a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{a} = \frac{ar}{a} = r = |OR|.$$

이다.

두 거리가 같은 점은 S 위에 있다. $r = d(\mathbf{r})$, 즉 $ar = |a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|$라고 하자. $a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} \geq 0$이면 이것은 바로 S의 방정식이다. 그렇지 않으면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} > a^2$이고, 조건은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = ar + a^2 > ar$를 뜻한다. 이는 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} \leq ar$(코시–슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식)에 모순이다. 따라서 Π 너머에 있는 점 중에는 두 거리가 같은 점이 없고, S는 정확히 O와 Π로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합이다. 이것은 O를 지나고 $\mathbf{a}$ 방향인 직선을 축으로 하는 회전포물면이다.

나중에 유용하게 쓰일 두 가지 결과가 있다. S 위의 점 P에 대하여

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} = a^2 - ap. \qquad (*)$$

이다. 또한 $a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap \leq 2ap$이므로 $p \geq \frac{1}{2}a$이고, 따라서 $2p - a \geq 0$이다. 등호는 $\mathbf{p}$가 $\mathbf{a}$의 양수배일 때, 즉 P가 꼭짓점(vertex) $\frac{1}{2}\mathbf{a}$일 때만 성립한다.

두 번째 교점 Q

직선 OP 위의 점은 $\lambda\mathbf{p}$이고, $|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda|p$이다. 이를 S의 방정식에 대입하면

$$\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + a|\lambda|p = a^2.$$

이다.

생각해 보기 왜 Q는 O에 대하여 P와 같은 쪽에 있을 수 없을까?

$\lambda > 0$이면 좌변은 $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap) = \lambda a^2$이므로 $\lambda = 1$이고, 이는 P 자신이다. (기하학적으로, 초점에서 나가는 반직선은 포물면과 많아야 한 번 만난다.) 따라서 Q에서는 $\lambda < 0$이고, 이 때 $|\lambda| = -\lambda$이다. $(*)$를 이용하면

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} - ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda(a^2 - 2ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = -\frac{a}{2p-a}.$$

이다. $2p > a$이면, 즉 P가 꼭짓점이 아니면, 이 값은 요구한 대로 음수이다. (꼭짓점에서는 직선 OP가 축이 되고, 이 직선은 S와 한 번만 만난다.) 그러므로

$$\boxed{\mathbf{q} = -\frac{a}{2p-a}\,\mathbf{p}} \qquad \text{그리고} \qquad |OQ| = \frac{ap}{2p-a}.$$

이다.

점 T와 T'

O를 지나며 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{p}$에 모두 수직인 직선은 $\mathbf{t} = \mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$이다. ($\mathbf{a}\times\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$이어야 하므로 P는 축 위에 있지 않다.) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{t} = 0$이므로 S의 방정식은 $at = a^2$, 즉 $|\mathbf{t}| = a$가 된다. 따라서 T와 T'은 O를 지나고 Π에 평행한 평면이 S와 만나서 생기는 원 위에 있고,

$$|\mu|\,|\mathbf{a}\times\mathbf{p}| = a.$$

이다.

생각해 보기 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{p}$ 사이의 각을 모르면서 $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|$를 어떻게 구할 수 있을까?

항등식 $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 = a^2p^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})^2$을 이용한다. 이것은 모양을 바꾼 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$이다. 여기에 $(*)$를 대입하면

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 &= a^2p^2 - (a^2 - ap)^2\\ &= a^2p^2 - a^4 + 2a^3p - a^2p^2\\ &= a^3(2p-a).\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$|\mu| = \frac{a}{a^{3/2}\sqrt{2p-a}} = \frac{1}{\sqrt{a(2p-a)}} = \frac{1}{\sqrt{2ap-a^2}},$$

이고, T와 T'의 위치벡터(position vector)는 요구한 대로 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2ap-a^2}}\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$이다.

삼각형 PQT의 넓이

점 P, O, Q는 한 직선 위에 있고, O는 P와 Q 사이에 있다. 벡터 $\mathbf{t}$는 $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$에 평행하므로 $\mathbf{p}$에 수직이고, 따라서 직선 PQ에 수직이다. 그러므로 OT는 삼각형 PQT에서 T로부터 내린 높이(altitude)이고, 그 길이는 a이다. 밑변은

$$|PQ| = p + \frac{ap}{2p-a} = \frac{p(2p-a)+ap}{2p-a} = \frac{2p^2}{2p-a}.$$

이다. 그러므로

$$\text{넓이} = \tfrac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot |OT| = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2p^2}{2p-a} \cdot a = \frac{ap^2}{2p-a},$$

로 요구한 결과를 얻는다. T 대신 T'을 써도 같은 결과가 성립한다.

검산

- $\mathbf{a} = (2,0,0)$과 그림의 점인 $P = (-1.25,3,0)$을 잡자. 그러면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap = -2.5 + 2(3.25) = 4 = a^2$이므로 P는 S 위에 있다. 공식에 따르면 $\mathbf{q} = -\frac{2}{4.5}\mathbf{p} = (0.556, -1.333, 0)$이고, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + aq = 1.111 + 2.889 = 4$이므로 Q도 S 위에 있다.
- P를 통경(latus rectum)의 한 끝점으로 잡으면 $\mathbf{p} \perp \mathbf{a}$이고 $p = a$이다. 그러면 $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$이고, 이는 대칭성으로 보아 옳다. 넓이는 $\frac{1}{2}(2a)(a) = a^2$이고, 공식도 $a \cdot a^2/a = a^2$을 준다.
- 두 초점 거리는 $\dfrac{1}{OP} + \dfrac{1}{OQ} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2p-a}{ap} = \dfrac{2}{a}$를 만족한다. 이는 포물선의 고전적인 초점현(focal chord) 성질이다.
- 수치적으로, $\mathbf{a}$와 P를 무작위로 20 000번 골라 Q, T, T'과 넓이를 확인하였다. 가장 큰 오차는 약 10^{-11}이었다.

흔한 실수

- 모든 λ에 대하여 $|\lambda\mathbf{p}| = \lambda p$라고 쓰는 것. 그러면 유일한 해가 $\lambda = 1$이 되어 Q를 찾을 수 없다.
- 첫 부분에서 역을 잊는 것. Π 너머의 점은 $|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} - a^2$이므로, 이런 점들을 배제해야 한다.
- $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{PT}$의 외적(cross product)으로 넓이를 계산하는 것. 이 방법도 되지만, $OT \perp PQ$임을 알아차리는 것보다 훨씬 긴 길이다.

STEP 너머

이것은 원뿔곡선(conic)의 초점–준선 정의를 좌표 없이 3차원에서 나타낸 것이다. 이심률(eccentricity)을 e라 하면, 곡면 $e\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}+ar=e\,a^2$($O$로부터의 거리가 Π로부터의 거리의 e배)은 O를 초점으로 하는 다른 회전 이차곡면(quadric of revolution)들을 준다. 관계식 $1/OP+1/OQ=2/a$는 궤도역학(orbital mechanics)의 핵심인 극방정식(polar equation) $\ell/r=1+e\cos\theta$의 벡터 형태이다. 벡터 대수를 더 공부하려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 다음 단계이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이런 형식의 문제가 더 있다.

풀이

STEP II 1988, 문제 11

역학 • 기둥에 감기는 줄

> **STEP II 1988, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q11

핵심 아이디어

줄의 자유로운 부분은 언제나 기둥에서 **접선**(*tangent*)을 따라 뻗어 나간다. 따라서 입자의 위치는 "접점 더하기 길이가 (풀린 줄의 길이)인 접선 벡터"이고, 이것은 각 θ로 쉽게 나타낼 수 있다. 이를 미분하면 두 항이 상쇄되어, 속도가 줄에 수직임을 알 수 있다. 따라서 장력(tension)은 일을 하지 않고, 속력은 처음 값을 그대로 유지하며, 속력 공식은 θ에 대한 변수분리형 미분방정식(separable differential equation)이 된다.

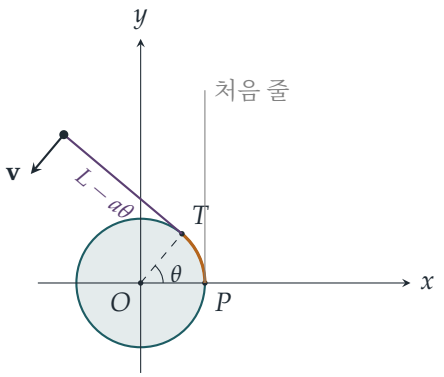
풀이

설정하기

입자를 매끄러운 탁자 위의 질점으로 모형화하고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며 팽팽한 상태를 유지한다고 하자. 중력과 수직항력은 연직 방향이고 서로 상쇄되므로, 수평 방향의 힘은 장력뿐이다.

원점이 O인 좌표축을 잡고 P를 $(a, 0)$에 놓는다. 줄은 처음에 OP에 수직이므로 P에서 기둥에 접하고, 입자는 (a, L)에서 출발한다고 하자. (대칭인 반대쪽을 택하면 y좌표의 부호만 바뀐다.) 줄이 시계 반대 방향으로 감기면서 각 θ만큼 감기고 나면, 길이 $a\theta$가 P에서부터 호를 따라 놓이고, 줄은 다음 점에서 기둥을 떠난다.

$$T = a(\cos\theta,\ \sin\theta).$$



길이가 $L-a\theta$인 줄의 자유로운 부분은 T에서의 접선을 따라 놓인다. 줄이 풀리는 쪽을 가리키는 단위 접선벡터는 $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$이다. 이 벡터는 OT에 수직이고, $\theta=0$일 때 $(0,1)$이므로 출발 위치와 맞아떨어진다.

위치와 속도

따라서 입자의 위치벡터(position vector)는 다음과 같다.

$$\mathbf{r}=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+(L-a\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\theta-(L-a\theta)\sin\theta\\ a\sin\theta+(L-a\theta)\cos\theta\end{pmatrix}.$$

연쇄 법칙(chain rule)과 곱의 미분법(product rule)을 써서 t에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}&=a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}-a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}+(L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\\&=-(L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

처음 두 항은 상쇄된다. 접점이 기둥을 따라 움직이는 효과가 자유로운 줄이 짧아지는 효과에 의해 정확히 상쇄되는 것이다.

$(\cos\theta,\sin\theta)$는 단위벡터이고, $L-a\theta>0$이며, 줄이 감기는 동안 $\dot\theta>0$이므로 속력은

$$|\dot{\mathbf{r}}|=(L-a\theta)\dot\theta,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

기둥에 닿을 때까지 걸리는 시간

? **생각해 보기** 줄이 입자를 당기고 있는데, 왜 속력이 v로 유지되어야 할까?

속도는 $(\cos\theta, \sin\theta)$에 평행하고, 줄은, 따라서 장력은 $(-\sin\theta, \cos\theta)$ 방향으로 놓인다. 두 방향은 수직이므로 장력은 일을 하지 않는다. 탁자가 매끄러우므로 수평 방향의 힘은 장력뿐이다. 따라서 운동 에너지와 함께 속력도 v로 일정하게 유지된다. 장력은 속도의 방향만 바꿀 뿐이다.

그러므로 입자가 기둥에 닿을 때까지 모든 t에 대하여

$$(L - a\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \theta(0) = 0.$$

변수를 분리하여 0부터 t까지 적분하면

$$L\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = vt.$$

입자는 줄 전체가 감겼을 때, 즉 $a\theta = L$일 때 기둥에 닿으므로 $\theta = L/a$이다. 이때

$$vt = \frac{L^2}{a} - \frac{L^2}{2a} = \frac{L^2}{2a}, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{L^2}{2av},$$

이고, 이것이 구하려던 시간이다.

검산

- $\theta = 0$일 때 공식은 $\mathbf{r} = (a, L)$과 $\dot{\mathbf{r}} = (-L\dot{\theta}, 0)$을 주는데, 이는 마땅히 그래야 하듯 처음 줄에 수직이다.
- 단위: $L^2/(av)$의 단위는 $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{m\,s^{-1}}) = \mathrm{s}$이다.
- 답을 보는 또 다른 방법: 입자가 지나는 경로 전체의 길이는

  $$\int_0^{L/a} (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{L^2}{2a},$$

  이고, 이를 일정한 속력 v로 이동한다.
- $a = 1$, $L = 3$, $v = 2$인 기둥에 매우 뻣뻣한 줄이 감기는 상황으로 운동을 수치 시뮬레이션해 보았다. 시뮬레이션한 시간은 $L\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 = vt$와 10^{-5} 이내로 일치했고, $\dot{\theta} = v/(L - a\theta)$를 $a\theta = L$까지 적분하면 2.25가 나왔는데, 이는 $L^2/(2av)$와 같다.

흔한 실수

- O에 대한 각운동량 보존(conservation of angular momentum)을 쓰는 것. 장력은 O를 지나지 않으므로(접선을 따라 작용하므로) O에 대한 각운동량은 보존되지 **않는다**. 알맞은 도구는 에너지이다.
- 자유로운 줄을 접선 방향이 아니라 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 방향, 즉 지름 방향으로 쓰는 것.
- 속력 공식에 $\dot{\theta} > 0$이 필요하다는 것을 잊는 것. 벡터의 크기는 $(L - a\theta)|\dot{\theta}|$이다.

STEP 너머

입자가 그리는 경로는 원의 **신개선**(*involute*)으로, 실패에서 풀려 나가는 팽팽한 실의 끝이 그리는 곡선이다. 톱니바퀴의 톱니가 지금과 같은 모양인 이유가 바로 신개선이며, 신개선은 하위헌스(Huygens)의 진자시계 연구에서도 핵심적인 역할을 했다. 그 호의 길이 $\int (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta$는 평면 곡선의 미분기하학(differential geometry; 축폐선, 신개선, 곡률)의 첫 예이다. 에너지와 각운동량이 언제 보존되고 언제 보존되지 않는지를 포함한 역학 쪽 이야기는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP II 1988, 문제 12

역학 • 떨어지는 사슬

STEP II 1988, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

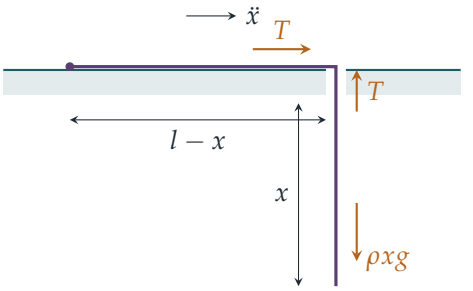
step.maths.org/questions/88-s2-q12

핵심 아이디어

줄은 늘어나지 않으므로(inextensible) 줄의 모든 부분이 같은 속력으로 움직인다. 따라서 줄 전체는 하나의 물체처럼 행동하며, 이 물체를 움직이는 힘은 탁자 아래로 매달린 부분의 무게이다. 구멍을 통과하는 줄이 많아질수록 이 무게가 커지므로, 매달린 길이에 대한 간단한 선형 미분방정식(linear differential equation)을 얻는다. 그 해는 쌍곡코사인(hyperbolic cosine)이며, 구하려는 시간은 이 함수의 역함수를 취하여 얻는다.

풀이

마찰(friction)은 어디에도 없다. 탁자는 매끄럽고, 구멍은 작고 매끄러우며(따라서 구멍은 줄의 방향만 바꿀 뿐 줄을 따라 어떤 힘도 가하지 않는다), 줄의 단위 길이당 질량은 ρ이다. 시각 t에서 탁자 아래로 매달린 길이를 x라 하면, 탁자 위에 놓인 길이는 $l - x$이다. 처음에 $x = l - d$이고 $\dot{x} = 0$이며, 줄의 끝이 구멍 꼭대기에 닿는 것은 $x = l$일 때이다. 탁자의 높이가 l보다 크므로, 그때까지 매달린 부분이 바닥에 닿는 일은 없다.



구멍에서 줄의 장력(tension)을 T라 하자. 구멍이 매끄러우므로 구멍 바로 위와 바로 아래

에서 장력은 같은 값 T를 가진다.

탁자 위의 부분. 이 부분의 질량은 $\rho(l-x)$이고, 가속도 $\ddot{x}$로 구멍을 향해 수평으로 움직인다(줄이 늘어나지 않으므로 매달린 부분과 같은 빠르기로 움직인다). 탁자가 매끄러우므로 이 부분에 작용하는 수평 방향의 힘은 장력 T뿐이다. 따라서

$$\rho(l-x)\,\ddot{x} = T.$$

매달린 부분. 이 부분의 질량은 ρx이고, 아래 방향의 무게 $\rho x g$와 위 방향의 장력 T를 받아 아래쪽으로 가속도 $\ddot{x}$로 움직인다.

$$\rho x\,\ddot{x} = \rho x g - T.$$

두 식을 더하면 T가 소거된다.

$$\rho l\,\ddot{x} = \rho g x, \qquad \text{즉} \qquad \ddot{x} = n^2 x, \quad n = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

> **생각해 보기** 구멍 양쪽에 있는 줄의 양은 계속 변한다. 각 부분에 $F = ma$를 써도 정말 괜찮을까?

괜찮다. 각 식은 한 순간에, 그 순간 구멍의 각 쪽에 있는 특정한 줄 조각에 적용된 것이다. 줄은 하나의 속력 $\dot{x}$로 전체가 함께 움직이므로 줄 전체의 운동량(momentum)의 변화율은 $\rho l\ddot{x}$이고, 운동 방향의 성분을 가지는 외력은 매달린 부분의 무게 $\rho x g$뿐이다. (탁자의 수직 항력은 수평 부분의 무게와 평형을 이루고, 구멍은 줄의 방향을 바꿀 뿐이다.) 따라서 합친 식 $\rho l\ddot{x} = \rho g x$는 줄 전체에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 지나지 않는다. 아래의 에너지 검산이 이를 확인해 준다.

$\ddot{x} = n^2 x$의 일반해는 $x = A\cosh nt + B\sinh nt$이다. $t = 0$에서 $\dot{x} = 0$이므로 $B = 0$이고, $t = 0$에서 $x = l - d$이므로 $A = l - d$이다.

$$x = (l-d)\cosh nt.$$

줄의 끝은 $x = l$일 때 구멍 꼭대기에 닿으므로, 그 시각 t_1은 다음을 만족한다.

$$\cosh nt_1 = \frac{l}{l-d}.$$

$l/(l-d) > 1$이므로 이 식의 양의 해는 정확히 하나이다. $\operatorname{arcosh} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)$를 이용하면

$$\sqrt{u^2-1} = \frac{\sqrt{l^2-(l-d)^2}}{l-d} = \frac{\sqrt{2ld-d^2}}{l-d},$$

이므로 걸리는 시간은 다음과 같다.

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\operatorname{arcosh}\!\left(\frac{l}{l-d}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\ln\left(\frac{l+\sqrt{2ld-d^2}}{l-d}\right).}$$

검산

- **에너지.** 탁자 윗면을 위치에너지(potential energy)의 기준으로 잡자. 매달린 부분의 질량중심(centre of mass)은 깊이 $x/2$에 있으므로 위치에너지는 $-\frac{1}{2}\rho g x^2$이다. 정지 상태에서 시작하는 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 $\frac{1}{2}\rho l\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\rho g\left(x^2 - (l-d)^2\right)$이고, 이를 t에 대해 미분하면 다시 $l\ddot{x} = gx$를 얻는다.
- **작은 d.** d가 아주 작으면 줄의 거의 전부가 매달려 있으므로, 줄은 g에 가까운 가속도로 떨어져 약 $\sqrt{2d/g}$의 시간이 걸려야 한다. 실제로 d가 작을 때 $\cosh nt_1 = 1 + \frac{d}{l} + \cdots$와 $\cosh nt_1 \approx 1 + \frac{1}{2}n^2t_1^2$로부터 $t_1^2 \approx 2d/(n^2l) = 2d/g$를 얻는다.
- **$d \to l$.** 매달린 부분이 거의 없으면 줄은 거의 움직이기 시작하지 못하며, 로그 식에서 알 수 있듯이 $t_1 \to \infty$이다.
- **수치 확인.** $l = 2\,\mathrm{m}$, $d = 1.5\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$일 때 공식은 $t_1 \approx 0.932\,\mathrm{s}$를 주며, 이는 운동을 단계별로 수치 적분한 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 매달린 부분만 놓고 $\rho x\ddot{x} = \rho xg$라고 쓰면서, 이 부분이 탁자 위의 줄을 끌어당겨야 한다는 사실을 잊는 것(같은 말로, 질량을 잘못 쓰는 것: 가속되는 질량은 줄 전체의 질량 ρl이다).
- $x = A\cos nt$ 꼴의 해를 시도하는 것: 방정식은 $\ddot{x} = +n^2x$이므로 운동은 진동하지 않고 지수적으로 커진다.
- 끝나는 조건으로 $x = l$ 대신 $x = d$를 놓는 것: 줄의 끝이 구멍에 닿는 것은 전체 길이 l이 매달렸을 때이다.

STEP 너머

이것은 질량 분포가 변하는 문제이다. 질량 자체는 일정하지만 중력을 받는 부분이 위치에 따라 변하며, 그 결과 해가 지수함수인 선형 방정식이 나온다. 만약 줄이 마찰 없는 탁자 모서리에서 떨어지면서 정지해 있던 줄 더미를 끌어올린다면, 비탄성(inelastic) "충격"으로 운동량이 손실되고 에너지는 보존되지 않는다. 이러한 경우들을 구별하는 것은 대학 역학의 고전적인 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량이 움직이는 계와 사슬 및 밧줄을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 1988, 문제 13

역학 • 마찰과 평형

STEP II 1988, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

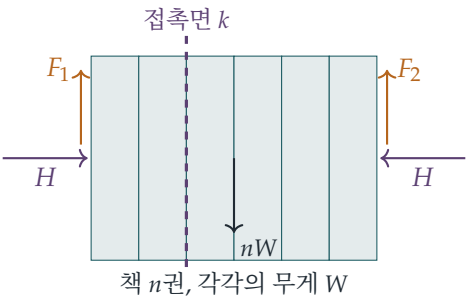
step.maths.org/questions/88-s2-q13

핵심 아이디어

책을 떠받치는 연직 방향의 힘은 모두 마찰력(friction)이고, 각 접촉면에서 마찰력은 그곳의 수직항력(normal reaction)의 μ배를 넘을 수 없다. 따라서 두 가지가 필요하다. 하나는 모든 접촉면에서의 수직항력이고(수평 방향 평형을 쓰면 쉽게 구할 수 있다), 다른 하나는 각 접촉면이 내야 하는 마찰력이다(적절한 책 **묶음**의 연직 방향 평형을 쓴다). 그런 다음 어느 접촉면이 가장 미끄러지기 쉬운지 찾는다. 이웃한 책 몇 권을 하나의 물체로 다루면 계산이 짧아진다.

풀이

모형. 무게가 각각 W인 똑같은 책 n권이 표지를 연직으로 세운 채 놓여 있다고 하자. 두 손은 각각 $H \le Q$인 힘으로 수평으로 누르고, 위쪽으로 마찰력을 낸다. 이 마찰력을 F_1(왼손), F_2(오른손)라 하자. 각 손이 내는 연직 방향의 힘은 정확히 이 마찰력이므로 $F_1, F_2 \le P$이어야 한다. 문제에서 회전 효과는 무시하라고 했으므로, 각 책이나 책 묶음에 대해 힘의 평형만 생각하면 된다.



수직항력. 책에 왼쪽부터 차례로 $1, 2, \ldots, n$의 번호를 붙이고, 책 k와 책 $k+1$ 사이의 접촉면을 접촉면 k라 하자($1 \le k \le n-1$). 책 $1, \ldots, k$로 이루어진 묶음에 작용하는 수평 방향의 힘은 왼손이 누르는 힘 H와 책 $k+1$이 주는 수직항력뿐이다. 따라서 그 수직항력도 H이다. 즉 손과의 접촉이든 책끼리의 접촉이든 **모든** 접촉면에서 수직항력은 H이고, 따라서 모든 접촉면이 낼 수 있는 마찰력의 크기는 최대 μH이다.

두 손. 책 전체에 대해 연직 방향으로

$$F_1 + F_2 = nW.$$

F_1, F_2는 각각 P 이하이고(팔 힘), $\mu H \le \mu Q$ 이하이다(마찰). $L = \min(P, \mu Q)$라 하자. 그러면 $nW = F_1 + F_2 \le 2L$이므로

$$n \le \frac{2L}{W} = \frac{2\min(P, \mu Q)}{W}.$$

이것은 필요조건이다. 이 조건이 성립하면, 가장 좋은 방법은 최대한 세게 누르고($H = Q$; H가 커지면 모든 마찰력의 한계가 올라가기만 한다) 하중을 똑같이 나누는 것이다. 즉 $F_1 = F_2 = \frac{1}{2}nW \le L$로 둔다. 그러면 두 손 모두 한계 안에 있다.

생각해 보기 두 손이 버티고 있더라도, 가운데 어딘가에서 책끼리 미끄러질 수는 없을까?

책 사이의 접촉면. 이것을 직접 확인한다. 책 $1, \ldots, k$로 이루어진 묶음에 연직 방향 평형을 적용하자. 이 묶음의 무게 kW는 손이 주는 $F_1 = \frac{1}{2}nW$와 책 $k+1$이 주는 마찰력 f_k(위쪽을 양의 방향으로 한다)가 떠받친다.

$$f_k = kW - \tfrac{1}{2}nW = \left(k - \tfrac{n}{2}\right) W.$$

$1 \le k \le n-1$이면 $\left|k - \frac{n}{2}\right| \le \frac{n}{2} - 1$이고, 등호는 $k = 1$과 $k = n-1$, 즉 바깥쪽 책 바로 옆의 접촉면에서 성립한다. 따라서 어떤 접촉면에 필요한 마찰력도 최대 $\left(\frac{n}{2} - 1\right)W$이고, 이는 각 손이 내는 $\frac{1}{2}nW$보다 W만큼 작다. 모든 접촉면의 한계는 손과 같은 μQ이므로, 손이 미끄러지지 않으면 어떤 두 책 사이도 미끄러지지 않는다. (물리적으로 보면, 바깥쪽 책은 각각 손이 붙잡고 있고, 그 책이 안쪽으로 전달하는 마찰력은 손의 마찰력에서 자기 무게를 뺀 것이다.)

답. 책 한 줄을 들어 올릴 수 있을 필요충분조건은 $nW \le 2\min(P, \mu Q)$이다. 따라서 책의 최대 권수는

$$\boxed{n_{\max} = \left\lfloor \frac{2\min(P,\, \mu Q)}{W} \right\rfloor}$$

이다. 즉 $2P/W$와 $2\mu Q/W$를 모두 넘지 않는 가장 큰 정수이다. 어느 한계가 적용되는지를 보면 사서를 제약하는 것이 무엇인지 알 수 있다. $P < \mu Q$이면 들어 올리는 팔 힘이, $\mu Q < P$이면 쥐는 힘이 한계이다.

검산

- $W = 10\,\mathrm{N}$, $P = 60\,\mathrm{N}$, $Q = 100\,\mathrm{N}$, $\mu = 0.4$로 두자. 그러면 $\min(60, 40) = 40$이고 $n_{\max} = 8$이다. 책이 8권이면 각 손은 $40\,\mathrm{N}$의 마찰력을 내는데, 이는 정확히 그 한계이고, 가장 불리한 접촉면에 필요한 마찰력은 $30\,\mathrm{N} < 40\,\mathrm{N}$이다. 아홉 번째 책을 더하면 각 손이 $45\,\mathrm{N}$을 내야 한다.
- 책이 한 권($n = 1$)이면 접촉면이 없고, $W \le 2\min(P, \mu Q)$이기만 하면 되므로 분명히 맞다.
- 컴퓨터로 W, P, Q, μ를 무작위로 3000번 골라 전체 부등식(inequality) 계(임의의 $H \le Q$, F_1, F_2의 임의의 분배, 모든 접촉면)를 풀어 보았더니, 가능한 가장 큰 n이 언제나 공식과 일치했다.

흔한 실수

- 팔이 내는 연직 방향의 힘이 곧 마찰력**이라는** 점, 따라서 두 한계 P와 μQ가 같은 힘에 적용된다는 점을 잊는다.
- 확인하지 않고 가운데 책이 가장 약한 지점이라고 가정한다. 책 사이의 힘은 손에서의 힘보다 크지 않고 오히려 작다.
- 바닥 함수 없이 $2\min(P, \mu Q)/W$로 답한다. 답은 책의 권수이므로 정수여야 한다.

STEP 너머

여기서 마찰력은 **부정정**(statically indeterminate)이다. 평형 조건으로 정해지는 것은 $F_1 + F_2$뿐이고, 우리는 모든 접촉면을 한계 안에 두는 분배가 **존재하는지**를 물었다. 이런 문제는 작은 선형계획법(linear programming) 문제이고, 허용 가능한 평형이 존재하는지 확인한다는 같은 아이디어가 구조물의 극한 해석(limit analysis)의 바탕을 이룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 평형을 꼼꼼하게 다루는 모습을 볼 수 있는 좋은 책이다.

풀이

STEP II 1988, 문제 14

역학 • 회전하는 강체

STEP II 1988, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q14

핵심 아이디어

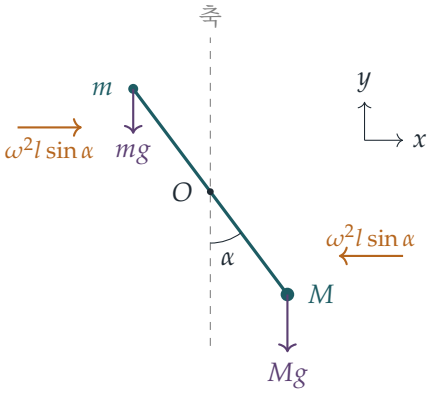
정상 상태(steady state)에서는 막대를 포함하며 회전하는 연직 평면에 대하여 아무것도 움직이지 않으므로, 각 입자는 단순히 수평인 원 위를 일정한 속력으로 돈다. 이것으로 각 입자의 가속도가 완전히 정해진다. 그러면 뉴턴(Newton)의 제2법칙으로부터 막대가 각 입자에 작용하는 힘을 알 수 있고, **가벼운** 막대(light rod)에 관한 두 가지 사실로 문제가 마무리된다. 막대에 작용하는 힘들은 평형을 이루어야 하고, (막대가 굴대(axle) 둘레로 자유롭게 흔들리므로) 굴대에 대한 힘들의 모멘트(moment)도 평형을 이루어야 한다.

풀이

모형. 질량들을 가볍고 강체인 막대 위의 입자로 보고, 막대는 O에서 매끄럽게 고정되어 굴대가 자기 방향에 대하여 짝힘(couple)을 작용하지 않는다고 하자. 막대를 포함하고 O를 지나는 연직선 둘레로 각속도(angular speed) ω로 도는 연직 평면에서 생각한다. 이 평면에서 x를 수평 방향, y를 연직 위 방향으로 잡고 원점을 O로 한다.

M이 $(l\sin\alpha,\ -l\cos\alpha)$에, m이 $(-l\sin\alpha,\ l\cos\alpha)$에 있다고 하자. 무거운 입자가 아래쪽에 있어야 한다는 것은 곧 보게 된다. 각 입자는 연직축 둘레로 반지름 $l\sin\alpha$인 수평인 원 위를 일정한 속력으로 움직이므로, 가속도는 축을 향하는 수평 방향으로 크기가 $\omega^2 l\sin\alpha$이다.

$$\mathbf{a}_M = (-\omega^2 l\sin\alpha,\ 0), \qquad \mathbf{a}_m = (\omega^2 l\sin\alpha,\ 0).$$



(호박색 화살표는 가속도, 자주색 화살표는 무게이다.)

막대가 작용하는 힘. 막대가 M과 m에 작용하는 힘을 각각 $\mathbf{R}_M$, $\mathbf{R}_m$이라 하자. 이 힘들이 막대 방향일 필요는 없다. 강체 막대는 옆으로도 밀 수 있기 때문이다. 뉴턴의 제2법칙에서 $\mathbf{R}_M - Mg\,\mathbf{j} = M\mathbf{a}_M$이므로

$$\mathbf{R}_M = \left(-M\omega^2 l\sin\alpha,\ Mg\right), \qquad \mathbf{R}_m = \left(m\omega^2 l\sin\alpha,\ mg\right).$$

뉴턴의 제3법칙에 따라 입자들은 막대의 M 쪽 끝을 $-\mathbf{R}_M$으로, m 쪽 끝을 $-\mathbf{R}_m$으로 민다.

> ? **생각해 보기** 굴대는 O에서 막대에 알 수 없는 힘을 작용한다. 이 힘을 모르면서 어떻게 모멘트를 계산할 수 있을까?

굴대에 대한 모멘트. 굴대의 힘은 O에 작용하므로 O에 대한 모멘트가 없다. 또 막대는 자유롭게 흔들리므로 굴대는 자기 방향(우리 평면에 수직이고 O를 지나는 직선)에 대하여 짝힘을 작용하지 않는다. 가벼운 막대는 그 자체의 각운동량(angular momentum)이 없으므로, 이 직선에 대한 두 끝점의 힘의 모멘트는 서로 상쇄되어야 한다. (x, y)에 작용하는 힘 (F_x, F_y)의 모멘트는 (반시계 방향으로) $xF_y - yF_x$이다. $(l\sin\alpha, -l\cos\alpha)$에 작용하는 $-\mathbf{R}_M$에 대하여

$$l\sin\alpha\,(-Mg) - (-l\cos\alpha)(M\omega^2 l\sin\alpha) = -Mgl\sin\alpha + M\omega^2 l^2\sin\alpha\cos\alpha,$$

이고, $(-l\sin\alpha,\ l\cos\alpha)$에 작용하는 $-\mathbf{R}_m$에 대하여

$$(-l\sin\alpha)(-mg) - l\cos\alpha\,(-m\omega^2 l\sin\alpha) = mgl\sin\alpha + m\omega^2 l^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

이다. 합을 0으로 놓고 ($\alpha > 0$이므로) $l\sin\alpha \neq 0$으로 나누면

$$(M+m)\,\omega^2 l\cos\alpha = (M-m)\,g \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)\frac{g}{l\cos\alpha},$$

이다. 여기서 $\cos\alpha > 0$으로 나누었으며, 이것이 구하려던 결과이다.

만약 M이 **위쪽** 입자라면, 같은 계산(M과 m을 바꿈)에서 $(M+m)\omega^2 l\cos\alpha = (m-M)g < 0$을 얻는데, 이는 불가능하다. 따라서 가정한 대로 무거운 입자는 실제로 O 아래에 있다.

굴대에 작용하는 반작용. 막대는 가벼우므로 막대에 작용하는 힘의 합은 0이다. 굴대는 막대를 $\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m$으로 밀고, 따라서 막대는 굴대를

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m) = \Big((M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha,\ -(M+m)\,g\Big).$$

으로 민다. 이 힘은 아래쪽을 향하고, 수평 성분은 M 쪽 바깥을 향한다. 이 힘이 연직 아래 방향과 이루는 각을 ϕ라 하면, ω^2의 값을 이용하여

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha}{(M+m)\,g} = \frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{l\sin\alpha}{g}\cdot\frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{g}{l\cos\alpha}\\ &= \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha.\end{aligned}$$

이다. $0 \le \phi < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\phi = \tan^{-1}\!\left[\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha\right]$이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $m = 0$이면 이 계는 길이 l인 원뿔 진자(conical pendulum)이고, 공식은 익숙한 $\omega^2 = g/(l\cos\alpha)$를 준다. 이때 반작용의 각은 α이다. 막대가 줄처럼 자기 방향으로 당기기 때문이다.
- $M = m$이면 막대는 O에서 균형을 이루므로 $\omega = 0$이고 반작용은 크기 $2Mg$인 연직 방향 힘이다. 두 공식 모두 이와 일치한다.
- 수치적으로 $M = 3$, $m = 1$, $l = 0.7$, $\alpha = 0.6$, $g = 9.8$로 두면 $\omega^2 \approx 8.48$이고 반작용의 각은 약 9.71°이다. 막대의 각에 대한 운동 방정식(equation of motion)을 α에서 정지한 상태로부터 단계별로 계산하면 각이 α에 그대로 머물고, 입자들의 3차원 위치로부터 가속도를 계산하면 같은 각이 다시 나온다.

흔한 실수

- 막대가 입자에 작용하는 힘이 막대 방향이라고 가정하는 것. 그렇지 않다. 강체 막대는 옆 방향의 힘도 전달하며, 바로 그 때문에 모멘트를 계산하는 것이다.
- m의 가속도도 축을 향하므로 M의 가속도와 **반대** 방향이라는 점을 잊는 것. 반작용의 수평 성분은 부분적으로 상쇄되어 $M+m$이 아니라 $M-m$이 된다.

- 무거운 입자를 위에 두는 것. 토크(torque) 방정식은 이런 일이 일어날 수 없음을 보여 준다.

STEP 너머

*O*에 대한 막대의 각운동량은 연직인 회전축과 평행하지 않으므로, 계가 회전함에 따라 그 방향이 바뀐다. 각운동량을 바꾸려면 짝힘이 필요하며, 굴대가 우리가 사용한 방향에 수직인 방향으로 이 짝힘을 제공한다. 이것이 관성 텐서(inertia tensor)를 사용하는 강체 동역학(rigid-body dynamics)의 출발점이며, 균형이 잘 맞지 않는 바퀴가 베어링 위에서 흔들리는 이유를 설명해 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 이 내용을 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 1988, 문제 15

확률과 통계 • 이산균등분포의 합

STEP II 1988, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q15

핵심 아이디어

각 시험지의 점수는 $\{0, 1, \ldots, m\}$ 위에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로, 가능한 모든 점수 목록은 같은 확률로 나타나고, 확률은 조건을 만족하는 목록의 개수를 전체 목록의 개수로 나눈 값일 뿐이다. 시험지가 두 개일 때의 개수는 간단히 나열해서 얻고, 시험지가 세 개일 때의 개수는 세 번째 점수에 대해 조건을 걸고(conditioning) 시험지 두 개일 때의 개수를 더해서 얻는다(이를 **합성곱**(*convolution*)이라 한다). 그러면 대칭성(symmetry, 각 시험지에서 $k \mapsto m - k$)에 의해 가장 높은 범위의 결과는 거의 공짜로 얻어진다.

시작하기 전에 한 가지 주의할 점이 있다. 시험지에 인쇄된 세 시험지에 대한 공식에는 오식(misprint)이 있다. 아래에서 올바른 공식을 유도하고, 인쇄된 공식과 어디가 다른지 짚어 본다.

풀이

X_1, X_2, X_3을 각 시험지의 점수라 하자. 시험지들은 독립적으로 채점되므로 이들은 서로 독립(independent)이고, 각각 $\{0, 1, \ldots, m\}$ 위에서 균등분포를 따른다. 따라서 각 순서쌍 (X_1, X_2)의 확률은 $(m+1)^{-2}$이고, 각 순서 있는 세 쌍의 확률은 $(m+1)^{-3}$이다. $\{0, \ldots, m\}$의 점수로 이루어진 순서쌍(순서 있는 세 쌍) 가운데 합이 n인 것의 개수를 각각 $N_2(n)$, $N_3(n)$으로 나타내자.

시험지가 두 개일 때

$X_1 = k$이고 $X_2 = n - k$이며 둘 다 $[0, m]$에 속해야 하므로

$$\max(0, n-m) \le k \le \min(m, n).$$

- $0 \le n \le m$이면 k는 0부터 n까지이므로 $N_2(n) = n + 1$이다.
- $m < n \le 2m$이면 k는 $n - m$부터 m까지이므로 $N_2(n) = m - (n-m) + 1 = 2m - n + 1$이다.

따라서

$$P(X_1 + X_2 = n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{(m+1)^2}, & 0 \le n \le m, \\ \dfrac{2m-n+1}{(m+1)^2}, & m < n \le 2m, \end{cases}$$

이고, 이것이 $m < n \le 2m$일 때 요구된 결과이며 $0 \le n \le m$일 때의 결과도 함께 얻었다. 이 분포는 "천막" 모양으로, $n = m$까지 한 단계마다 1씩 올라갔다가 그다음부터 내려간다.

시험지가 세 개일 때

세 번째 점수에 대해 조건을 걸자. $X_3 = k$이면 $X_1 + X_2 = n - k$이어야 하므로

$$N_3(n) = \sum_{k=0}^{m} N_2(n-k) = \sum_{j=n-m}^{n} N_2(j),$$

이다. 여기서 $j = n - k$이고, $j < 0$ 또는 $j > 2m$일 때 $N_2(j) = 0$이다.

$0 \le n \le m$인 경우. $j = 0, 1, \ldots, n$만 기여하고(음수인 j는 0을 준다), 이들은 모두 천막의 올라가는 부분에 놓인다.

$$N_3(n) = \sum_{j=0}^{n} (j+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \qquad P(X_1 + X_2 + X_3 = n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2(m+1)^3}.$$

$m < n \le 2m$인 경우. 이제 $1 \le n - m \le m < n \le 2m$이므로 범위 $j = n-m, \ldots, n$은 천막의 꼭대기를 가로지른다. 그 지점에서 합을 나눈다.

$$N_3(n) = \sum_{j=n-m}^{m} (j+1) + \sum_{j=m+1}^{n} (2m - j + 1).$$

첫 번째 합은 $n - m + 1$부터 $m + 1$까지의 정수를 더한 것이다.

$$\sum_{j=n-m}^{m} (j+1) = \frac{(m+1)(m+2) - (n-m)(n-m+1)}{2}.$$

두 번째 합에서 $i = 2m - j + 1$로 놓으면, 이 값은 $2m - n + 1$부터 m까지 움직인다.

$$\sum_{j=m+1}^{n} (2m - j + 1) = \frac{m(m+1) - (2m-n)(2m-n+1)}{2}.$$

네 개의 곱을 전개하면

$$\begin{aligned} 2N_3(n) &= (m^2 + 3m + 2) - (n^2 - 2mn + m^2 + n - m) \\ &\quad + (m^2 + m) - (4m^2 - 4mn + n^2 + 2m - n) \\ &= 6mn - 3m^2 - 2n^2 + 3m + 2. \end{aligned}$$

같은 확률로 나타나는 $(m+1)^3$개의 세 쌍으로 나누면

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = n) = \frac{6mn - 3m^2 - 2n^2 + 3m + 2}{2(m+1)^3}, \qquad m < n \le 2m.$$

? 생각해 보기 이것은 문제에 인쇄된 공식이 아니다. 누가 옳은가?

인쇄된 공식에는 $-3m^2$ 대신 $-4m^2$이, $(m+1)^3$ 대신 $(m+1)^2$이 있는데, 둘 다 오식이다. 한 가지 경우만 확인하면 결론이 난다. $m = 1, n = 2$일 때 $\{0, 1\}$에서 뽑은 세 점수의 합이 2가 되는 경우는 같은 확률로 나타나는 8가지 중 정확히 3가지이므로 확률은 $\frac{3}{8}$이다. 우리 공식은 $\frac{12-3-8+3+2}{16} = \frac{3}{8}$을 주지만, 인쇄된 공식은 $\frac{12-4-8+3+2}{8} = \frac{5}{8}$을 준다. 어쨌든 분모는 $(m+1)^3$이어야 하는데, 이것이 같은 확률로 나타나는 결과의 개수이기 때문이다. 추가로 확인해 보면, $n = m$일 때 우리의 가운데 공식은 $\frac{(m+1)(m+2)}{2(m+1)^3}$을 주어 첫 번째 경우와 일치한다. 이때 두 합이 이어지므로 당연히 그래야 한다.

$2m < n \le 3m$인 경우. 각 점수 X_i를 $m - X_i$로 바꾸자. 이것 역시 $\{0, \dots, m\}$ 위에서 균등 분포를 따르고, 새로운 세 점수도 여전히 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + X_3 = n) &= P\big((m - X_1) + (m - X_2) + (m - X_3) = n\big) \\ &= P(X_1 + X_2 + X_3 = 3m - n). \end{aligned}$$

$2m < n \le 3m$이면 $0 \le 3m - n < m$이므로, n을 $3m - n$으로 바꾸어 첫 번째 경우를 적용할 수 있다.

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = n) = \frac{(3m - n + 1)(3m - n + 2)}{2(m+1)^3}, \qquad 2m < n \le 3m.$$

(같은 대칭성을 $3m - n$ 대신 $2m - n$으로 적용하면, 시험지 두 개에 대한 $n \le m$일 때의 결과가 $n > m$일 때의 결과로 바뀐다.)

검산

- 작은 경우: $m = 1$일 때 세 공식은 $n = 0, 1, 2, 3$에 대해 $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$을 주는데, 이들의 합은 1이고 공정한 동전을 세 번 던질 때의 이항분포(binomial distribution)와 일치한다.
- 가운데 공식은 $n \mapsto 3m - n$에 대해 대칭이다. $6mn - 3m^2 - 2n^2$에서 n을 $3m - n$으로 바꾸어도 값이 변하지 않으며, 대칭성 논증에 따르면 반드시 그래야 한다.
- 1부터 8까지의 모든 m에 대해 모든 경우를 나열해 보면, 다섯 공식 모두 개수와 정확히 일치한다. 예를 들어 $m = 10$, $n = 15$일 때 두 방법 모두 $\frac{91}{1331}$을 준다.

흔한 실수

- $N_2(j)$가 두 가지 다른 공식을 가진다는 것을 잊고, 가운데 범위에서 합 전체에 걸쳐 $j + 1$을 사용하는 것.
- 인쇄된 가운데 공식에 도달하려고 계산을 "억지로" 맞추는 것. 신중하게 계산한 결과가 주어진 답과 다르다면, 자신을 의심하기 전에 아주 작은 경우를 시험해 보라.

STEP 너머

독립인 확률변수들의 합의 분포는 각 분포의 **합성곱**이며, 우리의 합 $\sum_k N_2(n-k)$가 바로 그것이다. 확률생성함수(probability generating function)를 쓰면 이 과정이 기계적으로 처리된다. 개수 $N_3(n)$은 $(1 + t + \cdots + t^m)^3$에서 t^n의 계수이다. 시험지의 수가 점점 많아지면 분포의 모양은 천막에서 매끄러운 언덕으로 바뀌고 정규곡선(normal curve)에 가까워진다(중심극한정리(central limit theorem)). Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 중심극한정리를 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP II 1988, 문제 16

확률과 통계 • 정규분포

STEP II 1988, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q16

핵심 아이디어

근에 관한 모든 것은 하나의 확률변수(random variable) B에 의해 결정되므로, X_1과 X_2에 관한 각 질문을 B가 어느 구간에 놓이는가에 관한 질문으로 바꾸어야 한다. 판별식(discriminant)은 근이 언제 실수인지 알려 주고, 근과 계수의 관계(Vieta's formulas)(합 $-2B$, 곱 1)를 이용하면 (i)과 (ii)의 조건을 쉽게 옮길 수 있다. 그 뒤에는 각 답이 표준정규(standard normal) 확률변수에 대한 조건부 확률(conditional probability) 또는 조건부 기댓값(conditional expectation)이 되며, 기댓값은 짧은 적분 하나만 계산하면 된다.

풀이

이하에서 $B \sim \mathrm{N}(0,1)$이고, 확률밀도함수(density)는 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}$, 분포함수(distribution function)는 Φ이다. 근이 실수라는 사건(event)을 R이라 하자.

실근

$X^2 + 2BX + 1$의 판별식은 $4B^2 - 4$이므로, 근이 실수일 필요충분조건은 $B^2 \geq 1$, 즉 $|B| \geq 1$이다. 정규분포의 대칭성(symmetry)에 의해

$$\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(|B| \geq 1) = 2\big(1 - \Phi(1)\big) = 2(1 - 0.84134) = 0.31731\ldots \approx 0.317.$$

(중근(equal root)인 경우 $|B| = 1$을 포함하든 안 하든 차이가 없다. 그 확률이 0이기 때문이다.)

근이 실수일 때 근은 다음과 같다.

$$X_{1,2} = -B \pm \sqrt{B^2 - 1}, \qquad X_1 + X_2 = -2B, \qquad X_1 X_2 = 1.$$

소문항 (i)

생각해 보기 "두 근이 모두 $\frac{1}{5}$보다 크다"를 어떻게 B에 관한 조건으로 바꿀 수 있을까?

먼저 두 근은 모두 양수여야 한다. 두 근의 곱이 $1 > 0$이므로 두 근의 부호는 같고, 그 부호는 두 근의 합 $-2B$의 부호와 같다. 따라서 $B < 0$이어야 하고, R과 함께 생각하면 이는 $B \le -1$을 뜻한다. $b = -B \ge 1$이라 두면 근은 $b \pm \sqrt{b^2 - 1}$이고, 둘 다 양수이다.

곱이 1이므로 작은 근은 큰 근의 역수(reciprocal)이다.

$$b - \sqrt{b^2 - 1} = \frac{1}{b + \sqrt{b^2 - 1}}.$$

따라서 작은 근이 $\frac{1}{5}$보다 클 필요충분조건은 큰 근이 5보다 작은 것이며, 이때 큰 근도 자동으로 $\frac{1}{5}$보다 크다. 그러므로 조건은

$$\sqrt{b^2 - 1} < 5 - b.$$

이를 위해서는 $b < 5$이어야 하고, $1 \le b < 5$에서는 양변이 모두 음이 아니므로 부등식을 바꾸지 않고 제곱할 수 있다.

$$b^2 - 1 < 25 - 10b + b^2 \iff 10b < 26 \iff b < 2.6.$$

($2.6 < 5$이므로 $b \ge 5$인 값은 어차피 조건을 만족하지 않는다.) 따라서 근이 실수일 때 두 근이 모두 $\frac{1}{5}$보다 클 필요충분조건은 $-2.6 < B \le -1$이고,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_1, X_2 > \tfrac{1}{5} \,\middle|\, R\right) &= \frac{\mathrm{P}(-2.6 < B \le -1)}{\mathrm{P}(|B| \ge 1)} = \frac{\Phi(2.6) - \Phi(1)}{2\big(1 - \Phi(1)\big)} \\ &= \frac{0.99534 - 0.84134}{0.31731} = 0.4853\ldots \approx 0.485. \end{aligned}$$

소문항 (ii)

$|X_1 + X_2| = 2|B|$이므로 구하려는 것은 $\mathrm{E}\big(2|B| \,\big|\, |B| \ge 1\big)$이다. 어떤 사건이 주어졌을 때의 조건부 기댓값은 그 사건 위에서 적분한 뒤 사건의 확률로 나누어 구한다.

$$\mathrm{E}\big(|B| \,\big|\, |B| \ge 1\big) = \frac{1}{\mathrm{P}(|B| \ge 1)} \int_{|z| \ge 1} |z|\, \phi(z)\, \mathrm{d}z = \frac{2\int_1^\infty z\, \phi(z)\, \mathrm{d}z}{2\big(1 - \Phi(1)\big)},$$

여기서 ϕ의 대칭성을 이용하였다. $z\,\phi(z)$가 $\phi(z)$의 도함수에 음의 부호를 붙인 것이므로 적분은 쉽다.

$$\int_1^\infty z\, \phi(z)\, \mathrm{d}z = \Big[-\phi(z)\Big]_1^\infty = \phi(1) = \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} = 0.24197\ldots$$

그러므로

$$\mathrm{E}\big(|X_1 + X_2| \,\big|\, R\big) = \frac{2\phi(1)}{1 - \Phi(1)} = \frac{2 \times 0.24197}{0.15866} = 3.050\ldots \approx 3.05.$$

검산

- $B = -2.6$을 대입해 보자. 방정식은 $X^2 - 5.2X + 1 = 0$이고, 근은 정확히 5와 $\frac{1}{5}$로, (i)의 경계인 경우이다.
- R 위에서 $2|B| \geq 2$이므로 (ii)의 답은 2보다 커야 한다. 실제로 그렇고, 값도 그럴듯하다. 1 너머의 정규분포 꼬리는 얇으므로 $|B|$는 대개 1보다 조금만 크다(조건부 평균은 약 1.53이다).
- B의 표준정규 값 2×10^6개로 모의실험한 결과 0.3177, 0.4855, 3.049를 얻었으며, 이는 0.317, 0.485, 3.05와 일치한다.

흔한 실수

- 조건을 거는 것을 잊는 실수: (i)과 (ii)에서는 반드시 $\mathrm{P}(R) = 0.317$로 나누어야 한다. 무조건부 확률 $\Phi(2.6) - \Phi(1) = 0.154$는 답이 아니다.
- (i)에서 $B \geq 1$을 포함하는 실수. 이때는 두 근이 모두 음수이므로 어느 것도 $\frac{1}{5}$보다 크지 않다.
- $\mathrm{E}|X_1 + X_2|$를 $|\mathrm{E}(X_1 + X_2)|$로 계산하는 실수. 후자는 대칭성에 의해 0이다.

STEP 너머

값 $\phi(1)/(1 - \Phi(1))$은 **절단**(*truncated*) 정규분포의 평균이며, 비 $\phi(a)/(1 - \Phi(a))$는 역밀스 비(inverse Mills ratio)라고 불린다. 이 비는 통계학(예를 들어 중도절단 자료(censored data)의 모형)에 등장하고, 신뢰성 이론(reliability theory)에서는 정규분포의 위험률(hazard rate)로 나타난다. 계수가 무작위인 다항식이 평균적으로 실근을 몇 개 가지는가와 같은 무작위 다항식(random polynomial)에 관한 질문들은 놀라울 만큼 풍부한 확률론의 한 분야를 이룬다. 조건부 기댓값과 연속분포에 대해서는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 또는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 1988, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기와 한계

> **STEP III 1988, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q1

핵심 아이디어

그래프를 그릴 때, 인수 $x^2\mathrm{e}^{-x}$는 결코 음이 아니므로 y의 부호는 전적으로 $1+x$가 결정한다. 이 사실에 도함수(derivative) 하나, 그리고 양 끝과 $x=-1$ 근처에서의 거동을 더하면 전체 모양이 나온다. 적분에서는 x^2을 $1+x$로 나누는 것이 가장 깔끔한 방법이다. 그러면 피적분함수(integrand)의 대부분은 적분하여 o이 되고, 남은 부분은 간단한 두 경계 사이에 쉽게 가둘 수 있다.

풀이

그래프

$x \neq -1$인 모든 x에 대하여 정의된 함수 $f(x) = \dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$를 생각하자.

부호와 영점. $x^2 \geq 0$이고 $\mathrm{e}^{-x} > 0$이므로 $x < -1$이면 $f(x) < 0$이고 $x > -1$이면 $f(x) \geq 0$이며, $f(x) = 0$인 것은 $x = 0$일 때뿐이다. 인수 x^2 때문에 곡선은 원점에서 x축을 가로지르지 않고 접한다.

점근선과 양 끝.

- $x \to -1$일 때 분자는 $\mathrm{e} > 0$으로, 분모는 0으로 가므로 $x = -1$은 수직점근선(vertical asymptote)이고, $x \to -1^-$일 때 $f \to -\infty$, $x \to -1^+$일 때 $f \to +\infty$이다.
- $x \to +\infty$일 때, 지수함수가 거듭제곱보다 빠르게 커지므로 $f(x) \approx x\mathrm{e}^{-x} \to 0^+$이다. 따라서 오른쪽에서 $y = 0$은 점근선이고, 곡선은 위에서 이 점근선에 다가간다.
- $x \to -\infty$일 때 $\dfrac{x^2}{1+x} \approx x \to -\infty$이고 $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$이므로 $f(x) \to -\infty$이며, 그 속도는

매우 빠르다.

정류점. 몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$f'(x) = \frac{(2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}(1+x) - x^2\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(2x + x^2 - x^3 - x^2\right)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{x\left(2 - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2}.$$

따라서 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{2}$에서 $f'(x) = 0$이다. 인수 e^{-x}와 $(1+x)^2$은 양수이므로 f'의 부호는 $x(2 - x^2)$의 부호와 같다.

구간	$x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

이로부터 다음을 얻는다.

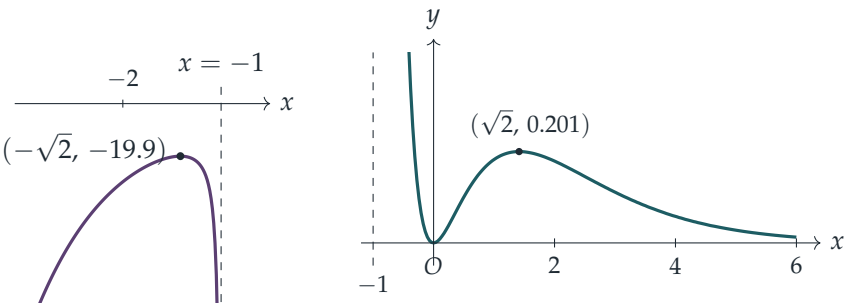
- $x = \sqrt{2}$에서 극댓값(local maximum)을 가지며, 이때 $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0.201$이다.
- 원점에서 극솟값(local minimum)을 가진다.
- 왼쪽 가지의 $x = -\sqrt{2}$에서 극댓값을 가지며, 이때 $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}} = -2(\sqrt{2}+1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}} \approx -19.9$이다.

? 생각해 보기 완전히 축 아래에 놓인 가지가 어떻게 극댓값을 가질 수 있을까?

$x < -1$에서 곡선은 $x \to -\infty$일 때 $-\infty$에서 올라와서 점근선 $x = -1$에서 다시 $-\infty$로 내려가므로, 그 사이 어딘가에서 방향을 바꿔야 한다. 가장 높은 점은 $x = -\sqrt{2}$에 있으며, 그래도 축보다 한참 아래이다. 이 가지는 축 아래에 매달린, 뒤집힌 "언덕" 모양이고 그 높이는 약 -19.9이다.

오른쪽에서 곡선은 $x = -1$ 바로 오른쪽의 $+\infty$에서 원점의 0까지 내려왔다가, $x = \sqrt{2}$에서의 작은 극댓값까지 올라간 뒤 0으로 감소한다. 원점 근처에서는 아래로 볼록(concave up)하고 극대점에서는 위로 볼록(concave down)하므로, $x = \sqrt{2}$의 양쪽에 변곡점(point of inflection)이 있다(수치적으로 $x \approx 0.35$와 $x \approx 2.5$ 근처). 개형을 그리는 데에는 그 정확한 위치가 필요하지 않다.

두 가지는 세로 축척이 매우 다르므로 따로 그린다. 왼쪽에서는 y가 약 -70까지 내려간다. 오른쪽에서는 극댓값 0.2가 보이도록 y축 축척을 늘렸다.



적분

$I = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x}}{1+x}\,dx$라 하자. x^2을 $1+x$로 나누면

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

이제 $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$($u = x$로 두고 부분적분(integration by parts)한다)이고 $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$이므로, 처음 두 항의 기여는 $1-1=0$이고

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}\,dx.$$

(세 적분이 모두 수렴하므로 적분을 이렇게 나누는 것은 정당하다.) $x > 0$이면 $0 < \frac{1}{1+x} < 1$이므로

$$0 < \frac{e^{-x}}{1+x} < e^{-x} \qquad (x > 0).$$

부등식이 구간 전체에서 엄격하고 함수들이 연속이므로, 적분해도 엄격한 부등식이 유지된다.

$$0 < I < \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

따라서 요구한 대로 I는 0과 1 사이에 있다.

다른 방법. 나눗셈을 건너뛸 수도 있다. $x > 0$이면 $\frac{x^2}{1+x} < \frac{x^2}{x} = x$이므로 $0 < f(x) < xe^{-x}$이고 $0 < I < \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$이다. 그래도 나눗셈은 I가 정확히 어디에서 오는지 보여 주므로 알아 둘 가치가 있다.

검산

- 무작위로 고른 천 개의 점에서 f를 수치적으로 미분한 결과는 $f'(x) = x(2-x^2)e^{-x}/(1+x)^2$과 일치한다.

- $[0, 60]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I \approx 0.59635$이고, $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$도 같은 값을 주며, 이 값은 0과 1 사이에 넉넉히 들어간다.
- 개형으로부터 대략 어림해 보자. $x > 0$에서 곡선은 높이가 약 0.2인 언덕 모양이고 $x = 6$쯤이면 거의 사라진다. 그 높이와 밑변을 가진 삼각형의 넓이는 약 0.6으로, 0.596과 들어맞는다.

흔한 실수

- $x = -\sqrt{2}$에서의 정류점이 "다른" 가지에 있다는 이유로 놓치거나, 그곳에서 y가 음수라는 이유로 극솟값이라고 하는 것.
- 곡선이 원점에서 축을 가로지른다고 하는 것. 이중 인수 x^2 때문에 곡선은 축에 접한다.
- $\mathrm{e}^{-x} \leq 1$만으로 $I < 1$이라고 주장하는 것. 이 부등식으로 얻는 경계는 $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$인데, 이 적분은 발산한다.

STEP 너머

I의 값은 $\mathrm{e}\,E_1(1) \approx 0.5963$이다. 여기서 $E_1(t) = \int_t^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{-1}\,\mathrm{d}u$는 지수적분(exponential integral)이다. 이 수는 곰퍼츠 상수(Gompertz constant)라고 불린다. 이 수는 초등함수로 나타낼 수 없으며, 그래서 문제에서 경계만 구하라고 한 것이다. 계산할 수 없는 적분을 계산할 수 있는 적분과 비교하여 어림하는 것은 해석학의 핵심 기술이다(이상적분(improper integral)에 대한 "비교판정법(comparison test)"). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)가 이를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 1988, 문제 2

순수수학 • 선형 점화식

> **STEP III 1988, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q2

핵심 아이디어

상수 계수 선형 점화식(linear recurrence with constant coefficients)은 이차식처럼 행동한다. 거듭제곱 x^n이 점화식의 해가 될 필요충분조건은 x가 보조방정식(auxiliary equation)의 근인 것이다. 처음 두 항이 정해지면 점화식이 나머지 모든 항을 결정하므로, u_0과 u_1만 맞추면 유일한 해를 얻는다. 마지막 부분은 계수가 변하지만, 인수 $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$을 보면 이들의 곱으로 양변을 나누어 볼 생각이 든다. 그러면 간단한 치환으로 앞에서 다룬 종류의 상수 계수 점화식이 된다.

풀이

(시험지에는 점화식의 최고차 계수가 α로 인쇄되어 있다. 이는 이차식 ax^2+bx+c에 맞추어 a로 써야 할 것을 잘못 인쇄한 것이 분명하므로, 그렇게 읽기로 한다.) 이차식이 두 근을 가지므로 실제로 이차식이고, 따라서 $a \neq 0$이다.

주어진 식은 점화식을 만족한다

임의의 상수 A, B에 대하여 $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n &= A\alpha^n\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) + B\beta^n\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) \\ &= A\alpha^n \cdot 0 + B\beta^n \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

이다. α와 β가 $ax^2+bx+c=0$의 근이기 때문이다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 점화식이 성립한다.

주어진 특정한 A와 B를 쓰면 이 식은 초깃값도 재현한다. $n = 0$일 때

$$A + B = \frac{(u_1 - \beta u_0) - (u_1 - \alpha u_0)}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)u_0}{\alpha - \beta} = u_0,$$

이고, $n = 1$일 때

$$A\alpha + B\beta = \frac{\alpha u_1 - \alpha\beta u_0 - \beta u_1 + \alpha\beta u_0}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)u_1}{\alpha - \beta} = u_1.$$

이다. 두 근이 서로 다르므로 $\alpha - \beta$로 나눌 수 있다.

이것이 유일한 해이다

생각해 보기 정확히 무엇에 대하여 귀납법을 쓰는가? 그리고 왜 한 번에 두 항씩 다루어야 하는가?

$u_0, u_1, u_2, \ldots$이 점화식을 만족하는 임의의 수열이라 하고, 이 수열의 u_0과 u_1로 위와 같이 A, B를 만들자. $w_n = A\alpha^n + B\beta^n$이라 쓴다. n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 다음 명제를 증명한다.

$$P(n): \quad u_n = w_n \text{ 이고} u_{n+1} = w_{n+1}.$$

새로운 항은 각각 바로 앞의 두 항에 의존하므로, 명제는 연속된 두 항을 함께 담고 있어야 한다.

기저 단계. $P(0)$은 $u_0 = w_0$이고 $u_1 = w_1$이라는 명제이며, 이는 위에서 확인하였다.

귀납 단계. $P(n)$을 가정하자. (u_n)과 (w_n) 모두 점화식을 만족하고 $a \neq 0$이므로

$$u_{n+2} = -\frac{bu_{n+1} + cu_n}{a} = -\frac{bw_{n+1} + cw_n}{a} = w_{n+2}.$$

이다. 이것과 $u_{n+1} = w_{n+1}$을 합치면 $P(n+1)$이 된다.

따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 $P(n)$이 성립하고, 모든 n에 대하여 $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$이다. 점화식의 해는 모두 이 꼴이며, A와 B는 u_0과 u_1로 정해진다. 즉 이 식이 유일한 해를 준다.

수열 v_n

각 계수는 세 인수 $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$ 중 두 개의 곱이고, 빠진 인수가 계수마다 서로 다르다. $n \geq 0$에서 결코 0이 아닌 $(n+1)(n+2)(n+3)$으로 나누면

$$8\,\frac{v_{n+2}}{n+3} - 2\,\frac{v_{n+1}}{n+2} - \frac{v_n}{n+1} = 0.$$

을 얻는다. 각 분수는 $v_k/(k+1)$ 꼴이다. 그래서

$$w_n = \frac{v_n}{n+1},$$

이라 두면 점화식은

$$8w_{n+2} - 2w_{n+1} - w_n = 0, \qquad w_0 = 0, \quad w_1 = \tfrac{1}{2}.$$

이 된다. 보조방정식은 $8x^2 - 2x - 1 = 0$, 즉 $(2x-1)(4x+1) = 0$이다. 그 근 $\alpha = \frac{1}{2}$와 $\beta = -\frac{1}{4}$는 서로 다른 실수이므로 첫 부분을 적용할 수 있고, $\alpha - \beta = \frac{3}{4}$이다.

$$A = \frac{w_1 - \beta w_0}{\alpha - \beta} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{w_1 - \alpha w_0}{\beta - \alpha} = \frac{1/2}{-3/4} = -\frac{2}{3}.$$

따라서 $w_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$이다. 첫 부분에 의하여 이것이 w_n이 될 수 있는 유일한 경우이고, 따라서 v_n도 마찬가지이다. 다시 $n+1$을 곱하면

$$\boxed{v_n = \frac{2(n+1)}{3}\left(\frac{1}{2^n} - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

검산

이 식에서 $v_0 = \frac{2}{3}(1-1) = 0$, $v_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1$이 나오므로 조건에 맞는다. 원래 점화식에 $n = 0$과 $n = 1$을 직접 넣어 계산하면 $16v_2 = 6v_1 + 6v_0$이므로 $v_2 = \frac{3}{8}$이고, 이어서 $48v_3 = 16v_2 + 12v_1$이므로 $v_3 = \frac{3}{8}$이다. 식에서도 $v_2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{8}$, $v_3 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) = \frac{3}{8}$로 일치한다. 또한 유리수 연산으로 n이 41까지일 때 이 식이 점화식과 정확히 일치함을 확인하였고, 첫 부분은 무작위로 고른 수백 개의 이차식과 초깃값에 대하여 확인하였다.

흔한 실수

- 한 번에 한 항씩 귀납법을 하는 것. $u_n = w_n$만 알아서는 u_{n+1}에 대하여 아무것도 이끌어 낼 수 없다. 귀납 가정은 연속된 두 항을 포함해야 한다.
- a로 나눌 수 있는 이유(방정식이 두 근을 가지므로 0이 아니다)와 $\alpha - \beta$로 나눌 수 있는 이유(두 근이 서로 다르다)를 밝히지 않는 것.
- 첫 부분을 v_n에 곧바로 적용하는 것. v_n의 점화식은 계수가 n에 의존하므로, 첫 부분을 적용할 대상은 크기를 조정한 수열 $w_n = v_n/(n+1)$이다.

STEP 너머

이계 선형 점화식의 해 전체는 이차원 벡터 공간(vector space)을 이루며, α^n, β^n은 그 기저(basis)이다. 이는 해가 $e^{\alpha x}$와 $e^{\beta x}$인 미분방정식(differential equation) $ay'' + by' + cy =$

0과 정확히 평행한 상황이다. 2×2 행렬 M을 써서 점화식을 $\mathbf{u}_{n+1} = M\mathbf{u}_n$으로 쓰면 α와 β가 M의 고윳값(eigenvalue)임을 알 수 있고, 중근은 대각화(diagonalise)할 수 없는 행렬에 대응한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 바로 이런 방식으로 고윳값을 통해 차분방정식을 다루며, 보이스(Boyce)와 디프리마(DiPrima)의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)는 미분방정식에 대하여 이와 평행한 이론을 전개한다.

풀이

STEP III 1988, 문제 3

순수수학 • 복소평면 위의 자취

STEP III 1988, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q3

핵심 아이디어

사상(map) $w = (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$는 거꾸로 풀 수 있다. z에 대해 풀면 $z = \mathrm{i}(w+1)/(w-1)$이므로, z에 대한 어떤 조건도 w에 대한 조건으로 바뀐다. 원의 경우에는 그 대신 매개변수 표시(parametrisation)가 일을 해 준다. 그때 $z-\mathrm{i}$가 그냥 $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$가 되기 때문이다. 실수인 경우와 순허수(imaginary)인 경우에는 절댓값(modulus)과 편각(argument)을 생각하라. 실수 z는 i와 $-\mathrm{i}$에서 같은 거리에 있다.

풀이

매개변수 표시

곡선 $|z-\mathrm{i}| = 2$는 중심이 i이고 반지름이 2인 원이므로

$$z = \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad -\pi < \theta \leq \pi,$$

이다. 또는 $z = x + \mathrm{i}y$로 쓰면 $x = 2\cos\theta$, $y = 1 + 2\sin\theta$이다.

역사상(inverse map)도 사용할 것이다. $w(z-\mathrm{i}) = z + \mathrm{i}$에서 $z(w-1) = \mathrm{i}(w+1)$을 얻으므로, $w \neq 1$이면 다음과 같다.

$$z = \frac{\mathrm{i}(w+1)}{w-1}.$$

어떤 z도 $w = 1$을 주지 않는다. 그러려면 $z + \mathrm{i} = z - \mathrm{i}$여야 하기 때문이다. $w \neq 1$인 모든 점은 정확히 하나의 $z \neq \mathrm{i}$에서 온다.

소문항 (i)

매개변수 표시를 대입하면 $z+\mathrm{i}=2\mathrm{i}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$이고 $z-\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$이므로

$$w=\frac{2\mathrm{i}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=1+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2-\theta)}.$$

θ가 한 바퀴 도는 동안 $\pi/2-\theta$도 모든 각을 한 번씩 취한다. 따라서 w는

$$|w-1|=1,$$

즉 중심이 1이고 반지름이 1인 원 **전체**를 그린다. 예를 들어 $z=3\mathrm{i}$이면 $w=2$이고, $z=-\mathrm{i}$이면 $w=0$이다. 점 $w=1$은 이 원 위에 있지 않은데, 이는 이 값이 결코 나오지 않는다는 사실과 들어맞는다.

소문항 (ii)

$z=x$가 실수이면 i와 $-\mathrm{i}$에서 같은 거리에 있으므로 $|x+\mathrm{i}|=|x-\mathrm{i}|$이고, 다음이 성립한다.

$$|w|=\frac{|x+\mathrm{i}|}{|x-\mathrm{i}|}=1.$$

구체적으로, 분자와 분모에 $x+\mathrm{i}$를 곱하면 다음을 얻는다.

$$w=\frac{(x+\mathrm{i})^2}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.$$

생각해 보기 단위원(unit circle)의 모든 점에 도달하는가?

꼭 그렇지는 않다. $|w|=1$이고 $w\neq 1$인 임의의 w를 잡고 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$로 쓰자. 그러면

$$z=\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1}=\mathrm{i}\,\frac{2\cos(\phi/2)}{2\mathrm{i}\sin(\phi/2)}=\cot\tfrac{\phi}{2},$$

이고, 이는 실수이다. 따라서 그러한 점은 모두 나타나지만, $w=1$은 결코 나타나지 않는다. 이것은 $x\to\pm\infty$일 때의 극한이다. 자취(locus)는 단위원 $|w|=1$에서 한 점 $w=1$을 뺀 것이다. 예를 들어 $x=0$이면 $w=-1$이고, $x=1$이면 $w=\mathrm{i}$이다.

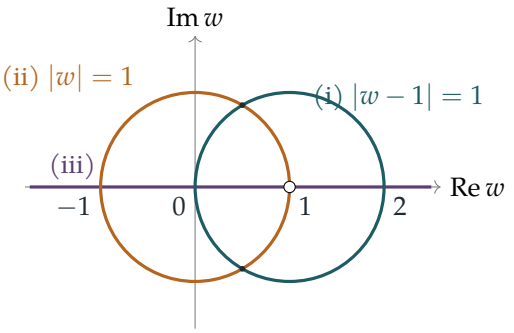
소문항 (iii)

$z=\mathrm{i}y$이고 y가 실수이며 $y\neq 1$이면

$$w=\frac{\mathrm{i}(y+1)}{\mathrm{i}(y-1)}=\frac{y+1}{y-1}=1+\frac{2}{y-1},$$

이고, 이는 실수이다. y가 1이 아닌 모든 실수를 움직이면 분수 $2/(y-1)$은 영이 아닌 모든 실수 값을 취하므로, w는 1을 제외한 모든 실수 값을 취한다. (역으로, $w=u$가 실수이고 $u\neq 1$이면 $z=\mathrm{i}(u+1)/(u-1)$은 순허수이다.) 자취는 실수축에서 점 $w=1$을 뺀 것이다. 여기서 $z=0$이면 $w=-1$이다. "순허수"를 $z=0$을 제외하는 뜻으로 읽는다면 $w=-1$도 함께 빠진다.

그림



청록색 원은 (i)의 자취이고, 호박색 원(점 1 제외)은 (ii)의 자취이며, 보라색 축(점 1 제외)은 (iii)의 자취이다. 속이 빈 점은 결코 나타나지 않는 $w = 1$을 표시한다.

검산

- (i)의 원은 실수축과 $z = \pm\sqrt{3}$에서 만난다. 이 점들은 청록색 원과 호박색 원 모두의 위에 있는 점으로 옮겨져야 하는데, 실제로 $w(\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^2/4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \approx 0.5 + 0.866\mathrm{i}$이고, 이는 $|w| = 1$ 위에도, $|w-1| = 1$ 위에도 있다.
- (i)의 원은 허수축과 $3\mathrm{i}$와 $-\mathrm{i}$에서 만나고, 이 점들은 2와 0으로 옮겨진다. 정확히 청록색 원이 실수축과 만나는 곳이다.
- 각 자취 위의 무작위 점 10^4개에 대한 수치 검사로 $|w-1| = 1$, $|w| = 1$, $\operatorname{Im} w = 0$이 확인되었고, 역사상이 z를 되찾는다는 것도 확인되었다.

흔한 실수

- (ii)와 (iii)에서 $w = 1$이 빠진다는 것을 잊는 것. 이 점은 "$z = \infty$"에 해당한다.
- (i)에서 x와 y로 전개하다가 계산 속에서 길을 잃는 것. 매개변수 표시를 쓰면 $z - \mathrm{i}$가 하나의 지수 함수가 되고, 나머지는 한 줄이면 된다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이다. 이러한 사상은 항상 원과 직선을 원과 직선으로 보내며, 이것이 바로 여러분이 세 소문항 모두에서 발견한 것이다. 이 변환은 리만 구(Riemann sphere) 위에서 가장 잘 이해되는데, 거기서는 "무한원점(point at infinity)"을 덧붙여 $w = 1$의 빈자리를 채운다. 그 친척인 케일리 변환(Cayley

transform) $z \mapsto (z - \mathrm{i})/(z + \mathrm{i})$는 상반평면(upper half-plane)을 단위원판(unit disc)으로 보낸다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 이 모든 것에 대한 아름다운 기하학적 설명이 있다.

풀이

STEP III 1988, 문제 4

순수수학 • 호의 길이 최적화

> **STEP III 1988, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q4

핵심 아이디어

도로의 전체 길이를 함수 $L(b)$로 나타내고 미분한다. 수직 평면 위의 두 구간은 지면을 따라 가야 하므로, 그 길이는 포물선의 호의 길이(arc length)이다. 반원의 길이는 πb이다. 호의 길이를 나타내는 적분을 아래끝에 대해 미분하는 데에는 적분 계산이 전혀 필요하지 않으며, $L'(b)$의 부호가 모든 것을 결정한다.

(문제에 인쇄된 단면(cross-section)의 식은 좌변이 $x=$로 되어 있는데, 당연히 $z=$이어야 한다.)

풀이

길이 식 세우기

$h(b) = (a^2 - b^2)/(2a)$라 하자. 이는 축으로부터 거리 b인 곳에서 언덕의 높이이다. 도로는 지면 위에 놓여야 하므로, (x, z) 평면에서 $(-R, 0)$부터 $(-b, h(b))$까지 가는 경로는 달리 선택의 여지가 없다. 즉 평평한 평면을 따라 $x = -R$에서 $x = -a$까지 간 다음, 포물선을 따라 $x = -a$에서 $x = -b$까지 올라간다. 구간 (iii)은 이것의 거울상이다.

언덕 위에서는 $z = (a^2 - x^2)/(2a)$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{a}$이고, $x = b$부터 $x = a$까지의 호의 길이는

$$\int_b^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

이다. 반원 (ii)는 높이 $h(b)$에 있는 수평한 반원이고 반지름은 b이다(이는 $(\pm b, h(b))$를 지나는 언덕의 위도원(circle of latitude)이다). 따라서 그 길이는 πb이다. 그러므로

$$L(b) = 2(R - a) + 2\int_b^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x + \pi b, \qquad 0 \le b \le a.$$

이 식은 $b = 0$인 경우(반원이 없고 도로가 꼭대기를 곧장 넘어가는 경우)와 $b = a$인 경우(도로가 언덕 기슭을 돌아가는 경우)도 포함한다.

최소화하기

미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해, 아래끝에 대해 미분하면 그 점에서의 피적분함수(integrand)에 음의 부호를 붙인 값이 된다.

$$L'(b) = \pi - 2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

생각해 보기 정류점(stationary point)은 어디에 있을까? 그리고 그 점은 허용되는 범위에 있는가?

$L'(b) = 0$이 되려면 $1 + b^2/a^2 = \pi^2/4$, 즉 $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4} \approx 1.21a$이어야 한다. 이 값은 a보다 크므로 허용 범위 $0 \le b \le a$ 밖에 있다. 실제로 $0 \le b \le a$에서

$$2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \le 2\sqrt{2} \approx 2.83 < \pi,$$

이므로 구간 전체에서 $L'(b) > 0$이다. L은 순증가하고, 최솟값은 왼쪽 끝점 $b = 0$에서 얻어진다.

조언: $b = 0$으로 정한다. 도로는 반원 모양으로 우회하지 말고 언덕 한쪽을 곧장 올라갔다가 반대쪽으로 내려가야 한다.

얼마나 절약되는가

참고로, 원시함수(antiderivative)는

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{a}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C,$$

이다($x = a\sinh t$로 치환한다). 따라서

$$L(0) = 2(R - a) + a\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right) \approx 2(R - a) + 2.296a,$$

이고, 기슭을 돌아가면 $L(a) = 2(R - a) + \pi a \approx 2(R - a) + 3.142a$이다. 꼭대기를 넘어가면 약 $0.85a$만큼 절약된다.

검산

- 답은 R에 의존하지 않는데, 이는 당연하다. 평평한 구간들의 전체 길이는 b가 무엇이든 $2(R - a)$이다.

- 대략적인 타당성 검토: 언덕의 높이는 $a/2$, 폭은 $2a$에 불과하므로, 언덕을 넘어가도 직선 거리 $2a$보다 크게 늘어날 수 없다. 기슭을 도는 반원의 길이는 πa이다. 실제로 $2.296a$는 $2a$와 πa 사이에 있다.
- 수치적으로, $a = 1$, $R = 3$으로 두고 $[0, 1]$의 201개 점에서 수치 적분(quadrature)으로 $L(b)$를 계산하면 가장 작은 값은 $b = 0$에서 나온다. 또한 $L'(a) = \pi - 2\sqrt{2} \approx 0.313$도 여전히 양수이다.

흔한 실수

- $L'(b) = 0$으로 놓고 $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4}$를 답으로 제시하면서, 이 값이 a보다 크다는 것을 알아차리지 못하는 경우.
- 구간 (i)과 (iii)에 직선(현, chord)의 길이를 사용하는 경우: 그런 도로는 언덕을 관통하는 터널이 된다.
- 닫힌구간(closed interval)에서의 최솟값이 끝점에서 나타날 수 있다는 사실을 잊는 경우.

STEP 너머

곡면 위에서 최단 경로를 찾는 것은 **측지선**(geodesics)의 문제로, 변분법(calculus of variations)이나 미분기하학(differential geometry)의 첫 강의에서 만나게 된다. 회전면(surface of revolution) 위에서는 클레로(Clairaut)의 관계식이 측지선을 깔끔하게 기술한다. 왕의 도로들의 모임은 이 문제를 매개변수 하나로 잘라 낸 작은 단면이다. 여기서 사용한 두 가지 해석학적 사실, 즉 적분을 끝에 대해 미분하는 것과 닫힌구간에서 연속인 함수가 최솟값을 갖는다는 사실은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 엄밀하게 증명되어 있다.

풀이

STEP III 1988, 문제 5

순수수학 • 점화식과 대출

STEP III 1988, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q5

핵심 아이디어

하루 동안 빚에 어떤 일이 일어나는지 적어 본다. 매일 빚에 $1+k$가 곱해지고(이자), 그다음 일정한 금액이 더해지거나(굴착 비용) 빠진다(수입). $S_n = (1+k)S_{n-1} +$ 상수 꼴의 점화식(recurrence)을 풀어 펼치면 등비급수(geometric series)가 된다. 그러면 마지막 부분은 하나의 비교로 귀결된다. 터널이 개통되는 순간, 하루 수입이 빚에 붙는 이자보다 큰가?

풀이

터널을 파는 동안의 빚

이자율(interest rate)이 $100k\%$라는 것은 £S의 빚에 대한 하루 이자가 £kS라는 뜻이다. 제 n일이 끝날 때의 빚(파운드 단위)을 S_n이라 하고, $S_0 = 0$이라 하자. $n \le T$인 제 n일이 끝날 때 회사는 굴착 비용으로 c를, 이자로 kS_{n-1}을 빌리므로

$$S_n = S_{n-1} + kS_{n-1} + c = (1+k)S_{n-1} + c.$$

$S_0 = 0$에서 출발하여 이 식을 반복해서 적용하면

$$\begin{aligned} S_n &= c + (1+k)S_{n-1} \\ &= c + c(1+k) + (1+k)^2 S_{n-2} \\ &= \cdots = c[1 + (1+k) + (1+k)^2 + \cdots + (1+k)^{n-1}]. \end{aligned}$$

이것은 항이 n개이고 공비(common ratio)가 $1+k \neq 1$인($k > 0$이므로) 등비급수이므로

$$S_n = \frac{c[(1+k)^n - 1]}{k}, \qquad n \le T,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (신중을 기하려면 수학적 귀납법(induction)으로 확인한다. 이 식은 $S_0 = 0$을 주고, S_{n-1}에 대해 성립하면 $(1+k)S_{n-1} + c = \frac{c}{k}[(1+k)^n - (1+k) + k]$이며, 이는 S_n에 대한 식이다.)

터널이 개통된 뒤의 빚

제 $T+1$일부터는 더 이상 굴착이 없다. 매일 빚에는 이자 kS가 붙고 회사는 d를 갚으므로, 빚이 아직 양수인 동안에는

$$S_{T+j} = (1+k)S_{T+j-1} - d.$$

이것은 앞의 점화식에서 c를 $-d$로 바꾼 것과 같지만, 이번에는 0이 아니라 S_T에서 출발한다. 이를 m번 펼치면

$$\begin{aligned} S_{T+m} &= (1+k)^m S_T - d[1 + (1+k) + \cdots + (1+k)^{m-1}] \\ &= (1+k)^m S_T - \frac{d[(1+k)^m - 1]}{k}. \end{aligned}$$

첫 번째 부분에서 구한 S_T를 대입하면

$$S_{T+m} = \frac{c[(1+k)^T - 1](1+k)^m - d[(1+k)^m - 1]}{k}.$$

이 점화식은 빚을 아직 갚아 나가는 동안에만 적용되므로 $S_{T+m} > 0$이어야 한다. 빚을 다 갚는 날에는 회사가 d 전액이 아니라 남은 빚만큼만 낸다.

빚을 다 갚는 시점

$(1+k)^m$이 들어 있는 항끼리 모으면

$$S_{T+m} = \frac{d}{k} - \frac{(1+k)^m}{k}\Big(d - c[(1+k)^T - 1]\Big).$$

? 생각해 보기 조건 $d/c > (1+k)^T - 1$은 돈의 관점에서 실제로 무엇을 뜻하는가?

양변에 c를 곱하면 $d > c[(1+k)^T - 1] = kS_T$가 된다. 즉, 첫날의 수입이 터널 개통 시점의 빚에 붙는 이자보다 크다는 뜻이다. 따라서 제 $T+1$일에 빚이 줄어들고, 그러면 이자도 줄어들므로 빚은 점점 더 빠르게 줄어든다. 이를 대수적으로 엄밀하게 밝혀 보자.

$d > c[(1+k)^T - 1]$이라 가정하고 $\delta = d - c[(1+k)^T - 1] > 0$이라 쓰자. 그러면

$$S_{T+m} = \frac{d - \delta(1+k)^m}{k}.$$

$1+k > 1$이므로 $m \to \infty$일 때 $(1+k)^m \to \infty$이고, 따라서 $\delta(1+k)^m$은 결국 d보다 커진다. 이 식은 빚이 양수인 동안에만 성립하므로 영원히 성립할 수는 없다. 남은 빚이 d에 그날의

이자를 더한 값 이하가 되는 첫날이 있고, 그날 회사는 빚을 모두 갚는다. 실제로 빚은 다음을 만족하는 가장 작은 m에 대하여 제 $T+m$일에 청산된다.

$$(1+k)^m \geq \frac{d}{\delta}, \qquad \text{즉,} \qquad m \geq \frac{\ln(d/\delta)}{\ln(1+k)}.$$

따라서 $d/c > (1+k)^T - 1$이면 회사는 결국 빚을 모두 갚으며, 이것이 보이려던 것이다.

이 조건은 필요조건(necessary condition)이기도 하다. $d \leq kS_T$이면 $\delta \leq 0$이고, $S_T = (d-\delta)/k$이므로 모든 m에 대하여

$$S_{T+m} - S_T = \frac{-\delta[(1+k)^m - 1]}{k} \geq 0$$

이다. 빚은 결코 S_T 아래로 내려가지 않으므로 절대 다 갚을 수 없다.

검산

- $n = 1$을 대입하면 $S_1 = c$이다. 제 1일에는 빚진 것이 없어 이자가 붙지 않으므로 옳다.
- S_{T+m}의 식에 $m = 0$을 대입하면 당연히 S_T가 나온다.
- 정확히 $d = kS_T$이면 $\delta = 0$이고 모든 m에 대하여 $S_{T+m} = d/k = S_T$이다. 수입이 이자를 딱 메울 뿐이어서 빚은 전혀 변하지 않는다. 이것이 경계의 경우이다.
- $c = 100$, $k = 0.01$, $T = 30$으로 하루씩 모의 계산하면 $S_T \approx 3478.49$이고, 식도 같은 값을 준다. 기준값은 $d > 34.78$이다. $d = 50$이면 $m = 120$일 뒤에 빚이 청산되며, 이는 $\ln(50/15.22) / \ln 1.01 \approx 119.6$과 맞아떨어진다.

흔한 실수

- 제 1일에 이자를 붙이거나, 급수의 항을 $n+1$개로 세는 실수. $S_0 = 0$이므로 첫날의 비용은 정확히 c이다.
- 제 T일 이후에는 급수가 0이 아니라 S_T에서 출발한다는 것을 잊는 실수. $(1+k)^m S_T$ 항을 빠뜨리기 쉽다.
- "d가 c보다 크기 때문에" 빚을 다 갚는다고 말하는 실수. 중요한 것은 d와 개통 시점의 이자 kS_T의 비교이다.

STEP 너머

점화식 $S_n = aS_{n-1} + b$는 가장 간단한 **선형 1계 차분방정식**(*linear first-order difference equation*)이다. 그 해는 고정점(fixed point) $b/(1-a)$에 a^n의 상수배를 더한 것이며, 이는

바로 우리 식의 모양, 즉 d/k에 $(1+k)^m$의 상수배를 더한 꼴이다. 그 상수배가 양수인지 음수인지에 따라 빚이 불어나는지 상환되는지가 결정되는데, 이 아이디어는 고정점의 안정성(stability)과 선형 상미분방정식(linear ODE)에서 다시 나타난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 차분방정식을 미분방정식과 나란히 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 점화식에 관한 STEP 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 1988, 문제 6

순수수학 • 반복 미분

> **STEP III 1988, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q6

핵심 아이디어

곱을 직접 1988번 미분하는 것은 가망이 없지만, 사인과 코사인의 곱은 **합**으로 다시 쓸 수 있다. 그러면 각 항 $\sin kx$는 네 단계의 주기로 미분되며, 미분할 때마다 인수 k가 하나씩 붙는다. 영점(zero)에 대해서는 $\sin 3x$ 앞에 붙은 거대한 인수 3^{1988} 때문에 도함수(derivative)는 $\sin 3x$가 거의 0인 곳에서만 0이 될 수 있다. 따라서 $\sin 3x$의 첫 번째 영점 바로 다음을 살펴보고 선형 근사(linearise)한다.

풀이

1988계 도함수

곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula) $2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$에 의해

$$\mathrm{f}(x) = \sin 2x\cos x = \tfrac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin x\right).$$

$\sin kx$를 네 번 미분하면

$$\sin kx \;\to\; k\cos kx \;\to\; -k^2\sin kx \;\to\; -k^3\cos kx \;\to\; k^4\sin kx,$$

이므로, 네 번 미분할 때마다 $\sin kx$에 단순히 k^4가 곱해진다. (같은 말로, $\sin kx$의 n계 도함수는 $k^n\sin\left(kx+\frac{1}{2}n\pi\right)$이다.) $1988 = 4\times 497$이므로

$$\mathrm{f}^{(1988)}(x) = \tfrac{1}{2}\left(3^{1988}\sin 3x + \sin x\right).$$

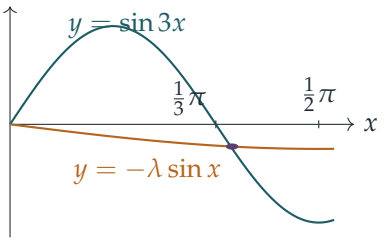
가장 작은 양의 영점

다음을 만족하는 가장 작은 $x > 0$을 구해야 한다.

$$3^{1988}\sin 3x + \sin x = 0. \qquad (*)$$

$(0, \frac{1}{3}\pi]$에는 영점이 없다. $0 < x < \frac{1}{3}\pi$이면 $0 < 3x < \pi$이므로 $\sin 3x$와 $\sin x$가 모두 양수이고, $(*)$의 좌변은 양수이다. $x = \frac{1}{3}\pi$에서 좌변은 $0 + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$이다.

$\frac{1}{3}\pi$ 바로 다음의 영점. $x = \frac{1}{2}\pi$에서 좌변은 $3^{1988}\sin\frac{3}{2}\pi + 1 = 1 - 3^{1988} < 0$이다. 좌변은 연속이므로 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 영점이 존재하며, 가장 작은 양의 영점은 이들 중 첫 번째 것이다. 이를 $0 < \epsilon < \frac{1}{6}\pi$인 $x = \frac{1}{3}\pi + \epsilon$으로 쓰자.



위 그림은 $\lambda = 3^{-1988}$으로 두고 $(*)$를 $\sin 3x = -\lambda \sin x$로 나타낸 것이다(실제보다 훨씬 크게 그렸다). 두 곡선은 $\sin 3x$가 $\frac{1}{3}\pi$에서 0을 지난 직후에 처음 만난다. 실제의 아주 작은 λ에 대해서는 이 교점이 거의 $\frac{1}{3}\pi$ 위로 밀려난다.

$\sin(\pi + 3\epsilon) = -\sin 3\epsilon$이므로 방정식 $(*)$는 다음이 된다.

$$3^{1988}\sin 3\epsilon = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi + \epsilon\right). \qquad (**)$$

? 생각해 보기 $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$을 써도 될 만큼 ϵ이 작다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

$(**)$의 우변은 많아야 1이므로 $\sin 3\epsilon \le 3^{-1988}$이다. $0 < 3\epsilon < \frac{1}{2}\pi$이고, $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 $\sin t \ge \frac{2t}{\pi}$이므로(그 구간에서 사인 곡선은 현(chord)보다 위에 있다) $3\epsilon \le \frac{\pi}{2}3^{-1988}$을 얻는다. 따라서 ϵ은 천문학적으로 작으며, 이것이 아래의 근사를 정당화한다.

ϵ이 이렇게 작으므로 $\sin 3\epsilon = 3\epsilon\,(1 + O(\epsilon^2))$이고 $\sin(\frac{1}{3}\pi + \epsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\epsilon)$이다. 이를 $(**)$에 대입하면

$$3^{1989}\epsilon \approx \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{이므로} \qquad \epsilon \approx \frac{3^{-1989}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^{-1988}\sqrt{3}}{2},$$

이며, 상대 오차(relative error)는 3^{-1988} 정도이다.

시험지에 인쇄된 값에 대하여. 시험지는 $\epsilon \approx \frac{1}{2}3^{-1988}\sqrt{3}$을 요구하는데, 이는 여기서 구한 값의 세 배이다. 인수 3은 $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$에서 나오며, 아래의 수치 검산도 3^{-1988}이 아니라 3^{-1989}임을 확인해 준다. 따라서 문제에 실수가 있는 것으로 보인다. 문제가 의도한 방법은 위와 정확히 같고, 3의 거듭제곱 지수만 하나 어긋나 있다. 3^{-1989}을 얻었다면 자신의 풀이를 믿어라.

검산

- 같은 논증은 4의 임의의 배수 n에 대해 성립한다. $3^n \sin 3x + \sin x$의 첫 번째 양의 영점은 $\frac{1}{3}\pi + \epsilon_n$이고 $\epsilon_n \approx \frac{1}{2}3^{-(n+1)}\sqrt{3}$이다. $n = 4$일 때 수치적으로 풀면 $\epsilon_4 = 3.5713 \times 10^{-3}$이고, 예측값은 $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^5 = 3.5640 \times 10^{-3}$이다(비 1.0021). $n = 8$이면 비는 1.000025이고, $n = 40$ 이상이면 기계 정밀도(machine precision) 안에서 1이다. $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^n$에 대한 비는 $\frac{1}{3}$으로 수렴한다.
- 도함수 공식은 처음 몇 경우로 확인할 수 있다. $f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(81\sin 3x + \sin x)$이며, 이는 $\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$를 네 번 미분하여 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 부호나 위상을 틀리는 것: $\sin kx$는 4의 배수 번 미분한 뒤에야 $+k^n \sin kx$로 돌아온다.
- $(0, \frac{1}{3}\pi)$에 영점이 없음을 보이는 것을 잊는 것: 그 구간에서의 부호 논증이 $\frac{1}{3}\pi + \epsilon$을 **가장 작은** 양의 영점으로 만들어 준다.
- $\sin(\pi + 3\epsilon) \approx \epsilon$이라고 써서, -3ϵ의 부호나 인수 3을 잃어버리는 것.

STEP 너머

둘째 부분은 **섭동 이론**(perturbation theory)의 간단한 예이다. 큰 매개변수 때문에 해가 이미 알고 있는 근에 아주 가까이 놓이게 되고, 그 근 주위에서 선형 근사하면 주된 보정항을 얻으며, 오차의 크기는 테일러 급수(Taylor series)의 다음 항으로 조절된다. "근사적으로 같다"는 말을 $O(\cdot)$ 표기와 오차 한계로 엄밀하게 만드는 것은 대학 첫 해석학(analysis) 강의의 핵심 주제이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP III 1988, 문제 7

순수수학 • 미분방정식과 직교성

STEP III 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.6 절 **양자 진동자**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/quantum-oscillator.html

핵심 아이디어

첫 번째 부분은 순전히 대입(substitution)의 문제이다. 시험 함수를 두 번 미분하고 x의 거듭제곱의 계수를 비교하면 λ가 결정된다. 두 번째 부분은 고전적인 "론스키안(Wronskian) 기법"이다. 결합 $y_m y_n' - y_n y_m'$의 도함수에서는 다루기 까다로운 $\omega^2 x^2$ 항들이 소거되고 $y_m y_n$의 상수배만 남는다. 그러면 이 도함수를 실수 전체에서 적분하는 것은 쉽다. $\pm\infty$에서의 조건 때문에 경계항(boundary terms)이 사라지기 때문이다.

풀이

이 풀이 전체에서 프라임은 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$를 나타낸다. 방정식을 다음과 같이 써 두면 편리하다.

$$y_n'' = \left(\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega\right) y_n. \qquad (*)$$

$n = 0$인 경우

$y_0 = \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$이라 하면

$$y_0' = -2\lambda x\, \mathrm{e}^{-\lambda x^2}, \qquad y_0'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)\, \mathrm{e}^{-\lambda x^2}.$$

이를 $n = 0$일 때의 $(*)$에 대입하고 0이 아닌 인수 $\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$을 약분하면, 다음이 성립해야 한다.

$$4\lambda^2 x^2 - 2\lambda = \omega^2 x^2 - \omega \quad \text{모든} x.$$

상수항을 비교하면 $\lambda = \frac{1}{2}\omega$이고, 이때 $4\lambda^2 = \omega^2$이므로 x^2 항도 일치한다. ($4\lambda^2 = \omega^2$의 다른 근 $\lambda = -\frac{1}{2}\omega$는 상수항 조건을 만족하지 않는다.)

$n = 1$인 경우

$y_1 = x\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$이라 하면

$$\begin{aligned} y_1' &= (1 - 2\lambda x^2)\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2}, \\ y_1'' &= \big(-4\lambda x - 2\lambda x(1 - 2\lambda x^2)\big)\mathrm{e}^{-\lambda x^2} = (4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2}. \end{aligned}$$

$n = 1$일 때의 방정식 $(*)$는 $y_1'' = (\omega^2 x^2 - 3\omega)\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$을 요구한다. 즉

$$4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x = \omega^2 x^3 - 3\omega x \quad \text{모든} x,$$

이고, 이 역시 정확히 $\lambda = \frac{1}{2}\omega$일 때 성립한다. 따라서 두 함수 모두에 **같은** 상수가 통한다.

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\omega, \qquad y_0 = \mathrm{e}^{-\omega x^2/2}, \qquad y_1 = x\,\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}.$$

무한대에서의 조건

$\lambda = \frac{1}{2}\omega > 0$이므로, (다항식)$\times \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ 꼴의 함수는 모두 $x \to \pm\infty$일 때 0으로 수렴(converge)한다. $\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$이 감소하는 속도가 x의 어떤 거듭제곱이 증가하는 속도보다도 빠르기 때문이다. 함수 y_0, y_0', y_1, y_1'은 모두 이 꼴이므로(각각의 다항식은 1, $-2\lambda x$, x, $1 - 2\lambda x^2$이다), 네 함수 모두 양 끝에서 0으로 수렴하여 요구 조건을 만족한다.

항등식

곱의 미분법(product rule)에 의해 $y_m' y_n'$ 항들이 소거된다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(y_m y_n' - y_n y_m'\big) = y_m' y_n' + y_m y_n'' - y_n' y_m' - y_n y_m'' = y_m y_n'' - y_n y_m''.$$

이제 y_n''과 y_m'' 모두에 $(*)$를 적용하면

$$\begin{aligned} y_m y_n'' - y_n y_m'' &= \big(\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega\big) y_m y_n - \big(\omega^2 x^2 - (2m+1)\omega\big) y_m y_n \\ &= \big((2m+1) - (2n+1)\big)\,\omega\, y_m y_n \\ &= 2(m-n)\,\omega\, y_m y_n, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

직교성

> **생각해 보기** 이상적분이 0임을 보이기 전에, 그 적분이 애초에 존재한다는 것은 어떻게 알 수 있을까?

먼저 유한 구간에서 다룬 다음 양 끝을 각각 따로 무한대로 보낸다. 그러면 존재성은 저절로 따라온다. $W = y_m y_n' - y_n y_m'$이라 하자. 임의의 $S, R > 0$에 대하여 항등식을 $-S$부터 R까지 적분하면

$$2(m-n)\,\omega \int_{-S}^{R} y_m y_n \,\mathrm{d}x = W(R) - W(-S).$$

$R \to \infty$일 때 주어진 조건에 의해 y_m, y_n, y_m', y_n'이 각각 0으로 수렴하므로 $W(R) \to 0$이다. 마찬가지로 $S \to \infty$일 때 $W(-S) \to 0$이다. 따라서 우변이 0으로 수렴하므로, 적분 $\int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n \,\mathrm{d}x$는 수렴하고

$$2(m-n)\,\omega \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n \,\mathrm{d}x = 0.$$

$m \neq n$이면 $\omega > 0$이므로 $2(m-n)\omega \neq 0$이다. 이것으로 나누면

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m(x)\, y_n(x) \,\mathrm{d}x = 0,$$

이 되어 증명이 끝난다. 이 논증에는 방정식과 양 끝 조건만 필요했다는 점에 주목하자. y_m이나 y_n의 식은 전혀 필요하지 않았다.

검산

- $m = 0, n = 1$인 경우는 결과가 바로 자명하다. $y_0 y_1 = x\,\mathrm{e}^{-\omega x^2}$은 홀함수(odd function)이므로 실수 전체에서의 적분은 0이다.
- 덜 자명한 검사: $y_2 = (2\omega x^2 - 1)\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$는 $n = 2$일 때의 방정식을 만족한다(직접 확인해 보라). $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/\omega}$와 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega}$를 이용하면 $\int y_0 y_2 \,\mathrm{d}x = 2\omega \cdot \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega} - \sqrt{\pi/\omega} = 0$을 얻는다.
- 수치적으로, $\lambda = \frac{1}{2}\omega$일 때 $n = 0, 1, 2$에 대해 임의의 점에서 방정식의 잔차(residual)는 10^{-6} 미만이었다. 도함수 항등식은 유한 차분(finite differences)으로 10^{-4} 이내에서 성립했다. 또 $[-30, 30]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $\omega = 0.5, 1, 2.5$에 대해 $\int y_0 y_1$, $\int y_0 y_2$, $\int y_1 y_2$가 모두 10^{-15}보다 작았다.

흔한 실수

- x^2의 계수만 비교하여 $\lambda = \pm\frac{1}{2}\omega$를 얻는 것: 상수항 조건이 음의 부호를 배제한다(무한대에서의 감소 조건도 마찬가지이다).

- 경계항이 사라지는 이유를 밝히지 않는 것: 바로 이 부분에서 y_n에 대한 조건과 y_n'에 대한 조건이 모두 쓰인다.
- $m - n$이 0이 아니라는 것과 $\omega > 0$이라는 것을 언급하지 않고 $m - n$으로 나누는 것.

STEP 너머

이것은 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)이다. y_n은 그 에너지 상태이고, $(2n + 1)\omega$는 (상수배를 제외하면) 그 에너지 준위이며, 이 함수들은 에르미트 다항식(Hermite polynomials)에 가우스 함수(Gaussian)를 곱한 것이다. 직교성(orthogonality) 논증은 슈투름–리우빌 이론(Sturm–Liouville theory)의 특수한 경우이다. 이 이론은 자기수반 미분 연산자(self-adjoint differential operator)의 서로 다른 고윳값(eigenvalue)에 대응하는 고유함수(eigenfunction)들이 항상 직교함을 보여 준다. 이는 대칭행렬(symmetric matrix)의 고유벡터(eigenvector)들이 직교하는 것과 같다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 경곗값 문제와 슈투름–리우빌 이론을 다룬다.

풀이

STEP III 1988, 문제 8

순수수학 • 포물선의 접선과 법선

> **STEP III 1988, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q8

핵심 아이디어

모든 직선을 매개변수(parameter) t로 나타내고, 두 직선씩 만나는 점을 구한 다음, 그 꼭짓점(vertex)들을 행렬식(determinant)에 넣는다. 행렬식은 복잡해 보이지만 t_1, t_2, t_3에 대해 반대칭(antisymmetric)이므로, 각각은 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$의 배수여야 한다. 간단한 행 연산과 열 연산으로 이 인수를 끌어내면 두 넓이의 비교만 남는다.

(인쇄된 문제는 A_3를 구하라고 하지만, 이는 법선 삼각형의 넓이 A_2의 오식이다.)

풀이

접선과 법선

$x = at^2$, $y = 2at$를 따라 $y^2 = 4ax$를 t에 대해 미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$이다. $(at^2, 2at)$에서의 접선(tangent)은 $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$, 즉

$$ty = x + at^2.$$

이다. 이 꼴은 $t = 0$일 때에도 성립한다(꼭짓점에서의 접선은 $x = 0$이다). 법선(normal)의 기울기(gradient)는 $-t$이므로

$$y + tx = 2at + at^3.$$

이다. 앞으로 계속 $a \neq 0$이라 가정한다.

접선 삼각형

t_i와 t_j에서의 접선의 방정식을 빼면 $(t_i - t_j)y = a(t_i^2 - t_j^2)$이다. $t_i \neq t_j$이므로 나눌 수 있고, 따라서 $y = a(t_i + t_j)$이며 $x = t_i y - at_i^2 = at_i t_j$이다. 그러므로

$$\text{매개변수} t_i, t_j \text{에서의 접선의 교점은} \big(at_i t_j,\ a(t_i + t_j)\big).$$

접선들의 기울기 $1/t_i$는 서로 다르므로(또는 하나는 수직선이므로) 어느 두 접선도 평행하지 않고, 삼각형이 존재한다. $s = t_1 + t_2 + t_3$이라 하자. P_1의 맞은편 꼭짓점은 $(at_2t_3,\ a(s - t_1))$이고, 나머지도 마찬가지이다. 처음 두 열에서 인수 a를 꺼내고, 2열에 3열의 $-s$배를 더한 다음 2열의 부호를 바꾸면

$$\det\begin{pmatrix} at_2t_3 & a(s-t_1) & 1 \\ at_1t_3 & a(s-t_2) & 1 \\ at_1t_2 & a(s-t_3) & 1 \end{pmatrix} = -a^2 \det\begin{pmatrix} t_2t_3 & t_1 & 1 \\ t_1t_3 & t_2 & 1 \\ t_1t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} = a^2 D,$$

이다. 여기서 처음 두 열을 맞바꾸었고, 다음과 같이 두었다.

$$D = \det\begin{pmatrix} t_1 & t_2t_3 & 1 \\ t_2 & t_1t_3 & 1 \\ t_3 & t_1t_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D를 계산하기 위해 1행을 1행 − 2행으로, 2행을 2행 − 3행으로 바꾼다. 1행은 $(t_1 - t_2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(1,\ -t_3,\ 0)$이 되고, 2행은 $(t_2 - t_3)(1,\ -t_1,\ 0)$이 된다. 마지막 열을 따라 전개하면

$$D = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\det\begin{pmatrix} 1 & -t_3 \\ 1 & -t_1 \end{pmatrix} = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1).$$

이다. 따라서

$$A_1 = \tfrac{1}{2}a^2\,\big|(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)\big|,$$

이고, t_i가 서로 다르므로 이 값은 0이 아니다.

법선 삼각형

t_i와 t_j에서의 법선의 방정식을 빼면 $(t_i - t_j)x = 2a(t_i - t_j) + a(t_i^3 - t_j^3)$이므로, $t_i - t_j \neq 0$으로 나누면

$$x = 2a + a(t_i^2 + t_it_j + t_j^2), \qquad y = 2at_i + at_i^3 - t_ix = -at_it_j(t_i + t_j).$$

이다. 법선들의 기울기 $-t_i$는 서로 다르므로, 이번에도 모든 두 법선은 서로 만난다. P_1의 맞은편 꼭짓점에 대해 $t_2 + t_3 = s - t_1$을 이용하고 $e_1 = t_2t_3$이라 하자(또 $e_2 = t_1t_3$, $e_3 = t_1t_2$라 하자). 그러면

$$t_2^2 + t_2t_3 + t_3^2 = (t_2 + t_3)^2 - t_2t_3 = (s - t_1)^2 - e_1, \qquad -t_2t_3(t_2 + t_3) = -se_1 + p,$$

이고, 여기서 $p = t_1t_2t_3$이다. 그러므로 꼭짓점은 $a\big(2 + (s-t_1)^2 - e_1,\ -se_1 + p\big)$이고, 나머지도 마찬가지이다. 이제 a^2을 꺼내고, 행렬식을 바꾸지 않는 열 연산을 한다. 1열에서 3열의 2배를 빼고, 2열에서 3열의 p배를 뺀 다음, 2열에서 인수 $-s$를 꺼낸다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}\det(\text{법선 삼각형의 꼭짓점}) &= \det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & -se_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3}\\ &= -s\det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & e_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3},\end{aligned}$$

여기서 각 식은 전형적인 i행을 나타낸다. 다음으로 1열에 2열을 더해 $-e_i$를 없애고, $(s-t_i)^2 = s^2 - 2st_i + t_i^2$으로 전개한다. s^2은 3열의 배수이므로 없앨 수 있고, 행렬식은 1열에 대해 선형이다.

$$\det\begin{pmatrix}t_i^2 - 2st_i & e_i & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}t_i^2 & e_i & 1\end{pmatrix} - 2s\det\begin{pmatrix}t_i & e_i & 1\end{pmatrix} = E - 2sD,$$

라 하자. 두 번째 행렬식은 정확히 D이다.

? 생각해 보기 행이 $(t_i^2,\ e_i,\ 1)$인 행렬식 E는 어떻게 계산할까?

D에서와 같은 행 연산을 쓴다. 1행 − 2행은 $(t_1^2 - t_2^2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2,\ -t_3,\ 0)$이고, 2행 − 3행은 $(t_2 - t_3)(t_2 + t_3,\ -t_1,\ 0)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}E &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\big[-t_1(t_1 + t_2) + t_3(t_2 + t_3)\big]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\big[(t_3^2 - t_1^2) + t_2(t_3 - t_1)\big]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 + t_2 + t_3) = sD.\end{aligned}$$

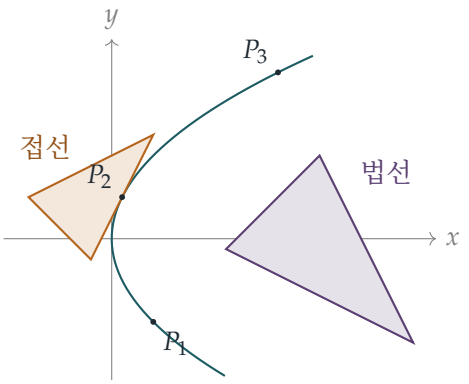
이다. 모두 종합하면

$$\det(\text{법선 삼각형의 꼭짓점}) = a^2 \cdot (-s)\,(sD - 2sD) = a^2s^2D.$$

이다. 절댓값의 절반을 취하고 $A_1 = \frac{1}{2}a^2|D|$와 비교하면

$$A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.



그림은 $a = 1, t_1, t_2, t_3 = -1, \frac{1}{2}, 2$로 잡은 것이므로 $s = \frac{3}{2}$이다. 접선 삼각형(호박색)의 넓이는 $\frac{27}{8}$이고, 법선 삼각형(자주색)의 넓이는 $\frac{243}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{27}{8}$이다.

법선이 한 점에서 만나는 것은 언제인가?

어느 두 법선도 평행하지 않으므로, 법선들은 두 개씩 세 점 Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}에서 만난다. 법선들이 한 점에서 만나면(concurrent) 이 점들은 일치하고 삼각형의 넓이는 0이다. 역으로, 넓이가 0이지만 세 점이 모두 같지는 않다고, 예컨대 $Q_{12} \neq Q_{13}$이라고 하자. 두 점은 모두 P_1에서의 법선 위에 있으므로, 두 점을 지나는 직선은 그 법선이다. 세 점은 한 직선 위에 있으므로(collinear) Q_{23}도 P_1에서의 법선 위에 있다. 그러면 Q_{23}은 세 법선 모두 위에 있으므로 $Q_{23} = Q_{12}$(P_1과 P_2에서의 법선의 유일한 공통점)이고, 마찬가지로 $Q_{23} = Q_{13}$이 되어 모순이다. 따라서

$$\text{법선이 한 점에서 만남} \iff A_2 = 0 \iff (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1 = 0 \iff t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

이다. 여기서 t_i가 서로 다르므로 $A_1 \neq 0$임을 이용했다. 구하는 조건은 $t_1 + t_2 + t_3 = 0$이다.

검산

- $t_1, t_2, t_3 = 0, 1, 2$, $a = 1$이면 접선 삼각형의 꼭짓점은 $(2,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$이고 넓이는 1이며, $\frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|(-1)(-1)(2)| = 1$이다.
- $t = 1, 2, -3$(합이 0, $a = 1$)에서의 법선은 모두 $(9, -6)$을 지난다. 예를 들어 $t = 1$에서의 법선은 $y + x = 3$이다.
- 컴퓨터로 a와 서로 다른 t_i를 무작위로 약 2,800번 골라 분수로 꼭짓점을 정확히 계산했고, 매번 $A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1$임을 확인했다.

흔한 실수

- 세 직선이 실제로 삼각형을 이룬다는 것을 정당화하지 않는 것. 필요한 것은 어느 두 직선도 평행하지 않다는 것이고, 여기서는 기울기가 서로 다르다는 데서 나온다.
- 근거 없이 $A_2 = 0$에서 한 점에서 만난다고 결론짓는 것. 넓이가 0이라는 것은 세 교점이 한 직선 위에 있다는 것만 말해 주며, 위의 짧은 논증이 이를 "같음"으로 끌어올린다.
- 3×3 행렬식을 전부 전개하는 것. 가능하기는 하지만 부호 실수가 거의 확실히 생긴다. 먼저 행 연산으로 $(t_i - t_j)$를 인수로 꺼내자.

STEP 너머

인수 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$은 방데르몽드 행렬식(Vandermonde determinant)이고, $E = sD$에서 곱해진 인수 $t_1 + t_2 + t_3$은 대칭 다항식(symmetric polynomial)이다. 모든 반대칭 다항식은 방데르몽드 곱과 어떤 대칭 다항식의 곱이며, 이 사실은 행렬식과 대칭 함수의 이론에서 다시 등장한다. 법선 삼각형은 포물선(parabola)의 **축폐선**(evolute)과 관련이 있는데, 축폐선은 곡률 중심(centres of curvature)이 그리는 곡선이며 법선들의 포락선(envelope)이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 행렬식과 그 행 연산을 잘 다룬다.

풀이

STEP III 1988, 문제 9

순수수학 • 군 원소의 위수

> **STEP III 1988, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q9

핵심 아이디어

소문항 (i)은 나눗셈 정리(division algorithm)를 모양만 바꾼 것이다. N을 n의 배수와 나머지의 합으로 쓰면, n의 최소성 때문에 나머지가 0이 될 수밖에 없다. 소문항 (ii)가 성립하는 까닭은 g에 의한 켤레(conjugation)가 곱을 보존하기 때문이다. 그래서 켤레들의 곱에서는 안쪽의 $g^{-1}g$ 쌍이 모두 소거된다. 소문항 (iii)에서는 g에 의한 켤레를 거듭 적용한다. $g^5 = e$이므로 다섯 번 적용하면 h가 자기 자신으로 돌아오고, 이로부터 h의 위수(order)가 결정된다.

풀이

소문항 (i)

나눗셈 정리에 의해 q를 정수, $0 \le r < n$으로 하여 $N = qn + r$로 쓸 수 있다. (이는 0이나 음의 정수를 포함하여 모든 정수 N에 대해 성립한다.) 그러면 $g^n = e$이므로

$$e = g^N = (g^n)^q \, g^r = e^q g^r = g^r.$$

만약 r이 양수라면, r은 $g^r = e$를 만족하는 n보다 작은 양의 정수가 되는데, 이는 $n = o(g)$를 그러한 정수 중 **가장 작은** 것으로 정의한 데에 모순이다. 따라서 $r = 0$이므로 $N = qn$이고, n은 N을 나눈다.

소문항 (ii)

$m = 0$인 경우: 양변이 모두 e이다.

$m \ge 1$인 경우: m에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. $m = 1$인 경우는 자명하다.

$gh^m g^{-1} = (ghg^{-1})^m$이라 하면

$$(ghg^{-1})^{m+1} = (ghg^{-1})^m (ghg^{-1}) = (gh^m g^{-1})(ghg^{-1})$$
$$= gh^m (g^{-1}g) hg^{-1} = gh^{m+1}g^{-1},$$

이므로 귀납법이 완성된다. (풀어 쓰면 $(ghg^{-1})(ghg^{-1})\cdots(ghg^{-1})$은 연쇄적으로 소거(telescoping)된다. 즉 가운데에 있는 모든 $g^{-1}g$가 소거된다.)

$m \le -1$인 경우: 먼저 ghg^{-1}의 역원(inverse)은 $gh^{-1}g^{-1}$이다. 왜냐하면

$$(ghg^{-1})(gh^{-1}g^{-1}) = gh(g^{-1}g)h^{-1}g^{-1} = ghh^{-1}g^{-1} = e.$$

이제 $k \ge 1$로 하여 $m = -k$로 쓰자. h 대신 원소 h^{-1}에 양수인 경우의 결과를 적용하면

$$gh^m g^{-1} = g(h^{-1})^k g^{-1} = (gh^{-1}g^{-1})^k = \left((ghg^{-1})^{-1}\right)^k = (ghg^{-1})^{-k} = (ghg^{-1})^m.$$

따라서 이 항등식은 모든 정수 m에 대해 성립한다.

소문항 (iii)

$ghg^{-1} = h^2$를 쓰고, 이어서 $m = 2$일 때의 소문항 (ii)를 쓰면

$$g^2 hg^{-2} = g\,(ghg^{-1})\,g^{-1} = gh^2 g^{-1} = (ghg^{-1})^2 = (h^2)^2 = h^4,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

같은 단계를 매번 똑같이 적용할 수 있다. 모든 $k \ge 0$에 대해 $g^k hg^{-k} = h^{2^k}$임을 보이자. $k = 0$일 때 이는 참이고, k일 때 성립한다면 $m = 2^k$일 때의 소문항 (ii)에 의해

$$g^{k+1} hg^{-(k+1)} = g\,(g^k hg^{-k})\,g^{-1} = gh^{2^k} g^{-1} = (ghg^{-1})^{2^k} = (h^2)^{2^k} = h^{2^{k+1}}.$$

$k = 5$로 두고 $g^5 = e$(따라서 $g^{-5} = e$이기도 하다)를 이용한 뒤 h^{-1}을 곱하면 다음을 얻는다.

$$h = g^5 hg^{-5} = h^{32}, \qquad \text{따라서} \qquad h^{31} = e$$

> **생각해 보기** 우리는 $h^{31} = e$임을 안다. 왜 이로부터 $o(h)$가 단지 31 이하인 것이 아니라 정확히 31이 되는가?

소문항 (i)에 의해 $o(h)$는 31을 나눈다. 31은 소수(prime)이므로 $o(h)$는 1 또는 31이다. 그런데 $o(h) = 1$이면 $h = e$인데, 문제에서 그렇지 않다고 했다. 그러므로

$$o(h) = 31.$$

이러한 군은 실제로 존재하므로 주어진 조건들은 모순이 없다. 31을 법으로 하여 $h(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$로 주어지는 $\{0, 1, \ldots, 30\}$의 치환(permutation)을 생각하자. 그러면 $g^5(x) = 32x = x$이고 $ghg^{-1}(x) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = x + 2 = h^2(x)$이며, h의 위수는 실제로 31이다.

검산

- 소수 31이 나오는 것은 자연스럽다. g에 의한 켤레는 h의 거듭제곱에 "지수에 2를 곱한다"로 작용하고, 다섯 번 두 배를 하면 처음으로 돌아와야 하므로 $o(h)$를 법으로 $2^5 \equiv 1$이다. 다시 말해 $o(h)$는 $2^5 - 1 = 31$을 나눈다.
- 31을 법으로 한 치환 $g(x) = 2x$와 $h(x) = x + 1$로 컴퓨터 검산을 하여 $g^5 = e$, $ghg^{-1} = h^2$, $k = 0, \ldots, 5$에 대해 $g^k h g^{-k} = h^{2^k}$, 그리고 $o(h) = 31$임을 확인하였다. 또한 수백 개의 무작위 치환에 대해 $-12 \le m \le 12$의 범위에서 (i)과 (ii)를 시험하였다.

흔한 실수

- (ii)에서 $m \ge 1$인 경우만 증명하는 것. 문제에서는 **임의의 정수**라고 했으므로 $m = 0$과 음수 m에 대해서도 각각 (짧은) 논증이 필요하다.
- $h^{31} = e$로부터 곧바로 $o(h) = 31$이라고 결론짓는 것. 이것으로는 $o(h) \mid 31$만 알 수 있다. 31이 소수라는 사실과 $h \neq e$라는 조건도 함께 필요하다.

STEP 너머

사상 $x \mapsto gxg^{-1}$은 G의 **자기동형사상**(automorphism), 즉 구조를 보존하는 전단사(bijection)이며, 소문항 (ii)는 그 결과 중 하나이다. 소문항 (iii)은 **반직접곱**(semidirect product)의 작은 예이다. g와 h로 생성되는 군의 위수는 $5 \times 31 = 155$이고, 이 군이 존재하는 것은 31을 법으로 2의 위수가 5이기 때문이다. 이러한 구성은 위수가 작은 군을 분류하는 데 핵심적인 역할을 한다. 위수, 켤레, 라그랑주 정리(Lagrange's theorem)에 대해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보기를 권한다.

풀이

STEP III 1988, 문제 10

순수수학 • 추적 곡선

> **STEP III 1988, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.5 절 그레이하운드를 쫓는 그레이하운드에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/pursuit.html

핵심 아이디어

움직이는 개 네 마리를 따로따로 추적하려 하지 마라. 이 설정은 중심에 대한 4분의 1 회전(quarter-turn)에 대하여 변하지 않으므로, 개들은 항상 O를 중심으로 하는 정사각형의 꼭짓점에 있다. 이 정사각형은 줄어들면서 회전하지만 계속 정사각형이다. 따라서 A의 속도와 직선 AO 사이의 각이 고정되며, 속도와 반지름 사이의 각이 일정하다는 것이 바로 등각나선(equiangular spiral) $r = \lambda \mathrm{e}^{-k\theta}$를 만들어 내는 조건이다.

풀이

개들은 정사각형 위에 머문다

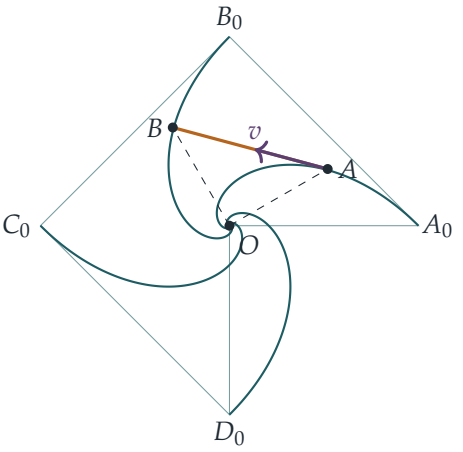
원점 O를 정사각형의 중심에 잡고, 개들에게 시계 반대 방향으로 이름을 붙여 B는 A에서 시계 반대 방향으로 4분의 1 회전한 위치에, C는 B에서 그만큼 회전한 위치에 있도록 하는 식으로 한다.

그림 전체를 O에 대하여 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시켜 보자. A, B, C, D의 출발 위치는 B, C, D, A의 출발 위치로 옮겨지고, "속력 v로 다음 개를 향해 곧장 달린다"는 규칙은 모든 개에게 똑같은 규칙이다. 따라서 회전시킨 운동 역시 같은 출발 배치에서 같은 규칙을 따르는 운동이다. 주어진 출발 상태에서의 운동은 유일하므로(개들이 서로 떨어져 있는 동안 속도는 위치의 매끄러운 함수이다), 회전시킨 운동이 곧 실제 운동이다. 다시 말해, 모든 순간에 B의 위치는 A의 위치를 O에 대하여 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 것이다. C와 D도 마찬가지이다. 따라서 $ABCD$는

항상 O를 중심으로 하는 정사각형이다.

속도와 반지름 사이의 각

극좌표(polar coordinates)로 A가 (r, θ)에 있다고 하자. 그러면 B는 $(r, \theta + \frac{\pi}{2})$에 있으므로 $OA = OB = r$이고 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$이다. 삼각형 OAB는 직각이등변삼각형(right-angled isosceles triangle)이므로 $\angle OAB = \frac{\pi}{4}$이다.



그림은 출발 꼭짓점 A_0, B_0, C_0, D_0에서 나선을 그리며 안쪽으로 들어가는 네 경로와, 어느 한 순간의 개 A와 B를 보여 준다. A의 속도(자주색)는 AB 방향을 향한다.

A의 속도는 크기가 v이고 AB 방향을 향하며, 이 방향은 안쪽을 향하는 반지름 AO와 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이룬다. 이를 지름 방향 성분(radial component, 바깥쪽이 양의 방향)과 횡방향 성분(transverse component, θ가 증가하는 방향)으로 나누면

$$\dot{r} = -v \cos \frac{\pi}{4}, \qquad r\dot{\theta} = v \sin \frac{\pi}{4}.$$

B가 A의 시계 반대 방향 쪽에 있어서 A가 시계 반대 방향으로 끌려 돌기 때문에 횡방향 성분은 양수이다.

? **생각해 보기** 이 두 식을 서로 나누는 것이 왜 정당한가?

개들이 서로 떨어져 있는 동안 $r\dot{\theta} = v/\sqrt{2} > 0$이므로, θ는 시간에 대하여 순증가한다. 따라서 경로를 따라가는 매개변수로 t 대신 θ를 쓸 수 있고, 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{-v/\sqrt{2}}{v/(\sqrt{2}r)} = -r.$$

경로 구하기

$r > 0$이므로 변수분리(separation of variables)를 할 수 있다. $\int \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\int \mathrm{d}\theta$이므로 $\ln r = -\theta + c$, 즉

$$r = \lambda \mathrm{e}^{-\theta}$$

이고, 여기서 $\lambda = \mathrm{e}^{c}$는 상수이다. 이것이 구하려는 결과이다. 시초선(initial line)을 OA_0로 잡아 출발할 때 $\theta = 0$이 되도록 하면, λ는 A와 O 사이의 처음 거리, 곧 한 변의 길이가 a인 정사각형에서 $a/\sqrt{2}$이다. 다른 시초선을 택하면 λ는 상수배만큼 달라질 뿐이다. (개들에게 시계 방향으로 이름을 붙였다면, θ를 시계 방향으로 재면 같은 식을 얻는다.)

개 n마리로의 일반화

정n각형(regular n-gon)의 꼭짓점에 있는 개 n마리(시계 반대 방향으로 이름을 붙이고, 각자 다음 개를 쫓는다)에 대해서도 $\frac{2\pi}{n}$만큼의 회전을 써서 같은 논증이 성립한다. 개들은 항상 O를 중심으로 하는 정n각형을 이룬다. 따라서 A가 (r, θ)에 있으면 다음 개 B는 $(r, \theta + \frac{2\pi}{n})$에 있다.

삼각형 OAB는 꼭지각이 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변삼각형이므로 각 밑각은

$$\angle OAB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

앞에서처럼 A의 속도를 분해하면

$$\dot{r} = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot{\theta} = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

$n \geq 3$이므로 $\cos\frac{\pi}{n} > 0$이고, 따라서 이번에도 θ는 꾸준히 증가하며

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\frac{\pi}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \lambda\,\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}.$$

$n = 4$이면 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$이므로 $r = \lambda\mathrm{e}^{-\theta}$를 다시 얻는다. 각 개는 등각나선, 곧 로그나선(logarithmic spiral)을 따라가며, 모든 반지름과 일정한 각 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$으로 만난다.

덤으로 얻는 멋진 결과가 있다. $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$이 상수이므로, r_0을 O로부터의 처음 거리라 할 때 개들은 시간 $r_0/(v\sin\frac{\pi}{n})$ 뒤에 O에서 만난다. 그동안 $\theta \to \infty$이어서 각 개가 O 둘레를 무한히 많이 돌지만, 각 개가 달린 거리는 유한한 값 $r_0/\sin\frac{\pi}{n}$이다. (정사각형의 경우 이 값은 한 변의 길이 a이다.)

검산

► $n = 4$일 때의 결과는 일반 공식에서 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$인 특수한 경우이다.

- $n \to \infty$이면 $\tan\frac{\pi}{n} \to 0$이고 경로는 원에 가까워진다. 각 개는 원 위에서 거의 바로 옆에 있는 이웃을 쫓고 있기 때문이다.
- 추격 과정을 수치적으로 모의실험하였다(개 $n = 3, 4, 5, 6, 8$마리에 대하여 RK4를 사용하고, 반지름 1에서 출발). 계산한 r는 $\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}$와 상대오차(relative error) 10^{-11} 이내로 일치하였다. $n = 4$일 때 $r = 0.02$에 이르기까지의 시간과 경로 길이는 $1.386 = 0.98\sqrt{2}$로 나왔으며, 이는 $(1 - 0.02)/\sin\frac{\pi}{4}$로 예측한 값과 같다.

흔한 실수

- 개들이 정다각형 위에 머문다는 사실을 먼저 정당화하지 않고 $\dot{r}$와 $r\dot{\theta}$를 적어 버리는 것. A에서의 각을 알 수 있게 해 주는 것은 바로 대칭 논증이다.
- AB와 반지름 AO 사이의 각($\frac{\pi}{4}$) 대신 다각형의 내각(정사각형에서는 $\frac{\pi}{2}$)을 쓰는 것.
- 속도의 횡방향 성분이 $\dot{\theta}$가 아니라 $r\dot{\theta}$라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 고전적인 **추적 문제**(*pursuit problem*)이다. 대칭을 이용한 단계는 미분방정식(differential equations)의 일반 원리의 한 예이다. 방정식과 초기 조건이 모두 어떤 대칭에 대하여 불변이면, 해의 유일성(uniqueness)에 의하여 해도 그 대칭에 대하여 불변일 수밖에 없다. 모든 반지름과 일정한 각으로 만나는 곡선이 바로 등각나선이다. 복소수꼴로 나타내면 $z = \mathrm{e}^{(-k+\mathrm{i})\theta}$이므로, 전체 운동은 평면의 연속적인 "나선 닮음변환(spiral similarity)"이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 전개하고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 해의 존재성과 유일성을 다룬다.

풀이

STEP III 1988, 문제 11

역학 • 마찰이 있는 사다리의 평형

> **STEP III 1988, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q11

핵심 아이디어

먼저 기하부터 정리한다. 지면, 경사로(ramp), 사다리는 각의 크기를 이미 알고 있는 삼각형을 이루고, 이로부터 매끄러운(smooth) 경사로가 사다리 꼭대기를 어느 방향으로 미는지 알 수 있다. 그다음은 사다리 문제의 표준 절차를 따른다. 두 방향으로 힘을 분해하고, 사다리 밑동에 대한 모멘트(moment)를 구한 뒤, 필요한 마찰력(friction)을 μ와 수직항력(normal reaction)의 곱과 비교한다. 인부의 위치는 모멘트 방정식에만 들어가므로, 하나의 일반적인 공식으로 두 소문항에 모두 답할 수 있다.

풀이

설정하기

사다리를 균일한 막대(uniform rod)로, 인부를 입자(particle)로 모형화한다. 경사로의 밑동을 A, 사다리의 밑동을 B, 경사로 위에 놓인 사다리의 꼭대기를 P라 하자.

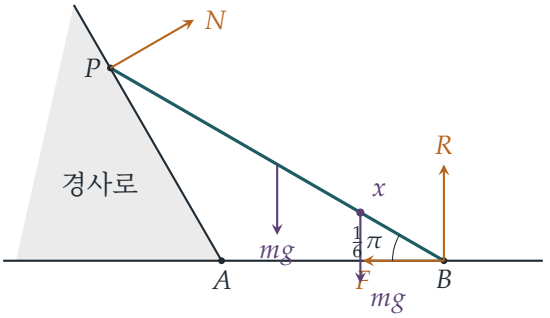
기하. 삼각형 ABP에서 B에서의 각은 $\frac{1}{6}\pi$(사다리의 기울기)이다. 경사로는 연직선과 $\frac{1}{6}\pi$를 이루므로, A의 반대쪽에서 수평선과 $\frac{1}{3}\pi$를 이룬다. 따라서 삼각형 내부의 A에서의 각은 $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$이고, P에서의 각은 $\frac{1}{6}\pi$가 남는다. 그러므로 이 삼각형은 $AP = AB$인 이등변 삼각형(isosceles triangle)이고, 사인 법칙(sine rule)에 의해

$$AB = \frac{l \sin \frac{1}{6}\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

이며, 이는 주어진 거리와 일치한다. 주어진 자료는 서로 모순이 없고, P는 실제로 경사로 위에 있다.

경사로 반작용의 방향. 경사로는 매끄러우므로, 경사로가 사다리에 작용하는 반작용 N은 경

사로에 수직이다. 경사로는 수평선과 $\frac{1}{3}\pi$를 이루므로, 그 법선은 수평선과 $\frac{1}{6}\pi$를 이루며 위쪽으로, 경사로에서 멀어지는 방향, 즉 B 쪽을 향한다. 따라서 N의 수평 성분은 사다리를 경사로에서 밀어내는 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$이고, 연직 성분은 위쪽으로 $\frac{1}{2}N$이다.



방정식. 인부가 B에서 사다리를 따라 거리 x만큼 올라가 있다고 하자. B에서 지면은 위쪽으로 수직항력 R를, 경사로 쪽 수평 방향으로 마찰력 F를 작용한다(그 밖의 유일한 수평력은 밑동을 경사로에서 밀어내는 N의 성분이므로, 마찰력은 그것에 맞서는 방향이어야 한다).

수평 방향과 연직 방향으로 분해하면

$$F = \tfrac{\sqrt{3}}{2}N, \qquad R + \tfrac{1}{2}N = 2mg.$$

R와 F가 사라지도록 B에 대한 모멘트를 구한다. B에서 사다리를 따라 거리 s만큼 올라간 점까지의 수평 거리는 $s\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}s$이다. N의 작용선(line of action)은 수평선과 $\frac{1}{6}\pi$를 이루고, BP는 수평선의 반대쪽으로 $\frac{1}{6}\pi$를 이루므로, N은 사다리와 $\frac{1}{3}\pi$의 각을 이룬다. B에 대한 N의 모멘트는 $Nl\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}Nl$이다. 따라서

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}Nl = mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{l}{2} + mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}x \quad\Longrightarrow\quad N = mg\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{l}\right).$$

? 생각해 보기 N의 모멘트는 왜 이렇게 간단하게 나올까?

N이 사다리와 $\frac{1}{3}\pi$의 각으로 만나므로, B에서 N의 작용선까지의 수직 거리는 $l\sin\frac{1}{3}\pi$이다. 또는 N을 성분으로 나누어 볼 수도 있다. 수평 성분 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$은 높이 $\frac{1}{2}l$에서 작용하고, 연직 성분 $\frac{1}{2}N$은 수평 거리 $\frac{\sqrt{3}}{2}l$에서 작용한다. 두 성분은 모두 $\frac{\sqrt{3}}{4}Nl$의 모멘트를 주고, 이를 더하면 $\frac{\sqrt{3}}{2}Nl$이 된다.

그러면 $0 \le x \le l$에 대하여 $R = 2mg - \frac{1}{2}N = mg\left(\frac{7}{4} - \frac{x}{2l}\right) > 0$이므로, 밑동은 지면에서 떨어지지 않는다. $F \le \mu R$인 한 사다리는 미끄러지지 않으며, 이는

$$\mu \ge \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}\,N}{4mg - N} = \frac{\sqrt{3}\,(l+2x)}{7l-2x}.$$

을 뜻한다. 이 비는 x에 대하여 증가한다. 분자는 증가하고 양수인 분모는 감소하기 때문이다. 따라서 인부가 올라갈수록 필요한 마찰력은 꾸준히 커진다.

소문항 (i)

인부가 중점에 이르는 순간 사다리가 미끄러진다. 따라서 한계 마찰(limiting friction)에 도달하는 것은 정확히 $x = \frac{1}{2}l$일 때이며, F/R가 x에 대하여 증가하므로 그 이전에는 도달하지 않는다. 이때 $N = mg$, $F = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$, $R = \frac{3}{2}mg$이므로

$$\mu = \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

소문항 (ii)

모든 $x \in [0, l]$에 대하여 $F \le \mu R$이면 인부는 꼭대기에 도달한다. F/R는 x에 대하여 증가하므로, 가장 나쁜 경우는 $x = l$이다. 이때 $N = \frac{3}{2}mg$, $F = \frac{3\sqrt{3}}{4}mg$, $R = \frac{5}{4}mg$이므로, 마찰 계수(coefficient of friction)의 최솟값은

$$\mu = \frac{3\sqrt{3}/4}{5/4} = \frac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1.04.$$

검산

- 사다리 위에 아무도 없을 때($x = 0$) 공식은 $\mu \ge \sqrt{3}/7 \approx 0.247$을 준다. 이는 두 답보다 모두 작으며, 마땅히 그래야 한다.
- 힘을 벡터로 나타내고 $l = 1$, $m = 1$, $g = 9.8$을 세 평형 방정식에 대입하여 수치적으로 계산하면 $N/mg = 1$과 $\frac{3}{2}$, 그리고 비 $F/R = 0.57735\ldots$와 $1.03923\ldots$가 다시 나온다. 또한 사다리 위의 101개 위치에서 F/R가 증가함도 확인된다.

흔한 실수

- 연직 벽의 경우처럼 경사로의 반작용을 수평이라고 보는 것. 여기서는 반작용이 수평선 위로 $\frac{1}{6}\pi$만큼 기울어져 있고, 그 위쪽 성분이 R를 줄인다.
- 연직 방향으로 분해할 때 인부의 무게를 빠뜨려 $2mg$ 대신 $R + \frac{1}{2}N = mg$로 쓰는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 배치에 대한 작은 최적화 문제이다. 하중의 모든 위치에 대하여 F/R의 가장 나쁜 경우를 찾아야 한다. 공학자들이 구조물의 임계 하중 조건을 찾는 방법이 바로 이것이다. 조건 $F \le \mu R$를 그려 보는 유용한 방법은 **마찰 원뿔**(*cone of friction*)이다. 지면 반작용의 합력은 법선으로부터 각 $\arctan\mu$ 안에 있어야 하며, 필요한 반작용이 그 원뿔을 벗어나

는 순간 사다리가 미끄러진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학(rigid-body statics)과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1988, 문제 12

역학 • 비스듬한 충돌

STEP III 1988, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q12

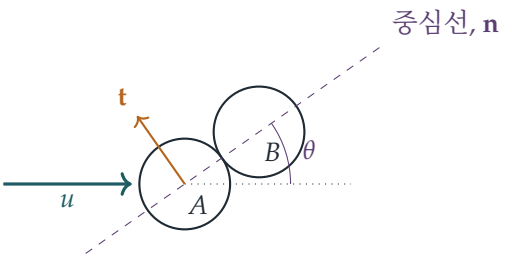
핵심 아이디어

매끄러운 구(smooth sphere)끼리 충돌할 때 충격량(impulse)은 충돌하는 순간의 중심선(line of centres) 방향으로만 작용한다. 따라서 모든 속도를 그 직선 방향의 성분(component)과 그에 수직인 성분으로 나눈다. 수직 성분은 변하지 않고, 중심선 방향으로는 보통의 1차원 충돌이 일어난다. 그러면 모든 것이 단 하나의 미지수, 곧 중심선과 첫 번째 공의 처음 속도 사이의 각에 따라 결정된다.

풀이

설정하기

두 공을 질량이 m으로 같은 매끄러운 구로 보고, 매끄러운 탁자 위에서 미끄러진다고 하자. 그러면 충돌하는 동안 작용하는 수평 방향의 힘은 중심선 방향의 접촉 충격량뿐이다. 첫 번째 공 A가 속력 u로 움직이고, 충돌 순간 중심선이 A의 속도와 이루는 각을 θ라 하자. 여기서 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$이다($\theta = \frac{1}{2}\pi$이면 두 공이 스치기만 할 뿐 아무 일도 일어나지 않는다). 중심선 방향(A에서 B 쪽)의 단위벡터를 $\mathbf{n}$, 이에 수직인 단위벡터를 $\mathbf{t}$라 하자.



충돌 전 A의 속도는 $\mathbf{n}$ 방향 성분이 $u\cos\theta$, $\mathbf{t}$ 방향 성분이 $u\sin\theta$이고, B는 정지해 있다.

$\mathbf{t}$ 방향: 이 방향으로는 어느 공에도 충격량이 작용하지 않으므로 A는 $u\sin\theta$를, B는 0을 그대로 유지한다.

$\mathbf{n}$ 방향: 충돌 후의 성분을 v_A, v_B라 하자. 운동량 보존(conservation of momentum)(질량은 약분된다)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 의해

$$v_A + v_B = u\cos\theta, \qquad v_B - v_A = e\,u\cos\theta,$$

이므로

$$v_A = \tfrac{1}{2}(1-e)\,u\cos\theta, \qquad v_B = \tfrac{1}{2}(1+e)\,u\cos\theta.$$

따라서 충돌 후에는

$$\mathbf{v}_A = \tfrac{1}{2}(1-e)u\cos\theta\,\mathbf{n} + u\sin\theta\,\mathbf{t}, \qquad \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{2}(1+e)u\cos\theta\,\mathbf{n}.$$

두 속도 사이의 각

B는 중심선을 따라 움직이며, 두 속도 사이의 각이 예각인 것은 두 속도의 스칼라곱(scalar product)이 양수인 것과 정확히 같다. 여기서

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{4}(1-e)(1+e)\,u^2\cos^2\theta > 0,$$

인데, 이는 $e<1$, $u\neq 0$이고 $0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$에서 $\cos\theta>0$이기 때문이다. 따라서 두 속도 사이의 각은 $\frac{1}{2}\pi$보다 작으며, 이것이 보이려던 것이다. (정면 충돌(head-on impact), 즉 $\theta=0$인 경우에는 두 공이 같은 직선을 따라 움직이고 각은 0이다.)

$e<1$이 어디에 쓰였는지 주목하자. $e=1$이면 $v_A=0$이 되어 두 공은 정확히 직각으로 갈라지는데, 이것이 당구에서 잘 알려진 결과이다.

최대 편향각

A가 꺾이는 각, 즉 $\mathbf{v}_A$와 처음 방향 $\cos\theta\,\mathbf{n}+\sin\theta\,\mathbf{t}$ 사이의 각을 ϕ라 하자. $k=\frac{1}{2}(1-e)$로 두면 $0<k\le\frac{1}{2}$이고 $\mathbf{v}_A = u(k\cos\theta\,\mathbf{n}+\sin\theta\,\mathbf{t})$이다. 방향벡터 $(\cos\theta,\sin\theta)$와 $(k\cos\theta,\sin\theta)$의 스칼라곱과 2차원 외적(cross product)을 이용하면

$$|\mathbf{v}_A|\cos\phi = u\,(k\cos^2\theta+\sin^2\theta),$$
$$|\mathbf{v}_A|\sin\phi = u\,(\cos\theta\sin\theta - k\cos\theta\sin\theta) = u\,(1-k)\sin\theta\cos\theta.$$

첫째 식이 양수이므로 ϕ는 예각이다. 두 식을 나눈 다음 분자와 분모를 $\cos^2\theta$로 나누고 $t=\tan\theta\ge 0$으로 두면

$$\tan\phi = \frac{(1-k)t}{k+t^2}.$$

? 생각해 보기 복잡한 미분 없이 이것을 어떻게 최대화할 수 있을까?

ϕ가 예각이므로 ϕ를 최대화하는 것은 $\tan\phi$를 최대화하는 것과 같다. $t > 0$일 때,

$$\tan\phi = \frac{1-k}{k/t+t} \quad \text{이고} \quad \frac{k}{t} + t \geq 2\sqrt{k}$$

이다. 뒤의 부등식은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의한 것이며, 등호는 정확히 $t = \sqrt{k}$일 때 성립한다. ($t = 0$이면 $\phi = 0$이다.) 따라서 최댓값은 $\tan\theta = \sqrt{k}$일 때 얻어지고,

$$\tan\phi_{\max} = \frac{1-k}{2\sqrt{k}}.$$

이를 사인으로 바꾸기 위해 $(1-k)^2 + (2\sqrt{k})^2 = 1 - 2k + k^2 + 4k = (1+k)^2$임에 주목하자. 즉 두 변의 길이가 $1-k$와 $2\sqrt{k}$인 직각삼각형의 빗변(hypotenuse)은 $1+k$이므로

$$\sin\phi_{\max} = \frac{1-k}{1+k} = \frac{\frac{1}{2}(1+e)}{\frac{1}{2}(3-e)} = \frac{1+e}{3-e},$$

이다. 여기서 $1-k = \frac{1}{2}(1+e)$와 $1+k = \frac{1}{2}(3-e)$를 이용하였다. $\phi_{\max}$는 예각이므로

$$\phi_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{1+e}{3-e}\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이 최댓값은 중심선이 처음 운동 방향과 각 $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}(1-e)}$를 이룰 때 나타난다.

검산

- $e \to 1$: 공식은 $\sin^{-1}1 = \frac{1}{2}\pi$를 주며, 이는 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌의 경우와 일치한다. 그 경우 A는 중심선 방향의 속도를 모두 잃으므로 항상 그 직선에 수직으로 움직이고, 거의 정면으로 부딪히면 처음 경로와 거의 직각을 이루는 방향으로 튕겨 나간다.
- $e = 0$: $\sin\phi_{\max} = \frac{1}{3}$이므로 $\phi_{\max} \approx 0.3398\ \text{rad}(19.5°)$이다.
- $e = \frac{1}{2}$: $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} \approx 0.4636$에서 $\sin\phi_{\max} = \frac{3}{5}$, $\phi_{\max} \approx 0.6435$ rad이다. θ의 값 200 000개에 대해 편향각을 수치적으로 조사한 결과 두 수치가 모두 재현되었고, 무작위 충돌 200 000번에서 두 속도 사이의 각이 $\frac{1}{2}\pi$ 이상이 된 경우는 한 번도 없었다.

흔한 실수

- 반발 법칙을 중심선 방향의 성분이 아니라 전체 속력에 적용하는 것.
- A의 속도의 수직 성분이 변하지 않는다는 사실을 잊는 것. 바로 이 성분 때문에 A가 꺾이게 된다.

- 역탄젠트를 미분하여 ϕ 자체를 최대화하려는 것. (ϕ가 예각이므로 정당한) $\tan\phi$를 다루는 편이 훨씬 깔끔하다.

STEP 너머

여기서 쓴 분해는 뉴턴의 제2법칙을 충격량 꼴로 쓴 것이다. 충격량은 그것이 작용하는 방향으로만 운동량을 바꾼다. 탄성 충돌에서 직각이 나오는 결과는 기준틀을 이용한 깔끔한 논증의 특수한 경우이다. 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 탄성 충돌은 각 공의 속력을 유지한 채 방향만 돌려 놓으며, 이를 다시 실험실 좌표계(lab frame)로 변환하면 가능한 모든 결과를 한꺼번에 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌을 이런 방식으로 질량중심 좌표계에서 다룬다.

풀이

STEP III 1988, 문제 13

역학 • 공기 저항을 받는 포물체

STEP III 1988, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q13

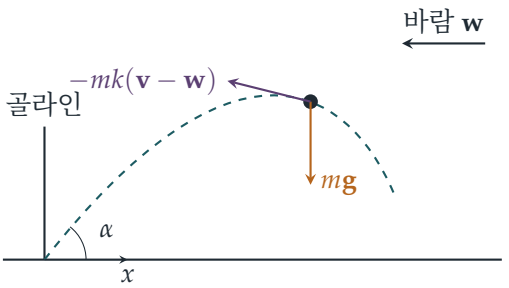
핵심 아이디어

속도에 비례하는 공기 저항(air resistance)이 작용하면 운동 방정식(equation of motion)이 선형(linear)이 되므로, 각 성분을 적분인자(integrating factor)로 풀 수 있다. 마지막 소문항을 깔끔하게 이해하는 방법은 종단 속도(terminal velocity)가 무엇인지 묻는 것이다. 속도는 처음 값에서 종단 속도를 향해 지수적으로 다가가므로, 이 두 벡터가 평행하면 속도는 원점을 지나는 한 직선을 결코 벗어나지 않는다. 그러면 공은 같은 직선 경로를 따라 날아갔다가 되돌아온다.

풀이

운동 방정식

공을 질량 m인 입자로 모형화한다. 공에는 두 힘이 작용한다. 하나는 무게 $m\mathbf{g}$이고, 다른 하나는 공기 저항이다. 공기에 대한 공의 상대 속도는 $\mathbf{v} - \mathbf{w}$이고, 저항은 이에 반대 방향으로 작용하므로 저항은 $-mk(\mathbf{v} - \mathbf{w})$이다.



뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)에 의해

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{g} - mk(\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

양변을 m으로 나누고 정리하면

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + k\mathbf{v} = \mathbf{g} + k\mathbf{w},$$

이므로 원하는 식을 얻는다.

시각 t에서의 위치

공을 찬 지점을 원점으로 잡고, x축은 공을 찬 방향의 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡는다. $V = |\mathbf{v}_0|$, $W = |\mathbf{w}|$, $g = |\mathbf{g}|$라 하자. 공은 바람을 **거슬러** 차므로

$$\mathbf{w} = (-W, 0), \qquad \mathbf{g} = (0, -g), \qquad \mathbf{v}_0 = (V\cos\alpha, V\sin\alpha).$$

$\mathbf{v} = (u, v)$로 두면 운동 방정식의 두 성분은

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = -kW, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv = -g.$$

첫째 식에 적분인자 e^{kt}를 곱하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u\,\mathrm{e}^{kt}\right) = -kW\mathrm{e}^{kt}$이므로 $u\,\mathrm{e}^{kt} = -W\mathrm{e}^{kt} + C$이다. $t = 0$일 때 $u = V\cos\alpha$이므로 $C = V\cos\alpha + W$이고,

$$u = -W + (V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

똑같은 방법으로

$$v = -\frac{g}{k} + \left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}.$$

$t = 0$일 때 $x = y = 0$이고 $\int_0^t \mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$임을 이용하여 0부터 t까지 한 번 더 적분하면

$$x = -Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right),$$
$$y = -\frac{g}{k}\,t + \frac{1}{k}\left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

$\mathbf{u}_\infty = \mathbf{w} + \mathbf{g}/k$(종단 속도로, 운동 방정식의 상수해이다)를 써서 벡터 꼴로 나타내면

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_\infty t + \frac{1}{k}\left(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_\infty\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

자책골

생각해 보기 $\tan\alpha = g/(kW)$는 종단 속도에 대해 무엇을 말해 주는가?

종단 속도는 $\mathbf{u}_\infty = (-W, -g/k) = -W\big(1, g/(kW)\big)$이다. 주어진 조건은 $g/(kW) = \tan\alpha$이므로 $\mathbf{u}_\infty = -W(1, \tan\alpha)$이고, 이는 $\mathbf{v}_0$에 평행하다(방향은 반대이다). 벡터 공식을 보면 이때 $\mathbf{r}$는 항상 방향 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$를 따르는 두 벡터의 결합이므로, 공은 직선 $y = x\tan\alpha$를 따라 움직인다.

성분으로부터 직접 확인하려면 $g/k = W\tan\alpha$를 이용한다.

$$V\sin\alpha + \frac{g}{k} = V\sin\alpha + W\tan\alpha = \tan\alpha\,(V\cos\alpha + W),$$

따라서

$$y = \tan\alpha\left[-Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}\big(1 - \mathrm{e}^{-kt}\big)\right] = x\tan\alpha \quad \text{모든} t \geq 0.$$

에 대해 성립한다.

그러므로 공이 지면 높이 $y = 0$에 있는 것은 정확히 $x = 0$일 때이다($\tan\alpha \neq 0$이므로). 이제 이런 일이 어떤 $t > 0$에서 일어남을 확인하면 된다. $f(t) = x(t)$라 하자. 그러면 $f(0) = 0$이고 $f'(0) = V\cos\alpha > 0$이므로, 공을 찬 직후에는 $x > 0$이다. 또한

$$f''(t) = -k(V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt} < 0,$$

이므로 f는 순오목(strictly concave) 함수이고, $-Wt$ 항 때문에 $t \to \infty$일 때 $f(t) \to -\infty$이다. 따라서 f는 양의 영점 T를 정확히 하나 가지며, 그 점에서 $f'(T) < 0$이다(0에서 올라간 오목함수가 다시 0으로 내려올 때는 감소하고 있어야 한다).

시각 T에서 공은 원점, 즉 공을 찼던 골라인(goal-line) 위의 점으로 돌아오며, 이때 수평 속도는 음수, 곧 골대 쪽을 향한다. 공은 날아갔던 직선을 따라 그대로 되돌아왔고, 크로스바(crossbar)보다 한참 아래인 지면 높이에서 골라인을 넘는다. 골키퍼가 비켜나 있다면 이것은 자책골(own goal)이다.

검산

- $k \to 0$일 때 $\frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \to t$이고 $\frac{1}{k}\big(t - \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\big) \to \frac{1}{2}t^2$이므로 $x \to Vt\cos\alpha$, $y \to Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이다. 이는 보통의 포물체 운동이다.
- $t \to \infty$일 때 속도는 운동 방정식의 상수해인 $(-W, -g/k)$로 수렴(converge)한다. 즉 공은 결국 종단 속력으로 떨어지면서 바람에 실려 떠내려간다.
- 운동 방정식을 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 수치 적분한 결과는 V, α, W, k를 무작위로 여러 번 고른 경우에 대해 x, y의 공식과 약 10^{-13} 이내로 일치했다. $\tan\alpha = g/(kW)$일 때 계산된 경로는 $y = x\tan\alpha$ 위에 머물렀고 $u < 0$인 상태로 $x = 0$에 떨어졌다. 반면 예를 들어 $V = 20$, $\alpha = 0.6$, $W = 5$, $k = 0.5$일 때는 경기장 안쪽으로 17.1 m 떨어진 곳에 떨어졌다.

흔한 실수

- 저항을 $-mk(\mathbf{v}-\mathbf{w})$ 대신 (지면에 대한) $-mk\mathbf{v}$로 잡는 것.
- $\mathbf{w}$의 부호를 잘못 잡는 것. 공은 바람을 **거슬러** 차므로 $\mathbf{w}$는 골대 쪽을 향한다.
- $y = x\tan\alpha$에서 멈추고, 공이 정말로 $x = 0$으로 돌아오는지, 그리고 돌아올 때 골대 쪽으로 움직이는지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

상수 $\mathbf{F}$에 대한 방정식 $\dot{\mathbf{v}} + k\mathbf{v} = \mathbf{F}$는 선형계가 평형(equilibrium)으로 다가가는 가장 간단한 예이다. 편차 $\mathbf{v} - \mathbf{F}/k$는 e^{-kt}처럼 감소한다. 선형 항력(drag)은 느리고 작은 물체에서만 현실적이다. 실제 축구공은 대략 속력의 제곱에 비례하는 항력을 받는데, 이 때문에 방정식이 비선형(nonlinear)이 되고 수평 운동과 연직 운동이 서로 얽힌다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 두 종류의 항력을 모두 다룬다.

풀이

STEP III 1988, 문제 14

역학 • 매끄러운 철사 위의 운동

STEP III 1988, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

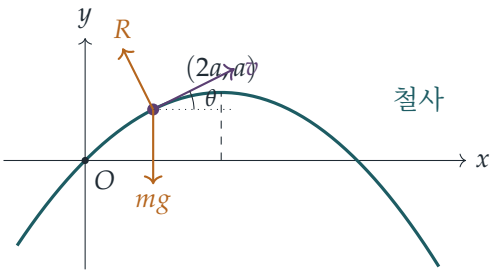
step.maths.org/questions/88-s3-q14

핵심 아이디어

철사로부터 아무 힘도 받지 않는 구슬은 그저 중력만 받으며 움직이는 포물체(projectile)이다. 따라서 소문항 (i)이 묻는 것은 다음과 같다. 철사 방향으로 쏘아 올린 자유 포물체가 철사의 포물선을 정확히 따라갈 수 있는가? 두 포물선을 일치시켜 보자. 소문항 (ii)에서는 철사가 매끄러우므로(smooth) 에너지가 보존된다. 핵심 작업은 $\tan\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 이용하여 속력과 높이를 기울기 각 θ로 나타내는 것이다.

풀이

구슬을 매끄러운 고정 철사 위에 있는 질량 m인 입자로 모형화한다. 작용하는 힘은 아래쪽으로 작용하는 무게 mg와, 철사에 수직인 철사의 수직항력(normal reaction) R뿐이다.



철사에 관한 두 가지 사실을 풀이 내내 사용한다. 일반적인 점에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a},$$

이므로 원점에서 기울기는 1이고, 구슬은 x축 위로 45° 방향으로 출발한다. 철사는 아래로 볼록한 포물선이므로 가장 높은 점은 $x = 2a, y = a$이다.

소문항 (i)

운동하는 동안 줄곧 $R = 0$이라고 하자. 그러면 중력이 유일한 힘이므로 구슬은 처음 속력 V로 45° 방향으로 쏘아 올린 포물체와 똑같이 움직인다. 수평 속도는 $V/\sqrt{2}$로 일정하므로 $x = Vt/\sqrt{2}$이다. 또한

$$y = \frac{V}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = \sqrt{2}\,x/V$를 대입하여 소거하면 궤적(trajectory)은

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

이것이 구슬의 경로가 되려면, 구슬이 도달하는 모든 x에 대하여 이 곡선이 철사 $y = x - x^2/(4a)$와 같아야 한다. 이를 위해서는

$$\frac{g}{V^2} = \frac{1}{4a}, \qquad \text{즉,} \qquad V = 2\sqrt{ag}.$$

이어야 한다.

역으로 $V = 2\sqrt{ag}$라 하자. 이 속력으로 O에서 45° 방향으로 쏘아 올린 자유 입자는 곡선 $y = x - x^2/(4a)$, 곧 철사 자체를 따라간다. 따라서 이 입자는 매 순간 $R = 0$인 채로 철사를 따라 움직이고, 이 운동은 수직항력이 0인 구슬의 운동 방정식(equation of motion)을 만족한다. $x = Vt/\sqrt{2}$는 꾸준히 증가하므로 구슬은 꼭대기 $(2a, a)$를 지나 반대편으로 계속 내려간다. 운동하는 내내 구슬은 요구된 대로 철사에 아무런 압력도 가하지 않으며, 알맞은 속력은 $V = 2\sqrt{ag}$이다.

생각해 보기 철사 위의 구슬이 어떻게 수직항력 없이 움직일 수 있을까? 철사가 구슬을 붙잡아 주어야 하지 않을까?

철사가 힘을 가해야 하는 것은 중력만으로는 구슬이 곡선을 벗어나게 될 때뿐이다. 다른 속력이라면 실제로 그렇게 된다. V가 더 크면 포물체의 포물선이 더 완만해지므로 철사가 구슬을 아래로 끌어당겨야 한다. V가 더 작으면 포물선이 더 급하게 휘므로 철사가 구슬을 위로 받쳐야 한다. 정확히 $V = 2\sqrt{ag}$일 때에는 곡선이 요구하는 가속도를 중력이 이미 제공하므로 철사는 할 일이 없다.

소문항 (ii)

이제 V는 일반적인 값이다. 속도는 철사의 접선(tangent) 방향이므로

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a}, \qquad \text{따라서} \qquad x = 2a(1 - \tan\theta).$$

(구슬이 뒤로 미끄러져 내려오면 속도는 접선을 따라 반대 방향을 향하고 각은 π만큼 바뀐다. 이때 $\tan\theta$와 $\cos^6\theta$는 변하지 않으므로 아래 내용에는 아무 영향이 없다.)

속력을 θ로 나타내기. $x = 2a(1-\tan\theta)$를 t에 대하여 미분하면

$$\dot{x} = -2a\sec^2\theta\,\dot{\theta}.$$

$\dot{y} = \tan\theta\,\dot{x}$이므로 속력 v는 다음을 만족한다.

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1+\tan^2\theta) = \dot{x}^2\sec^2\theta = \frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta}.$$

높이를 θ로 나타내기. $T = \tan\theta$로 두면 $x = 2a(1-T)$이므로

$$\begin{aligned} y = x - \frac{x^2}{4a} &= 2a(1-T) - a(1-T)^2 \\ &= a(1-T)\big(2-(1-T)\big) \\ &= a(1-T)(1+T) = a(1-\tan^2\theta). \end{aligned}$$

에너지. 철사는 매끄럽고 R는 속도에 수직이므로 R는 일을 하지 않으며, 역학적 에너지가 보존된다(conservation of mechanical energy). 구슬은 속력 V로 O에서 출발하므로

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mV^2, \qquad \text{즉,} \qquad v^2 + 2gy = V^2.$$

v^2와 y에 대한 식을 대입하면

$$\frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta} + 2ga(1-\tan^2\theta) = V^2,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $t = 0$에서 $\theta = 45^\circ$이므로 $\tan^2\theta = 1$이고 둘째 항은 0이 된다. 그러면 첫째 항은 $v^2 = V^2$로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- 소문항 (i)의 $V^2 = 4ag$를 쓰면 $\dot{x} = V/\sqrt{2}$가 일정하므로 $\dot{\theta} = -\dot{x}\cos^2\theta/(2a)$이다. 첫째 항은 $2ag\sec^2\theta = 2ag(1+\tan^2\theta)$가 된다. 여기에 $2ga(1-\tan^2\theta)$를 더하면 $4ag = V^2$가 된다. 두 소문항의 결과가 일치한다.
- 수치적으로, 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법을 써서 철사를 따라 구슬의 운동 방정식을 단계별로 풀어 보았다. $a = 1$, $g = 9.8$, $V = 2\sqrt{9.8}$일 때, 계산된 수직항력은 (단위 질량당) $x \approx 13$에 이르기까지 내내 10^{-15} 아래에 머물렀다. V를 30% 늘리면 처음에 약 4.8이었다. 구슬이 뒤로 미끄러지는 경우를 포함하여 V의 여러 무작위 값에 대해, (ii)의 항등식은 약 10^{-13}의 상대 오차 이내로 성립하였다.

흔한 실수

- 쏘아 올리는 순간에만 $R = 0$임을 보이는 것. 문제는 **운동 내내** 수직항력이 없는 운동을 요구하며, 그래서 궤적 전체를 철사와 일치시킨 것이다.
- $\tan\theta$를 미분할 때 연쇄법칙(chain rule)에서 나오는 인수 $\sec^2\theta$를 빠뜨리는 것. 그러면 첫째 항에 $\cos^6\theta$ 대신 $\cos^2\theta$가 남는다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 운동의 제1적분(first integral)이다. 에너지 보존을 이용하면 2계 방정식이 하나의 좌표(여기서는 θ)에 대한 1계 방정식으로 줄어든다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 구속 운동(constrained motion)에 대한 라그랑주 방법(Lagrangian approach)으로 발전하는데, 이 방법에서는 구속 조건을 기술하는 좌표 하나를 고르기만 하면 수직항력을 전혀 계산할 필요가 없다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구속 운동과 에너지 방법을 꼼꼼하게 다루는 것을 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 1988, 문제 15

확률과 통계 • 기댓값의 점화식

> **STEP III 1988, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q15

핵심 아이디어

그날의 **첫 번째** 책에 대해 조건을 건다(condition). 첫 책이 책꽂이에 꽂히고 나면, 그날의 나머지는 더 짧은 책꽂이로 새로 시작하는 하루와 정확히 같아 보인다. 따라서 길이 n인 책꽂이에 꽂히는 책 수의 기댓값(expected value)은 길이 $n-1$과 $n-2$일 때의 기댓값과 연결된다. 이로부터 선형 차분방정식(linear difference equation)을 얻고, 이를 2계 점화식(second-order recurrence)과 똑같은 방법으로 푼다. 즉 동차(homogeneous) 부분은 특성 이차방정식(auxiliary quadratic)으로 풀고, 우변의 상수 1에 대해서는 특수해(particular solution)를 더한다.

풀이

이 풀이 전체에서 책꽂이의 길이가 n인 날 책꽂이에 꽂히는 책의 수를 N_n이라 하자. 그러면 $M(n) = \mathrm{E}(N_n)$이다. 각 책은 서로 독립적으로 두껍거나 얇으며, 각 책이 두꺼울 확률은 p이다. 책은 항상 책꽂이에 들어갈 수 있는 것보다 많다고 주어졌으므로, 하루는 언제나 어떤 책이 들어가지 못하는 것으로 끝난다.

소문항 (i)

$n = 0$이면 빈 공간이 전혀 없다. 첫 번째 책은 두껍든 얇든 들어가지 않으므로, 그 책과 그 뒤의 모든 책은 수레로 간다. 따라서 항상 $N_0 = 0$이고, $M(0) = 0$이다.

소문항 (ii)

$n = 1$일 때 첫 번째 책을 살펴보자.

- 첫 책이 얇으면(확률 q) 책꽂이에 들어가 책꽂이를 채운다. 다음 책은 적어도 한 단위가 필요하므로 들어가지 않고, 그 뒤로는 모든 책이 수레로 간다. 따라서 $N_1 = 1$이다.
- 첫 책이 두꺼우면(확률 p) 두 단위가 필요하므로 들어가지 않고, $N_1 = 0$이다.

그러므로 $M(1) = q \cdot 1 + p \cdot 0 = q$이다.

소문항 (iii)

$n \geq 2$라 하고 다시 첫 번째 책에 대해 조건을 걸자. 첫 책은 많아야 $2 \leq n$ 단위만 필요하므로, 어떤 책이든 들어간다.

- 첫 책이 얇으면(확률 q) 책꽂이에 꽂히고 $n-1$ 단위가 남는다.
- 첫 책이 두꺼우면(확률 p) 책꽂이에 꽂히고 $n-2$ 단위가 남는다.

> **생각해 보기** 첫 번째 경우에 **추가로** 꽂히는 책 수의 기댓값이 왜 정확히 $M(n-1)$인가?

첫 책 다음의 책들은 차례대로 도착하고, 첫 책과 독립적으로 같은 확률로 두껍거나 얇으며, 같은 규칙에 따라 놓인다. 즉 들어가지 않는 책이 나올 때까지 꽂고, 그러면 멈춘다. 첫 책이 바꾼 것은 빈 공간뿐이며, 이제 그 공간은 $n-1$ 단위이다. 따라서 그날의 나머지는 길이 $n-1$인 책꽂이로 보내는 하루 전체의 복사본이고, 추가로 꽂히는 책 수의 기댓값은 $M(n-1)$이다. 마찬가지로 첫 책이 두꺼우면 그 값은 $M(n-2)$이다. ($n-2=0$일 때도 소문항 (i)에 의해 이는 성립한다.)

첫 번째 책까지 세면, 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)에 의해

$$\begin{aligned} M(n) &= q\big(1 + M(n-1)\big) + p\big(1 + M(n-2)\big) \\ &= (p+q) + qM(n-1) + pM(n-2), \end{aligned}$$

이고, $p+q=1$이므로

$$M(n) - qM(n-1) - pM(n-2) = 1 \qquad (n \geq 2),$$

가 되어 요구된 식을 얻는다.

닫힌 형태

먼저 동차방정식 $M(n) - qM(n-1) - pM(n-2) = 0$을 보자. $M(n) = \lambda^n$을 대입해 보면 특성방정식(auxiliary equation)

$$\lambda^2 - q\lambda - p = 0.$$

을 얻는다. $q = 1 - p$이므로 $\lambda = 1$은 근이고$(1 - q - p = 0)$, 두 근의 곱은 $-p$이므로

$$\lambda^2 - q\lambda - p = (\lambda - 1)(\lambda + p).$$

이다. 따라서 임의의 A와 B에 대하여 $A(-p)^n$과 상수 B는 동차방정식을 만족한다.

1이 근이므로 상수로는 우변의 1을 만들 수 없다. 그래서 Cn을 시도한다. 대입하면

$$\begin{aligned} Cn - qC(n-1) - pC(n-2) &= C\big[(1-q-p)n + q + 2p\big] \\ &= C(q + 2p) = C(1 + p). \end{aligned}$$

이다. 이 값은 $C = \dfrac{1}{1+p}$일 때 1이 되며, $1 + p > 0$이므로 문제없다. 그러면 선형성(linearity)에 의해 A와 B가 무엇이든 $M(n) = A(-p)^n + B + Cn$은 모든 $n \geq 2$에 대하여 (iii)의 방정식을 만족한다.

이제 초깃값을 맞추자. 소문항 (i)에서

$$M(0) = A + B = 0, \qquad \text{따라서} B = -A,$$

이고, 소문항 (ii)에서

$$M(1) = -Ap + B + C = -A(1 + p) + \frac{1}{1+p} = 1 - p.$$

이다. 그러므로

$$A(1 + p) = \frac{1}{1+p} - (1 - p) = \frac{1 - (1 - p^2)}{1 + p} = \frac{p^2}{1+p},$$

이고, 따라서

$$A = \frac{p^2}{(1+p)^2}, \qquad B = -\frac{p^2}{(1+p)^2}, \qquad C = \frac{1}{1+p}.$$

이다. 즉

$$M(n) = \frac{n}{1+p} - \frac{p^2}{(1+p)^2}\big(1 - (-p)^n\big).$$

이다. (i), (ii), (iii)이 $M(0)$, $M(1)$, 그리고 그 뒤의 각 값을 차례로 결정하므로, 이것은 단지 가능한 해 하나가 아니라 유일한 해이다.

검산

- $p = 0$(모두 앓음): $M(n) = n$이며, 당연히 그래야 한다.
- $p = 1$(모두 두꺼움): $M(n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\big(1 - (-1)^n\big)$이고, 이는 짝수 n에 대해서는 $\frac{n}{2}$, 홀수 n에 대해서는 $\frac{n-1}{2}$, 즉 $\lfloor n/2 \rfloor$이다. 옳다.

- $p = q = \frac{1}{2}$일 때 점화식에서 직접 구하면 $M(2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$이고, 공식으로는 $\frac{2}{3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$이다.
- n이 클 때 각 책은 평균 $1 + p$ 단위를 차지하므로 약 $n/(1+p)$권의 책을 기대할 수 있다. 공식도 이와 일치하며, 책꽂이 끝에서 낭비되는 공간 때문에 생기는 유계인 보정항이 붙는다.

우리는 $n \leq 12$와 여러 p 값에 대하여 책 꽂기 과정을 정확히 열거한 결과, 그리고 시뮬레이션 결과와 닫힌 형태를 비교해 확인하였다. 예를 들어 $p = \frac{1}{2}$, $n = 5$일 때 두 방법 모두 $M(5) = \frac{103}{32} \approx 3.219$를 준다.

흔한 실수

- 두꺼운 책이 들어가지 못한 뒤에도 얇은 책은 여전히 꽂을 수 있다고 생각하는 것. 문제에서는 그 뒤의 모든 책이 수레로 간다고 했고, 바로 그 때문에 $M(1) = q$이며 더 큰 값이 아니다.
- 특수해로 상수를 시도하는 것. $\lambda = 1$이 특성방정식의 해이므로 상수는 동차 부분에 흡수되어 버리고, Cn이 필요하다.

STEP 너머

첫 단계에 대해 조건을 걸고 남은 부분이 같은 문제의 더 작은 복사본임을 알아차리는 방법을 **첫 단계 분석**(first-step analysis)이라 한다. 이는 마르코프 연쇄(Markov chain)에서 기대 도달 시간(expected hitting time)과 흡수 확률(absorption probability)을 구하는 표준적인 방법이다. 우리의 답은 **재생 정리**(renewal theorem)의 한 예이기도 하다. 크기가 무작위인 물건들을 길이 n에 채워 넣으면, 들어가는 개수는 n을 평균 크기로 나눈 값처럼 증가한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 무작위 행보(random walk)에 대한 차분방정식과 마르코프 연쇄 입문을 모두 다룬다.

풀이

STEP III 1988, 문제 16

확률과 통계 • 초기하분포

STEP III 1988, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q16

핵심 아이디어

비복원추출(drawing without replacement)에서는 각 시행이 서로 종속(dependent)이므로, 한 번씩 차례로 따져 나가면 계산이 복잡해진다. 이 어려움은 두 가지 아이디어로 피해 갈 수 있다. 첫째, 순서를 고려하지 않은 선택의 수를 세어 빨간 공의 개수의 분포(distribution)를 구한다. 둘째, 대칭성(symmetry)을 이용한다. 항아리 속의 공을 무작위 순서로 모두 꺼낸다고 상상하면, 각 공이 주어진 어느 위치에 놓일 가능성은 모두 같다. 그러면 X를 지시변수(indicator variable) X_i들의 합으로 나타내어, 분포를 전혀 구하지 않고도 평균(mean)과 분산(variance)을 얻을 수 있다. 필요한 것은 두 변수 사이의 공분산(covariance)뿐이다.

풀이

빨간 공이 정확히 k개일 확률

공들을 서로 구별할 수 있다고 생각하자. 꺼낸 n개의 공은 크기가 n인 집합을 이루고, 이러한 집합은 모두 같은 확률로 나타나므로 같은 확률의 결과가 $\binom{M}{n}$가지 있다. 빨간 공이 정확히 k개인 집합은 m개의 빨간 공 중 k개를, $M-m$개의 초록 공 중 $n-k$개를 골라 만든다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{정확히} k\text{개가 빨간 공}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}}{\binom{M}{n}},$$

이다. 여기서 $b < 0$ 또는 $b > a$이면 $\binom{a}{b} = 0$이라는 일반적인 약속을 따른다. (이 약속으로 $n-k > M-m$과 같은 불가능한 경우도 함께 다룰 수 있다.) 이것이 **초기하분포**(*hypergeometric distribution*)이다.

소문항 (i)

항아리가 빌 때까지 계속 공을 꺼낸다고 상상하자. (구별 가능한) M개의 공이 나오는 순서는 균등한 무작위 배열이다. 즉 $M!$가지 순서가 모두 같은 확률로 나타난다. n번 꺼낸 뒤 멈추더라도 처음 n개의 위치는 달라지지 않으므로, 전체 배열을 가지고 생각해도 된다.

위치 i를 하나 고정하자. 특정한 공이 위치 i에 오는 배열의 수는 $(M-1)!$로, 어느 공이든 같다. 따라서 위치 i에 있는 공은 M개의 공 중 어느 것일 가능성이나 모두 같고,

$$\mathrm{P}(X_i = 1) = \frac{m\,(M-1)!}{M!} = \frac{m}{M},$$

이므로 원하는 결과가 성립한다.

> **생각해 보기** 두 번째 공의 색은 첫 번째 공이 무엇이었는지에 따라 달라지지 않는가?

첫 번째 공이 주어졌을 때는 그렇다. 그러나 우리가 구하려는 것은 **조건 없는**(*unconditional*) 확률이다. $i = 2$일 때 전확률 법칙(law of total probability)을 쓰면

$$\mathrm{P}(X_2 = 1) = \frac{m}{M}\cdot\frac{m-1}{M-1} + \frac{M-m}{M}\cdot\frac{m}{M-1} = \frac{m(M-1)}{M(M-1)} = \frac{m}{M}.$$

이다. 대칭성 논증은 이와 같은 계산을 모든 i에 대해 한꺼번에 해 준다.

소문항 (ii)

서로 다른 위치 $i \neq j$를 고정하자 (따라서 $M \geq 2$이다). 두 위치 모두에 빨간 공이 오는 배열의 수를 세자. 위치 i의 공을 고르는 방법이 m가지, 그다음 위치 j의 공을 고르는 방법이 $m-1$가지이고, 나머지를 배열하는 방법이 $(M-2)!$가지이다. 따라서

$$\mathrm{P}(X_i = 1 \text{ 그리고} X_j = 1) = \frac{m(m-1)(M-2)!}{M!} = \frac{m(m-1)}{M(M-1)},$$

이므로 원하는 결과가 성립한다. 다시 말해, 위치 (i, j)에 있는 공의 순서쌍은 서로 다른 두 공으로 이루어진 $M(M-1)$개의 순서쌍 중 어느 것일 가능성이나 모두 같다.

X의 평균과 분산

X는 처음 꺼낸 n개의 공 중 빨간 공의 개수이다. 독립성이 전혀 필요 없는 기댓값의 선형성(linearity of expectation)과 $\mathrm{E}(X_i) = \mathrm{P}(X_i = 1)$을 이용하면

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \frac{nm}{M}.$$

이다.

분산은 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$을 이용하여 구한다. 합의 제곱을 전개하고, X_i는 0 또는 1이므로 $X_i^2 = X_i$임을 이용하면

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j = X + \sum_{i \neq j} X_i X_j,$$

이다. 여기서 두 번째 합은 $i \neq j$인 $n(n-1)$개의 순서쌍 (i, j) 전체에 대한 합이다. 이제 $X_i X_j = 1$인 것은 두 공이 모두 빨간 공일 때뿐이므로, 소문항 (ii)에 의해 $\mathrm{E}(X_i X_j) = \dfrac{m(m-1)}{M(M-1)}$이다. 따라서 $M \geq 2$일 때

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{nm}{M} + \frac{n(n-1)m(m-1)}{M(M-1)} - \frac{n^2 m^2}{M^2} \\ &= \frac{nm}{M^2(M-1)}\Big[M(M-1) + (n-1)(m-1)M - nm(M-1)\Big].\end{aligned}$$

이다. 대괄호 안을 전개하면

$$\begin{aligned}&M^2 - M + nmM - nM - mM + M - nmM + nm \\ &\quad = M^2 - nM - mM + nm = (M-m)(M-n).\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{nm(M-m)(M-n)}{M^2(M-1)}.$$

이다. ($M = 1$이면 $n \leq 1$이므로 순서쌍이 없고 X는 상수이므로 $\mathrm{Var}(X) = 0$이다.)

$p = m/M$으로 놓으면 많은 것이 드러난다. 이때

$$\mathrm{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p) \cdot \frac{M-n}{M-1}.$$

이다. 이것은 이항분포(binomial distribution)의 분산에 보정 인수를 곱한 것이며, 이 인수는 $n \geq 2$일 때 1보다 작다.

검산

- $n = M$: 모든 공을 꺼내므로 반드시 $X = m$이다. 공식에서도 평균은 m이고, 인수 $M - n$ 때문에 분산은 0이다.
- $n = 1$: X는 $p = m/M$인 하나의 베르누이(Bernoulli) 확률변수이고, 분산은 $p(1-p)$가 된다.
- $M = 6, m = 2, n = 3$: 공식에 따르면 $\mathrm{Var}(X) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3}{36 \cdot 5} = \frac{2}{5}$이다. 6!가지 순서를 모두 나열하여 정확히 계산한 값과 일치하며, $M \leq 6$인 모든 경우에도 일치한다.

흔한 실수

- X_i들을 독립으로 취급하여 이항분포의 분산 $np(1-p)$를 얻는 것. 이들은 음의 상관관계(negatively correlated)에 있다. 앞에서 빨간 공이 나오면 뒤에서 빨간 공이 나올 가능성이 줄어든다.
- 순서쌍을 생각할 때 이중합 $\sum_{i\neq j}$의 항이 $\binom{n}{2}$개가 아니라 $n(n-1)$개임을 잊는 것.

STEP 너머

개수를 지시변수들의 합으로 나타내는 것은 확률론에서 가장 강력한 기법 중 하나이다. 분포 자체를 적어 내기가 절망적으로 어려울 때에도 평균과 분산을 구할 수 있게 해 준다. 인수 $\frac{M-n}{M-1}$은 표본조사(survey sampling)에서 쓰이는 **유한 모집단 수정**(*finite population correction*)이다. 이 인수를 보면 1000명을 대상으로 한 여론조사가 한 나라에 대해 주는 정보가 무한 모집단에 대해 줄 정보와 거의 같은 이유를 알 수 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 책 전체에 걸쳐 지시변수를 활용하며 초기하분포를 자세히 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1988년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

