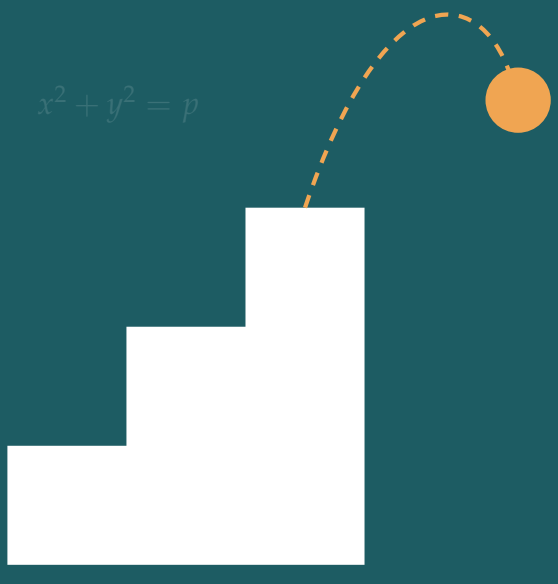
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

1987년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

1987년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

1987년 풀이

1987년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 48개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 곡선 그리기 순수수학 3

Q2 원 채우기의 넓이 순수수학 7

Q3 변수분리형 미분방정식 순수수학 11

Q4 로그와 등비급수 순수수학 15

Q5 치환적분 순수수학 17

Q6 넓이와 역함수 순수수학 21

Q7 삼각급수 순수수학 25

Q8 치환적분 순수수학 28

Q9 무게중심 좌표 순수수학 31

Q10 탄성 끈 역학 35

Q11 원운동과 에너지 역학 39

Q12 반발이 있는 포물체 역학 43

Q13 가변적인 힘 역학 47

Q14 확률의 등비급수 확률과 통계 51

Q15 연속확률변수 확률과 통계 55

Q16 베이즈 정리와 정규근사 확률과 통계 58

STEP II

Q1 대수적 항등식 순수수학 61

Q2 삼각함수 항등식 순수수학 64

Q3 켤레 무리식 순수수학 67

Q4 복소수와 기하 순수수학 71

Q5 라그랑주 반전 급수 순수수학 75

Q6 대칭성을 이용한 정적분 순수수학 80

Q7 사다리꼴 공식과 계승 순수수학 84
Q8 3차원 벡터 자취 순수수학 88
Q9 직교행렬 순수수학 92
Q10 군의 공리 순수수학 95
Q11 마찰과 모멘트 역학 99
Q12 평형과 에너지 역학 103
Q13 벽과의 비스듬한 충돌 역학 107
Q14 원뿔 위의 고무줄 역학 112
Q15 기하학적 확률 확률과 통계 116
Q16 베이즈 정리 확률과 통계 120

STEP III

Q1 계승의 나누어떨어짐 순수수학 124
Q2 삼각함수 적분의 점화식 순수수학 127
Q3 편각과 마친 공식 순수수학 130
Q4 회전체의 부피 순수수학 134
Q5 모듈러 산술을 이용한 암호 순수수학 137
Q6 연립 미분방정식 순수수학 140
Q7 아크탄젠트의 급수 순수수학 144
Q8 평행사변형 넓이에 관한 부등식 순수수학 147
Q9 군의 직적 순수수학 151
Q10 베르누이 다항식 순수수학 155
Q11 상대 속도의 최적화 역학 159
Q12 질량이 변하는 회전 역학 164
Q13 마찰이 있는 회전 막대 역학 168
Q14 중력 붕괴 역학 172
Q15 기대 비용의 최적화 확률과 통계 176
Q16 순서통계량과 푸아송분포 확률과 통계 179

풀이

STEP I 1987, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 1987, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q1

핵심 아이디어

곱의 미분법(product rule)으로 미분하면 절대 0이 되지 않는 인수 e^{ax}에 $\cos bx$와 $\sin bx$의 일차결합을 곱한 꼴이 남는다. 따라서 정류점(stationary point)은 하나의 방정식 $\tan bx = \text{constant}$에서 나오며, 그 해들은 π/b의 일정한 간격으로 놓인다. 한 해에서 다음 해로 넘어가면 지수함수 부분에는 일정한 인수가 곱해지고 코사인의 부호는 바뀌는데, 이것이 바로 등비수열(geometric progression)이다.

풀이

정류점

곱의 미분법에 의해

$$\mathrm{f}'(x) = a\mathrm{e}^{ax}\cos bx - b\mathrm{e}^{ax}\sin bx = \mathrm{e}^{ax}(a\cos bx - b\sin bx).$$

모든 x에 대하여 $\mathrm{e}^{ax} > 0$이므로, $\mathrm{f}'(x) = 0$일 필요충분조건은 $a\cos bx = b\sin bx$이다.

> **생각해 보기** 여기서 $\cos bx$로 나누어도 괜찮은가?

괜찮다. 만약 $\cos bx = 0$이면 $\sin bx = \pm 1$이고, 방정식은 $0 = \pm b$가 되는데, $b > 0$이므로 이는 거짓이다. 따라서 모든 정류점에서 $\cos bx \neq 0$이고, 양변을 나누면

$$\tan bx = \frac{a}{b}.$$

$\alpha = \arctan(a/b)$라 하자. $a/b > 0$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이다. tan의 주기(period)는 π이므로 해는 $bx = \alpha + n\pi$이고, 따라서 정류점은

$$x_n = \frac{\alpha + n\pi}{b}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{여기서 } \tan\alpha = \frac{a}{b}.$$

에 있다. 두 변의 길이가 a와 b인 직각삼각형을 생각하면 $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다. $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$이므로 그 점에서 f의 값은

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x_n) &= \mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi) \\ &= (-1)^n \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}\,\mathrm{e}^{na\pi/b}. \end{aligned}$$

극대인가 극소인가? 한 번 더 미분하면

$$\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^{ax}((a^2-b^2)\cos bx - 2ab\sin bx).$$

정류점에서는 $b\sin bx = a\cos bx$이므로 $2ab\sin bx = 2a^2\cos bx$이고

$$\mathrm{f}''(x_n) = \mathrm{e}^{ax_n}\cos bx_n\,(a^2-b^2-2a^2) = -(a^2+b^2)\,\mathrm{f}(x_n).$$

따라서 x_n은 $\mathrm{f}(x_n) > 0$일 때(n이 짝수) 극대(maximum)이고 $\mathrm{f}(x_n) < 0$일 때(n이 홀수) 극소(minimum)이다. 정류점은 극대, 극소, 극대, ...순으로 번갈아 나타난다.

등비수열

$0 < \alpha < \pi$이므로 $x_n > 0$일 필요충분조건은 $n \geq 0$이다. 따라서 $x > 0$인 정류점은 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$이고, 각 $n \geq 0$에 대하여

$$\frac{\mathrm{f}(x_{n+1})}{\mathrm{f}(x_n)} = \frac{\mathrm{e}^{a(\alpha+(n+1)\pi)/b}\cos(\alpha+(n+1)\pi)}{\mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi)} = \mathrm{e}^{a\pi/b}\cdot(-1) = -\mathrm{e}^{a\pi/b},$$

이다. 여기서 $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$와 $\cos(\alpha+n\pi) \neq 0$을 사용하였다. 이 비는 n에 의존하지 않으므로, 값 $\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}(x_1), \ldots$은 첫째항(first term)이 $\dfrac{b\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}}{\sqrt{a^2+b^2}}$이고 공비(common ratio)가 $-\mathrm{e}^{a\pi/b}$인 등비수열을 이룬다. 이로써 요구한 결과가 증명되었다.

(같은 계산은 음수 n에 대해서도 성립하므로, 사실 모든 정류값은 양방향으로 뻗은 하나의 등비수열을 이룬다. $x > 0$이라는 제한은 단지 자연스러운 첫째항을 정해 줄 뿐이다.)

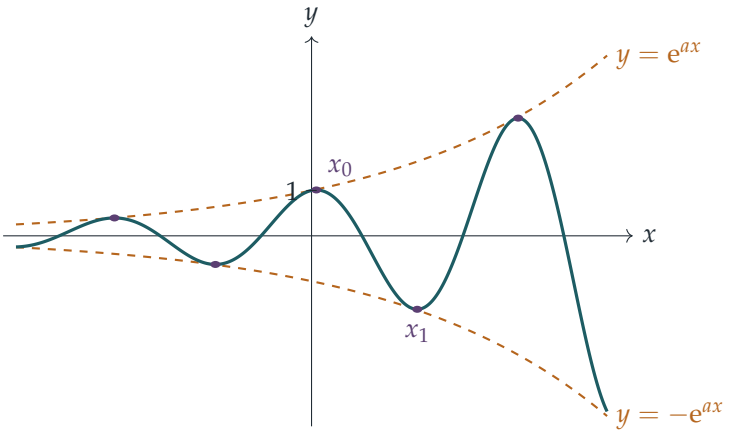
그래프 개형

필요한 사실은 다음과 같다.

- $-1 \leq \cos bx \leq 1$이므로 그래프는 곡선 $y = \mathrm{e}^{ax}$와 $y = -\mathrm{e}^{ax}$ 사이에 놓인다. 그래프는 $\cos bx = 1$인 곳($bx = 2m\pi$)에서 $y = \mathrm{e}^{ax}$에 닿고, $\cos bx = -1$인 곳($bx = (2m+1)\pi$)에서 $y = -\mathrm{e}^{ax}$에 닿는다. 이 점들에서는 $\sin bx = 0$이므로 $\mathrm{f}'(x) = \pm a\mathrm{e}^{ax}$로 포락선(envelope)의 기울기와 같다. 즉 곡선은 그 점에서 포락선에 접할 뿐, 방향을 바꾸지는 않는다.

- 영점은 $bx = \frac{\pi}{2} + m\pi$에 π/b 간격으로 있으며, $f(0) = 1$이다.
- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이므로 각 극값점(turning point) $bx = \alpha + n\pi$는 대응하는 접점 $bx = n\pi$의 바로 뒤에 있다. 증가하는 포락선이 각 봉우리를 오른쪽으로 조금씩 끌어당기는 것이다.
- $x \to \infty$일 때 진동은 한없이 커진다. $x \to -\infty$일 때는 $e^{ax} \to 0$이므로, 그래프는 계속 진동하면서 $f(x) \to 0$이 된다.

아래 그림은 $a = 0.3$, $b = 2$인 경우이며, 포락선 $y = \pm e^{ax}$는 점선으로 나타내었다.



검산

- $a = b = 1$로 두면 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$이고 $f(x_0) = e^{\pi/4}/\sqrt{2} \approx 1.551$이며, $f(x_1) = e^{5\pi/4}\cos\frac{5\pi}{4} \approx -35.89$이다. 비는 $\approx -23.14 = -e^{\pi}$이다.
- $a \to 0$이면 함수는 $\cos bx$가 된다. 이때 $\alpha \to 0$이고 극값점은 $bx = n\pi$로 옮겨 가며, 비는 -1로 수렴하여 익숙한 $1, -1, 1, \ldots$을 얻는다.
- 무작위로 고른 500개의 쌍 (a, b)에 대하여 $f'(x_n) = 0$, $f(x_n)$이 위의 공식과 일치함, $f''(x_n) = -(a^2 + b^2)f(x_n)$, 연속한 비가 $-e^{a\pi/b}$와 같음, 그리고 f'이 다른 영점을 갖지 않음을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 극값점을 곡선이 포락선에 닿는 곳, 즉 $bx = n\pi$에 두는 것. 그 점들에서의 기울기는 $\pm ae^{ax} \neq 0$이며, 극값점은 그보다 조금 오른쪽에 있다.
- $bx = \alpha$만 택하고 $\tan bx = a/b$의 일반해(general solution) $bx = \alpha + n\pi$를 잊는 것.

- 비의 음의 부호를 빠뜨리는 것. 연속한 정류점 사이에서 코사인의 부호가 바뀌므로 값은 극대, 극소로 번갈아 나타난다.

STEP 너머

함수 $e^{ax}\cos bx$는 $e^{(a+ib)x}$의 실수부(real part)이며, 이런 함수들은 바로 특성방정식(auxiliary equation)이 복소근을 갖는 선형 미분방정식(linear differential equation) $y'' + py' + qy = 0$의 해이다. $a < 0$이면 감쇠 진동(damped oscillation)이 나타나고(마찰이 있는 진자의 흔들림), 여기처럼 $a > 0$이면 진동이 점점 커지는 불안정한 계가 된다. 연속한 봉우리들은 일정한 비를 이루며, 그 비의 로그를 공학자들은 로그 감쇠율(logarithmic decrement)이라 부른다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)는 2계 선형 방정식을 다루는 장에서 이 내용을 전개하고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 $e^{(a+ib)x}$를 곱하는 것이 왜 나선을 그리는지 보여준다.

풀이

STEP I 1987, 문제 2

순수수학 • 원 채우기의 넓이

> **STEP I 1987, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q2

핵심 아이디어

작은 원들의 중심을 이어 보자. 중심들은 모두 두 큰 원의 한가운데에 있는 반지름 R인 원 위에 놓이며 정n각형(regular polygon)을 이룬다. 이 다각형의 변은 이웃한 작은 원들이 접하는 점을 지난다. 이 다각형이 바로 Y라 부르는 부분(다각형 안쪽)과 X라 부르는 부분(다각형 바깥쪽)을 가르는 경계선이다. 따라서 모든 넓이는 세 가지 간단한 도형, 즉 다각형, 원판(disc), 그리고 다각형의 꼭짓점이 잘라 내는 작은 원의 부채꼴(sector)로 구할 수 있다.

풀이

n, R, r 사이의 관계

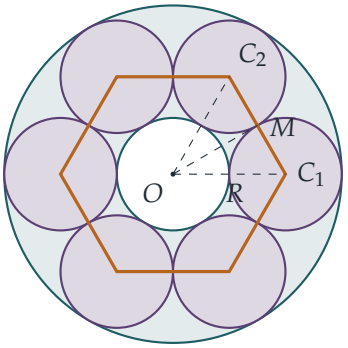
각 작은 원은 두 큰 원에 모두 접하므로, 그 중심은 공통 중심 O로부터 거리 $R - r + r = R$만큼 떨어져 있다. 즉 n개의 중심은 모두 반지름 R인 원 위에 있다. 대칭성에 의해 중심들은 같은 간격으로 놓이므로, 이웃한 중심 C_1, C_2가 O에서 이루는 각은 $2\pi/n$이다.

이웃한 두 원이 서로 접하므로 $C_1C_2 = 2r$이다. $OC_1 = OC_2 = R$인 이등변삼각형(isosceles triangle) OC_1C_2에서 O로부터 C_1C_2의 중점 M에 수선을 내리면 다음을 얻는다.

$$r = C_1M = R\sin\frac{\pi}{n}.$$

이것이 구하는 관계식이다. ($n \geq 3$이어야 한다. $n = 2$이면 안쪽 원의 반지름이 $R - r = 0$이 되기 때문이다.) 같은 삼각형에서 다음도 얻는다.

$$OM = R\cos\frac{\pi}{n} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$



그림($n = 6$인 경우)에서 중심들이 이루는 다각형을 호박색으로 나타냈다. 이 다각형의 변은 M처럼 이웃한 원들의 접점을 지난다.

넓이 Y

다각형은 OC_1C_2와 합동인 삼각형 n개로 이루어지고, 각 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$이다. 따라서

$$\text{다각형의 넓이} = nr\sqrt{R^2 - r^2}.$$

다각형 안에는 무엇이 있을까? 다각형의 내접원 반지름(inradius)은 $OM = \sqrt{R^2 - r^2}$이고, $R^2 - r^2 \geq (R - r)^2$이다. 이 부등식을 정리하면 $2r(R - r) \geq 0$이 되기 때문이다. 따라서 반지름 $R - r$인 안쪽 원판은 다각형 안에 들어 있다. 각 꼭짓점에는 작은 원의 부채꼴이 하나씩 있다. 정n각형의 내각(interior angle)은 $\pi - \frac{2\pi}{n}$이므로 각 부채꼴의 넓이는 다음과 같다.

$$\tfrac{1}{2}r^2\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right).$$

작은 원들은 서로 접하고 안쪽 원과도 접할 뿐이므로, 이 n개의 부채꼴과 안쪽 원판은 서로 겹치지 않는다. 다각형에서 이들을 빼고 남는 것은 정확히 안쪽 원에 붙어 있는 n개의 곡선 삼각형이고, 이들을 모두 합한 것이 Y이다.

$$Y = nr\sqrt{R^2 - r^2} - \pi(R - r)^2 - n\pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),$$

이로써 구하려던 식을 얻는다.

생각해 보기 왜 변 C_1C_2가 X와 Y를 가르기에 알맞은 곳일까?

변 C_1C_2는 접점 M을 지나 중심에서 중심으로 이어지므로, 원들 사이의 틈을 결코 가로지르지 않는다. 안쪽 원에 붙은 틈은 모두 이 변의 O 쪽에 있고, 바깥 원에 붙은 틈은 모두 반대쪽에 있다. 따라서 다각형을 따라 자르면 두 종류의 틈이 깔끔하게 나뉘고, 각 작은 원은 두 반지름을 따라 잘린다. 그래서 부채꼴이 생기는 것이다.

넓이 X와 Z

다각형 바깥이면서 바깥 원 안쪽인 영역에서는 각 작은 원의 나머지 부분을 빼야 한다. 그 나머지는 중심각이 $2\pi - (\pi - \frac{2\pi}{n}) = \pi + \frac{2\pi}{n}$인 우각(reflex angle) 부채꼴이고, 넓이는 $\pi r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$이다. 따라서

$$X = \pi(R+r)^2 - nr\sqrt{R^2 - r^2} - n\pi r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right).$$

반지름 r인 원판 n개로부터 다음을 얻는다.

$$Z = n\pi r^2.$$

$n \to \infty$일 때의 극한(limit)

더하면 다각형 항은 소거되고 부채꼴 항은 합쳐져 $n\pi r^2$이 된다.

$$\begin{aligned} X + Y &= \pi(R+r)^2 - \pi(R-r)^2 - n\pi r^2 \\ &= 4\pi Rr - n\pi r^2. \end{aligned}$$

이것은 원환(annulus)의 넓이에서 원들의 넓이를 뺀 것으로, 당연히 그래야 한다. 따라서

$$\frac{X+Y}{Z} = \frac{4\pi Rr - n\pi r^2}{n\pi r^2} = \frac{4R}{nr} - 1 = \frac{4}{n\sin(\pi/n)} - 1,$$

여기서 $r = R\sin(\pi/n)$을 이용했다. $n \to \infty$이면 $\pi/n \to 0$이고 $\dfrac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \to 1$이므로 $n\sin(\pi/n) \to \pi$이고

$$\frac{X+Y}{Z} \to \frac{4}{\pi} - 1 \approx 0.273.$$

검산

- $n = 3, R = 1$이면 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $Y \approx 0.0646$, $X \approx 3.7497$이다. 촘촘한 극좌표 격자 위에서 각 점을 원 안, 다각형 안, 다각형 밖으로 분류하여 수치적분을 해 보면, $n = 3, 5, 8, 12$에 대해 유효숫자 네 자리까지 일치했다.
- 비 $\frac{4}{n\sin(\pi/n)} - 1$의 값은 $n = 10$일 때 0.2944, $n = 100$일 때 0.27345, $n = 1000$일 때 0.273240이다. 값이 $4/\pi - 1 = 0.273240\ldots$에 점점 가까워진다.
- 직관적으로 보면, n이 클 때 원들은 폭이 $2r$인 띠 안에 지름 $2r$인 원판이 한 줄로 늘어선 모습이 된다. 각 $2r \times 2r$ 정사각형에서 원판이 πr^2을 차지하고 틈이 $4r^2 - \pi r^2$을 차지하므로, 비는 $(4-\pi)/\pi$가 된다.

흔한 실수

- 부채꼴의 각으로 다각형의 외각(exterior angle) $2\pi/n$을 써야 할 곳에 내각 $\pi - 2\pi/n$ 대신 잘못 쓰는 실수. 즉 내각 대신 외각을 쓰는 실수.
- Y에서 안쪽 원판을 빼야 한다는 것을 잊거나, 안쪽 원판이 정말로 다각형 안에 있는지 확인하지 않는 실수.

STEP 너머

마지막 극한은 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$이 모습을 바꾼 것이다. 이것은 아르키메데스(Archimedes)가 내접 다각형과 외접 다각형의 둘레 사이에 π를 끼워 넣을 때 쓴 바로 그 사실이다. 이 문제는 원 채우기 밀도(circle-packing density) 문제의 장난감 판이기도 하다. 여기서는 얇은 원환 중 원들이 채울 수 있는 비율을 묻는 것이다. 이런 극한을 엄밀하게 다루고 싶다면 Abbott의 *Understanding Analysis*를 읽어 보라.

풀이

STEP I 1987, 문제 3

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

> **STEP I 1987, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q3

핵심 아이디어

v에 대한 이 방정식은 보기에 까다롭지만, 좌변은 알아봐 달라고 외치고 있다. $x^3v' + x^2v$는 x^2에 xv의 도함수(derivative)를 곱한 것이다. 따라서 제시된 치환(substitution)은 좌변을 x^2y'로 바꾸고, y로 다시 쓴 우변은 깔끔하게 변수분리(separation of variables)된다. 그 다음은 부분분수(partial fractions)와 부호를 신중하게 고르는 일만 남는다.

풀이

변수 바꾸기

$y = xv$로 두면 곱의 미분법(product rule)에 의해 $y' = v + xv'$이므로

$$x^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x^2v = x^2\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right) = x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

우변에서 $x^2v^2 = y^2$이고 $v = y/x$이므로 우변은

$$\frac{1+y^2}{(1+x^2)\,y/x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}.$$

방정식은 다음과 같이 된다.

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{y}{1+y^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x(1+x^2)},$$

여기서 x^3으로 나누고($x = 1$ 근처에서 다루므로 $x > 0$이다) $y/(1+y^2)$을 곱했다. 변수가 분리되었다.

적분하기

좌변을 적분하면 $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$이 된다. 우변은 부분분수로 분해하면

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2},$$

이고, 이는 우변을 통분해 보면 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 $x > 0$일 때

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \qquad \text{따라서} \qquad 1+y^2 = \frac{Ax^2}{1+x^2}$$

이며, 여기서 $A = \mathrm{e}^{2C}$는 양의 상수이다.

$x = 1$일 때 $v = 1$이므로 $y = 1$이기도 하고, 따라서 $2 = A/2$, 즉 $A = 4$이다. 그러므로

$$y^2 = \frac{4x^2}{1+x^2} - 1 = \frac{3x^2-1}{1+x^2}, \qquad v^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{3x^2-1}{x^2(1+x^2)}.$$

? **생각해 보기** 어느 쪽 제곱근을 택해야 하며, 해는 어디에서 유효한가?

원래 방정식은 분모에 v가 있으므로 해는 결코 $v = 0$을 지날 수 없다. 해는 연속이므로 $x = 1$에서의 부호, 즉 양의 부호를 계속 유지한다. 따라서 양의 제곱근을 택한다.

$$\boxed{v(x) = \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

이 해는 $x > 1/\sqrt{3}$에서 유효하다. x가 $1/\sqrt{3}$까지 감소하면 v는 0으로 떨어지고 방정식이 성립하지 않게 되므로, 해를 그 점 아래로 연장할 수 없다.

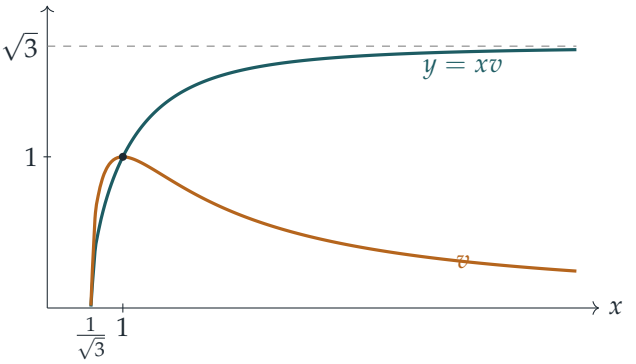
x가 클 때

분자와 분모를 x^2으로 나누면

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3-1/x^2}}{\sqrt{1+1/x^2}} \approx \frac{\sqrt{3}}{x},$$

이므로 $x \to \infty$일 때 $v(x) \to 0$이다. 같은 말로, $y = xv \to \sqrt{3}$이다. 즉 y의 그래프는 수평 점근선(horizontal asymptote) $y = \sqrt{3}$을 가지며, $v = y/x$는 $\sqrt{3}/x$처럼 감소한다.

사실 출발점이 최고점이다. $u = x^2$으로 두면 $(3u-1)/(u^2+u)$의 도함수의 분자는 $-(3u+1)(u-1)$이므로, v는 $x = 1$에서 최댓값 1까지 증가한 뒤 0을 향해 감소한다.



검산

- $x = 1$에서: $v = \sqrt{2}/(1 \cdot \sqrt{2}) = 1$로, 조건을 만족한다.
- 다시 대입하기: $1 + y^2 = 4x^2/(1 + x^2)$에서 음함수 미분(implicit differentiation)을 하면 $2yy' = 8x/(1 + x^2)^2$이고, $(1 + y^2)/(x(1 + x^2)) = 4x/(1 + x^2)^2$이므로 마땅히 $yy'/(1 + y^2) = 1/(x(1 + x^2))$이 성립한다.
- 수치적으로, 원래 방정식을 $(1, 1)$에서부터 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 단계별로 풀면 $v(10) \approx 0.172058$을 얻어 공식과 일치하고, $x = 10^4$에서 공식은 $xv \approx 1.73205 \approx \sqrt{3}$을 준다.

흔한 실수

- 극한(limit)의 답으로 $\sqrt{3}$이라고 쓰는 것: 그것은 y의 극한이지만, 문제는 v에 대해 묻고 있으며, 이는 0으로 수렴한다.
- 상수를 지수로 올릴 때 잘못하는 것: $\ln(1 + y^2) = \ln \frac{x^2}{1+x^2} + 2C$에서 얻는 것은 곱해지는 상수가 있는 $1 + y^2 = Ax^2/(1 + x^2)$이지, $x^2/(1 + x^2) + 2C$가 아니다.
- 제곱근에서 $\pm$를 정하지 않고 두는 것: 조건 $v(1) = 1$과 $v = 0$이 될 수 없다는 제약이 양의 부호를 결정한다.

STEP 너머

여기서 치환이 통하는 이유는 양변에 곱한 뒤 좌변이 완전미분(exact derivative)이 되기 때문이며, 이는 적분인자(integrating factor)와 동차방정식(homogeneous equation) 뒤에 있는 것과 같은 아이디어이다. 부호와 정의역(domain)에 대해 기울여야 했던 주의는 존재

성과 유일성 이론(existence and uniqueness theory)을 처음 엿보는 것이다. 주어진 점을 지나는 해는 방정식이 의미를 잃는 곳, 여기서는 $v = 0$에 닿을 때까지 존재한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 변수분리형 방정식과 해가 어디까지 연장되는지의 문제를 다룬다.

풀이

STEP I 1987, 문제 4

순수수학 • 로그와 등비급수

> **STEP I 1987, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q4

핵심 아이디어

다루기 까다로운 밑(base)의 로그(logarithm)는 자연로그(natural logarithm)로 바꾸는 것이 가장 좋다. 그러면 밑이 단순한 인수로 나타나기 때문이다. 여기서 모든 밑은 2의 거듭제곱이고, 지수(exponent) 2^n은 곱해지는 수로 내려온다. 각 항을 $\ln 2$로 나타내고 나면, 이 급수는 모습만 바꾼 등비급수(geometric series)일 뿐이다.

풀이

일반항 다시 쓰기

$n \geq 0$을 고정하고 $c = \log_{2^{2^n}} \mathrm{e}$라 하자. 힌트에 주어진 정의에 따라 이는

$$\left(2^{2^n}\right)^c = \mathrm{e}$$

를 뜻한다. 양변에 자연로그를 취하면(양변 모두 양수이다)

$$c \cdot 2^n \ln 2 = \ln \mathrm{e} = 1, \qquad \text{따라서} \qquad \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{2^n \ln 2}.$$

첨자가 맞는지 확인해 보면, $n = 0, 1, 2$일 때 밑은 2, 4, 16으로 처음 세 항과 일치하고, 그 값은 $\frac{1}{\ln 2}$, $\frac{1}{2\ln 2}$, $\frac{1}{4\ln 2}$이다.

> **생각해 보기** 2^n은 어디에서 나왔는가?

$a = 2$, $k = 2^n$으로 놓고 법칙 $\ln(a^k) = k \ln a$를 쓰면 나온다. 즉 밑 2^{2^n}의 자연로그는 $2^n \ln 2$이다. 지수가 "탑"처럼 쌓여 있기 때문에 각 밑은 바로 앞 밑의 **제곱**이 되고, 밑을 제곱하면 로그는 절반이 된다.

급수의 합 구하기

따라서 급수는

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

이다. 이것은 첫째항이 1이고 공비(common ratio)가 $r = -\frac{1}{2}$인 등비급수이다. $|r| < 1$이므로 이 급수는 수렴(converge)하며, 그 합은 $\dfrac{1}{1-r} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$이다. 그러므로

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{2}{3\ln 2} = \frac{1}{\frac{3}{2}\ln 2} = \frac{1}{\ln\left(2^{3/2}\right)} = \frac{1}{\ln(2\sqrt{2})}$$

이다. 여기서 다시 $\ln(a^k) = k\ln a$를 썼고, $2^{3/2} = 2\cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2}$를 이용했다. 이것이 구하는 합이다.

검산

수치로 보면 $\frac{1}{\ln(2\sqrt{2})} \approx 0.96180$이다. 급수의 부분합(partial sum)은 1.4427, 0.7213, 1.0820, 0.9017, 0.9919, 0.9468, …로, 교대(alternating) 등비급수답게 이 값의 양쪽을 오가며 그 차이가 매번 절반으로 줄어든다. 60개 항까지 더하면 기계 정밀도 안에서 0.961797과 일치한다.

흔한 실수

- $\log_{2^{2^n}}$을 $\log_{2^{2n}}$으로 읽는 실수: 이렇게 하면 밑이 2, 16, 256, …가 되어 틀린 공비 $-\frac{1}{4}$를 얻는다. 처음 몇 항과 비교하여 첨자를 확인하라.
- $\dfrac{1}{\ln a}$ 대신 $\log_a \mathrm{e} = \ln a$로 쓰는 실수. 밑변환 공식(change-of-base rule)에 따르면 $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$이고, 여기서는 $\ln b = 1$이다.

STEP 너머

무한합이 애초에 "값을 갖는가"는 해석학(analysis) 첫 강좌의 핵심 질문이다. 등비급수는 기본적인 기준이 된다. 비판정법(ratio test)을 비롯한 많은 수렴 판정법은 급수를 등비급수와 비교하는 방식으로 작동한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 이론을 꼼꼼하면서도 읽기 쉽게 쌓아 올린다.

풀이

STEP I 1987, 문제 5

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1987, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q5

핵심 아이디어

이 치환(substitution)은 제곱근 안의 두 인수가 모두 완전제곱식이 되도록 고안된 것이다. 즉 $x-\alpha$는 $\sin^2\theta$의 상수배가 되고, $\beta-x$는 같은 상수배의 $\cos^2\theta$가 된다. 그러면 제곱근이 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$와 정확히 약분되어, 첫 번째 적분은 피적분함수(integrand)가 상수인 적분으로 줄어든다. 두 번째 적분에는 $1/x$라는 인수가 하나 더 남는데, 분자와 분모를 $\cos^2\theta$로 나누면 이것은 $\tan\theta$에 관한 표준적인 적분이 된다.

풀이

$\alpha<\beta$일 때의 첫 번째 적분

$x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$로 놓는다. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$을 이용하면

$$x-\alpha=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta-\alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(\beta-\alpha)\sin^2\theta,$$
$$\beta-x=\beta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\alpha\cos^2\theta-\beta\sin^2\theta=(\beta-\alpha)\cos^2\theta,$$

이고

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-2\alpha\cos\theta\sin\theta+2\beta\sin\theta\cos\theta=2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

이다. 적분 구간의 끝을 보면, $\theta=0$일 때 $x=\alpha$이고 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $x=\beta$이다. $(0,\frac{\pi}{2})$에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta>0$이므로, θ가 $[0,\frac{\pi}{2}]$를 움직일 때 x는 $[\alpha,\beta]$를 증가하면서 한 번 지나간다.

이 범위에서 $\sin\theta\geq 0$, $\cos\theta\geq 0$이고 $\beta-\alpha>0$이므로

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}=(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

이다. 따라서

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{d}\theta = \pi,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (피적분함수가 양 끝에서 발산하므로, 엄밀히 말하면 이것은 이상적분(improper integral)이다. 치환한 뒤의 피적분함수가 유계인 상수 2이므로, 이 치환을 통해 적분이 수렴(converge)함을 알 수 있다.)

? **생각해 보기** $\alpha < \beta$라는 조건은 정확히 어디에서 사용했는가?

제곱근을 계산할 때뿐이다. $\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$가 $\beta-\alpha$와 같은 것은 바로 $\beta-\alpha>0$이기 때문이다. 일반적으로는 이 값이 $|\beta-\alpha|$이며, 이것이 다음 소문항의 핵심이다.

$\alpha > \beta$일 때의 첫 번째 적분

이번에는 적분이 큰 수 α에서 작은 수 β로 내려가며 진행된다. 두 수 사이의 구간에서 $x-\alpha<0$이고 $\beta-x<0$이므로, 곱은 여전히 양수이고 피적분함수도 여전히 의미가 있다.

치환은 앞과 똑같이 진행되지만, 이번에는 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2} = \alpha-\beta$이므로

$$\frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\alpha-\beta)\sin\theta\cos\theta} = -2,$$

이고, 적분값은

$$\int_0^{\pi/2} (-2)\,\mathrm{d}\theta = -\pi.$$

이다. 이것을 더 빨리 확인하는 방법도 있다. 식 $(x-\alpha)(\beta-x)$는 α와 β를 서로 바꾸어도 변하지 않으므로, 피적분함수는 두 문자의 역할을 바꾼 첫 번째 경우와 같은 함수이다. 적분구간의 위끝과 아래끝을 바꾸면 부호가 바뀌므로, β를 작은 쪽 끝점으로 하여 첫 번째 결과를 이용하면

$$\int_\alpha^\beta = -\int_\beta^\alpha = -\pi,$$

이다.

$0 < \alpha < \beta$일 때의 두 번째 적분

똑같은 치환을 하면 똑같이 약분되어 $1/x$라는 인수만 남는다.

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}\theta}{\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta}.$$

$\alpha,\beta>0$이므로 분모는 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 전체에서 양수이고, 따라서 이것은 보통의 정적분이다. 이 값을 구하기 위해 분자와 분모를 $\cos^2\theta$로 나눈다($0\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 가능하다).

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\alpha+\beta\tan^2\theta}.$$

이제 $t = \tan\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고, θ가 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 움직일 때 t는 0에서 ∞까지 움직인다.

$$\int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{\alpha+\beta t^2} = \frac{2}{\beta}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\alpha/\beta} = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left[\arctan\left(t\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right]_0^\infty$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. $\alpha > 0$이라는 조건은 두 번 필요했다. 하나는 $[\alpha, \beta]$ 안에서 $1/x$가 특이점(singularity)을 갖지 않도록 하기 위해서이고, 다른 하나는 $\sqrt{\beta/\alpha}$가 실수가 되도록 하기 위해서이다.

? **생각해 보기** 위끝이 ∞가 되었다. 이것이 문제가 되는가?

그렇지 않다. θ에 관한 적분은 지극히 평범한 적분이며, 무한대 끝은 $\theta \to \frac{\pi}{2}$일 때 $\tan\theta \to \infty$이기 때문에 나타날 뿐이다. arctan이 $\frac{\pi}{2}$로 수렴하므로 t에 관한 적분은 수렴하고, $\Theta \to \frac{\pi}{2}$일 때 $[0, \Theta]$에서의 적분의 극한으로서 θ에 관한 적분과 같다.

검산

- 척도 변환(scaling): x, α, β를 kx, $k\alpha$, $k\beta$로 바꾸면 첫 번째 적분은 변하지 않고 두 번째 적분은 k로 나누어진다. 두 답 π와 $\pi/\sqrt{\alpha\beta}$는 모두 이렇게 변한다.
- $\alpha \to \beta$로 보내 보자. 그러면 (아주 작은) 구간 전체에서 $1/x \approx 1/\beta$이므로 두 번째 적분은 약 π/β가 되어야 하는데, 실제로 $\pi/\sqrt{\alpha\beta} \to \pi/\beta$이다.
- 수치적으로, $\alpha = 2$, $\beta = 7$일 때 수치 적분(quadrature)으로 두 번째 적분을 계산하면 0.83963이 나오며, 이는 $\pi/\sqrt{14} = 0.83963$과 일치한다. $\alpha < \beta$를 임의로 골라 계산해 보면 첫 번째 적분은 모두 π가 나왔고, 끝점을 서로 바꾸면 $-\pi$가 나왔다.

흔한 실수

- $\alpha > \beta$일 때도 답을 π라고 쓰는 것. 피적분함수는 양수이지만 적분 구간이 거꾸로 진행되므로 답은 $-\pi$이다.
- 세 인수의 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta} = (\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta$라고 쓰는 것.

STEP 너머

이 치환에는 깔끔한 기하학적 의미가 있다. $x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\cos 2\theta$이므로, 이 치환은 $[\alpha, \beta]$를 지름으로 하는 반원을 매개화(parametrise)하며, $\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$는 x 위에서 그 반원의 높이이다. 두 번째 적분은 경로 적분(contour integration)으로 적분을 계산하는 방법을 처음 맛보게 해 준다. 복소해석학(complex analysis)에서는 두 결과 모두 유수 정리(residue theorem)로부터 몇 줄 만에 얻어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 이를 훌륭하게 설명하며, 이상적분에 대한 엄밀한 논의는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)에 있다.

풀이

STEP I 1987, 문제 6

순수수학 • 넓이와 역함수

> **STEP I 1987, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q6

핵심 아이디어

$\mathrm{F}(s)$는 곡선 **아래**, 곧 곡선과 x축 사이의 넓이이고, $\mathrm{G}(t)$는 곡선 **왼쪽**, 곧 곡선과 y축 사이의 넓이이다. 두 영역을 한 그림에 함께 그리면 두 영역은 꼭짓점이 $(0,0)$과 (s,t)인 직사각형을 함께 덮는데, 꼭짓점 (s,t)가 곡선 위에 정확히 놓이지 않는 한 남는 부분이 생긴다. 두 번째 부분에서는 바로 그렇게 되도록 s를 고르고, 그러면 어려운 적분 $\int \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y$가 쉬운 적분 $\int \sin x \,\mathrm{d}x$로부터 저절로 얻어진다.

풀이

부등식 $(*)$

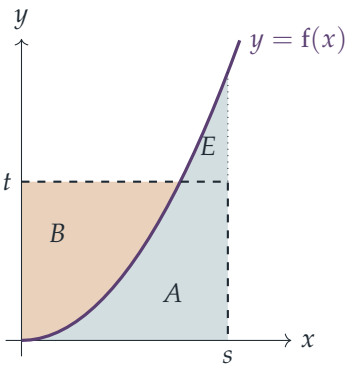
먼저 f에 관한 사실 하나를 살펴본다. 이 함수는 연속(continuous)이고 각 값을 많아야 한 번만 가지므로 강단조(strictly monotonic)이다(증가하다가 감소하는 연속함수는 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 어떤 값을 두 번 가지게 된다). $\mathrm{f}(0) = 0$이고 $\mathrm{f}(x) \geq 0$이므로 이 함수는 강한 의미로 **증가**해야 한다. 따라서 g도 증가하며, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \mathrm{f}(a)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$y \leq \mathrm{f}(x) \iff \mathrm{g}(y) \leq x.$$

두 영역을 다음과 같이 정의한다.

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq s,\ 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}, \qquad \text{넓이} \mathrm{F}(s),$$
$$B = \{(x,y) : 0 \leq y \leq t,\ 0 \leq x \leq \mathrm{g}(y)\}, \qquad \text{넓이} \mathrm{G}(t),$$

또 R을 직사각형 $0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq t$라 하면 그 넓이는 st이다. B의 넓이가 $\mathrm{G}(t)$인 까닭은 길이가 $\mathrm{g}(y)$인 가로 띠들을 적분하기 때문이다("y에 대한 넓이").



R의 모든 점은 A 또는 B에 속한다. $(x,y) \in R$이면 $y \le \mathrm{f}(x)$이어서 그 점이 A에 속하거나, $y > \mathrm{f}(x)$인데 이는 $x < \mathrm{g}(y)$를 뜻하므로 그 점이 B에 속한다. 겹치는 부분 $A \cap B$는 곡선의 호 자체일 뿐이므로 넓이가 없다. 따라서

$$\mathrm{F}(s) + \mathrm{G}(t) = \text{넓이}(A) + \text{넓이}(B) \ge \text{넓이}(A \cup B) \ge \text{넓이}(R) = st,$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다.

? **생각해 보기** 직사각형 안에 있지 않은데 세어진 것은 정확히 무엇인가?

초과분은 $A \cup B$ 가운데 R 밖으로 튀어나온 부분 E이다. (그림처럼) $t < \mathrm{f}(s)$이면 B는 R 안에 머물지만, A는 $y = t$ 위로 영역 $\mathrm{g}(t) < x \le s, t < y \le \mathrm{f}(x)$만큼 튀어나온다. 모든 $x > \mathrm{g}(t)$에 대하여 $\mathrm{f}(x) > t$이고 f가 연속이므로 이 영역의 넓이는 양수이며, 따라서 부등식은 엄격한 부등식(strict inequality)이 된다. $t > \mathrm{f}(s)$이면 역할을 바꾸어 같은 일이 일어난다. 즉 B가 $x = s$의 오른쪽으로 튀어나온다. $t = \mathrm{f}(s)$이면 꼭짓점 (s,t)는 곡선 위에 있고, $A \cup B$는 정확히 R이 되어 초과분이 없다.

그러므로 $(*)$**에서 등호가 성립할 필요충분조건은** $t = \mathrm{f}(s)$**이다**. 즉 (s,t)가 곡선 위에 있을 때이다.

$\sin^{-1} y$의 적분

$[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 $\mathrm{f}(x) = \sin x$로 잡자. 이 함수는 연속이고 증가하며 원점을 지나고 제1사분면(first quadrant)에 머무르므로, $a = \frac{1}{2}\pi, \mathrm{f}(a) = 1, \mathrm{g}(y) = \sin^{-1} y$로 두면 위의 내용이 모두 적용된다.

$t \in [0,1]$이 주어졌을 때 $s = \sin^{-1} t$로 고르면, 이 값은 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에 속한다. 그러면 $t = \sin s = \mathrm{f}(s)$이므로 $(*)$에서 등호가 성립한다.

$$\int_0^t \sin^{-1} y \, \mathrm{d}y = \mathrm{G}(t) = st - \mathrm{F}(s).$$

이제 쉬운 적분을 계산한다.

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^s \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos s.$$

$s = \sin^{-1} t$를 대입하면

$$\int_0^t \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y = t \sin^{-1} t - \left(1 - \cos(\sin^{-1} t)\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

미분으로 확인하기

$\sin^{-1} t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$이므로 그 코사인 값은 음이 아니고, 따라서 $\cos(\sin^{-1} t) = \sqrt{1-t^2}$이다. 그러므로 우변은 $t \sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}$이다. $0 \le t < 1$에 대하여 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin^{-1} t = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$와 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}\right) &= \sin^{-1} t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sin^{-1} t,\end{aligned}$$

이고, 이는 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해 좌변의 도함수와 같다. 양변은 $t = 0$에서 모두 0이므로 $[0, 1)$에서 일치하고, 연속성에 의해 $t = 1$에서도 일치한다.

검산

- $t = 1$일 때: 공식은 $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.5708$을 준다. 기하적으로 보면, 높이 1까지 $y = \sin x$의 왼쪽 넓이는 직사각형 $\frac{1}{2}\pi \times 1$에서 아치 아래의 넓이 1을 뺀 것이다. $[0, 1]$에서 $\sin^{-1} y$를 수치적분(numerical integration)하면 0.57080이 나온다.
- $t = \frac{1}{2}$일 때: 공식은 $\frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.12782$를 주며, 이는 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 값과 일치한다.
- $(*)$에 대해서는 $\mathrm{f}(x) = x^2$, $s = 1$, $t = 4$로 해 보자. $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} = \frac{17}{3} > 4$이고, $t = 1 = \mathrm{f}(1)$로 두면 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 = st$를 얻는다.

흔한 실수

- 부호를 정하지 않고 $\cos(\sin^{-1} t) = \pm\sqrt{1-t^2}$라고 쓰는 것: $\sin^{-1}$의 치역 때문에 양수이다.

- $t \neq \mathrm{f}(s)$일 때 부등식이 왜 엄격한지 설명하지 않고 "영역들이 직사각형을 덮는다"고만 말하는 것: 등호 조건을 묻는 부분에는 그 설명이 필요하다.
- f가 증가해야 한다는 사실을 잊는 것: 그림은 이 사실에 기대고 있다.

STEP 너머

부등식 $(*)$는 **영의 부등식**(Young's inequality)이다. $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$로 두면 이 부등식은 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$일 때 $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$가 되는데, 이는 해석학의 주력 도구 가운데 하나인 횔더(Hölder) 부등식을 증명하는 핵심 단계이다. F와 G의 짝짓기는 라그랑주 역학과 해밀턴 역학을 잇는 르장드르 변환(Legendre transform)을 처음으로 엿보는 것이다. 이 모든 것의 바탕에 있는 해석학을 더 알고 싶다면 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 1987, 문제 7

순수수학 • 삼각급수

> **STEP I 1987, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q7

핵심 아이디어

두 급수(series) 모두 각이 일정한 간격으로 커지는 사인들의 합이다. $\sin\big((2k+1)\theta\big)$ 꼴의 항에 $2\sin\theta$나 $2\cos\theta$를 곱하면 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)에 의해 이웃한 두 항의 **차** 또는 **합**이 되므로, 급수 전체가 연쇄적으로 소거(telescoping)된다. 유일한 선택은 어떤 인수를 곱하느냐이다. 그냥 더하는 합에는 $2\sin\theta$가 알맞고, 부호가 번갈아 바뀌는 합에는 $2\cos\theta$가 알맞다.

풀이

준비

$\theta = \dfrac{2\pi}{23}$이라 하자. 각은 $2\pi/23,\ 6\pi/23,\ 10\pi/23, \ldots, 42\pi/23$이고 매번 $4\pi/23 = 2\theta$씩 커지므로, $21\theta = 42\pi/23$에서 각은

$$(2k+1)\theta \qquad \text{단, } k = 0, 1, \ldots, 10,$$

이다. 따라서 항은 11개이고, 교대급수(alternating series)에서 k번째 항의 부호는 $(-1)^k$이다(마지막 항 $k=10$은 마땅히 $+$이다). 그러므로 구하려는 것은

$$S_1 = \sum_{k=0}^{10} \sin\big((2k+1)\theta\big), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \sin\big((2k+1)\theta\big).$$

이다. $22\theta = \dfrac{44\pi}{23} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{23}$을 이용할 것인데, 이로부터

$$\cos 22\theta = \cos\theta, \qquad \sin 22\theta = -\sin\theta.$$

이다.

첫 번째 급수

곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$에 의해

$$2\sin\theta\,\sin\big((2k+1)\theta\big) = \cos(2k\theta) - \cos\big((2k+2)\theta\big).$$

이다. $k = 0, \ldots, 10$에 대해 더하면, $1 \le k \le 10$인 각 $\cos(2k\theta)$는 양의 부호와 음의 부호로 한 번씩 나타나 소거되고, 남는 것은

$$2\sin\theta\, S_1 = \cos 0 - \cos 22\theta = 1 - \cos\theta.$$

이다. $0 < \theta < \pi$이므로 $\sin\theta \neq 0$이고, 따라서 나눌 수 있다.

$$S_1 = \frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{4\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2},$$

여기서 $1-\cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$와 $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$를 이용하고 $\sin(\theta/2) \neq 0$을 약분하였다. $\theta/2 = \pi/23$이므로

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23} + \sin\tfrac{6\pi}{23} + \cdots + \sin\tfrac{42\pi}{23} = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{23}.}$$

? **생각해 보기** 교대급수에서는 왜 다시 $2\sin\theta$를 곱하지 않고 $2\cos\theta$를 곱하는가?

$2\sin\theta$를 곱하면 차 $\cos(2k\theta) - \cos((2k+2)\theta)$가 나오는데, 번갈아 바뀌는 부호 때문에 이웃한 항들이 소거되지 않고 오히려 **더해진다**. $2\cos\theta$를 곱하면 **합** $\sin((2k+2)\theta) + \sin(2k\theta)$가 나오고, 이번에는 번갈아 바뀌는 부호가 바로 소거를 일으킨다.

두 번째 급수

$2\cos A\sin B = \sin(B+A) + \sin(B-A)$에 의해

$$2\cos\theta\,\sin\big((2k+1)\theta\big) = \sin\big((2k+2)\theta\big) + \sin(2k\theta).$$

이다. 여기에 $(-1)^k$를 곱하여 더한다. $1 \le k \le 10$일 때 $\sin(2k\theta)$는 $k-1$번째 항에서 부호 $(-1)^{k-1}$로, k번째 항에서 부호 $(-1)^k$로 나타나므로 소거된다. 남는 것은 $k = 0$에서 나온 $\sin 0$과 $k = 10$에서 나온 $(-1)^{10}\sin 22\theta$뿐이다.

$$2\cos\theta\, S_2 = \sin 22\theta = -\sin\theta.$$

$0 < \theta < \pi/2$이므로 $\cos\theta \neq 0$이고, 따라서

$$S_2 = -\frac{\sin\theta}{2\cos\theta} = -\tfrac{1}{2}\tan\theta,$$

즉

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23} - \sin\tfrac{6\pi}{23} + \cdots - \sin\tfrac{38\pi}{23} + \sin\tfrac{42\pi}{23} = -\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{2\pi}{23}.}$$

이다. 양수처럼 보이는 꼴을 원한다면, $\tan(\pi - x) = -\tan x$이므로 이 값은 $\frac{1}{2}\tan\frac{21\pi}{23}$이기도 하다.

검산

- 수치로 계산하면 $\frac{1}{2}\tan(\pi/23) \approx 0.068723$, $-\frac{1}{2}\tan(2\pi/23) \approx -0.140093$이고, 열한 개의 항을 직접 더해도 유효숫자 15자리까지 같은 값이 나온다.
- 두 번째 답이 음수라는 것은 납득할 만하다. 부분합(partial sum)은 대략 ± 0.5 사이를 오가며, 마지막으로 더하는 항 $\sin(42\pi/23) \approx -0.27$ 자체가 음수이다.
- 같은 방법으로 일반 공식 $\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\theta) = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$와 $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sin((2k+1)\theta) = (-1)^{n-1}\dfrac{\sin 2n\theta}{2\cos\theta}$를 얻는다. $n=1$을 대입해 보면 둘 다 $\sin\theta$가 된다.

흔한 실수

- 항의 개수를 잘못 세는 것. 각은 $2\pi/23$이 아니라 $4\pi/23$씩 커지므로 항은 21개가 아니라 11개이다.
- 두 답이 모두 양수일 것이라고 기대하는 것. π보다 큰 각의 사인은 음수이며, 음의 부호는 $\sin(44\pi/23) = -\sin(2\pi/23)$에서 나온다.

STEP 너머

이 합들은 등비급수(geometric series)의 허수부(imaginary part)이다. $S_1 = \operatorname{Im}\sum e^{i(2k+1)\theta}$이고, S_2는 공비가 $-e^{2i\theta}$인 같은 꼴의 급수의 허수부이므로, 이로부터 두 답에 이르는 또 다른 길을 얻는다. 디리클레 핵(Dirichlet kernel)과 같은 이런 종류의 합은 함수를 사인과 코사인으로 쌓아 올리는 푸리에 해석(Fourier analysis)의 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 회전하는 벡터의 그림을 이용하여 이러한 합이 왜 그렇게 행동하는지 보여 준다.

풀이

STEP I 1987, 문제 8

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1987, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q8

핵심 아이디어

치환(substitution)으로 변수를 바꿀 수 있는 것은 옛 변수가 어떤 구간을 지나갈 때 새 변수도 한 방향으로 매끄럽게 움직이는 경우뿐이다. 여기서 $t = 1/x$는 $x = 0$에서 발산하는데, 이 점은 $[-1, 1]$의 한가운데에 있다. 따라서 "새 적분 끝값" -1과 1은 전혀 다른 t값들의 집합을 나타낸다. 두 피적분함수(integrand)의 부호만 잠깐 살펴봐도 무언가 잘못되었음을 확인할 수 있다.

풀이

치환이 실패하는 이유

형식적으로 $x = 1/t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$이고

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{t^4}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

이며, $x = \pm 1$은 $t = \pm 1$에 대응한다. 두 적분이 같다는 것을 이렇게 "보일" 수 있을 것 같다. 그러나 이는 옳을 수 없다. 첫 번째 피적분함수는 모든 곳에서 양수이므로 첫 번째 적분은 양수이고, 두 번째 피적분함수는 모든 곳에서 ≤ 0이므로 두 번째 적분은 음수이기 때문이다.

> ? **생각해 보기** x가 -1부터 1까지 움직일 때, $t = 1/x$는 실제로 어떤 값들을 가지는가?

x가 -1에서 0^-까지 증가하면 t는 -1에서 $-\infty$까지 감소한다. $x = 0$에서는 대응하는 t가 아예 없다. 그리고 x가 0^+에서 1까지 가면 t는 $+\infty$에서 1까지 내려온다. 따라서 x의 구간 $[-1, 1]$은 $[-1, 1]$ 자체가 아니라 $[-1, 1]$의 **바깥인** $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$에 대응한다. 치

환 법칙이 성립하려면 $x = \phi(t)$에서 ϕ가 새 적분 끝값 사이의 t 구간 전체에서 미분가능(differentiable)해야 하는데, $\phi(t) = 1/t$는 $t = 0 \in [-1, 1]$에서 정의조차 되지 않는다. $(-1, 1)$에 속하는 t값들은 $|x| > 1$에 대응하며, 이는 원래 범위 밖에 있다.

각 절반에서 따로따로 올바르게 쓰면, 이 치환으로 예를 들어

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_\infty^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

를 얻는다. 이는 참인 명제이지만(아래에서 확인한다), t에 대한 $[-1, 1]$ 위의 적분에 대해서는 아무것도 말해 주지 않는다.

첫 번째 적분

$x = \tan\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고 $1 + x^2 = \sec^2\theta$이다. tan는 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$에서 매끄럽고 증가하므로 이 치환은 문제가 없다. 그러면

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta = \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\tan\theta\cos^2\theta$를 이용하였다. 따라서

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \left[\tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right]_{-1}^1 = 2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}.$$

두 번째 적분

분자를 $-t^2 = 1 - (1+t^2)$로 쓰면

$$\frac{-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2}.$$

앞 부분에 의해 첫 번째 항을 $[-1, 1]$에서 적분하면 $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$이고, $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\arctan t\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$이다. 따라서

$$\int_{-1}^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}},$$

이며, 이는 피적분함수의 부호가 요구하는 대로 음수(≈ -0.285)이다. 반면 첫 번째 적분은 약 1.285이다.

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 두 적분을 계산하면 1.2853981…과 −0.2853981…을 얻으며, 이는 $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ 및 $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$와 일치한다.

- 두 답을 더하면 1이다. 여기에는 이유가 있다. $\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$이고, 이는 $\frac{x}{1+x^2}$의 도함수(derivative)이며, $\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_{-1}^{1} = 1$이다.
- 절반 구간에 대한 올바른 명제도 맞아떨어진다. $\int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

흔한 실수

- x의 범위 $[-1,1]$이 $|t| \geq 1$에 대응한다는 설명 없이 "$1/t$는 $t = 0$에서 정의되지 않는다"라고만 말하는 것. 진짜 요점은 두 적분이 서로 다른 값들의 집합을 다룬다는 것이다.
- $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$의 부호를 틀리는 것. 그러면 결정적 단서인 부호 모순이 가려진다.
- $\cos^2\theta$를 적분할 때 $\frac{1}{4}\sin 2\theta$ 항을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

치환 법칙 $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$는 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 연쇄법칙(chain rule)과 미적분학의 기본정리(Fundamental Theorem of Calculus)로부터 증명되며, 그 증명은 무엇이 필요한지 정확히 보여 준다. 바로 ϕ가 $[a,b]$ 전체에서 연속미분가능(continuously differentiable)해야 한다는 것이다. 여기서는 그 조건이 한 점에서 깨지는데, 그 한 점만으로도 결과가 무너지기에 충분하다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 리만 적분(Riemann integral)과 이 정리들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 1987, 문제 9

순수수학 • 무게중심 좌표

> **STEP I 1987, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q9

핵심 아이디어

A에서 B 쪽으로 이동한다는 것은 벡터(vector) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$의 일정 비율만큼을 더하는 일이다. 이것을 한 번 하면 선분 위의 점들을 얻는다. 이것을 두 번, 즉 먼저 AB를 따라 이동한 뒤 그 점에서 C 쪽으로 이동하면 삼각형 전체를 쓸고 지나간다. 그림을 그릴 때의 요령은 각 경우를 이미 이해하고 있는 모양으로 다시 쓰는 것이다. 즉 삼각형의 경우를 뒤집은 것이거나, 한 점 A에 두 변 벡터의 배수를 더한 것으로 바꾸어 쓴다.

풀이

AB 위의 점

선분(segment) AB 위의 점 P는 A에서 출발하여 $\overrightarrow{AB}$를 따라 전체의 비율 t만큼 이동하면 도달한다. 여기서 $0 \le t \le 1$이다($t = 0$이면 A, $t = 1$이면 B이다). 따라서

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}.$$

$\rho = 1 - t, \sigma = t$로 놓자. 그러면 $\rho \ge 0, \sigma \ge 0$이고(왜냐하면 $0 \le t \le 1$이므로), $\rho + \sigma = 1$이다. 이것이 구하는 꼴이다. 역으로, 이러한 쌍 ρ, σ는 모두 $t = \sigma$로 잡으면 선분 위의 한 점을 준다.

PC 위의 점과 삼각형 내부의 점

똑같은 방법으로, 선분 PC 위의 점 Q의 위치벡터(position vector)는 다음과 같다.

$$\mathbf{q} = (1 - s)\mathbf{p} + s\,\mathbf{c}, \qquad 0 \le s \le 1.$$

$\mathbf{p} = \rho\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$를 대입하면

$$\mathbf{q} = (1-s)\rho\,\mathbf{a} + (1-s)\sigma\,\mathbf{b} + s\,\mathbf{c}.$$

$\lambda = (1-s)\rho$, $\mu = (1-s)\sigma$, $\nu = s$라 하자. 각각은 음이 아닌 수들의 곱이므로 $\lambda, \mu, \nu \geq 0$이다. 또한

$$\lambda + \mu + \nu = (1-s)(\rho+\sigma) + s = (1-s) + s = 1.$$

? 생각해 보기 왜 삼각형 내부의 모든 점은 어떤 선분 PC 위에 놓이는가?

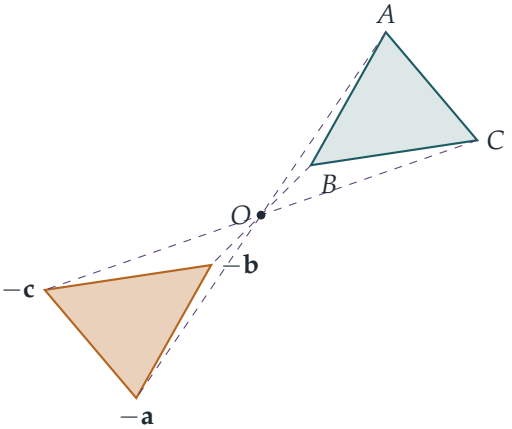
삼각형 내부(또는 경계 위)의 점 X를 잡자. $X = C$이면 증명할 것이 없다. $s = 1$로 잡으면 된다. 그렇지 않으면 C에서 X를 지나는 직선을 긋고 이를 X 너머로 연장한다. X가 각 ACB의 내부에 있으므로 이 직선은 CA와 CB 사이에 머물고, 따라서 대변 AB와 반드시 만난다. 그 점을 P라 하자. X는 삼각형 안에 있으므로 C와 P 사이에 놓이고, 따라서 X는 선분 PC 위에 있다. 위의 계산에 의해 $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$이고 $\lambda, \mu, \nu \geq 0, \lambda + \mu + \nu = 1$이다. 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (i)

$\lambda = -\lambda'$, $\mu = -\mu'$, $\nu = -\nu'$로 쓰자. 그러면 조건은 $\lambda', \mu', \nu' \geq 0, \lambda' + \mu' + \nu' = 1$이 되고, 점은 다음과 같다.

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = -\left(\lambda'\mathbf{a} + \mu'\mathbf{b} + \nu'\mathbf{c}\right).$$

방금 보인 사실에 의해 괄호 안의 식은 삼각형 ABC의 모든 점을 지난다(첫 부분의 역과 함께 생각하면, 이러한 결합은 모두 삼각형 안에 있다). 따라서 구하는 영역은 X가 삼각형 ABC 안에 있을 때의 점 $-\mathbf{x}$ 전체의 집합이다. 다시 말해 꼭짓점이 $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$인 삼각형과 그 내부이며, 이는 삼각형 ABC를 원점 O에 대하여 반 바퀴 회전(half-turn)시킨 상이다.



호박색으로 칠한 삼각형이 (i)의 답이다. 각 꼭짓점은 ABC의 꼭짓점을 O에 대하여 대칭이동한 점이며, 이를 점선으로 나타내었다.

소문항 (ii)

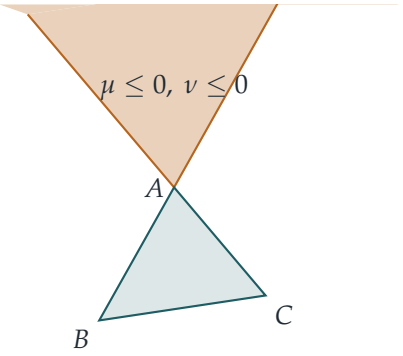
이제 $\lambda = 1 - \mu - \nu$이므로

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

즉 A에서 출발하여 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$의 배수를 더하는 것이다. $\mu = -m, \nu = -n$ $(m, n \geq 0)$으로 쓰면 점은 다음과 같다.

$$\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c}), \qquad m \geq 0,\ n \geq 0.$$

벡터 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$는 BA를 A 너머로 연장한 방향을 가리키고, $\mathbf{a} - \mathbf{c}$는 CA를 A 너머로 연장한 방향을 가리킨다. 평행하지 않은 두 벡터의 음이 아닌 결합은 두 벡터 사이의 각을 정확히 채운다($\mathbf{b} - \mathbf{a}$와 $\mathbf{c} - \mathbf{a}$가 평행하지 않으므로, 평면의 모든 점은 $\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c})$의 꼴로 나타나며 이때의 쌍 m, n은 정확히 하나이다). 따라서 구하는 영역은 꼭짓점이 A이고 BA와 CA를 A 너머로 연장한 반직선으로 둘러싸인 무한한 쐐기 모양의 영역이며, 경계의 반직선(ray)도 포함한다. 이것은 각 BAC의 맞꼭지각(vertically opposite angle)이다. 문제에서 λ에는 제한이 없지만, 여기서는 자동으로 1 이상이 된다는 점에 주의하자.



호박색 쐐기 모양의 영역(끝없이 이어진다)이 (ii)의 답이다. 그 경계는 변 BA와 CA를 A를 지나 연장한 것이다. 참고로 청록색 삼각형 ABC를 함께 나타내었다.

검산

- 꼭짓점: (ii)에서 $(\lambda, \mu, \nu) = (1, 0, 0)$은 쐐기의 끝인 A 자신을 주고, $(2, -1, 0)$은 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, 즉 B를 A에 대하여 대칭이동한 점을 주는데, 이 점은 한 경계 위에 있다. (i)에서 $(-1, 0, 0)$은 대칭이동한 삼각형의 꼭짓점인 $-\mathbf{a}$를 준다.

- 무게중심(centroid): (i)에서 $\lambda = \mu = \nu = -\frac{1}{3}$은 ABC의 무게중심에 음의 부호를 붙인 점을 주는데, 마땅히 그래야 하듯 이것은 대칭이동한 삼각형의 무게중심이다.
- 수치적으로도 확인하였다. 컴퓨터로 무작위 삼각형 20,000개와 각 조건을 만족하는 무작위 계수를 잡아 보았다. 그 결과 (i)에서 얻은 모든 점은 삼각형 $(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c})$ 안에 있고, (ii)에서 얻은 모든 점은 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$와 $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ 방향으로 A를 기준으로 한 좌표가 음이 아니며, ABC의 모든 점은 어떤 선분 PC 위의 점으로 나타남을 확인하였다.

흔한 실수

- (i)에서 ABC 근처에 영역을 그리는 실수. 계수의 합은 -1이지 1이 아니므로, 영역은 ABC를 원점에 대하여 반 바퀴 회전시킨 것이고 O의 위치에 따라 달라진다.
- (ii)에서 삼각형만 그리는 실수. μ와 ν에는 하한이 없으므로 영역은 유계가 아니다(unbounded).
- BAC 옆의 각(예를 들어 AB와 CA의 연장선 사이의 각)을 칠하는 실수. 그러려면 μ, ν 중 하나가 양수여야 한다.

STEP 너머

수 (λ, μ, ν)가 $\lambda + \mu + \nu = 1$을 만족할 때, 이를 삼각형에 대한 점의 **무게중심 좌표**(barycentric coordinates)라 한다. 합이 1이면 점은 원점의 위치에 의존하지 않는다. 모든 위치벡터를 $\mathbf{d}$만큼 평행이동하면 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$도 $(\lambda + \mu + \nu)\mathbf{d} = \mathbf{d}$만큼 평행이동하기 때문이다. 그래서 (ii)의 답은 진정한 기하학적 영역인 반면, (i)은 O에 의존한다. 삼각형 자체는 A, B, C의 **볼록 껍질**(convex hull)이며, 이는 선형계획법(linear programming)과 볼록 최적화(convex optimisation)의 핵심에 있는 개념이다. 무게중심 좌표의 부호에 따라 평면은 일곱 개의 영역으로 나뉘며, (ii)는 그중 하나이다. 이러한 아핀(affine) 개념을 대학 1학년 수준에서 살펴보려면 Strang, *Introduction to Linear Algebra*를 보라.

풀이

STEP I 1987, 문제 10

역학 • 탄성 끈

> **STEP I 1987, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q10

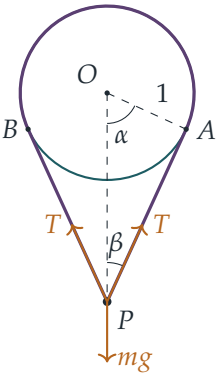
핵심 아이디어

입자가 띠의 아랫부분을 원기둥에서 끌어내리므로, 띠는 두 부분으로 나뉜다. 위쪽에서 여전히 원기둥에 밀착해 있는 호와, 원기둥에서 **접선**(*tangent*) **방향으로** 떨어져 나와 입자에서 만나는 두 직선 부분이다. 그러면 늘어난 길이는 순수한 기하 문제가 된다. 직각삼각형을 이용하면 직선 부분의 길이와 축에서 바라본 각을 구할 수 있다. 원기둥이 매끄러우므로 장력(tension)은 띠 전체에서 같고, 입자에서 힘을 분해하면 이 장력을 mg와 연결할 수 있다. 그다음 훅의 법칙(Hooke's law)으로 λ를 구한다.

풀이

모형

띠는 자연 길이(natural length)가 2π이고 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 끈(elastic string)으로, 원기둥은 매끄러운 것으로, 입자는 질점(point mass)으로 모형화한다. 연직 단면에서 생각하자. 원기둥은 중심 O가 축 위에 있는 단위원이고, 입자는 O에서 연직 아래로 거리 x만큼 떨어진 점 P에 있다. 띠가 원기둥에서 떨어지려면 $x > 1$이어야 한다.



O를 지나는 연직선에 대한 대칭성에 의해, 띠는 양쪽에 하나씩 두 점 A와 B에서 원기둥을 떠난다. 팽팽한 끈이 매끄러운 곡선에서 떨어져 나올 때는 접선 방향으로 떠나므로, PA는 A에서 원에 접하고, 따라서 $OA \perp AP$이다. $\alpha = \angle AOP$, $\beta = \angle APO$라 하자.

늘어난 길이

삼각형 OAP는 A에서 직각이고, $OA = 1$, 빗변은 $OP = x$이다. 따라서

$$AP = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{x}, \qquad \sin\beta = \frac{1}{x}.$$

띠는 아래쪽을 지나는 A와 B 사이, 즉 O에서 각 2α를 이루는 부분을 제외한 모든 곳에서 원기둥과 접촉한다. 그러므로 접촉하는 호의 중심각은 $2\pi - 2\alpha$이고, 단위원에서 그 길이는 $2\pi - 2\alpha$이다. 두 직선 부분을 더하면 늘어난 길이는

$$\boxed{L = 2\sqrt{x^2 - 1} + 2\pi - 2\arccos\frac{1}{x}}$$

이다. 여기서 $x > 1$이므로 $\arccos(1/x)$는 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 있다. 따라서 늘어난 양(extension)은

$$L - 2\pi = 2\sqrt{x^2 - 1} - 2\arccos\frac{1}{x}.$$

? **생각해 보기** 띠는 원기둥을 따라 휘어 있다. 왜 직선 부분의 장력이 호 부분의 장력과 같은가?

매끄러운 면에 접촉한 띠의 작은 조각에서, 원기둥이 주는 힘은 면에 수직인 힘뿐이다. 그러므로 띠를 따라 장력이 변하는 것을 상쇄할 힘이 없다. 따라서 장력 T는 띠 전체에서 일정하고, 훅의 법칙을 띠 전체에 적용할 수 있다.

$$T = \frac{\lambda\,(L - 2\pi)}{2\pi}.$$

(원기둥이 거칠다면 호를 따라 장력이 변할 수 있으므로 이 단계는 성립하지 않는다.)

입자의 평형

입자에는 무게 mg와, PA와 PB 방향의 장력 T가 작용하며, 각 장력은 연직 위 방향과 각 β를 이룬다. 수평 성분은 대칭성에 의해 상쇄된다. 연직 방향으로 분해하면

$$2T\cos\beta = mg, \qquad \text{이때} \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

따라서

$$T = \frac{mgx}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

$x = 2$인 경우

이때 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}$이고, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$이다. 늘어난 길이는

$$L = 2\sqrt{3} + 2\pi - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad L - 2\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

장력은 $T = \dfrac{2mg}{2\sqrt{3}} = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$이다. 훅의 법칙에 의해

$$\lambda = \frac{2\pi T}{L-2\pi} = \frac{2\pi mg/\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2\pi/3} = \frac{2\pi mg}{6 - 2\pi/\sqrt{3}} = \frac{\pi mg}{3 - \pi/\sqrt{3}},$$

이고, 분자와 분모에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{3}\,\pi\, mg}{3\sqrt{3} - \pi} \approx 2.65\, mg.}$$

검산

- $x \to 1^+$일 때 $\arccos(1/x) \to 0$이고 $\sqrt{x^2-1} \to 0$이므로 $L \to 2\pi$이다. 즉 띠가 원기둥의 바닥에 겨우 닿으며 늘어나지 않은 상태가 되는데, 이는 당연히 그래야 한다. 한편 $T \to \infty$인데, 이는 거의 수평인 두 끈이 무게를 지탱하려면 매우 큰 장력이 필요하다는 사실과 맞아떨어진다.
- $x = 2$일 때 $L = 2\sqrt{3} + 4\pi/3 \approx 7.653$으로, $2\pi \approx 6.283$보다 조금 크다. 또한 λ는 mg와 같이 힘의 단위를 가진다.
- 독립적인 확인으로, $\lambda \approx 2.6484\, mg$일 때 전체 퍼텐셜 에너지(potential energy) $-mgx + \lambda(L-2\pi)^2/(4\pi)$를 수치적으로 최소화하였다. 최솟값은 $x = 2$에서 나타나므로, 기하적 계산과 장력 계산이 모두 확인된다.

흔한 실수

- 직선 부분을 P에서 수평 지름의 양 끝까지로 잡는 것. 띠는 접선 방향으로 떠나므로, 축의 높이보다 **아래에서**, 연직 아래 방향으로부터 각 $\alpha = \arccos(1/x)$인 곳에서 떨어져 나온다.
- 훅의 법칙에 직선 부분 하나의 늘어난 양을 쓰는 것. 장력이 균일하므로, 띠 전체의 늘어난 양 $L - 2\pi$를 전체 자연 길이 2π로 나누어야 한다.

STEP 너머

매끄러운 면을 따라 장력이 일정하다는 주장은 캡스턴 방정식(capstan equation)에서 마찰이 없는 경우이다. 마찰 계수(coefficient of friction)가 μ이면, 각 θ만큼 감긴 부분에서 장력은 최대 $e^{\mu\theta}$배까지 변할 수 있다. 기둥에 몇 번 감은 밧줄로 배를 붙잡아 둘 수 있는 것은 이 때문이다. 위의 에너지 검산은 또한 역학을 변분(variational) 관점에서 보는 첫 맛보기이기도 하다. 이 관점에서 평형(equilibrium)은 퍼텐셜 에너지의 정류점(stationary point)이다. 이런 관점에서 힘, 마찰, 퍼텐셜 에너지를 다루는 대학 1학년 수준의 교재로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 1987, 문제 11

역학 • 원운동과 에너지

> **STEP I 1987, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q11

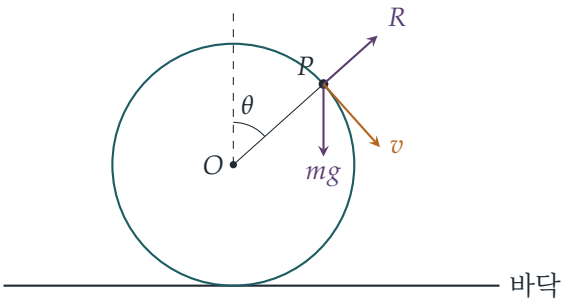
핵심 아이디어

입자가 구 위에 있는 동안에는 원운동을 하므로 두 식이 그 운동을 지배한다. 에너지 보존(energy conservation)으로 속력을 구하고, 반지름 방향으로 쓴 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)으로 수직항력(normal reaction)을 구한다. 접촉은 정확히 수직항력이 0이 되는 순간에 끊어진다. 그 뒤로 입자는 포물체(projectile)가 되므로 수평 방향 속도는 변하지 않는다. 이 사실을 바닥까지 이어지는 에너지 보존과 결합하면 궤적을 직접 구하지 않고도 연직 방향 속도를 얻을 수 있다.

풀이

모형

입자를 매끄럽고 고정된 구 위의 질점(point mass)으로 본다. 구의 중심 O는 바닥에서 높이 r인 곳에 있다(구는 바닥 위에 놓여 있다). "살짝 밀어 움직인다"는 것은 입자가 꼭대기에서 무시할 만큼 작은 속력으로 출발한다는 뜻이다. 입자를 P라 하고, OP가 위쪽 연직 방향과 이루는 각을 θ, 입자의 속력을 v라 하자. 작용하는 힘은 무게 mg와 OP를 따라 바깥쪽으로 작용하는 수직항력 R뿐이다.



접촉이 끊어지는 곳

입자는 높이 $r - r\cos\theta$만큼 내려왔으므로, 에너지 보존에 의해(수직항력은 운동 방향에 수직이므로 일을 하지 않는다)

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos\theta), \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = 2gr(1-\cos\theta).$$

접촉하고 있는 동안 입자는 반지름 r인 원 위를 움직이므로 O를 향하는 가속도는 v^2/r이다. O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{r} = 2mg(1-\cos\theta), \qquad \text{따라서} \qquad R = mg(3\cos\theta - 2).$$

꼭대기에서는 $R = mg > 0$이고, θ가 커질수록 R는 줄어든다. 접촉은 $R = 0$일 때, 즉

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad v^2 = \tfrac{2}{3}gr.$$

일 때 끊어진다.

생각해 보기 속도가 수평 방향과 이루는 각은 어느 각인가?

속도는 원의 접선 방향이고, 접선은 반지름 OP에 수직이다. 반지름이 연직 방향과 각 θ를 이루므로, 접선은 수평 방향과 같은 각 θ를 이룬다(두 직선을 모두 직각만큼 회전시켜 보라). 따라서 구를 떠나는 순간 입자는 수평 방향 아래로

$$\cos^{-1}\tfrac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

의 각을 이루며 아래쪽으로 움직이고 있다.

바닥에 부딪힐 때

떠나는 순간 속도의 수평 성분은

$$v\cos\theta = \sqrt{\tfrac{2}{3}gr}\cdot\tfrac{2}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad (v\cos\theta)^2 = \tfrac{8}{27}gr.$$

이다. 그 뒤로 작용하는 힘은 중력뿐이므로, 입자가 바닥에 닿을 때까지 이 수평 성분은 변하지 않는다. (입자는 구에 다시 닿지 않는다. R가 음수가 되어야 하는 순간부터는 구가 입

자가 떨어지는 것보다 더 빨리 휘어져 멀어지며, 입자는 O를 지나는 연직선에서 수평 거리로 약 $1.46r$ 떨어진 곳에 떨어지므로 구와 충분히 떨어져 있다.)

이제 꼭대기(높이 $2r$)에서 정지 상태로 출발해 바닥에 이르는 전체 운동에 에너지 보존을 적용한다. 입자가 바닥에 부딪히는 속력을 V라 하면

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = mg(2r), \qquad \text{따라서} \qquad V^2 = 4gr.$$

충돌할 때 속도의 연직 성분을 V_y라 하면 $V^2 = (v\cos\theta)^2 + V_y^2$이므로

$$V_y^2 = 4gr - \tfrac{8}{27}gr = \tfrac{100}{27}gr, \qquad V_y = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}}.$$

따라서 바닥에 부딪힐 때 운동량(momentum)의 연직 성분의 크기는

$$mV_y = \frac{10m}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}} = \frac{10m\sqrt{3gr}}{9},$$

이고, 방향은 아래쪽이다.

검산

- 포물체 운동을 직접 이용하는 방법: 입자는 높이 $r + r\cos\theta = \tfrac{5}{3}r$에서 아래 방향 연직 속력 $v\sin\theta$로 떠나며, 여기서 $\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $(v\sin\theta)^2 = \tfrac{10}{27}gr$이다. 다시 $\tfrac{5}{3}r$만큼 떨어지면서 $2g\cdot\tfrac{5}{3}r = \tfrac{90}{27}gr$가 더해지므로, 역시 $V_y^2 = \tfrac{100}{27}gr$를 얻는다.
- $V_y^2 = \tfrac{100}{27}gr \approx 3.70gr$는 $V^2 = 4gr$보다 조금 작은데, 에너지의 일부가 수평 운동에 남아 있으므로 당연히 그래야 한다.
- 운동을 수치적으로 단계별 계산하면($g = 9.81$, $r = 1.3$, $m = 2$) 접촉은 48.19°에서 끊어지고 연직 운동량은 13.745로, $\tfrac{10m\sqrt{3gr}}{9}$와 일치한다. 궤적은 구 바깥에 머문다.

흔한 실수

- 낙하 높이를 구의 꼭대기가 아니라 바닥에서부터 재는 실수. 구 위에서 내려온 높이는 $r(1-\cos\theta)$이다.
- 떠난 뒤에는 수평 속도가 일정하다는 사실을 잊고, 운동 에너지가 모두 연직 방향인 것처럼 $V_y^2 = 4gr$라고 쓰는 실수.
- 속도가 수평 방향과 각 $90^\circ - \theta$를 이룬다고 보는 실수. 그것은 접선이 아니라 반지름의 각이다.

STEP 너머

"수직항력이 사라질 때 접촉이 끊어진다"는 조건은 **구속력**(constraint force)의 첫 번째 예이다. 구속력은 입자를 곡면 위에 붙잡아 두도록 스스로 크기를 조절하는 힘이며, 밀기만 할 수 있다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 이런 구속 조건을 처음부터 식에 넣으며, 수직항력은 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)로 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 한 단계 높은 수준에서 원운동과 에너지 방법을 연습하기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP I 1987, 문제 12

역학 • 반발이 있는 포물체

STEP I 1987, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s1-q12

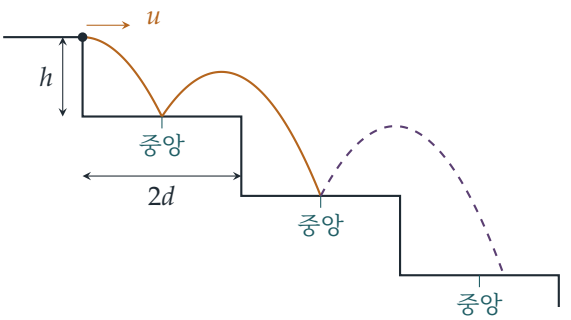
핵심 아이디어

튀어 오르는 사이사이에 입자는 포물체(projectile)로 운동하고, 계단이 매끄러우면 한 번 튈 때 속도의 연직 성분만 방향이 바뀌고 크기가 일정한 비율로 줄어든다. 따라서 수평 속력은 결코 변하지 않는다. 이는 수평 거리가 비행 시간을 결정하고, 비행 시간과 계단 한 칸의 높이가 함께 연직 속력을 결정한다는 뜻이다. 모든 것을 첫 번째 낙하에 걸리는 시간을 단위로 나타낼 수 있으므로 계산이 아주 간단해진다.

풀이

모형

입자를 질점(point mass)으로 보고, 공기 저항(air resistance)을 무시하며, 계단은 매끄럽고 수평이라고 가정한다. 그러면 충돌은 수평 속도를 바꾸지 않고 연직 속도에 $-e$를 곱한다. 입자를 수평 속력 u로 차 낸다고 하고, 첫 번째 비행에 걸리는 시간을 t_1이라 하자.



실선 호는 처음 두 번의 비행이고, 점선 호는 그다음에 실제로 일어나는 운동이다(마지막 부분 참고).

반발계수

첫 번째 비행. 입자는 연직 속도 없이 출발하여 h만큼 떨어지고, 수평으로 d만큼(계단 폭의 절반, 즉 첫 번째 계단의 중앙까지) 이동한다. 따라서

$$h = \tfrac{1}{2}gt_1^2, \qquad d = ut_1.$$

입자는 아래 방향 연직 속력 gt_1로 첫 번째 계단에 부딪히고, 위 방향 연직 속력 egt_1로 튀어오르며, 수평 속력은 여전히 u이다.

두 번째 비행. 첫 번째 계단의 중앙에서 두 번째 계단의 중앙까지의 수평 거리는 $2d$이다. 수평 속력은 여전히 $u = d/t_1$이므로, 이 비행에 걸리는 시간은

$$T = \frac{2d}{u} = 2t_1.$$

이 시간 동안 입자는 높이가 h만큼 낮아져야 한다. 위 방향을 양으로 잡으면

$$\begin{aligned} -h &= (egt_1)(2t_1) - \tfrac{1}{2}g(2t_1)^2 \\ &= (2e-2)\,gt_1^2 \\ &= (2e-2)(2h), \end{aligned}$$

이고, 여기서 $gt_1^2 = 2h$를 이용하였다. 양변을 h로 나누면 $-1 = 4e - 4$이므로

$$e = \tfrac{3}{4}.$$

(이 비행에서 입자가 첫 번째 계단의 모서리 위를 지날 때 그 계단보다 $egt_1 \cdot t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 = \tfrac{1}{2}h$만큼 높은 곳에 있으므로, 모서리에 걸리지 않고 넘어간다.)

계속 이어질 수 있을까?

? 생각해 보기 이 패턴이 계속된다면 이후의 모든 비행은 어떤 모습이어야 할까?

한 계단의 중앙에서 다음 계단의 중앙까지의 모든 비행은 속력 u로 수평 거리 $2d$를 가므로 각각 $2t_1$의 시간이 걸리고, 각각 정확히 h만큼 내려가야 한다. 그러면 위의 계산에 의해 매번 튀어 오른 직후의 위 방향 연직 속력 w는

$$-h = w(2t_1) - 2gt_1^2 = 2wt_1 - 4h, \qquad \text{따라서} \qquad w = \frac{3h}{2t_1} = \tfrac{3}{4}gt_1.$$

을 만족해야 한다. 즉 매번 튈 때마다 입자는 연직 속력 $\tfrac{3}{4}gt_1$로 떠나야 하고, $e = \tfrac{3}{4}$이므로 모든 계단에 정확히 연직 속력 gt_1로 도달해야 한다.

이는 첫 번째 계단에서는 성립하지만 두 번째 계단에서는 성립하지 않는다. $2t_1$ 동안 비행한 뒤 두 번째 계단에 도달할 때의 연직 속도는

$$\tfrac{3}{4}gt_1 - g(2t_1) = -\tfrac{5}{4}gt_1,$$

이므로, 입자는 gt_1이 아니라 아래 방향 속력 $\frac{5}{4}gt_1$로 두 번째 계단에 부딪히고, 위 방향 속력 $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}gt_1 = \frac{15}{16}gt_1 > \frac{3}{4}gt_1$로 튀어 오른다. 따라서 이는 **불가능하다**. 입자가 모든 계단의 중앙에 떨어질 수는 없다. 실제로 입자는 세 번째 계단의 중앙을 지나쳐 떨어진다. 세 번째 비행에 걸리는 시간을 st_1이라 하면

$$-h = \tfrac{15}{16}gt_1(st_1) - \tfrac{1}{2}gs^2t_1^2 \quad\Longrightarrow\quad s^2 - \tfrac{15}{8}s - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{15+\sqrt{481}}{16} \approx 2.31,$$

이므로, 입자는 수평으로 약 $2.31d$를 이동하여 세 번째 계단의 중앙에서 약 $0.31d$ 지난 곳에 떨어진다(반대편 모서리까지는 $3d$이므로 여전히 그 계단 위이다).

검산

- $e = \frac{3}{4}$는 g, h, d에 의존하지 않는데, 이는 당연하다. 계단 전체의 크기를 바꾸어도 경로의 모양은 전혀 달라지지 않기 때문이다.
- $g = 9.8, h = d = 1, e = 0.75$로 수치 모의실험을 하면 입자는 $x = 1.000$과 $x = 3.000$(처음 두 계단의 중앙)에 떨어지고, 그다음 $x \approx 5.308$에 떨어지는데, 이는 위에서 예측한 $3 + 2.308$과 일치한다.
- 튀어 오르지 않는다면($e = 0$) 두 번째 비행에서 입자는 $2t_1$ 동안 $4h$만큼 떨어질 것이다. 튀어 오름이 그중 $3h$를 메워야 하므로 $2t_1 \cdot w = 3h$이고, 이는 앞에서 구한 결과와 같다.

흔한 실수

- 첫 번째 수평 거리를 d가 아니라 $2d$로 잡는 실수. 입자는 모서리에서 출발하여 첫 번째 계단의 중앙에 떨어진다.
- 튈 때 수평 속력을 바꾸는 실수. 매끄러운 면에서는 충격량(impulse)이 연직 방향이므로 연직 성분만 바뀐다.
- 비행이 매번 똑같아 보인다는 이유로 "가능하다"고 결론짓는 실수. 도달 속력이 커지므로 튀어 오르는 속력도 커진다.

STEP 너머

튀어 오르는 입자는 **이산 동역학계**(discrete dynamical system)의 간단한 예이다. 한 번 튄 직후의 상태가 고정된 사상을 통해 다음번 튄 직후의 상태를 결정하며, 운동이 반복될 수 있

는지 묻는 것은 그 사상의 고정점(fixed point)을 묻는 것과 같다. 여기서 고정점(튀어 오르는 속력 $\frac{6}{7}gt_1$로, 이때는 $\frac{4}{7}h$만큼만 낮은 곳에 떨어진다)은 계단과 맞지 않으므로, 이 계단에 들어맞는 주기 운동은 없다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 충격량을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1987, 문제 13

역학 • 가변적인 힘

> **STEP I 1987, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q13

핵심 아이디어

힘의 법칙이 $x = 0$에서 바뀌므로 운동은 여러 단계로 나뉘고, 각 단계는 간단한 선형 미분방정식(linear differential equation)으로 기술된다. 양의 쪽에서 힘은 변위에 비례하는 복원력(restoring force)이므로 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이 일어나고, 음의 쪽에서 힘은 속도에 비례하는 저항(resistance)이므로 속력이 지수적으로 감소(exponential decay)한다. 한 단계가 끝날 때의 위치와 속도가 다음 단계의 초기 조건(initial conditions)이 된다. 진짜 질문은 단계가 몇 개냐는 것이다. 입자가 다시 돌아오기는 할까?

풀이

모형

물체를 주어진 힘만 받으며 x축 위를 움직이는 입자로 보고, $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 쓴다. 뉴턴(Newton)의 제2법칙 $m\ddot{x} = \mathrm{F}$로부터

$$\ddot{x} = -\mu^2 x \quad (x \geq 0), \qquad\qquad \ddot{x} = -\kappa\dot{x} \quad (x < 0).$$

를 얻는다. 질량은 약분되므로 답에 아무런 영향을 주지 않는다.

1단계: $x \geq 0$인 동안의 단순 조화 운동

$v_0 > 0$이므로 입자는 곧바로 $x > 0$인 영역으로 들어가고, 여기서 $\ddot{x} = -\mu^2 x$이다. 이는 각진동수(angular frequency)가 μ인 단순 조화 운동이므로 일반해(general solution)는

$$x = A\cos\mu t + B\sin\mu t.$$

이다. $t = 0$에서 $x = 0$이라는 조건에서 $A = 0$을 얻고, $t = 0$에서 $\dot{x} = B\mu = v_0$이라는 조건에서 $B = v_0/\mu$를 얻는다. 따라서

$$x = \frac{v_0}{\mu}\sin \mu t, \qquad \dot{x} = v_0 \cos \mu t.$$

이다. 이 식은 $x \geq 0$인 동안, 즉 $\sin \mu t \geq 0$인 동안, 곧 $0 \leq t \leq \pi/\mu$에서 성립한다. 입자는 $t = \pi/(2\mu)$에서 최대 변위 v_0/μ에 이르고,

$$t = T = \frac{\pi}{\mu}, \qquad \text{속도는} \qquad \dot{x} = v_0 \cos \pi = -v_0.$$

로 원점에 돌아온다. 이쪽에서는 에너지가 보존되므로(힘 $-m\mu^2 x$는 위치 에너지(potential energy) $\frac{1}{2}m\mu^2 x^2$에서 나오며, 이는 원점에서 0이다) 입자는 출발할 때와 같은 속력으로 돌아온다.

2단계: $x < 0$인 동안의 저항을 받는 운동

이제 입자는 속도 $-v_0$으로 $x < 0$인 영역에 들어가고, 여기서 $\ddot{x} = -\kappa\dot{x}$이다. $u = \dot{x}$로 두면 이는 1계 방정식(first-order equation) $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = -\kappa u$이고, $t = T$에서 $u = -v_0$을 만족하는 해는

$$\dot{x} = -v_0\, \mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}.$$

이다. $t = T$에서 $x = 0$이라는 조건으로 적분하면

$$x = \int_T^t -v_0\, \mathrm{e}^{-\kappa(s-T)}\, \mathrm{d}s = -\frac{v_0}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}\right).$$

이다.

? **생각해 보기** 입자가 다시 $x \geq 0$으로 돌아와 세 번째 단계가 시작될까?

그렇지 않다. 속도 $-v_0\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}$는 모든 $t > T$에서 음수이므로 이 단계 내내 x는 감소한다. 따라서 모든 $t > T$에서 x는 순음수이고 위의 식은 영원히 성립한다. 저항은 입자를 느리게 할 뿐 방향을 되돌리지는 못한다. $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)} \to 0$이므로, 입자는 점 $x = -v_0/\kappa$에 다가가지만 결코 도달하지는 않는다.

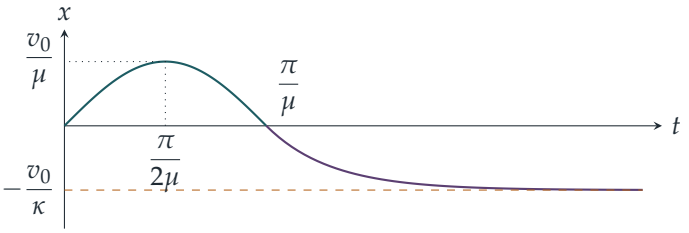
답

$$x = \begin{cases} \dfrac{v_0}{\mu}\sin \mu t, & 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{\mu}, \\ -\dfrac{v_0}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa(t-\pi/\mu)}\right), & t > \dfrac{\pi}{\mu}. \end{cases}$$

두 조각 모두 $t = \pi/\mu$에서 $x = 0$이고 $\dot{x} = -v_0$이므로, 그래프는 그 점에서 매끄럽다(기울기가 연속이다). 다만 $\dot{x}$는 0에서 κv_0으로 갑자기 바뀐다.

개형

그래프는 축 위쪽의 사인 곡선 반 아치와, 그 뒤를 잇는 곡선으로 이루어진다. 뒤쪽 곡선은 같은 기울기 $-v_0$으로 원점을 떠나 점근선(asymptote) $x = -v_0/\kappa$를 향해 평평해진다. (그림은 $\mu = 1, \kappa = 1$인 경우이다.)



일반적으로 최고 높이 v_0/μ와 점근선의 깊이 v_0/κ는 서로 독립이다. 저항이 약하면(즉 κ가 작으면) 입자는 왼쪽으로 멀리까지 흘러간다.

검산

- 단위: μ와 κ는 모두 단위가 s^{-1}이므로, v_0/μ와 v_0/κ는 마땅히 그래야 하듯 길이이다.
- 극한 경우: $\kappa \to 0$이면 저항이 없어지고, 실제로 $-\frac{v_0}{\kappa}(1 - \mathrm{e}^{-\kappa s}) \to -v_0 s$가 되어 속력 v_0의 등속 운동이 된다.
- 수치 계산: $\mu = 1.7$, $\kappa = 0.9$, $v_0 = 2.2$에 대해 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 운동 방정식을 계산한 결과, $0 \le t \le 15$에서 공식과 3×10^{-5} 이내로 일치했다. 입자는 $x = 1.2941 = v_0/\mu$에서 최고점에 이르렀고 $x = -2.4444 = -v_0/\kappa$에 자리 잡았다.

흔한 실수

- 두 번째 단계에서 시간을 $t = \pi/\mu$가 아니라 $t = 0$부터 재는 것. 지수는 반드시 $-\kappa(t - \pi/\mu)$여야 한다.
- 입자가 $x \ge 0$으로 다시 들어오는지 확인하는 것을 잊는 것. 문제는 이후의 운동 **전체**를 묻고 있으므로, 세 번째 단계가 없다는 주장에는 한 줄짜리 근거가 필요하다.

STEP 너머

여기서 힘은 $x = 0$의 양쪽에서 서로 다른 선형식으로 주어지는데, 이를 구간별 선형계(piecewise-linear system)라 한다. 전환점에서 위치와 속도를 맞추어 해들을 이어 붙이는 기법은 미분방정식 첫 강의에서 이런 계(그리고 충돌과 마찰 문제)를 다루는 표준

적인 방법이다. 두 항을 한꺼번에 넣은 $\ddot{x} + \kappa\dot{x} + \mu^2 x = 0$은 감쇠 조화 진동자(damped harmonic oscillator)이며, 그 부족 감쇠(underdamped), 임계 감쇠(critically damped), 과감쇠(overdamped) 영역은 모든 역학 입문 강의의 핵심 예제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 감쇠 진동자를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 1987, 문제 14

확률과 통계 • 확률의 등비급수

> **STEP I 1987, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q14

핵심 아이디어

첫 경기가 끝나고 나면, 승부가 나지 않은 토너먼트(tournament)에는 선택의 여지가 전혀 남지 않는다. 각 경기의 승자는 심판(referee)과 맞붙고, 토너먼트가 계속 미결정 상태로 남으려면 심판이 이겨야 하므로 다음 승자는 강제로 정해진다. 따라서 모든 것은 1경기의 승자가 누구인지, 그리고 어떤 선수가 처음으로 두 번 연속 이기는 바로 그 순간에 의해 결정된다. 그러면 확률은 주기(period) 3으로 순환하는 등비급수(geometric series)로 환원된다.

풀이

이 풀이 전체에서, 각 경기에서는 직전 경기의 승자가 그 경기의 심판과 맞붙는다. 직전 경기의 패자는 쉬면서 심판을 맡으므로 현재 경기에서 이길 수 없다.

소문항 (i)

1경기: A가 B를 이기고, B가 2경기의 심판을 맡는다. 2경기는 A 대 C이고 C가 이기는데, 이는 가능하다. 3경기는 C 대 B이고 B가 이기는데, 이것도 가능하다. 그러나 아무도 두 경기를 연속으로 이기지 않았으므로, ACB 이후에도 토너먼트는 여전히 미결정 상태이며 계속되어야 한다. 따라서 ACB는 완결된 토너먼트의 기록이 **아니다**(토너먼트의 시작 부분일 뿐이다).

소문항 (ii)

A가 1경기를 이기면, 2경기는 B가 심판을 맡는 가운데 A 대 C로 치러진다. 따라서 B는 2경기를 이길 수 없고, ABB는 **불가능하다**.

소문항 (iii)

(i)에서처럼 처음 세 경기 ACB는 가능하고, 3경기는 A가 심판을 맡는 가운데 C 대 B였다. 따라서 4경기는 B 대 A이고, B는 이 경기를 이길 수 있다. 이제 B가 3경기와 4경기를 연속으로 이겼으므로 토너먼트가 끝난다. 따라서 $ACBB$는 완결된 토너먼트가 **맞으며**, B가 네 경기 만에 우승한다.

5경기 후 미결정

X가 1경기를 이긴다고 하자. 여기서 X는 A 또는 B이고, 나머지 한 명을 Y라 하자. 토너먼트가 계속 미결정 상태로 남으려면, 각 경기는 직전 승자가 **아닌** 선수가 이겨야 하며, 그 선수는 직전 경기의 심판일 수밖에 없다. 그러면 기록은 다음과 같이 강제된다.

$$X\,C\,Y\,X\,C\,Y\,X\,\ldots$$

새로운 승자는 매번 직전 경기의 심판이기 때문이다. 구체적으로, 2경기는 X 대 C(Y가 심판)이므로 C가 이겨야 한다. 3경기는 C 대 Y(X가 심판)이므로 Y가 이겨야 한다. 4경기는 Y 대 X이므로 X가 이겨야 하고, 이런 식으로 주기 3으로 계속된다.

1경기는 어느 쪽이 이겨도 된다. 그 이후로는 경기들이 서로 독립(independent)이고 각 선수가 이길 확률이 반반이므로, 미결정 상태를 유지하는 각 경기는 확률 $\frac{1}{2}$로 일어난다. 따라서

$$P(n\text{경기 후 미결정}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad P(5\text{경기 후 미결정}) = \tfrac{1}{16}.$$

누가, 언제 우승하는가

토너먼트가 n번째 경기에서 끝나는 것은($n \geq 2$), $n-1$경기 후 미결정 상태이고 $n-1$번째 경기의 승자가 다시 이길 때이다. 이 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다. 우승자는 $n-1$번째 경기의 승자, 즉 강제된 수열의 $(n-1)$번째 문자이다. $k = n-1$이라 쓰자. 그러면 다음과 같다.

$k \bmod 3$	1	2	0
A가 1경기에서 이긴 경우 우승자	A	C	B
B가 1경기에서 이긴 경우 우승자	B	C	A

따라서 토너먼트는 확률 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$로 $k+1$번째 경기에서 끝난다. $k \equiv 2 \pmod 3$이면 이 확률 전체가 C의 몫이다. 그렇지 않으면 A와 B가 똑같이 나누어 가져서 각각 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$이 된다.

생각해 보기 왜 $k \equiv 2$일 때는 C가 확률 전체를 가져가지만, 다른 때에는 절반만 가져갈까?

1경기를 누가 이겼든, C는 항상 강제된 수열의 두 번째 문자이다. 따라서 두 갈래 모두 같은 순간에 C에게 우승을 준다. A와 B는 두 갈래에서 역할이 서로 바뀌므로, 각자는 자신이 그 자리에 있는 갈래의 확률만 가져간다.

5경기 이내에 우승하기

여기서 $n = 2, 3, 4, 5$이므로 $k = 1, 2, 3, 4$이다.

$$P(A\text{의 우승 경기 수} \le 5) = \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=1} + \underbrace{\tfrac{1}{16}}_{k=3} + \underbrace{\tfrac{1}{32}}_{k=4} = \tfrac{11}{32},$$

$$P(B\text{의 우승 경기 수} \le 5) = \tfrac{11}{32} \quad (A\text{와 } B \text{ 사이의 대칭성에 의해}),$$

$$P(C\text{의 우승 경기 수} \le 5) = \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=2}.$$

검산하면 $\frac{11}{32} + \frac{11}{32} + \frac{8}{32} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$이고, 이는 5경기 후 미결정일 확률과 일치한다.

최종 우승자

$P(\text{undecided after } n \text{ games}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$이므로, 토너먼트는 확률 1로 끝난다. 따라서 모든 $k \ge 1$에 대해 더하기만 하면 된다. 각 잉여류(residue class)는 공비가 $\frac{1}{8}$인 등비급수를 준다.

$$P(C \text{ 우승}) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{256} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/8} = \frac{2}{7},$$

$$P(A \text{ 우승}) = \underbrace{\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \cdots\right)}_{k \equiv 1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{128} + \cdots\right)}_{k \equiv 0} = \frac{1/4}{7/8} + \frac{1/16}{7/8} = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. 대칭성에 의해 $P(B \text{ 우승}) = \frac{5}{14}$이기도 하며, 실제로 $\frac{5}{14} + \frac{5}{14} + \frac{2}{7} = 1$이다.

따라서 첫 경기에서 쉬는 C는 불리하다. 나머지 두 선수가 각각 $\frac{5}{14} \approx 0.357$인 데 비해 C는 $\frac{2}{7} \approx 0.286$이다.

검산

- 5경기 이내에 우승할 세 확률을 더하면 $\frac{15}{16}$이고, 최종 우승 확률들을 더하면 1이다.
- 가능한 모든 경기 순서를 분수로 정확하게 열거해 보면 $\frac{1}{16}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{1}{4}$가 확인된다. 60경기까지 계산하면 A와 B는 $0.357142\ldots$, C는 $0.285714\ldots$가 나온다.

- C에 대한 간단한 다른 방법: C가 우승할 확률을 c라 하자. 1경기 후 C는 확률 $\frac{1}{4}$로 곧바로 우승한다. 세 경기 뒤에 같은 상황으로 되돌아오면(확률 $\frac{1}{8}$) 처음부터 다시 시작하는 셈이므로 $c = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}c$이고, 따라서 $c = \frac{2}{7}$이다.

흔한 실수

- ACB가 올바른 기록이라고 말하는 것: 그 안의 각 경기는 모두 가능하지만, 아무도 두 번 연속 이기지 않았으므로 토너먼트는 끝나지 않았다.
- 직전 패자가 심판을 맡으므로 다음 경기를 이길 수 없다는 사실을 잊는 것(이 사실 때문에 ABB가 배제된다).
- $k \equiv 2$일 때 C에게 확률의 절반만 주는 것: 그 순간에는 **두** 갈래 모두에서 C가 우승한다.

STEP 너머

이 토너먼트는 마르코프 연쇄(Markov chain)이다. 각 경기 후의 상태는 단지 "누가 마지막에 이겼고, 누가 심판을 맡고 있는가"이며, 우승자는 연쇄가 흡수(absorption)될 때 결정된다. 검산 절에서 쓴 첫 단계 논법, 즉 다음에 일어날 일에 대해 조건을 걸어 확률에 대한 방정식을 세우는 방법은 흡수 확률을 구하는 표준적인 방법이며, 급수를 더하는 과정을 피할 수 있게 해 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 대학 1학년 수준에서 마르코프 연쇄와 흡수를 소개한다.

풀이

STEP I 1987, 문제 15

확률과 통계 • 연속확률변수

> **STEP I 1987, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q15

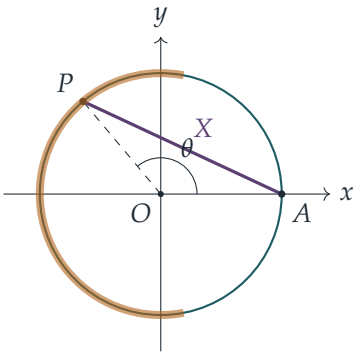
핵심 아이디어

"원 위에서 균등하다(uniform)"는 말은 P가 중심에서 이루는 각이 균등분포(uniform distribution)를 따른다는 뜻이다. 따라서 자연스러운 첫걸음은 θ가 $[0, 2\pi)$에서 균등분포를 따른다고 하고 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$로 쓰는 것이다. 그러면 $(1, 0)$까지의 거리는 단위원의 현(chord)이 되고, 반각 공식(half-angle formula)을 쓰면 이것이 사인 하나로 정리된다. 그 다음부터는 평균(mean)은 적분 한 번으로 구해지고, 분산(variance)은 적분이 거의 필요 없으며, 확률은 각의 구간에 관한 문제가 된다.

풀이

설정하기

원점을 O라 하고, 양의 x축에서 OP까지의 각을 θ라 하자. 원 위에서 P를 균등하게 고른다는 것은 호의 길이(arc length)를 균등하게 고른다는 뜻이므로, θ는 $[0, 2\pi)$에서 확률밀도(density) $\frac{1}{2\pi}$인 균등분포를 따른다. $A = (1, 0)$, $P = (\cos\theta, \sin\theta)$로 놓는다.



그러면 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$를 이용하여

$$X^2 = (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\tfrac{\theta}{2},$$

를 얻는다. $0 \le \frac{\theta}{2} < \pi$이므로 $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$이고, 따라서 양의 제곱근을 취해도 안전하다.

$$X = 2\sin\tfrac{\theta}{2}.$$

평균

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\Big[-4\cos\tfrac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(4+4) = \frac{4}{\pi}.$$

따라서 $\mathrm{E}(X) = \dfrac{4}{\pi} \approx 1.273$이다.

분산

생각해 보기 $\mathrm{E}(X^2)$를 구하려면 $4\sin^2\frac{\theta}{2}$를 적분해야 할까?

그렇지 않다. 제곱을 풀어 쓴 꼴이 더 쉽다. $X^2 = 2 - 2\cos\theta$이고, $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$이므로 한 바퀴 전체에서 $\cos\theta$의 평균은 0이다. 따라서 $\mathrm{E}(X^2) = 2$이고,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 2 - \frac{16}{\pi^2} \approx 0.379.$$

X가 평균보다 클 확률

$2\sin\frac{\theta}{2} > \frac{4}{\pi}$, 즉 $\sin\frac{\theta}{2} > \frac{2}{\pi}$이어야 한다. $0 < \frac{2}{\pi} < 1$이므로 이 부등식은 해를 가진다. $\alpha = \arcsin\frac{2}{\pi}$라 하면 α는 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있다. $\frac{\theta}{2}$가 $[0,\pi)$를 지나는 동안 사인값은 0에서 1까지 증가했다가 다시 감소하며, 사인값이 $\sin\alpha$보다 큰 것은 정확히

$$\alpha < \tfrac{\theta}{2} < \pi - \alpha, \qquad \text{즉} \qquad 2\alpha < \theta < 2\pi - 2\alpha.$$

일 때이다. 이것이 그림에서 굵게 표시한 호, 곧 원에서 A의 반대편에 있는 점들이다. θ가 균등분포를 따르므로, 구하는 확률은 이 구간의 길이를 2π로 나눈 값이다.

$$\mathrm{P}\big(X > \mathrm{E}(X)\big) = \frac{2\pi - 4\alpha}{2\pi} = \boxed{1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{2}{\pi}} \approx 0.561.$$

검산

- X의 범위는 $[0,2]$이고, 평균 $4/\pi \approx 1.27$은 중점 1보다 크다. 이는 그림과 잘 맞는다. 원의 상당 부분에서 현의 길이가 최댓값에 가깝고(P가 반대편을 지날 때 X는 천천히 변한다), 따라서 분포가 큰 값 쪽으로 치우쳐 있다.
- 같은 이유로 평균보다 클 확률은 $\frac{1}{2}$보다 조금 커야 하는데, 실제로 0.561이 그러하다.
- 수치적으로, 등간격으로 놓인 2×10^5개의 각에 대해 중점법(midpoint rule)으로 평균을 내면 평균 1.273240, 분산 0.378861, $\mathrm{P} = 0.56066$을 얻으며, 10^6개의 점으로 한 모의실험(simulation)도 표본오차 범위 안에서 일치한다.

흔한 실수

- $\theta \in (-\pi, \pi]$로 잡고 $X = 2\sin\frac{\theta}{2}$로 두는 것. 이 경우 $\sin\frac{\theta}{2}$가 음수일 수 있으므로 $X = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$로 써야 한다. $[0, 2\pi)$를 쓰면 절댓값을 피할 수 있다.
- P의 x좌표가 $[-1,1]$에서 균등분포를 따른다고 보는 것. 원 위에서 균등하다는 것은 x에 대해서가 아니라 각(호의 길이)에 대해 균등하다는 뜻이다.

STEP 너머

이 문제는 확률변수의 변환(transformation of a random variable)의 첫 번째 예이다. X의 확률밀도함수는 $[0,2]$에서 $f(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{4 - x^2}}$로, 아크사인형 분포(arcsine-type law)이며, 위의 모든 답을 이것으로부터 다시 구할 수 있다. 이 문제는 또한 "무작위로"라는 말이 얼마나 미끄러운지도 암시한다. 원의 현을 무작위로 고르는 자연스러운 방법이 여러 가지 있는데, 방법에 따라 서로 다른 답이 나온다(베르트랑의 역설(Bertrand's paradox)). 두 아이디어 모두 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP I 1987, 문제 16

확률과 통계 • 베이즈 정리와 정규근사

STEP I 1987, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s1-q16

핵심 아이디어

소문항 (i)은 모습을 바꾼 베이즈 정리(Bayes' theorem)이다. 두 번 연속 같은 쪽으로 투표했다는 사실은 그 의원이 어느 당 소속인지에 대한 **증거**가 된다. 보존당(Preservative) 의원은 언제나 그렇게 하지만 진보당(Progressive) 의원은 가끔만 그렇게 하기 때문이다. 따라서 먼저 그 의원이 보존당 의원일 확률(probability)을 갱신하고, 그다음 세 번째 투표를 예측한다. 소문항 (ii)에서는 보존당 의원들의 표가 고정된 수이므로 모든 무작위성은 40명의 진보당 의원에게서 나온다. 이들의 찬성표 수는 이항분포(binomial distribution)를 따르며, 바로 이것을 정규분포(normal distribution)로 근사한다.

풀이

소문항 (i)

선택된 의원이 보존당 의원인 사건을 R라 하면 $P(R) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$이고 $P(R') = \frac{2}{5}$이다. 그 의원이 처음 두 번의 투표에서 같은 쪽으로 투표한 사건을 S_2, 세 번째 투표도 일치하는 사건을 S_3라 하자.

보존당 의원은 절대 마음을 바꾸지 않으므로 $P(S_2 \mid R) = 1$이다. 진보당 의원은 무작위로 투표하며, 각 투표에서 독립적으로 확률 $\frac{1}{2}$로 찬성 또는 반대한다. 첫 번째 투표가 무엇이었든 두 번째 투표가 그것과 일치할 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 $P(S_2 \mid R') = \frac{1}{2}$이다. 따라서

$$P(S_2) = \tfrac{3}{5}\cdot 1 + \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{5}, \qquad P(R \mid S_2) = \frac{P(R)\,P(S_2 \mid R)}{P(S_2)} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}.$$

즉 관찰한 사실을 고려하면, 그 의원은 확률 $\frac{3}{4}$로 보존당 의원이고 확률 $\frac{1}{4}$로 진보당 의원이다.

생각해 보기 의원을 무작위로 선택했으니 그냥 $P(R \mid S_2) = \frac{3}{5}$라고 하면 왜 안 되는가?

정보 S_2는 진보당 의원보다 보존당 의원에게서 일어날 가능성이 더 크므로 승산(odds)을 바꾼다. 처음에는 승산이 보존당 쪽으로 3 : 2였다. S_2를 관찰한 뒤에는 $3 \cdot 1 : 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 : 1$이 된다.

이제 의원의 소속 정당이 주어지면, 세 번째 투표는 처음 두 투표가 정당에 대해 알려 주는 것 이상으로는 그 두 투표에 의존하지 않는다. 보존당 의원은 반드시 같은 투표를 반복하고, 진보당 의원은 확률 $\frac{1}{2}$로 일치하게 투표한다. 따라서

$$P(S_3 \mid S_2) = \tfrac{3}{4} \cdot 1 + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

(같은 방법으로, $P(S_3 \mid S_2) = \dfrac{P(S_2 \cap S_3)}{P(S_2)} = \dfrac{\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{7/10}{4/5} = \dfrac{7}{8}$이다.)

소문항 (ii)

보존당 정책 안건에 대한 투표를 생각하고, 100명의 의원이 모두 투표한다고 가정하자. 60명의 보존당 의원 중 비율 α, 즉 60α명은 언제나 반대하고, 나머지 $60(1-\alpha)$명은 언제나 찬성한다. 찬성하는 진보당 의원의 수를 X라 하자. 각 진보당 의원은 독립적으로 확률 $\frac{1}{2}$로 찬성하므로

$$X \sim \mathrm{B}\left(40, \tfrac{1}{2}\right), \qquad E(X) = 20, \qquad \mathrm{Var}(X) = 40 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 10.$$

100표 중 단순 과반수(simple majority)는 찬성이 최소 51표라는 뜻이다:

$$60(1-\alpha) + X \geq 51 \iff X \geq 60\alpha - 9.$$

$n = 40$이 꽤 크고 $p = \frac{1}{2}$이어서 이항분포가 대칭이므로, X를 $Y \sim \mathrm{N}(20, 10)$로 근사한다. 여기서 $60\alpha - 9$는 정수(의원의 수)이므로 연속성 수정(continuity correction)을 하면

$$P(\text{과반수}) = P(X \geq 60\alpha - 9) \approx P(Y > 60\alpha - 9.5) = P\left(Z > \frac{60\alpha - 29.5}{\sqrt{10}}\right),$$

이고, 여기서 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$이다.

이 확률은 α가 증가할수록 감소하므로, 선거는 α가 이 확률을 0.8 아래로 떨어뜨릴 만큼 클 때에 정확히 실시된다. 표에서 $P(Z > -0.8416) = 0.8$이므로 다음이 필요하다.

$$\frac{60\alpha - 29.5}{\sqrt{10}} > -0.8416 \iff 60\alpha > 29.5 - 0.8416\sqrt{10} = 26.84$$

$$\iff \alpha > 0.447.$$

60α는 의원의 수이므로 정수여야 하고, 가능한 가장 작은 값은 $60\alpha = 27$이다. 따라서 선거로 이어지는 α의 최솟값은

$$\alpha = \frac{27}{60} = 0.45.$$

이것이 맞는지 확인해 보자. 반란표가 26명일 때 과반수가 될 근사 확률은 $P(Z > -1.107) \approx 0.866$이고, 27명일 때는 $P(Z > -0.791) \approx 0.785 < 0.8$이다.

검산

- (i)에서 $\frac{7}{8}$은 당연히 $\frac{1}{2}$(진보당 의원임을 아는 경우)과 1(보존당 의원임을 아는 경우) 사이에 있다. 무작위 의원 400,000명을 시뮬레이션한 결과는 0.875였다.
- (ii)에서 정확한 이항 확률은 $P(X \geq 17) = 0.8659$(반란표 26명)와 $P(X \geq 18) = 0.7852$(반란표 27명)이다. 이 값들은 정규근사 값과 소수점 아래 셋째 자리까지 일치하며, 경계가 반란표 26명과 27명 사이, 즉 $\alpha = 0.45$임을 확인해 준다.

흔한 실수

- (i)에서 $\frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$라고 답하는 것. 이는 그 의원이 이미 두 번 같은 쪽으로 투표했다는 정보를 무시한 것이다.
- 단순 과반수를 "최소 50표"로 보는 것. 50 대 50 동수는 과반수가 아니므로 51표가 필요하다.
- 연속성 수정을 빠뜨리는 것. 연속성 수정을 하지 않으면 기준이 $\alpha > 0.456$이 되어 반란표가 27명이 아니라 28명이 되는데, 이는 정확한 이항 계산에 따르면 틀린 답이다.

STEP 너머

소문항 (i)은 **베이즈 갱신**(*Bayesian updating*)의 작은 예이다. 자료가 숨겨진 "유형"에 대한 우리의 믿음을 바꾸고, 예측은 갱신된 믿음에 대한 평균으로 얻어진다(사후 예측 분포(posterior predictive distribution)). 소문항 (ii)의 정규근사는 중심극한정리(central limit theorem)의 한 경우이며, 여기서 거의 완벽하게 일치하는 것은 우연이 아니다. $p = \frac{1}{2}$일 때 이항분포는 대칭이기 때문이다. 두 아이디어 모두 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 꼼꼼하게 전개된다.

풀이

STEP II 1987, 문제 1

순수수학 • 대수적 항등식

> **STEP II 1987, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q1

핵심 아이디어

문자 하나를 다른 문자로 나타내어 대입하려 하지 말자. 대신 우변을 전개(expansion)한다. 제곱 a^2, b^2, c^2은 양변에 모두 나타나 소거되므로, 남는 것은 x와 일차식의 곱이다. 그리고 그 일차식은 바로 주어진 조건의 상수배이다. 수 7과 11이 어디서 나오는지 알고 나면 일반적인 결과는 저절로 따라온다.

풀이

전개를 일반적인 경우에 대해 한 번 해 두면 편리하다. 임의의 수 p, q, r에 대하여

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2=(p^2+q^2+r^2)x^2-2x(pa+qb+rc)+a^2+b^2+c^2,$$

이므로

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x\big[(p^2+q^2+r^2)x-2(pa+qb+rc)\big]. \qquad (*)$$

이다.

소문항 (i)

여기서는 $(p,q,r)=(1,2,3)$이므로 $p^2+q^2+r^2=14$이고, $(*)$는 다음과 같이 된다.

$$(x-a)^2+(2x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x\big[14x-2(a+2b+3c)\big].$$

$a+2b+3c=7x$이면 대괄호 안은 $14x-14x=0$이다. 따라서 양변은 같고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

이제 $(p,q,r)=(2,3,3)$이므로 $p^2+q^2+r^2=4+9+9=22$이고

$$(2x-a)^2+(3x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x\big[22x-2(2a+3b+3c)\big].$$

이다. $2a+3b+3c=11x$이면 대괄호 안은 $22x-22x=0$이므로 (ii)가 증명된다.

> **?** **생각해 보기** 왜 (i)에서는 7이고 (ii)에서는 11일까?

이 수들은 $p^2+q^2+r^2$의 절반이다. 즉 $7=\frac{1}{2}(1+4+9)$이고 $11=\frac{1}{2}(4+9+9)$이다. 이로부터 일반적인 명제가 어떤 모양이어야 하는지 알 수 있다.

일반적인 결과

항등식(identity) $(*)$로부터 다음이 바로 증명된다.

임의의 실수 p,q,r,a,b,c,x에 대하여

$$2(pa+qb+rc)=(p^2+q^2+r^2)\,x,$$

이면

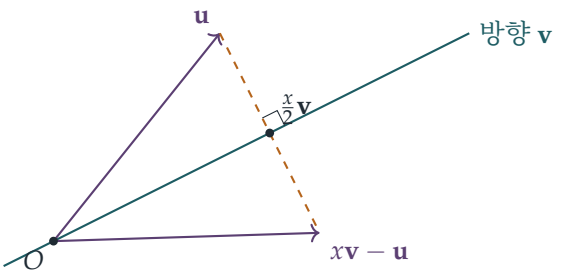
$$a^2+b^2+c^2=(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2.$$

이다. 소문항 (i)은 $(p,q,r)=(1,2,3)$인 경우이고, 소문항 (ii)는 $(p,q,r)=(2,3,3)$인 경우이다.

같은 전개는 변수의 개수와 상관없이 성립한다. $2\sum_{i=1}^{n}p_ia_i=\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^2\right)x$이면 $\sum a_i^2=\sum(p_ix-a_i)^2$이다. 또한 $(*)$로부터 역(converse)도 얻는다. 즉 $x\neq 0$이고 항등식이 성립하면 조건도 반드시 성립한다.

기하학적으로 무슨 일이 일어나는가

$\mathbf{u}=(a,b,c)$, $\mathbf{v}=(p,q,r)$라 하자. 조건은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{x}{2}|\mathbf{v}|^2$이 되는데, 이는 $\frac{x}{2}\mathbf{v}$가 $\mathbf{u}$에서 O를 지나고 방향이 $\mathbf{v}$인 직선에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)이라는 뜻이다. 그러면 벡터 $x\mathbf{v}-\mathbf{u}=2\cdot\frac{x}{2}\mathbf{v}-\mathbf{u}$는 그 직선에 대한 $\mathbf{u}$의 반사(reflection)이다. 반사는 길이를 보존하므로 $|x\mathbf{v}-\mathbf{u}|=|\mathbf{u}|$이고, 이것이 바로 그 항등식이다.



검산

(i)에 $x = 1, a = b = 0, c = \frac{7}{3}$을 넣어 보자. 좌변은 $\frac{49}{9}$이고 우변은 $1 + 4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$이다. 또한 두 소문항과 일반적인 결과를 각각 무작위로 고른 2000개의 경우(일반적인 경우는 변수 최대 6개)에 대해 정확한 유리수 산술(exact rational arithmetic)로 확인하였고, $x \neq 0$이고 조건이 성립하지 않을 때는 항상 항등식도 성립하지 않음을 확인하였다.

흔한 실수

- 처음부터 $c = \frac{1}{3}(7x - a - 2b)$를 대입하는 것. 풀리기는 하지만 계산이 지저분하고 구조가 가려진다.
- 일반적인 결과를 k와 p, q, r 사이의 관계 없이 "$pa + qb + rc = kx$"로 제시하는 것. 항등식이 성립하려면 $k = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$이어야 한다.

STEP 너머

이 기하학적 그림은 선형대수학(linear algebra)의 출발점이다. 사상 $\mathbf{u} \mapsto 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} - \mathbf{u}$는 반사이며 직교 선형 사상(orthogonal linear map)이다. 그리고 직교 사상은 정확히 길이를 보존하는 선형 사상이다. 이와 같은 사영(projection)과 반사는 최소제곱법(least squares)과 수치 계산에서 쓰이는 하우스홀더 변환(Householder transformations)의 바탕이 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 아이디어를 같은 기하학적 관점에서 전개한다.

풀이

STEP II 1987, 문제 2

순수수학 • 삼각함수 항등식

> **STEP II 1987, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q2

핵심 아이디어

주어진 식에는 $\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$만 나타나고, 이 식은 $\sin^2 C$에 대한 **이차식**(quadratic)이다. $A \pm B \pm C$에 대한 조건은 C가 $A+B$ 또는 $A-B$와 묶여 있다는 뜻이다. 따라서 그 이차식의 두 근(root)이 $\sin^2(A+B)$와 $\sin^2(A-B)$라고 추측하는 것이 자연스럽다. 두 근의 합과 곱을 확인하면 이 추측이 맞음을 알 수 있고, 결과는 저절로 따라 나온다.

풀이

$x = \sin^2 A$, $y = \sin^2 B$, $z = \sin^2 C$라 하고, 좌변을 E라 하자. 그러면

$$E = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy + 4xyz.$$

z의 거듭제곱끼리 모으면

$$\begin{aligned} E &= z^2 - 2z(x + y - 2xy) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= z^2 - 2(x + y - 2xy)\, z + (x - y)^2. \end{aligned}$$

이차식의 근

다음이 성립함을 보이자.

$$E = \big(z - \sin^2(A+B)\big)\big(z - \sin^2(A-B)\big).$$

양변이 모두 z에 대한 최고차항의 계수가 1인 이차식(monic quadratic)이므로, $\sin^2(A+B)$와 $\sin^2(A-B)$의 합과 곱이 맞는지만 확인하면 충분하다.

합. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$를 전개하여 제곱하면, 두 식을 더할 때 교차항

이 소거된다.

$$\begin{aligned}\sin^2(A+B)+\sin^2(A-B) &= 2\sin^2 A\cos^2 B + 2\cos^2 A\sin^2 B \\ &= 2x(1-y)+2(1-x)y \\ &= 2(x+y-2xy).\end{aligned}$$

곱. 제곱의 차(difference of two squares)를 이용하면

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B = x(1-y)-(1-x)y = x-y,$$

이므로 $\sin^2(A+B)\sin^2(A-B) = (x-y)^2$이다.

둘 다 E의 계수와 일치하므로 주장이 증명된다.

> **생각해 보기** 왜 $\sin^2 C$가 $\sin^2(A+B)$ 또는 $\sin^2(A-B)$와 같다는 것만 알면 충분한가?

그러면 z가 두 근 중 하나이므로 E의 인수 하나가 0이 되기 때문이다. 이제 각에 대한 조건으로부터 바로 이것이 얻어짐을 보이면 된다.

조건 이용하기

어떤 정수 k와 어떤 부호 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$에 대하여 $A + \varepsilon_1 B + \varepsilon_2 C = k\pi$라 하자. 그러면

$$C = \varepsilon_2\big(k\pi - (A + \varepsilon_1 B)\big).$$

함수 $\sin^2$은 짝함수(even function)이고 주기(period)가 π이므로, 부호 ε_2도 $k\pi$도 그 값을 바꾸지 않는다.

$$\sin^2 C = \sin^2(A + \varepsilon_1 B).$$

따라서 $z = \sin^2(A+B)$($\varepsilon_1 = 1$일 때)이거나 $z = \sin^2(A-B)$($\varepsilon_1 = -1$일 때)이다. 어느 경우든 E의 인수 하나가 0이므로

$$E = 0,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. ■

더 깔끔한 꼴 (그리고 역)

각 인수는 사인의 제곱의 차이고, $\sin^2 P - \sin^2 Q = \sin(P+Q)\sin(P-Q)$이다(위의 곱 공식에서 $A = P$, $B = Q$로 둔 것). 따라서

$$E = \sin(A+B+C)\,\sin(C-A-B)\,\sin(C+A-B)\,\sin(C-A+B).$$

여기 나타난 네 각은 부호를 무시하면 정확히 $A+B+C$, $A+B-C$, $A-B+C$, $A-B-C$이다. 이로써 결과가 명료해진다. 즉 $E = 0$일 **필요충분조건**은 네 각 $A \pm B \pm C$ 중 하나가 π의 배수인 것이다. 이것은 원래 명제의 역(converse)도 함께 보여 준다.

검산

- $A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{2}$로 두면 $A + B - C = 0$이다. 이때 $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = 1$이고 $E = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} + 1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = 0$이다.
- $A = 0.3, B = 0.7, C = 1.1$(특별한 관계 없음)로 두면 E와 네 사인의 곱이 모두 0.05538이 되므로, 조건을 벗어나면 식이 실제로 0이 아니다.
- 10^5개의 무작위 순서쌍에 대한 검사로 인수분해(factorisation)가 맞음을 확인했으며, $A \pm B \pm C$ 중 하나가 π의 배수가 되도록 강제하면 언제나 10^{-14} 이내의 오차로 $E = 0$임도 확인했다.

흔한 실수

- $A + B + C = \pi$인 경우(삼각형)만 다루는 것. 문제는 네 가지 부호 패턴 중 어느 것이든, 그리고 π의 어떤 배수든 허용한다. $\sin^2$이 짝함수이고 주기가 π라는 사실이 이 모든 경우를 한꺼번에 처리해 준다.
- 근의 공식으로 이차방정식을 풀다가 $\sqrt{xy(1-x)(1-y)}$에서 헤매는 것. 추측한 근의 합과 곱을 확인하면 제곱근과 부호 문제를 완전히 피할 수 있다.

STEP 너머

식 $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy$는 수학 곳곳에 나타난다. x, y, z를 a^2, b^2, c^2로 바꾸면 이 식은 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형의 넓이의 제곱의 -16배가 되며(헤론의 공식(Heron's formula)), 세 길이로 삼각형을 만들 수 있는지를 결정하는 판별식(discriminant)과 비슷한 양이기도 하다. 대칭다항식(symmetric polynomial)을 한 변수에 대한 이차식으로 보고 그 근을 추측하는 것은 대수학과 불변량 이론(invariant theory) 전반에 걸쳐 거듭 등장하는 기법이다. 이런 정신의 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP II 1987, 문제 3

순수수학 • 켤레 무리식

> **STEP II 1987, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q3

핵심 아이디어

$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}$, $\beta = a - \sqrt{a^2 - b}$라 하자. 이 두 수는 서로 켤레(conjugate)이다. 두 수의 합 $2a$와 곱 b가 정수이므로 $\alpha^n + \beta^n$은 항상 정수이다. b에 대한 조건 때문에 작은 쪽 켤레 β가 0과 1 사이에 엄격하게 놓이게 된다면, β^n이 바로 우리가 찾는 소수 부분(fractional part)이 되고, 나머지는 모두 여기서 따라 나온다.

풀이

풀이 전체에서

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}, \qquad \beta = a - \sqrt{a^2 - b}, \qquad \text{이므로} \qquad \alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = a^2 - (a^2 - b) = b.$$

β의 위치. 먼저 제곱근은 실수이다. $b < 2a - 1$이므로

$$a^2 - b > a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0.$$

이 엄격한 부등식의 양변에 양의 제곱근을 취하면 $\sqrt{a^2 - b} > a - 1$을 얻는다. 또한 $b > 0$이므로 $a^2 - b < a^2$이고 $\sqrt{a^2 - b} < a$이다. 이 둘을 합치면

$$a - 1 < \sqrt{a^2 - b} < a \quad \Longrightarrow \quad 0 < \beta < 1.$$

(이 조건은 최선이다. $b = 2a - 1$이면 $\sqrt{a^2 - b} = a - 1$이고 $\beta = 1$이 정확히 성립한다.)

소문항 (i)

$0 < \beta < 1$이므로 모든 양의 정수 n에 대하여 $0 < \beta^n < 1$이다. 이제 M은 정수이고 $0 \leq s < 1$인 s에 대하여 $\beta^n = M + s$이므로, M은 β^n의 정수 부분(integer part), 즉 0이다.

따라서

$$M = 0 \qquad \text{이고} \qquad s = \beta^n.$$

소문항 (ii)

$S_n = \alpha^n + \beta^n$이라 하자. S_n이 정수임을 보이겠다. $d = \sqrt{a^2 - b}$로 두고 두 거듭제곱을 이항 정리(binomial theorem)로 전개하면

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\left(d^k + (-d)^k\right) = 2 \sum_{k \text{ 짝수}} \binom{n}{k} a^{n-k}(a^2 - b)^{k/2},$$

이다. k가 홀수인 항은 서로 소거되기 때문이다. 남은 항은 모두 정수이므로 $S_n \in \mathbb{Z}$이다. (같은 이야기를 달리 하면, α, β는 $t^2 - 2at + b = 0$의 근(root)이므로 $S_0 = 2$, $S_1 = 2a$이고 $S_n = 2aS_{n-1} - bS_{n-2}$이다.)

그러므로

$$\alpha^n = S_n - \beta^n, \qquad S_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \beta^n < 1.$$

? **생각해 보기** 왜 이로부터 $N = S_n$이고 $r = \beta^n$이어야 하는가?

N이 정수이고 $0 \le r < 1$일 때 $\alpha^n = N - r$로 나타내는 방법은 유일하다. N은 α^n 이상인 정수 중 가장 작은 것이어야 한다. $r, r' \in [0, 1)$에 대하여 $N' - r' = N - r$이면 $N - N' = r - r'$은 -1과 1 사이에 엄격하게 놓인 정수이므로 0이다. 우리가 얻은 식 $S_n - \beta^n$이 바로 이 꼴이므로

$$N = S_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad r = \beta^n = s.$$

소문항 (iii)

$r = \beta^n$, $N = \alpha^n + \beta^n$, $(\alpha\beta)^n = b^n$을 이용하면

$$\begin{aligned} r^2 - Nr + b^n &= \beta^{2n} - (\alpha^n + \beta^n)\beta^n + \alpha^n\beta^n \\ &= \beta^{2n} - \alpha^n\beta^n - \beta^{2n} + \alpha^n\beta^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 다시 말해 r은 두 근이 α^n과 β^n인 방정식 $t^2 - Nt + b^n = 0$의 작은 근이다.

마지막 소문항

$a = 8$, $a^2 - b = 63$으로 두면 $b = 1$이고 $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$이다. 조건 $b < 2a - 1 = 15$가 성립하므로 앞의 모든 결과를 $\alpha = 8 + 3\sqrt{7}$에 적용할 수 있다.

$$\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n = N - r, \qquad N \in \mathbb{Z},$$

이고, α^n은 정수 N보다 r만큼 작다. $b=1$일 때 소문항 (iii)에서 $r(N-r)=1$, 즉

$$r=\frac{1}{N-r}=\frac{1}{\left(8+3\sqrt{7}\right)^n}=\left(8-3\sqrt{7}\right)^n.$$

특히 $r\neq 0$이므로 이 거듭제곱 자체는 결코 정수가 아니며, $r\to 0$이다. 이제 $3\sqrt{7}=\sqrt{63}$은 $\sqrt{64}=8$보다 아주 조금 작으므로

$$8+3\sqrt{7}\approx 16=2^4,\qquad \text{따라서}\qquad r=\left(8+3\sqrt{7}\right)^{-n}\approx 16^{-n}=2^{-4n}.$$

그러므로 n이 클 때 $\left(8+3\sqrt{7}\right)^n$은 어떤 정수와의 차이가 약 2^{-4n} 이내이며, 그 정수보다 아주 조금 작다.

여기서 "약"은 얼마나 정확한가? $8+3\sqrt{7}\approx 15.937$이므로 $c=\log_2(8+3\sqrt{7})\approx 3.994$에 대하여 $r=2^{-cn}$이다. 지수는 $4n$과 0.2% 이내로 일치하며, 이 어림은 바로 이런 의미에서 성립한다. 비 $r/2^{-4n}=\left(16/(8+3\sqrt{7})\right)^n$은 $n=1$일 때 약 1.004에서 $n=10$일 때 1.04까지 천천히 증가한다.

검산

- $n=1$: $8+3\sqrt{7}\approx 15.93725$이고, 이는 $16-0.06275$이며, 예측대로 $8-3\sqrt{7}\approx 0.06275$이다. 또한 $r^2-16r+1=0$의 작은 근은 $8-\sqrt{63}$이다.
- $n=2$: $(8+3\sqrt{7})^2=127+48\sqrt{7}\approx 253.99606$이므로 $N=254=S_2=2\cdot 8\cdot 16-2$이고 $r\approx 0.003937$인데, 이는 $2^{-8}\approx 0.003906$과 비교된다.
- $b<2a-1$을 만족하는 무작위 순서쌍 (a,b) 수천 개와 $n\leq 7$에 대하여 컴퓨터로 확인한 결과 $0<\beta^n<1$, $N-\alpha^n=\beta^n$, $r^2-Nr+b^n=0$이 모두 성립하였다. $a=8$, $b=1$, $n\leq 10$에 대한 고정밀 계산으로 $N-\alpha^n=(8-3\sqrt{7})^n$도 확인하였다. $n=10$일 때 이 값은 9.46×10^{-13}으로, $2^{-40}\approx 9.09\times 10^{-13}$과 비교된다.

흔한 실수

- $\beta<1$만 보이고 $\beta>0$($b>0$이 필요하다)을 잊는 것. $M=0$이려면 둘 다 필요하다.
- $N-r$에서 정수 부분과 소수 부분이 왜 유일한지 설명하지 않고 $N=\alpha^n+\beta^n$이라고 단정하는 것.
- $r/2^{-4n}\to 1$이라고 기대하는 것. 그렇지 않다. $8+3\sqrt{7}$은 16에 가깝지만 같지는 않으므로, 이 근사는 지수에서의 근사이다.

STEP 너머

수 $\alpha^n + \beta^n$은 대각합(trace)의 한 예이다. α는 켤레가 단위구간 안에 놓이는 대수적 정수(algebraic integer)이므로, 그 거듭제곱은 지수적으로 빠르게 정수에 가까워진다. 이런 수를 피조 수(Pisot number)라 한다. 황금비(golden ratio)도 그러한 수이며, 그래서 φ^n이 뤼카(Lucas) 수 L_n에 가깝다. 여기서 다룬 경우는 펠 방정식(Pell's equation)과도 연결된다. $8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$이므로 $(8, 3)$은 $x^2 - 7y^2 = 1$의 가장 작은 양의 해이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 펠 방정식과 연분수(continued fraction)를 아름답게 다룬다.

풀이

STEP II 1987, 문제 4

순수수학 • 복소수와 기하

STEP II 1987, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s2-q4

핵심 아이디어

$e^{i\theta}$를 곱하는 것은 회전(rotation)이고, 정삼각형(equilateral triangle)은 한 변을 한 꼭짓점을 중심으로 $60°$만큼 회전했을 때 얻어지는 도형이다. 이렇게 하면 기하 문제가 α, β, γ에 대한 일차방정식(linear equation)으로 바뀐다. 두 방향(orientation)을 모두 허용한다는 것은 두 일차식 **중 하나가** 0이 된다는 뜻이고, 이 두 식의 곱이 바로 문제에 나오는 대칭(symmetric) 이차식이다. 이 식은 대칭식이므로 삼차방정식(cubic)의 계수(coefficient)로 나타낼 수 있다.

풀이

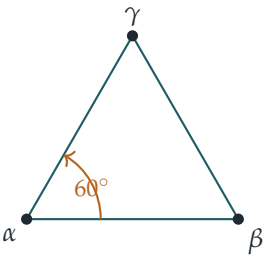
이 풀이 전체에서 $\omega = e^{2\pi i/3}$으로 두며, 따라서 $\omega^3 = 1, \bar{\omega} = \omega^2, 1 + \omega + \omega^2 = 0$이다.

$e^{i\theta}$를 곱하기

$z = re^{i\phi}$이면 $ze^{i\theta} = re^{i(\phi+\theta)}$이다. 즉 절댓값(modulus)은 변하지 않고 편각(argument)은 θ만큼 커진다. 따라서 점 $ze^{i\theta}$는 점 z를 원점을 중심으로 반시계 방향(anticlockwise)으로 각 θ만큼 회전한 상이다.

더 일반적으로, $\gamma - \alpha = e^{i\theta}(\beta - \alpha)$는 α에서 γ로 가는 벡터가 α에서 β로 가는 벡터를 반시계 방향으로 θ만큼 회전한 것임을 뜻한다. 즉 γ는 β를 α를 중심으로 θ만큼 회전한 상이다.

반시계 방향 정삼각형



서로 다른 점 α, β, γ가 반시계 방향 순서로 정삼각형을 이루는 것은 γ가 β를 α를 중심으로 반시계 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전하여 얻어질 때, 즉

$$\gamma - \alpha = e^{i\pi/3}(\beta - \alpha).$$

일 때와 정확히 같다. (필요성(necessity): 이러한 삼각형에서는 $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$이고, α에서의 각은 $\alpha\beta$에서 $\alpha\gamma$로 반시계 방향으로 잰 것으로 $\frac{\pi}{3}$이다. 충분성(sufficiency): 이 식으로부터 $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$이고 두 변 사이의 각이 $\frac{\pi}{3}$이므로, 삼각형은 꼭지각이 $60°$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이고 따라서 정삼각형이며, 방향은 반시계 방향이다.)

이를 대칭적인 꼴로 쓰면 더 깔끔하다. $e^{i\pi/3} = -\omega^2$이므로($e^{7\pi i/3} = e^{i\pi/3}$을 이용하면 $-\omega^2 = e^{i\pi}e^{4\pi i/3} = e^{i\pi/3}$이기 때문이다), 조건은

$$\begin{aligned} & \gamma - \alpha = -\omega^2\beta + \omega^2\alpha \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta - (1+\omega^2)\alpha = 0 \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta + \omega\alpha = 0, \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 $1 + \omega^2 = -\omega$를 이용하였다. 양변에 ω^2를 곱하면(0이 아니므로 이 과정은 거꾸로도 할 수 있다) 동치인 조건

$$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0.$$

을 얻는다. 간단히 확인해 보자. $1, \omega, \omega^2$는 반시계 방향 순서로 정삼각형의 꼭짓점이고, $1 + \omega \cdot \omega + \omega^2 \cdot \omega^2 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$이다.

두 방향 모두

정삼각형을 이루는 서로 다른 세 점은 α, β, γ 순서이든 α, γ, β 순서이든 둘 중 하나로 반시계 방향이다(순환적으로 순서를 바꾸는 것(cyclic re-ordering)은 방향을 바꾸지 않는다). 앞부분에 의해, 서로 다른 α, β, γ에 대하여

$$\begin{aligned} \text{정삼각형} & \iff \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0 \text{ 또는 } \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta = 0 \\ & \iff (\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = 0. \end{aligned}$$

생각해 보기 이 곱이 우리가 원하는 식이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

그냥 전개하면 된다. 제곱항은 $\alpha^2+\omega^3\beta^2+\omega^3\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$이 된다. 교차항은

$$\begin{aligned}\alpha\beta(\omega^2+\omega)+\alpha\gamma(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega^4)&=\alpha\beta(\omega+\omega^2)+\gamma\alpha(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega)\\&=-\alpha\beta-\gamma\alpha-\beta\gamma,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\omega^4=\omega$와 $\omega+\omega^2=-1$을 이용하였다. 따라서

$$(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta,$$

이고, 그러므로 서로 다른 점 α,β,γ가 (어떤 순서로) 정삼각형을 이루기 위한 필요충분조건은

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=0,$$

이며, 이것이 증명하려던 것이다.

세 점이 서로 다르다는 조건이 없으면 어떻게 되는지 짚어 둘 만하다. 예를 들어 $\alpha=\beta$이면 식은 $(\alpha-\gamma)^2$이 되고, 이는 $\gamma=\alpha$이기도 할 때만 0이 된다. 따라서 이 식이 0이 되는 것은 세 점이 정삼각형을 이루거나 **세 점이 모두 일치할 때**와 정확히 같다. 이 사실은 아래에서 필요하다.

삼차방정식

$z^3+az^2+bz+c=0$의 근을 α,β,γ라 하자. 그러면

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\qquad \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=b,\qquad \alpha\beta\gamma=-c.$$

이다. 주어진 식은 대칭식이므로 이것들로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\\&=a^2-3b.\end{aligned}$$

위의 관찰에 의해, $a^2=3b$인 것은 근들이 정삼각형을 이루거나 모두 같을 때와 정확히 같다. 세 근이 모두 t라는 것은 $z^3+az^2+bz+c=(z-t)^3$이라는 뜻이므로 $a=-3t$, $b=3t^2$, $c=-t^3$이다. 즉 $b=\frac{a^2}{3}$이고 $c=\frac{a^3}{27}$이다. 따라서 근들이 (진짜) 정삼각형의 꼭짓점에 놓일 필요충분조건은

$$\boxed{a^2=3b\quad\text{이고}\quad 27c\neq a^3}$$

이다. 일치하는 세 점을 퇴화된(degenerate) 정삼각형으로 셈에 넣는다면, 조건은 단순히 $a^2=3b$이다.

이를 직접 확인하는 멋진 방법이 있다. $z=w-\frac{a}{3}$을 대입하면 z^2항이 사라진다. $a^2=3b$이면 일차항도 사라져서 방정식은 $w^3=\frac{a^3}{27}-c$가 된다. 이 방정식의 근은 0이 아닌 수의 세 세제곱근이고, 이들은 $w=0$, 즉 $z=-\frac{a}{3}$을 중심으로 하는 정삼각형을 이룬다. 이 점은 근들의 무게중심(centroid)이다.

검산

- $z^3 - 1 = 0 (a = b = 0, c = -1)$의 근은 $1, \omega, \omega^2$로 정삼각형을 이루며, 실제로 $a^2 = 0 = 3b$이고 $27c = -27 \neq 0$이다.
- $z^3 - z = 0$의 근은 $0, \pm 1$로 한 직선 위에 있다(collinear). 이때 $a^2 - 3b = 3 \neq 0$이다.
- 수치적으로, 임의로 만든 1000개의 삼각형 $\alpha, \beta, \gamma = \alpha + e^{i\pi/3}(\beta - \alpha)$에 대하여 삼각형이 반시계 방향의 정삼각형인지, $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$와 이차식이 (모든 순서에서) 0이 되는지 확인하였고, 임의의 복소수에 대하여 곱의 항등식과 $a^2 - 3b$ 공식이 10^{-8} 이내의 오차로 성립하는지 확인하였다.

흔한 실수

- 부호나 방향을 잘못 잡는 것: $e^{i\pi/3}$는 ω가 아니라 $-\omega^2$이다. 한 꼭짓점을 중심으로 ω만큼(즉 120°만큼) 회전하면 정삼각형이 나오지 않는다.
- 삼중근(triple root)의 경우를 잊는 것: $a^2 = 3b$만으로는 세 "꼭짓점"이 일치하는 $z^3 + az^2 + bz + c = (z + \frac{a}{3})^3$인 경우도 허용된다.

STEP 너머

조건 $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$은 세 수의 순서쌍 (α, β, γ)에 대한 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)의 한 성분이며, z^2항을 없애는 기법은 삼차방정식을 거듭제곱근(radical)으로 푸는 첫 단계로서 갈루아(Galois) 이론으로 이어진다. 기하적으로 보면, 이 결과는 근들이 정삼각형을 이루는 것이 도함수(derivative) $3z^2 + 2az + b$가 무게중심에서 중근(double root)을 가질 때와 정확히 같다는 것을 말해 준다. 이는 도함수의 근에 관한 마든 정리(Marden's theorem)의 특수한 경우이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈의 기하학을 더 탐구하기에 아주 훌륭한 책이다.

풀이

STEP II 1987, 문제 5

순수수학 • 라그랑주 반전 급수

> **STEP II 1987, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q5

핵심 아이디어

라그랑주 항등식(Lagrange's identity)은 일종의 기계이다. 함수 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$를 넣고, 이를 n제곱한 뒤 $n-1$번 미분하여 모두 더하면 된다. 할 일은 모두 ϕ가 간단해지도록, 이상적으로는 y의 거듭제곱 하나나 지수함수 하나가 되도록 문제를 설정하는 데 있다. 그러면 ϕ^n의 $(n-1)$계 도함수(derivative)를 곧바로 적을 수 있기 때문이다. 각 소문항에서 우리는 풀어야 할 방정식이 적당한 y 값에 대해 $\mathrm{f}(x) = y$ 꼴이 되도록 f를 고른다.

풀이

풀이 전체에서 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$로 쓰면, 항등식은 다음과 같다.

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} \left[\phi(y)^n\right].$$

$n = 1$인 항에는 0계 도함수가 들어가며, 이는 그냥 $\phi(y)$ 자체임에 주의한다.

반복해서 쓰는 사실은 단 하나로, 정수 $m \geq n-1$에 대해

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} y^m = \frac{m!}{(m-n+1)!} y^{m-n+1},$$

이라는 것이다. 미분할 때마다 현재 지수가 앞으로 내려오고 지수가 하나씩 줄어들기 때문이다.

소문항 (i)

$f(x) = \alpha x$이면 $\phi(y) = (1-\alpha)y$이므로 $\phi(y)^n = (1-\alpha)^n y^n$이다. 위 공식에서 $m = n$으로 두고 $n-1$번 미분하면

$$\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[(1-\alpha)^n y^n\right] = (1-\alpha)^n \, n! \, y.$$

이다. $n!$이 $\frac{1}{n!}$과 약분되므로 항등식의 우변은

$$y + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^n y = y \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n.$$

이다. 이것은 공비가 $1-\alpha$인 등비급수(geometric series)이다. $0 < \alpha < 2$이므로 $-1 < 1-\alpha < 1$이고, 따라서 이 급수는 수렴(converge)하며 그 합은

$$y \cdot \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{y}{\alpha}.$$

이다. 한편 $y = \alpha x$에서 곧바로 $x = y/\alpha$를 얻으므로 $f^{-1}(y) = y/\alpha$이다. 두 결과가 일치하므로, 이 경우에 항등식이 성립함을 확인했다. 조건 $0 < \alpha < 2$는 정확히 급수가 수렴할 조건이다.

소문항 (ii)

방정식은 $f(x) = \frac{1}{2}$이고, 여기서

$$f(x) = x - \tfrac{1}{4}x^3, \qquad \text{따라서} \qquad \phi(y) = y - f(y) = \tfrac{1}{4}y^3.$$

이다. 그러면 $\phi(y)^n = 4^{-n} y^{3n}$이고, $m = 3n$($n-1$ 이상이다)으로 두고 도함수 공식을 쓰면

$$\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[4^{-n} y^{3n}\right] = \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

이다. 따라서 라그랑주 항등식에 의해

$$f^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

이다. 맨 앞의 y는 이 일반항에서 $n = 0$일 때 나오는 값과 정확히 같다. $\frac{0!}{0!\,1!\,4^0}\, y^1 = y$이기 때문이다. 따라서 이를 합에 흡수하여 $n = 0$부터 시작할 수 있다.

$$f^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

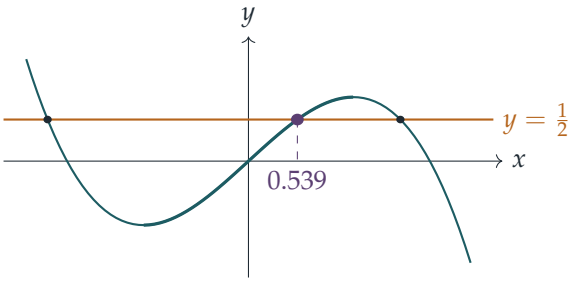
이제 $y = \frac{1}{2}$를 대입한다. 그러면 $4^n \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n} \cdot 2^{2n+1} = 2^{4n+1}$이므로

$$x = f^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,2^{4n+1}},$$

이고, $f(x) = \frac{1}{2}$이므로 이 x는 요구한 대로 $\frac{1}{2} = x - \frac{1}{4}x^3$의 근이다.

생각해 보기 이 삼차방정식은 실근이 세 개이다. 급수가 나타내는 것은 그중 어느 근인가?

함수 f는 실수 전체에서 일대일(one-to-one)이 아니므로, "f^{-1}"은 급수가 나타내는 가지(branch)를 뜻한다. 이 급수는 $y + \cdots$로 시작하는 y의 멱급수(power series)이므로 $\mathrm{f}^{-1}(0) = 0$이고, 작은 y에 대해 $\mathrm{f}^{-1}(y) \approx y$이다. 이것은 원점을 지나는 증가 구간, 즉 $\mathrm{f}'(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 > 0$인 구간 $|x| < 2/\sqrt{3}$으로 제한한 f의 역함수이다. 처음 몇 항은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{3}{512} + \cdots \approx 0.537$이고, 합은 소수점 넷째 자리까지 0.5392이다. 이것은 가장 작은 양의 근으로, 아래 그림에 표시되어 있다. 나머지 근인 약 1.675와 −2.214는 곡선의 감소하는 부분에 있다.



곡선에서 더 굵게 그린 부분이 원점을 지나는 증가하는 가지이며, 급수는 그 위의 근을 준다. 이 근은 자주색으로 표시했다.

소문항 (iii)

여기서 요령은 방정식 전체를 $\mathrm{f}(x) = y$ 꼴로 바꾸되 ϕ가 간단해지게 하는 것이다. $x = \mathrm{e}^{\lambda x}$를

$$x - \mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

으로 정리하고, 다음과 같이 잡는다.

$$\mathrm{f}(x) = x - \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad \phi(y) = y - \mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{\lambda y},$$

그리고 $x = \mathrm{f}^{-1}(0)$을 구하려 한다. 이제 $\phi(y)^n = \mathrm{e}^{n\lambda y}$이고, 미분할 때마다 $n\lambda$가 곱해지므로

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\,\mathrm{e}^{n\lambda y} = (n\lambda)^{n-1}\mathrm{e}^{n\lambda y}.$$

이다. ($n = 1$이면 이 식은 올바르게 $\mathrm{e}^{\lambda y}$가 된다.) 라그랑주 항등식에 의해

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\lambda)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{e}^{n\lambda y},$$

이고, $y = 0$을 대입하면

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}\lambda^{n-1} = 1 + \lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{8}{3}\lambda^3 + \frac{125}{24}\lambda^4 + \cdots .$$

이다. 첨자를 옮겨 쓰면, 동치로 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\lambda^n$이다.

이 급수는 어떤 λ에 대해 수렴하는가? 연속한 두 항의 비는

$$\frac{(n+1)^n\lambda^n/(n+1)!}{n^{n-1}\lambda^{n-1}/n!} = \lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \to \mathrm{e}\lambda,$$

이므로, 비판정법(ratio test)에 의해 급수는 $|\lambda| < 1/\mathrm{e}$일 때 수렴한다. 이것은 자연스러운 경계이다. $y = x$는 정확히 $\lambda = 1/\mathrm{e}$일 때 ($x = \mathrm{e}$에서) $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$에 접하고, $\lambda > 1/\mathrm{e}$이면 실근이 전혀 없다. $0 < \lambda < 1/\mathrm{e}$이면 양의 근이 두 개 있고, 급수는 그중 작은 근, 즉 $\lambda \to 0$일 때 1로 가는 근을 준다.

검산

- (ii)에서 처음 네 항은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{3}{512}$, $\frac{3}{2048}$이다. 200개 항을 수치적으로 더하면 0.539189이고, $x^3 - 4x + 2 = 0$에 뉴턴 방법(Newton's method)을 적용하면 근 0.5391888…을 얻으므로, 기계 정밀도까지 일치한다.
- (iii)에서 $\lambda = 0$을 대입하면 급수는 $x = 1$을 주고, 실제로 $x = \mathrm{e}^0 = 1$이다. $\lambda = 0.2$에 대해 급수를 더하면 $x \approx 1.29586$이고, $\mathrm{e}^{0.2\times 1.29586} = 1.29586$이다. $\lambda = -0.3$이면 0.78918을 얻는데, 이 역시 방정식을 만족한다. $\lambda = 0.2$일 때 다른 근은 약 12.71로, 급수의 값과 멀리 떨어져 있다.
- (i)에서 $\alpha = 1$로 두면 $\phi = 0$이므로 합의 모든 항이 사라지고, 마땅히 그래야 하듯 $\mathrm{f}^{-1}(y) = y$가 된다.

흔한 실수

- $n = 1$인 항에는 미분이 없다는 것(0계 도함수)을 잊어서, 이 항을 빠뜨리거나 잘못 계산한다.
- (ii)에서 따로 떨어진 y가 일반항 공식의 $n = 0$ 항이라는 것을 알아차리지 못해, $n = 0$부터 시작하는 합과 맞추지 못한다.
- (iii)에서 $\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 같은 것을 시도한다. 틀린 방법은 아니지만, 그러면 ϕ가 두 항의 차가 되어 도함수가 엉망이 된다. $\phi = \mathrm{e}^{\lambda y}$로 고르면 도함수가 아주 간단해진다.

STEP 너머

이것은 **라그랑주 반전 정리**(Lagrange inversion theorem)로, 보통 복소해석학(complex analysis)(코시(Cauchy)의 유수 정리(residue theorem))이나 형식적 멱급수(formal power series)를 이용해 증명한다. (iii)의 계수 $(n+1)^{n-1}/n!$은 람베르트(Lambert) W 함수의 계수이고, n^{n-1}은 꼭짓점이 n개인 뿌리 있는 레이블 트리(rooted labelled tree)의 개수이다. 마찬가지로 (ii)의 수 $\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!}$은 삼진 트리(ternary tree)의 개수로, 카탈랑 수(Catalan numbers)의 사촌 격이다. 이처럼 라그랑주 반전은 열거 조합론(enumerative combinatorics)의 핵심 도구이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*에 복소해석학적 배경이 나와 있고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 급수를 다루는 STEP 연습 문제가 더 있다.

풀이

STEP II 1987, 문제 6

순수수학 • 대칭성을 이용한 정적분

STEP II 1987, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s2-q6

핵심 아이디어

구간 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$는 대칭이므로, 반사(reflection) $\theta \mapsto -\theta$가 자연스러운 첫 수이다. 이 변환은 $\sin\theta$를 $-\sin\theta$로 바꾸고, 두 번째 형태를 공짜로 준다. 두 형태를 평균하면 홀함수 부분(odd part)이 사라지고 분모에는 $\sin^2\theta$만 남는다. 약간의 대수 계산을 거치면 이것을 상수와 표준적인 $\tan\theta$ 적분으로 나눌 수 있다. 마지막 부분의 핵심은 순진해 보이는 한 단계이다. $\sqrt{\cos^2 2\alpha}$는 $\cos 2\alpha$가 아니라 $|\cos 2\alpha|$이다.

풀이

전체에 걸쳐 $s = \sin 2\alpha$, $c = \cos 2\alpha$로 두면 $s^2 + c^2 = 1$이다. $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$이면 $0 < s < 1$이고 $0 < c < 1$이다. $s < 1$이므로 분모 $1 \mp s\sin\theta$는 구간 전체에서 양수이고, 따라서 모든 적분은 이상적분(improper integral)이 아닌 보통의 적분이다.

I의 두 번째 형태

$\theta = -\phi$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$이고 적분의 위끝과 아래끝이 서로 바뀐다.

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2(-\phi)}{1 - \sin(-\phi)\, s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

여기서 $\cos(-\phi) = \cos\phi$와 $\sin(-\phi) = -\sin\phi$를 이용하였다. ϕ를 다시 θ로 바꾸어 쓰면 요구된 형태가 된다.

$\cot^2 2\alpha$를 포함하는 식

I에 대한 두 식을 더하면

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1-s\sin\theta} + \frac{1}{1+s\sin\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

이므로

$$I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

이제 $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$와 $1 - s^2 = c^2$를 이용하여 분모를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$1 - s^2\sin^2\theta = \cos^2\theta + c^2\sin^2\theta.$$

? **생각해 보기** $\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}$를 상수와 적분할 수 있는 부분의 합으로 어떻게 나눌 수 있을까?

분자를 분모의 상수배에 나머지를 더한 꼴로 쓰되, 그 나머지는 $\cos^2\theta$로 나누었을 때 θ에 의존하지 않도록 하는 것이 목표이다.

$$(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta) - c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (1-c^2)\cos^2\theta = s^2\cos^2\theta,$$

이므로, $s^2(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)$로 나누면($s \neq 0$이므로 가능하다) 다음을 얻는다.

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\sec^2\theta}{1 + c^2\tan^2\theta},$$

마지막 단계에서는 분자와 분모를 $\cos^2\theta$로 나누었다. 길이가 π인 구간에서 적분하고 $c^2/s^2 = \cot^2 2\alpha$를 이용하면

$$I = \frac{\pi}{\sin^2 2\alpha} - \cot^2 2\alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sec^2\theta}{1 + \cos^2 2\alpha\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

가 되어 요구된 식을 얻는다.

I의 값 구하기

남은 적분을 J라 하자. $t = \tan\theta$로 치환하면 $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고, θ가 $-\frac{1}{2}\pi$에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 움직일 때 t는 실수 전체를 지난다. 그러면 $c \neq 0$일 때

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + c^2t^2} = \left[\frac{1}{|c|}\arctan\left(|c|\,t\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{|c|}.$$

(치환 $u = |c|t$가 바로 $|c|$를 만들어 낸다. 이렇게 하면 적분 구간이 올바른 순서로 $-\infty$에서 ∞까지 유지된다.)

$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$이면 $c > 0$이므로 $J = \pi/c$이고

$$I = \frac{\pi}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1-c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1+c} = \frac{\pi}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha,$$

이다. 여기서 $1 - c \neq 0$으로 약분하고 $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$를 이용하였다. 이것이 요구된 결과이다.

$\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$인 경우

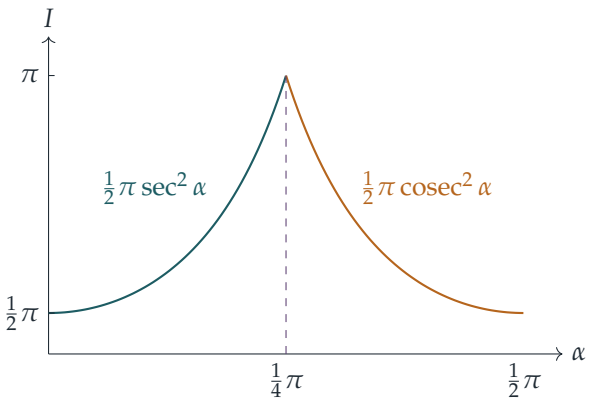
생각해 보기 α가 $\frac{1}{4}\pi$를 지날 때 논증에서 무언가 바뀌는 것이 있을까?

거의 없다. 여전히 $0 < s < 1$이므로, I를 J로 나타낸 식까지의 모든 단계는 그대로 성립한다. 유일한 차이는 이제 $c = \cos 2\alpha < 0$이라는 점이며, 따라서 $|c| = -c$이고 $J = -\pi/c$이다. 그러므로

$$I = \frac{\pi}{s^2} + \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1+c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1-c} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

이며, 여기서 $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$를 이용하였다. 첫 번째 답을 무심코 그대로 옮겨 쓰면 틀린 값을 얻게 된다.

α에 대한 I의 그래프를 보면 두 공식이 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$에서 만나며, 이때 둘 다 값이 π이다.



검산

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi$에서는 $s = 1$이고 피적분함수(integrand)는 $\cos^2\theta/(1-\sin\theta) = 1 + \sin\theta$이며, 이를 적분하면 π이다. 두 공식 모두 여기서 π를 주므로 예상대로이다.
- $\alpha = \frac{1}{6}\pi$에서는 $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $c = \frac{1}{2}$이므로 $I = \pi/(1+c) = \frac{2}{3}\pi$이고, $\frac{1}{2}\pi\sec^2\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\pi$이다.

- $\frac{1}{4}\pi$의 양쪽에서 무작위로 고른 열 개의 α 값에 대해 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면, 10^{-6}보다 작은 오차로 공식과 일치한다. 예를 들어 $\alpha \approx 0.6308$이면 두 방법 모두 $I \approx 2.408759$를 준다.
- $\alpha \to 0$이면 피적분함수는 $\cos^2\theta$로 수렴(converge)하고, 그 적분은 $\frac{1}{2}\pi$이므로 $\frac{1}{2}\pi\sec^2 0$과 일치한다.

흔한 실수

- 절댓값 없이 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2} = \frac{\pi}{c}$라고 쓰는 것. $c < 0$이면 이 값은 음수인데, 피적분함수가 양수이므로 이는 불가능하다.
- $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$에서 음의 부호를 빠뜨리거나, 그 부호가 적분의 위끝과 아래끝을 바꾸는 것으로 상쇄된다는 사실을 잊는 것.
- $t = \tan\theta$가 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 정의되지 않는다고 걱정하는 것. t에 대한 적분은 이상적분이지만 수렴하며, 우리에게 필요한 것은 그것뿐이다.

STEP 너머

답에 나타나는 깔끔한 대칭 $\alpha \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - \alpha$는 우연이 아니다. I는 오직 $\sin 2\alpha$를 통해서만 α에 의존하고 이 값은 그 교환에 의해 변하지 않지만, $\frac{1}{2}\pi\sec^2\alpha$ 같은 공식은 그렇지 않다. 제곱했다가 제곱근을 취하는 과정을 소리 없이 거치는 대수 계산은 바로 이런 종류의 문제를 감출 수 있다. 한 주기 전체에 걸친 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 유리함수의 적분(주기가 π인, 우리가 평균하여 얻은 피적분함수가 그런 예이다)은 대학에서 흔히 단위원을 따라가는 경로적분(contour integration)으로 계산하는데, 이때 유수 정리(residue theorem) 덕분에 거의 기계적인 작업이 된다. 아름답고 기하학적인 입문서로는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

풀이

STEP II 1987, 문제 7

순수수학 • 사다리꼴 공식과 계승

> **STEP II 1987, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q7

핵심 아이디어

간격이 1인 $\ln x$의 사다리꼴 합은 거의 정확히 $\ln n!$이다. 더하는 높이가 $\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n$이기 때문이다. $\ln x$는 오목(concave)하므로 모든 현(chord)이 곡선 아래에 놓이고, 따라서 사다리꼴 공식(trapezium rule)은 언제나 적분값을 **과소평가**한다. 이 한 가지 사실이 모든 부등식의 방향을 결정한다. 마지막 소문항의 요령은 촘촘한 격자에서의 오차를 크기 변환하여 다른 구간에서의 간격 1인 오차로 바꾸는 것이다. 그러면 이 오차를 $g(kn)$의 바탕에 있는 오차와 직접 비교할 수 있다.

풀이

공식의 정당화

$[x_0, x_N]$을 폭이 각각 h인 N개의 띠 $[x_r, x_{r+1}]$로 나눈다. 각 띠에서 곡선을 $(x_r, f(x_r))$와 $(x_{r+1}, f(x_{r+1}))$를 잇는 직선(현)으로 바꾼다. 현 아래의 영역은 넓이가 $\frac{1}{2}h\{f(x_r) + f(x_{r+1})\}$인 사다리꼴이다. $r = 0, 1, \ldots, N-1$에 대해 더하면, 내부의 세로좌표(ordinate) $f(x_1), \ldots, f(x_{N-1})$는 이웃한 두 사다리꼴에 한 번씩 나타나고 양 끝의 세로좌표는 각각 한 번씩 나타나므로 주어진 공식을 얻는다. h가 작으면 현이 곡선에 가깝게 유지되므로 이 근사는 정확하다.

간격 1과 $n! \approx g(n)$

$u = \ln x$, $dv = dx$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$I_n = \int_1^n \ln x \, dx = \Big[x \ln x\Big]_1^n - \int_1^n 1 \, dx = n \ln n - n + 1.$$

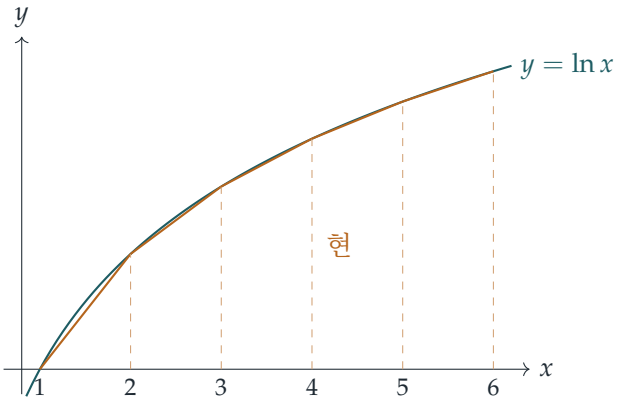
$h = 1$이면 세로좌표는 $x = 1, 2, \ldots, n$에 있으므로 사다리꼴 합은

$$\begin{aligned} T_n &= \tfrac{1}{2}\{\ln 1 + 2\ln 2 + \cdots + 2\ln(n-1) + \ln n\} \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n - \tfrac{1}{2}\ln n = \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\ln 1 = 0$을 이용하였다. $T_n \approx I_n$으로 놓으면

$$\ln n! \approx \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln n + 1 - n, \qquad \text{따라서} \qquad n! \approx n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n).$$

$n! < \mathrm{g}(n)$인 이유



$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln x = -\dfrac{1}{x^2} < 0$이므로 곡선 $y = \ln x$는 순오목(strictly concave)하다. 즉 각 띠 $[m, m+1]$에서 현은 양 끝점을 제외하면 곡선보다 엄격히 아래에 있다(그림 참조). 따라서 각 사다리꼴의 넓이는 그 띠에서 곡선 아래 영역의 넓이보다 엄격히 작고, $n - 1 \geq 1$개의 띠를 모두 더하면

$$T_n < I_n \quad \Longrightarrow \quad \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n < n\ln n - n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln n! < \ln \mathrm{g}(n).$$

exp는 증가함수이므로 $n! < \mathrm{g}(n)$이다.

폭이 $1/k$인 띠

이제 $h = 1/k$, $N = k(n-1)$이고 $r = 0, 1, \ldots, k(n-1)$에 대해 $x_r = 1 + \frac{r}{k} = \frac{k+r}{k}$이다. 마지막 세로좌표는 $x_N = n$이다. 사다리꼴 합을 "모든 세로좌표의 합에 h를 곱한 것에서 양 끝 세로좌표의 절반씩을 뺀 것"으로 쓰고 $\ln x_0 = 0$을 이용하면

$$T_n^{(k)} = \frac{1}{k}\left\{\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} - \tfrac{1}{2}\ln n\right\}.$$

분자 $k+r$는 $k, k+1, \ldots, kn$을 차례로 지나고, 분모에는 k가 $k(n-1)+1$개 있으므로

$$\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} = \ln\frac{(kn)!}{(k-1)!} - \big(k(n-1)+1\big)\ln k = \ln\frac{(kn)!}{k!} - k(n-1)\ln k$$

이다. $(k-1)!\,k = k!$이기 때문이다. $kT_n^{(k)} \approx kI_n = kn\ln n - kn + k$로 놓고 정리하면

$$\begin{aligned}\ln(kn)! &\approx \ln k! + k(n-1)\ln k + \tfrac{1}{2}\ln n + kn\ln n + k(1-n)\\ &= \ln k! + \left(kn+\tfrac{1}{2}\right)\ln n + k(1-n)(1-\ln k),\end{aligned}$$

즉

$$(kn)! \approx k!\, n^{kn+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^{k(1-n)} =: A$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

어느 쪽이 더 가까운가?

정수 $a < b$에 대해 오차 $\displaystyle\int_a^b \ln t\,\mathrm{d}t -$ (간격 1인 사다리꼴 합, 구간$[a,b]$)를 $E(a,b)$로 쓰자. 앞의 오목성 논증에 의해 $E(a,b) > 0$이고, 오차는 이웃한 구간에 대해 더해진다. 즉 $E(1,b) = E(1,a) + E(a,b)$이다.

A의 유도는 $T_n^{(k)}$을 I_n으로 바꾼 것을 제외하면 정확했으므로

$$\ln A - \ln(kn)! = k\left(I_n - T_n^{(k)}\right).$$

마찬가지로, 간격 1인 경우의 계산에서 n 대신 kn을 넣으면 $\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn)$이다.

> **생각해 보기** 폭이 $1/k$인 격자에서의 오차를 폭이 1인 격자에서의 오차와 어떻게 비교할 수 있을까?

$x = t/k$로 치환한다. 세로좌표 $x_r = (k+r)/k$는 $t = k, k+1, \ldots, kn$이 되고 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/k$이므로

$$k\left(I_n - T_n^{(k)}\right) = \int_k^{kn} \ln\frac{t}{k}\,\mathrm{d}t \;-\; \text{(간격 1인 사다리꼴 합: 함수 } \ln\tfrac{t}{k}\text{, 구간}[k,kn]).$$

$\ln\frac{t}{k} = \ln t - \ln k$이고 사다리꼴 공식은 상수 $\ln k$에 대해 정확하므로 상수는 상쇄되고, 이것은 바로 $E(k,kn)$이다. 따라서

$$\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn) = E(1,k) + E(k,kn) = E(1,k) + \left(\ln A - \ln(kn)!\right).$$

A와 $\mathrm{g}(kn)$은 모두 $(kn)!$보다 크고, $k \geq 2$이면 $E(1,k) > 0$이므로

$$(kn)! < A < \mathrm{g}(kn) \qquad (k \geq 2).$$

그러므로 새로운 근사 A는 차로 재든 비로 재든 $\mathrm{g}(kn)$보다 $(kn)!$에 더 가깝다. $k = 1$이면 $A = 1!\, n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n)$이므로 두 값은 같다. 말로 하면, A는 처음 k개의 인수에 대해서는 **정확한** 값 $k!$을 쓰고 나머지만 근사하므로, ln이 가장 많이 휘는 곡선의 시작 부분에서 생기는 오차 $E(1,k)$를 피한다.

검산

- 최종 공식에 $k = 1$을 넣으면 당연히 $\mathrm{g}(n)$이 다시 나온다.
- $n = 5$로 두면 $5! = 120$이고 $\mathrm{g}(5) = 5^{5.5}\mathrm{e}^{-4} \approx 128.0$이므로 실제로 $n! < \mathrm{g}(n)$이다.
- $k = 3, n = 5$로 두면 $15! \approx 1.3077 \times 10^{12}$, $A \approx 1.3369 \times 10^{12}$, $\mathrm{g}(15) \approx 1.4102 \times 10^{12}$이므로 $(kn)! < A < \mathrm{g}(kn)$이 확인된다.
- 비 $\mathrm{g}(kn)/A = \exp E(1,k)$는 n이 아니라 k에만 의존한다. $k = 3$이면 이 값은 $\mathrm{g}(3)/3! \approx 1.0548$이며 위의 수치와 일치한다.

흔한 실수

- 폭이 $1/k$인 합에서 k의 개수를 잘못 세는 것. 세로좌표는 $k(n-1)+1$개이며, 추가로 생기는 $\ln k$가 $(k-1)!$을 $k!$로 바꾸어 준다.
- 현이 곡선 위에 있는 그림을 근거로 "$n! < \mathrm{g}(n)$"을 주장하는 것. 오목함수에서는 현이 아래에 있으므로 사다리꼴 공식이 과소평가한다.
- $\ln A$의 오차가 촘촘한 격자에서의 오차 자체가 아니라 그 오차의 k배라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

여기서 $\mathrm{g}(n)$은 스털링 공식(Stirling's formula) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$의 거친 형태이다. 오차 $E(1,n)$은 n에 대해 증가하고 위로 유계이므로(각 띠의 오차는 많아야 상수에 $1/m^2$을 곱한 값이다) 수렴(converge)하며, 이것이 $n!/\mathrm{g}(n)$이 상수 $\sqrt{2\pi}/\mathrm{e} \approx 0.922$로 수렴하는 이유이다. 오일러-매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)은 이를 엄밀하게 하고 완전한 점근급수(asymptotic series)를 제공한다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)는 이 내용의 바탕이 되는 리만 적분(Riemann integral)과 수치 적분 공식의 오차 추정을 다룬다.

풀이

STEP II 1987, 문제 8

순수수학 • 3차원 벡터 자취

STEP II 1987, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s2-q8

핵심 아이디어

각 방정식을 위치벡터(position vector)가 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$인 점 A, B로부터의 거리로 나타내면 그 정체가 드러난다. 동치(equivalence)를 보일 때는 모든 것을 단 두 수 $P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$와 $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$만으로 표현할 수 있다. 그러면 (i)과 (ii)는 P와 Q에 대한 간단한 일차방정식 두 개가 되고, (iii)과 (iv)도 마찬가지이다.

풀이

이 풀이 전체에서 A, B, R는 위치벡터가 각각 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{r}$인 점이고, M은 AB의 중점(midpoint)으로 위치벡터는 $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$이다. $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$라고 가정하고($\mathbf{a} = \mathbf{b}$인 경우는 마지막에 다룬다), $d = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| = AB$로 둔다.

소문항 (i)

전개하면

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2 &= \left(|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{a}|^2\right) - \left(|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{b}|^2\right) \\ &= -2\Big[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}\left(|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\right)\Big].\end{aligned}$$

따라서 (i)은 $|\mathbf{r}-\mathbf{a}| = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|$일 때, 즉 $RA = RB$일 때 정확히 성립한다. 자취(locus)는 **AB를 수직이등분하는 평면**, 곧 M을 지나고 법선벡터(normal)가 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$인 평면이다. ((i)이 $\mathbf{n} = \mathbf{a}-\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$에 대해 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} =$ 상수 꼴이므로 평면임을 바로 알 수 있고, $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$이므로 $\mathbf{r} = \mathbf{m}$은 이 식을 만족한다.)

소문항 (ii)

방정식 (ii)는 $\overrightarrow{RA}$와 $\overrightarrow{RB}$가 수직이거나, R가 A 또는 B라는 뜻이다. 자취를 알아내기 위해 완전제곱식(completing the square)을 만든다.

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{m}|^2 &= |\mathbf{r}|^2 - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

따라서 (ii)는 $|\mathbf{r}-\mathbf{m}| = \frac{1}{2}d$와 동치이다. 자취는 **$AB$를 지름으로 하는 구(sphere)**, 곧 중심이 M이고 반지름이 $\frac{1}{2}AB$인 구이다. 이것은 "반원에 대한 원주각은 직각이다"의 3차원 판이다.

소문항 (iii)과 (iv)

방정식 (iii)은 $RA = d/\sqrt{2}$라는 뜻이다. 그 자취는 **중심이 A이고 반지름이 $AB/\sqrt{2}$인 구**이다. 마찬가지로 (iv)의 자취는 **중심이 B이고 반지름이 $AB/\sqrt{2}$인 구**이다.

동치성

$P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$, $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$라 하자. 소문항 (i)에서 다음을 보였다.

$$\text{(i)} \iff P = Q.$$

(ii)에 대해서는 $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (\mathbf{a}-\mathbf{r}) - (\mathbf{b}-\mathbf{r})$로 쓰고 제곱하면

$$d^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{b}-\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) = P + Q - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}).$$

따라서

$$\text{(ii)} \iff P + Q = d^2.$$

방정식 (iii)과 (iv)는 $P = \frac{1}{2}d^2$, $Q = \frac{1}{2}d^2$라는 뜻이다. 이제

$$\left(P = Q \text{ 그리고} P + Q = d^2\right) \iff P = Q = \tfrac{1}{2}d^2.$$

$Q = P$를 대입하면 $2P = d^2$가 되므로 정방향이 성립한다. 역방향은, $P = Q = \frac{1}{2}d^2$이면 당연히 $P = Q$이고 $P + Q = d^2$이다. 위의 모든 단계가 "필요충분조건"이므로, (i)과 (ii)를 함께 만족하는 것은 (iii)과 (iv)를 함께 만족하는 것과 동치이다. 이로써 증명이 끝난다.

> **생각해 보기** 평면과 구가 만나는 집합이 어떻게 두 구가 만나는 집합과 같을 수 있을까?

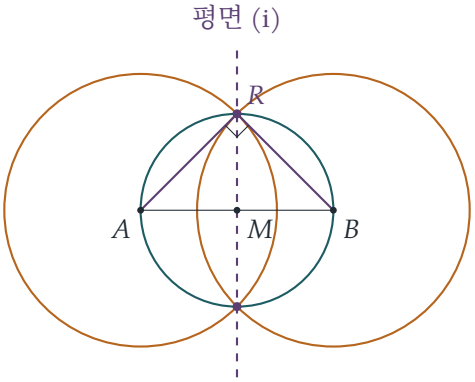
두 쌍 모두 같은 원을 나타낸다. 평면 (i)은 구 (ii)의 중심 M을 지나므로, 그 구를 대원(great circle)으로 자른다. 이 원은 중심이 M, 반지름이 $\frac{1}{2}AB$이고 AB의 수직이등분면 위에 놓인

다. 구 (iii)과 (iv)는 반지름이 $AB/\sqrt{2}$로 같고, 두 반지름의 합이 AB보다 크므로 실제로 만난다. 대칭성에 의해 두 구는 수직이등분면 위에서 중심이 M인 원으로 만난다. 삼각형 AMR에서 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 그 반지름은 $\sqrt{\frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{1}{2}AB$이므로, 같은 원이다.

기하학적 의미

점 R가 이 원 위에 있을 필요충분조건은 삼각형 ARB가 R에서 직각인 **직각이등변삼각형**(*right isosceles triangle*)이라는 것이다. (i)과 (ii)의 쌍은 이를 성질로 묘사한다. 즉 $RA = RB$(이등변)이고 $\angle ARB = 90°$(직각)이다. (iii)과 (iv)의 쌍은 이를 변의 길이로 묘사한다. 빗변(hypotenuse)이 AB인 직각이등변삼각형에서 두 빗변이 아닌 변의 길이는 모두 $AB/\sqrt{2}$이다. 위의 대수적 계산은 피타고라스 정리와 그 역(converse)을 벡터로 나타낸 것이다. 항등식 $d^2 = P + Q - 2(\mathbf{a} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{r})$은 삼각형 ARB에서의 코사인 법칙(cosine rule)이다.

아래 그림은 A와 B를 포함하는 임의의 평면에 의한 단면(cross-section)을 보여 준다. 이등분면은 점선으로, 구 (ii)는 청록색 원으로, 구 (iii)과 (iv)는 호박색 원으로 나타난다. 네 도형은 모두 해들의 원이 지면을 관통하는 두 점에서 만난다.



퇴화된 경우

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$이면 (i)은 $0 = 0$이 되어 모든 $\mathbf{r}$에 대해 성립하고, (ii), (iii), (iv)는 각각 $\mathbf{r} = \mathbf{a}$라는 뜻이 된다. 동치성은 여전히 성립하지만, 모든 자취가 한 점 A로 줄어든다((i)의 경우에는 공간 전체가 된다).

검산

$\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 0)$으로 두자. 그러면 (i)은 평면 $x = 0$이고, (ii)는 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$이다. 방정식 (iii)과 (iv)는 $(x \mp 1)^2 + y^2 + z^2 = 2$이고, 두 식을 빼면 다시 $x = 0$을 얻는

다. 네 도형은 모두 단위원 $y^2+z^2=1$, $x=0$에서 만난다. 예를 들어 $R=(0,1,0)$이면 $RA=RB=\sqrt{2}$이고 $\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB}=-1+1=0$이다. 또한 위의 모든 항등식을 **a**, **b**, **r**의 무작위 선택 5000가지에 대해 유리수 연산으로 정확하게 확인하였다. 예측한 원 위의 무작위 점들이 네 방정식을 모두 만족함도 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)를 "원"이라고 설명하는 것. 3차원에서는 구이며, (i)의 자취도 직선이 아니라 평면이다.
- 한 방향만 증명하는 것. 문제는 동치를 묻고 있으므로, 각 단계가 거꾸로도 성립하는지 확인하거나 양방향을 모두 증명해야 한다.
- 두 쌍이 "둘 다 원을 준다"고만 말하고, 그것이 **같은** 원인지, 즉 같은 평면, 같은 중심, 같은 반지름인지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

이 자취들은 각각 **r**에 대한 이차함수의 등위집합(level set)이며, 두 구의 방정식을 빼서 평면을 얻는 기법은 두 구의 **근평면**(*radical plane*)이라는 개념이다. 더 일반적으로, 같은 기하학적 대상을 서로 다른 연립방정식으로 묘사하는 것은 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 여기서 공간 속의 원은 두 방정식으로 잘라 낼 수 있고, 이 일을 해내는 방정식 쌍은 매우 많다. 벡터 대수, 특히 내적(dot product)과 길이, 각 사이의 관계를 탄탄히 다지려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP II 1987, 문제 9

순수수학 • 직교행렬

STEP II 1987, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s2-q9

핵심 아이디어

$\mathbf{B}$를 전치(transpose)하면 조건 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{I}$의 양쪽 바깥 끝에 역행렬(inverse)이 놓이게 된다. 그 역행렬들은 가역(invertible)이므로, 정보를 잃지 않고 왼쪽에 $\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$를, 오른쪽에 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$를 곱할 수 있다. 그러면 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$에 대한 다항식 항등식(polynomial identity)이 남는데, 이것은 거의 곧바로 간단해진다. 주의할 점은 "필요충분조건(if and only if)"을 보여야 하므로 모든 단계가 거꾸로도 성립해야 한다는 것이다.

풀이

사용하는 표준적인 결과는 다음과 같다.

- $(\mathbf{XY})^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$이고 전치는 선형(linear)이므로 $(\mathbf{I} \pm \mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} \pm \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$이다($\mathbf{I}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$이므로).
- $\mathbf{X}$가 비특이(non-singular)이면 $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$도 비특이이고, $(\mathbf{X}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}$이다.

1단계: $\mathbf{B}$의 전치. $\mathbf{I} - \mathbf{A}$가 비특이이므로 그 전치 $\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$도 비특이이다. 곱의 순서를 뒤집으면

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \left((\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}).$$

따라서

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\,(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A})\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

2단계: 되돌릴 수 있게 역행렬 없애기. $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$, $\mathbf{M} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A})$로 두면 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1}$이다. 다음이 성립함을 보이자.

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}.$$

($\Rightarrow$) 왼쪽에 $\mathbf{P}$를, 오른쪽에 $\mathbf{Q}$를 곱하면 $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$이다.
($\Leftarrow$) 왼쪽에 $\mathbf{P}^{-1}$을, 오른쪽에 $\mathbf{Q}^{-1}$을 곱하면 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}$이다.

? 생각해 보기 왜 그냥 "양변에 곱하고" 끝낼 수는 없을까?

등식에 행렬을 곱하면 언제나 참인 등식이 나오지만, 일반적으로 그 과정을 되돌릴 수는 없다. $\mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{Z}$에서 $\mathbf{X}$가 가역이 아니면 $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}$라고 결론지을 수 없다. 여기서 역방향이 성립하는 것은 오로지 $\mathbf{P}$와 $\mathbf{Q}$가 역행렬을 갖기 때문이며, 바로 이 지점에서 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$가 비특이라는(따라서 $\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$도 비특이라는) 가정이 쓰인다. 또한 행렬의 곱셈은 교환법칙(commutative law)이 성립하지 않으므로 $\mathbf{P}$는 왼쪽에, $\mathbf{Q}$는 오른쪽에 두어야 한다는 점에도 주의하자.

3단계: 전개하기. 인수의 순서를 주의 깊게 지키면서 $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$의 양변을 전개하면

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A},$$
$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}.$$

$\mathbf{I}$항과 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$항이 양변에 모두 나타나므로, 빼면

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad 2(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}.$$

이 각각은 모두 되돌릴 수 있다. 양변에 같은 행렬을 더하거나 빼는 것, 그리고 0이 아닌 스칼라(scalar) 2 또는 $\frac{1}{2}$를 곱하는 것이기 때문이다.

결론. 1–3단계를 이어 붙이면, 모든 고리가 동치이므로

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{I} \iff (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \iff \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O},$$

이고, 이것이 증명해야 할 내용이다. 말로 하면, $\mathbf{B}$가 직교(orthogonal)행렬일 필요충분조건은 $\mathbf{A}$가 반대칭(skew-symmetric)행렬인 것이다.

검산

▶ 반대칭행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$를 생각하자. 그러면 $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1 + t^2 \neq 0$이고

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix},$$

이는 회전행렬(rotation matrix)이므로($t = \tan\frac{\theta}{2}$로 두면 된다) 예상대로 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{I}$이다.

- 1×1인 경우: $a \neq 1$인 $\mathbf{A} = (a)$에 대하여 $\mathbf{B} = \left(\frac{1+a}{1-a}\right)$이고, $\mathbf{B}^2 = 1$이면 $1 + a = \pm(1 - a)$이어야 하므로 $a = 0$이다(다른 부호는 불가능하다). 이는 $2a = 0$과 일치한다.
- 크기가 1부터 5까지인 무작위 행렬 약 2000개를 정확한 유리수 연산으로 시험해 보았다. 반대칭인 $\mathbf{A}$는 모두 정확히 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{I}$를 주었고, 나머지는 하나도 그렇지 않았다.

흔한 실수

- 순서를 뒤집지 않고 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$로 쓰는 것. ($\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$와 $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$이 교환 가능하므로 이 식은 우연히 참이지만, 그 사실은 따로 정당화가 필요하다.)
- $(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A})$를 전개할 때 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 대신 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$로 쓰는 것. 이 문제에서는 어느 쪽이든 소거되지만, 양변을 일관되게 전개했을 때에만 그렇다.
- 한 방향만 증명하는 것. 문제는 "필요충분조건"을 묻고 있으므로, 각 단계를 왜 되돌릴 수 있는지 설명해야 한다.

STEP 너머

사상 $\mathbf{A} \mapsto (\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$을 **케일리 변환**(*Cayley transform*)이라고 한다. 이 변환은 벡터공간(vector space)을 이루는 반대칭행렬들을 군(group)을 이루는 직교행렬들로 바꾸어, 회전의 유리 매개화(rational parametrisation)를 제공한다. ($\mathbf{A}$가 실수 반대칭행렬이면 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$는 자동으로 가역이며, 이렇게 얻어지는 직교행렬은 정확히 고윳값(eigenvalue) -1을 갖지 않는 것들임을 보일 수 있다.) 이것은 리 군(Lie group)이 그 리 대수(Lie algebra)와 어떻게 연결되는지를 처음으로 엿보게 해 준다. 직교행렬과 반대칭행렬에 대해 더 알고 싶다면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP II 1987, 문제 10

순수수학 • 군의 공리

> **STEP II 1987, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q10

핵심 아이디어

모든 일은 아래첨자(subscript)에서 일어나므로, 각 연산을 첨자 $1, 2, \ldots, N$에 대한 평범한 산술로 바꾸어 생각한다. 첫 번째 연산은 "최댓값을 취한다"이고, 두 번째 연산은 "두 수의 거리를 구한 뒤 1을 더한다"이다. 그런 다음 네 가지 공리(axiom), 즉 닫힘성(closure), 결합법칙(associativity), 항등원(identity), 역원(inverse)을 하나씩 확인한다. 성립하지 않는 공리는 구체적인 반례(counterexample) 하나만 있으면 충분하고, 성립하는 공리는 일반적인 논증이 필요하다.

풀이

이 풀이 전체에서 $a_j \circ a_k$의 첨자를 $j \circ k$로 쓰고, $*$에 대해서도 마찬가지로 쓴다. 두 원소는 첨자가 같을 때, 그리고 그때에만 같다.

연산 $\circ$

여기서 $a_j \circ a_k = a_{\max(j,k)}$이다.

닫힘성이 성립한다. $1 \le j, k \le N$이면 $\max(j,k)$는 j와 k 중 하나이므로 $\{1, \ldots, N\}$에 속하고, 따라서 $a_j \circ a_k \in S$이다.

결합법칙이 성립한다. 임의의 j, k, l에 대하여

$$(a_j \circ a_k) \circ a_l = a_{\max(\max(j,k),l)} = a_{\max(j,k,l)} = a_{\max(j,\max(k,l))} = a_j \circ (a_k \circ a_l),$$

이다. 두 가지 괄호 묶음 모두 세 첨자 중 가장 큰 것을 주기 때문이다.

항등원이 존재한다: 바로 a_1이다. 모든 첨자는 1 이상이므로 $\max(1,k) = \max(k,1) = k$이

고, 따라서 모든 k에 대하여 $a_1 \circ a_k = a_k \circ a_1 = a_k$이다.

역원은 존재하지 않는다. a_j의 역원은 $a_j \circ a_k = a_1$, 즉 $\max(j,k) = 1$을 만족하는 어떤 a_k일 것이다. 그런데 $\max(j,k) \geq j$이므로 $j \geq 2$이면 이는 불가능하다. 예를 들어 모든 k에 대하여 $a_2 \circ a_k$는 a_2이거나 그보다 뒤의 원소이며, 결코 a_1이 되지 않는다. 역원을 갖는 원소는 a_1뿐이다(그 역원은 자기 자신이다).

따라서 $\circ$에 대한 S는 닫힘성, 결합법칙, 항등원은 만족하지만 역원은 만족하지 않으므로 군(group)이 아니다.

> **생각해 보기** 다른 어떤 원소가 항등원이 될 수 있어서, 역원에 대한 논증을 다시 해야 하지는 않을까?

그렇지 않다. 항등원은 유일하다. e와 e'이 모두 항등원이라면 $e = e \circ e' = e'$이다. 따라서 "$a_j \circ a_k$가 항등원과 같다"에서 항등원이 될 수 있는 후보는 a_1뿐이며, 위의 논증으로 충분하다.

연산 $*$

여기서 $a_j * a_k = a_{|j-k|+1}$이다. $N = 4$일 때 첨자의 연산표는 다음과 같다.

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	2	3
3	3	2	1	2
4	4	3	2	1

이 표에서 보이는 규칙은 모든 N에 대하여 성립한다.

닫힘성이 성립한다. $1 \leq j,k \leq N$이면 $0 \leq |j-k| \leq N-1$이므로 $1 \leq |j-k|+1 \leq N$이고, 따라서 $a_j * a_k \in S$이다.

항등원이 존재한다: 바로 a_1이다. $k \geq 1$이므로 $|1-k| = k-1$이고, 따라서 $a_1 * a_k = a_k$이다. 마찬가지로 $a_k * a_1 = a_k$이다($|j-k| = |k-j|$이므로 이 연산은 교환법칙(commutative law)을 만족한다).

역원이 존재한다. $a_j * a_j = a_{0+1} = a_1$은 항등원이므로, 모든 원소는 자기 자신이 역원이다. (표에서 대각선에 1이 늘어선 것이 바로 이것이다.)

결합법칙은 성립하지 않는다. a_2, a_2, a_3을 택하자. 이를 위해서는 $N \geq 3$이어야 한다.

$$(a_2 * a_2) * a_3 = a_1 * a_3 = a_3,$$
$$a_2 * (a_2 * a_3) = a_2 * a_{|2-3|+1} = a_2 * a_2 = a_1.$$

두 값이 다르므로 $*$는 결합법칙을 만족하지 않는다.

따라서 $*$에 대한 S는 닫힘성, 항등원, 역원은 만족하지만 결합법칙은 만족하지 않으므로, 이 경우에도 군이 아니다.

? 생각해 보기 $N > 2$라는 조건은 어디에서 쓰였는가?

a_3을 사용하는 결합법칙의 반례에서만 쓰였다. $N = 2$이면 연산표는 위수 2인 군의 연산표가 되고(a_1이 항등원이고 $a_2 * a_2 = a_1$), $*$는 결합법칙을 만족한다. 한편 $\circ$에 대한 역원 논증에는 a_2만 필요하므로, $N = 2$일 때에도 $\circ$는 군이 되지 못한다.

검산

작은 경우를 모두 직접 확인하였다. 2부터 9까지의 모든 N에 대하여 결합법칙을 확인하기 위해 모든 세 쌍을 나열하고, 항등원과 역원을 직접 찾아보았다. $\circ$의 경우: 닫혀 있고, 결합법칙을 만족하며, 항등원은 a_1이고, 역원을 갖는 원소는 a_1뿐이다. $*$의 경우: 닫혀 있고, 항등원은 a_1이며, 모든 원소가 자기 자신의 역원이고, 결합법칙은 모든 $N \geq 3$에 대하여 ((a_2, a_2, a_3)에서를 포함하여) 성립하지 않지만 $N = 2$일 때는 성립한다. $N = 3$인 경우는 3×3 연산표를 이용하여 손으로 1분이면 확인할 수 있다.

흔한 실수

- "최댓값"은 곱셈과 다르다는 이유로 $\circ$에 항등원이 없다고 주장하는 것. 가장 작은 원소를 확인해 보라. a_1이 항등원이 된다.
- $*$의 결합법칙을 일반적으로 증명하려 하거나, a_1이 포함된 세 쌍만 확인하는 것(a_1은 항등원이므로 이런 세 쌍은 언제나 결합법칙을 만족한다). 필요한 것은 구체적인 반례 하나이다.
- 닫힘성을 잊는 것. 당연하게 여기기 쉽지만, 여기서는 $|j - k| \leq N - 1$이라는 부등식이 필요하다.

STEP 너머

$\circ$에 대한 S처럼 결합법칙을 만족하는 연산과 항등원을 갖춘 집합을 **모노이드**(monoid)라고 한다. 전순서 집합(totally ordered set) 위의 "최댓값" 연산은 대표적인 예이며, 이는 **반격자**(semilattice)이기도 하다. $*$에 대한 S처럼 닫힘성, 항등원, 역원은 만족하지만 결합법칙은 만족하지 않는 집합은, 결합법칙이 다른 세 공리로부터 이끌어 낼 수 없는, 진정으로 독립적인 공리임을 보여 준다. 군의 공리들이 어떻게 함께 작동하는지에 대해서는 Allenby,

Rings, Fields and Groups(환, 체, 군)를 참고하라.

풀이

STEP II 1987, 문제 11

역학 • 마찰과 모멘트

> **STEP II 1987, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q11

핵심 아이디어

회전축에서의 힘은 알지 못하며 구할 필요도 없으므로, 그 힘의 모멘트가 0이 되는 회전축 O에 대하여 모멘트(moment)를 잡는다. 막대는 3차원 공간에 놓여 있지만, 고리의 평면은 두 가지 자연스러운 방향을 준다. 하나는 평면에 수직인 방향(수직항력이 작용하는 방향)이고, 다른 하나는 평면 안의 방향(마찰력이 작용하는 방향)이다. 무게도 같은 방식으로 나누면, 한 모멘트 방정식에서 수직항력을, 다른 모멘트 방정식에서 마찰력을 얻는다. 둘의 비가 μ이다.

풀이

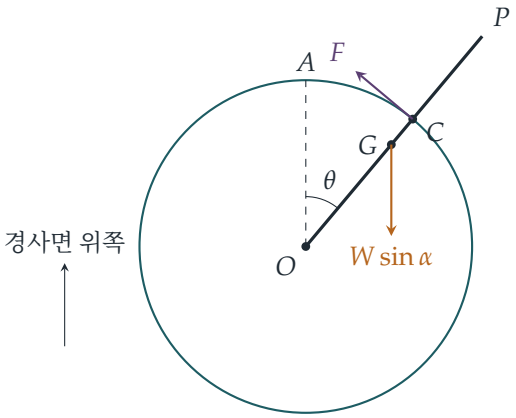
모형. 막대는 무게가 W인 균일한 막대(uniform rod) OP이고, 질량중심(centre of mass) G는 막대의 중점에 있으므로 $OG = \frac{1}{2}b$이다. 막대는 고리의 중심 O에 매끄러운 회전축(smooth pivot)으로 고정되어 있다. 막대는 원주 위의 한 점 C에서 고리 위에 걸쳐 놓여 있으므로 $OC = a$이다. O와 C가 모두 고리의 평면 위에 있으므로 막대도 그 평면 위에 놓인다. 고리의 가장 높은 점을 A라 하면, OA는 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 곧장 위쪽을 향하고, $\angle AOC = \theta$라 하자.

힘. 막대에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- G에 작용하는 무게 W;
- 매끄러운 회전축 O에서의 힘. 이 힘은 알지 못하지만 O에 대한 모멘트는 0이다;
- C에서의 접촉력. 막대와 고리의 철사는 C에서 교차한다. 막대는 반지름을 따라 놓이고 철사는 접선을 따라 놓이며, 둘 다 평면 위에 있으므로 두 방향에 공통으로 수직인 방향

은 평면에 수직이다. 따라서 수직항력(normal reaction) R는 고리의 평면에 수직이다. 마찰력(friction) F는 평면 안에 있다. 막대는 O를 중심으로 회전하는 방식으로만 움직일 수 있고, 이때 C는 고리의 접선 방향으로 움직인다. 따라서 마찰력은 그 접선을 따라, 즉 막대에 수직으로 작용한다.

무게를 평면에 수직인 성분 $W\cos\alpha$(평면 안쪽으로 향함)와 평면 안에서 최대 경사선을 따라 아래로 향하는 성분 $W\sin\alpha$로 분해한다. 그림은 평면을 수직으로 내려다본 모습이며, A가 위쪽에 있다. R는 C에서 지면 밖으로 향한다.



O에 대한 모멘트. 회전축이 매끄러우므로, 나머지 힘들의 O에 대한 모멘트의 합은 O를 지나는 **모든** 축에 대하여 0이다. 두 축이 유용한 방정식을 준다.

평면 안에서 O를 지나고 막대에 수직인 축. 이 축에 대해서는 평면에 수직인 힘들만 모멘트를 가진다. 이 힘들은 거리 $\frac{1}{2}b$에 있는 $W\cos\alpha$와 거리 a에 있는 R이다. 평면 안의 힘 F와 $W\sin\alpha$는 이 축과 만나거나 이 축에 평행하므로 이 축에 대한 모멘트가 없다. 따라서

$$R\,a = W\cos\alpha\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{따라서} \qquad R = \frac{Wb\cos\alpha}{2a}.$$

O를 지나고 평면에 수직인 축. 이번에는 평면 안의 힘들만 고려하면 된다. 막대는 경사면 위쪽 방향과 각 θ를 이루므로, $W\sin\alpha$의 막대에 수직인 성분은 $W\sin\alpha\sin\theta$이고 거리 $\frac{1}{2}b$에서 작용한다. 마찰력은 이미 막대에 수직이며 거리 a에서 작용한다. 따라서

$$F\,a = W\sin\alpha\sin\theta\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{따라서} \qquad F = \frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a}.$$

무게의 평면 안 성분은 막대를 A에서 멀어지도록, 즉 고리의 아래쪽으로 돌리려 하고, 마찰력은 이에 저항한다.

? **생각해 보기** 마찰력이 막대 방향의 성분도 가질 수 있지 않을까?

막대 방향의 힘은 O를 지나므로 O에 대한 모멘트가 없다. 이런 힘은 회전을 돕지도 막지도 못하며, 막대 방향의 힘은 회전축이 얼마든지 공급할 수 있다. 가능한 운동은 O를 중심으로 한 회전뿐이므로, 한계 평형에서 중요한 마찰력은 접선 방향 성분, 즉 F이다. 마찰력은 전부 접선 방향으로 작용한다고 본다.

한계 평형. 한계 평형(limiting equilibrium)에서는 $F = \mu R$이다.

$$\frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a} = \mu\frac{Wb\cos\alpha}{2a} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mu = \tan\alpha\,\sin\theta}$$

(여기서 $0 \le \theta \le \pi$로 잡는다). 막대는 $\tan\alpha\sin\theta \le \mu$일 때마다 각 θ에서 평형 상태로 정지해 있다. a, b, W가 모두 약분되었다는 점에 주목하자.

검산

- $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$이면 막대는 최대 경사선을 따라 놓인다. 이때 무게의 평면 안 성분은 막대 방향으로 곧장 당기므로 마찰력이 필요 없다. 즉 $\mu = 0$이다. $\alpha = 0$일 때도 마찬가지인데, 고리가 수평이면 무게의 평면 안 성분이 없기 때문이다.
- 마찰력이 가장 많이 필요한 경우는 막대가 수평인 $\theta = \frac{1}{2}\pi$일 때이다. 이때 $\mu = \tan\alpha$이며, 이는 경사각이 α인 경사면 위의 물체와 일치한다.
- 수치 검산에서는 α, θ, a, b, W를 무작위로 2000번 골라 힘들을 3차원 벡터로 구성하였다. O에 대한 벡터 모멘트 방정식을 R와 F에 대하여 풀었더니, F/R가 $\tan\alpha\sin\theta$와 4×10^{-15} 이내로 일치하였다. 예를 들어 $\alpha = 30°, \theta = 60°$이면 $\mu = \frac{1}{2}$이다.

흔한 실수

- C에서의 수직항력이 반지름 방향이라고 생각하는 것. 이는 연직 평면 위의 고리 **안쪽**에 막대가 놓여 있을 때의 경우이다. 여기서는 막대가 철사 위에 걸쳐 놓여 있으므로, 수직항력은 고리의 평면에 수직이다.
- 모멘트를 잡는 대신 힘을 분해하는 것. 그러면 회전축에서의 힘의 미지 성분 세 개가 들어오는데, 문제에서는 이를 원하지 않는다.

STEP 너머

여기서는 O를 지나는 서로 수직인 두 축에 대하여 모멘트를 잡았다. 이는 하나의 벡터 방정식 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$을 간단히 쓴 것으로, 이 방정식은 O에 대한 전체 돌림힘(torque)이 0임을 뜻한다. 벡터로서의 돌림힘과 3차원 강체(rigid body)의 평형 조건은 대학 1학년 역학

에서 표준적으로 다루는 내용이다. 이는 고정점을 중심으로 한 강체의 회전으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 바로 이런 방식으로 돌림힘과 각운동량(angular momentum)을 벡터로 전개한다.

풀이

STEP II 1987, 문제 12

역학 • 평형과 에너지

> **STEP II 1987, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q12

핵심 아이디어

"모든 위치에서 평형(equilibrium)"이라는 말은 위치 에너지(potential energy)에 관한 진술이다. 구슬(bead)이 철사 위 어디에서든 정지해 있을 수 있다면, 구슬이 철사를 따라 미끄러지는 동안 계의 위치 에너지는 변할 수 없으므로 철사 위에서 일정해야 한다. 이 에너지를 구슬의 높이와 고리(ring)로부터의 거리로 나타내면 곧바로 곡선을 얻는다. 같은 사실 덕분에 두 번째 부분도 깔끔해진다. 위치 에너지가 일정하므로 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 구슬과 입자의 운동 에너지(kinetic energy)의 합이 일정하고, 남은 일은 두 속력을 잇는 기하학적 관계를 찾는 것뿐이다.

풀이

구슬과 매달린 질량을 입자로, 실을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 고리와 철사를 매끄러운(smooth) 것으로 모형화한다. 고리를 원점 O에 두고, y는 연직 위쪽으로 잰다. 구슬의 위치를 극좌표(polar coordinates) (r,θ)로 나타내되 θ는 수평선에서 시계 반대 방향으로 재므로, 구슬은 O에 대하여 높이 $y = r\sin\theta$에 있다. 실의 길이를 L이라 하자.

곡선의 방정식

O에서 구슬까지의 실의 길이는 r이므로, 매달린 입자는 고리 아래로 $L - r$만큼 떨어져 있다. O를 기준 높이로 잡으면 계의 위치 에너지는

$$V = mgr\sin\theta - mg(L-r) = mg\,(r + r\sin\theta) - mgL.$$

이다. 철사가 매끄러우므로 철사가 구슬에 작용하는 반작용은 철사에 수직이고, 계를 철사를 따라 움직이게 할 수 있는 힘은 오직 V에서 비롯된다. 계가 어떤 위치에서 평형을 이루는

것은 그 위치에서 V가 철사를 따른 움직임에 대하여 정상(stationary)일 때와 정확히 같다. **모든** 위치에서 평형이라는 것은 철사 전체에서 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}s = 0$이라는 뜻이고(여기서 s는 호의 길이(arc length)이다), 따라서 V는 철사 위에서 일정하다:

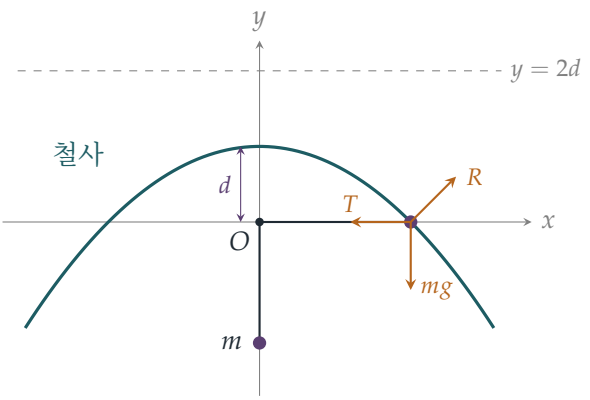
$$r(1+\sin\theta) = c \quad \text{적당한 상수} c.$$

힘을 분해해서도 이를 알 수 있다. 평형 상태에서 매달린 입자 때문에 실 전체의 장력(tension)은 mg이다(고리가 매끄럽기 때문이다). 구슬에서, O를 향하는 장력 mg의 접선 성분은 $-mg\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$이고, 무게의 접선 성분은 $-mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$이다. 이 둘이 상쇄되어야 하므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r+y) = 0$이고, 이는 같은 조건이다.

c를 구하자. $1+\sin\theta \le 2$이므로 $r = c/(1+\sin\theta) \ge c/2$이고, 등호는 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때(고리 바로 위에 있는 철사의 점) 성립한다. 따라서 고리에서 철사까지의 최단 거리는 $c/2$이므로 $c = 2d$이고, 곡선은

$$\boxed{r(1+\sin\theta) = 2d} \qquad \text{즉} \qquad r = \frac{2d}{1+\sin\theta}.$$

이다. (θ를 연직 아래 방향에서 재면 같은 곡선은 $r(1-\cos\theta) = 2d$로 쓰인다.) $r = 2d - y$이므로 철사 위의 모든 점은 O까지의 거리와 수평선 $y = 2d$까지의 거리가 같다. 그러므로 철사는 초점(focus)이 고리에 있고 준선(directrix)이 고리보다 $2d$ 높은 곳에 있는 포물선(parabola)이다. 직교좌표로는 $x^2 = 4d(d-y)$이고 꼭짓점(vertex)은 $(0,d)$이다.



그림에서 구슬은 고리와 같은 높이에 있다. 그곳에서 포물선의 기울기가 정확히 -1이므로 장력 $T = mg$, 무게 mg, 수직항력(normal reaction) R이 균형을 이룬다.

구슬의 속력

이제 구슬이 철사를 따라 속력 u로 움직인다. 실은 팽팽한 상태를 유지하고 길이가 고정되어 있으므로, 매달린 입자는 여전히 고리 아래로 $L-r$만큼 떨어져 있다.

? 생각해 보기 매달린 입자는 얼마나 빠르게 움직이는가?

입자의 고리 아래 깊이는 $L-r$이므로, 그 속도는 연직 방향이고 속력은 $|\dot{r}|$이다. $\dot{r}$은 구슬 속도의 반지름 방향 성분일 뿐, 전체 속력 u가 아님에 주의하라.

움직이기 시작하면 장력은 더 이상 mg가 아니지만, 계 전체에 대해 알짜 일을 하지 않는다. 실이 늘어나지 않고 고리가 매끄러우므로, 장력이 구슬에 한 일은 매달린 입자에 한 일과 상쇄된다. 철사의 반작용은 구슬의 운동에 수직이므로 일을 하지 않는다. 따라서 에너지가 보존된다:

$$\tfrac{1}{2}mu^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + V = \text{상수}.$$

그런데 첫 번째 부분에 의해 철사 위에서 $V = mg\cdot 2d - mgL$은 일정하다. 그러므로

$$u^2 + \dot{r}^2 = \text{상수}. \qquad (*)$$

다음으로 $\dot{r}$과 u를 연결한다. $r = 2d/(1+\sin\theta)$를 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{2d\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2} = -\frac{r\cos\theta}{1+\sin\theta}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{r}^2 = r^2\dot{\theta}^2\,\frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2} = r^2\dot{\theta}^2\,\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta},$$

이다. 여기서 $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$를 이용했다. 곡선의 방정식에서 $1+\sin\theta = 2d/r$이고 $1-\sin\theta = 2-2d/r = 2(r-d)/r$이므로

$$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{r-d}{d}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{r}^2 = \frac{r-d}{d}\,r^2\dot{\theta}^2.$$

극좌표에서 속력은 $u^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$를 만족하므로

$$u^2 = r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{r-d}{d}+1\right) = \frac{r}{d}\,r^2\dot{\theta}^2, \qquad \text{그러므로} \qquad \dot{r}^2 = \frac{r-d}{r}\,u^2.$$

? 생각해 보기 $r=d$일 때 $\dot{r}$은 무엇인가?

$r=d$에서 구슬은 꼭짓점 $\theta=\frac{\pi}{2}$에 있고, 여기서 r은 최솟값을 가지며 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = 0$이다. 따라서 그곳에서 $\dot{r}=0$이고(공식 $\dot{r}^2 = \frac{r-d}{r}u^2$도 그렇게 말해 준다), 매달린 입자는 순간적으로 정지해 있다. 그러므로 $(*)$의 상수는 v^2이다:

$$u^2 + \frac{r-d}{r}\,u^2 = v^2 \quad\Longrightarrow\quad u^2\,\frac{2r-d}{r} = v^2 \quad\Longrightarrow\quad u = \left(\frac{r}{2r-d}\right)^{\frac{1}{2}} v,$$

u와 v는 속력이므로 양의 제곱근을 택했다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

▶ $r=d$에서 공식은 마땅히 그래야 하듯 $u=v$를 준다.

- $r \to \infty$일 때 $u \to v/\sqrt{2}$이다. 멀리 나가면 포물선의 접선(tangent)은 거의 반지름 방향을 향하므로 $\dot{r} \approx u$이고, 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$는 구슬과 입자에 똑같이 나누어진다.
- 고리와 같은 높이에서의 평형: 점 $(2d, 0)$은 곡선 위에 있고, 그곳에서 장력 mg(수평)와 무게 mg(연직)의 합력은 45° 방향을 향하며, 이는 그 점에서 기울기가 -1인 포물선에 수직이다.
- 수치적으로, $d = 1.3$, $v = 2$로 두고 구슬과 입자로 이루어진 계의 운동 방정식을 꼭짓점에서부터 포물선을 따라 적분했다. $r = 2.8905$에서 구슬의 속력은 1.606309였고, 이는 $\sqrt{r/(2r-d)}\,v$와 약 10^{-8} 이내로 일치했다. 또한 철사 위의 무작위로 고른 1000개의 점에서 정지한 구슬에 작용하는 접선 방향 힘이 0임을 확인했다.

흔한 실수

- 매달린 입자의 운동 에너지를 빠뜨려서 모든 r에 대해 $u = v$를 얻는 실수. 위치 에너지는 일정하지만 운동 에너지는 나누어진다.
- 입자의 속력을 $|\dot{r}|$ 대신 u로 잡는 실수. 구슬 운동의 반지름 방향 성분만이 실을 고리를 통해 끌어당긴다.
- θ를 다른 직선에서 재 놓고 $r(1+\sin\theta) = 2d$를 그대로 쓰는 실수. 올바른 극방정식이라면 어떤 형태든 괜찮지만, θ를 어느 직선에서 재는지 밝혀야 한다.

STEP 너머

계는 위치 에너지가 정상인 곳에서 평형을 이룬다는 생각이 **가상일의 원리**(*principle of virtual work*)이며, 이는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 이어진다. 라그랑주 역학에서는 운동 에너지를 하나의 일반화 좌표(generalised coordinate)(여기서는 θ)로 나타내고, 장력을 전혀 구하지 않고도 그로부터 운동 방정식을 얻는다. 이 철사 위에서는 V가 일정하므로 구슬과 입자는 마치 아무 힘도 작용하지 않는 것처럼 움직이며, 우리가 얻은 관계는 운동 에너지 $\frac{1}{2}m\,r^2(2r-d)\dot{\theta}^2/d$의 보존일 뿐이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 방법과 구속 운동을 다룬다.

풀이

STEP II 1987, 문제 13

역학 • 벽과의 비스듬한 충돌

> **STEP II 1987, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q13

핵심 아이디어

매끄러운(smooth) 쿠션(cushion)은 자신에 수직인 속도 성분만 바꿀 수 있다. 그 성분은 방향이 반대가 되고 e배가 되며, 쿠션에 나란한 성분은 변하지 않는다. 이웃한 두 쿠션은 서로 다른 두 성분에 작용하므로, 각 성분은 한 번씩 방향이 바뀌고 e배가 된다. 닫힌 경로(closed path)를 찾을 때는 좌표를 써서 퍽(puck)을 쿠션에서 쿠션으로 따라가고, 유일하게 자유로운 양인 처음 기울기(slope)를 퍽이 출발점으로 되돌아오도록 정한다.

풀이

모형. 퍽은 매끄러운 쿠션이 있는 매끄러운 수평 테이블 위를 미끄러지는 입자이므로, 충돌과 충돌 사이에는 아무 힘도 받지 않고 일정한 속도로 직선 운동을 한다. 충돌할 때 쿠션이 주는 충격량(impulse)은 (쿠션이 매끄러우므로) 쿠션에 수직이고, 따라서 속도의 평행 성분은 변하지 않는다. 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따라 수직 성분은 방향이 반대가 되고 e배가 된다. $0 < e \leq 1$이라 한다.

테이블의 두 변을 따라 축을 잡아 테이블이 $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq B$가 되도록 한다.

소문항 (i): 이웃한 두 쿠션

퍽의 속도를 (u, v)라 하자. 이웃한 쿠션은 $x =$ 상수 꼴의 쿠션 하나와 $y =$ 상수 꼴의 쿠션 하나이며, 어느 순서로든 부딪칠 수 있다. x-쿠션에 부딪치면 $(u, v) \mapsto (-eu, v)$가 되고, y-쿠션에 부딪치면 $(u, v) \mapsto (u, -ev)$가 된다. 순서와 상관없이 각각 한 번씩 부딪친 뒤의 속도는

$$(-eu,\ -ev) = -e\,(u, v).$$

이다. 이것은 처음 속도의 스칼라배이므로, 요구한 대로 마지막 경로는 처음 경로와 평행하다. 이제 퍽은 반대 방향으로 움직이며, 속력은 e배로 줄어든다.

소문항 (ii): 쿠션에서 출발하는 닫힌 경로

퍽이 쿠션 $y = 0$ 위의 점 $P = (a, 0)$에 정지해 있고 $a : (L - a) = z : 1$이라 하자. 그러면

$$a = \frac{zL}{1+z}, \qquad L - a = \frac{L}{1+z}, \qquad 0 < a < L.$$

이다. x축이 오른쪽, y축이 위쪽을 향하도록 테이블을 위에서 내려다보면, 쿠션 $y = 0$에서 시계 방향으로 $x = 0$, $y = B$, $x = L$을 차례로 만난다. 비를 반대쪽 끝에서 잰다면 z를 $1/z$로 바꾸면 되고, 논증은 달라지지 않는다. 퍽을 속도 $(-u, v)$ $(u, v > 0)$로 치고, 기울기를 $k = v/u$라 쓰자. 네 구간에서의 속도는

$$(-u, v) \xrightarrow{x=0} (eu, v) \xrightarrow{y=B} (eu, -ev) \xrightarrow{x=L} (-e^2u, -ev) \xrightarrow{y=0} \cdots$$

이다.

- 구간 1, $(a, 0)$에서 $x = 0$까지: 수평 거리 a를 가는 동안 ak만큼 올라가므로, 왼쪽 쿠션의 $W_1 = (0,\ ak)$에 부딪친다.
- 구간 2, 기울기 $v/(eu) = k/e$: $B - ak$만큼 올라가므로 가로로 $e(B - ak)/k$만큼 움직인다. 위쪽 쿠션과 $W_2 = \big(e(B/k - a),\ B\big)$에서 만난다.
- 구간 3, 기울기 $-k$: 가로로 $L - x_{W_2}$만큼 움직이고 $k(L - x_{W_2})$만큼 내려가므로, 오른쪽 쿠션과 높이 $y_{W_3} = B - kL + e(B - ak)$에서 만난다.
- 구간 4, 기울기 k/e: y_{W_3}만큼 내려가면서 $e\,y_{W_3}/k$만큼 되돌아가, 다음 점에서 $y = 0$에 닿는다.

$$x_{\text{끝}} = L - \frac{e\,y_{W_3}}{k} = (1+e)L + e^2a - \frac{e(1+e)B}{k}.$$

우리는 $x_{\text{끝}} = a$를 원한다. 그러면 $e(1+e)B/k = (1+e)L - (1-e^2)a = (1+e)\big(L - (1-e)a\big)$이므로

$$k = \frac{eB}{L - (1-e)a} = \frac{B}{L} \cdot \frac{e(1+z)}{1+ez}.$$

이다. $L - (1-e)a > L - a > 0$이므로, 이 값은 모든 $z > 0$에 대하여 양수이다.

> **생각해 보기** 이제 끝났는가? 우리는 퍽이 왼쪽, 위쪽, 오른쪽, 아래쪽 순서로 쿠션을 만난다고 가정했다.

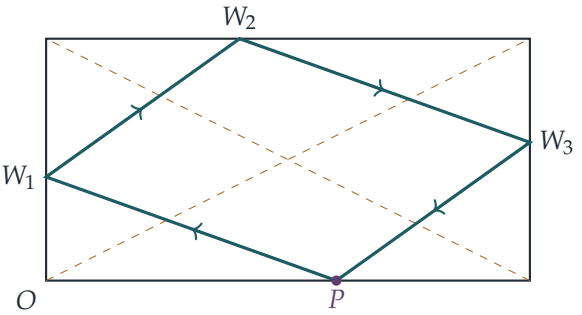
아니다. 각 충돌점이 정말로 가정한 변 위에 있는지 아직 확인해야 한다. $D = L - (1-e)a =$

$L - a + ea$라 쓰면 $k = eB/D$이다. 그러면

$$y_{W_1} = ak = \frac{eaB}{D},$$
$$x_{W_2} = e\left(\frac{D}{e} - a\right) = L - a,$$
$$y_{W_3} = B(1+e) - k(L+ea) = \frac{B\left[(1+e)(L-a+ea) - eL - e^2a\right]}{D} = \frac{B(L-a)}{D}.$$

이다. $0 < a < L$이고 $e > 0$이므로 $0 < ea < D$이고 $0 < L - a < D$이다. 따라서 $0 < y_{W_1} < B, 0 < x_{W_2} < L, 0 < y_{W_3} < B$이다. 각 충돌은 가정한 열린 변 위에서 일어나고, 어떤 모서리에도 부딪치지 않는다. 그러므로 모든 z에 대하여, 위의 기울기 k로 친 퍽은 왼쪽, 위쪽, 오른쪽을 거쳐 P로 돌아온다.

소문항 (i)에 의해 구간 1과 3이 평행하고 구간 2와 4도 평행하므로, 닫힌 경로는 테이블에 내접(inscribed)하는 평행사변형(parallelogram) $PW_1W_2W_3$이다.



점선은 대각선(diagonal)이다. 그린 경로는 $L = 2B$, $e = \frac{1}{2}$, $z = 1.5$인 경우이다.

소문항 (iii): 임의의 내부 점에서의 두 가지 샷

그러한 샷은 모두 소문항 (ii)의 경로 중 하나이다. 퍽이 내부의 점 Q에서 속도 $\mathbf{w}$로 출발하여 네 쿠션 위의 점 V_1, V_2, V_3, V_4에서 시계 방향 순서로 튕긴 뒤 Q로 돌아온다고 하자. 소문항 (i)을 두 번 적용하면, 네 번 튕긴 뒤의 속도는 $(-e)^2\mathbf{w} = e^2\mathbf{w}$이므로 처음과 같은 방향을 향한다. 따라서 마지막 구간 V_4Q와 첫 구간 QV_1은 같은 직선 위에 같은 방향으로 놓인다. 그러므로 $V_4 \to Q \to V_1$은 하나의 직선 구간이고, 퍽의 경로는 쿠션 위의 V_4에서 출발하여 나머지 세 쿠션에서 시계 방향으로 튕긴 뒤 V_4로 돌아오는 닫힌 경로이다. 소문항 (ii)의 계산은 이러한 경로의 기울기가 출발점에 의해 정해짐을 보여 준다. 그러한 경로는 각 변에 꼭짓점을 하나씩 가지므로, 모두 $0 < a < L$에 대한 소문항 (ii)의 평행사변형 Π_a이고, Q는 Π_a의 한 변 위에 있다. 역으로, Q가 어떤 Π_a의 한 변 위에 있으면, Q에서 그 변을 따라 진행 방향으로 치면 된다. 따라서 Q를 지나는 (평행사변형, 변)의 쌍의 개수를 세어야 한다.

z가 변할 때 변들이 테이블을 쓸고 지나가는 방식. z가 0에서 ∞까지 변하면 a는 0에서 L까지 변한다. 위의 식에서 y_{W_1}은 0에서 B까지 증가하고, $x_{W_2} = L - a$는 L에서 0까지 감소하며,

$y_{W_3} = B/\big(1 + ea/(L-a)\big)$는 B에서 0까지 감소한다. 따라서 Π_a는 O를 지나는 대각선에서 시작하여 ($a \to 0$일 때 꼭짓점들이 모서리 O와 (L, B)로 몰린다) 다른 대각선으로 끝난다. 이제 한 변, 예를 들어 PW_1을 보자. 이 변은 모서리 O에서 아래쪽 변을 따라 a, 왼쪽 변을 따라 y_{W_1}을 두 변으로 하는 삼각형을 잘라 낸다. 두 변의 길이가 모두 a에 대하여 순증가하므로, 이 삼각형들은 엄격하게 포개어지고 빗변들은 결코 교차하지 않는다. 삼각형은 아무것도 없는 상태에서 $(L, 0)$과 $(0, B)$를 잇는 대각선 아래쪽의 테이블 절반까지 연속적으로 커진다. 정확히 말하면, $Q = (q_1, q_2)$가 그 절반 안에 있을 때 함수

$$f(a) = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{y_{W_1}(a)}$$

는 연속이고 순감소한다. $a \to 0$일 때 ∞로 발산하고 $a \to L$일 때 $q_1/L + q_2/B < 1$로 수렴하므로, $f(a) = 1$ (즉 Q가 PW_1 위에 있음)인 a는 정확히 하나 있다. Q가 그 절반 안에 있지 않으면 모든 a에 대하여 $f(a) > 1$이므로 PW_1은 결코 Q를 지나지 않는다. 같은 논증이 각 변에 적용된다.

- PW_1은 $(L, 0)$과 $(0, B)$를 잇는 대각선 아래쪽 절반을 한 번 쓸고 지나간다.
- W_2W_3은 그 대각선 위쪽 절반을 한 번 쓸고 지나간다.
- W_1W_2는 O와 (L, B)를 잇는 대각선 위쪽 절반을 한 번 쓸고 지나간다.
- W_3P는 그 대각선 아래쪽 절반을 한 번 쓸고 지나간다.

쿠션에서 떨어져 있고 대각선 위에 있지 않은 점 Q는 각 대각선에 대하여 정확히 한쪽에 놓인다. 따라서 서로 다른 두 평행사변형에 속하는 정확히 두 변이 Q를 지난다. 이것이 두 가지 샷이다. 각 샷은 퍽을 그 변을 따라 보내 네 쿠션을 모두 시계 방향으로 돌고 Q로 돌아오게 한다. (Q가 대각선 위에 있으면, 두 샷 중 하나는 모서리로 치는 샷으로 퇴화한다.)

검산

- $e = 1$이면 모든 z에 대하여 기울기가 $k = B/L$이므로 모든 변이 대각선과 평행하다. 이는 완전 탄성 쿠션에 대하여 흔히 쓰는 거울상 펼치기로 얻는 결과와 같다.
- $L = 2, B = 1, e = \frac{1}{2}, z = 1$로 두면 $a = 1, k = \frac{1}{3}$이고, 충돌점은 $(0, \frac{1}{3})$, $(1, 1)$, $(2, \frac{2}{3})$이다. 마지막 구간에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = e/k = \frac{3}{2}$이므로, $\frac{2}{3}$만큼 내려가면서 1만큼 되돌아가 $(1, 0) = P$에 이른다.
- 퍽을 벽에서 벽으로 이동시키는 수치 시뮬레이션에서 세 소문항이 모두 성립했다. 임의로 고른 테이블, e의 값, z의 값에서 예측한 충돌점이 나왔고, 임의로 고른 내부 점들은 각각 닫힌 경로 중 정확히 두 개 위에 놓였다.

흔한 실수

- 거울상(펼치기, unfolding) 기법을 쓰는 것: $e < 1$이면 반사각이 입사각과 같지 않으므로 이 기법은 통하지 않는다.
- $x_{\text{끝}} = a$에서 k를 구하고, 각 충돌이 의도한 변 위에서 일어나는지 확인하지 않는 것.
- 소문항 (iii)에서 Q에서의 샷이 특정한 변을 따라 출발해야 한다고 가정하는 것. 첫 구간과 마지막 구간을 하나의 직선 구간으로 이어 주는 것은 소문항 (i)의 논증이다.

STEP 너머

이러한 경로를 **당구**(*billiards*)라 한다. $e = 1$인 경우는 그 자체로 하나의 분야를 이루며, 반사와 펼치기를 써서 연구하고 동역학계(dynamical systems)로 이어진다. 여기서는 쿠션이 에너지를 잃고, "한 바퀴 전의 속도 $\mapsto$ 한 바퀴 후의 속도"라는 사상은 e^2배의 순수한 축소이다. 그래서 퍽이 한 바퀴 돌 때마다 느려지더라도 모든 e에 대하여 닫힌 궤도가 존재한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충격량과 반발을 꼼꼼하게 다룬다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 같은 성격의 문제가 더 있다.

풀이

STEP II 1987, 문제 14

역학 • 원뿔 위의 고무줄

> **STEP II 1987, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q14

핵심 아이디어

고무줄은 원뿔 위에서 계속 수평인 원을 이루므로, 그 상태 전체는 하나의 수, 곧 모선(generator)을 따라 잰 꼭짓점으로부터의 거리 s로 기술된다. 그래서 작은 요소 하나를 따라간다. 장력에 의한 안쪽으로의 힘은 원뿔 면을 따르는 성분과 면에 수직인 성분으로 나뉜다. 앞의 것은 요소를 모선을 따라 움직이게 하고, 뒤의 것은 매끄러운 원뿔이 상쇄한다. s를 길이 x로 바꾸면 단진동(simple harmonic motion)이 얻어지고, 고무줄은 주기의 4분의 1이 지난 뒤 느슨해진다.

풀이

모형. 고무줄을 질량 m이 원 둘레에 고르게 분포한 가느다란 탄성 끈으로 본다. 원뿔은 매끄러우므로 각 요소에 작용하는 항력은 면에 수직이고, 중력은 무시한다. 대칭성에 의해 모든 요소가 같은 방식으로 움직이므로, 고무줄은 축 위에 중심을 둔 원으로 유지된다. 모선을 따라 잰 꼭짓점으로부터의 거리를 $s(t)$라 하자. 각 모선은 축과 각 α를 이루므로 반지름은 $s\sin\alpha$이고, 따라서

$$x = 2\pi s\sin\alpha.$$

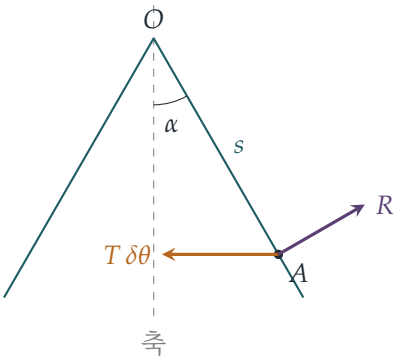
고무줄이 늘어나 있는 동안($x > l$) 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 장력은 $T = \dfrac{\lambda(x-l)}{l}$이다.

한 요소에 작용하는 힘. 축에서 본 중심각이 $\delta\theta$인 요소를 잡자. 이것은 고무줄의 $\delta\theta/2\pi$만큼이므로 질량은 $\dfrac{m\,\delta\theta}{2\pi}$이다. 이 요소에는 두 힘이 작용한다.

- 장력에 의해 주어진 힘 $T\,\delta\theta$: 축에 수직이고 축을 향한다.

▶ 원뿔의 수직 항력(normal reaction) R: 요소를 지나는 모선에 수직이다.

그림은 축과 요소를 포함하는 평면을 나타낸다.



요소는 면 위에 구속되어 있으므로 모선 OA를 따라서만 움직일 수 있다. 그 방향과 그에 수직인 방향으로 힘을 분해한다. 힘 $T\,\delta\theta$는 축에 수직이고 모선은 축과 각 α를 이루므로, $T\,\delta\theta$와 방향 $\overrightarrow{AO}$ 사이의 각은 $90^\circ - \alpha$이다. 따라서

▶ $\overrightarrow{AO}$ 방향(꼭짓점 쪽)으로 $T\,\delta\theta$의 성분은 $T\,\delta\theta\cos(90^\circ - \alpha) = T\,\delta\theta\sin\alpha$이고, R의 기여는 없다.

▶ 면에 수직인 방향으로는 운동이 없으므로 $R = T\,\delta\theta\cos\alpha$이다.

$R \geq 0$이므로 고무줄은 실제로 원뿔에 눌린 채로 있다.

생각해 보기 왜 안쪽으로 향하는 힘 $T\,\delta\theta$가 그냥 반지름을 줄인다고 말할 수 없을까?

요소는 축을 향해 곧장 움직일 수 없다. 원뿔이 가로막고 있기 때문이다. $T\,\delta\theta$ 가운데 면을 따르는 부분만 가속에 기여하고, 나머지는 항력이 상쇄한다. 인수 $\sin\alpha$는 여기서 나오며, 매끄러운 경사면 위의 구슬이 경사면을 따라 $mg\sin\theta$만 받는 것과 같은 이유이다.

운동 방정식. s가 꼭짓점에서 멀어지는 방향으로 증가하도록 하고, 모선 방향으로 요소에 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -T\,\delta\theta\sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2\pi T\sin\alpha}{m}.$$

$\delta\theta$가 소거되므로 모든 요소가 같은 방정식을 따르고, 이로써 고무줄이 원 모양을 유지함이 확인된다. 이제 α가 상수이고 $x = 2\pi s\sin\alpha$이므로

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2\pi\sin\alpha\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi^2 T\sin^2\alpha}{m} = -\frac{4\pi^2\lambda}{ml}(x-l)\sin^2\alpha,$$

여기서 $T = \lambda(x-l)/l$을 썼다. 이 식은 고무줄이 팽팽한 동안, 즉 $0 < t < t_0$에서 성립하며, 정리하면 구하는 방정식이 된다. □

t_0 구하기. $y = x - l$, $\omega^2 = \dfrac{4\pi^2\lambda\sin^2\alpha}{ml}$로 두면 $\ddot{y} = -\omega^2 y$이고, 이는 $y = 0$을 중심으로 하는 단진동이다. 처음 길이를 $x_0 > l$이라 하자(고무줄을 밀어 끼웠으므로 늘어난 상태에서 시작한다). 고무줄은 정지 상태에서 놓이므로 $\dot{y}(0) = 0$이고,

$$x - l = (x_0 - l)\cos\omega t.$$

고무줄은 x가 처음으로 l까지 줄어들 때, 곧 $\cos\omega t = 0$이 처음 될 때 느슨해지므로 $\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$이다. $\omega = 2\pi\sin\alpha\sqrt{\lambda/(ml)}$이므로

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{4\sin\alpha}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}.$$

t_0이 고무줄을 얼마나 늘였는지에 의존하지 않음에 주목하자. 이는 단진동의 전형적인 성질로, 4분의 1 주기는 진폭(amplitude)에 관계없이 같다.

검산

- **단위**: λ는 힘이므로 ml/λ의 단위는 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$이고, t_0은 시간이다.
- **극한의 경우**: $\alpha \to \frac{\pi}{2}$이면 원뿔이 평면으로 납작해지고, 고무줄은 중심을 향해 곧장 수축하며 $t_0 = \frac{1}{4}\sqrt{ml/\lambda}$이다. $\alpha \to 0$이면 원뿔이 원기둥이 되어 장력의 면 방향 성분이 없어지고, 마땅히 $t_0 \to \infty$이다.
- **수치 확인**: $\alpha = 30^\circ$, $m = 1$, $l = 1$, $\lambda = 4$이면 공식은 $t_0 = \frac{1}{4}$을 준다. 요소의 운동 방정식을 수치적으로 단계별로 풀어 보면(그리고 잘게 나눈 다각형 고무줄에 작용하는 장력의 합력을 3차원에서 직접 계산해 보아도), 임의로 고른 매개변수에 대해 인수 $\sin\alpha$와 t_0이 소수점 아래 여러 자리까지 재현된다.

흔한 실수

- 원뿔의 항력을 잊고 반지름 r에 대해 $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\ddot{r} = -T\,\delta\theta$라고 쓰는 것. 이렇게 하면 인수 $\sin^2\alpha$를 통째로 놓친다.
- 요소의 질량으로 $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}$ 대신 m을 쓰는 것.
- t_0으로 한 주기 전체나 반 주기를 답하는 것. 고무줄은 최대로 늘어난 상태에서 시작하므로 4분의 1 주기 뒤에 자연 길이에 이른다.

STEP 너머

주어진 힘 $T\,\delta\theta$는 일반적인 사실의 작은 각 버전이다. 장력 T를 받으며 곡률 반지름(radius of curvature) ρ로 휘어진 끈은 단위 길이당 T/ρ의 힘으로 옆으로 민다. 같은 생각을 곡면으로 확장하면 비눗방울 안의 압력이 바깥 압력보다 큰 이유가 설명된다(라플라스(Laplace)의 법칙). 곡면 위에 구속된 운동은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 가장 깔끔하게 다룰 수 있는데, 여기서는 항력이 아예 나타날 필요가 없다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 장력을 받는 끈과 구속된 운동에 관한 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP II 1987, 문제 15

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP II 1987, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q15

핵심 아이디어

위치는 잊고 **시각**을 생각하자. 각 차량은 어떤 시간 구간 동안 교차 지점을 차지하며, 충돌은 두 구간이 겹칠 때 정확히 일어난다. 이 겹침을 두 부등식(inequality)으로 쓰면, (u_1, u_2)-평면에서 충돌 영역은 원점을 지나는 두 직선 사이의 쐐기 영역(wedge)이 된다. u_1, u_2가 $(0, V)$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르면 점 (u_1, u_2)는 정사각형 위에서 균등분포를 따르므로, 확률은 단순히 정사각형 가운데 쐐기 영역 안에 놓인 부분의 비율이며, 세 가지 경우는 두 직선이 정사각형을 빠져나가는 위치에 대응한다.

풀이

충돌 조건

기차와 트럭이 한 점에서 만나는 직선 도로를 따라 일정한 속력 $u_1, u_2 > 0$으로 움직인다고 모형화한다(교차 지점의 폭은 무시하거나 길이에 포함시킨다). 충돌은 같은 순간에 각 차량의 어떤 부분이 교차 지점에 있을 때, 그리고 그때에만 일어난다.

기차의 앞부분은 시각 d_1/u_1에 교차 지점에 도달하고 뒷부분은 시각 $(d_1 + l_1)/u_1$에 지나가므로, 기차가 교차 지점을 차지하는 시간은

$$\frac{d_1}{u_1} < t < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

이다. 마찬가지로 트럭은 $d_2/u_2 < t < (d_2 + l_2)/u_2$ 동안 교차 지점을 차지한다. 두 열린 구간(open interval) (a_1, b_1)과 (a_2, b_2)는 각 구간이 다른 구간이 끝나기 전에 시작할 때, 즉 $a_1 < b_2$이고 $a_2 < b_1$일 때 정확히 겹친다. 따라서 충돌은

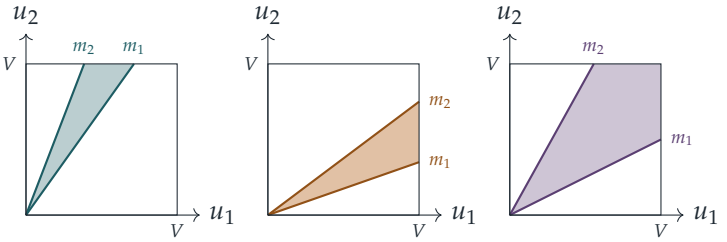
$$\frac{d_1}{u_1} < \frac{d_2 + l_2}{u_2} \quad \text{그리고} \quad \frac{d_2}{u_2} < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

일 때, 그리고 그때에만 일어난다. 양수 u_1u_2를 양변에 곱하고 정리하면 이는

$$\boxed{\frac{d_2}{d_1+l_1}\,u_1 \;<\; u_2 \;<\; \frac{d_2+l_2}{d_1}\,u_1.}$$

이다. (부등식 가운데 하나가 등식이면 두 차량은 앞부분과 뒷부분이 닿기만 한다. 이 경우의 확률은 0이므로 이를 충돌로 셀지 말지는 상관없다.)

$m_1 = \dfrac{d_2}{d_1+l_1}$, $m_2 = \dfrac{d_2+l_2}{d_1}$라 하자. $d_2 < d_2+l_2$이고 $d_1+l_1 > d_1$이므로 $m_1 < m_2$이고, 따라서 충돌 영역은 제1사분면에서 직선 $y = m_1x$와 $y = m_2x$ 사이의 쐐기 영역이다. 아래 그림은 다음 단계에서 필요한 정사각형 $0 < x, y < V$ 안에 이 영역을 색칠하여 나타낸 것이다.



(A) $d_1+l_1 \le d_2$ (B) $d_2+l_2 \le d_1$ (C) 그 밖의 경우

기차의 뒷부분이 트럭의 앞부분보다 가까울 때의 확률

u_1과 u_2는 독립(independent)이고 각각 $(0, V)$에서 균등분포를 따르므로, 순서쌍 (u_1, u_2)는 정사각형 $(0, V)^2$ 위에서 상수 결합 밀도(joint density) $1/V^2$을 가진다. 따라서 충돌 확률은

$$\frac{\text{정사각형 안에 있는 쐐기 영역의 넓이}}{V^2}.$$

이다.

? 생각해 보기 두 직선은 정사각형의 어느 변을 통해 빠져나가는가?

직선 $y = mx$는 $m \ge 1$이면 윗변을 통해($(V/m, V)$에서), $m \le 1$이면 오른쪽 변을 통해((V, mV)에서) 정사각형을 빠져나간다. 이 경우에는 $d_1+l_1 < d_2$이므로 $m_1 = d_2/(d_1+l_1) > 1$이고, 따라서 $m_2 > m_1 > 1$이기도 하다. 즉 그림 (A)처럼 두 직선 모두 윗변을 통해 빠져나간다.

그러면 정사각형 안의 쐐기 영역은 꼭짓점이 $(0,0)$, $(V/m_2, V)$, $(V/m_1, V)$인 삼각형이다. 윗변 위에 놓인 밑변의 길이는 $V/m_1 - V/m_2$이고 높이는 V이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{충돌}) &= \frac{1}{V^2}\cdot\frac{1}{2}V\left(\frac{V}{m_1}-\frac{V}{m_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_1+l_1}{d_2}-\frac{d_1}{d_2+l_2}\right)\\ &= \frac{(d_1+l_1)(d_2+l_2)-d_1d_2}{2d_2(d_2+l_2)} = \frac{l_1l_2+l_2d_1+l_1d_2}{2d_2(l_2+d_2)},\end{aligned}$$

이다. $d_1 d_2$ 항이 소거되기 때문이다. 이것이 구하는 결과이다.

나머지 두 경우

트럭의 뒷부분이 기차의 앞부분보다 가까운 경우, $d_2 + l_2 < d_1$**.** 이제 $m_2 = (d_2 + l_2)/d_1 < 1$이므로 $m_1 < m_2 < 1$이고, 그림 (B)처럼 두 직선 모두 오른쪽 변을 통해 빠져나간다. 쐐기 영역은 꼭짓점이 $(0,0)$, $(V, m_1 V)$, $(V, m_2 V)$인 삼각형으로, 변 $x = V$ 위의 밑변은 $(m_2 - m_1)V$, 높이는 V이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{충돌}) = \frac{1}{2}(m_2 - m_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_2 + l_2}{d_1} - \frac{d_2}{d_1 + l_1}\right) = \frac{l_1 l_2 + l_1 d_2 + l_2 d_1}{2d_1(l_1 + d_1)}.$$

이는 첫 번째 답에서 기차와 트럭의 역할을 바꾼 것($l_1 \leftrightarrow l_2, d_1 \leftrightarrow d_2$)이며, 마땅히 그래야 한다. 두 차량을 맞바꾸는 것은 그림을 $y = x$에 대하여 대칭이동하는 것과 같기 때문이다.

어느 차량도 다른 차량보다 완전히 앞서 있지 않은 경우, $d_2 \le d_1 + l_1$**이고** $d_1 \le d_2 + l_2$**.** 이제 $m_1 \le 1 \le m_2$이므로, 그림 (C)처럼 직선 $y = m_1 x$는 오른쪽 변을 통해, $y = m_2 x$는 윗변을 통해 빠져나간다. 정사각형에서 충돌하지 않는 두 삼각형을 빼는 것이 가장 쉽다. $y = m_1 x$ 아래에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} V \cdot m_1 V$이고, $y = m_2 x$의 왼쪽(이 직선과 u_2축 사이)에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} V \cdot V/m_2$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{충돌}) = 1 - \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2m_2} = 1 - \frac{d_2}{2(d_1 + l_1)} - \frac{d_1}{2(d_2 + l_2)}.$$

경우가 만나는 곳에서 답들은 일치한다. $d_2 = d_1 + l_1$일 때($m_1 = 1$) 첫 번째와 세 번째 공식은 모두 $\frac{1}{2} - \frac{d_1}{2(d_2 + l_2)}$을 주며, $d_1 = d_2 + l_2$일 때도 마찬가지이다. 어느 확률도 V에 의존하지 않는다는 점에 주목하자. 두 속력에 같은 배수를 곱해도 두 차량이 충돌하는지 여부는 바뀌지 않는다.

검산

- $l_1 = 1, l_2 = 2, d_1 = 1, d_2 = 5$(경우 A)일 때 공식은 $\frac{9}{70} \approx 0.1286$을 준다. 무작위 속력 쌍 4×10^5개로 모의실험(simulation)을 하면 0.1283이 나왔다. 경우 B와 C의 모의실험(예를 들어 $l_1 = l_2 = 1, d_1 = 1, d_2 = 1.5$이면 0.425)도 0.002 이내에서 일치했다.
- 경우 A에서 $l_1, l_2 \to 0$으로 보내면 확률은 0이 된다. 두 점은 정확히 $u_2/u_1 = d_2/d_1$일 때에만 교차 지점에서 만난다.
- 경우 C에서 $d_1 = d_2$이고 차량이 매우 길면 $m_1 \to 0, m_2 \to \infty$이므로 확률은 1로 수렴하며, 이는 타당하다.

흔한 실수

- "트럭이 교차 지점을 다 지나가기 전에 기차가 도착한다"처럼 부등식을 하나만 쓰는 것. 두 구간이 겹치려면 **두** 조건이 모두 필요하다.
- 영역이 사각형인 경우 C에서 삼각형의 넓이 공식을 쓰는 것. 먼저 각 직선이 정사각형을 어디로 빠져나가는지 확인하자.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 독립인 균등분포 확률변수에 대한 확률을 넓이로 바꾸는 방법은 기하학적 확률(geometric probability)이며, $\mathrm{P}((X,Y) \in A)$를 결합 밀도의 이중적분(double integral)으로 계산하는 가장 간단한 예이다. 같은 아이디어가 뷔퐁(Buffon)의 바늘 문제나 무작위 시각에 도착하는 두 사람의 "만남 문제" 같은 고전적인 문제의 바탕에 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 결합 밀도와 이를 이런 방식으로 활용하는 법을 전개한다.

풀이

STEP II 1987, 문제 16

확률과 통계 • 베이즈 정리

STEP II 1987, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s2-q16

핵심 아이디어

이 문제는 가장 단순한 형태의 베이즈(Bayes) 정리(Bayes' theorem)이다. 두 사람이 모두 "예"라고 보고하는 상황은 두 가지 경로로 생길 수 있다. 주장이 참이고 두 친구가 모두 진실을 말하는 경우, 또는 주장이 거짓이고 두 친구가 모두 거짓말을 하는 경우이다. 각 경로에 그 사전 확률(prior probability)과 그 한 쌍의 보고가 나올 확률을 곱해 가중치를 매긴 다음, 전체 가운데 "참" 경로에서 나온 몫이 얼마인지 묻는다. 두 번째 부분도 같은 방식으로 풀린다. 새로운 점은 친구들의 대답이 오직 A에 대해서만 무언가를 말해 준다는 것뿐이므로, 세 가지 가능성을 A가 냉장고 안에 있는지에 따라 분류해야 한다.

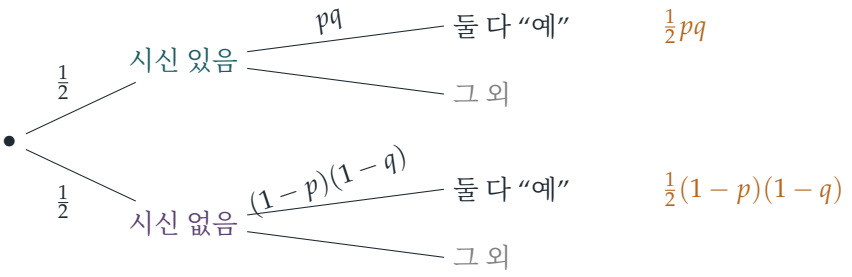
풀이

첫 번째 추정

냉장고 안에 시신이 있는 사건을 F라 하고, P와 Q가 모두 시신이 있다고 말하는 사건을 Y라 하자. 오늘 아침 시점에서 $\Pr(F) = \Pr(F') = \frac{1}{2}$이다.

각 친구가 예/아니오 질문에 답한다고 모형화한다. 진실을 말한다는 것은 올바른 답을 한다는 뜻이고, 거짓말을 한다는 것은 틀린 답을 한다는 뜻이다. 친구들이 정직한지는 냉장고 안에 무엇이 있는지와 무관하며, P와 Q는 서로 독립적으로 행동한다. 따라서 다음이 성립한다.

- 시신이 있으면 두 사람이 모두 진실을 말할 때, 그리고 그때에만 둘 다 "예"라고 하므로 $\Pr(Y \mid F) = pq$이다.
- 시신이 없으면 두 사람이 모두 거짓말을 할 때, 그리고 그때에만 둘 다 "예"라고 하므로 $\Pr(Y \mid F') = (1-p)(1-q)$이다.



조건부 확률(conditional probability)의 정의(베이즈 정리)에 의해

$$\Pr(F \mid Y) = \frac{\Pr(F)\Pr(Y \mid F)}{\Pr(F)\Pr(Y \mid F) + \Pr(F')\Pr(Y \mid F')} = \frac{\frac{1}{2}pq}{\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}(1-p)(1-q)}$$
$$= \frac{pq}{pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 2pq},$$

이고, 이것이 구하는 추정값이다. 사전 확률이 반반이었기 때문에 $\frac{1}{2}$이라는 인수는 약분되어 사라진다.

? 생각해 보기 왜 답이 단순히 두 사람이 모두 진실을 말할 확률인 pq가 아닐까?

우리가 이미 알고 있는 정보, 즉 두 사람의 말이 일치했다는 사실이 있기 때문이다. 둘 중 정확히 한 사람만 거짓말을 하는 경우는 이제 불가능하다. 그런 경우에는 한 사람은 "예", 다른 사람은 "아니오"라고 답했을 것이기 때문이다. 따라서 남은 경우들만으로 확률을 다시 맞춰야 한다. 살아남은 두 경로 가운데 "둘 다 진실"의 가중치는 pq이고 "둘 다 거짓"의 가중치는 $(1-p)(1-q)$이다. 이 둘의 합으로 나누는 것이 바로 그 재조정이다. (사전 확률 $\frac{1}{2}$도 한몫을 한다. 사전 확률이 고르지 않았다면 약분되지 않았을 것이다.)

두 번째 추정

이제 시신은 분명히 있다. 각각 사전 확률이 $\frac{1}{3}$로 똑같이 가능한 세 가지 경우는 다음과 같다.

$$A\text{만}, \qquad B\text{만}, \qquad A\text{와 } B \text{ 모두}.$$

두 친구가 모두 A가 냉장고 안에 있다고 말하는 사건을 Y_A라 하자. 앞과 같은 모형에 의해 이들의 대답은 오직 A가 있는지에만 의존한다.

- "A만"인 경우와 "둘 다"인 경우에는 A가 냉장고 안에 있으므로, 각각에서 $\Pr(Y_A) = pq$이다.
- "B만"인 경우에는 A가 없으므로 $\Pr(Y_A) = (1-p)(1-q)$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\Pr(\text{둘 다} \mid Y_A) &= \frac{\frac{1}{3}pq}{\frac{1}{3}pq + \frac{1}{3}(1-p)(1-q) + \frac{1}{3}pq} \\ &= \frac{pq}{2pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 3pq}.\end{aligned}$$

두 사람의 보고는 B에 대해서는 직접적으로 아무것도 알려 주지 않는다는 점에 주목하자. 보고의 유일한 효과는 A가 있을 확률을 바꾸는 것이다. 첫 번째 부분의 결과(사전 확률 $\frac{1}{2}$ 대신 $\frac{2}{3}$을 사용)에 의해 그 확률은 $2pq/(1-p-q+3pq)$가 된다. A가 있다는 조건에서 "A만"과 "둘 다"는 여전히 똑같이 가능하므로, 이 값을 절반으로 나눈다. 그러면 같은 답이 나온다.

검산

- $p = q = \frac{1}{2}$이면 친구들의 말은 쓸모가 없고, 답은 사전 확률로 돌아간다: $\frac{1}{4}/\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$이고 $\frac{1}{4}/\frac{3}{4} = \frac{1}{3}$이다.
- $p = q = 1$이면 친구들은 절대 틀리지 않으며, 답은 1(시신이 있다)과 $\frac{1}{2}$(A가 있으므로, B도 있는지는 반반이다)이 된다.
- $p = q = \frac{3}{4}$이면 답은 $\frac{9}{10}$과 $\frac{9}{19}$이다. 상태와 진실 여부의 모든 조합을 정확히 나열하여 계산한 결과는 무작위로 고른 200개의 쌍 (p, q)에 대해 모두 일치한다. $p = 0.7$, $q = 0.6$으로 4×10^5회 시행한 시뮬레이션은 두 번째 부분에 대해 0.4375를 주었고, 이는 $\frac{0.42}{0.96} = 0.4375$와 일치한다.

흔한 실수

- "둘 다 거짓말"인 경우에도 두 개의 "예"가 나온다는 것을 잊고 pq라고 답하는 것.
- 두 번째 부분에서 분자에는 "둘 다"인 경우만 넣으면서 분모에서 "A만"인 경우를 빠뜨리는 것. 두 경우 모두 A가 있다는 사실과 모순되지 않는다.

STEP 너머

이것은 베이즈 갱신(Bayesian updating)이다. 사전 믿음에 증거의 **가능도**(likelihood)를 곱한 다음 정규화한다. 이를 깔끔하게 쓰는 방법은 승산(odds) 형태로 쓰는 것이다. 사후 승산은 사전 승산에 가능도비(likelihood ratio) $\frac{pq}{(1-p)(1-q)}$를 곱한 것과 같다. 이렇게 쓰면 독립적인 증인들은 그저 각자의 비를 곱할 뿐이라는 것이 분명해진다. 같은 계산이 의료 검사, 스팸 필터, 법정에서 증거를 종합하는 일의 바탕에 깔려 있다. Blitzstein과 Hwang의

Introduction to Probability(확률론 입문)에는 조건부 확률에 관한 훌륭한 장이 있으며, 바로 이런 성격의 퍼즐이 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 1987, 문제 1

순수수학 • 계승의 나누어떨어짐

> **STEP III 1987, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q1

핵심 아이디어

계승(factorial) $(n-1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1)$에는 n보다 작은 모든 자연수가 들어 있다. n을 n보다 작은 서로 **다른** 두 수의 곱으로 나타낼 수 있다면, 두 수가 모두 이 계승에 나타나므로 n은 계승을 나눈다. 따라서 이 문제는 사실 어떤 n이 그렇게 쪼개질 수 **없는가**에 관한 것이다. 소수(prime)는 분명히 쪼개질 수 없고, 소수의 제곱은 좀 더 자세히 살펴보아야 한다. 처음 열두 개 정도의 값을 손으로 확인해 보면 답이 곧바로 보인다.

풀이

먼저 실험하기

간단한 표를 만들어 볼 만하다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$(n-1)!$	1	1	2	6	24	120	720	5040
$n \mid (n-1)!$?	예	아니오	아니오	아니오	아니오	예	아니오	예

나누지 못하는 경우는 $2, 3, 4, 5, 7$이다. 즉 지금까지 나온 소수들과 4이다. 이제 이 규칙이 계속 성립함을 증명한다.

주장. n이 $(n-1)!$을 나누지 않을 필요충분조건은 n이 소수이거나 $n = 4$인 것이다.

$n = 1$

이때 $(n-1)! = 0! = 1$이고, 1은 1을 나눈다. 따라서 $n = 1$은 구하는 집합에 속하지 **않는다**.

$n = p$ prime

$(p-1)!$의 각 인수 $1, 2, \ldots, p-1$은 p보다 작은 양수이므로, 어느 것도 p로 나누어떨어지지 않는다. p는 소수이므로, p가 곱을 나눈다면 인수 중 하나를 나누어야 한다(유클리드(Euclid)의 보조정리(Euclid's lemma)). 따라서 $p \nmid (p-1)!$이고, 모든 소수는 구하는 집합에 속한다.

n이 합성수(composite)인 경우

n의 가장 작은 소인수를 p라 하고 $n = pm$으로 쓰자. n이 합성수이므로 $m > 1$이고, m의 모든 소인수는 p 이상이므로 $m \geq p$이다. 두 가지 경우가 있다.

경우 1: $m > p$. 이때 $1 < p < m < n$이므로 p와 m은 목록 $1, 2, \ldots, n-1$에 있는 서로 다른 두 수이다. 따라서 그 곱 $pm = n$은 $(n-1)!$을 나눈다.

경우 2: $m = p$, **즉** $n = p^2$.

> **생각해 보기** 경우 1의 논증이 여기서는 왜 통하지 않는가? 그리고 무엇으로 대신할 수 있는가?

인수 p는 목록 $1, \ldots, n-1$에 한 번만 나타나므로 두 번 쓸 수 없다. 대신 p와 $2p$를 쓴다. $p \geq 3$이면

$$2p < p \cdot p = n,$$

이므로 p와 $2p$는 목록 $1, 2, \ldots, n-1$에 있는 서로 다른 두 수이다. 따라서 그 곱 $2p^2 = 2n$은 $(n-1)!$을 나누고, n 역시 마찬가지이다.

$p = 2$이면 이 논증은 통하지 않는다. $2p = 4 = n$이 목록에 없기 때문이다. 실제로 $n = 4$이면 $3! = 6$이고 $4 \nmid 6$이다. 따라서 4는 구하는 집합에 속한다.

결론

4가 아닌 모든 합성수 n은 $(n-1)!$을 나누고, $n = 1$도 마찬가지이다. 그러므로 구하는 집합은

$$\{ n : n\text{은 소수} \} \cup \{4\} = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}.$$

이다.

검산

위의 표는 $n \leq 8$에 대하여 주장과 일치한다. 소수의 제곱도 확인해 보자. $n = 9$이면 $8! = 40320 = 9 \times 4480$이고, 이는 경우 2에서 예측한 대로이다(인수 3과 6을 이용). $n \leq 2000$인 모든 경우에 대해 $(n-1)! \bmod n$을 직접 계산하는 컴퓨터 검사를 해 보아도 주장에 어긋나는 예외는 없다.

흔한 실수

- $a \neq b$라는 조건을 고집하지 않고 "$a, b < n$이 되도록 $n = ab$로 쓰면 $ab \mid (n-1)!$"이라고 논증하는 것. 이 논증은 $4 \mid 3!$을 잘못 "증명"한다.
- $n = 1$을 빠뜨리는 것. $0! = 1$이므로 이것은 구하는 집합에 속하지 않는다.
- 소수 p가 $(p-1)!$을 나누지 못하는 이유를 "p가 인수 중 하나가 아니기 때문"이라고 말하는 것. 진짜 이유는 p가 소수이고 어떤 인수도 나누지 않는다는 것이다. 합성수는 곱의 인수 중 하나가 아니면서도 그 곱을 나눌 수 있다.

STEP 너머

소수에 대해서는 윌슨의 정리(Wilson's theorem)라고 불리는 더 날카로운 사실이 있다. 즉 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$이다. 이 문제와 함께 생각하면 (매우 느린) 소수 판정법(primality test)을 얻는다. $n > 1$이 소수일 필요충분조건은 $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$이다. 윌슨의 정리는 각 수를 법 p에 대한 역원(inverse)과 짝지어 증명하는데, 이는 법 p에 대한 정수들이 이루는 군(group) 구조를 처음 맛보는 경험이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 이 내용을 훌륭하게 다룬다.

풀이

STEP III 1987, 문제 2

순수수학 • 삼각함수 적분의 점화식

> **STEP III 1987, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q2

핵심 아이디어

점화 공식(reduction formula)은 "경계항(boundary term)" $\cos^m x \cos nx$를 미분한 다음, 덧셈정리(compound-angle identity)를 이용해 $\sin x \cos nx$를 $\sin(n-1)x$가 들어 있는 식으로 바꾸는 데서 나온다. 이 공식을 얻고 나면, 두 소문항 모두 그 경계항을 적분 구간의 양 끝에서 계산하는 문제가 된다. 0과 π에서는 홀짝성(parity)에 따라 경계항이 소거되거나 남고, $\frac{\pi}{2}$에서는 인수 $\cos^m x$ 때문에 경계항이 사라진다.

(문제지에 인쇄된 공식에는 $-\cos^m \cos nx$로 되어 있는데, $-\cos^m x \cos nx$가 맞다.)

풀이

점화 공식

곱의 미분법(product rule)으로 $\cos^m x \cos nx$를 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos^m x \cos nx\right) = -m\cos^{m-1} x \sin x \cos nx - n\cos^m x \sin nx.$$

첫째 항은 아직 원하는 꼴이 아니다. 덧셈정리

$$\sin(n-1)x = \sin nx \cos x - \cos nx \sin x \quad \text{로부터} \quad \sin x \cos nx = \cos x \sin nx - \sin(n-1)x.$$

를 얻는다. 이를 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos^m x \cos nx\right) &= -m\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x - n\cos^m x \sin nx \\ &= -(m+n)\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x.\end{aligned}$$

이다. 양변을 적분하면 ($m-1, n-1$이 음이 아니어야 하므로 $m \geq 1, n \geq 1$이 필요하다)

$$\cos^m x \cos nx = -(m+n)I_{m,n} + mI_{m-1,n-1},$$

즉

$$(m+n)I_{m,n} = -\cos^m x \cos nx + mI_{m-1,n-1},$$

이고, 이것이 구하려던 식이다 (늘 그렇듯 적분상수(arbitrary constant)는 부정적분(indefinite integral) 속에 흡수된 것으로 본다).

소문항 (i)

$J_{m,n} = \int_0^\pi \cos^m x \sin nx \,\mathrm{d}x$라 하자. 이 공식을 0부터 π까지 적용하고 $\cos^m \pi \cos n\pi = (-1)^m(-1)^n$임을 이용하면, $m, n \geq 1$일 때

$$(m+n)J_{m,n} = 1 - (-1)^{m+n} + mJ_{m-1,n-1}.$$

이다. m과 n의 홀짝이 같으면 $m+n$이 짝수이므로 경계항이 사라지고

$$J_{m,n} = \frac{m}{m+n} J_{m-1,n-1}.$$

이 된다. 게다가 $m-1$과 $n-1$도 홀짝이 같으므로 이 과정을 계속할 수 있다.

? **생각해 보기** 이 점화 과정은 어디에서 멈추며, 그곳에서의 값은 왜 0인가?

한 단계마다 두 첨자가 모두 1씩 줄어들므로, $\min(m,n)$단계가 지나면 한 첨자는 0이 되고, 홀짝이 같은 나머지 첨자는 짝수가 된다. 따라서 모든 짝수 $k \geq 0$에 대하여 $J_{k,0} = 0$이고 $J_{0,k} = 0$임을 보이면 충분하다.

- 피적분함수가 항상 0이므로 $J_{k,0} = \int_0^\pi \cos^k x \sin 0 \,\mathrm{d}x = 0$이다.
- 짝수 $k \geq 2$에 대하여 $J_{0,k} = \int_0^\pi \sin kx \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^\pi = \frac{1}{k}\left(1-(-1)^k\right) = 0$이다.

그러므로 $\min(m,n)$에 대한 수학적 귀납법(induction)에 의하여, m, n이 모두 짝수이거나 모두 홀수이면 $J_{m,n} = 0$이다.

다른 방법: $x = \pi - t$로 치환하면 $\cos^m x$는 $(-1)^m \cos^m t$로, $\sin nx$는 $-(-1)^n \sin nt$로 바뀌므로 $J_{m,n} = (-1)^{m+n+1} J_{m,n}$이고, 따라서 $m+n$이 짝수이면 $J_{m,n} = 0$일 수밖에 없다. 피적분함수가 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 반대칭(antisymmetric)인 것이다.

소문항 (ii)

코사인이 나타나도록 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$로 쓰면

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \,\mathrm{d}x = K_{0,3} - K_{2,3}, \qquad K_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin nx \,\mathrm{d}x.$$

이다. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$이므로, $m \geq 1$일 때 경계항은 $-\left[\cos^m x \cos nx\right]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$이다. 따라서

$$(m+n)K_{m,n} = 1 + mK_{m-1,n-1} \qquad (m,n \geq 1).$$

$K_{0,1} = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$에서 시작하면

$$3K_{1,2} = 1 + K_{0,1} = 2, \qquad K_{1,2} = \tfrac{2}{3},$$
$$5K_{2,3} = 1 + 2K_{1,2} = \tfrac{7}{3}, \qquad K_{2,3} = \tfrac{7}{15}.$$

이다. 또 $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$이므로 $K_{0,3} = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$이다. 그러므로

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{7}{15} = -\frac{2}{15}.$$

검산

소문항 (ii)는 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formulae)으로 직접 계산할 수도 있다. $\sin^2 x \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}(\sin 5x + \sin x)$이고, 이를 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 적분하면 $\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + 1\right) = -\frac{2}{15}$이다. 음의 부호도 그럴듯하다. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$에서 $\sin 3x < 0$인데, 바로 이 구간에서 $\sin^2 x$가 가장 크기 때문이다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 -0.133333이 나오며, 여러 m, n에 대하여 점화 공식과 소문항 (i)을 수치적으로 확인할 수도 있다.

흔한 실수

- (ii)에서 $x = \frac{\pi}{2} - t$로 치환하려는 것: 이렇게 하면 $\sin^2 x$는 $\cos^2 t$가 되지만 $\sin 3x$는 $-\cos 3t$가 되므로, 적분이 $I_{m,n}$ 꼴이 되지 않는다.
- 점화 공식이 $m, n \geq 1$일 때만 성립한다는 것을 잊는 것: 그래서 (i)의 연쇄에는 첨자가 0인 경우를 따로 다루는 출발 단계가 필요하다.

STEP 너머

이와 같은 점화 공식은 더 큰 이야기의 출발점이다. 한 주기 전체에 걸친 삼각함수 곱의 적분은 푸리에 급수(Fourier series)의 바탕이 되는 직교 관계(orthogonality relations)이며, 푸리에 급수에서는 (i)에서와 같은 대칭성 논법으로 어떤 계수가 0이 되는지를 한눈에 판단한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 푸리에 급수와 이를 이용한 미분방정식 풀이에 대한 읽기 쉬운 입문이 실려 있다.

풀이

STEP III 1987, 문제 3

순수수학 • 편각과 마친 공식

STEP III 1987, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.1 절 **마친의 공식**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/machin.html

핵심 아이디어

두 소문항 모두 복소수(complex number)의 극형식(polar form)에 바탕을 둔다. (i)에서 점 $(|x|, |y|)$는 원점으로부터 거리 $|z|$에 있으므로, $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$는 $|z|$에 코사인을 곱한 값이다. (ii)에서는 복소수를 곱하면 편각(argument)이 더해진다. 따라서 $5 - \mathrm{i}$나 $1 + \mathrm{i}$ 같은 수들의 곱이 실수에 매우 가깝게 나온다면, 그 편각으로부터 역탄젠트(inverse tangent) 사이의 항등식을 얻는다. 정말로 주의해야 할 점은 편각에 2π만큼의 모호함이 있다는 것뿐이다.

풀이

소문항 (i)

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$이라 하자. $r = 0$이면 $x = y = 0$이고 모든 항이 0이므로, $r > 0$이라고 가정한다.

오른쪽 부등식. 양변이 모두 음이 아니므로 제곱을 비교하면 충분하다.

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2 = |z|^2,$$

이는 $|x||y| \geq 0$이기 때문이다. 음이 아닌 제곱근을 취하면 $|z| \leq |x| + |y|$를 얻고, 등호는 정확히 $x = 0$ 또는 $y = 0$일 때 성립한다.

왼쪽 부등식. 점 $(|x|, |y|)$는 경계를 포함한 제1사분면(quadrant)에 있고 원점으로부터 거리

r에 있으므로, 다음을 만족하는 각 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$가 존재한다.

$$|x| = r\cos\varphi, \qquad |y| = r\sin\varphi.$$

그러면 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha = r(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = r\cos(\alpha - \varphi) \le r = |z|,$$

이다. 모든 실수 α에 대하여 $\cos(\alpha - \varphi) \le 1$이기 때문이다. 이로써 두 부등식(inequality)이 모두 증명된다. 왼쪽 부등식의 등호는 $\alpha = \varphi + 2k\pi$일 때, 즉 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$가 $(|x|, |y|)$와 같은 방향을 가리킬 때 성립한다.

(왼쪽 부등식을 보이는 다른 방법: 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)에 의해 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha \le \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = |z|$이다.)

소문항 (ii): 첫 번째 공식

단계별로 전개한다.

$$\begin{aligned}(5-\mathrm{i})^2 &= 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4 &= (24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) &= 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i} = 4(239 - \mathrm{i}).\end{aligned}$$

이제 편각을 비교하자. $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$라 하자. $5-\mathrm{i}$는 제4사분면에 있으므로 편각이 $-\theta$이고, $1+\mathrm{i}$의 편각은 $\frac{\pi}{4}$이다. 마찬가지로 $4(239-\mathrm{i})$의 편각은 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$이다. 곱셈에서 편각은 2π의 정수배 차이를 제외하고 더해지므로, 다음을 만족하는 정수 k가 존재한다.

$$\frac{\pi}{4} - 4\theta = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi \quad \text{단, 정수} k.$$

> **생각해 보기** $k = 0$임을 어떻게 알 수 있을까?

양변의 범위를 제한해 보자. $0 < t < \frac{\pi}{2}$일 때 $\tan t > t$이므로 $0 < \theta < \frac{1}{5}$이고, 따라서 $\frac{\pi}{4} - 4\theta$는 $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5} > -1$과 $\frac{\pi}{4} < 1$ 사이에 있다. 또 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$는 -1과 0 사이에 있다. $(-1, 1)$에 속하는 두 수의 차는 $2 < 2\pi$보다 작으므로 $2k\pi = 0$, 즉 $k = 0$이다. 식을 정리하면

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239},$$

이 되어 증명이 끝난다.

소문항 (ii): 두 번째 공식

같은 논리로, 편각이

$$\frac{\pi}{4} - 3\tan^{-1}\frac{1}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{20} - \tan^{-1}\frac{1}{1985},$$

인 곱, 즉 $(4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1985-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$를 생각하고, 이것이 양의 실수이기를 기대한다. 인수 $1985-\mathrm{i}$는 마지막까지 남겨 두자.

$$\begin{aligned}(4-\mathrm{i})^2 &= 16-8\mathrm{i}-1 = 15-8\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3 &= (15-8\mathrm{i})(4-\mathrm{i}) = 60-15\mathrm{i}-32\mathrm{i}-8 = 52-47\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i}) &= 1040-52\mathrm{i}-940\mathrm{i}-47 = 993-992\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) &= 993+993\mathrm{i}-992\mathrm{i}+992 = 1985+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

따라서 지금까지의 곱은 $1985+\mathrm{i}$이고, 마지막 인수 $1985-\mathrm{i}$는 그 켤레복소수(conjugate)이다. 그러므로 전체 곱은 1985^2+1로, 양의 실수이다. 이와 동치로, 마지막 인수 없이 편각을 비교하면

$$\frac{\pi}{4}-3\varphi-\psi = \tan^{-1}\frac{1}{1985}+2k\pi, \qquad \varphi=\tan^{-1}\frac{1}{4},\ \psi=\tan^{-1}\frac{1}{20}.$$

이다. 이번에도 $k=0$이다. $0<\varphi<\frac{1}{4}$이고 $0<\psi<\frac{1}{20}$이므로 좌변은 $\frac{\pi}{4}-\frac{4}{5}>-1$과 $\frac{\pi}{4}<1$ 사이에 있고, 우변에서 $2k\pi$를 뺀 값은 $(0,1)$에 속하기 때문이다. 식을 정리하면

$$\frac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}.$$

검산

- 절댓값(modulus)은 전개 결과를 확인하는 좋은 방법이다. $|5-\mathrm{i}|^8\,|1+\mathrm{i}|^2 = 26^4\cdot 2 = 913\,952$이고, $956^2+4^2 = 913\,952$도 성립한다. 마찬가지로 $17^3\cdot 401\cdot 2 = 3\,940\,226 = 1985^2+1$이다.
- 수치적으로 $4\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 0.789582$이고, 여기서 $\tan^{-1}\frac{1}{239}\approx 0.004184$를 빼면 $0.785398\approx\frac{\pi}{4}$가 된다. 또 $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}\approx 0.784894$이고, 여기에 $\tan^{-1}\frac{1}{1985}\approx 0.000504$를 더하면 역시 $\frac{\pi}{4}$가 된다.
- (i)에서 $z=3-4\mathrm{i}$로 시험해 보자. 부등식은 $3\cos\alpha+4\sin\alpha\le 5\le 7$이 되고, $3\cos\alpha+4\sin\alpha = 5\cos(\alpha-\varphi)$는 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$일 때 5에 도달한다.

흔한 실수

- $\arg(zw)=\arg z+\arg w$를 정확한 등식으로 쓰고 2π의 배수를 전혀 확인하지 않는 것. 최종 등식이 참이 되게 하는 것은 역탄젠트 값에 대한 범위 제한이다.
- $5-\mathrm{i}$ 대신 $5+\mathrm{i}$를 쓰는 것. 그러면 $(5+\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) = -4+956\mathrm{i}$가 되어, 실수에 가까운 것이 아니라 순허수에 가깝다. 곱이 실수에 가깝도록 부호를 골라야 한다.
- (i)에서 α가 임의의 값이어서 $\cos\alpha$나 $\sin\alpha$가 음수일 수 있다는 점을 잊는 것. 코사인 꼴로 나타내면 모든 α를 한꺼번에 다룰 수 있다.

STEP 너머

첫 번째 공식은 마친(Machin)의 공식(1706)이다. 작은 x에 대해 빠르게 수렴하는 급수(series) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$와 함께 사용하여, 손 계산으로 π를 많은 자릿수까지 구하는 데 쓰였다. 이런 공식을 찾는 일은 가우스 정수(Gaussian integers) $a + b\mathrm{i}$에서의 인수분해에 관한 문제이며, 여기서 $1 + \mathrm{i}$, $5 \pm \mathrm{i}$, $4 \pm \mathrm{i}$는 소수(prime)처럼 행동한다. 이것이 대수적 정수론(algebraic number theory)의 첫 맛보기이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 두 제곱수의 합과 가우스 정수를 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈의 기하학을 보여 준다.

풀이

STEP III 1987, 문제 4

순수수학 • 회전체의 부피

STEP III 1987, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

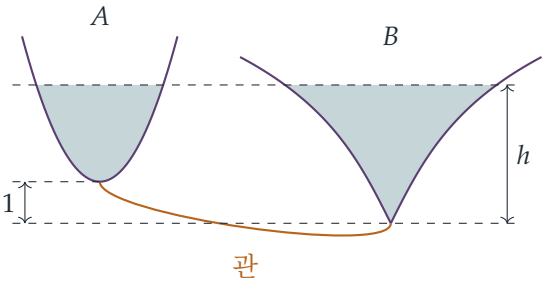
step.maths.org/questions/87-s3-q4

핵심 아이디어

물은 한 깔때기에서 다른 깔때기로 옮겨 갈 뿐이므로 그 부피는 보존된다. 각 깔때기는 y축을 중심으로 한 회전체(solid of revolution)이므로, 깊이 d까지 찬 물의 부피는 x^2을 y로 나타낸 뒤 $\int_0^d \pi x^2 \, \mathrm{d}y$로 구한다. 두 부피를 모두 깊이의 함수로 알고 나면, 남은 주의점은 서로 다른 두 기준 높이뿐이다. A와 B의 깊이는 한 단위만큼 차이 난다.

풀이

관의 부피는 무시할 수 있다고 보고, 문제에 나오는 두 번째 "closed"는 "opened"로 읽는다(그렇지 않으면 물이 전혀 움직일 수 없다). y는 각 깔때기의 바닥에서부터 위쪽으로 잰다.



깊이의 함수로 나타낸 부피

A의 경우 곡선은 $y = x^2$이므로, 높이 y에서의 수평 단면(cross-section)은 넓이가 $\pi x^2 = \pi y$인 원판이다. A에 깊이 d로 찬 물의 부피는

$$V_A(d) = \int_0^d \pi y \, \mathrm{d}y = \frac{\pi d^2}{2}.$$

이다. B의 경우, $x > 0$인 곡선 $y = 2\sinh^{-1} x$를 거꾸로 풀면 $x = \sinh \frac{y}{2}$이다. $\sinh^2 \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(\cosh y - 1)$을 이용하면, B에 깊이 d로 찬 물의 부피는

$$V_B(d) = \int_0^d \pi \sinh^2 \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \int_0^d (\cosh y - 1) \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \left(\sinh d - d\right).$$

이다.

물의 보존

처음에 A에는 깊이 4의 물이 있고 B는 비어 있으므로, 전체 부피는

$$V_A(4) = \frac{16\pi}{2} = 8\pi.$$

이다. 마지막에는 두 수면이 모두 B의 바닥에서 높이 h에 있다. 따라서 B의 물의 깊이는 h이다. A의 바닥은 B의 바닥보다 한 단위 높으므로, A의 물의 깊이는 $h - 1$이다.

> ? **생각해 보기** 애초에 두 수면은 왜 같은 높이에 이르게 될까?

두 깔때기와 관은 정지해 있는 하나로 연결된 물덩어리를 이룬다. 그 압력은 높이에만 의존하고, 두 자유 수면은 모두 대기압을 받으므로 같은 높이에 있다. 이 사실은 문제에서 주어지지만, 두 깊이의 차이가 왜 정확히 두 바닥의 높이 차이와 같은지를 설명해 준다.

물은 늘지도 줄지도 않았으므로

$$\frac{\pi(h-1)^2}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\sinh h - h\right) = 8\pi.$$

이다. 양변에 $2/\pi$를 곱하고 전개하면

$$\begin{aligned}(h-1)^2 + \sinh h - h &= 16\\ h^2 - 2h + 1 + \sinh h - h &= 16\\ h^2 - 3h + \sinh h &= 15,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 방정식이다.

가운데 줄의 좌변은 A에 실제로 물이 들어 있는 $h \geq 1$에서만 의미 있는 모형이다. 이 범위에서 그 도함수(derivative) $2(h-1) + \cosh h - 1$은 양수이므로, 방정식은 의미 있는 근(root)을 정확히 하나 가진다. 수치적으로 $h \approx 3.33$이므로, A의 물은 깊이 4에서 약 2.33으로 내려간다.

검산

- 이분법(bisection)으로 $h \approx 3.3272$를 얻는다. 그러면 $V_A(h-1) + V_B(h) \approx 25.1327$이고, 이는 $8\pi \approx 25.1327$과 일치한다.
- $\int_0^d \pi \sinh^2(y/2)\,\mathrm{d}y$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값은 여러 d 값에 대해 $\frac{\pi}{2}(\sinh d - d)$와 일치한다(예를 들어 $d = 1.7$이면 두 방법 모두 1.48540을 준다).
- 타당성: $h - 1 < 4$이므로 A의 수위가 내려갔다. 물이 빠져나가는 깔때기라면 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 두 깔때기 모두에서 깊이를 h로 쓰는 실수로, A의 바닥이 한 단위 더 높다는 사실을 잊은 것이다. 그러면 대신 $h^2 - h + \sinh h = 16$을 얻게 된다.
- $\pi x^2\,\mathrm{d}y$ 대신 $\pi y^2\,\mathrm{d}x$(x축을 중심으로 한 회전)를 적분하는 실수.
- $y = 2\sinh^{-1} x$의 역을 $x = 2\sinh y$나 $x = \frac{1}{2}\sinh y$로 구하는 실수. 올바른 역은 $x = \sinh\frac{y}{2}$이다.

STEP 너머

마지막 방정식은 다항식(polynomial)과 쌍곡선 함수(hyperbolic function)가 섞여 있어서 닫힌 형태의 해(closed-form solution)가 없다. 따라서 수치적으로 풀어야 하며, 앞에서 본 단조성(monotonicity) 논증이 바로 이분법이나 뉴턴–랩슨 법(Newton–Raphson method) 같은 방법이 물리적으로 의미 있는 단 하나의 근을 찾아낸다는 것을 보장해 준다. 대학 1학년 수치해석(numerical analysis)에서는 중간값 정리(intermediate value theorem)와 수렴 속도(convergence rate)를 이용해 이를 엄밀하게 다룬다. 그 바탕이 되는 해석학은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

풀이

STEP III 1987, 문제 5

순수수학 • 모듈러 산술을 이용한 암호

STEP III 1987, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q5

핵심 아이디어

이 암호는 서로 독립인 두 개의 이동 암호(shift cipher)로 이루어져 있다. 하나는 짝수 번째 자리에 쓰이고(키 n_0), 다른 하나는 홀수 번째 자리에 쓰이며(키 n_1), 각각에 j만큼의 추가 이동이 더해진다. 먼저 이미 알고 있는 이동 j를 벗겨 낸다. 그러면 메시지의 각 절반이 알 수 없는 하나의 상수만큼 이동된 것만 남는데, 50을 법(modulo)으로 하는 이동은 전단사(bijection)이므로 같은 수는 같은 수로, 다른 수는 다른 수로 보낸다. 세 번 나타나는 43이 바로 n_0을 드러내는 지문이다. 그다음에는 50을 법으로 한 합을 이용해 n_1을 결정한다.

풀이

n_0과 n_1은 50을 법으로 한 값만 중요하므로 $0 \le n_0, n_1 \le 49$로 놓는다. 모든 a_k는 0과 49 사이에 있으므로, 50을 법으로 한 나머지를 알면 각 a_k가 정해진다.

알고 있는 이동 제거하기

짝수 번째 자리에 대해서는 $j = 1, \ldots, 6$에 대해 $c_j = b_{2j} - j$로 놓는다. 홀수 번째 자리에 대해서는 $j = 0, \ldots, 5$에 대해 $d_j = b_{2j+1} - j$로 놓는다. 그러면

$$a_{2j} \equiv c_j - n_0, \qquad a_{2j+1} \equiv d_j - n_1 \pmod{50}.$$

암호화된 메시지로부터 다음을 얻는다.

j	1	2	3	4	5	6
b_{2j}	27	36	35	40	37	48
c_j	26	34	32	36	32	42

j	0	1	2	3	4	5
b_{2j+1}	35	2	15	8	40	24
d_j	35	1	13	5	36	19

n_0 구하기

50을 법으로 고정된 n을 빼는 것은 일대일(one-to-one)이다. 따라서 홀짝이 같은 두 자리의 a가 같을 필요충분조건은 그 자리의 c(또는 d)가 같은 것이다.

생각해 보기 세 개의 43은 어디에 들어갈 수 있을까?

여섯 개의 d_j는 모두 다르므로 홀수 번째 자리에는 서로 다른 여섯 개의 수가 들어 있고, 그 중 43은 많아야 하나이다. 따라서 적어도 두 개의 43은 짝수 번째 자리에 있다. c_j 가운데 반복되는 것은 32뿐이며, 이는 정확히 두 번($j = 3, 5$) 나타난다. 그러므로 짝수 번째 자리에는 같은 수가 정확히 두 개 있고, 메시지에서 두 번 이상 나타나는 수는 43뿐이므로 이 둘은 두 개의 43이어야 한다. 따라서

$$32 - n_0 \equiv 43 \pmod{50} \quad \Longrightarrow \quad n_0 \equiv -11 \equiv 39 \pmod{50}.$$

이제 $a_{2j} \equiv c_j - 39 \equiv c_j + 11$이므로

$$(a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}) = (37,\ 45,\ 43,\ 47,\ 43,\ 3),$$

을 얻는다. 여기서 $42 + 11 = 53 \equiv 3$이다. 여섯 수가 모두 메시지에 있으며, 당연히 그래야 한다.

n_1 구하기

메시지에서 이 여섯 수를 제거하면 홀수 번째 자리의 수들

$$S = \{1,\ 7,\ 23,\ 24,\ 39,\ 43\},$$

이 남으므로, $\{d_j - n_1\}$은 50을 법으로 S와 같아야 한다.

생각해 보기 쉰 개의 값을 모두 시도하지 않고 n_1을 어떻게 구할 수 있을까?

양쪽을 모두 더한다. 두 집합이 같으면 그 합도 50을 법으로 같다.

$$\sum d_j - 6n_1 \equiv \sum_{s \in S} s \pmod{50}, \qquad \text{즉,} \qquad 109 - 6n_1 \equiv 137.$$

따라서 $6n_1 \equiv -28 \equiv 22 \pmod{50}$이다. 법도 나누어떨어지게 하는 2로 양변을 나누면 $3n_1 \equiv 11 \pmod{25}$를 얻는다. $3 \times 17 = 51 \equiv 1$이므로 $n_1 \equiv 11 \times 17 = 187 \equiv 12 \pmod{25}$이다. 따라서 $n_1 = 12$ 또는 $n_1 = 37$이다.

합에 대한 조건은 필요조건(necessary condition)이지만 충분조건(sufficient condition)은 아니므로 두 값을 모두 확인한다. $n_1 = 37$이면 $d_0 - 37 = -2 \equiv 48$인데 이는 메시지에 없으므로 $n_1 = 37$은 성립하지 않는다. $n_1 = 12$이면

$$(a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}) \equiv (23,\ -11,\ 1,\ -7,\ 24,\ 7) \equiv (23,\ 39,\ 1,\ 43,\ 24,\ 7),$$

이고, 이는 정확히 S이다. 따라서 $n_1 = 12$이다.

메시지

두 절반을 번갈아 끼워 넣으면 원래 메시지는

$$23,\ 37,\ 39,\ 45,\ 1,\ 43,\ 43,\ 47,\ 24,\ 43,\ 7,\ 3,$$

이고, $n_0 \equiv 39$, $n_1 \equiv 12 \pmod{50}$이다. 위의 논증은 이 답이 유일함을 보여 준다. n_0은 강제로 정해졌고, n_1의 두 후보 중 하나만 성립하기 때문이다.

검산

답을 다시 암호화해 본다. 예를 들어 $b_{12} \equiv a_{12} + 39 + 6 = 48$이고 $b_7 \equiv a_7 + 12 + 3 = 58 \equiv 8$이며, 둘 다 맞다. 컴퓨터로 2500개의 쌍 (n_0, n_1)을 모두 시도하면, 주어진 수들의 모임으로 복호화되는 쌍은 정확히 하나, $(39, 12)$뿐이며 그 결과가 위의 메시지임을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 첨자를 잘못 다루는 것. 홀수 번째 자리는 b_1에서 $j = 0$으로 시작하지만, 짝수 번째 자리는 b_2에서 $j = 1$로 시작한다.
- 6이 역원을 가지는(invertible) 것처럼 $6n_1 \equiv 22 \pmod{50}$을 6으로 나누는 것. $\gcd(6, 50) = 2$이므로 6은 역원을 갖지 않으며, 이 합동식(congruence)은 50을 법으로 두 개의 해를 가진다.
- 성립하는 n_1의 값 하나를 찾고, 다른 값은 성립하지 않음을 보이지 않는 것. 문제에서 방법을 설명하라고 했으므로 유일성(uniqueness)에 대한 논증이 필요하다.

STEP 너머

이것은 카이사르 암호(Caesar cipher), 즉 이동 암호이며, 여기서 쓴 공격법은 빈도 분석(frequency analysis)의 작은 사례이다. 이동은 반복되는 글자의 패턴을 보존한다. 대학 첫 강좌에서 $6n \equiv 22$로부터 두 개의 해를 얻는 단계는 일차 합동식(linear congruence) $ax \equiv b \pmod{m}$의 이론에 해당하며, 이 합동식은 $\gcd(a, m)$이 b를 나눌 때 그리고 그때에만 해를 가진다. 아핀 암호(affine cipher) $x \mapsto ax + b$와, 나중에 배우는 RSA도 같은 아이디어 위에 세워져 있다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식을 아름답게 다룬다.

풀이

STEP III 1987, 문제 6

순수수학 • 연립 미분방정식

STEP III 1987, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q6

핵심 아이디어

서로 얽힌 한 쌍의 일계 방정식(coupled first-order equations)은 한 미지함수에 대한 하나의 이계 방정식(second-order equation)으로 바꾸는 것이 가장 좋다. 첫 번째 방정식을 이용하면 y를 x와 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 나타낼 수 있고, 이를 두 번째 방정식에 대입하면 x에 대한 강제 진동자 방정식(forced oscillator equation)이 남는다. 그러면 답의 성격 전체는 이 진동자의 고유진동수(natural frequency)가 강제항 $2\cos t$의 진동수와 어떤 관계에 있는지에 따라 결정된다.

풀이

t에 대한 도함수는 점으로 나타낸다.

y 소거하기

첫 번째 방정식으로부터

$$y = \tfrac{1}{5}\left(\dot{x} + 2x\right), \qquad \text{따라서} \qquad \dot{y} = \tfrac{1}{5}\left(\ddot{x} + 2\dot{x}\right).$$

두 식을 모두 두 번째 방정식에 대입하고 5를 곱하면

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5ax - 2\left(\dot{x} + 2x\right) = 10\cos t,$$
$$\ddot{x} + (5a - 4)\,x = 10\cos t.$$

$\dot{x}$ 항이 소거되므로 감쇠(damping)가 없다. 즉 이것은 ($5a > 4$일 때) 고유진동수가 $\sqrt{5a-4}$인 순수한 강제 진동자이다.

초기 조건 바꾸기

주어진 조건은 $x(0) = 0$과 $\dot{y}(0) = 0$이지만, x에 대한 방정식에는 $x(0)$과 $\dot{x}(0)$이 필요하다. 원래의 두 번째 방정식에 $t = 0$을 대입하면

$$\dot{y}(0) + a\,x(0) - 2y(0) = 2 \quad \Longrightarrow \quad 0 + 0 - 2y(0) = 2 \quad \Longrightarrow \quad y(0) = -1.$$

그러면 $t = 0$에서 첫 번째 방정식으로부터 $\dot{x}(0) = 5y(0) - 2x(0) = -5$를 얻는다. 어느 단계에서도 a의 값을 사용하지 않았으므로

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = -5 \qquad \text{모든} a.$$

이다.

> **?** **생각해 보기** 조건은 y가 아니라 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$에 대한 것이다. 이를 어떻게 이용할까?

미분방정식 자체가 임의의 한 순간에서 x, y와 그 도함수들의 값을 서로 연결해 준다. $t = 0$에서 두 번째 방정식은 $\dot{y}(0)$에 대한 정보를 $y(0)$에 대한 정보로 바꾸어 주고, 이어서 첫 번째 방정식은 그것을 $\dot{x}(0)$으로 바꾸어 준다. 이것이 바로 x에 대한 이계 방정식에 필요한 것이다.

$a = 1$인 경우

이제 방정식은

$$\ddot{x} + x = 10\cos t.$$

이다. 여함수(complementary function)는 $A\cos t + B\sin t$이다. 강제항 $\cos t$ 자체가 동차 방정식(homogeneous equation)의 해이므로(이것이 공명(resonance)이다), $C\cos t$ 꼴로 시도하면 실패한다. 따라서 $x_p = t\,(C\cos t + D\sin t)$ 꼴로 시도한다. 두 번 미분하면

$$\ddot{x}_p + x_p = -2C\sin t + 2D\cos t,$$

이므로 $C = 0$, $D = 5$이고, $x_p = 5t\sin t$를 얻는다. 따라서

$$x = A\cos t + B\sin t + 5t\sin t.$$

조건 $x(0) = 0$에서 $A = 0$이다. 그러면 $\dot{x} = B\cos t + 5\sin t + 5t\cos t$이므로 $\dot{x}(0) = B = -5$이다. 그러므로

$$\boxed{x = 5(t-1)\sin t}$$

y를 구하기 위해 $\dot{x} = 5\sin t + 5(t-1)\cos t$와 함께 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$를 이용하면

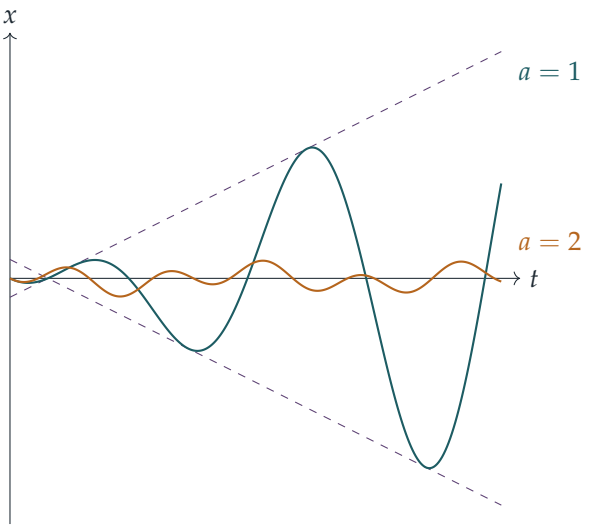
$$y = \sin t + (t-1)\cos t + 2(t-1)\sin t, \qquad \text{즉} \qquad \boxed{y = (t-1)\cos t + (2t-1)\sin t}$$

간단히 검산해 보면 $y(0) = -1$이고, $\dot{y} = \cos t - (t-1)\sin t + 2\sin t + (2t-1)\cos t$에서 $\dot{y}(0) = 1 - 1 = 0$이므로 조건을 만족한다.

$a > 1$인 경우

이제 $5a - 4 > 1$이므로 $\omega > 1$인 $\omega = \sqrt{5a-4}$로 놓는다. 방정식 $\ddot{x} + \omega^2 x = 10\cos t$는 강제 진동수 1이 고유진동수 ω와 다르므로 더 이상 공명 상태가 아니다. 따라서 다음이 성립한다.

- 여함수는 $A\cos\omega t + B\sin\omega t$이며, 주기 2π가 아니라 주기 $2\pi/\omega$(2π보다 짧다)로 진동한다.
- 특수해(particular integral)는 단순히 $\cos t$의 상수배이며 t라는 인수가 없으므로, $t\sin t$와 같은 항이 없다.
- 따라서 x(그리고 마찬가지로 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$)는 진동수가 1과 ω인 사인파들의 합이다. $a = 1$일 때처럼 진폭이 t에 대해 일차적으로 커지며 진동하는 대신, 두 경우 모두 모든 t에 대하여 유계로 남는다. 운동은 ω가 유리수일 때에만 주기적이며, 일반적으로는 서로 "맥놀이(beat)"를 일으키는 두 진동의 중첩이다.



검산

- $x = 5(t-1)\sin t$와 $y = (t-1)\cos t + (2t-1)\sin t$를 원래의 두 방정식에 다시 대입하면 항등적으로 성립한다. 단계별 수치해($x = 0$, $y = -1$에서 출발하는 4차 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법)는 $0 \le t \le 10$에서 공식과 10^{-10} 이내로 일치한다. 예를 들어 $x(10) = 45\sin 10 \approx -24.481$이다.
- $a > 1$일 때 완전한 해는 $x = \frac{2}{a-1}(\cos t - \cos\omega t) - \frac{5}{\omega}\sin\omega t$임이 밝혀진다. $a \to 1$일 때 $\omega - 1 \approx \frac{5}{2}(a-1)$이고 $\cos t - \cos\omega t \approx (\omega - 1)\,t\sin t$이므로, $5t\sin t - 5\sin t$를 다시

얻는다. 공명 상태의 답은 공명이 아닌 상태의 답의 극한이다.

흔한 실수

- $\dot{y}(0)$에 대한 조건으로부터 $y(0) = -1$을 이끌어 내지 않고 $y(0) = 0$을 사용하는 것.
- $a = 1$일 때 특수해로 $C\cos t + D\sin t$를 시도하는 것. 이것은 여함수의 일부이므로 $0 = 10\cos t$가 나온다.
- 새로운 임의 상수를 두고 y를 따로 푸는 것. 일단 x를 알면 y는 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$로 정해진다.

STEP 너머

이와 같은 선형 연립방정식은 사실 $\mathbf{v} = (x, y)$와 상수 행렬 M에 대한 $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$이다. M의 고윳값(eigenvalue), 여기서는 $\pm\sqrt{4 - 5a}$가 자유 운동이 커지는지, 감소하는지, 진동하는지를 결정한다. 공명은 강제 진동수가 고윳값 $\pm$i와 맞아떨어질 때 일어나며, 이는 정확히 $a = 1$인 경우이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 행렬을 이용한 연립방정식과, 공명 및 맥놀이를 포함한 강제 진동을 모두 다룬다.

풀이

STEP III 1987, 문제 7

순수수학 • 아크탄젠트의 급수

STEP III 1987, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q7

핵심 아이디어

$\tan^{-1} t$의 급수(series)는 $1/(1+x^2)$을 적분하여 얻고, $1/(1+x^2)$은 공비가 $-x^2$인 등비급수(geometric series)의 합이다. 등비급수를 유한 개의 항에서 끊으면 **정확한** 나머지(remainder)가 남고, 이 나머지를 적분하면 오차항(error term)이 된다. 구간 $[0,1]$에서 인수 $1/(1+x^2)$은 $\frac{1}{2}$과 1 사이에 있으므로, 오차는 쉽게 계산되는 두 적분 사이에 갇힌다.

풀이

항등식

임의의 실수 x에 대하여, 첫째항이 1이고 공비가 $-x^2$인 유한 등비급수는

$$\sum_{r=0}^{n}(-x^2)^r = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2},$$

을 준다. 공비 $-x^2$이 결코 1과 같지 않으므로 이 식은 성립한다. 이를 정리하면

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

이것은 근사가 아니라 정확한 항등식(identity)이다. 양변을 0부터 t까지 적분한다. $\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1} t$이고 $\int_0^t x^{2r}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{2r+1}}{2r+1}$이므로

$$\tan^{-1} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 이 식은 모든 실수 t에 대하여 성립한다.

부등식

$S_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r t^{2r+1}}{2r+1}$이라 하자. 항등식에 의하여

$$\left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| = \int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

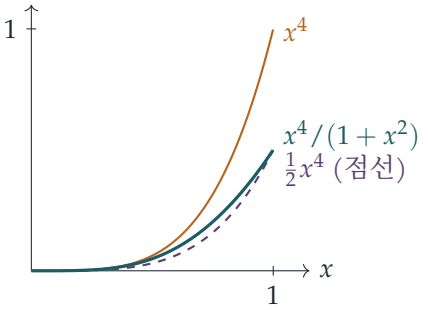
이다. 여기서 우변의 절댓값 기호를 없앨 수 있는 것은, $t \geq 0$일 때 피적분함수(integrand)가 음이 아니고 적분이 정방향으로 진행되기 때문이다.

> **생각해 보기** 닫힌 형태로 계산할 수 없는 적분은 어떻게 어림할 수 있을까?

피적분함수의 다루기 어려운 부분을 상수로 누른다. $0 \leq x \leq 1$이면 $1 \leq 1+x^2 \leq 2$이므로

$$\tfrac{1}{2}x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}.$$

아래 그림은 $n = 1$인 경우를 보여 준다. 피적분함수(청록색)가 x^4과 $\frac{1}{2}x^4$ 사이에 끼어 있다.



이 부등식들을 0부터 t까지 적분하면($t \geq 0$이므로 부등호 방향은 유지된다)

$$\frac{t^{2n+3}}{2(2n+3)} \leq \left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| \leq \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

을 얻는다. 이것이 원하는 결과이다.

π의 급수

$t = 1$을 대입하면 $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$이고 $S_n(1) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}$이다. 상계(upper bound)에 의하여

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3} \to 0 \quad \text{극한: } n \to \infty,$$

이므로 $4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} \to \pi$이다.

> **생각해 보기** 두 부등식 가운데 어느 쪽이 근사가 나쁘다는 것을 알려 줄까?

하계(lower bound)이다. 하계는 오차가 작을 수 없다는 것을 말해 준다. $t = 1$에서 왼쪽 부등식에 4를 곱하면

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \geq \frac{4}{2(2n+3)} = \frac{2}{2n+3}.$$

$n \leq 98$이면 $2n+3 \leq 199 < 200$이므로 $\frac{2}{2n+3} > \frac{2}{200} = 10^{-2}$이다. 따라서 모든 $n \leq 98$에 대하여 오차는 적어도 10^{-2}이다(실제로는 이보다 엄격히 크다). 오차가 $4/(2n+3)$보다 작으므로, 항을 백 개 써도 소수점 아래 두 자리 정도밖에 얻지 못한다. 그러므로 이 급수는 π를 계산하는 매우 느린 방법이다.

검산

- $n = 0, t = 1$: 부등식은 $\frac{1}{6} \leq \left|\frac{\pi}{4} - 1\right| \leq \frac{1}{3}$을 말한다. 실제로 $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$이다.
- 수치로 확인하면, $n = 98$일 때 오차는 $|\pi - 4S_{98}(1)| \approx 0.01010$으로 10^{-2}보다 조금 크다. $n = 99$일 때는 약 0.0099998로 조금 작다. 따라서 98이 정확히 경계값이다. 또한 임의의 t와 n에 대하여 수치 적분(quadrature)으로 항등식을 확인하였고, 수천 개의 임의의 $t \in [0,1]$에 대하여 양쪽 부등식을 확인하였다.

흔한 실수

- $1/(1+x^2)$을 **무한** 급수로 전개한 뒤 항별 적분하는 것. 이렇게 하려면 $|x| < 1$이어야 하고, 합과 적분의 순서를 바꾸는 것을 정당화해야 한다. 정확한 나머지가 있는 유한 형태를 쓰면 두 문제를 모두 피할 수 있다.
- 상계를 이용하여 오차가 크다고 주장하는 것. 그런 주장은 하계만이 할 수 있다.

STEP 너머

이것은 적분형 나머지를 가진 테일러 정리(Taylor's theorem)를 한 함수에 대하여 손으로 직접 유도한 것이다. $t = 1$에서의 급수는 라이프니츠(Leibniz) 급수(또는 마다바(Madhava)–그레고리(Gregory) 급수)이다. 대략 $1/(2n)$인 오차는 항이 천천히 감소하는 교대급수(alternating series)에서 전형적으로 나타난다. 마친(Machin)의 공식 $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$과 같은 더 빠른 공식은 같은 급수를 작은 t에서 사용하는데, 이때 t^{2n+3}이 빠르게 작아진다. 나머지와 수렴(convergence)을 엄밀하게 다룬 내용은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

풀이

STEP III 1987, 문제 8

순수수학 • 평행사변형 넓이에 관한 부등식

> **STEP III 1987, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q8

핵심 아이디어

평행사변형(parallelogram)의 두 대각선(diagonal)은 서로를 이등분(bisect)하므로, 평행사변형을 네 개의 삼각형으로 나누고 각 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin C$를 써서 곧바로 구할 수 있다. 이렇게 하면 두 대각선과 그 사잇각으로 넓이를 나타내는 공식을 얻고, 앞의 두 결과는 이 공식에서 바로 따라 나온다. 집합 A는 두 띠(strip)가 교차하는 영역이므로 평행사변형이다. 그 넓이를 계산하면 두 번째 결과에 의해 긴 대각선이 충분히 길어야 하고, 그 대각선의 두 끝점이 바로 우리가 찾는 점이다.

풀이

대각선으로 나타낸 넓이

두 대각선의 길이를 p와 q라 하고, 두 대각선이 각 θ로 만난다고 하자. 단, $0 < \theta < \pi$이다. 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로, 평행사변형은 네 개의 삼각형으로 나뉘고, 각 삼각형은 중심에서 만나는 두 변 $\frac{1}{2}p$와 $\frac{1}{2}q$를 가진다. 이 가운데 두 삼각형은 중심에서의 각이 θ이고, 나머지 두 삼각형은 $\pi - \theta$이다. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$이므로 각 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}\sin\theta$이고, 따라서

$$\text{넓이} = 4 \cdot \tfrac{1}{8}pq\sin\theta = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta.$$

p와 q가 고정되어 있으면 이 값은 $\sin\theta$가 최대일 때, 즉 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 최대이다. 그러므로 넓이는 두 대각선이 수직일 때, 그리고 그때에만 최대가 되며, 최대 넓이는 $\frac{1}{2}pq$이다.

긴 대각선에 의한 상계

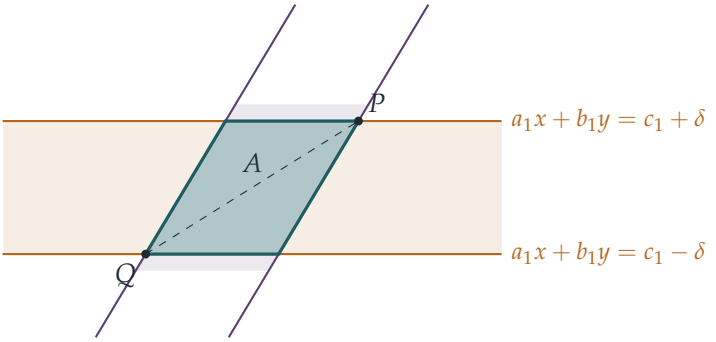
$p \geq q$라 하여 p가 긴 대각선(또는 길이가 같은 두 대각선 중 하나)이라 하자. $\sin\theta \leq 1$과 $q \leq p$를 차례로 쓰면

$$\text{넓이} = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta \leq \tfrac{1}{2}pq \leq \tfrac{1}{2}p^2.$$

따라서 넓이는 긴 대각선의 길이의 제곱의 절반 이하이다. 등호가 성립하려면 $\sin\theta = 1$이고 $q = p$이어야 하므로, 등호는 정사각형일 때에만 성립한다.

집합 A는 평행사변형이다

$\delta > 0$이라 하자. ($\delta = 0$이면 상계가 0이므로, A의 한 점을 두 번 택하면 된다.) 부등식 $|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$는 $c_1 - \delta \leq a_1x + b_1y \leq c_1 + \delta$라는 뜻이다. 따라서 이 부등식은 평행한 두 직선 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ 사이의 닫힌 띠를 나타낸다. 두 번째 부등식도 같은 방식으로 두 번째 띠를 나타낸다. 조건 $a_1b_2 \neq a_2b_1$은 법선 벡터(normal vector) $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$과 $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$가 평행하지 않다는 뜻이다. 그러므로 두 띠는 교차하고, $\mathbf{n}_1$과 $\mathbf{n}_2$ 모두 영벡터가 아니다. 두 띠의 교집합 A는 평행한 두 쌍의 직선으로 둘러싸인 평행사변형이다.



그림은 첫 번째 띠(호박색)와 두 번째 띠의 일부(자주색)를 보여 준다. 두 띠의 교집합 A(청록색)는 평행사변형이고, 점선은 그 긴 대각선이다.

A의 넓이

점과 직선 사이의 거리 공식을 쓰면, 평행한 두 직선 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ 사이의 거리는

$$h_1 = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

이다. 마찬가지로 두 번째 띠의 폭은 $h_2 = 2\delta/\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$이다. 두 직선족 사이의 각을 φ라 하자. 단, $0 < \varphi < \pi$이다. A의 변 가운데 두 번째 띠의 경계 위에 놓인 변은 첫 번째 띠를 각 φ로 가로지르므로, 각각의 길이는 $h_1/\sin\varphi$이다. 이 두 변 사이의 수직 거리는 h_2이므로

$$\text{넓이} A = \frac{h_1h_2}{\sin\varphi}.$$

? 생각해 보기 계수로부터 $\sin\varphi$를 어떻게 구할까?

두 직선 사이의 각은 두 법선 사이의 각 또는 그 보각과 같고, 둘의 사인값은 같다. 벡터 $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$과 $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$가 만드는 평행사변형의 넓이는 $|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\sin\varphi$이다. 이 넓이는 2×2 행렬식(determinant)의 절댓값인 $|a_1b_2 - a_2b_1|$과도 같다. 따라서

$$\sin\varphi = \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

이를 대입하면 제곱근이 약분된다.

$$\text{넓이}A = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cdot\frac{2\delta}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\cdot\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}{|a_1b_2-a_2b_1|} = \frac{4\delta^2}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$$

두 점

PQ를 A의 긴 대각선이라 하고, $P=(x_1,y_1)$, $Q=(x_2,y_2)$라 하자. 이 점들은 A의 꼭짓점이고, 두 띠는 경계 직선을 포함하므로 이 점들은 A에 속한다. 첫 번째 부분에서 얻은 상계에 의해

$$\frac{4\delta^2}{|a_1b_2-a_2b_1|} = \text{넓이}A \le \tfrac{1}{2}PQ^2,$$

이므로

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = PQ^2 \ge \frac{8\delta^2}{|a_1b_2-a_2b_1|},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $a_1=b_2=1$, $a_2=b_1=0$으로 두면 A는 정사각형 $|x-c_1|\le\delta$, $|y-c_2|\le\delta$이다. 그 대각선 길이의 제곱은 $(2\delta)^2+(2\delta)^2=8\delta^2$으로, 상계와 정확히 같다. 정사각형이 첫 번째 부분의 등호 조건이므로 이는 앞뒤가 맞는다.
- 배율 변환: a_1, b_1, c_1을 두 배로 하면 첫 번째 띠의 폭이 절반이 되고, A의 넓이도 절반이 되며, $|a_1b_2-a_2b_1|$은 두 배가 된다. 공식이 올바르게 작동한다.
- 컴퓨터로 무작위 사례 10^5개를 검사하였다. 경계 방정식을 풀어 A의 꼭짓점을 구했더니, 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구한 넓이가 매번 $4\delta^2/|a_1b_2-a_2b_1|$과 일치하였다. (긴 대각선)^{2}과 상계의 비의 최솟값은 1.0007로, 1보다 작은 경우는 한 번도 없었다.

흔한 실수

- 띠의 폭을 2δ로 잡는 것. $|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$의 폭은 $2\delta/\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$이다.
- 택한 점들이 왜 A에 속하는지 밝히지 않는 것. 그 점들은 꼭짓점이고 A는 경계를 포함하므로 A에 속한다.
- A의 넓이를 h_1h_2로 쓰는 것. 이는 두 띠가 수직일 때에만 옳다.

STEP 너머

이 넓이 계산은 한 가지 근본적인 사실의 특수한 경우이다. 행렬 M으로 주어지는 선형 사상(linear map)은 모든 넓이를 $|\det M|$배 한다. 여기서 사상 $(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$는 A를 넓이가 $4\delta^2$인 정사각형으로 보내므로, A의 넓이는 $4\delta^2/|\det M|$이다. 이것은 이중적분에서 변수를 바꿀 때 만나는 야코비안(Jacobian) 인자이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이런 방식으로 행렬식을 넓이와 부피로 전개한다.

풀이

STEP III 1987, 문제 9

순수수학 • 군의 직적

> **STEP III 1987, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q9

핵심 아이디어

$G \times H$에서 일어나는 모든 일은 좌표마다 따로 일어나므로, 각 군 공리(group axiom)와 $G \times H$의 각 성질은 G와 H 각각의 같은 성질로 귀결된다. 참/거짓을 판단하는 부분에서 "참"이라면 일반적인 증명이 필요하고, "거짓"이라면 확실한 반례 하나면 충분하다. 동형(isomorphic)인 군들은 곱셈만으로 기술할 수 있는 모든 것, 예를 들어 크기나 원소의 위수(order)가 서로 같다. 그러므로 이런 것들을 비교한다.

풀이

이 풀이 전체에서 e_G와 e_H는 G와 H의 항등원(identity)이고, G와 H에서의 역원(inverse)은 g^{-1}과 h^{-1}로 쓴다.

$G \times H$는 군이다

네 가지 공리를 확인한다.

닫힘(*closure*). $g_1, g_2 \in G$이고 $h_1, h_2 \in H$이면 G와 H가 닫혀 있으므로 $g_1 * g_2 \in G$이고 $h_1 \circ h_2 \in H$이다. 따라서 $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2,\ h_1 \circ h_2) \in G \times H$이다.

결합법칙(*associativity*). 임의의 세 원소에 대하여

$$\begin{aligned}\big((g_1, h_1)(g_2, h_2)\big)(g_3, h_3) &= \big((g_1 * g_2) * g_3,\ (h_1 \circ h_2) \circ h_3\big) \\ &= \big(g_1 * (g_2 * g_3),\ h_1 \circ (h_2 \circ h_3)\big) \\ &= (g_1, h_1)\big((g_2, h_2)(g_3, h_3)\big),\end{aligned}$$

이 성립한다. 여기서 가운데 단계는 G와 H에서의 결합법칙을 이용한 것이다.

항등원. 순서쌍 (e_G, e_H)는

$$(e_G, e_H)(g,h) = (e_G * g,\ e_H \circ h) = (g,h),$$

를 만족하고, 마찬가지로 $(g,h)(e_G, e_H) = (g,h)$이다. 따라서 이것은 항등원이다.

역원. (g,h)가 주어지면 순서쌍 (g^{-1}, h^{-1})은 $G \times H$에 속하고

$$(g,h)(g^{-1}, h^{-1}) = (g * g^{-1},\ h \circ h^{-1}) = (e_G, e_H),$$

이며, 순서를 바꾼 곱도 (e_G, e_H)이다. 따라서 모든 원소는 역원을 가진다.

네 공리가 모두 성립하므로 $G \times H$는 이 곱셈에 대하여 군이다.

소문항 (i): 참

G와 H가 아벨군(*abelian*)이면 $G \times H$도 아벨군이다. 임의의 두 원소에 대하여 G와 H에서의 교환법칙을 이용하면

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1 * g_2,\ h_1 \circ h_2) = (g_2 * g_1,\ h_2 \circ h_1) = (g_2,h_2)(g_1,h_1),$$

이다.

$G \times H$가 아벨군이면 G와 H도 아벨군이다. 임의의 $g_1, g_2 \in G$를 잡자. $G \times H$가 아벨군이므로

$$(g_1 * g_2,\ e_H) = (g_1,e_H)(g_2,e_H) = (g_2,e_H)(g_1,e_H) = (g_2 * g_1,\ e_H).$$

이다. 순서쌍이 같으려면 첫째 좌표가 같아야 하므로 $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$이고, G는 아벨군이다. 같은 방법으로 순서쌍 (e_G, h_1)과 (e_G, h_2)를 이용하면 H가 아벨군임을 보일 수 있다.

> **생각해 보기** 두 번째 방향에서 왜 항등원 e_H가 필요할까?

g_1과 g_2로부터 $G \times H$의 원소를 만들려면 어떤 둘째 좌표가 있어야 한다. 비교할 때는 첫째 좌표만 중요하므로 고정된 아무 $h \in H$나 써도 된다. 군에는 항상 항등원이 있으므로, e_H는 존재가 보장된 안전한 선택이다.

소문항 (ii): 참

$\widetilde{G} = \{(g, e_H) : g \in G\}$라 하고, $\phi\colon G \to \widetilde{G}$를 $\phi(g) = (g, e_H)$로 정의하자.

$\widetilde{G}$는 $G \times H$의 부분군(subgroup)이다. 항등원 (e_G, e_H)를 포함한다. $(g_1, e_H)(g_2, e_H) = (g_1 * g_2, e_H)$이므로 곱에 대하여 닫혀 있다. $(g, e_H)^{-1} = (g^{-1}, e_H)$이므로 역원에 대하여 닫혀 있다.

ϕ는 동형사상(isomorphism)이다. 정의에 의하여 $\widetilde{G}$ 위로의 전사(onto)이다. $(g_1, e_H) = (g_2, e_H)$이면 반드시 $g_1 = g_2$이므로 일대일(one-to-one)이다. 또한

$$\phi(g_1 * g_2) = (g_1 * g_2,\ e_H) = (g_1,e_H)(g_2,e_H) = \phi(g_1)\phi(g_2).$$

이므로 연산을 보존한다. 따라서 $G \times H$는 G와 동형인 부분군 $\widetilde{G}$를 포함한다.

소문항 (iii): 거짓

두 군을 모두 덧셈으로 쓰자. 즉 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$은 mod n 덧셈에 대한 군이다. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$에서는 모든 원소 $x = (a, b)$가

$$x + x = (2a, 2b) = (0, 0),$$

를 만족하므로, 모든 원소의 위수는 1 또는 2이다. 반면 $\mathbb{Z}_4$에서는 $1 + 1 = 2 \neq 0$이므로 1의 위수는 4이다.

동형사상 $\phi\colon \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$가 존재한다고 가정하자. 그러면 위의 계산에 의하여 $\phi(1) + \phi(1) = (0, 0)$이므로

$$\phi(2) = \phi(1 + 1) = \phi(1) + \phi(1) = (0, 0) = \phi(0),$$

이다. 마지막 등식은 동형사상이 항등원을 항등원으로 보내기 때문에 성립한다. 그러면 $2 \neq 0$인데 $\phi(2) = \phi(0)$이 되어 ϕ가 일대일이 아니므로 모순이다. 따라서 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$는 $\mathbb{Z}_4$와 동형이 아니다. (간단히 말하면, $\mathbb{Z}_4$는 순환군(cyclic group)이고 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$는 순환군이 아니다.)

소문항 (iv): 거짓

동형사상은 전단사(bijection)이므로 동형인 군들은 원소의 개수가 같다. 그런데 n개의 대상을 배열하는 방법이 $n!$가지이므로 $|S_n| = n!$이고, 각 순서쌍은 g와 h를 자유롭게 고른 것이므로 $|G \times H| = |G|\,|H|$이다. 따라서

$$|S_2 \times S_3| = 2! \times 3! = 12, \qquad |S_6| = 6! = 720.$$

이다. 크기가 다르므로 $S_2 \times S_3$는 S_6와 동형이 아니다.

검산

- 작은 예($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times S_3$, $S_3 \times S_3$, $S_2 \times S_3$ 등)에서 모든 경우를 직접 확인하면, 곱은 항등원 (e_G, e_H)와 함께 네 공리를 모두 만족한다. 곱은 두 인수가 모두 아벨군일 때, 그리고 그때에만 아벨군이며, $g \mapsto (g, e_H)$는 단사(injective) 준동형사상(homomorphism)이다.
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$의 원소의 위수는 $1, 2, 2, 2$이고 $\mathbb{Z}_4$의 원소의 위수는 $1, 2, 4, 4$이므로, 두 군은 정말로 다르다.
- $S_2 \times S_3$의 원소를 나열하면 12개이고, S_6는 720개이다.

흔한 실수

- (i)에서 필요충분조건(if and only if)의 한쪽 방향만 증명하는 것. 역방향이 바로 둘째 좌표에 e_H를 넣는 기법이 필요한 부분이다.
- (ii)에서 "G는 $G \times H$의 부분군이다"라고 말하는 것. 엄밀히 말하면 G는 $G \times H$의 부분집합조차 아니다. 부분군은 $G \times \{e_H\}$이고, 이것이 G와 **동형**이다.
- (iii)에서 두 군의 위수가 모두 4임을 확인하고 거기서 멈추는 것. 크기가 같다는 것은 동형이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니므로, 두 군을 구별해 주는 성질이 필요하다.

STEP 너머

이것은 **직접곱**(direct product) 구성으로, 기존의 군으로부터 새로운 군을 만드는 가장 간단한 방법이다. 대학 첫 강좌의 주요 결과 중 하나는 모든 유한 아벨군이 순환군들의 직접곱이라는 것이다. 이와 관련된 사실로, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$은 $\gcd(m,n) = 1$일 때, 그리고 그때에만 성립하는데, 이것은 중국인의 나머지 정리(Chinese remainder theorem)를 군론의 관점에서 본 모습이다. 소문항 (iii)은 이것이 성립하지 않는 가장 작은 경우이다. 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*를 보라.

풀이

STEP III 1987, 문제 10

순수수학 • 베르누이 다항식

> **STEP III 1987, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q10

핵심 아이디어

정의 규칙은 P_n을 오직 그 도함수(derivative)를 통해서만 정하므로, 귀납법(induction)을 적용할 자연스러운 대상은 차이 $P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}$의 **도함수**이다. 귀납 가정에 의해 이 도함수는 0이 되어 상수만 남고, 적분 조건이 그 상수를 결정한다. 그다음 합은 망원급수(telescoping sum)가 되며, 세제곱의 합을 구할 때는 P_4를 상수항(constant term) 직전까지만 알면 된다. 상수항은 어차피 소거되기 때문이다.

풀이

차분 항등식

$n \geq 1$에 대하여

$$Q_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}.$$

이라 하자. 모든 x에 대하여 $Q_n(x) = 0$임을 귀납법으로 증명한다.

기저 단계(base case) $n = 1$. $P_1' = 1 \cdot P_0 = 1$이므로 어떤 상수 c에 대하여 $P_1(x) = x + c$이다. 그러면 $P_1(x+1) - P_1(x) = 1 = 1 \cdot x^0$이므로 $Q_1 \equiv 0$이다. (실제로 $\int_0^1 (x+c)\,\mathrm{d}x = 0$에서 $c = -\frac{1}{2}$를 얻지만, 이 값은 필요하지 않다.)

귀납 단계(inductive step). $n \geq 2$이고 $Q_{n-1} \equiv 0$이라 가정하자. 미분하고 $P_n' = nP_{n-1}$을 이용하면

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= nP_{n-1}(x+1) - nP_{n-1}(x) - n(n-1)x^{n-2} \\ &= n\left[P_{n-1}(x+1) - P_{n-1}(x) - (n-1)x^{n-2}\right] \\ &= nQ_{n-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

따라서 Q_n은 상수이고, 그 값은 $x = 0$에서의 값과 같다. $n \geq 2$이므로 항 nx^{n-1}은 $x = 0$에서 0이 되고, 따라서

$$Q_n(0) = P_n(1) - P_n(0).$$

> **생각해 보기** $P_n(1) = P_n(0)$임을 어떻게 알 수 있을까? 적분 조건은 P_n에 관한 것이지, 그 함숫값에 관한 것이 아니다.

한 단계 아래의 적분 조건을 이용한다. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해

$$P_n(1) - P_n(0) = \int_0^1 P_n'(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 P_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

이다. $n - 1 \geq 1$이므로 조건 $\int_0^1 P_{n-1}\,\mathrm{d}x = 0$을 적용할 수 있기 때문이다. (바로 이 때문에 $n = 1$인 경우를 따로 다루어야 했다. $\int_0^1 P_0\,\mathrm{d}x = 1$이기 때문이다.) 따라서 $Q_n \equiv 0$이고, 이로써 귀납법이 완성된다.

$$P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1} \qquad \text{모든} n \geq 1.$$

거듭제곱의 합

항등식에 $x = m$을 대입하고 $m = 0, 1, \ldots, k$에 대하여 더한다. 우변은 망원급수가 된다.

$$\begin{aligned} n\sum_{m=0}^{k} m^{n-1} &= \sum_{m=0}^{k}\big[P_n(m+1) - P_n(m)\big] \\ &= \big[P_n(1) - P_n(0)\big] + \big[P_n(2) - P_n(1)\big] + \cdots + \big[P_n(k+1) - P_n(k)\big] \\ &= P_n(k+1) - P_n(0), \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. ($n = 1$일 때 $m = 0$인 항은 0^0인데, 이것은 1로 읽어야 한다. 그러면 양변이 모두 $k+1$이다.)

세제곱의 합

$n = 4$로 두면 P_4가 필요하다. $P_0 = 1$에서 시작하여 매번 적분하고, $[0,1]$에서의 적분이 0이 되도록 상수를 고르면

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x - \tfrac{1}{2}, \\ P_2(x) &= x^2 - x + \tfrac{1}{6} && \text{왜냐하면 } \textstyle\int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{6}, \\ P_3(x) &= x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x && \text{왜냐하면 } \textstyle\int_0^1 (x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0, \\ P_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 + c \end{aligned}$$

이다. 여기서 c는 어떤 상수이다. c는 필요하지 않다. $P_4(k+1) - P_4(0)$에서 소거되기 때문이다. $y = k+1$이라 쓰면

$$P_4(y) - P_4(0) = y^4 - 2y^3 + y^2 = y^2(y-1)^2 = (k+1)^2k^2.$$

따라서 $n = 4$일 때의 합 공식으로부터

$$\sum_{m=0}^{k} m^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

을 얻는다. $k = 1000$이면 $\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1001 = 500500$이므로

$$\sum_{m=0}^{1000} m^3 = (500500)^2,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

검산

- 작은 k: $k = 2$이면 $0 + 1 + 8 = 9 = \left(\frac{2\cdot3}{2}\right)^2$이고, $k = 3$이면 $36 = 6^2$이다.
- 같은 방법을 $n = 2$에 적용하면 $2\sum m = P_2(k+1) - P_2(0) = (k+1)^2 - (k+1) = k(k+1)$이 되는데, 이것은 익숙한 삼각수(triangular number) 공식이다. 세제곱의 합이 바로 이것의 제곱이라는 점에 주목하자. 알아차리면 멋진 사실이다.
- 컴퓨터로 정확한 분수를 써서 $P_1, \ldots, P_{12}$를 만들어 보면, 임의의 유리수 점에서 차분 항등식이 성립하고 $k \leq 39$에 대하여 합 공식이 성립함을 확인할 수 있다. 세제곱을 직접 더하면 $250\,500\,250\,000 = 500500^2$이다. (건너뛰었던 상수는 $c = -\frac{1}{30}$임이 밝혀진다.)

흔한 실수

- Q_n을 $[0,1]$에서 적분하여 Q_n의 상수를 정하려는 것. 그렇게 하면 $\int_1^2 P_n$이 등장하는데, 이에 대해서는 아무것도 알지 못한다. $x = 0$에서의 값을 구하고 P_{n-1}에 대한 조건을 이용하는 편이 훨씬 깔끔하다.
- $P_n(1) = P_n(0)$을 얻는 단계에 $n \geq 2$가 필요하다는 것을 잊는 것. 그래서 기저 단계는 $n = 1$이어야 하고 직접 확인해야 한다.
- 어차피 소거되는 P_4의 상수항을 구하느라 시간을 쓰는 것.

STEP 너머

베르누이 다항식(Bernoulli polynomials)은 생성함수(generating function) $\dfrac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n\geq 0} P_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$을 가지며, 0에서의 값들은 베르누이 수(Bernoulli numbers) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, \ldots$이다. 이들은 합을 적분 및 오차항과 비교하는 오일러–매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)의 핵심이며, 오일러(Euler)가 $\sum 1/n^{2k}$의 값을 구할 때에도 등장한다. 이러한 아이디어에 대해 더 알고 싶다면 Graham, Knuth, Patashnik의 *Concrete Mathematics*(구체 수학)를 읽어 보자. 이 책은 거듭제곱의 합과 베르누이 수를 깊이 있게 다룬다.

풀이

STEP III 1987, 문제 11

역학 • 상대 속도의 최적화

STEP III 1987, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

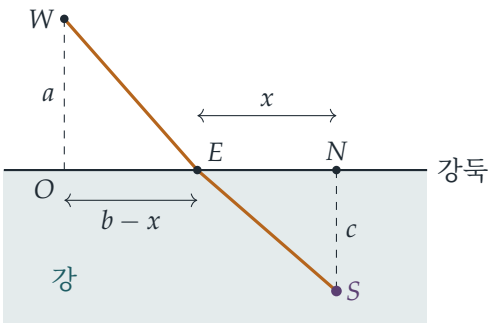
step.maths.org/questions/87-s3-q11

핵심 아이디어

전체 걸리는 시간을 한 변수 x의 함수로 나타내고, 그 도함수(derivative)를 0으로 놓는다. 물이 흐르지 않을 때 이 문제는 광학의 굴절(refraction) 문제와 똑같고, 답은 스넬의 법칙(Snell's law)이다. 물이 흐를 때 새로 해야 할 일은 수영 시간을 구하는 것뿐이다. 물살의 속도와 그녀가 헤엄치는 속도의 크기가 같으므로 두 속도의 합은 마름모(rhombus)의 대각선이 되고, 그 덕분에 수영 시간은 놀랄 만큼 간단한 x의 함수가 된다.

풀이

여자를 입자(particle)로 보고, 땅 위에서는 일정한 속력 u로, 물속에서는 물에 대한 일정한 속력 v로 각각 직선을 따라 움직인다고 모형화한다. 강둑을 X축으로 잡고 하류 쪽을 양의 방향으로, 들판을 $Y > 0$인 영역으로 하며, 여자의 위치를 $W = (0, a)$로 놓는다. 그러면 그루터기는 $S = (b, -c)$이고, 강둑에서 그루터기에 가장 가까운 점은 $N = (b, 0)$이며, 그녀가 강에 들어가는 점은 $E = (b - x, 0)$으로 N보다 x만큼 상류에 있다.



달리는 거리는 $WE = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$이고 헤엄치는 거리는 $ES = \sqrt{x^2 + c^2}$이다.

흐르지 않는 물

전체 시간은

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}{u} + \frac{\sqrt{x^2 + c^2}}{v},$$

이므로

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} + \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}.$$

함수 $s \mapsto s/\sqrt{k^2 + s^2}$는 증가함수이므로 T'의 두 항은 모두 x에 대해 증가한다. 따라서 T'은 순증가하고 T는 정확히 하나의 정류점(stationary point)을 가지며, 그것이 최솟값을 주는 점이다. $T'(0) < 0 < T'(b)$이므로 이 점은 $0 < x < b$에 있다. 구하는 방정식은

$$\boxed{\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} = \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}}$$

이고, 이는 $v(b-x)\sqrt{x^2 + c^2} = ux\sqrt{a^2 + (b-x)^2}$와 동치이다. WE와 ES가 강둑의 법선과 이루는 각을 각각 α, β라 하면, 이 식은 $\dfrac{\sin\alpha}{u} = \dfrac{\sin\beta}{v}$가 되고, 이것이 바로 스넬의 굴절 법칙이다.

흐르는 강

이제 물이 속력 v로 하류로 흐르고, 그녀는 물에 대해 속력 v로 헤엄친다. 직선 ES를 따라 이동하려면, 지면에 대한 그녀의 속도가 ES 방향을 향하도록 하류 방향에서 아래로 각 θ만큼 기울어진 진행 방향을 골라야 한다.

생각해 보기 그녀는 실제로 ES를 따라 얼마나 빠르게 움직이는가? 그리고 왜 그루터기보다 상류에서 강에 들어가야 하는가?

지면에 대한 그녀의 속도는 물살의 속도와 그녀가 헤엄치는 속도의 합이다.

$$v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix} = 2v\cos\tfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\-\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

여기서 $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 이용하였다. 기하적으로 보면, 두 속도의 크기가 같으므로 두 속도는 마름모를 이루고, 그 합은 두 속도 사이의 각을 이등분한다. 따라서 지면에 대한 그녀의 경로는 하류 방향에서 아래로 각 $\phi = \theta/2$를 이룬다. $0 \le \theta \le \pi$이므로 $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$이고, 그녀는 하류 쪽으로만 떠내려갈 수 있다. 즉 그루터기는 E보다 하류에 있어야 하며, 이는 $x > 0$을 뜻한다. 경로가 ES를 따르려면

$$\tan\phi = \frac{c}{x}, \qquad \text{따라서} \qquad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}},$$

이어야 하고, ES를 따라 움직이는 그녀의 속력은 $2v\cos\phi = \dfrac{2vx}{\sqrt{x^2+c^2}}$이다. 수영 시간은 거리를 속력으로 나눈 것이다.

$$\frac{\sqrt{x^2+c^2}}{2vx/\sqrt{x^2+c^2}} = \frac{x^2+c^2}{2vx}.$$

그러므로 전체 시간은

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{x^2+c^2}{2vx} = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{1}{2v}\left(x + \frac{c^2}{x}\right), \qquad x > 0,$$

이고

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2+(b-x)^2}} + \frac{1}{2v}\left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right).$$

이번에도 $x > 0$에서 두 항은 모두 x에 대해 순증가한다. 또한 $x \to 0^+$일 때 $T'(x) \to -\infty$이고, x가 충분히 크면 $T'(x) > 0$이므로, 정류점은 정확히 하나이고 그 점에서 시간이 최소가 된다. $T'(x) = 0$으로 놓고 양변에 (양수인) $2vx^2u\sqrt{a^2+(b-x)^2}$를 곱하면

$$2vx^2(b-x) = u(x^2-c^2)\left[a^2+(b-x)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

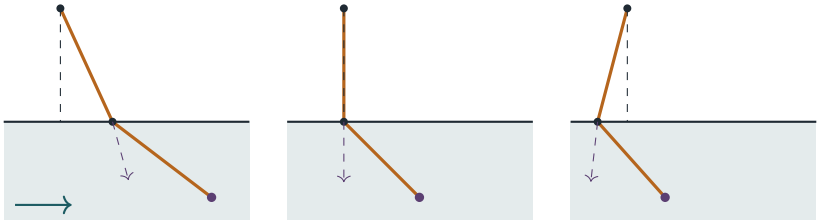
을 얻고, 이것이 구하는 식이다.

세 가지 그림

이 방정식을 풀지 않아도 x가 어디에 있는지 알 수 있다. 인수 $[a^2+(b-x)^2]^{1/2}$는 양수이므로 $b-x$와 $x-c$는 부호가 같아야 한다(또는 둘 다 0이어야 한다).

- $b > c$: 이때 $c < x < b$이다. $x \le c$이면 $b-x > 0 \ge x-c$가 되고, $x \ge b$이면 $b-x \le 0 < x-c$가 되어 둘 다 불가능하다. 그녀는 $b-x > 0$인 지점, 즉 강둑에서 자신과 가장 가까운 점 O보다 하류에서 강에 들어간다. $x > c$이므로 헤엄치는 경로가 강둑과 이루는 각은 $\phi < 45°$이고, 그녀의 진행 방향 $\theta = 2\phi < 90°$는 하류 쪽으로 기울어 있다.
- $b = c$: 같은 논리로 $x = c = b$이다. 그녀는 곧장 O로 달려가서 강을 똑바로 가로지르는 방향($\theta = 90°$)으로 헤엄치고, 물살에 실려 강둑과 45°를 이루는 경로를 따라간다.
- $b < c$: 이때 $b < x < c$이므로 $b-x < 0$이다. 그녀는 강에 들어가기 위해 **상류 쪽으로** 달리고, 45°보다 가파른 경로를 따라 헤엄치며, 그녀의 진행 방향 $\theta > 90°$는 부분적으로 상류를 향한다.

아래 그림은 $a = 3, c = 2, u = 2, v = 1$이고 $b = 4, 2, 1$인 경우를 실제 비율대로 그린 것이다. 수치로는 $x \approx 2.62$, $x = 2$, $x \approx 1.79$이다. 물살은 오른쪽으로 흐르고, E에서의 점선 화살표는 물에 대한 그녀의 진행 방향을 나타낸다.



$b > c$ $b = c$ $b < c$

검산

- $b = c$이면, 앞에서 구한 대로 $x = c$일 때 주어진 방정식의 양변이 모두 0이 된다.
- 강을 똑바로 가로질러 헤엄치는 경우($\theta = 90°$): 가로로 v만큼 갈 때마다 하류로 v만큼 떠내려가므로 경로는 45°를 이룬다. 공식에 따르면 길이가 $\sqrt{2}c$인 경로를 속력 $2v\cos 45° = \sqrt{2}v$로 가므로 걸리는 시간은 c/v이고, 이는 당연히 그래야 하는 값이다.
- 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 수영 시간 $(x^2 + c^2)/(2vx)$는 $x = c$일 때 가장 작다. 이는 이치에 맞는다. 달리는 데 시간이 전혀 들지 않는다면, 그녀는 N보다 c만큼 상류에서 강에 들어가 똑바로 가로지르는 방향으로 헤엄칠 것이다.
- 수치적으로, a, b, c, u, v를 무작위로 2000번 골라 T를 직접 최소화해 보았더니 최솟점은 언제나 두 방정식을 만족했고, 두 번째 경우에는 b와 c 사이에 있었다. 물살 속에서 헤엄치는 과정을 단계별로 시뮬레이션하여 수영 시간도 확인하였다. 예를 들어 $a = 3, b = 4, c = 2, u = 2, v = 1$이면 $x \approx 2.621$이다.

흔한 실수

- 그녀가 그루터기를 향해 똑바로 헤엄치는 것처럼 물살의 속도를 그녀의 속력에 그냥 더하는 것. 그녀는 **합성** 속도가 그루터기를 향하도록 방향을 비껴 잡아야 한다.
- 물살이 있을 때는 $x > 0$만 가능하다는 것을 잊는 것. 두 속력이 같으므로 그녀는 상류 쪽으로 조금도 나아갈 수 없다.
- x에 대한 방정식을 너무 일찍 제곱하는 것. 그러면 x가 b와 c 사이에 있음을 알려 주는 부호 정보를 잃게 된다.

STEP 너머

첫 번째 답은 스넬의 법칙이며, 이는 페르마의 원리(Fermat's principle), 즉 빛은 시간이 가장 적게 걸리는 경로를 따른다는 원리에서 나온다. 시간을 최소화하도록 경로 전체를 고르

는 문제는 변분법(calculus of variations)에서 다룬다. 이와 가까운 문제로 체르멜로의 항법 문제(Zermelo's navigation problem)가 있는데, 장소에 따라 달라지는 물살 속에서 배를 조종하여 가능한 한 빨리 도착하는 문제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 속도(relative velocity)와 움직이는 좌표계를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1987, 문제 12

역학 • 질량이 변하는 회전

STEP III 1987, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q12

핵심 아이디어

이 문제는 가변 질량(variable-mass) 문제이므로 $F = ma$(또는 그 회전 버전)를 무작정 적용할 수 없다. 안전한 방법은 기본 원리로 돌아가는 것이다. 즉 시각 t에서 회전축(pivot)에 대한 각운동량(angular momentum)과, 타 버린 연료가 조금 계를 떠난 시각 $t + \delta t$에서의 각운동량을 비교한다. 회전축은 매끄럽고 중력은 연직 방향이므로, 회전축을 지나는 연직축에 대해 모멘트(moment)를 주는 것이 없으며, 따라서 그 각운동량은 보존된다.

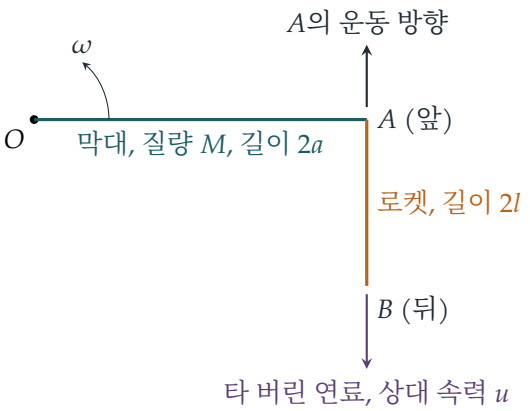
풀이

설정하기

막대와 로켓을 균일한 강체(rigid body) 막대로 모형화하고, 회전축 O를 지나는 연직축을 중심으로 수평면에서 회전한다고 하자. 막대를 OA라 하고 $OA = 2a$라 하자. OA 방향의 단위벡터 $\mathbf{e}_r$와, 이에 수직이면서 회전 방향을 향하는 단위벡터 $\mathbf{e}_\theta$를 쓰고, $\mathbf{k}$를 연직 위 방향으로 잡아 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k}$가 되게 한다.

로켓의 앞쪽 끝은 A에 있고, 로켓은 A의 운동 방향인 앞쪽을 향한다. 따라서 로켓은 $\mathbf{e}_\theta$ 방향으로 놓여 있으며, A에서 **뒤쪽으로** 뒤쪽 끝 B까지 뻗어 있다. 여기서

$$\overrightarrow{OB} = 2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta.$$



관성 모멘트

끝점에 대한 막대의 관성 모멘트(moment of inertia)는 $\frac{1}{3}M(2a)^2 = \frac{4}{3}Ma^2$이다.

로켓의 중심은 $2a\,\mathbf{e}_r - l\,\mathbf{e}_\theta$에 있으며, O로부터의 거리는 $\sqrt{4a^2+l^2}$이다. 로켓의 중심에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{3}ml^2$이므로, 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해 로켓이 기여하는 양은 $\frac{1}{3}ml^2 + m(4a^2+l^2)$이다. 전체는

$$I = \tfrac{4}{3}Ma^2 + m\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right).$$

I가 변하는 방식

$m = 2\alpha l$이고 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\beta$이다. 곱의 미분법(product rule)으로 I를 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + m\cdot\tfrac{8}{3}l\,\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \\ &= -\alpha\beta\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + 2\alpha l\cdot\tfrac{8}{3}l\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\beta\right) = -\alpha\beta\,(4a^2+4l^2).\end{aligned}$$

$4a^2 + 4l^2 = OB^2$임에 주목하자. 관성 모멘트는 뒤쪽 끝 B에서 질량을 덜어 낼 때 얻는 비율과 정확히 같은 비율로 줄어든다. 이는 당연한데, 앞쪽 끝이 A에 고정된 채 계속 균일하게 유지되는 균일한 로켓은 뒤쪽에서만 줄어들 수 있기 때문이다.

분출된 연료의 각운동량

t에서 $t+\delta t$까지의 짧은 시간 동안 질량 $\delta\mu = \alpha\beta\,\delta t$의 타 버린 연료가 B에서 떠난다. 타기 전에 이 연료는 로켓과 함께 속도 $\mathbf{v}_B = \omega\mathbf{k}\times\overrightarrow{OB}$로 움직였다. 타고 난 뒤에는 로켓에 대해

정반대 뒤쪽으로 움직이므로 속도가 $\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta$이다. 그러면 O에 대한 이 연료의 각운동량은

$$\begin{aligned}\delta\mu\,\overrightarrow{OB}\times(\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta) &= \delta\mu\left[\omega\,OB^2\,\mathbf{k} - (2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta)\times u\,\mathbf{e}_\theta\right]\\ &= \delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2) - 2au\right]\mathbf{k},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$과, $\mathbf{k}$에 수직인 $\mathbf{r}$에 대해 성립하는 $\mathbf{r}\times(\omega\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \omega r^2\mathbf{k}$를 이용하였다.

생각해 보기 배기 항에서 왜 $\overrightarrow{OB}$의 $2a\,\mathbf{e}_r$ 부분만 중요할까?

배기가스의 상대 속도는 로켓과 같은 직선인 $\mathbf{e}_\theta$ 방향이다. 따라서 $\overrightarrow{OB}$의 로켓 방향 성분은 모멘트를 갖지 않는다. 연료가 로켓의 어느 지점에서 떠나든, O에서 배기가스(그리고 추력(thrust))의 작용선까지의 수직 거리는 그냥 $OA = 2a$이다.

각운동량 보존

회전축은 매끄러우므로 그 반작용은 O를 지나는 연직축에 대해 모멘트를 갖지 않고, 중력은 연직 방향이므로 역시 모멘트를 갖지 않는다. 따라서 그 축에 대한 전체 계(불꽃놀이 기구와 δt 동안 타 버린 연료)의 각운동량은 t와 $t+\delta t$에서 같다.

$$I(t+\delta t)\,\omega(t+\delta t) + \delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2) - 2au\right] = I(t)\,\omega(t),$$

단, $(\delta t)^2$ 차수의 항은 무시한다. δt로 나누고 $\delta\mu/\delta t = \alpha\beta$를 이용하여 $\delta t\to 0$으로 보내면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) + \alpha\beta\,\omega(4a^2+4l^2) - 2\alpha\beta au = 0.$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$로 전개하고 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta(4a^2+4l^2)$을 이용하면 두 ω 항이 정확히 상쇄되어

$$I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2\alpha\beta au.$$

가 남는다. 이는 바로 "관성 모멘트 × 각가속도 = 추력의 모멘트"이다. 추력은 $\alpha\beta u$이고, O로부터 수직 거리 $2a$인 곳에서 로켓 방향으로 작용한다. 마지막으로

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{2\alpha\beta au}{\frac{4}{3}Ma^2 + 2\alpha l\left(4a^2+\frac{4}{3}l^2\right)} = \frac{6\alpha\beta au}{4Ma^2 + 8\alpha l(3a^2+l^2)}\\ &= \frac{3\alpha\beta au}{2\left[Ma^2 + 2\alpha l(3a^2+l^2)\right]},\end{aligned}$$

이므로 증명이 끝난다. 이 식은 연료가 남아 있는 동안, 즉 $l>0$인 동안 성립한다.

검산

- 로켓이 없으면($l\to 0$) 결과는 $\frac{4}{3}Ma^2\,\dot\omega = 2a\cdot\alpha\beta u$가 된다. 예상대로 추력 곱하기 지레팔(lever arm)이다.

- 차원(dimensions): $\alpha\beta u$는 힘이다(α는 단위 길이당 질량이고 β는 속력이다). 따라서 분자는 힘 $\times$ 길이이고, 분모는 관성 모멘트이다.
- 수치 검산: $M = 1.3$, $a = 0.7$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.4$, $u = 2.5$, $l(0) = 1.1$, $\omega(0) = 0.3$으로 두고, 뒤쪽 끝에서 작은 조각 2×10^5개를 분출시키며 매번 각운동량을 보존하는 방식으로 운동을 단계적으로 계산하였다. $t = 4.95$에서 이 계산은 $\omega \approx 2.39817$을 주었고, 공식을 적분하면 2.39816을 얻었다.

흔한 실수

- 불꽃놀이 기구만 놓고 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) =$ 토크라고 쓰는 것. 불꽃놀이 기구는 닫힌계가 아니므로, 연료가 가지고 나가는 각운동량까지 함께 고려하지 않으면 틀린 답이 나온다.
- 배기가스의 속도를 움직이는 로켓에 대한 상대 속도 u가 아니라, 뒤쪽 방향의 절대 속도 u로 두는 것.
- l이 변한다는 것을 잊어, 로켓의 관성 모멘트가 m과 l 둘 다를 통해 시간에 의존한다는 점을 놓치는 것.

STEP 너머

여기서 일어난 상쇄는 일반적인 사실이다. 국소적인 강체 속도에 상대 배기 속도를 더한 속도로 질량을 잃는 물체의 경우, 운동 방정식은 그 순간의 물체에 대한 보통의 운동 방정식에 상대 속도로부터 생기는 "추력" 힘을 더한 것이다. 이것이 로켓 방정식(rocket equation)의 회전 버전이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 가변 질량계와 각운동량을 바로 이 수준에서 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 1987, 문제 13

역학 • 마찰이 있는 회전 막대

STEP III 1987, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q13

핵심 아이디어

입자가 막대를 붙잡고 있는 동안에는 막대와 입자가 하나의 강체(rigid body)처럼 경첩(hinge)을 중심으로 함께 회전하므로, 합친 관성 모멘트(moment of inertia)를 써서 에너지 보존(conservation of energy)을 적용하면 곧바로 $\dot{\theta}^2$를 얻는다. 미끄러짐(slipping)이 언제 시작되는지 알아내려면 입자만 따로 살펴본다. 입자는 경첩을 중심으로 원운동을 하므로, 지름 방향(radial)과 횡 방향(transverse)으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)을 적용하면 막대가 공급해야 하는 마찰력(friction)과 수직 항력(normal reaction)의 크기를 정확히 알 수 있다. 필요한 마찰력이 수직 항력의 $\frac{1}{2}$에 이르는 순간 미끄러짐이 시작된다.

풀이

운동 방정식

막대를 매끄러운 경첩 O를 중심으로 회전하는 균일한 강체 막대로, 입자를 O로부터 거리 a에 있는 질점으로 모형화한다. 입자가 미끄러지기 전까지 입자는 O로부터 거리 a에 머물며 막대와 함께 회전한다.

O에 대한 계의 관성 모멘트는

$$I = \tfrac{4}{3}(3m)a^2 + ma^2 = 4ma^2 + ma^2 = 5ma^2,$$

이다. 여기서 길이가 $2l$인 균일한 막대의 한쪽 끝에 대한 관성 모멘트 $\frac{4}{3}Ml^2$를 사용하였다.

경첩은 매끄럽고, 입자와 막대 사이의 마찰력과 수직 항력은 계의 내력이므로 알짜 일을 하지 않는다. 막대가 θ만큼 회전했을 때, 막대의 중심과 입자(둘 다 O로부터 거리 a)는 각각

$a\sin\theta$만큼 내려간다. 정지 상태에서 출발하므로 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}(5ma^2)\dot{\theta}^2 = 3mg\,a\sin\theta + mg\,a\sin\theta = 4mga\sin\theta,$$

즉

$$5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta,$$

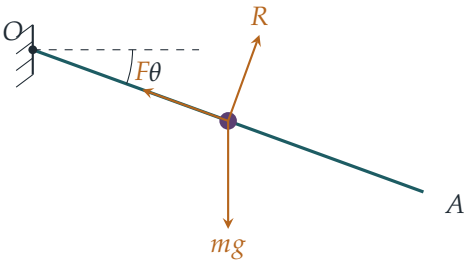
이고, 이것이 구하려던 식이다. 양변을 t에 대해 미분하면 $10a\dot{\theta}\ddot{\theta} = 8g\cos\theta\,\dot{\theta}$이므로 ($\dot{\theta} \neq 0$일 때, 이는 운동이 시작된 뒤에는 성립한다)

$$a\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}g\cos\theta.$$

이다. (O에 대한 모멘트(moment)를 취해도 같은 결과를 얻는다: $5ma^2\ddot{\theta} = 4mga\cos\theta$.)

입자가 미끄러지는 시점

이제 입자만 따로 생각한다. 입자에 작용하는 힘은 무게 mg, 막대에 수직인 수직 항력 R, 막대를 따라 작용하는 마찰력 F이다. 입자는 O를 중심으로 반지름 a인 원 위를 움직이므로, 입자의 가속도는 막대를 따라 O **쪽으로** 향하는 성분 $a\dot{\theta}^2$와 막대에 수직이고 θ가 증가하는 방향인 성분 $a\ddot{\theta}$를 가진다.



F는 막대를 따라 O 쪽으로 작용한다고 잡는데, 나중에 보듯이 입자에게 필요한 방향이 바로 이 방향이다. O 쪽을 양의 방향으로 하여 막대 방향으로 힘을 분해하면, 무게는 O에서 **멀어지는** 방향으로 성분 $mg\sin\theta$를 가지므로

$$F - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2 = \tfrac{8}{5}mg\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad F = \tfrac{13}{5}mg\sin\theta.$$

이다. θ가 증가하는 방향(막대에서 아래쪽)을 양의 방향으로 하여 막대에 수직인 방향으로 힘을 분해하면, 무게의 성분은 $mg\cos\theta$이므로

$$mg\cos\theta - R = ma\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}mg\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \tfrac{1}{5}mg\cos\theta.$$

이다.

생각해 보기 중력은 입자를 비탈 아래로 끌어당기는 것처럼 보이는데, 왜 입자에게는 경첩 쪽으로 향하는 마찰력이 필요할까?

중력만의 문제가 아니다. O를 중심으로 원운동을 계속하려면 입자에게는 O 쪽으로 향하는 알짜힘 $ma\dot{\theta}^2$가 필요하다. 막대 방향의 중력 성분은 반대쪽, 즉 O에서 멀어지는 쪽을 향하므로, 마찰력은 구심력(centripetal force)과 중력 성분을 상쇄하는 힘을 모두 제공해야 한다. 그래서 F는 O 쪽으로 양수가 되고 $\sin\theta$처럼 커지는 반면, R은 막대가 입자 아래에서 "떨어져 나가고" 있기 때문에 작다($\theta = 0$에서 입자의 가속도는 아래쪽으로 $\frac{4}{5}g$이므로, 막대는 입자 무게의 $\frac{1}{5}$만 떠받친다).

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 F와 R이 모두 양수이므로 입자는 막대와 접촉한 상태를 유지한다. 입자는 $F \le \frac{1}{2}R$인 동안, 즉

$$\tfrac{13}{5}mg\sin\theta \le \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}mg\cos\theta \iff \tan\theta \le \tfrac{1}{26}.$$

인 동안 막대에 대해 정지해 있다. $\theta = 0$에서 $F = 0 < \frac{1}{2}R$이고 $F/R = 13\tan\theta$는 θ에 대해 증가하므로, 입자가 처음으로 (경첩에서 멀어지는 바깥쪽으로) 미끄러지기 시작하는 것은

$$\tan\theta = \tfrac{1}{26},$$

일 때이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $\theta = 0$에서 모멘트 방정식은 각가속도 $\frac{4g}{5a}$를 준다. 따라서 입자의 가속도는 g보다 작은 $\frac{4}{5}g$이고, $R = \frac{1}{5}mg > 0$과 모순이 없다.
- 강체 운동을 수치적으로 단계별 계산하면($g = 9.81$, $a = 0.7$) $5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta$가 10^{-12} 이내로 재현되었고, 계산된 입자의 가속도로부터 직접 구한 마찰력과 수직 항력은 $\frac{13}{5}mg\sin\theta$ 및 $\frac{1}{5}mg\cos\theta$와 일치하였다. 비 F/R는 $\theta \approx 0.03845$ rad에서 처음으로 $\frac{1}{2}$에 도달하였는데, 이는 $\arctan\frac{1}{26} \approx 2.20^\circ$이다.

흔한 실수

- 구심력 항을 빠뜨리고 입자가 비탈 위에서 평형 상태에 있는 것처럼 힘을 분해하는 것. 이렇게 하면 각도뿐 아니라 마찰력의 방향도 틀리게 된다.
- $\frac{1}{3}(3m)(2a)^2$는 제대로 썼지만 관성 모멘트에 입자의 ma^2를 더하는 것을 잊는 것.
- 고정된 빗면에서처럼 $R = mg\cos\theta$로 잡는 것. 막대는 가속하고 있으므로 수직 항력은 훨씬 작다.

STEP 너머

이 문제는 회전 좌표계(rotating frame)에서 다루는 방법을 처음 맛보게 해 준다. 막대에서 보면 입자는 바깥쪽으로 향하는 "원심력(centrifugal force)" $ma\dot{\theta}^2$와 "오일러(Euler) 힘" $-ma\ddot{\theta}$를 느끼는데, 이 가상력(fictitious forces)이 바로 우리가 구한 항들이다. 대학 역학에서는 이를 체계적으로 전개하며, 입자가 미끄러지기 시작한 뒤에 나타나는 코리올리(Coriolis) 힘도 함께 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 비관성 좌표계(non-inertial frames)를 매우 명쾌하게 설명한다.

풀이

STEP III 1987, 문제 14

역학 • 중력 붕괴

STEP III 1987, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q14

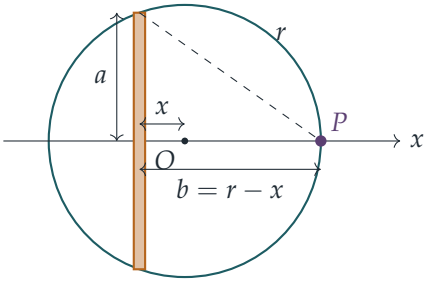
핵심 아이디어

속이 찬 구(solid sphere)는 얇은 원판(disc)을 쌓아 놓은 것이므로, 구 전체가 작용하는 힘은 입자를 지나는 축을 따라 주어진 원판 공식을 적분(integral)한 것이다. 제곱근은 다루기 까다로워 보이지만, 입자가 표면 위에 있으면 제곱근 안의 식이 인수분해(factorise)된다는 것을 알아차리면 쉬워진다. 그다음 구름에 관한 문제는 연쇄법칙(chain rule) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$을 곁들인 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)이고, 치환(substitution) $r = R\cos^2\alpha$는 두 번째로 적분할 때 나타나는 제곱근을 깔끔하게 정리하도록 고안된 것이다.

풀이

구의 표면에서의 힘

구의 중심을 원점에, 입자 P를 x축 위의 $x = r$에 둔다. 구를 축에 수직인 원판들로 자른다. 위치 x(단, $-r \le x \le r$)에서의 조각은 두께가 δx, 반지름이 a이고 $a^2 = r^2 - x^2$이며, P로부터 거리 $b = r - x \ge 0$만큼 떨어져 있고 P는 그 축 위에 있다.



핵심이 되는 간단해지는 부분은 제곱근 안에 있다.

$$a^2+b^2=(r^2-x^2)+(r-x)^2=2r^2-2rx=2r(r-x),$$

따라서

$$\frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}=\frac{r-x}{\sqrt{2r(r-x)}}=\sqrt{\frac{r-x}{2r}}.$$

각 원판은 P를 축을 따라 중심 쪽으로 끌어당기므로, 힘들은 모두 같은 방향으로 작용하고 그냥 더하면 된다. $\delta x\to 0$으로 보내면 전체 힘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}F&=2\pi mk\rho\int_{-r}^{r}\left(1-\sqrt{\frac{r-x}{2r}}\right)\mathrm{d}x\\&=2\pi mk\rho\left(2r-\frac{1}{\sqrt{2r}}\int_0^{2r}u^{1/2}\,\mathrm{d}u\right)\qquad(u=r-x)\\&=2\pi mk\rho\left(2r-\frac{1}{\sqrt{2r}}\cdot\tfrac{2}{3}(2r)^{3/2}\right)=2\pi mk\rho\left(2r-\tfrac{4}{3}r\right)=\tfrac{4}{3}\pi mk\rho\, r.\end{aligned}$$

구의 질량은 $M=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$이므로 $\frac{4}{3}\pi\rho=M/r^3$이고

$$F=\frac{kmM}{r^2},$$

이며, 방향은 중심 쪽이다. 이것이 보여야 할 결과이다.

구름의 운동 방정식

구름의 입자들을 질량이 M인 연속적이고 균일한 구로 모형화하고, 그 표면 위에서 중심으로부터 거리 r에 있는 질량 m인 입자를 생각한다. 앞의 결과에 의해 이 입자에 작용하는 힘은 중심 쪽으로 향하는 kmM/r^2뿐이다. r를 좌표(바깥쪽이 양의 방향)로 잡으면 뉴턴의 제2법칙에 의해

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{kmM}{r^2}.$$

이제 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v$이므로 $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이고, 연쇄법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

따라서 $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$이고, m을 약분하면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\frac{kM}{r^2}.$$

생각해 보기 원판에 관한 결과는 고정된 구에 대한 것이었다. 왜 수축하고 있는 구름에도 이 결과를 쓸 수 있을까?

어느 순간의 힘은 그 순간 질량이 어디에 있는지에만 의존하므로, 구름이 표면 안쪽에 같은 질량 M을 가진 균일한 구로 유지되기만 하면 된다. 실제로 그렇다. 반지름 λR(단, $0 < \lambda \leq 1$)에서 정지 상태로 출발하는 입자는 그 안쪽에 질량 $\lambda^3 M$을 가지며, $r(t)$가 $\ddot{r} = -kM/r^2$을 만족하면 언제나 $\lambda r(t)$는 $\ddot{s} = -k\lambda^3 M/s^2$을 만족한다. 그러므로 모든 입자는 표면 반지름에 대해 같은 비율의 위치에 머문다. 즉 구름은 균일한 배율로 줄어들고, 균일한 상태를 유지하며, 어떤 입자도 표면의 입자를 앞지르지 않는다. (입자 바깥쪽의 질량은 내부 입자에 대해서만 문제가 되는데, 표면 바깥에는 아무 질량도 없다.)

정지 상태에서의 붕괴

변수를 분리(separate the variables)하여 $v = 0$인 $r = R$에서부터 적분한다.

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \int_R^r -\frac{kM}{s^2}\,\mathrm{d}s = kM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{kM(R-r)}{rR}.$$

가속도(acceleration)는 항상 안쪽을 향하고 구름은 정지 상태에서 출발하므로, r는 감소하고 전 과정에서 $v \geq 0$이다.

이제 $r = R\cos^2\alpha$로 치환하는데, r가 R에서 0 쪽으로 감소함에 따라 α는 $t = 0$일 때의 0에서 $\frac{\pi}{2}$ 쪽으로 증가한다. 그러면 $R - r = R\sin^2\alpha$이므로

$$v^2 = \frac{2kM\,R\sin^2\alpha}{R^2\cos^2\alpha} = \frac{2kM}{R}\tan^2\alpha, \qquad v = \left(\frac{2kM}{R}\right)^{1/2}\tan\alpha,$$

이다. 여기서 $v \geq 0$이고 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$에서 $\tan\alpha \geq 0$이므로 양의 제곱근을 택했다.

? **생각해 보기** α의 함수로서의 v에서 α의 함수로서의 t로 어떻게 넘어갈 수 있을까?

$v = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$와 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = -2R\cos\alpha\sin\alpha$를 이용한다.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha}{(2kM/R)^{1/2}\tan\alpha} = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2} 2\cos^2\alpha = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}(1+\cos 2\alpha).$$

$\alpha = 0$일 때 $t = 0$이라는 조건으로 적분하면

$$t = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right),$$

이고, 이것이 $r = R\cos^2\alpha$가 되는 시각이다. 이것이 보여야 할 결과이다.

검산

- 짧은 시간: α가 작으면 $t \approx 2\alpha(R^3/2kM)^{1/2}$이고 $R - r \approx R\alpha^2$이므로 $R - r \approx \frac{1}{2}(kM/R^2)\,t^2$이다. 이는 정지 상태에서 출발한 일정한 가속도 kM/R^2의 운동으로, 처음에 예상되는 바와 정확히 일치한다.

- $\alpha \to \frac{\pi}{2}$로 보내면 전체 붕괴 시간 $\frac{\pi}{2}(R^3/2kM)^{1/2}$을 얻는데, $v \to \infty$임에도 이 값은 유한하다.
- 수치적으로, 얇은 원판 200 000개를 더하면 상대오차(relative error) 약 2×10^{-9}로 kmM/r^2이 재현된다. $k = 1.7$, $M = 2.3$, $R = 1.9$로 놓고 $\ddot{r} = -kM/r^2$을 $\alpha = 0.8$이 주는 시각까지 단계적으로 계산하면 $r = 0.922260$을 얻으며, 이는 $R\cos^2 0.8 = 0.922260$과 일치한다.

흔한 실수

- b를 입자로부터가 아니라 구의 중심으로부터 재는 것: $b = r - x$이지 x가 아니다.
- v가 **안쪽으로 향하는** 속력이라는 것을 잊는 것. 이 때문에 $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$에서 부호가 바뀐다.
- v에 대해 음의 제곱근을 택하는 것. 그러면 시간이 음수로 나온다.

STEP 너머

첫 번째 부분은 뉴턴(Newton)의 껍질 정리(shell theorem)의 특수한 경우이다. 구면 대칭인 물체의 바깥에서 중력은 마치 모든 질량이 중심에 있는 것처럼 작용한다. 대학 과정에서는 이를 가우스(Gauss)의 중력 법칙(Gauss's law for gravity) $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$로 깔끔하게 증명한다. 여러분이 구한 붕괴 시간은 천체물리학자들이 말하는 **자유낙하 시간**(free-fall time)으로, 가스 구름이 얼마나 빨리 붕괴하여 별을 형성하는지 어림하는 데 쓰인다. 또한 α를 이용한 매개화(parametrisation)는 직선형 케플러(Kepler) 궤도를 기술하는 것과 같은 매개화이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 중심력(central forces)과 껍질 정리를 다룬다.

풀이

STEP III 1987, 문제 15

확률과 통계 • 기대 비용의 최적화

STEP III 1987, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q15

핵심 아이디어

E_n을 직접 최소화하기보다, 검사를 한 번 더 했을 때 무엇이 달라지는지 살펴본다. "n번 후 멈추기"와 "$n+1$번 후 멈추기"라는 두 전략의 비교는 지금까지 n번 연속 양성 결과를 받은 환자에게만 의미가 있다. 이런 환자에게 추가 검사는 £10의 비용이 들지만, 검사 결과가 음성으로 나오는 스텝 증후군(Steppe syndrome) 환자에게는 £100의 치료비를 아껴 준다. 따라서 $E_{n+1} - E_n$의 부호가 모든 것을 결정하며, 그 부호는 많아야 한 번 바뀐다.

풀이

환자가 펜랜드 열병(Fenland fever)에 걸린 사건을 F라 하면 $\mathrm{P}(F) = p$이고, 스텝 증후군을 $S = F'$이라 하자. 스텝 증후군 환자의 검사 결과들은 서로 독립(independent)이며, 각각 확률 q로 양성이라고 가정한다. 여기서 $0 < q < 1$이다. 치료비는 누가 받든 £100이다.

소문항 (i)

E_n 구하기. 환자가 F이면 모든 검사가 양성이다. 따라서 n번의 검사를 모두 받은 뒤 치료를 받으며, 비용은 $10n + 100$이다.

환자가 S이면, k번째 검사($1 \le k \le n$)는 처음 $k-1$번의 검사가 모두 양성일 때만 시행되며, 그 확률은 q^{k-1}이다. 따라서 검사 횟수의 기댓값(expected value)은

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

이고, 환자는 n번의 검사가 모두 양성일 때만 치료를 받으며 그 확률은 q^n이다. 기댓값의 선

형성(linearity of expectation)에 의해

$$E_n = p\,(10n + 100) + (1 - p)\left(\frac{10(1 - q^n)}{1 - q} + 100q^n\right).$$

이 식에서 $E_0 = 100$도 얻는데, 이때는 모두가 치료를 받으므로 당연한 결과이다.

차. F 부분은 10만큼 증가한다. S 부분에서는 $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = q^n$이므로

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= 10p + (1 - p)\big(10q^n + 100q^{n+1} - 100q^n\big) \\ &= 10p + 10(1 - p)q^n(1 + 10q - 10) \\ &= 10p - 10(1 - p)q^n(9 - 10q), \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

결과의 해석: 확률 p로 $n + 1$번째 검사는 열병 환자에게 낭비된다. 확률 $(1 - p)q^n$으로 이 검사는 스텝 증후군 환자에게 시행되어 £10이 들지만, 확률 $1 - q$로 £100을 아껴 준다. 순 기대 절감액은 $100(1 - q) - 10 = 10(9 - 10q)$이다.

수치 계산. $D_n = E_{n+1} - E_n$이라 하자. $p = 10^{-4}$, $q = 10^{-2}$이면 $9 - 10q = 8.9$, $1 - p = 0.9999$이므로

$$D_n = 10^{-3} - 89 \times 0.9999 \times 10^{-2n}.$$

? **생각해 보기** 왜 D_n의 부호가 바뀌는 곳만 찾으면 충분한가?

여기서 $9 - 10q > 0$이고 n이 커질수록 q^n은 순감소하므로, D_n은 n에 대해 순증가한다. 따라서 수열 E_n은 $D_n < 0$인 동안 감소하고 $D_n > 0$이 되면 증가하므로, 최솟값은 $D_n > 0$인 첫 번째 n에서 나타난다. 이제

$$\begin{aligned} D_2 &= 10^{-3} - 0.0088991 < 0, \\ D_3 &= 10^{-3} - 0.000088991 = 0.000911\ldots > 0. \end{aligned}$$

따라서 $E_0 > E_1 > E_2 > E_3$이고 $E_3 < E_4 < E_5 < \cdots$이므로, 의사는 $n = 3$을 택해야 한다. (이때 기대 비용은 약 £10.11로, 곧바로 치료할 때의 £100과 대비된다.)

소문항 (ii)

$q_0 = \frac{9}{10}$으로 잡고, $q > \frac{9}{10}$이라 하자. 그러면 $9 - 10q < 0$이므로

$$D_n = 10p + 10(1 - p)q^n(10q - 9).$$

모든 $p \in [0, 1]$에 대해 두 항은 모두 음이 아니다. 두 항이 동시에 0일 수는 없다. $p > 0$이면 첫째 항이 양수이고, $p = 0$이면 둘째 항이 $10q^n(10q - 9) > 0$이기 때문이다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대해 $D_n > 0$이며, 이는

$$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots.$$

을 뜻한다. p의 값에 관계없이 의사는 $n = 0$을 택하여 곧바로 치료해야 한다.

이 q_0의 값은 더 낮출 수 없다. $q < \frac{9}{10}$이면 $D_0 = 10p - 10(1-p)(9-10q)$는 p가 충분히 작을 때 음수이므로, 적어도 한 번 검사하는 것이 $n = 0$보다 낫다. 말로 풀면, $q > \frac{9}{10}$일 때 스텝 증후군 환자의 검사가 음성으로 나오는 것은 열 번에 한 번보다 드물므로, £10짜리 검사는 열병 환자를 고려하기도 전에 이미 평균적으로 £10보다 적은 치료비를 아껴 줄 뿐이다.

검산

- $n = 1$을 직접 계산하면 $E_1 = 10 + 100\big(p + (1-p)q\big)$이다. $p = 0$이면 $E_1 - E_0 = 10 - 100(1-q)$가 되어, 공식의 $-10q^0(9-10q)$와 일치한다.
- $p = 10^{-4}$, $q = 10^{-2}$일 때 공식은 $E_0 = 100$, $E_1 \approx 11.010$, $E_2 \approx 10.1210$, $E_3 \approx 10.11309$, $E_4 \approx 10.11400$을 준다. 앞에서 구한 대로 최솟값은 $n = 3$에서 나타난다.
- 분수를 이용한 정확한 전수 계산으로 수백 개의 무작위 (p, q)와 $n \le 8$에 대해 E_n의 공식과 차에 대한 항등식을 확인했으며, $p = 0.3$, $q = 0.5$, $n = 2$로 한 시뮬레이션에서는 평균 비용이 63.98로, 정확한 값 64와 대비된다.

흔한 실수

- 스텝 증후군 환자에게 n번의 검사 비용을 모두 부과하는 것. 이 과정은 첫 음성 결과에서 멈추므로, k번째 검사는 확률 q^{k-1}로만 시행된다.
- D_n이 단조(monotonic)인 이유를 말하지 않고 $D_n > 0$인 첫 번째 n을 찾는 것. 그 근거가 없으면 수열 E_n이 원리적으로 나중에 다시 감소할 수도 있다.
- 소문항 (ii)에서 $p = 0$인 경우를 빠뜨리는 것. 이 경우 때문에 조건이 $q \ge q_0$이 아니라 $q > q_0$이다. $q = \frac{9}{10}$이고 $p = 0$이면 모든 E_n이 100과 같다.

STEP 너머

이것은 **최적 정지**(*optimal stopping*)와 결정 이론(decision theory)의 작은 예이다. 비용이 드는 일련의 행동, 확률적인 상태, 그리고 언제 멈출지에 대한 규칙이 있다. 이웃한 전략들을 비교하고("한계 분석(marginal analysis)") 그 차의 부호가 한 번만 바뀜을 보이는 것이 이런 문제를 다루는 표준적인 방법이다. 이러한 아이디어는 베이즈 결정 이론(Bayesian decision theory)과 동적 계획법(dynamic programming)으로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 그 바탕이 되는 조건부 기댓값(conditional expectation)의 도구들을 다룬다.

풀이

STEP III 1987, 문제 16

확률과 통계 • 순서통계량과 푸아송분포

STEP III 1987, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q16

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 사건 "$A \le k$이고 $B \ge 1-k$"를 직접 다루기는 까다롭지만, 그 여사건(complement)은 두 단순한 사건 "모든 X_i가 k보다 크다"와 "모든 X_i가 $1-k$보다 작다"의 합사건(union)이다. 그다음은 포함-배제 원리(inclusion–exclusion)가 해결해 준다. 소문항 (ii)에서 당첨자 수는 n이 매우 크고 p가 매우 작은 이항분포(binomial distribution)를 따르는데, 이것이 바로 푸아송 분포(Poisson distribution)가 등장하는 상황이다. 따라서 당첨자가 한 명 또는 두 명일 푸아송 확률을 최대화한 다음, 근사(approximation) 때문에 답이 60%를 넘어갈 수는 없다는 것을 확인한다.

풀이

소문항 (i)

E를 사건 $A > k$, F를 사건 $B < 1-k$라 하자. 그러면 $A > k$는 모든 X_i가 k보다 크다는 뜻이고, $B < 1-k$는 모든 X_i가 $1-k$보다 작다는 뜻이다. 독립성(independence)에 의해

$$\mathrm{P}(E) = (1-k)^n, \qquad \mathrm{P}(F) = (1-k)^n, \qquad \mathrm{P}(E \cap F) = (1-2k)^n,$$

이다. 마지막 식이 성립하는 것은 $E \cap F$가 모든 X_i가 길이 $1-2k > 0$인 구간 $(k, 1-k)$에 놓인다는 뜻이기 때문이다.

구하려는 사건은 $E \cup F$의 여사건이므로, 포함-배제 원리에 의해

$$p_n = 1 - \mathrm{P}(E \cup F) = 1 - 2(1-k)^n + (1-2k)^n.$$

$0 < 1-2k < 1-k < 1$이므로 두 거듭제곱은 모두 0으로 수렴하고, 따라서

$$p_n \to 1 \quad \text{단, } n \to \infty.$$

참고. k를 아무리 작게 잡더라도, 관측값이 충분히 많으면 어떤 관측값은 0으로부터 k 이내에, 또 다른 관측값은 1로부터 k 이내에 놓인다는 것이 거의 확실해진다. 다시 말해 표본 최솟값(sample minimum)은 0으로, 표본 최댓값(sample maximum)은 1로 (확률적으로) 수렴하므로, 표본 범위(sample range) $B - A$는 전체 구간의 길이인 1로 수렴한다. 예를 들어 A와 B가 미지의 균등분포(uniform distribution)의 양 끝점에 대한 자연스러운 추정량(estimator)인 것도 이 때문이다.

소문항 (ii)

$N = 4\,000\,000$이라 하고 X를 당첨자 수라 하자. 독자들은 각각 확률 p로 서로 독립적으로 당첨되므로 $X \sim \mathrm{B}(N, p)$이다. $q = 1 - p$라 쓰자. 자리를 지키는 것은 정확히 $X = 1$ 또는 $X = 2$일 때이며, 그 확률은

$$K(p) = Npq^{N-1} + \binom{N}{2} p^2 q^{N-2}.$$

푸아송 분포로 바라보기. N이 매우 크고 p가 작으므로 X는 근사적으로 평균이 $\lambda = Np$인 푸아송 분포를 따르고, 따라서

$$K(p) \approx h(\lambda), \qquad \text{여기서} h(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right).$$

미분하면

$$h'(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \lambda - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right),$$

이고, 이는 $0 < \lambda < \sqrt{2}$에서 양수, $\lambda > \sqrt{2}$에서 음수이다. 따라서 h는 $\lambda = \sqrt{2}$에서 최댓값을 가진다.

$$h(\sqrt{2}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 1) \approx 0.2431 \times 2.4142 \approx 0.5869.$$

가장 좋은 선택은 $p = \sqrt{2}/N \approx 3.5 \times 10^{-7}$이고, 그렇게 하더라도 살아남을 확률은 약 58.7%에 불과하다. 이것이 문제가 요구하는 추론이다.

> **생각해 보기** 푸아송 분포는 근사일 뿐이다. 실제 이항분포 확률이 0.6을 슬그머니 넘어설 수는 없을까?

그럴 수 없다. $K(p)$를 직접 위로 유계시킬 수 있다. $q \le 1$이고 $\binom{N}{2} \le \frac{1}{2}N^2$이므로

$$K(p) = q^{N-2}\left(Npq + \binom{N}{2}p^2\right) \le q^{N-2}\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right).$$

이제 모든 p에 대해 $1 - p \le \mathrm{e}^{-p}$이므로(직선 $1 - p$는 볼록(convex)한 곡선 e^{-p}의 $p = 0$에서의 접선(tangent)이다), $\mu = (N-2)p$라 할 때 $q^{N-2} \le \mathrm{e}^{-(N-2)p} = \mathrm{e}^{-\mu}$이다. $c = N/(N-2)$라 두면 $c > 1$이고 $\lambda = c\mu$이다. 그러면

$$K(p) \le \mathrm{e}^{-\mu}\left(c\mu + \frac{c^2\mu^2}{2}\right) \le c^2\,\mathrm{e}^{-\mu}\left(\mu + \frac{\mu^2}{2}\right) = c^2 h(\mu) \le c^2 h(\sqrt{2}).$$

여기서 $c^2 = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{-2} < 1.000002$이므로, p를 어떻게 선택하든

$$K(p) < 1.000002 \times 0.58694 < 0.587 < 0.6.$$

따라서 p를 어떻게 정하더라도 자리를 지킬 확률은 60%보다 작으며, 이로써 요구된 결과가 증명된다.

검산

- 소문항 (i)에서 $n = 1$이면 $p_1 = 1 - 2(1-k) + (1-2k) = 0$이다. 이는 옳다. $k < \frac{1}{2}$일 때 관측값 하나가 $\le k$이면서 동시에 $\ge 1-k$일 수는 없기 때문이다. $n = 2$이면 $p_2 = 2k^2$를 얻는데, 이는 두 점 중 하나씩이 양 끝의 띠에 각각 떨어질 확률(순서는 상관없음)이다.
- $n = 10$, $k = 0.3$으로 한 시뮬레이션(simulation)에서는 0.944를 얻었는데, 공식의 값은 0.9436이다.
- $\lambda = Np$의 촘촘한 격자에서 정확한 이항분포 확률 $K(p)$를 계산하면 $\lambda \approx 1.414$에서 최댓값 0.58694를 얻으며, 이는 푸아송 값과 소수점 아래 다섯째 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- $p_n = \mathrm{P}(A \le k)\,\mathrm{P}(B \ge 1-k)$라고 쓰는 것. 같은 표본의 최솟값과 최댓값은 독립이 **아니다**.
- 이항분포 확률을 p에 대해 직접 최대화하는 것. 할 수는 있지만 계산이 번거롭다. $\lambda = Np$로 다루면 한 줄짜리 미분 문제가 된다.
- 0.587이 0.6에 상당히 가까워서 어느 정도 정당화가 필요하다는 점을 알아차리지 못한 채 푸아송 근사에서 멈추는 것.

STEP 너머

소문항 (i)은 **순서통계량**(order statistics)과 확률수렴(convergence in probability)을 처음 맛보는 문제이다. 표본의 최솟값과 최댓값은 받침(support)의 양 끝으로 수렴한다. 소문항 (ii)는 푸아송의 "희귀 사건의 법칙(law of rare events)"이며, 여기서 사용한 부등식은 p가 작을 때 이항분포와 푸아송 분포가 총변동 거리(total variation)의 의미에서 매우 가깝다는 일반적인 사실의 간단한 예이다. 두 아이디어 모두 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 더 자세히 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

1987년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

