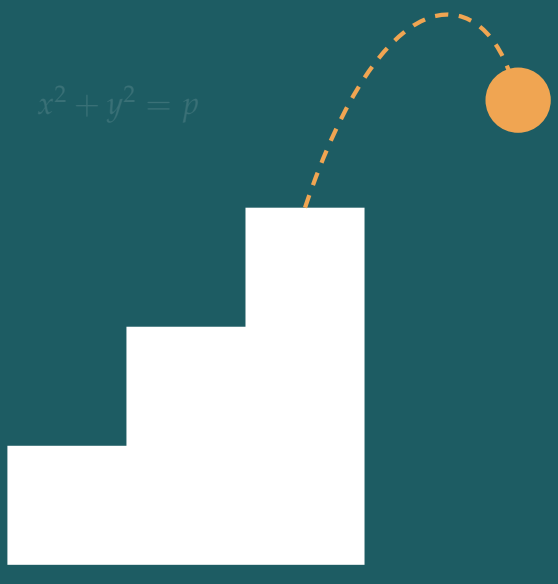
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

제11장

진동, 회전, 그리고 움직이는 좌표계



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

제11장

진동, 회전, 그리고 움직이는 좌표계

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

제11장: 진동, 회전, 그리고 움직이는 좌표계

이 PDF는 *Beyond STEP*의 전체 13개 장 가운데 제11장이다. 책 전체, 각 장의 개별 PDF, 모든 절의 인쇄용 연습지, 모든 STEP 문제의 자세한 풀이를 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 남겨 주기 바란다.

장

11

진동, 회전, 움직이는 기준틀

흔들리는 것, 도는 것, 그리고 움직이는 곳에서 바라본 것.

이 장의 내용

11.1	공명	STEP II 1991
11.2	기준 진동	STEP III 2014
11.3	실제 진자	STEP III 1998
11.4	등시 곡선	STEP III 1994
11.5	가속하는 기차 안의 중력	STEP II 2021
11.6	백스핀	STEP III 1997
11.7	막대 속의 심프슨 공식	STEP II 1989
11.8	기울어진 평형	STEP III 2025
11.9	안전 포물선	STEP II 2014
11.10	나에게로 되돌아오는 공	STEP II 2019
11.11	야수는 어떻게 공을 잡는가	STEP II 1998
11.12	고무줄 위의 개미	STEP II 2018
11.13	제설차 문제	STEP III 견본 시험지(Specimen paper)
11.14	현수선이 아니라 포물선	STEP I 1991
A	연습문제 해답	95쪽

운동을 또렷하게 보기

> 젊은 이론물리학자의 경력이란 조화 진동자를 점점 더 높은 수준의 추상화로 다루어 가는 과정이다.
>
> — Sidney Coleman의 말로 전해짐

앞 장에서는 보존 법칙(conservation law)을 이용해 충돌과 중력을 이해했다. 이 장에서는 역학 입문 과정의 또 다른 큰 주제들로 넘어간다. 진동(oscillation)하는 것, 회전(rotation)하는 것, 그리고 가장 쓸모 있는 관점에서 운동을 기술하는 기술이 그것이다.

진동은 어디에나 있다. 진자와 용수철이 교과서의 대표적인 예이지만, 똑같은 수학이 분자의 진동, 건물의 흔들림, 라디오 속 회로, 그리고 양자역학(quantum mechanics)에서는 빛 자체의 거동까지 기술한다. 그 까닭은 안정한 평형(equilibrium) 근처에 있는 거의 모든 것이 용수철처럼 행동하기 때문이다. 조금만 잡아당기면 복원력(restoring force)이 변위(displacement)에 비례한다. 그래서 단순 조화 진동자(simple harmonic oscillator)는 거의 모든 물리계의 첫 번째 근사이며, 물리학의 상당 부분은 이 근사가 딱 들어맞지 않을 때 어떤 일이 일어나는지를 이해하는 일이다.

왜 중요한가

공학자는 자신이 짓는 모든 구조물의 고유 진동수(natural frequency)를 알아야 하며, 그래야 그것을 바람, 교통, 지진의 진동수로부터 멀리 떨어뜨려 놓을 수 있다. 화학자는 분자를 그 진동으로 식별한다. 하위헌스(Huygens)의 진자시계에서 쿼츠 시계와 원자시계에 이르기까지, 시간 측정이란 완벽한 진동자를 만드는 기술이다. 회전은 당구공의 회전에서 인공위성의 안정성까지 모든 것을 지배한다. 그리고 어떤 기준틀(frame of reference)이 "자연스러운가"라는 질문은 중력과 가속도의 동등성을 거쳐 아인슈타인(Einstein)의 일반 상대성 이론(general relativity)으로 이어졌다.

이 장은 **뜻밖의 궤적**으로 묶은 여섯 문제로 끝난다. 직관이 예측하는 것과 다르게 움직이는 포물체, 개미, 야수, 제설차에 관한 문제들이다. 모두 짧고 우아한 문제이며, 각각의 중심에는 제대로 된 수학적 아이디어가 있다. 포락선(envelope), 단조성(monotonicity), 되먹임(feedback), 발산(divergence), 선형 미분방정식(linear differential equation), 그리고 포물선(parabola)과 현수선(catenary)의 차이가 그것이다.

대학에서 만나게 될 것

대학 1학년 역학 과정에서는 단순 조화 운동, 감쇠(damped) 조화 운동, 강제(forced) 조화 운동, 공명(resonance), 그리고 연성 진동자(coupled oscillators)와 그 기준 진동 모드(normal modes)를 다룬다(선형대수와 역학이 만나는 지점이다). 또한 강체(rigid body), 관성 모멘트(moment of inertia), 굴림 운동(rolling), 그리고 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)이 등장하는 가속 기준틀과 회전 기준틀에서의 운동을 다룬다. 이후의 과정에서는 이 모든 것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)과 해밀턴 역학(Hamiltonian mechanics)으로 발전하는데, 여기서는 좌표의 선택이 핵심 주제가 된다. 또 공간으로 퍼져 나간 진동인 파동(wave)의 이론으로도 발전한다. 진폭이 큰 진자와 같은 비선형 진동(nonlinear oscillation)은 타원 함수(elliptic function)와 8장의 동역학계(dynamical system)로 이어진다.

이 장을 관통하는 질문

세 가지 큰 질문

1. **운동은 언제 단순한가?** 계는 언제 하나의 고정된 진동수로 진동하며, 그렇지 않을 때는 어떤 일이 일어나는가?
2. **올바른 관점은 무엇인가?** 어떤 좌표, 어떤 변수, 어떤 기준틀을 택해야 문제가 쉬워지는가?
3. **직관을 믿을 수 있는가?** 운동에 관한 일상의 직관은 어디에서 틀리며, 수학은 그것을 어떻게 바로잡는가?

이 장은 진동에서 시작한다. 공명(Section 11.1), 기준 진동 모드, 실제 진자, 그리고 등시곡선(tautochrone)이다. 그다음 기준틀과 강체로 넘어간다. 가속하는 기차, 회전하는 구슬, 세 개의 입자처럼 행동하는 막대, 그리고 세 가지 서로 다른 기울기로 놓일 수 있는 입체가 등장한다. 마지막 여섯 절은 뜻밖의 궤적이다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
11.1	강제 진동	공명과 맥놀이(beats)
11.2	연성 진동자	기준 진동 모드는 고유벡터(eigenvector)이다
11.3	실제 진자	타원 적분(elliptic integral); 산술기하평균(AGM)
11.4	등시곡선	호의 길이(arc length)에 대한 단순 조화 운동
11.5	움직이는 기준틀	가상력(fictitious force); 등가 원리(equivalence principle)
11.6	굴림과 미끄러짐	보존되는 각운동량(angular momentum)
11.7	관성 모멘트	동역학적 동등성; 심프슨 공식(Simpson's rule)
11.8	안정성	질량중심(centre of mass)을 지나는 법선
11.9	포물체 운동	궤적들의 포락선
11.10	포물체 운동	거리가 꼭 증가하는 것은 아니다
11.11	공 잡기	되먹임 규칙
11.12	늘어나는 밧줄	비율과 조화급수(harmonic series)
11.13	제설차	거리의 함수로서의 시간
11.14	현수교	현수선이 아니라 포물선

Section 11.6과 Section 11.7의 두 절은 회전 동역학과 관성 모멘트를 사용하는데, 이 내용은 2019년에 STEP 출제 범위(specification)에서 빠졌다. 그래도 훌륭한 문제이기에 실었으며, 각 절에서 필요한 사실은 모두 제시한다.

이 장을 읽는 법

계산을 시작하기 전에 먼저 문제가 어떤 변수를 원하는지 물어보라. 등시곡선에서는 호의 길이, 연결된 용수철에서는 $x \pm y$, 개미 문제에서는 밧줄에 대한 비율, 제설차 문제에서는 거리의 함수로서의 시간이다. 어느 경우에나 올바른 선택이 어려운 문제를 익숙한 문제로 바꾸어 준다.

11.1 공명

문제

STEP II 1991, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/91-s2-q12`

도입

그네 탄 아이를 딱 알맞은 순간마다 밀어 주면 작은 힘이 쌓여 그네가 크게 흔들린다. 박자가 어긋나게 밀면 별일이 일어나지 않는다. 진동하는 계에는 모두 **고유진동수**(natural frequency)가 있고, 바로 그 진동수로 힘을 가하면 들인 노력에 비해 엄청나게 큰 반응이 나온다. 이것이 **공명**(resonance)이다. 가수가 와인 잔을 깨뜨릴 수 있는 것도, 군인들이 다리를 건널 때 발을 맞추지 않는 것도, 라디오가 수천 개의 방송국 가운데 하나를 골라낼 수 있는 것도 모두 공명 때문이다.

이 문제는 탄성 끈(elastic string)의 위쪽 끝을 흔들고, 끈이 언제 팽팽한(taut) 상태를 유지하는지 묻는다. 답에는 인수 $\frac{1}{n-p}$가 들어 있는데, 이 값은 구동 진동수 p가 고유진동수 n에 가까워질수록 한없이 커진다. 공명 근처에서는 살짝만 흔들어도 끈이 느슨해진다(slack).

시작하기 전에

생각해 보기 입자는 늘어난 길이(extension)가 c인 상태로 평형(equilibrium)을 이루며 매달려 있다. 끈의 탄성계수(modulus)가 λ이면 λ, a, c, m, g 사이에는 어떤 관계가 있는가? 위쪽 끝이 $b\sin pt$만큼, 입자가 x만큼 아래로 움직였을 때 늘어난 길이는 얼마인가?

평형 상태에서는 장력(tension)과 무게가 같으므로 $\frac{\lambda c}{a} = mg$이다. 위쪽 끝이 $b\sin pt$만큼, 입자가 x만큼 아래로 변위되면 끈의 길이는 $x - b\sin pt$만큼 늘어나므로, 늘어난 길이는 $c + x - b\sin pt$이다.

차근차근 풀기

1단계 운동 방정식

아래쪽을 양의 방향으로 잡으면, 입자에 작용하는 힘은 무게 mg와 위쪽으로 작용하는 장력 $\frac{\lambda}{a}(c+x-b\sin pt)$이다.

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{a}(c+x-b\sin pt) = -\frac{\lambda}{a}(x-b\sin pt),$$

여기서 $\frac{\lambda c}{a} = mg$를 이용하였다. $\frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2$이므로 이 식은 $\ddot{x} = -n^2(x-b\sin pt)$가 된다. ■

입자는 움직이는 점 $b\sin pt$ 쪽으로 용수철 같은 힘을 받는다. 구동이 없다면 입자는 각진동수(angular frequency) n, 즉 고유진동수로 진동할 것이다.

2단계 방정식 풀기

> ? **생각해 보기** 방정식은 $\ddot{x}+n^2x = n^2b\sin pt$이다. $x = C\sin pt$ 꼴의 특수해(particular solution)를 시도해 보자. 그런 다음 $\ddot{x}+n^2x=0$의 일반해(general solution)를 더한다. 입자는 어떤 초기조건(initial conditions)을 만족하는가?

$x = C\sin pt$를 대입하면 $(-p^2+n^2)C = n^2b$이므로 $C = \frac{n^2b}{n^2-p^2}$이다($p \neq n$이어야 한다). 여함수(complementary function)는 $D\cos nt + E\sin nt$이다. 입자는 평형 위치에서 정지 상태로 출발한다. $x(0)=0$에서 $D=0$이고, $\dot{x}(0)=0$에서 $Cp+En=0$이므로 $E = -\frac{nbp}{n^2-p^2}$이다. 이를 모두 합치면

$$x(t) = \frac{bn}{n^2-p^2}(n\sin pt - p\sin nt). \quad ■$$

3단계 팽팽함 유지하기

> ? **생각해 보기** 끈은 늘어난 길이가 양수일 때 정확히 팽팽하다. 늘어난 길이 $c+x-b\sin pt$를 t로 나타내어 보자.

$x(t)$에서 $b\sin pt$를 빼면

$$\begin{aligned} x - b\sin pt &= \frac{b}{n^2-p^2}\left(n^2\sin pt - np\sin nt - (n^2-p^2)\sin pt\right) \\ &= \frac{bp}{n^2-p^2}(p\sin pt - n\sin nt). \end{aligned}$$

따라서 끈이 줄곧 팽팽함을 유지할 필요충분조건은

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \qquad \text{모든} t \geq 0.$$

에 대하여 성립하는 것이다.

> **생각해 보기** $p \sin pt - n \sin nt$는 최대한 얼마나 작은 음수가 될 수 있는가?

$|\sin| \leq 1$이므로 $p \sin pt - n \sin nt \geq -(p+n)$이다. 따라서 늘어난 길이는 적어도

$$c - \frac{bp(n+p)}{n^2 - p^2} = c - \frac{bp}{n-p},$$

이고, 이 값은 $pb < (n-p)c$이면 양수이다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** p가 n에 가까워지면 이 조건은 어떻게 되는가? $p = 0.9n$일 때 흔드는 진폭 b는 얼마나 작아야 하는가? $p = 0.99n$일 때는?

돌아보기

- **평형 위치에서부터 잰다.** 평형 상태의 늘어난 길이 c를 이용하여 방정식에서 중력을 없앴다.
- **특수해와 여함수의 합.** 진동수 p의 강제 응답에 진동수 n의 자유 진동을 더하고, 상수는 초기조건으로 정했다.
- **풀지 말고 어림하라.** 늘어난 길이의 최솟값을 정확히 구하지 않았다. 사인에 대한 거친 어림만으로도 충분조건(sufficient condition)을 얻기에 충분했다.

숨은 수학

공명 극한

해에서 $p \to n$으로 보내 보자. 분자와 분모가 모두 0으로 수렴하는데, 극한 계산(또는 p에 대하여 미분하는 로피탈(l'Hôpital)의 정리)을 하면

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt \cos nt).$$

을 얻는다. 항 $nt \cos nt$는 한없이 커진다. 정확히 고유진동수로 구동하면 매번 미는 힘이 운동과 박자를 맞추어 더해지므로 진폭이 시간에 대해 선형으로 증가한다. 공명보다 조금 아래에서는 두 진동수가 박자가 맞았다 어긋났다 하면서 **맥놀이**(beats)가 생긴다. 진폭이 느

린 진동수 $n - p$로 커졌다 잦아들기를 반복하는 것이다(그림 11.1.1). 거의 같은 음으로 조율된 두 기타 줄에서도 같은 맥놀이가 들린다.

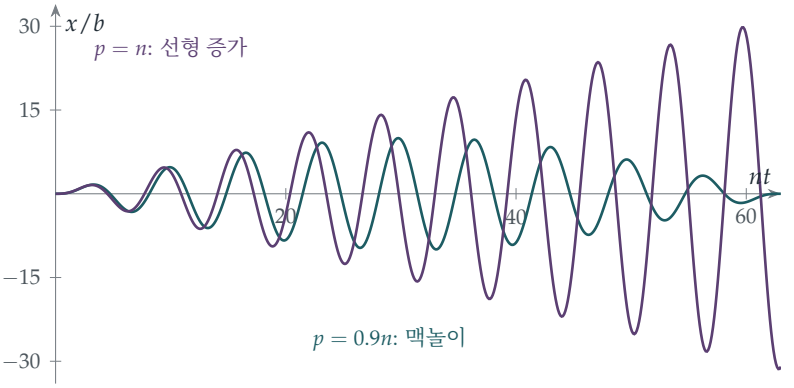


그림 11.1.1 입자의 응답(끈이 느슨해지는 것은 무시함)을 흔드는 진폭 b를 단위로 나타낸 그래프. $p = 0.9n$일 때(청록색) 응답은 b의 약 10배까지 커졌다가 다시 잦아들며, 맥놀이 주기는 $\frac{2\pi}{n-p}$이다. 정확한 공명 상태인 $p = n$일 때(자주색) 진폭은 한없이 커진다.

감쇠와 공명 곡선

실제 계는 마찰이나 공기 저항으로 에너지를 잃고, 이 때문에 진폭의 증가가 제한된다. 감쇠(damping)가 있으면 진동수 p의 구동력에 대한 정상 상태(steady-state) 응답의 진폭은 고유진동수 근처에서 최대가 된다. 봉우리가 뾰족할수록 감쇠가 작다. 공학자들은 이를 **품질 계수**(quality factor) Q로 나타낸다. 대략 말하면, 계가 에너지의 대부분을 잃기 전까지 진동하는 횟수이다. 와인 잔의 Q는 수천에 이르므로, 정확히 고유진동수의 음을 지속해서 내면 잔이 깨질 수 있다. 자동차의 서스펜션은 일부러 Q를 낮게 만들어 요철을 지나도 차가 계속 튀지 않게 한다.

움직이는 다리

1831년, 맨체스터 근처의 브로턴 현수교(Broughton Suspension Bridge)를 발맞추어 행진하던 군인들의 대열이 다리를 진동시켜 결국 무너뜨렸다. 그 뒤로 군대는 다리 위에서 발을 맞추지 말라는 명령을 받게 되었다. 2000년 6월에 개통한 런던 밀레니엄 브리지(Millennium Bridge)는 사람들이 건너자마자 옆으로 흔들리기 시작했다. 보행자들이 무의식적으로 흔들림에 발걸음을 맞추어 박자에 맞게 에너지를 공급했기 때문이며, 다리는 감쇠 장치를 설치하는 2년 동안 폐쇄되었다. 1940년의 유명한 타코마 내로스 다리(Tacoma Narrows Bridge) 붕괴는 흔히 공명으로 설명되지만, 실제로는 바람의 힘이 다리 자체의 운동에 따라 달라지는 다른 현상인 **공기탄성 플러터**(aeroelastic flutter)였다. 이를 분석하려면 자려 진동(self-excited oscillation)과 리밋 사이클(limit cycle)의 개념이

필요하다(Section 8.4).

사고 기술

강제 응답과 자유 응답을 중첩하라

주기적인 힘으로 구동되는 선형 방정식의 해는 구동 진동수의 응답에, 초기조건에 맞게 고른 고유진동수의 자유 진동을 더한 것이다.

이것이 가능한 이유는 선형성(linearity) 때문이다. 해들을 더할 수 있기 때문이다. 대학에서는 같은 원리를 여러 구동 진동수의 합에 적용하여 푸리에(Fourier) 해석, 공학의 전달 함수(transfer function), 물리학의 그린(Green) 함수로 나아간다.

더 도전하기

1 **떨어지는 엘리베이터.** STEP II 1996, 11번 문제 (`step.maths.org/questions/96-s2-q11`)에 도전해 보자. 가속하기 시작했다가 가속을 멈추는 엘리베이터 안에서 탄성 끈에 매달린 질량에 관한 문제이다. 최종 진폭이 가속 지속 시간에 따라 어떻게 달라지는지 살펴보자.

2 **공명 상태.** 특수해 $x = Ct\cos nt$를 시도하여, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$인 $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin nt$를 직접 풀어라. 그 결과가 위의 극한과 일치하는지 확인하여라.

3 **맥놀이.** $n\sin pt - p\sin nt$를 두 항의 합으로 쓸 수 있고, p가 n에 가까울 때 그중 한 항이 근사적으로 $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$임을 보여라. 이를 이용하여 맥놀이 주기 $\frac{2\pi}{n-p}$를 설명하여라.

4 **감쇠가 있는 공명.** 작은 $k > 0$에 대하여 $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2 x = F\cos pt$의 정상 상태 진폭을 구하고, 이 진폭이 $p^2 = n^2 - 2k^2$일 때 최대임을 보여라.

더 읽을거리

- **A. P. French, *Vibrations and Waves*** (MIT Introductory Physics Series). 강제 진동과 공명을 다룬 4장은 고전적인 설명이다.
- **Steven Strogatz, *Sync*** (Penguin). 반딧불이에서 밀레니엄 브리지까지, 사물이 어떻게 박자를 맞추게 되는지를 다룬다.

- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human*** (Vintage). 역사 상자에 나온 다리들을 포함하여 공학의 실패 사례를 다룬다.

11.2 기준 진동

문제

STEP III 2014, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s3-q10`

도입

용수철에 매달린 질량 하나는 단순하고 규칙적으로 위아래로 진동한다. 그런데 두 질량을 용수철로 이어 붙이면 운동이 복잡해 보인다. 각 질량은 불규칙하게 움찔거리고, 에너지는 한쪽에서 다른 쪽으로 출렁이며 옮겨 다닌다. 하지만 이 복잡함 속에는 완벽하게 단순한 두 운동, 곧 **정규 모드**(*normal modes*)가 숨어 있다. 정규 모드에서는 두 질량이 함께 움직이거나 정확히 반대로 움직이며, 각 모드는 고유한 진동수(frequency)로 진동한다. 이 계의 모든 운동은 두 모드의 결합이다.

이 문제에서는 세 용수철 사이에 놓인 두 질량의 정규 모드를 구한 다음, 놀라운 사실 하나를 증명(proof)한다. 한 질량만 변위시킨 채 정지 상태에서 출발하면, 이 계는 출발 위치로 **결코** 돌아오지 않는다. 그 까닭은 두 진동수의 비가 $\sqrt{3}$이고, $\sqrt{3}$이 무리수(irrational number)이기 때문이다.

시작하기 전에

생각해 보기 X가 P로부터 거리 $a + x$에 있고 Y가 Q로부터 거리 $a + y$에 있을 때, 가운데 용수철 XY의 길이는 얼마인가? x와 y가 양수일 때 어느 용수철이 늘어나고 어느 용수철이 압축되는가?

세 길이의 합은 $3a$이므로 $XY = 3a - (a + x) - (a + y) = a - x - y$이다. $x, y > 0$일 때 바깥쪽 두 용수철은 (각각 x와 y만큼) 늘어나고, 가운데 용수철은 ($x + y$만큼) 압축된다.

차근차근 풀기

1단계 운동 방정식

x는 P에서 Q로 향하는 방향으로 잰다. 용수철 PX의 늘어난 길이는 x이므로, 그 장력(tension) $\frac{\lambda x}{a}$는 X를 P 쪽으로 끌어당긴다. 용수철 XY의 늘어난 길이는 $-(x+y)$이므로, 그 장력 $-\frac{\lambda(x+y)}{a}$는 X를 Y 쪽으로 끌어당긴다(음의 장력은 미는 힘이다). 따라서

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda x}{a} - \frac{\lambda(x+y)}{a} = -\frac{\lambda}{a}(2x+y). \qquad \blacksquare$$

대칭성에 의해(X와 Y, P와 Q의 역할을 서로 바꾸면)

$$m\ddot{y} = -\frac{\lambda}{a}(2y+x).$$

2단계 방정식 분리하기

> **생각해 보기** 각 방정식에는 x와 y가 모두 들어 있다. 두 방정식을 어떻게 결합하면 x와 y의 결합 하나만 들어 있는 식이 되는가?

두 식을 빼고 더하면

$$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -\frac{\lambda}{a}(x-y), \qquad m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -\frac{3\lambda}{a}(x+y).$$

각각은 단진동(simple harmonic motion)의 방정식이다. $x-y$는 $\omega^2 = \frac{\lambda}{ma}$로, $x+y$는 $3\omega^2$으로 진동한다.

3단계 초기 조건

처음에 $XP = a$이고 $YQ = \frac{1}{2}a$이므로 $x = 0, y = -\frac{1}{2}a$이며, 두 입자는 모두 정지해 있다. 따라서 $t = 0$에서 $x-y = \frac{1}{2}a$, $x+y = -\frac{1}{2}a$이고 변화율은 0이므로

$$x-y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t, \qquad x+y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

그러므로 $A = \frac{1}{2}a$, $B = 0$이다. $\blacksquare$

4단계 결코 돌아오지 않는다

> **생각해 보기** y를 t에 대한 식으로 나타내어라. Y가 처음 위치로 돌아오려면 $y = -\frac{1}{2}a$이어야 한다. 이때 두 코사인 값은 각각 얼마이어야 하는가?

두 식을 빼면 $y = \frac{1}{2}\big((x+y)-(x-y)\big) = -\frac{1}{4}a\big(\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t\big)$이다. $y = -\frac{1}{2}a$이려면 $\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t = 2$이어야 하고, 각 코사인 값은 1 이하이므로 둘 다 1이어야 한다. 즉

어떤 정수 k와 j에 대하여

$$\omega t = 2\pi k, \qquad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi j$$

이다. $t > 0$이면 $k \geq 1$이고, 두 식을 나누면 $\sqrt{3} = \frac{j}{k}$가 되는데, $\sqrt{3}$은 무리수이므로 이는 불가능하다. 따라서 Y는 결코 처음 위치로 돌아오지 않는다. ■

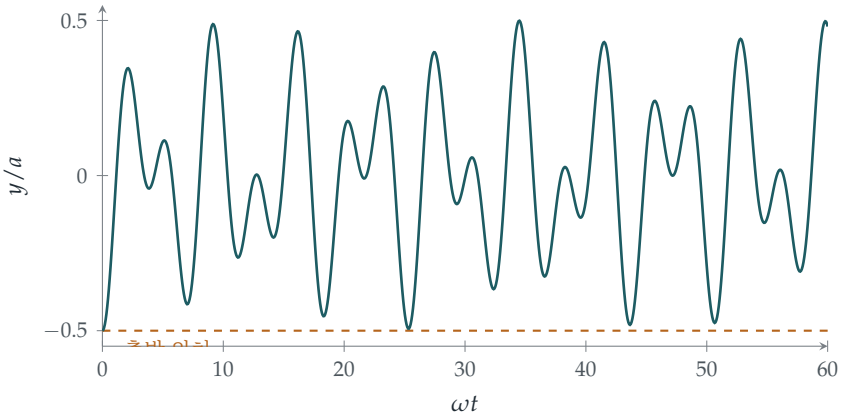


그림 11.2.1 입자 Y의 변위 y. 이는 진동수의 비가 $\sqrt{3}:1$인 두 진동의 합이므로 그 모양이 결코 반복되지 않는다. Y는 출발 위치(점선)에 거듭해서 가까이 다가가지만(예를 들어 $\omega t \approx 25$ 부근, 이때 $\omega t \approx 8\pi$이고 $\sqrt{3}\,\omega t \approx 14\pi$이다), 정확히 그 위치에 도달하지는 않는다.

돌아보기

- **방정식을 분리하는 결합을 찾아라.** $x - y$와 $x + y$는 각각 자기만의 방정식을 만족했다.
- **대칭성이 그 결합을 알려 준다.** 이 계는 양쪽을 서로 바꾸어도 변하지 않으므로, 대칭(symmetric) 결합과 반대칭(antisymmetric) 결합을 생각하는 것이 자연스럽다.
- **무리수라는 성질은 물리적 결과를 낳는다.** 진동수의 비가 무리수이기 때문에 이 운동은 주기적(periodic)이지 않다.

숨은 수학

정규 모드는 고유벡터이다

두 방정식을 행렬(matrix) 방정식으로 쓰면

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

방정식을 분리하는 결합은 이 행렬의 고유벡터(eigenvector)이다. 곧 고윳값(eigenvalue) 1에 대응하는 $(1,-1)$과 고윳값 3에 대응하는 $(1,1)$이다(Section 7.2). 첫 번째 모드에서는 $x=-y$이다. 두 입자는 직선을 따라 같은 방향으로 움직이고(x와 y는 서로 반대쪽 끝에서 잰다는 점을 기억하자), 가운데 용수철은 길이를 그대로 유지한다. 두 번째 모드에서는 $x=y$이다. 두 입자는 서로 반대 방향으로 움직이며 가운데 용수철을 압축하고 늘이므로 진동수가 더 높아진다. 진동수의 제곱은 고윳값에 $\frac{\lambda}{ma}$를 곱한 값이다.

이 방법은 질량과 용수철이 몇 개이든 통한다. 결합된(coupled) 진동자 N개로 이루어진 계는 정규 모드를 N개 가지며, 이들은 대칭행렬의 고유벡터로 주어진다. 스펙트럼 정리(spectral theorem)는 이 고유벡터들이 언제나 존재하고 서로 수직임을 보장한다. 분자는 정규 모드로 진동하며, 화학자들은 분자가 흡수하는 적외선을 통해 분자를 식별한다. 건물과 다리에도 정규 모드가 있으며, 공학자들은 이 진동수가 바람과 지진의 진동수와 겹치지 않도록 해야 한다. 그리고 질량의 개수가 무한대로 갈 때 정규 모드는 진동하는 현의 배음이 되는데, 이것이 바로 푸리에 해석(Fourier analysis)의 출발점이다.

도달하지 않고 가까이 다가가기

Y는 정확히 돌아오지는 않지만, 원하는 만큼 가까이 다가갈 수는 있다. 그 근거는 크로네커(Kronecker)의 정리이다. α가 무리수이면, 배수 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$를 1을 법으로 하여 취한 값들은 $[0,1]$의 모든 수에 얼마든지 가까이 다가간다. 따라서 ωt가 2π의 배수이면서 $\sqrt{3}\,\omega t$가 2π의 어떤 배수와 원하는 오차 이내로 가까운 시각을 찾을 수 있다. 이 운동은 **준주기적**(*quasi-periodic*)이다. 즉 토러스(torus)(각 모드마다 각 하나씩) 위를 감아 돌되 결코 닫히지 않는다. 진동수의 비가 유리수인가 무리수인가 하는 바로 이 구분이, 태양계의 안정성에 관한 KAM 정리의 핵심에 놓여 있다.

사고 기술

변수를 바꾸어 방정식을 분리하라

방정식들이 서로 얽혀 있으면, 독립적으로 변하는 변수들의 결합을 찾아라. 선형 문제에서는 그것이 고유벡터이다.

이는 Section 10.6의 질량중심(centre of mass) 좌표와 상대 좌표(relative coordinates)와 같은 아이디어이다. 대학에서는 이것이 대각화(diagonalisation)가 된다. 행렬이 대각행렬이 되는 기저를 고르면, 서로 얽힌 연립방정식이 독립적인 방정식들로 풀려 나온다.

더 도전하기

1 **에너지.** 전체 에너지 $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\lambda}{2a}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)$가 일정함을 보이고, 이것이 정규 모드마다 하나씩인 두 항의 합으로 나누어지며 각 항이 따로 일정함을 보여라.

2 **순수한 모드.** 운동이 주기 $\frac{2\pi}{\omega}$인 주기 운동이 되려면 입자들을 어떻게 출발시켜야 하는가? 주기가 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$이려면 어떻게 해야 하는가?

3 **더 단단한 가운데 용수철.** 가운데 용수철의 탄성 계수(modulus)가 λ 대신 μ이면, 두 정규 모드의 진동수를 구하여라. μ/λ가 어떤 값일 때 모든 운동이 주기적인가?

4 **세 질량.** 같은 질량 셋이 두 고정점 사이에서 똑같은 용수철 넷으로 한 줄로 연결되어 있다. 행렬과 그 고윳값$(2-\sqrt{2},\,2,\,2+\sqrt{2})$을 구하고, 세 정규 모드를 설명하여라.

더 읽을거리

- **A. P. French, *Vibrations and Waves*** (MIT Introductory Physics Series), 결합 진동자와 정규 모드를 다룬 5장.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge), 고윳값을 다룬 장. 용수철과 질량이 주요 예로 나온다.
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press), 토러스 위의 준주기 운동을 다룬 8장.

11.3 실제 진자

문제

STEP III 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/98-s3-q11`

도입

물리를 배우는 학생이라면 누구나 진자(pendulum)의 주기(period)가 흔들림의 크기와 상관없이 $2\pi\sqrt{l/g}$라고 배운다. 갈릴레이(Galileo)는 피사 대성당에서 흔들리는 등잔의 시간을 자기 맥박으로 재어 본 뒤 이 사실을 믿게 되었다고 전해지며, 진자시계가 작동하는 것도 바로 이 성질 덕분이다. 그러나 이것은 엄밀하게는 참이 아니다. 이 공식은 근사(approximation) $\sin\theta \approx \theta$에서 나온 것이며, 큰 호를 그리며 흔들리는 진자는 시간이 더 오래 걸린다. 90°에서는 주기가 18% 더 길고, 거의 거꾸로 선 위치에서 놓은 진자는 얼마든지 오래 걸릴 수 있다.

이 문제에서는 정확한 주기를 적분으로 구하고, 이어서 적당한 크기의 흔들림에 대한 첫 번째 보정 항을 구한다. 이 적분은 초등함수로 계산할 수 없다. 이것은 **타원적분**(*elliptic integral*)이며, 이러한 적분을 길들여 온 이야기는 가우스(Gauss)의 산술기하평균에서 시작하여 타원곡선 이론에까지 이른다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 추는 반지름이 l인 원 위를 움직인다. θ와 $\dot{\theta}$로 나타내면 추의 속력과 (가장 낮은 점을 기준으로 한) 높이는 각각 얼마인가?

속력은 $l\dot{\theta}$이고, 가장 낮은 점으로부터의 높이는 $l(1-\cos\theta)$이다. 줄은 일을 하지 않으므로(장력이 항상 운동 방향에 수직이므로) 에너지는 보존된다.

차근차근 풀기

1단계 에너지

최대 각 γ에서 추는 순간적으로 정지한다. 에너지 보존(conservation of energy)에 의해

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\gamma),$$

이고, ml로 나누면 $\tfrac{1}{2}l\dot{\theta}^2 = g(\cos\theta - \cos\gamma)$이다. ■

2단계 적분으로 나타낸 주기

> **생각해 보기** $\cos\theta - \cos\gamma$를 반각으로 어떻게 나타낼 수 있는가? 또 $\theta = 0$에서 $\theta = \gamma$까지 가는 데 주기의 얼마만큼이 걸리는가?

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}$를 이용하면 $\cos\theta - \cos\gamma = 2(\sin^2\tfrac{\gamma}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2})$이므로

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}.$$

대칭성에 의해 0에서 γ까지 흔들리는 데 주기의 4분의 1이 걸리므로

$$P = 4\int_0^{\gamma}\frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\theta. \qquad ■$$

3단계 특이점 없애기

> **생각해 보기** 피적분함수는 $\theta = \gamma$에서 무한대가 된다. $k = \sin\tfrac{\gamma}{2}$로 두고 $\sin\tfrac{\theta}{2} = k\sin\phi$로 치환하자. $0 \le \theta \le \gamma$에 대응하는 ϕ의 범위는 무엇인가? 피적분함수는 어떻게 되는가?

θ가 0에서 γ까지 변할 때 ϕ는 0에서 $\tfrac{\pi}{2}$까지 변한다. 미분하면 $\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$이므로

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

한편 $\sin^2\tfrac{\gamma}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2} = k^2(1-\sin^2\phi) = k^2\cos^2\phi$이다. 성가신 인수들이 약분된다.

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

$k < 1$이므로 새 피적분함수는 아무 문제 없이 잘 정의된다. 이렇게 특이점(singularity)이 사라진다.

4단계 **첫 번째 보정**

> ? **생각해 보기** k가 작을 때 $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$를 이항정리(binomial theorem)로 전개하라. $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,d\phi$의 값은 얼마인가?

1차까지 $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\approx 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\phi$이고 $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,d\phi=\frac{\pi}{4}$이다. 따라서

$$P\approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right).$$

γ가 작으면 $k=\sin\frac{\gamma}{2}\approx\frac{\gamma}{2}$이므로 $k^2\approx\frac{\gamma^2}{4}$이고

$$P\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}\right). \qquad \blacksquare$$

20°의 흔들림($\gamma\approx 0.35$)에서는 보정이 1%보다 작고, 60°에서는 약 7%이다(그림 11.3.1).

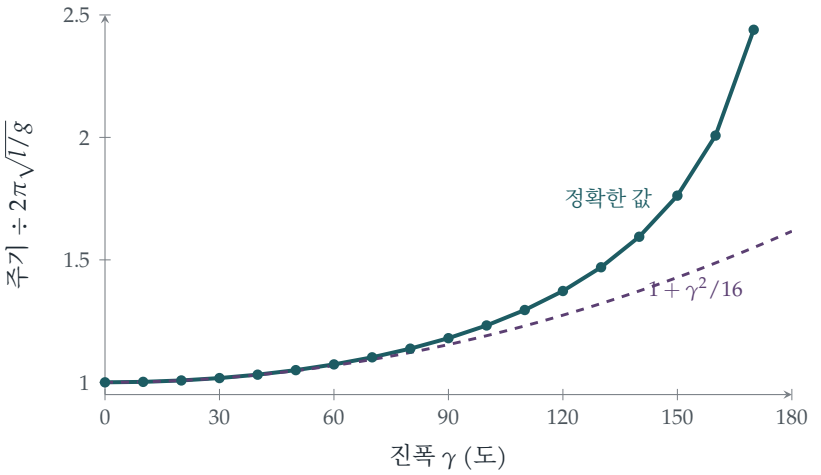


그림 11.3.1 진자의 정확한 주기(청록색)를 작은 각 근사값에 대한 비로 나타내어 진폭(amplitude)에 대해 그리고, 근사식 $1+\gamma^2/16$(자주색, 점선)과 비교한 그래프. 이 근사는 약 60°까지 매우 정확하다. $\gamma\to 180°$일 때 실제 주기는 무한대로 발산한다. 거꾸로 서서 균형을 이룬 진자는 떨어지는 데 영원히 걸린다.

돌아보기

- **에너지는 제1적분(first integral)을 준다.** 2계 방정식이 1계 방정식이 되었고, 주기는 적분이 되었다.
- **치환으로 특이점을 길들인다.** 피적분함수가 되돌아오는 점에서 발산했지만, 치환 $\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\phi$가 문제를 없앴다.

- **먼저 정확하게, 그다음에 근사로.** 정확한 공식을 구한 뒤 이를 전개했으며, 이를 통해 근사가 얼마나 좋은지도 알 수 있다.

숨은 수학

타원적분

적분

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

을 **제1종 완전타원적분**(*complete elliptic integral of the first kind*)이라 한다. 이런 이름이 붙은 것은 이와 가까운 적분이 타원의 둘레를 주기 때문이다. 정확한 주기는 $P = 4\sqrt{l/g}\,K\bigl(\sin\tfrac{\gamma}{2}\bigr)$이다. 피적분함수를 끝까지 전개하고 Section 4.4의 월리스 적분(Wallis integrals) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi$를 이용하여 항별로 적분하면

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Bigl(1 + \bigl(\tfrac{1}{2}\bigr)^2 k^2 + \bigl(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\bigr)^2 k^4 + \bigl(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\bigr)^2 k^6 + \cdots\Bigr).$$

을 얻는다. 익숙한 함수들을 유한 번 조합해서는 $K(k)$를 얻을 수 없다. 이것은 진정으로 새로운 함수이다.

가우스의 놀라운 공식

K를 계산하는 훨씬 더 좋은 방법이 있다. Section 2.6에서 **산술기하평균**(*arithmetic–geometric mean*)을 만났다. a와 b에서 시작하여, 이 둘을 산술평균과 기하평균으로 바꾸는 일을 되풀이하는 것이다. 가우스는 1799년에

$$K(k) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}\bigl(1, \sqrt{1 - k^2}\bigr)},$$

임을 발견했다. 따라서 진폭이 γ인 진자의 주기는 정확히

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}\bigl(1, \cos\tfrac{\gamma}{2}\bigr)}.$$

이다. AGM은 매우 빠르게 수렴(converge)하기 때문에, 약 160°까지의 흔들림에서는 서너 단계만으로 주기를 유효숫자 열 자리까지 얻을 수 있으며, 그림 11.3.1의 값들도 이 방법으로 계산했다. 180°에 더 가까워지면 두 출발값 1과 $\cos\frac{\gamma}{2}$가 멀리 떨어져 있어 한두 단계가 더 필요하지만, 179°에서도 다섯 단계면 충분하다. 가우스는 일기에 이 발견이 "해석학의 완전히 새로운 분야를 연다"고 적었고, 그의 말은 옳았다. 타원적분의 역함수를 생각한 아벨(Abel)과 야코비(Jacobi)는 **타원함수**(*elliptic functions*)에 이르렀고, 타원함수는 다시 **타원곡선**(*elliptic curves*)으로 이어졌다. 타원곡선은 오늘날 수론(number theory)의 중심에

있으며(페르마(Fermat)의 마지막 정리를 증명하는 열쇠였다), 인터넷의 보안을 지키는 암호(cryptography)에서도 핵심적인 역할을 한다.

갈릴레이의 등잔과 하위헌스의 시계

진자의 주기가 진폭에 의존하지 않는다는 갈릴레이의 주장은 1602년 무렵에 나온 것으로, 그가 연구한 작은 흔들림에서는 좋은 근사였다. 하위헌스(Christiaan Huygens)는 이것이 정확하지 않다는 것을 깨달았고, 1659년에 주기가 진짜로 진폭과 무관해지는 곡선을 찾아냈다. 그것이 바로 Section 11.4의 주제인 사이클로이드(cycloid)이다. 1656년부터 만들어진 그의 진자시계는 시간 측정의 오차를 하루 약 15분에서 약 15초로 줄였다. 바다에서 경도를 구하는 문제를 해결한 항해용 크로노미터는 훗날 진자를 아예 쓰지 않게 되었지만, 진자시계는 1920년대까지 세계에서 가장 정확한 시계로 남아 있었다.

사고 기술

정확한 적분에서 급수 근사로

어떤 양이 계산할 수 없는 적분으로 주어지면, 그 적분을 다루기 좋은 꼴로 변형한 다음 피적분함수를 전개하여 항별로 적분하라.

이것은 물리학자들이 이상화된 결과에 대한 보정을 구하는 방법이며, **섭동 이론**(*perturbation theory*)의 출발점이다. 대학에서는 항별 적분(term-by-term integration)이 언제 정당화되는지(균등수렴(uniform convergence)), 그리고 중간에 멈추었을 때 생기는 오차를 어떻게 추정하는지 배우게 된다.

더 도전하기

1 **줄에 매인 입자.** STEP III 2015, 9번 문제 (`step.maths.org/questions/15-s3-q9`)에 도전해 보라. 작은 진동에서도 주기가 진폭에 의존하는 진동자를 다룬다. 진자의 주기는 그렇지 않은데, 이 진동자의 주기는 왜 그런가?

2 **다음 항.** 이항 전개를 한 항 더 진행하여 $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}+\frac{11\gamma^4}{3072}\right)$임을 보여라.

3 **손으로 하는 AGM.** AGM을 세 단계 이용하여 진폭이 90°인 진자의 주기를 추정하고, 그림의 값 1.1803과 비교하라.

4 **시계.** 어떤 진자시계가 진폭 4°에서 정확한 시간을 가리키도록 맞추어져 있다. 진폭이 5°로 커지면 하루에 몇 초가 늦어지는가?

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 4장. 진폭이 큰 진자를 다룬다.
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). 가우스의 발견과 그 활용을 다루며, π를 계산하는 가장 빠른 방법들도 소개한다.
- **Dava Sobel, *Longitude*** (Fourth Estate). 진자를 넘어선, 바다 위에서의 시간 측정 이야기(경도).

11.4 등시 곡선

문제

STEP III 1994, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/94-s3-q9`

도입

그릇 안에서 구슬 두 개를 동시에 놓아 보자. 하나는 가장자리 근처에서, 다른 하나는 바닥 바로 위에서 놓는다. 어느 쪽이 먼저 바닥에 닿을까? 보통의 그릇에서는 대개 낮은 곳에서 출발한 구슬이 이긴다. 그런데 어디서 출발하든 두 구슬이 언제나 함께 도착하는 그릇이 있다. 그것이 바로 **등시곡선**(*tautochrone*)(그리스어로 "같은 시간"이라는 뜻)이며, 그 단면은 **사이클로이드**(*cycloid*), 즉 굴러가는 바퀴의 둘레 위 한 점이 그리는 곡선이다.

하위헌스(Huygens)는 1659년에 이 사실을 발견했고, 이를 이용해 진폭과 관계없이 주기가 일정한 진자시계를 설계하여 Section 11.3에서 발견한 결점을 바로잡았다. 이 문제는 올바른 변수, 즉 수평 위치 대신 곡선을 따라 잰 거리를 택함으로써 등시성을 단 몇 줄 만에 증명한다.

시작하기 전에

생각해 보기 그릇은 매끄럽다. 입자에 작용하는 힘은 무엇이며, 그중 어느 힘이 일을 하는가?

중력과 수직항력(normal reaction)이다. 수직항력은 곡면에 수직이고 따라서 운동 방향에도 수직이므로 일을 하지 않는다. 중력만 일을 하므로 에너지가 보존된다.

차근차근 풀기

1단계 곡선을 따른 에너지

s가 호의 길이(arc length)이므로, 곡면을 따른 입자의 속력은 $|\frac{ds}{dt}|$이다. 에너지 보존에 의해 $\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgy =$ 상수이므로 $\dot{s}^2 + 2gy$는 상수이다. ■

2단계 s에 대한 단진동

> **생각해 보기** $s = 2\sqrt{ky}$를 이용해 y를 s의 함수로 바꾸어라. 그 결과 얻는 방정식은 어떤 종류의 운동을 나타내는가?

$y = \frac{s^2}{4k}$이므로 에너지 방정식은

$$\dot{s}^2 + \frac{g}{2k}s^2 = \text{상수} = \frac{g}{2k}s_0^2,$$

이 된다. 여기서 $s_0 = 2\sqrt{kh}$는 출발점의 호의 길이이다(입자는 정지 상태에서 출발한다). 미분하면 $2\dot{s}\ddot{s} + \frac{g}{k}s\dot{s} = 0$이므로

$$\ddot{s} = -\frac{g}{2k}\,s.$$

이것은 변수 s에 대한 단진동(simple harmonic motion)이며, 진폭과 관계없이 $\omega^2 = \frac{g}{2k}$이다. 즉 $s = s_0\cos\omega t$이다.

3단계 바닥까지 걸리는 시간

입자는 주기의 4분의 1이 지난 후 V($s = 0$인 점)에 도달한다:

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

이 값은 h에 의존하지 않는다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** 왜 이렇게 될까? 곡선을 따른 "복원력"은 g에 기울기를 곱한 $g\frac{dy}{ds} = \frac{g}{2k}s$이다. 즉 곡선을 따라 잰 바닥으로부터의 거리에 정확히 비례한다. 이것이 바로 단진동의 정의적 성질이다. 더 높은 곳에서 출발한 입자는 가야 할 거리가 더 멀지만, 그에 비례하여 더 세게 밀린다.

4단계 두 입자

> **생각해 보기** 두 입자는 언제 V에 도달하며, 그때 속력은 얼마인가? 어느 쪽의 운동량이 더 큰가?

두 입자는 반대쪽에서 출발하여 같은 시각 $T = \pi\sqrt{k/(2g)}$에 V에 도달한다. V에서의 속력은 ω에 s의 진폭을 곱한 값이므로 $\sqrt{\text{높이}}$에 비례한다. 높이 h에서 놓은 무거운 입자의 V에서의 속력을 U라 하면, 높이 $\alpha^2 h$에서 놓은 가벼운 입자의 속력은 αU이다. 두 입자의 운동량(momentum)은 서로 반대 방향으로 $\alpha m \cdot U$와 $m \cdot \alpha U$이므로, 크기가 같고 방향이 반대이다. 충돌 순간의 전체 운동량은 0이다.

생각해 보기 전체 운동량이 0이고 반발 계수가 α일 때, 충돌 직후의 속도는 어떻게 되는가?

운동량은 계속 0이므로, 충돌 후에도 두 입자는 크기가 같은 운동량을 가지고 서로 반대 방향으로 움직이며, 상대 속력은 접근 속력 $\alpha U + U$의 α배이다(반발 계수(coefficient of restitution)의 정의). 가벼운 입자(질량 αm)의 속력을 w라 하면 무거운 입자(질량 m)의 속력은 αw이고, $w + \alpha w = \alpha(1+\alpha)U$이므로 $w = \alpha U$이다. 각 입자는 속력이 α배가 되어 튕겨 나간다. 질량 αm인 입자는 αU로, 질량 m인 입자는 $\alpha^2 U$로 떠난다.

5단계 전체 운동

이제 각 입자는 자기 쪽 곡면을 다시 올라가는데, 높이는 속력의 제곱에 비례하므로 도달 높이는 α^2배로 줄어든다. 질량 αm인 입자는 $\alpha^2 h$까지, 질량 m인 입자는 $\alpha^4 h$까지 올라간다. 등시성에 의해 두 입자는 시간 $2T$ 후 정확히 같은 순간에 V로 돌아오며, 운동량은 다시 크기가 같고 방향이 반대이다. 모든 속력이 α배가 된 채로 같은 충돌이 다시 일어난다. 따라서:

- 두 입자는 항상 V에서, 시각 $T, 3T, 5T, \ldots$에 충돌한다.
- n번째 충돌 후 두 입자는 높이 $\alpha^{2n}h$와 $\alpha^{2n+2}h$까지 올라간다.
- 운동은 등비적으로 잦아들지만 결코 멈추지 않는다. 충돌은 무한히 많이 일어나며 영원히 계속된다. ■

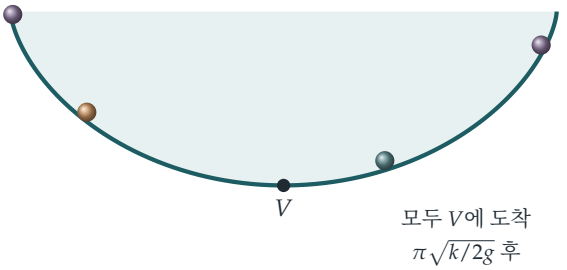


그림 11.4.1 등시곡선: 직선을 따라 굴러가는 바퀴의 둘레 위 한 점이 그리는 사이클로이드를 뒤집은 것이다. 이 곡선 위 어디에서든 정지 상태로 놓은 구슬은 같은 순간에 가장 낮은 점 V에 도달한다. 반지름 R인 바퀴가 만드는 사이클로이드에서 호의 길이와 높이는 $s^2 = 8Ry$를 만족하므로 $k = 2R$이다.

돌아보기

- **자연스러운 변수를 택하라.** 호의 길이 s로 나타내면 운동은 정확히 단진동이다. x나 y로 나타내면 엉망이 된다.
- **에너지가 방정식을 준다.** 에너지 방정식을 미분하여 운동 방정식을 곧바로 얻었다.
- **시간의 대칭성.** 바닥까지 가는 데 걸리는 시간이 언제나 같으므로, 두 입자는 영원히 박자가 맞았고 충돌은 정확히 반복되었다.

숨은 수학

왜 사이클로이드인가?

직선 아래에서 굴러가는 반지름 R인 바퀴는 사이클로이드 $x = R(t + \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$를 그린다. 그러면 $\frac{dx}{dt} = R(1 + \cos t)$이고 $\frac{dy}{dt} = R\sin t$이므로, 곡선을 따른 속력은 $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R\cos\frac{t}{2}$이다. 적분하면 바닥으로부터의 호의 길이는 $s = 4R\sin\frac{t}{2}$이고, 한편 $y = 2R\sin^2\frac{t}{2}$이다. 따라서 $s^2 = 8Ry$이다. 즉 사이클로이드는 정확히 $k = 2R$일 때 $s = 2\sqrt{ky}$를 만족하는 곡선이다. 역으로, 복원력이 s에 비례해야 한다는 조건은 곡선이 사이클로이드일 것을 강제한다.

최단강하곡선

1696년 요한 베르누이(Johann Bernoulli)는 유럽의 수학자들에게 문제를 냈다. 한 점에서 그보다 낮은(바로 아래는 아닌) 점까지 구슬이 **가장 짧은** 시간에 미끄러져 내려가는 곡선은 무엇인가? 그 답인 **최단강하곡선**(*brachistochrone*) 역시 사이클로이드이다. 뉴턴(Newton)은 문제를 받은 뒤 하룻저녁 만에 풀었다고 전해진다. 그는 풀이를 익명으로 발표했지만, 베르누이는 "발톱을 보고 사자를 알아보듯" 저자를 알아보았다. 이 문제는 Section 4.7에서 만난 **변분법**(*calculus of variations*), 즉 적분으로 정의된 양을 최소화하는 곡선을 찾는 분야의 출발점이 된 예이다.

하위헌스의 사이클로이드 시계

하위헌스는 단진자의 주기가 진폭에 의존하기 때문에 단진자가 시간을 정확히 맞추지 못한다는 것을 알고 있었다. 그는 『*Horologium Oscillatorium*』(1673)에서 추가 사이클로이드를 따라 움직이게 하는 방법을 보였다. 사이클로이드 모양으로 휜 두 개의 "볼판" 사이에 줄을 매달면, 줄이 볼판을 감으면서 추가 스스로 사이클로이드를 그리게 된다(사이클로이드의 **신개선**(*involute*)은 또 다른 사이클로이드이다). 실제로는 볼판이 마찰로 일으키는 오차가 없애는 오차보다 커서, 시계 제작자들은 대신 진폭을 작게 유지했다. 그러나 하

위헌스의 분석은 축폐선(evolute)과 신개선의 이론을 창시했고, 그의 책은 17세기 역학의 위대한 저작 가운데 하나가 되었다.

사고 기술

운동이 단순해지는 변수를 찾아라

곡선을 따른 운동은 곡선을 따라 잰 거리로 나타낼 때 가장 단순한 경우가 많다. 방정식을 선형으로 만드는 변수를 찾아라.

대학에서는 이것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 **일반화 좌표**(*generalised coordinates*)라는 개념이 된다. 계의 배치를 나타내는 변수라면 무엇이든 쓸 수 있으며, 변수를 잘 고르면 풀 수 없던 문제가 풀리기도 한다.

더 도전하기

1 **다른 높이.** 등시곡선 그릇에서 높이 h에서 입자를 놓는다. V에서의 속력이 에너지 보존에 따라 당연히 그래야 하듯 $\sqrt{2gh}$임을 보이고, 이것이 ωs_0와 일치하는지 확인하여라.

2 **보통의 그릇.** 반지름 R인 반구형 그릇에서, 낮은 높이에서 바닥까지 가는 시간과 가장자리에서 바닥까지 가는 시간을 비교하여라. 어느 쪽이 더 긴가? (Section 11.3의 결과를 이용하여라.)

3 **같은 질량.** 질량이 모두 m으로 같은 두 입자를 높이 h_1과 h_2에서 놓고 반발 계수가 e일 때, 문제의 둘째 부분을 다시 풀어라. 두 입자는 여전히 항상 V에서 충돌하는가?

4 **사이클로이드의 호의 길이.** 사이클로이드의 한 아치의 길이가 $8R$이고, 그 아래 넓이가 굴러가는 원 넓이의 세 배인 $3\pi R^2$임을 보여라.

더 읽을거리

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*** (CRC Press). 등시곡선과 최단강하곡선을 그 역사와 함께 다룬다.
- **E. A. Whitman, "Some historical notes on the cycloid"**, *American Mathematical Monthly* 50 (1943). 사이클로이드가 왜 "기하학자들의 헬레네"라고 불렸는지 설명한다.
- **Paul Nahin, *When Least Is Best*** (Princeton University Press). 최단강하곡선을 비롯한

최적화 문제들을 역사와 함께 들려준다.

11.5 가속하는 기차 안의 중력

문제

STEP II 2021, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

기차가 역을 출발할 때 우리는 몸이 좌석 뒤로 눌리는 것을 느낀다. 탁자 위 커피 잔의 수면은 기울어지고, 바닥에 놓인 공은 뒤쪽으로 굴러간다. 기차 안에서 보면 마치 중력이 기울어져서 아래쪽뿐 아니라 약간 뒤쪽으로도 향하는 것처럼 보인다. 아인슈타인(Einstein)은 이것이 단순한 비유 이상이라는 깨달음을 "내 생애 가장 행복한 생각"이라고 불렀다. 국소적으로는 중력과 가속도를 구별할 수 없다는 것이다.

이 문제에서는 가속하는 기차 안의 휘어진 철사에 구슬이 꿰어져 있다. 기차에서 보면 구슬은 탄젠트 값이 a/g인 각만큼 기울어진 중력장 속에 있는 것과 똑같이 행동한다. 철사의 맨 아래는 더 이상 가장 낮은 점이 아니며, 구슬은 새로운 평형점(equilibrium)을 중심으로 진동한다.

시작하기 전에

생각해 보기 기차가 서쪽(x의 음의 방향)으로 a의 가속도로 가속한다. 기차 안의 관찰자에게는 질량 m인 물체에 어떤 "가상의" 힘이 작용하는 것처럼 보이는가?

기차의 좌표계에서는 가상력(fictitious force) $-m \times$ (좌표계의 가속도)를 더하면 뉴턴(Newton)의 제2법칙이 성립한다. 좌표계는 x 방향으로 $-a$의 가속도를 가지므로, 가상력은 동쪽을 향하는 $+ma$이다. 중력과 합치면 구슬은 단위 질량당 $(a, -g)$의 유효 중력(effective gravity)을 받는다. 즉 중력이 동쪽으로 기울어진 것이다.

차근차근 풀기

1단계 원점에서는 정지할 수 없다

원점에서 철사 $ky = x^2$는 수평이다. 그곳에서 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이므로 동쪽을 향하는 가상력 ma를 상쇄할 수 없다. 철사 방향의 알짜힘은 $ma \neq 0$이므로, 구슬은 기차에 대해 정지해 있을 수 없다. ■

2단계 에너지 방정식

> **생각해 보기** 수직항력 $\mathbf{N}$을 포함하여 기차의 좌표계에서 뉴턴 법칙을 써 보자. 그 다음 속도 $(\dot{x}, \dot{y})$와 내적(dot product)을 취하라. 왜 $\mathbf{N}$이 사라지는가?

기차의 좌표계에서

$$m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \mathbf{N} + (ma, -mg).$$

철사가 매끄러우므로 $\mathbf{N}$은 철사에 수직이고, 따라서 철사 방향인 속도 $(\dot{x}, \dot{y})$에도 수직이다. 속도와 내적을 취하면 $\mathbf{N}$이 없어진다.

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} = ma\dot{x} - mg\dot{y}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{x}(\ddot{x} - a) + \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0. \quad ■$$

좌변은 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy$의 도함수(derivative)이므로, 이 양은 일정하다. ■

이것은 기차의 좌표계에서의 에너지 보존(conservation of energy)이며, 이때 단위 질량당 위치 에너지(potential energy) $-ax + gy$는 가상력을 포함한다.

3단계 얼마나 높이 올라가는가?

> **생각해 보기** 구슬이 원점에서 정지 상태로 출발하므로 상수는 0이다. 가장 높은 점에서 구슬은 순간적으로 정지한다. 이로부터 어떤 방정식을 얻는가?

정지해 있을 때 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$이므로 $ax = gy$이다. $y = \frac{x^2}{k}$를 대입하면 $ax = \frac{gx^2}{k}$이므로, (출발점 $x = 0$을 제외하면) $x = \frac{ak}{g}$이고

$$b = \frac{a^2 k}{g^2}. \quad ■$$

구슬은 철사를 따라 동쪽 위로 점 $\left(\frac{ak}{g}, \frac{a^2 k}{g^2}\right)$까지 올라갔다가 다시 원점으로 돌아오고, 이를 반복한다.

4단계 가장 빠른 점

생각해 보기 속력의 제곱을 x만의 함수로 나타내라. 어디에서 최대가 되는가?

속력의 제곱은 $2(ax - gy) = 2\left(ax - \frac{gx^2}{k}\right)$로 x에 대한 이차식이며, 두 반환점의 한가운데인 $x = \frac{ak}{2g}$에서 최대가 된다. 그곳에서 속력의 제곱은 $2\left(\frac{a^2k}{2g} - \frac{a^2k}{4g}\right) = \frac{a^2k}{2g}$이므로, 최대 속력은

$$a\sqrt{\frac{k}{2g}}. \qquad \blacksquare$$

생각해 보기 $x = \frac{ak}{2g}$에서 철사의 기울기를 구하라. 이것은 유효 중력 $(a, -g)$의 방향과 어떤 관계가 있는가?

기울기는 $\frac{2x}{k} = \frac{a}{g}$이다. 따라서 이 점에서 철사는 유효 중력에 수직이다. 즉 이 점이 기울어진 중력장에서 철사의 "가장 낮은" 점이며, 구슬은 이 점을 중심으로 진동한다(그림 11.5.1).

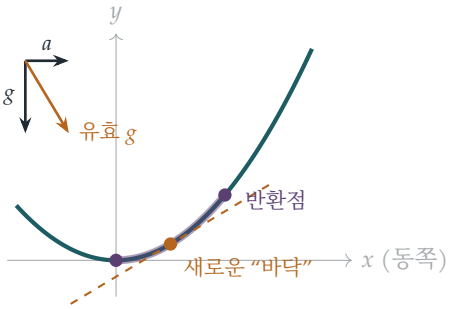


그림 11.5.1 기차의 좌표계에서 본 철사 $ky = x^2$(청록색, $k = 1, a/g = 0.6$). 유효 중력(호박색 화살표)은 탄젠트 값이 a/g인 각만큼 동쪽으로 기울어져 있다. 구슬은 원점과 $x = ak/g$ 사이에서(자주색) 진동하며, 진동의 중심은 철사가 유효 중력에 수직인 점으로, 이 점이 새로운 최저점 역할을 한다. 점선은 기울어진 중력장에서의 "수평"선이다.

돌아보기

- **편리한 좌표계에서 생각하고, 가상력을 더하라.** 기차의 좌표계에서는 철사가 고정되어 있으며, 그 대가는 일정한 힘 하나가 추가되는 것뿐이다.
- **속도와 내적을 취하라.** 이렇게 하면 구속력(constraint force)이 사라지고 에너지 방정식을 얻는다.
- **답을 해석하라.** 반환점과 가장 빠른 점에는 기하학적 의미가 있다. 유효 중력이 기울어져 있는 것이다.

숨은 수학

가상력

뉴턴 법칙은 **관성계**(inertial frame), 즉 가속하지 않는 좌표계에서 성립한다. 가속하는 좌표계에서는 가상력을 더하여 뉴턴 법칙을 되살릴 수 있다. 가속도가 $\mathbf{A}$인 좌표계에서는 $-m\mathbf{A}$를 더하고, 회전하는 좌표계에서는 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)을 더한다. 이 힘들은 어떤 물체도 작용하지 않으므로 가상력이라고 부르며, 좌표계 때문에 생겨나는 것이다. 그러나 그 좌표계 안에 있는 사람에게는 완벽하게 실재하는 힘이다. 원심력은 지구를 극 방향으로 납작하게 만들고, 코리올리 힘은 허리케인이 도는 방향(북반구에서는 시계 반대 방향)을 정하며 장거리 포탄의 경로를 휘게 한다.

등가 원리

일정한 가상력 $-m\mathbf{A}$는 중력과 똑같이 질량에 비례한다. 닫힌 상자 안에서 하는 어떤 실험으로도 상자가 행성 위에 놓여 있는지 빈 공간에서 가속하고 있는지 구별할 수 없다. 이것이 **등가 원리**(equivalence principle)이다. 아인슈타인은 이를 일반 상대성 이론(general relativity)의 출발점으로 삼았다. 가속하는 상자를 가로지르는 빛은 휘어 보이므로, 중력장에서도 빛은 휘어야 한다. 또 가속하는 로켓의 앞쪽과 뒤쪽에 있는 시계는 서로 다른 빠르기로 가므로, 중력장에서 높이가 다른 시계들도 그래야 한다. 두 예측은 모두 확인되었으며, 두 번째 효과는 모든 GPS 위성에서 보정해야 한다. 이 효과만으로도 위성의 시계는 지상의 시계보다 하루에 약 45마이크로초씩 빨리 가기 때문이다.

아인슈타인의 가장 행복한 생각

1907년, 베른의 특허청에서 일하던 아인슈타인은 특수 상대성 이론(special relativity)에 관한 총설 논문을 쓰고 있었다. 그때 훗날 그가 회상한 대로 "내 생애 가장 행복한 생각"이 떠올랐다. 지붕에서 자유 낙하하는 사람은 자신의 무게를 느끼지 못한다는 것이다. 낙하하는 좌표계를 택하면 중력을 "변환하여 없앨" 수 있다. 이 생각을 1915년의 일반 상대성 이론으로 완성하기까지는 8년의 시간과 많은 새로운 수학(가우스(Gauss)와 리만(Riemann)이 발전시킨 휘어진 공간의 미분기하학(differential geometry))이 더 필요했다.

사고 기술

움직이는 좌표계에서 보존량 찾기

가속도가 일정한 좌표계에서는 일정한 가상력이 작용한다. 이 힘은 위치 에너지에 포함시킬 수 있으며, 그 좌표계에서 에너지는 보존된다.

운동 방정식과 속도의 내적을 취하여 구속력을 없애는 기법은 어떤 좌표계에서나 통한다. 대학에서는 이것이 일반적인 원리가 된다. 방정식이 시간에 명시적으로 의존하지 않는 계에는 보존되는 에너지가 있다.

더 도전하기

1 **기차 안의 대포.** STEP I 2000, 9번 문제 (`step.maths.org/questions/00-s1-q9`) 문제를 풀어 보자. 가속하는 객차 안에서 발사한 포탄을 다루는데, 여기서 가속도는 중력이 기울어진 것처럼 작용한다.

2 **맞바람.** STEP II 2006, 11번 문제 (`step.maths.org/questions/06-s2-q11`) 문제를 풀어 보자. 일정한 맞바람을 받는 포물체를 다루는데, 바람 때문에 포물체가 땅에 떨어지기 전에 발사한 쪽으로 되밀려 올 수도 있다.

3 **기차 안의 커피.** 가속하는 기차 안에서 커피 잔의 수면은 수평면과 $\arctan(a/g)$의 각을 이루는 평면임을 보여라.

4 **작은 진동.** $x = \frac{ak}{2g}$를 중심으로 한 구슬의 작은 진동의 주기를 구하라. (**힌트:** 새로운 바닥 근처에서 철사는 반지름이 곡률 반지름(radius of curvature)과 같은 원으로 근사된다.)

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 비관성 좌표계와 가상력을 다룬 장.
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory*** (여러 판본). 가속하는 상자 이야기를 포함한, 아인슈타인이 직접 쓴 대중적인 해설서.
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory*** (Little, Brown). 일반 상대성 이론의 일대기.

11.6 백스핀

문제

STEP III 1997, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/97-s3-q10`

도입

구슬의 뒤쪽을 손가락으로 눌러서 구슬이 뒤로 회전하면서 앞으로 튀어 나가게 해 보자. 구슬은 손에서 멀어지며 미끄러지다가 느려지고, 멈춘 뒤, 마치 마음을 바꾼 것처럼 다시 굴러 돌아온다. 스누커(snooker) 선수들도 "스크루(screw)" 또는 "드로(draw)" 샷에서 같은 효과를 이용한다. 큐볼의 아래쪽을 쳐서 공이 뒤로 회전하게 하면, 공은 목적구에 부딪혀 멈춘 뒤 되돌아온다.

이 문제는 구슬을 그 자리에 딱 멈추게 하는 역회전(backspin)의 정확한 양과, 구슬이 처음 속력의 7분의 1로 되돌아오게 하는 역회전의 양을 묻는다. 계산에서는 선속도(linear velocity)와 각속도(angular velocity)라는 두 양을 추적하는데, 둘 다 같은 마찰력(frictional force)에 의해 변한다. 그 뒤에는 아름다운 지름길이 숨어 있다. 두 양의 어떤 조합은 마찰력에 의해 전혀 변하지 않는다.

교육과정에 관한 참고

회전 역학(rotational dynamics)은 2019년에 STEP 출제 범위에서 제외되었다. 여기서 필요한 것은 다음뿐이다. 질량 m, 반지름 a인 속이 찬 구의 지름에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $I = \frac{2}{5}ma^2$이고, 토크(torque) τ는 $I\dot{\omega} = \tau$에 따라 각속도를 바꾼다. 이것은 $m\dot{v} = F$의 회전 버전이다.

시작하기 전에

생각해 보기 구슬이 속도 v로 앞으로 움직이면서 각속도 ω로 뒤로 회전한다. 구슬의 가장 아래 점은 탁자 위에서 얼마나 빠르게 움직이는가? 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가?

가장 아래 점은 구슬 전체의 운동 때문에 v로 움직이고, 여기에 역회전 때문에 $a\omega$가 더해진다(역회전은 가장 아래 점을 앞으로 실어 나른다). 따라서 이 점은 $v + a\omega$로 앞으로 미끄러지고, 마찰력은 미끄러짐을 방해하는 방향인 뒤쪽으로 작용한다. 구슬은 $v + a\omega = 0$일 때에만 미끄러지지 않고 구른다(rolls without slipping).

차근차근 풀기

1단계 마찰력이 하는 일

생각해 보기 뒤쪽으로 작용하는 마찰력의 크기를 F라 하자. 이 힘은 v에 어떤 영향을 주는가? 중심에 대한 이 힘의 토크는 Fa이다. 이 토크는 역회전을 늘리는가, 줄이는가?

마찰력은 구슬을 감속시킨다. $m\dot{v} = -F$이므로 $v = v_0 - \frac{F}{m}t$이다. 마찰력은 구슬의 아래쪽에서 뒤쪽으로 작용하므로 역회전을 방해하는 토크 Fa도 가한다. $I\dot{\omega} = -Fa$이고 $I = \frac{2}{5}ma^2$이므로

$$\omega = \omega_0 - \frac{5F}{2ma}t.$$

구슬이 미끄러지는 동안 v와 ω는 모두 일정하게 감소한다.

2단계 딱 멈추기

생각해 보기 구슬이 완전히 멈추려면 v와 ω가 같은 순간에 0이 되어야 한다. 각각은 언제 0이 되는가?

$v = 0$이 되는 것은 $t = \frac{mv_0}{F}$일 때이고, $\omega = 0$이 되는 것은 $t = \frac{2ma\omega_0}{5F}$일 때이다. 두 값은 $v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0$일 때 같아지며, 즉

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}. \qquad \blacksquare$$

그 순간 구슬에는 선속도도 각속도도 없고, 마찰력(미끄러짐이 있을 때에만 작용한다)은 사라진다. 구슬은 그 자리에 머문다.

3단계 되돌아오기

생각해 보기 역회전이 더 크면 ω가 아직 양수일 때 v가 0에 도달한다. 가장 아래 점은 여전히 앞으로 미끄러지고 있으므로 마찰력은 여전히 뒤쪽으로 작용한다. 그다음에는 무슨 일이 일어나고, 미끄러짐은 언제 멈추는가?

마찰력이 계속 구슬을 뒤로 밀기 때문에 v는 음수가 되고, ω는 계속 감소한다. 미끄러짐은 $v + a\omega = 0$일 때 멈춘다.

$$v_0 + a\omega_0 - \left(\frac{F}{m} + \frac{5F}{2m}\right)t = 0, \qquad t^* = \frac{2m(v_0 + a\omega_0)}{7F}.$$

그 순간

$$v = v_0 - \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7} = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

이후 구슬은 미끄러지지 않고 구르며, 마찰력은 작용을 멈추고 v는 일정하게 유지된다. 구슬이 속력 $\frac{v_0}{7}$로 굴러 돌아오려면 $5v_0 - 2a\omega_0 = -v_0$이어야 하므로

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

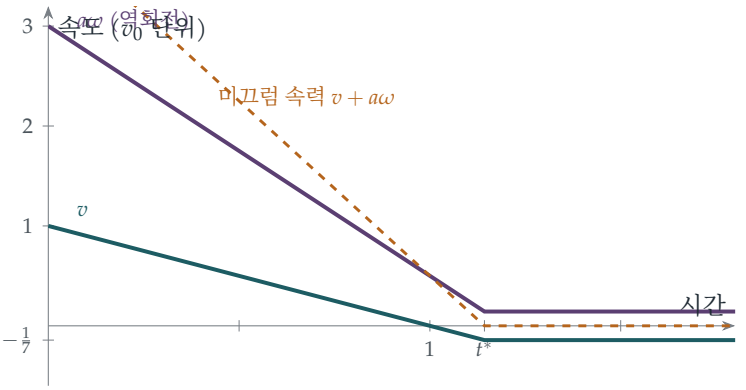


그림 11.6.1 $v_0/(a\omega_0) = \frac{1}{3}$인 경우로, 시간은 mv_0/F 단위이다. 마찰력은 앞쪽 속도 v(청록색)와 역회전 $a\omega$(자주색)를 일정한 비율로, 2 : 5의 비로 줄인다. 구슬은 $t = 1$에서 앞으로 나아가기를 멈추지만 아직 미끄러지고 있으므로, 미끄럼 속력(호박색)이 $t^* = \frac{8}{7}$에서 0이 될 때까지 뒤로 밀린다. 그 뒤 구슬은 $\frac{v_0}{7}$로 굴러 돌아온다.

돌아보기

- **두 양을 추적하라.** 마찰력은 v와 ω를 모두, 일정한 비를 이루는 비율로 바꾸었다.
- **힘이 언제 사라지는지 알아 두라.** 미끄럼 마찰력은 미끄러짐이 있을 때에만 작용한다. 구슬이 구르기 시작하면 마찰력은 사라진다.

- **미끄럼 속력이 핵심 변수이다.** 미끄럼 속력은 일차적으로 감소했고, 그것이 0이 되는 순간이 미끄러짐에서 구름으로 바뀌는 시점이었다.

숨은 수학

보존량

최종 속력에 더 빨리 도달하는 방법이 있다. 구슬이 탁자와 닿는 접촉점에 대한 구슬의 각운동량(angular momentum)을 생각하자. 마찰력은 바로 그 점에서 작용하므로 그 점에 대한 모멘트가 없고, 수직항력(normal reaction)과 중력은 모두 그 점을 지나는 연직선을 따라 작용한다. 따라서 구슬이 미끄러지는 동안 이 각운동량은 보존된다. 그 값은 mva(중심의 운동에서 오는 부분)에서 $I\omega$(역회전은 음으로 센다)를 뺀 것이다.

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

$a\omega = -V$인 상태로 속력 V로 구를 때 이 값은 $maV + \tfrac{2}{5}maV = \tfrac{7}{5}maV$이다. 이를 처음 값과 같게 놓으면

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

마찰력의 크기는 물론, 마찰력이 일정한지조차 언급하지 않고 같은 답을 얻는다. 최종 속력은 보존 법칙만으로 정해지며, 마찰력은 그 상태에 도달하는 데 걸리는 시간만을 결정한다.

스누커, 볼링, 테니스

같은 분석으로 많은 스포츠를 설명할 수 있다. 중심을 맞은 스누커 공은 처음에는 미끄러지다가 구르기 시작하며, 결국 처음 속력의 $\tfrac{5}{7}$로 굴러간다(공식에서 $\omega_0 = 0$으로 놓아라). 옆회전을 걸어 던진 텐핀 볼링공은 레인을 따라 미끄러지다가 구르기 시작할 때 "훅(hook)"을 그린다. 톱스핀을 걸어 친 테니스공은 급격히 떨어지는데, 이 경우 주된 효과는 공기역학적인 것이다. 회전하는 공이 주위의 공기를 휘게 하는 현상, 즉 **마그누스 효과**(*Magnus effect*)이다.

코리올리와 당구

오늘날 회전 좌표계(rotating frame)에서의 겉보기 힘(fictitious force)으로 기억되는 가스파르귀스타브 코리올리(Coriolis)(Section 11.5)는 1835년에 당구의 수학만을 다룬 책 *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*(당구 효과의 수학적 이론)를 썼다. 그는 여러 가지 가운데 특히, 회전을 걸어 친 공은 미끄러지는 동안 포물선(parabola)을 그리다가 이후 곧게 굴러간다는 것을 보였고, 바로 이 문제의 스크루 샷을 분석했다. 이 책은 지금도 당구를 연구하는 물리학자들에게 인용된다.

사고 기술

하나의 힘이 바꾸는 두 양을 추적하기

하나의 힘이 여러 양에 영향을 줄 때에는 그 힘이 각 양을 어떻게 바꾸는지 적고, 그 힘이 전혀 바꾸지 않는 조합을 찾아라.

여기서 마찰력은 v와 ω는 바꾸었지만 접촉점에 대한 각운동량은 바꾸지 않았다. 대학에서는 이런 조합을 찾는 일이 거듭 등장하는 주제이다. 미지의 힘이 사라지도록 모멘트를 잡을 점을 고르는 것은 좌표계를 고르는 일의 회전 버전이다.

더 도전하기

1 **톱스핀.** 구슬이 역회전 대신 앞쪽 회전 ω_0로 출발한다면 최종적으로 구르는 속력을 구하여라. $v_0/(a\omega_0)$가 어떤 값일 때 구슬이 빨라지는가?

2 **스누커 공.** 중심을 맞은 공이 회전 없이 v_0로 미끄러지기 시작한다. 공이 결국 $\frac{5}{7}v_0$로 구르게 됨을 보이고, 잃어버린 운동 에너지(kinetic energy)의 비율을 구하여라. (구르는 운동의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$이다.)

3 **고리.** $I = ma^2$인 얇은 고리가 자신의 평면 안에서 구르는 경우에 대해 문제를 다시 풀어라. 이제 어떤 비 $v_0/(a\omega_0)$일 때 고리가 $\frac{v_0}{7}$로 되돌아오는가?

4 **드로 샷.** 공이 처음부터 미끄러지지 않고 구르게 하려면 스누커 큐가 공의 어디를(중심보다 얼마나 높은 곳을, a로 나타내어) 쳐야 하는가? (**힌트:** 충격량(impulse)이 가해지는 동안 접촉점에 대한 각운동량을 생각하라.)

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 8장. 각운동량과 미끄러짐을 동반한 구름 운동을 다룬다.
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press), 강체(rigid body) 운동에 관한 장들.
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards*** (Sterling). 당구의 물리학을 많은 그림과 함께 설명한다.

11.7 막대 속의 심프슨 공식

문제

STEP II 1989, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/89-s2-q13`

도입

균일한 막대는 밀리고 회전할 때 어떻게 반응할까? 놀랍게도 역학의 모든 목적에서 막대는 세 개의 점질량과 정확히 똑같이 행동한다. 양 끝에 각각 질량의 6분의 1, 가운데에 3분의 2를 놓은 것이다. 막대에 무슨 일을 하든(밀든, 어떤 축을 중심으로 돌리든) 막대와 세 입자를 구별할 수 없다.

$\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$이라는 수는 낯익어 보일지도 모른다. 이 수들은 **심프슨 공식**(*Simpson's rule*) $\int_{-a}^{a} f \approx 2a(\frac{1}{6}f(-a) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{6}f(a))$의 가중치로, A 레벨(A level, 영국의 대학 입시 과정)에서 배웠을 수도 있는 수치 적분(numerical integration) 방법이다. 이것은 우연이 아니다. 동역학적으로 동등한(dynamically equivalent) 계와 수치 적분 공식은 같은 문제를 풀고 있는 것이다.

교육과정에 관한 참고

관성 모멘트(moment of inertia)는 2019년에 STEP 출제 범위에서 빠졌다. 어떤 축에 대한 물체의 관성 모멘트는 $\sum m_i d_i^2$, 즉 각 질량에 그 질량과 축 사이 거리의 제곱을 곱한 것의 합이다(연속인 물체라면 적분이 된다). 질량이 m이고 길이가 $2a$인 균일한 막대의 중심을 지나고 막대에 수직인 축에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{3}ma^2$이다. **평행축 정리**(*parallel axis theorem*)에 따르면, 임의의 축에 대한 관성 모멘트는 질량 중심을 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트에 md^2을 더한 것과 같다. 여기서 d는 두 축 사이의 거리이다.

시작하기 전에

생각해 보기 두 계의 질량이 같고, 질량 중심(centre of mass)이 같으며, 질량 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트가 같다고 하자. 그러면 왜 평행축 정리에 의해 다른 모든 축에 대한 관성 모멘트도 같아지는가?

임의의 축에 대하여 두 관성 모멘트는 모두 (O를 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트) $+md^2$과 같다. 첫째 항은 가정에 의해 같고, m과 d는 두 계에서 같다. ■

차근차근 풀기

1단계 막대

생각해 보기 양 끝에 질량 p를, 가운데에 질량 q를 놓자. 대칭성에 의해 질량 중심은 맞는다. 전체 질량과, 중심을 지나는 수직인 축에 대한 관성 모멘트로부터 어떤 조건이 필요한가?

$2p + q = m$이어야 하고, 가운데를 지나는 수직인 축에 대한 관성 모멘트가 $\frac{1}{3}ma^2$이어야 하므로 $2pa^2 = \frac{1}{3}ma^2$이다. 따라서 $p = \frac{1}{6}m$, $q = \frac{2}{3}m$이다.

생각해 보기 이것은 수직인 축뿐만 아니라 중심을 지나는 모든 축에 대해 성립하는가?

중심을 지나고 막대와 각 ψ를 이루는 축에 대하여, 막대를 따라 거리 r에 있는 점은 축에서 거리 $r\sin\psi$만큼 떨어져 있다. 따라서 (막대이든 입자들이든) 모든 관성 모멘트는 수직인 축에 대한 값의 $\sin^2\psi$배이고, 두 값은 모든 ψ에 대해 일치한다. (막대를 포함하는 평면 위에 있지 않은 축도 마찬가지이다. 중요한 것은 각 점과 축 사이의 거리뿐이고, O를 지나는 직선 위의 점에 대해서는 이 거리가 r에 비례한다.) 그러므로 막대는 질량 $\frac{1}{6}m$, $\frac{2}{3}m$, $\frac{1}{6}m$과 동역학적으로 동등하다. ■

2단계 직사각형

생각해 보기 얇은 판(lamina)을 한 변에 평행한 얇은 띠들로 자르자. 각 띠를 그와 동등한 세 입자로 바꾸자. 무엇을 얻게 되고, 그다음에는 무엇을 할 수 있는가?

각각의 얇은 띠는 막대이므로, 그 질량의 $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$을 왼쪽 변, 중심선, 오른쪽 변에 놓은 것과 동등하다. 모든 띠에 대해 더하면, 얇은 판은 질량이 $\frac{1}{6}M$, $\frac{2}{3}M$, $\frac{1}{6}M$인 세 개의 균일한 막대(왼쪽 변, 가운데, 오른쪽 변을 따라 놓인 막대)와 동등하다. 이제 이 막대들을 각각 같은

비율의 세 입자로 바꾸자. 각 점의 질량은 두 분수의 곱이 된다(그림 11.7.1).

$$\text{꼭짓점: } \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}, \qquad \text{변의 중점: } \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{9}, \qquad \text{중심: } \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{4}{9},$$

모두 M을 곱한 값이다. ■

(엄밀히 말하면, 각각의 대체는 얇은 판 전체의 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트를 보존해야 하며, 실제로 그렇다. 각 대체는 질량, 질량 중심, 그리고 그 조각의 질량 중심을 지나는 축들에 대한 관성 모멘트를 유지하고, 나머지는 평행축 정리가 해결해 준다.)

3단계 대각선에 대한 정사각형

한 변의 길이가 $2a$인 정사각형에서 대각선은 두 꼭짓점과 중심을 지나며, 이들은 관성 모멘트에 기여하지 않는다. 나머지 두 꼭짓점은 대각선에서 거리 $\sqrt{2}a$만큼, 네 변의 중점은 거리 $\frac{a}{\sqrt{2}}$만큼 떨어져 있다. 따라서

$$I = 2\cdot\tfrac{1}{36}M\cdot 2a^2 + 4\cdot\tfrac{1}{9}M\cdot\tfrac{a^2}{2} = \tfrac{1}{9}Ma^2+\tfrac{2}{9}Ma^2 = \tfrac{1}{3}Ma^2. \qquad ■$$

이것은 중심을 지나고 한 변에 평행한 축에 대한 관성 모멘트와 같다. (이것은 우연이 아니다. 정사각형에서는 중심을 지나고 그 평면 위에 있는 모든 축이 같은 답을 주며, 이는 연습문제에서 대칭성 논증으로 보인다.)

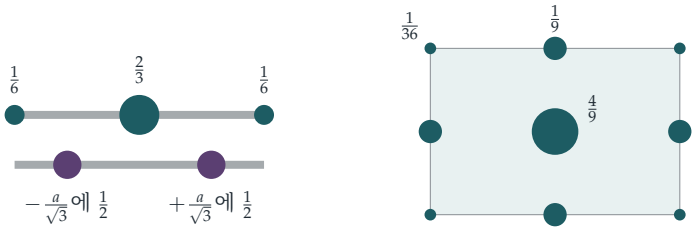
4단계 균일하지 않은 막대

? **생각해 보기** 막대의 길이가 L이고, 한쪽 끝에서 거리 x인 곳의 밀도가 $\frac{2mx}{L^2}$이라 하자. $x=0,\ \frac{L}{2},\ L$에 질량 p_0, p_1, p_2를 놓자. 전체 질량, 질량 중심, 끝점에 대한 관성 모멘트를 일치시키면 세 방정식을 얻는다. 그 방정식들은 무엇인가?

가벼운 쪽 끝에 대하여 막대의 전체 질량은 m, 1차 모멘트는 $\int_0^L x\cdot\frac{2mx}{L^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}mL$, 2차 모멘트는 $\int_0^L x^2\cdot\frac{2mx}{L^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mL^2$이다. 이들을 일치시키면

$$p_0+p_1+p_2=m, \qquad \tfrac{1}{2}Lp_1+Lp_2=\tfrac{2}{3}mL, \qquad \tfrac{1}{4}L^2p_1+L^2p_2=\tfrac{1}{2}mL^2.$$

둘째 식(L로 나눈 것)에서 셋째 식(L^2으로 나눈 것)을 빼면 $\frac{1}{4}p_1=\frac{1}{6}m$이므로 $p_1=\frac{2}{3}m$이고, 따라서 $p_2=\frac{1}{3}m$, $p_0=0$이다. 입자는 두 개만 있으면 된다. 중점에 $\frac{2}{3}m$, 무거운 쪽 끝에 $\frac{1}{3}m$이다. ■



두 가지 동등한 막대 얇은 판: $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$의 곱

그림 11.7.1 왼쪽 위: 균일한 막대는 양 끝과 중심에 놓인 (막대 질량에 대한 비율로) $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$의 질량과 동역학적으로 동등하며, 이는 심프슨 공식의 가중치이다. 왼쪽 아래: 막대는 중심에서 거리 $\frac{a}{\sqrt{3}}$에 놓인 두 개의 절반 질량과도 동등하며, 이는 2점 가우스 적분의 절점이다. 오른쪽: 직사각형 얇은 판은 아홉 개의 질량과 동등하며, 점의 넓이는 질량에 비례한다.

돌아보기

- **모멘트를 일치시킨다.** 동역학적 동등성이란 질량 분포의 0차, 1차, 2차 모멘트를 일치시키는 것이다.
- **차원을 하나씩 쌓아 올린다.** 직사각형은 막대들로 이루어진 막대이므로, 그 가중치는 곱이 된다.
- **방정식과 미지수의 개수를 센다.** 일치시켜야 할 모멘트가 세 개, 미지의 질량이 세 개이다. 그리고 때로는 해에 우연히 0이 나타나기도 한다.

숨은 수학

심프슨 공식

질량 분포의 모멘트를 일치시키는 것은 수치 적분 공식을 설계하는 것과 같은 문제이다. $f = 1, x, x^2$에 대해 정확한 공식 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$는

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -aw_0 + aw_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

을 만족해야 하며, 이는 막대에 대한 조건과 정확히 같다($f = 1, x, x^2$이 각각 질량, 1차 모멘트, 관성 모멘트의 역할을 한다). 해는 $w = 2a(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$, 즉 심프슨 공식이다. 대칭성 덕분에 덤도 생긴다. $f = x^3$에 대해서도 양변이 모두 0이 되므로 공식이 정확하다. 따라서 심프슨 공식은 삼차식을 정확하게 적분하며, 매끄러운 함수에 대한 오차는 4계 도함수에 비례한다. 그러므로 막대는 질량, 중심, 관성 모멘트뿐만 아니라 3차 모멘트까지도 세 입자와 일치한다.

가우스 구적법과 관성 텐서

질량뿐만 아니라 위치도 자유롭게 정할 수 있다면 입자 두 개로 충분하다. 점 $\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ 각각에 질량의 절반을 놓으면 된다. 확인해 보면 $2\cdot\frac{1}{2}m\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{1}{3}ma^2$이다. 이것이 2점 **가우스–르장드르 공식**(*Gauss–Legendre rule*) $\int_{-a}^{a} f \approx a\big(f(-\frac{a}{\sqrt{3}})+f(\frac{a}{\sqrt{3}})\big)$이며, 이 공식도 삼차식에 대해 정확하다. 가우스(Carl Friedrich Gauss)는 1814년에 교묘하게 배치한 n개의 점으로 $2n-1$차 다항식을 정확하게 적분할 수 있음을 보였고, 가우스 구적법(Gaussian quadrature)은 오늘날 수치해석의 표준적인 방법이다.

역학에서 물체의 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트는 3×3 대칭행렬 하나에 담기는데, 이를 **관성 텐서**(*inertia tensor*)라 한다. 질량, 질량 중심, 관성 텐서가 같은 두 물체는 모든 힘에 대해 똑같이 반응한다. 그래서 공학자들은 시뮬레이션에서 복잡한 부품을 몇 개의 점질량으로 바꿀 수 있다. 관성 텐서의 고유벡터(eigenvector)는 **주축**(*principal axes*)으로, 물체가 안정적으로 회전할 수 있는 축이다.

사고 기술

> **계를 동등한 계로 바꾸기**
>
> 두 계가 문제에서 중요한 모든 양에서 일치한다면, 복잡한 계를 단순한 계로 바꾸어라.
>
> 여기서는 세 개의 모멘트만이 중요했으므로, 연속인 막대를 세 입자로 바꿀 수 있었다. 대학에서 이 아이디어는 가우스 구적법으로, 전자기학과 중력 이론의 다중극 전개(multipole expansion)로(멀리서는 전하 분포나 질량 분포의 몇몇 모멘트만이 중요하다), 그리고 통계학의 적률법(method of moments)으로 나타난다.

더 도전하기

1 **심프슨 공식.** 구간 하나로 심프슨 공식을 사용하여 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$의 값을 어림하고, $\frac{\pi}{4}$와 비교하여라. 이 공식이 $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$와 $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$에 대해서는 정확하지만 $\int_{-1}^{1} x^4\,dx$에 대해서는 그렇지 않음을 확인하여라.

2 **모든 축이 똑같다.** 정사각형 얇은 판의 중심을 지나고 그 평면 위에 있는 임의의 축에 대한 관성 모멘트가 $\frac{1}{3}Ma^2$임을 보여라. (**힌트:** 동등한 아홉 입자는 90° 회전에 대해 대칭이다. 이것은 $\cos\psi$와 $\sin\psi$에 대한 이차식에 관해 무엇을 말해 주는가?)

3 **삼각형.** 질량이 M인 균일한 삼각형 얇은 판이 세 변의 중점에 놓인 질량 $\frac{1}{3}M$인 세 입자와 동역학적으로 동등함을 보여라.

4 속이 찬 정육면체. 속이 찬 균일한 정육면체와 동역학적으로 동등한 27개 입자의 계를 찾고, 이를 이용하여 한 모서리의 길이가 $2a$인 정육면체의 한 모서리에 대한 관성 모멘트를 구하여라.

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 강체와 관성 모멘트를 다루는 장.
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*** (Cambridge University Press). 심프슨 공식과 가우스 구적법을 포함하여 수치 적분을 다루는 장들.
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*** (Dover). 고전적인 참고서.

11.8 기울어진 평형

문제

STEP III 2025, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

도입

럭비공을 탁자 위에 놓으면 옆으로 누운 채 자리를 잡는다. 끝을 아래로 하여 세워도 아주 조심스럽게 하면 그대로 균형을 잡지만, 살짝만 건드려도 넘어진다. 탁자 위에 놓인 모든 강체(rigid body)에는 몇 개의 평형 위치(equilibrium position)가 있으며, 어떤 것은 안정(stable)하고 어떤 것은 불안정(unstable)하다. 어떤 평형 위치가 존재하는지는 오직 물체의 모양과 무게중심(centre of mass)에 따라서만 정해진다. 물체는 평형 위치를 몇 개나 가질 수 있을까? 최소 몇 개일까?

이 문제에서는 위쪽 절반은 둥근 돔이고 아래쪽 절반은 뾰족한, 팽이 모양의 입체를 만들고, 이 입체가 똑바로 서거나 거꾸로 서는 것 말고도 서로 다른 세 가지 기울기로 놓일 수 있음을 보인다. 핵심 아이디어는 단 하나의 기하학적 조건이다. 물체가 표면의 한 점으로 정지해 있을 수 있는 것은 그 점에서 표면의 법선(normal)이 무게중심을 지날 때, 그리고 그때뿐이다. 그 배후에는 최근의 발견이 있다. 안정한 위치와 불안정한 위치를 하나씩만 가지는 볼록(convex) 도형인 괴뫼츠(Gömböc)이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 입체가 곡면 위의 한 점 X에서만 탁자에 닿은 채 놓여 있다. 이 입체에 작용하는 힘은 무게(무게중심 G에 작용한다)와 X에서의 수직항력(reaction)이다. 언제 이 힘들이 평형을 이루는가?

탁자는 X에서 표면에 접하고, 수직항력은 X에서 탁자에 수직으로, 즉 표면의 법선 방향으로 작용한다. 무게는 G를 지나 연직 방향으로 작용한다. 두 힘이 평형을 이루려면 같은 직선

위에서 작용해야 하므로, X를 지나는 연직선, 곧 X에서의 법선이 G를 지나야 한다. 따라서 물체가 X에서 닿은 채 정지할 수 있는 것은 X에서의 법선이 G를 지날 때, 그리고 그때뿐이다.

차근차근 풀기

1단계 무게중심

생각해 보기 입체를 반지름 x, 두께 δx, 높이 y인 얇은 원통 껍질(cylindrical shell)로 잘라 보자. 껍질 하나의 부피는 얼마이고, 그 무게중심은 어디에 있는가?

$y = \frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$일 때, 껍질 하나의 부피는 $2\pi x y\,\delta x$이고 무게중심은 높이 $\frac{y}{2}$에 있다. 따라서

$$V = \int_0^r 2\pi x y\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\pi r^3}{n+2},$$

이고, 밑면에 대한 모멘트(moment)는

$$\begin{aligned}\int_0^r 2\pi x \cdot \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{r^{2n-2}}\int_0^r x(r^n - x^n)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi r^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{n^2\pi r^4}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

이다. (괄호 안이 이렇게 간단해지는 것은 $(n+1)(n+2) - 4(n+1) + (n+2) = n^2$이기 때문이다.) 나누면

$$\bar{y} = \frac{nr}{2(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

이다. $n = 2$(회전 포물면(paraboloid))일 때 이 값은 $\frac{r}{3}$으로, 잘 알려진 결과이다. $n \to \infty$이면 입체는 원기둥이 되고 $\bar{y} \to \frac{r}{2}$이다.

2단계 법선이 축과 만나는 곳

$x = rp$에서 곡선의 기울기는 $-\frac{nx^{n-1}}{r^{n-1}} = -np^{n-1}$이므로, 법선의 기울기는 $\frac{1}{np^{n-1}}$이다. 법선을 따라 점 $(rp, r(1-p^n))$에서 y축까지 움직이면 x는 rp만큼, y는 $\frac{rp}{np^{n-1}} = \frac{r}{np^{n-2}}$만큼 줄어든다. 따라서

$$Y = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right). \qquad \blacksquare$$

생각해 보기 $n = 4$일 때 $Y = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4p^2}\right)$이다. 이 값은 어디에서 가장 큰가? $p \to 0$일 때와 $p = 1$일 때는 어떻게 되는가?

$p^6 = \frac{1}{8}$, 즉 $p^2 = \frac{1}{2}$일 때 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = 0$이다. 이때 $Y = r\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}r$이다. $\blacksquare$

$p \to 0$이면 $Y \to -\infty$이다(꼭대기 근처에서 돔은 매우 평평하여 법선이 거의 연직이므로, 축과 아주 아래쪽에서 만난다). $p = 1$에서는 $Y = -\frac{1}{4}r$이다. 따라서 p가 0에서 1까지 변할 때 Y는 $-\infty$에서 $\frac{1}{4}r$까지 증가했다가 다시 $-\frac{1}{4}r$로 감소한다.

3단계 팽이

> **생각해 보기** 소문항 (iii)의 입체는 뒤집힌 회전 포물면($n = 2$) 위에 돔($n = 4$)을 얹은 것이다. 이 입체의 무게중심은 어디에 있는가?

1단계에 의해 돔의 부피는 $\frac{2\pi r^3}{3}$이고 무게중심은 $\frac{2r}{5}$에 있다. 회전 포물면의 부피는 $\frac{\pi r^3}{2}$이고, 거꾸로 놓여 있으므로 무게중심은 $-\frac{r}{3}$에 있다. 따라서

$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}\, r = \frac{\frac{4}{15} - \frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}\, r = \frac{3r}{35}.$$

이다. G는 $\left(0, \frac{3r}{35}\right)$에 있으며, 가장 넓은 부분보다 약간 위에 있다.

4단계 평형 위치의 개수 세기

> **생각해 보기** 기울어진 평형 위치가 되려면 (A나 B가 아닌) 점 가운데 그 점의 법선이 G를 지나는 점이 있어야 한다. 표면의 각 부분에서, 법선이 높이 $\frac{3r}{35}$에서 축과 만나는 점은 몇 개인가?

돔. 돔의 법선이 축과 만나는 높이 Y는 $-\infty$에서 $\frac{1}{4}r$까지 증가했다가 $-\frac{1}{4}r$로 감소한다. $-\frac{1}{4}r < \frac{3r}{35} < \frac{1}{4}r$이므로, 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 값 $\frac{3r}{35}$은 증가하는 구간에서 한 번, 감소하는 구간에서 한 번 나타난다. 즉 두 점이다.

뾰족한 밑부분. $n = 2$인 경우의 소문항 (ii)의 결과를 x축에 대하여 대칭이동하면, 매개변수가 p인 점에서의 법선은 축과 $-r\left(1 - p^2 - \frac{1}{2}\right) = r\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)$에서 만나며, 이 값은 $-\frac{1}{2}r$에서 $\frac{1}{2}r$까지 증가한다. 이 값은 $p^2 = \frac{41}{70}$에서 정확히 한 번 $\frac{3r}{35}$과 같아진다.

이 세 점은 각각 하나의 평형 위치를 주며, 세 법선이 축과 이루는 각이 모두 다르므로 $\overrightarrow{AB}$는 연직선과 0이 아닌 서로 다른 세 각을 이룬다(그림 11.8.1). ■

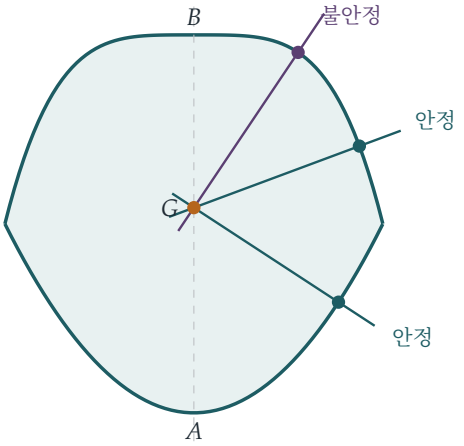


그림 11.8.1 소문항 (iii)의 입체의 단면과 그 무게중심 G(호박색). 표시된 세 점 각각에서 표면의 법선이 G를 지나므로, 입체는 그 점으로 정지해 있을 수 있다. 이 평형 위치 가운데 둘은 안정하고(그곳에서 표면이 국소적으로 G에 가장 가깝다) 하나는 불안정하다(국소적으로 가장 멀다).

돌아보기

- **물리적 조건을 기하로 바꾸기.** 평형 조건은 "법선이 G를 지난다"가 되었다.
- **풀지 않고 존재 보이기.** 우리는 끝내 각을 구하지 않았다. 함수 $Y(p)$의 모양과 함께 중간값 정리를 쓰면 그런 각이 몇 개인지 알 수 있었다.
- **일반적인 결과 다시 쓰기.** 일반적인 n에 대한 소문항 (ii)의 결과로 소문항 (iii)의 표면의 두 부분을 모두 다룰 수 있었다.

숨은 수학

임계점으로서의 평형 위치

입체가 점 X로 정지해 있을 때, 탁자로부터 G의 높이는 G에서 X에서의 접평면(tangent plane)까지의 거리이며, 볼록한 물체에서 GX가 법선 방향이면 이 거리는 $|GX|$이다. 일반적으로 평형 위치는 G에서 표면까지 거리의 **임계점**(*critical point*)이다. $|GX|$가 정상값을 가지는 점 X는 바로 그 점의 법선이 G를 지나는 점이다. 안정한 평형 위치는 이 거리의 극소점(local minimum)이고(G가 가능한 한 낮다), 불안정한 평형 위치는 극대점(local maximum)이나 안장점(saddle point)이다.

단면을 따라 A에서 B까지 돌아가면 G로부터의 거리는 다음과 같이 변한다. A에서는 크고(극대: 뾰족한 끝으로 균형을 잡고 있으므로 불안정), 밑부분의 기울어진 점에서는 더 작

고(극소, 안정), 테두리에서는 더 크고, 돔의 아래쪽 기울어진 점에서는 더 작고(안정), 위쪽 점에서는 더 크며(불안정), B에서는 더 작다(안정: 돔의 꼭대기로 놓여 있다). 그림에서 보듯이 극소와 극대는 번갈아 나타나야 한다. (사실 문제에서 세지 않는 평형 위치가 하나 더 있다. 입체는 표면의 법선이 하나로 정해지지 않는 날카로운 테두리 위에서도 불안정하게 균형을 잡을 수 있다.)

괴뫼츠

볼록한 물체는 최소 몇 개의 평형 위치를 가질 수 있을까? 어떤 물체든 적어도 하나의 안정한 위치와 하나의 불안정한 위치를 가진다. 바로 표면에서 G에 가장 가까운 점과 가장 먼 점이다. 밀도가 균일한 2차원 볼록 도형은 항상 적어도 네 개를 가진다(거리의 극소 둘과 극대 둘이 번갈아 나타난다). 1995년에 블라디미르 아르놀트(Vladimir Arnold)는 밀도가 균일한 3차원 볼록 물체가 단 두 개, 즉 안정한 위치 하나와 불안정한 위치 하나만 가질 수 있는지 물었다. 2006년에 Gábor Domokos와 Péter Várkonyi가 그런 물체를 만들어 냈는데, 이것이 **괴뫼츠**이다. 이 물체는 어떤 자세로 내려놓아도 구르고 흔들리다가 단 하나뿐인 안정한 위치에 이른다. 나중에 Domokos는 어떤 거북의 등딱지가 이 모양에 가깝다는 것을 알아차렸는데, 이 모양 덕분에 거북은 뒤집혔을 때 몸을 다시 바로 세우기가 쉬워진다.

아르키메데스와 물에 뜨는 물체

물체의 안정성에 대한 연구는 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라간다. 그는 **부체에 관하여**(On Floating Bodies)에서 물에 뜬 회전 포물면(배 선체의 모형)이 언제 똑바로 선 채 안정하고 언제 뒤집히는지를 그 모양과 밀도로 분석했다. 오직 기하만으로 얻어낸 그의 답에는 여기에서 쓴 것과 똑같은 종류의 무게중심과 법선 계산이 들어 있다. 조선 기술자들은 지금도 **메타센터**(*metacentre*)라는 형태로 그의 아이디어를 사용한다. 부력 중심(centre of buoyancy)을 지나는 연직선이 배의 축과 만나는 점이 무게중심보다 위에 있으면 배는 안정하다.

사고 기술

퍼텐셜 에너지 지형

평형 위치는 퍼텐셜 에너지(*potential energy*)**의 정상점**(*stationary point*)**이고, 안정한 평형 위치는 그 극소점이다. 정상점을 직접 구하는 대신 그 개수를 세어라.**

여기서 퍼텐셜 에너지는 G의 높이, 곧 G에서 표면까지의 거리에 비례했다. 대학에서는 이 관점이 역학, 화학(분자는 에너지의 극소점에 자리 잡는다), 그리고 위상수

학(topology)을 관통한다. 위상수학에서 **모스 이론**(*Morse theory*)은 곡면 위의 임의의 함수가 가지는 극소점, 극대점, 안장점의 개수가 곡면의 모양에 의해 제약됨을 보여 준다.

더 도전하기

1 **스스로 일어서는 장난감.** STEP II 1996, 9번 문제 (`step.maths.org/questions/96-s2-q9`)에 도전해 보라. 반구 위에 원뿔을 얹은 물체는 언제 스스로 바로 서는가? (**힌트:** G는 반구의 중심에 대하여 어디에 있어야 하는가?)

2 **구.** 밀도가 균일한 속이 찬 구에서는 모든 법선이 중심을 지난다. 이것은 구의 평형 위치에 대해 무엇을 말해 주는가? 구의 무게중심이 중심에서 약간 벗어나 있다면 어떻게 되는가?

3 **타원.** 직선 위에서 자신의 평면 안에서 구르는 타원판은 평형 위치를 정확히 네 개 가짐을 보이고, 그 가운데 어느 것이 안정한지 밝혀라.

4 **두 회전 포물면.** 소문항 (iii)의 돔을 회전 포물면 $ry = r^2 - x^2$로 바꾸어 입체가 x축에 대하여 대칭이 되게 하자. G가 원점에 있음을 보이고, 기울어진 평형 위치를 구하고, 이 평형 위치들이 왜 기울기가 같은 것끼리 쌍을 이루는지 설명하라.

더 읽을거리

- **Péter Várkonyi & Gábor Domokos, "Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem"**, *Journal of Nonlinear Science* 16 (2006). 괴뫼츠를 발표한 논문이다.
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 평형과 안정성을 다룬다.
- **Chris Rorres, "Completing Book II of Archimedes's *On Floating Bodies*"**, *Mathematical Intelligencer* 26 (2004). 아르키메데스의 안정성 분석을 현대적인 그림과 함께 소개한다.

11.9 안전 포물선

문제

STEP II 2014, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s2-q10`

도입

분수대가 모든 방향으로 같은 속력으로 물을 뿜어 올린다. 물줄기들은 바깥 경계가 뚜렷한, 반짝이는 돔을 이룬다. 그 안쪽의 모든 점은 물이 지나가고, 바깥쪽에는 물이 전혀 닿지 않는다. 그 경계는 포물선이며 **안전 포물선**(parabola of safety)이라고 부른다. 주어진 포구 속력의 대포로는 어떤 각도로 쏘더라도 이 곡선 바깥에 있는 표적을 맞힐 수 없기 때문이다.

놀라운 점은 이 경계 자체가 궤적(trajectory) 가운데 하나가 아니라는 것이다. 그것은 궤적 전체로 이루어진 곡선족의 **포락선**(envelope), 즉 모든 궤적에 한 번씩 접하는 곡선이다. 이는 Section 8.1에서 직선 $y = 0$이 포물선족에 접했던 것과 똑같다. 이 문제는 이차식의 판별식(discriminant)만으로 이 곡선을 찾아낸다.

시작하기 전에

생각해 보기 x와 y를 t로 나타낸 다음 t를 소거하여라. $\sec^2\theta$를 $\lambda = \tan\theta$로 어떻게 나타낼 수 있는가?

$x = ut\cos\theta$, $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$에 $t = \frac{x}{u\cos\theta}$를 대입하면

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\lambda^2),$$

이다. 여기서 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하였다.

차근차근 풀기

1단계 x를 고정하고 각도를 바꾸기

> **생각해 보기** 고정된 $x > 0$에 대하여 y를 λ의 함수로 생각하자. 이것은 어떤 종류의 함수인가? λ가 모든 실수를 움직일 때 이 함수는 어떤 값들을 갖는가?

고정된 x에 대하여 y는 λ에 대한 이차식이고, 최고차항의 계수 $-\frac{gx^2}{2u^2}$는 음수이다. 즉 λ에 대하여 위로 볼록한 포물선이다. 따라서 최댓값을 가지며, $\lambda \to \pm\infty$일 때 $y \to -\infty$이다. 연속함수이므로 최댓값 이하의 모든 값을 갖는다. 최댓값은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = x - \frac{gx^2}{u^2}\lambda = 0$, 즉 $\lambda = \frac{u^2}{gx}$일 때이고, 이때

$$Y = \frac{u^2}{gx}\,x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \frac{u^4}{g^2x^2}\right) = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}. \qquad \blacksquare$$

(같은 말로, 점 (x, y)에 도달할 수 있는 것은 이차방정식 $\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \frac{gx^2}{2u^2} + y = 0$이 실근 λ를 가질 때와 정확히 같고, 판별식 조건에서 $y \le Y$를 얻는다.)

2단계 영역

곡선 $Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$는 꼭짓점이 $\left(0, \frac{u^2}{2g}\right)$인 위로 볼록한 포물선이다. 이 꼭짓점의 높이는 똑바로 위로 쏘았을 때 도달하는 높이이고, 이 곡선은 최대 사거리(maximum range)인 $x = \pm\frac{u^2}{g}$에서 지면과 만난다. 이 곡선 위 또는 아래에 있는(그리고 지면 위에 있는) 모든 점에는 도달할 수 있고, 곡선보다 위에 있는 점에는 도달할 수 없다(그림 11.9.1).

> **생각해 보기** 곡선보다 엄밀히 아래에 있는 점을 지나는 궤적은 몇 개인가? 곡선 위의 점은 어떠한가?

곡선 아래의 점은 λ에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우에 해당한다. 즉 발사각이 두 개, 높은 각 하나와 낮은 각 하나가 있다. 곡선 위의 점은 중근을 갖는 경우에 해당한다. 즉 궤적이 정확히 하나 있고, 그 궤적은 그 점에서 곡선에 접한다.

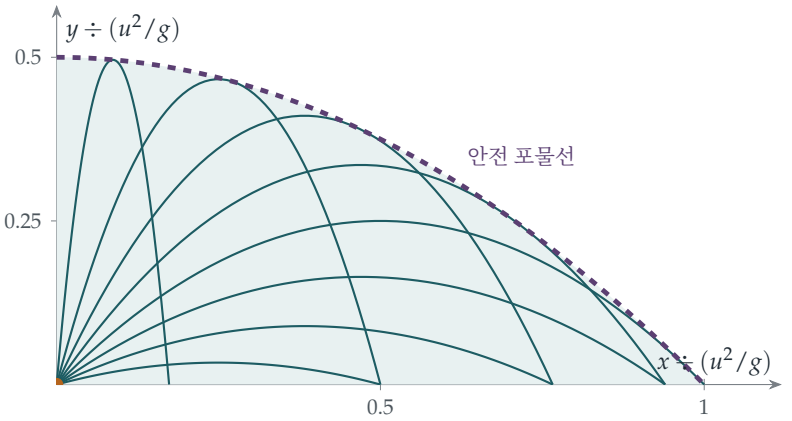


그림 11.9.1 고정된 속력 u와 각도 $15°, 25°, \ldots, 85°$에 대한 궤적들(청록색). 각 궤적은 점선으로 나타낸 안전 포물선 $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$에 정확히 한 번 접하며, 그 아래 영역(색칠한 부분)이 바로 도달할 수 있는 점들의 집합이다. 원점 O(호박색)는 안전 포물선의 초점이다.

3단계 가장 먼 점

생각해 보기 (지면 위 또는 그보다 위에서) O로부터 가장 먼, 도달 가능한 점은 경계 위에 있다. 거리의 제곱 $x^2 + Y^2$을 x^2의 함수로 나타내어라. 이 함수는 증가하는가, 감소하는가?

$X = x^2$이라 하자. 그러면

$$x^2 + Y^2 = X + \left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right)^2, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(x^2 + Y^2) = 1 - \frac{g}{u^2}\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{g^2 X}{2u^4} > 0.$$

따라서 경계를 따라 바깥으로 갈수록 거리가 증가하고, 가장 먼 점은 경계가 지면과 만나는 $x = \frac{u^2}{g}$인 점이다. 최대 거리는

$$\frac{u^2}{g},$$

이고, 이는 $45°$로 쏘는 보통의 최대 사거리 발사로 얻어진다. ■

돌아보기

- **질문을 뒤집어라.** 주어진 궤적이 어디로 가는지를 묻는 대신, 주어진 점을 지나는 궤적이 어떤 것들인지를 물어라.
- **매개변수에 대한 이차식.** 각 점에 대하여 $\lambda = \tan\theta$에 대한 방정식은 이차방정식이고, 그 판별식이 그 점에 도달할 수 있는지를 결정한다.

- **둘, 하나, 또는 없음.** 안쪽의 점에는 두 각도로, 경계 위의 점에는 한 각도로 도달하며, 바깥쪽의 점에는 어떤 각도로도 도달할 수 없다.

숨은 수학

포락선

일매개변수 곡선족(one-parameter family of curves) $F(x, y, \lambda) = 0$은 종종 **포락선**, 즉 곡선족의 모든 곡선에 접하는 곡선을 갖는다. 포락선은 $F = 0$과 $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$을 연립하여 풀면 구할 수 있는데, 이는 우리가 λ에 대하여 y를 최대화하면서 한 일과 정확히 같다. 포락선은 과학 곳곳에 나타난다. 커피 잔 표면에 보이는 밝은 빛의 곡선은 반사된 광선들의 포락선으로, **화선**(caustic)이라고 한다. 초음속 항공기의 소닉 붐은 항공기가 내는 음파들의 포락선인 **마하 원뿔**(Mach cone)을 따라 전달된다. 그리고 Section 8.1에서는 미분방정식의 해들로 이루어진 곡선족의 포락선이 그 자체로 해, 곧 "특이"해였다.

초점

안전 포물선에는 놀라운 성질이 있다. 그 초점(focus)이 발사점 O라는 것이다. (포물선 $y = c - \frac{x^2}{4c}$의 초점은 원점이며, 여기서는 $c = \frac{u^2}{2g}$이다.) 각 궤적 역시 포물선이고, 모든 궤적의 초점은 O를 중심으로 하는 반지름 $\frac{u^2}{2g}$인 원 위에 있다. 이는 에너지로 설명할 수 있다. 높이 y에서 발사체의 속력은 $\sqrt{u^2 - 2gy}$이고, 이 값은 준선(directrix)의 높이 $\frac{u^2}{2g}$에서 0이 된다. 그리고 준선이 같은 직선이면서 O를 지나는 포물선들은 그 초점이 이 원 위에 있다.

토리첼리의 포물선

갈릴레이(Galileo)는 1609년 무렵 발사체가 포물선을 따라 움직이며, 평지에서의 최대 사거리는 45°일 때 얻어진다는 것을 보였다. 그의 제자이자 기압계의 발명자로 더 잘 알려진 에반젤리스타 토리첼리(Evangelista Torricelli)는 1644년 *De motu gravium*에서 안전 포물선을 발견하였다. 포병들에게 이것은 실용적인 질문, 즉 애초에 어떤 표적들이 사정거리 안에 있는가에 대한 답이었다. 토리첼리는 또한 주어진 점을 지나는 궤적들이 쌍으로 나타나며, 그 각도들이 그 점의 방향과 연직 방향에 대하여 대칭임을 보였다. 이것이 바로 이 문제의 높은 발사와 낮은 발사이다.

사고 기술

곡선족의 포락선

곡선족이 덮는 영역의 경계를 찾으려면, 점 하나를 고정하고 어떤 매개변수 값에 대하여 곡선이 그 점을 지나는지 물어라. 경계는 해의 개수가 바뀌는 곳이다.

점이 움직일 때 해의 개수를 세는 이 같은 아이디어는 광학의 화선 연구, 동역학계(dynamical system)의 분기(bifurcation) 연구, 그리고 방정식의 해의 개수가 어떻게 바뀔 수 있는지를 분류하는 파국 이론(catastrophe theory)의 바탕이다.

더 도전하기

1 **폭발하는 불꽃놀이.** STEP II 2023, 10번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`)에 도전해 보아라. 이 문제는 폭발로 흩어지는 입자들을 중심이 자유낙하하는 구로 보고, 안전 포물면을 따라 움직이는 입자를 찾는다.

2 **비탈 위로 쏘기.** 경사각이 β인 비탈면 위쪽으로 속력 u로 쏜 발사체의 최대 사거리를 구하여라. (힌트: 직선 $y = x\tan\beta$는 안전 포물선과 어디에서 만나는가?) 최적의 발사 방향이 비탈면과 연직 방향 사이의 각을 이등분함을 보여라.

3 **두 각도.** 점 P에 도달하는 두 각도가 OP와 연직 방향 사이의 각의 이등분선에 대하여 대칭임을 보여라.

4 **초점들.** 각도가 θ인 궤적의 초점이 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$임을 보이고, 이로부터 초점들이 O를 중심으로 하는 원 위에 있음을 보여라.

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press, 고전역학 입문서), 3장. 궤적들의 포락선을 다룬다.
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, "On caustics of plane curves"**, *American Mathematical Monthly* 88 (1981). 기하학에서의 포락선과 화선.
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves*** (Cambridge University Press, 곡선에 관한 책). 포락선, 화선을 비롯한 여러 고전적인 곡선들을 작도법과 함께 다룬다.

11.10 나에게로 되돌아오는 공

문제

STEP II 2019, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

도입

공을 앞으로 던지면 공은 땅에 떨어질 때까지 던진 사람에게서 계속 멀어진다. 당연한 일이다. 공을 똑바로 위로 던지면 공은 다시 돌아온다. 그렇다면 그 사이 어딘가에서 무언가가 바뀌어야 한다. 즉 공이 멀어지다가 **가까워지고**, 땅에 떨어지기 전에 다시 멀어지는 각도가 있어야 한다. 이 문제는 그 정확한 경계값 $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 곧 약 $70.5°$를 찾는다.

이 결과는 수학에서 흔히 볼 수 있는 상황의 좋은 예이다. 모두가 단조(monotonic)라고 생각하는 양이 실제로는 단조가 아닌 경우이다. 또한 대학에서 늘 쓰이는 표준 기법도 보여 준다. 거리가 증가하는지 알아보려면 거리의 **제곱**을 미분(differentiate)하면 되는데, 이렇게 하면 제곱근을 피할 수 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 왜 OP보다 OP^2을 다루는 것이 더 쉬울까? "OP가 증가한다"는 것은 "OP^2이 증가한다"는 것과 같은가?

$OP^2 = x^2 + y^2$은 t에 대한 다항식(polynomial)이지만, OP에는 제곱근이 들어 있다. $OP \geq 0$이고 제곱하는 함수는 음이 아닌 수에서 증가하므로, OP는 OP^2이 증가할 때 정확히 그때에만 증가한다.

차근차근 풀기

1단계 거리의 제곱

$x = ut\cos\alpha$, $y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이므로

$$OP^2 = u^2t^2\cos^2\alpha + u^2t^2\sin^2\alpha - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 = u^2t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

> **생각해 보기** t에 대하여 미분해 보자. 인수 t를 묶어 내면 무엇이 남는가? 그것은 언제 모든 t에 대해 양수인가?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = 2u^2t - 3ugt^2\sin\alpha + g^2t^3 = t(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2).$$

$t > 0$일 때 부호는 이차식(quadratic) $g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2$의 부호와 같다. 이 이차식은 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이므로, 판별식(discriminant)이 음수이면 모든 t에 대해 양수이다.

$$9u^2g^2\sin^2\alpha - 8u^2g^2 < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sin^2\alpha < \frac{8}{9} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

이 경우 OP는 비행하는 동안 내내 증가한다. ■

2단계 더 가파르게 던지기

> **생각해 보기** $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$이면 이차식은 서로 다른 두 실근을 가진다. 두 근은 양수인가? 작은 근은 입자가 땅에 떨어지기 전인가?

두 근의 합은 $\frac{3u\sin\alpha}{g} > 0$이고 곱은 $\frac{2u^2}{g^2} > 0$이므로 두 근은 모두 양수이며, 두 근 사이에서 이차식, 따라서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2$은 음수이다. 입자는 $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$에 땅에 떨어진다. 작은 근은

$$t_1 = \frac{u}{2g}(3\sin\alpha - \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}) < \frac{u}{2g}\cdot 3\sin\alpha < \frac{2u\sin\alpha}{g} = T.$$

따라서 t_1 직후(그리고 땅에 떨어지기 전)에 OP는 감소한다. ■

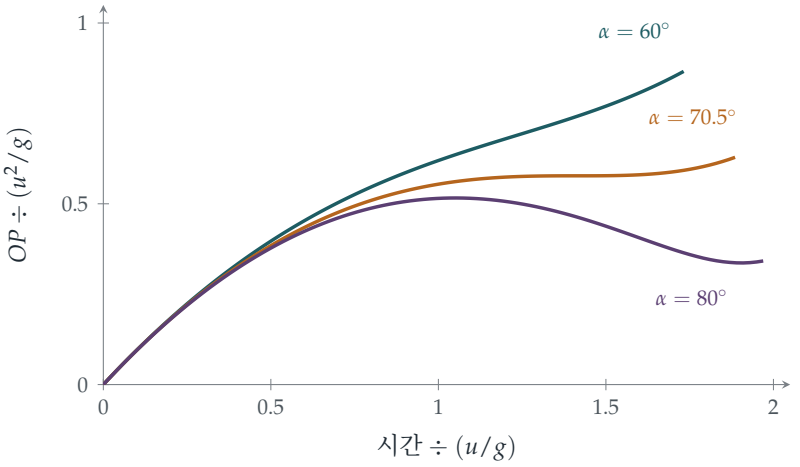


그림 11.10.1 세 가지 각도에 대하여, 땅에 떨어질 때까지 던진 사람으로부터의 거리를 시간에 따라 나타낸 그래프. 60°(청록색)에서는 거리가 항상 증가한다. 임계각(critical angle) $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$(호박색)에서는 거리가 한순간 멈춘다. 80°(자주색)에서는 공이 멀어지다가 한동안 던진 사람 쪽으로 돌아오고, 땅에 떨어지기 직전에 다시 멀어진다.

3단계 움직이는 관찰자

생각해 보기 Q는 지면을 따라 반대 방향으로 속력 v로 O에서 멀어진다. Q에서 재면 수평 거리는 $x + vt$이다. 이것은 계산에 어떤 영향을 주는가?

QP의 수평 성분은 $(u\cos\alpha + v)t$이고 수직 성분은 $ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이다. 따라서

$$QP^2 = \big((u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha\big)t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4,$$

이는 첫째 항의 u^2을 $w^2 = (u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha$로 바꾼 것 말고는 앞과 같다. 도함수(derivative)는 $t\big(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2w^2\big)$이고, 이것이 모든 $t > 0$에 대해 양수일 조건은 다음과 같다.

$$9u^2\sin^2\alpha < 8w^2 \quad\Longleftrightarrow\quad u^2\sin^2\alpha < 8(u\cos\alpha + v)^2,$$

여기서 둘째 부등식은 양변에서 $8u^2\sin^2\alpha$를 소거하여 얻는다. 제곱근을 취하면($u\sin\alpha$와 $u\cos\alpha + v$는 모두 양수이다) $u\sin\alpha < 2\sqrt{2}(u\cos\alpha + v)$이고, 이를 정리하면

$$2\sqrt{2}\,v > (\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha)u. \qquad \blacksquare$$

(이 조건이 성립하면 도함수가 모든 $t > 0$에 대해 양수이므로, 이는 QP가 비행하는 동안 내내 증가하기 위한 충분조건이다.)

돌아보기

- **제곱을 미분하라.** 거리의 제곱은 다항식이고, 그 도함수는 거리의 도함수와 부호가 같다.
- **항상 양수인 이차식.** "모든 시간에 대해 증가한다"는 조건이 판별식에 대한 조건이 되었다.
- **새 문제를 옛 문제로.** 움직이는 관찰자는 계수 하나만 바꾸었으므로, 앞의 분석을 그대로 적용할 수 있었다.

숨은 수학

기하학적 관점

OP는 P의 속도(velocity)가 "안쪽"을 향할 때, 즉 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 둔각(obtuse angle)을 이룰 때, 다시 말해 $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} < 0$일 때 정확히 그때에만 감소한다. 가파르게 던지면 비행의 꼭대기 근처에서 입자는 던진 사람의 높은 위쪽, 약간 앞에 있으며, 거의 수평으로 멀어지고 있지만 떨어지기 시작한다. $\overrightarrow{OP}$의 방향을 기준으로 속도의 아래쪽 성분이 바깥쪽 성분보다 커지면 입자는 가까워진다. 완만하게 던지면 입자는 항상 충분히 앞쪽에 있으므로 속도가 O 쪽을 향하는 일이 결코 없다. 임계 경우는 속도가 정확히 한순간 $\overrightarrow{OP}$에 수직(perpendicular)이 되는 경우이며, 이때가 그림 11.10.1에서 거리가 멈추는 순간이다.

단조성은 저절로 주어지지 않는다

"당연히" 증가할 것 같은 많은 양이 실제로는 그렇지 않다. 지구와 달 사이의 거리는 진동한다. 구불구불한 길 위의 두 자동차 사이의 거리는 한 차가 항상 앞서 있더라도 줄어들 수 있다. 먹이가 늘어나는 동안에도 포식자의 개체 수는 줄어들 수 있다. 어떤 양이 단조임을 증명한다는 것은 보통 도함수의 부호가 일정함을 보이는 것이고, 여기서 쓴 기법(다항식으로 바꾼 뒤 그 근이나 판별식을 확인하는 것)이 이를 위한 표준적인 방법이다. 해석학(analysis)에서 단조성은 수렴(convergence)을 증명하는 열쇠가 되는 경우가 많다. 2장에서 보았듯이, 유계(bounded)인 단조 수열(sequence)은 수렴한다.

사고 기술

도함수로 단조성 확인하기

어떤 양이 항상 증가하는지 판단하려면, 그 양(또는 그 제곱처럼 다루기 편한 그 양의 함수)을 미분하고, 도함수의 부호가 바뀔 수 있는지 물어보라.

대학에서는 이런 종류의 부호 논증을 부등식을 증명하고, 최댓값과 최솟값을 찾고, 미분방정식(differential equation) 해의 안정성(stability)을 연구하는 데 쓴다. 미분방정식에서는 항상 감소하는 양이(Section 8.2에서처럼) 계가 안정된 상태로 정착함을 증명해 준다.

더 도전하기

1 **얼마나 가까워지는가?** $\alpha = 80°$일 때 OP가 극대와 극소가 되는 시각과 그때의 거리를 u^2/g 단위로 구하라.

2 **경사면 위에서.** 수평면과 각 β를 이루는 경사면 위쪽으로 공을 던져 경사면에 떨어지는 경우에 대하여 (i)번 문항을 다시 풀어라. (경사면으로부터 잰) 임계각은 달라지는가?

3 **공기 저항이 있을 때.** 공이 속도에 비례하는 저항도 받는다고 하자. 계산하지 않고, 임계각이 $70.5°$보다 클 것이라고 예상하는가, 작을 것이라고 예상하는가? 그 이유는 무엇인가?

4 **높은 곳에서 던지기.** 공을 절벽 꼭대기에서 던져 훨씬 아래에 떨어진다면, 어떤 각도로 던지든 OP가 결국에는 증가함을 보이고, 어느 단계에서 OP가 감소하는 각도가 있는지 알아보라.

더 읽을거리

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics*** (Wiley). 일상에서 만나는 놀라운 물리 퍼즐 수백 개를 담고 있다.
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 3장. 포물체(projectile)를 다루며, 직관에 어긋나는 문제가 여러 개 있다.
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 어떤 것이 다른 것보다 항상 크다는 것을 증명하는 기술을 다룬다.

11.11 야수는 어떻게 공을 잡는가

문제

STEP II 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/98-s2-q11`

도입

공이 외야(outfield) 높이 날아간다. 뛰어난 수비수(fielder)는 즉시 출발하여 공이 떨어지는 바로 그 순간에 도착한다. 어떻게 그럴 수 있을까? 눈 깜짝할 사이에 포물체 운동(projectile motion)의 방정식을 머릿속으로 풀 수 있는 사람은 없으며, 게다가 수비수는 공의 속력이나 각도를 알지 못한다. 그런데도 수비수들은, 그리고 프리스비를 잡는 개들은, 이 일을 아무렇지 않게 해낸다.

1968년 물리학자 Seville Chapman이 하나의 답을 제안했고, 이 문제는 그것을 증명한다. 수비수가 공의 올려본각(angle of elevation) θ를 지켜보면서 $\tan\theta$가 **일정한 비율로** 증가하도록 움직이면, 수비수는 공이 떨어지는 곳에 정확히 도착한다. 물리학 지식은 전혀 필요 없고, 공이 일정한 속도보다 더 빠르게 올라가는 것처럼 보이는지 더 느리게 올라가는 것처럼 보이는지만 알아차릴 수 있으면 된다. 어려운 예측 문제가 단순한 피드백(feedback) 규칙으로 바뀌는 것이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 타자(batsman)를 원점에, 수비수를 거리 D인 곳에 둔다. 공이 (x, y)에 있을 때 $\tan\theta$는 무엇인가?

공은 수비수의 눈높이보다 y만큼 위에 있고, 수비수 앞쪽으로 수평 거리 $D - x$만큼 떨어져 있다(공은 수비수 쪽으로 다가오고 있다). 따라서 $\tan\theta = \frac{y}{D-x}$이다.

차근차근 풀기

1단계 완벽한 위치에 있는 수비수

생각해 보기 공의 수평 속력을 U, 처음 연직 속력을 W라 하고, 공이 시각 T에 (눈높이에) 떨어진다고 하자. x, y, D를 U, W, T, g, t로 나타내어라. y를 인수분해할 수 있는가?

$x = Ut$이고 $y = Wt - \frac{1}{2}gt^2$이며, 공은 $T = \frac{2W}{g}$에 눈높이로 돌아오는데, 그곳에 수비수가 있다: $D = UT$. $W = \frac{1}{2}gT$이므로

$$y = \tfrac{1}{2}gt(T - t), \qquad D - x = U(T - t).$$

인수 $T - t$가 약분된다:

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}\,t.$$

따라서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta = \frac{g}{2U}$로 상수이다. ■

2단계 달리는 수비수

생각해 보기 이제 수비수가 거리 D_0에서 출발하여 속력 v로 타자를 향해 달린다고 하자. 그러면 수비수의 위치는 $D_0 - vt$이다. 수비수는 시각 T에 공을 잡는다. D_0는 무엇인가? 같은 계산을 반복하여라.

시각 T에 공을 잡으려면 수비수는 공이 떨어지는 곳에 있어야 한다: $D_0 - vT = UT$이므로 $D_0 = (U + v)T$이다. 수비수와 공 사이의 수평 거리는 $D_0 - vt - Ut = (U + v)(T - t)$이고, 이번에도 인수가 약분된다:

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}\,t.$$

따라서 수비수가 알맞은 속력으로 달리고 있다면 $\tan\theta$는 일정한 비율로 증가한다.

생각해 보기 문제는 그 역(converse)을 묻는다: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta$가 일정하도록 달린다면, 수비수는 공을 잡을 수 있는가?

수비수가 속력 v로 달리고 $\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D_0-(U+v)t}$가 일정한 비율 c로 증가한다고 하자. 그러면 $\tan\theta = ct$이다($t = 0$에서 그 값은 0이다). 그러면

$$\tfrac{1}{2}g(T - t) = c(D_0 - (U + v)t) \quad \text{모든} t.$$

t의 계수와 상수항을 비교하면(comparing coefficients) $\frac{1}{2}g = c(U + v)$이고 $\frac{1}{2}gT = cD_0$이

다. 두 식을 나누면 $D_0 = (U+v)T$인데, 이는 정확히 시각 T에 낙하 지점에 있기 위한 조건이다. 따라서 수비수는 $\tan\theta$가 꾸준히 증가하도록 v를 고르면 되고, 그러면 공을 잡는다. ■

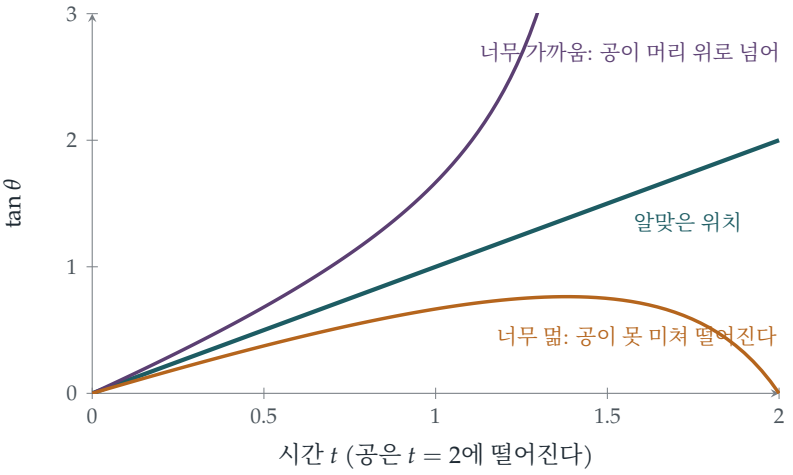


그림 11.11.1 거리 2인 곳에 떨어지는 공($g = 2$, 수평 속력 1)에 대하여 제자리에 서 있는 수비수가 보는 모습. 알맞은 위치에서는 $\tan\theta$가 직선으로 증가한다(청록색). 너무 가까이 서 있으면 $\tan\theta$가 가속하며 증가하고 공은 수비수의 머리 위로 넘어간다(자주색). 너무 뒤에 서 있으면 점점 더 느리게 증가하다가 감소한다(호박색). 규칙: 공의 상이 꾸준히 올라가도록 움직여라.

돌아보기

- **공통인수를 찾아라.** 높이와 수평 거리 모두 $T-t$를 포함하고 있었고, 이를 약분하자 $\tan\theta$가 일차식이 되었다.
- **역을 증명하라.** 규칙이 실제로 통한다는 것(공을 잡게 된다는 것)을 보이려면 계수를 비교하는 반대 방향의 논증이 필요했다.
- **지각하기 쉬운 불변량.** $\tan\theta$의 꾸준한 증가는 눈으로 판단할 수 있지만, 낙하 지점은 그럴 수 없다.

숨은 수학

광학적 가속도 상쇄

Chapman의 규칙은 오늘날 **광학적 가속도 상쇄**(optical acceleration cancellation)라 불린다. 수비수는 "광학적 가속도" $\frac{d^2}{dt^2}\tan\theta$를 0으로 유지하도록 움직인다. 공의 상이 위로 가속하면 공이 머리 위로 넘어갈 것이므로 뒤로 물러나고, 감속하면 공이 못 미쳐 떨어질 것이므

로 앞으로 달려 나간다(그림 11.11.1). 이 전략은 공이 어디에 떨어질지 알려 주지는 않지만, 수비수를 그곳으로 데려다 준다. 이것은 유도 미사일을 조종하는 것과 같은 피드백 제어 법칙(feedback control law)이다. 미사일은 **비례 항법**(proportional navigation)을 사용하여 목표물에 대한 시선각(line-of-sight angle)을 일정하게 유지하는데, 이는 같은 아이디어의 옆 방향 버전이다.

수비수가 실제로 하는 일

실제 수비수들은 Chapman의 규칙을 사용할까? 1990년대에 야구 외야수의 머리에 카메라를 달고 한 실험들은 엇갈린 결과를 보였다. Michael McBeath와 동료들은 1995년 *Science*에서, 한쪽 옆으로 날아가는 공의 경우 수비수가 공의 상이 시야를 가로질러 직선으로 움직이도록("선형 광학 궤적(linear optical trajectory)") 곡선 경로를 따라 달리며, 이 방법 역시 공을 잡게 해 준다고 주장했다. 이후의 연구는 두 전략과 그 혼합이 모두 사용되며, 수비수가 일정한 속력으로 달리지 않는 경우가 많다는 것을 시사했다. 2004년의 한 연구는 프리스비를 잡는 개들이 같은 광학적 규칙에 부합하는 경로를 따른다는 것을 발견했다. 세부 사항이 어떻든, 놀라운 결론은 변함없다: 공을 잡는 데에는 예측이 필요하지 않고, 올바른 피드백만 있으면 된다.

Chapman의 논문

1968년 *American Journal of Physics*에 실린 Seville Chapman의 "Catching a baseball"은 세 쪽 분량이며, 본질적으로 이 문제의 계산을 담고 있다. 그는 이 전략이 공기 저항(air resistance)이 없을 때에만 통하며, 실제 야구공의 궤적은 항력(drag)과 회전(spin) 때문에 왜곡되어 상황이 복잡해진다고 지적했다. 그럼에도 불구하고, 뇌가 복잡한 제어 문제를 풀기 위해 시야의 단순한 불변량(invariant)을 이용한다는 아이디어는 심리학과 로봇공학에서 중요해졌다.

사고 기술

관찰하기 쉬운 불변량을 찾아라

어떤 양을 예측하기 어려울 때에는, 직접 관찰할 수 있으면서 일이 제대로 진행될 때에 정확히 단순하게 행동하는 관련된 양을 찾아라.

여기서 낙하 지점은 예측하기 어려웠지만, $\tan\theta$의 변화율은 관찰하기 쉬웠다. 대학에서 이것은 피드백 제어의 아이디어이자, 필요한 정보를 담고 있는 관측량(observable)을 고르는 아이디어이다.

더 도전하기

1 **뒤로 달리기.** 공이 수비수의 출발 위치보다 뒤에 떨어질 경우, 수비수는 타자에게서 멀어지는 방향으로 달려야 하며 같은 규칙이 적용됨을 보여라.

2 θ **자체는 아니다.** 완벽한 위치에 있는 수비수에게 $\frac{d\theta}{dt}$는 상수가 아님을 보여라. 왜 $\tan\theta$가 지켜봐야 할 올바른 양인가?

3 **눈높이.** 공이 수비수의 눈높이보다 h만큼 낮은 높이에서 쳐진다면, 알맞은 위치에 있는 수비수에게 $\tan\theta$는 여전히 t의 일차식인가? (수비수는 눈높이에서 공을 잡는다고 가정한다.)

4 **공기 저항.** 선형 공기 저항이 있으면 수평 속도는 지수적으로 감소한다. 알맞은 위치에 있는 수비수에게 $\tan\theta$는 여전히 t의 일차식인가?

더 읽을거리

- **Seville Chapman, "Catching a baseball"**, *American Journal of Physics* 36 (1968). (야구공 잡기)
- **Michael McBeath, Dennis Shaffer & Mary Kaiser, "How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls"**, *Science* 268 (1995). (야구 외야수는 뜬공을 잡기 위해 어디로 달릴지 어떻게 결정하는가)
- **Dennis Shaffer et al., "How dogs navigate to catch Frisbees"**, *Psychological Science* 15 (2004). (개는 프리스비를 잡기 위해 어떻게 길을 찾는가)

11.12 고무줄 위의 개미

문제

STEP II 2018, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/18-s2-q10`

도입

개미 한 마리가 길이 1킬로미터인 고무 밧줄 위를 초속 1센티미터로 걸어가기 시작한다. 밧줄은 1초마다 1킬로미터씩 고르게 늘어난다. 먼 쪽 끝은 초속 1000미터로 멀어지니 개미보다 10만 배나 빠르다. 개미는 언젠가 끝에 도달할까?

놀랍게도 도달한다. 밧줄이 늘어나면서 개미도 함께 실려 가고, 밧줄 전체에 대한 **비율**로 본 개미의 전진은 점점 줄어들지만 그 비율들을 모두 더하면 조화급수(harmonic series)처럼 되는데, 조화급수는 발산(diverge)한다(Section 2.3). 그래서 개미는 결국 도착한다. 다만 우주의 나이가 하찮아 보일 만큼 긴 시간이 지난 뒤이다. 이 문제는 연속적인 경우를 정확히 풀어, 걸리는 시간이 두 속력의 비에 대해 지수적으로 커진다는 것을 보인다.

시작하기 전에

생각해 보기 줄은 고르게 늘어난다. 즉 줄의 모든 부분이 같은 배율로 늘어난다. 시각 t에서 줄의 길이는 $a+ut$이다. 말뚝으로부터 거리 x인 점이 전체의 $\frac{x}{a+ut}$만큼의 비율에 있다면, 이 점은 얼마나 빨리 움직이는가?

줄 위의 각 점은 길이에 대한 비율 f를 그대로 유지하므로, 말뚝으로부터의 거리는 $f(a+ut)$이고 속력은 $fu = \frac{ux}{a+ut}$이다. 말뚝 가까이의 점들은 거의 움직이지 않고, 먼 쪽 끝은 속력 u로 움직인다.

차근차근 풀기

1단계 개미의 방정식

개미는 줄에 대해 속력 v로 움직이고, 여기에 개미 아래에 있는 줄의 속력이 더해진다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

생각해 보기 몫의 미분법(quotient rule)으로 $\frac{x}{a+ut}$를 미분하고 $\dot{x}$에 대한 방정식을 이용하라.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = \frac{\dot{x}}{a+ut} - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut}. \qquad \blacksquare$$

개미가 지나온 줄의 비율은 $\frac{v}{a+ut}$의 비율로 증가한다. 이는 개미 자신의 속력을 현재 길이로 나눈 값이다. 늘어남은 어느 점의 비율도 바꾸지 않으므로 식에서 완전히 사라진다.

2단계 끝에 도달하기

생각해 보기 0부터 t까지 적분하라. 비율은 언제 1이 되는가?

개미는 말뚝에서 출발하므로

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v\,\mathrm{d}s}{a+us} = \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a}.$$

개미는 비율이 1일 때 끝에 도달한다. 즉 $\ln\frac{a+uT}{a} = \frac{u}{v} = k$이므로 $a+uT = ae^k$이고, 다시 말해

$$uT = a(e^k - 1). \qquad \blacksquare$$

로그는 한없이 커지므로, 밧줄이 아무리 빨리 늘어나도 개미는 반드시 도착한다.

3단계 돌아오는 길

생각해 보기 돌아올 때 줄에 대한 개미의 속력은 $-v$이다. 이제 비율의 변화율은 얼마인가? 개미는 시각 T에 비율 1에서 출발한다.

$-v$로 같은 계산을 하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}$이므로

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a+uT}.$$

비율은 $a+ut = (a+uT)e^k$일 때 0이 된다. $a+uT = ae^k$이므로 돌아오는 데 걸리는 시간은

$$t - T = \frac{(a+uT)(e^k-1)}{u} = \frac{ae^k \cdot uT/a}{u} = Te^k. \qquad \blacksquare$$

돌아오는 길은 가는 길보다 e^k배 오래 걸린다. 개미가 방향을 돌릴 때쯤에는 줄이 처음보다 e^k배 길어져 있기 때문이다.

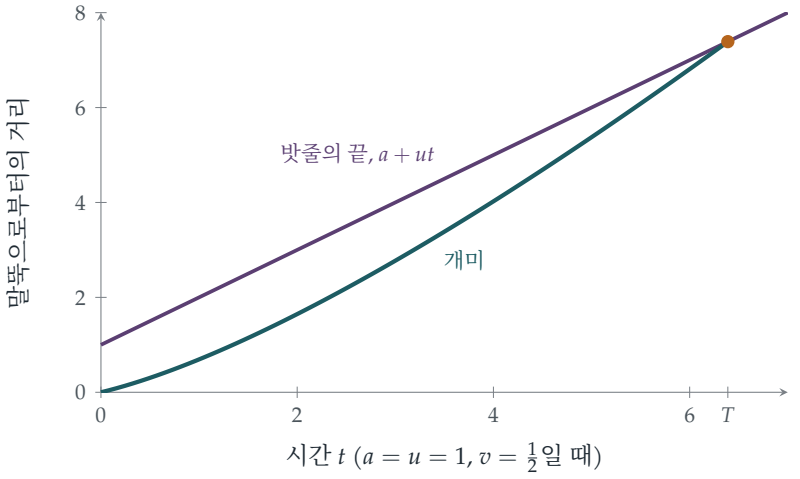


그림 11.12.1 끝(자주색)이 개미의 걷는 속력의 두 배로 움직이는 밧줄 위를 걷는 개미(청록색)($k = 2$). 개미는 늘어나는 밧줄에 실려 가며, 말뚝으로부터의 거리는 점점 더 빠르게 커진다. 개미는 $T = e^2 - 1 \approx 6.39$에 끝에 도달한다.

돌아보기

- **알맞은 변수를 쓴다.** 밧줄을 지나온 비율이 자연스러운 양이었다. 늘어남이 이 양을 바꾸지 않기 때문이다.
- **모습을 감춘 적분인자.** $\frac{1}{a+ut}$를 곱하자 선형 미분방정식(linear differential equation)이 완전한 도함수의 꼴이 되었다. 이것은 적분인자(integrating factor)의 방법이다.
- **발산은 속력을 이긴다.** 비율은 로그처럼 증가했고 로그는 유계가 아니므로, 개미는 반드시 도착한다.

숨은 수학

조화급수 버전

이 퍼즐은 보통 띄엄띄엄 늘어나는 형태로 소개된다. 밧줄의 길이는 1 km이고, 개미는 첫 1초 동안 1 cm를 걷는다. 그다음 밧줄이 1 km 늘어나고, 다시 개미가 1센티미터를 걷고, 이런 식으로 계속된다. n번째 초에 개미는 길이 n km인 밧줄에서 1 cm를 가므로, 비율로는

$\frac{1}{100\,000\,n}$만큼 간다. 늘어남은 비율을 바꾸지 않으므로 N초 뒤에 개미는 밧줄의

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

만큼을 지나왔다. 개미는 $H_N \approx 100\,000$일 때, 즉 약 $e^{100\,000}$초 뒤에 도착한다. 이 수는 43 000자리가 넘는다. (비교하자면 우주의 나이는 약 4×10^{17}초이다.) 연속 버전의 답도 이와 일치한다. $k=\frac{u}{v}=100\,000$이고 $T\approx\frac{a}{u}e^{k}$이다.

팽창하는 우주 속의 빛

밧줄 위의 개미는 팽창하는 우주를 가로지르는 빛의 모형이다. 먼 은하들은 공간 자체의 팽창에 실려 우리에게서 멀어지고, 그 은하에서 나온 빛은 개미가 늘어나는 밧줄 위를 걷듯이 팽창하는 공간을 **통과하여** 속력 c로 우리를 향해 온다. 먼 은하의 빛이 언젠가 우리에게 도달하는지는 팽창 속도가 시간에 따라 어떻게 변하는지에 달려 있다. 밧줄처럼 일정한 비율로 팽창하는 우주에서는 빛이 언젠가는 반드시 도착한다. 우리 우주처럼 팽창이 가속되는 것으로 보이는 우주에서는 빛이 결코 우리에게 도달하지 못하는 은하들이 있다. 즉 **우주의 사건 지평선**(cosmic event horizon)이 존재한다. 개미의 경우 이에 해당하는 것은 지수적으로 늘어나서 끝의 속력이 길이에 비례하여 커지는 밧줄이다(연습문제에서 직접 해 보라).

가드너의 개미

이 퍼즐은 1972년 프랑스 수학자 Denys Wilquin이 고무줄 위의 벌레 문제로 처음 고안한 것으로 보이며, 마틴 가드너(Martin Gardner)가 *Scientific American*의 칼럼과 그의 책 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*에서 소개하여 널리 알려졌다. 직관에 어긋나지만 증명은 쉬운 결과의 가장 잘 알려진 예 가운데 하나이며, 조화급수의 발산을 보여 주는 예로 즐겨 쓰인다.

사고 기술

복잡한 요소가 영향을 주지 않는 양을 찾아라

문제의 한 요소가 모든 것을 바꿔 놓을 때(여기서는 늘어남), 그 요소가 건드리지 않는 양을 찾아라.

늘어남은 모든 거리를 바꾸지만 비율은 하나도 바꾸지 않는다. 비율을 다루자 늘어남이 문제에서 사라졌다. 대학에서 이 아이디어는 우주론(cosmology)과 유체역학(fluid mechanics)의 **동행 좌표**(comoving coordinates)로 등장하며, 더 일반적으로는 변환에 대한 불변량(invariant)을 찾는 일로 나타난다.

더 도전하기

1 **절반 지점.** 개미는 언제 밧줄의 절반 지점에 있는가? 그것은 시각 $\frac{T}{2}$보다 이전인가, 이후인가?

2 **지수적으로 늘어나는 밧줄.** 이번에는 밧줄의 길이가 $ae^{\lambda t}$라고 하자. 개미가 끝에 도달하는 것은 $v > \lambda a$일 때뿐임을 보여라. (이것이 우주의 사건 지평선이다.)

3 **가속하는 밧줄.** 길이가 $a + \frac{1}{2}bt^2$이면 개미는 반드시 도착하는가?

4 **띄엄띄엄 늘어나는 퍼즐.** 띄엄띄엄 늘어나는 버전에서 개미가 밧줄의 1%를 지나는 데 몇 초가 필요한가? $H_N \approx \ln N + 0.577$을 이용하라.

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*** (W. H. Freeman). 고무 밧줄 위의 개미 이야기가 실려 있다.
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*** (Princeton University Press). 조화급수와 개미 이야기를 다룬다.
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology*** (Cambridge University Press). 팽창하는 공간, 지평선, 동행 좌표를 학부 수준에서 다룬다.

11.13 제설차 문제

문제

STEP III Specimen paper, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/spec-s3-q11`

도입

눈이 일정하게 내리고 있다. 제설차(snowplough) 한 대가 길을 따라 출발하는데, 만나는 눈이 깊어질수록 속도가 느려진다. 조금 뒤에 두 번째 제설차가 이미 치워진 길을 따라 뒤쫓아 간다. 두 번째 제설차는 첫 번째 제설차가 지나간 뒤에 쌓인 눈만 만나므로 눈이 더 얕고, 따라서 더 빨리 달리며 결국 앞차를 따라잡는다. 언제 따라잡을까?

이 문제는 Ralph Agnew가 1942년에 발표한 유명한 문제의 변형으로, 그 문제는 미분방정식(differential equation)에서 가장 잘 알려진 퍼즐 가운데 하나가 되었다. 이 문제의 묘미는 두 번째 제설차의 속도가 **첫 번째 제설차가 각 지점을 언제 지나갔는지**에 따라 달라진다는 데 있다. 그래서 소문항 (i)의 해가 소문항 (ii)의 방정식에 들어간다. 그리고 이 방정식은 "거꾸로", 즉 시간을 거리의 함수로 쓸 때 가장 깔끔해진다.

시작하기 전에

생각해 보기 첫 번째 제설차는 시각 t에 깊이 $h + kt$의 눈을 만난다. 이 제설차의 속력은 얼마인가? x를 t의 함수로 구하는 것과 t를 x의 함수로 구하는 것 가운데 어느 쪽이 더 쉬운가?

속력은 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}$이다. 이 식은 변수분리(separation of variables)가 깔끔하게 된다. 뒤집으면 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k}$가 되는데, 이는 t를 x의 함수로 보는 간단한 선형(linear) 방정식이다. 첫 번째 제설차에 대해서는 어느 방법이든 통하지만, 두 번째 제설차에 대해서는 뒤집은 형태가 꼭 필요하다.

차근차근 풀기

1단계 첫 번째 제설차

$\frac{dt}{dx} = \alpha(\frac{h}{k} + t)$로부터 양 $\frac{h}{k} + t$는 x에 대해 지수적으로 증가한다: $\frac{h}{k} + t = Ce^{\alpha x}$. $x = 0$일 때 $t = 0$이므로 $C = \frac{h}{k}$이고

$$t_1(x) = \frac{h}{k}(e^{\alpha x} - 1). \qquad \blacksquare$$

첫 번째 제설차는 지수적으로 느려진다. 같은 거리를 가는 데 걸리는 시간이 지수적으로 늘어난다.

2단계 두 번째 제설차의 방정식

생각해 보기 두 번째 제설차가 시각 t에 위치 y에 도달한다. 그곳의 눈 깊이는 얼마인가? (첫 번째 제설차가 지나간 직후의 깊이는 얼마였는가?)

첫 번째 제설차는 시각 $t_1(y)$에 위치 y의 눈을 모두 치웠다. 그 뒤로 눈이 비율 k로 쌓였으므로, 시각 t의 깊이는 $z = k\big(t - t_1(y)\big)$이다. 따라서 두 번째 제설차의 속력은

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{\alpha k\big(t - t_1(y)\big)} = \frac{1}{\alpha\big(t - t_1(y)\big)},$$

이고, 이를 뒤집으면

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dt}{dy} = t - \frac{h}{k}(e^{\alpha y} - 1). \qquad \blacksquare$$

3단계 풀기

생각해 보기 이 식은 t에 대해 선형이다: $\frac{dt}{dy} - \alpha t = -\frac{\alpha h}{k}(e^{\alpha y} - 1)$. 어떤 적분인자(integrating factor)를 쓰면 되는가? 초기 조건은 무엇인가?

$e^{-\alpha y}$를 곱하면

$$\frac{d}{dy}\big(te^{-\alpha y}\big) = -\frac{\alpha h}{k}\big(1 - e^{-\alpha y}\big), \qquad te^{-\alpha y} = -\frac{\alpha h}{k}y - \frac{h}{k}e^{-\alpha y} + C.$$

두 번째 제설차는 $t = T$에 $y = 0$에서 출발하므로 $T = -\frac{h}{k} + C$이고, 따라서 $C = T + \frac{h}{k}$이다. 다시 $e^{\alpha y}$를 곱하고 정리하면

$$t_2(y) = \frac{h}{k}(e^{\alpha y} - 1) + \Big(T - \frac{\alpha h y}{k}\Big)e^{\alpha y}. \qquad \blacksquare$$

(문제에서 요구하는 대로 확인하려면, 미분하여 대입하면 된다. 항들을 정리하면 $\alpha\big(t - t_1(y)\big)$가 된다.)

4단계 충돌

> **생각해 보기** 두 제설차는 같은 시각에 같은 지점에 도달할 때 충돌한다. $t_2(y)$와 $t_1(y)$를 비교해 보자.

차이 $t_2(y) - t_1(y) = \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right) e^{\alpha y}$는 위치 y에서 두 제설차 사이의 시간 간격이다. 이 간격은

$$y = \frac{kT}{\alpha h}. \qquad \blacksquare$$

일 때 0으로 줄어든다. 그 지점에서 두 번째 제설차가 첫 번째 제설차에 도달한다. 그 앞의 눈 깊이는 0이고, 이 모형에서 속력은 무한대가 된다(그림 11.13.1).

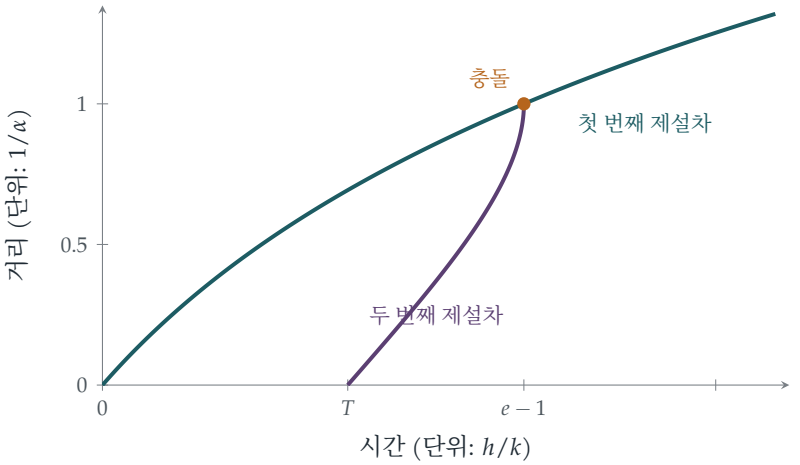


그림 11.13.1 $T = \frac{h}{k}$일 때(즉 눈 깊이가 두 배가 되었을 때 두 번째 제설차가 출발할 때) 두 제설차의 시간에 따른 거리. 첫 번째 제설차(청록색)는 눈이 깊어짐에 따라 느려진다. 두 번째 제설차(자주색)는 일부 치워진 길에서 늦게 출발하여 간격을 좁히면서 빨라지고, 거리 $\frac{kT}{\alpha h} = \frac{1}{\alpha}$, 시각 $(e-1)\frac{h}{k}$에서 첫 번째 제설차와 만난다.

돌아보기

- **방정식을 뒤집어라.** t를 위치의 함수로 보면 두 방정식이 모두 선형이었다.
- **한 해가 다음 문제에 쓰인다.** 첫 번째 제설차의 시간표 $t_1(y)$가 두 번째 제설차의 방정식에 나타났다.
- **두 번 풀지 말고 비교하라.** 충돌 조건은 간단한 인수를 가진 차이 $t_2 - t_1$에서 나왔다.

숨은 수학

Agnew의 제설차

Ralph Palmer Agnew의 1942년 교과서 *Differential Equations*에 실린 원래 문제는 이렇다. 어느 날 아침 눈이 일정하게 많이 내리기 시작한다. 제설차 한 대가 정오에 출발하여 첫 한 시간 동안 2마일, 두 번째 한 시간 동안 1마일을 간다. 눈은 언제 내리기 시작했는가? 제설차의 속력은 눈 깊이에 반비례하고, 눈 깊이는 눈이 내리기 시작한 뒤로 흐른 시간에 비례한다. 답(아래 연습문제)에는 황금비(golden ratio)가 나온다. 눈은 정오보다 약 37분 전에 내리기 시작했다. 이 문제처럼 제설차가 두 대인 변형은 그 뒤에 나왔다.

전달되는 정보

두 번째 제설차의 운동은 도로에 기록된 이력, 즉 각 지점이 마지막으로 치워진 시각에 따라 정해진다. 이는 **기억**(memory)을 가진 계의 간단한 예로, 한 장소의 상태가 그곳에서 앞서 일어난 일에 따라 달라진다. 교통 흐름, 빙하의 움직임, 산불의 확산이 모두 이런 성격을 띠며, 그 수학인 1계 편미분방정식(partial differential equation)과 그 **특성곡선**(characteristics)의 이론은 대학 2학년의 표준 주제이다. 시간을 위치의 함수로 쓰는 발상("전선이 이곳에 언제 도착하는가?")은 바로 이런 문제에 쓰이는 **도착 시간**(arrival times) 방법이다.

사고 기술

독립변수를 골라라

미분방정식은 변수의 역할을 바꾸면 훨씬 간단해질 수 있다. 변화율이 어떤 장소에서 무언가가 일어난 시각에 따라 달라진다면, 시간을 장소의 함수로 써라.

여기서 두 방정식은 모두 $t(y)$에 대해 쓰자 선형이 되었다. 대학에서는 어느 변수를 독립변수(independent variable)로 삼을지 고르는(그리고 편리할 때 바꾸는) 자유를 끊임없이 활용한다. 유체역학(fluid mechanics)의 호도그래프 방법(hodograph method)부터 기하학에서 호의 길이(arc length)를 매개변수(parameter)로 쓰는 것까지 그 예는 다양하다.

더 도전하기

1 **Agnew의 문제.** 정오 이전의 알 수 없는 시각에 눈이 일정한 비율로 내리기 시작한다. 속력이 눈 깊이에 반비례하는 제설차가 정오에 출발하여 첫 한 시간 동안 2마일, 두 번째 한 시간 동안 1마일을 간다. 눈이 정오보다 t_0시간 전에 내리기 시작했다면

$\left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3$임을 보이고, 이로부터 $\frac{1}{t_0}$이 황금비임을 이끌어 낸 뒤, 눈이 언제 내리기 시작했는지 구하여라.

2 **확인.** $t_2(y)$가 소문항 (ii)의 미분방정식을 만족함을 미분하여 확인하여라.

3 **시간 간격.** $kT > h$이면 시간 간격 $t_2(y) - t_1(y)$가 처음에는 증가하다가 감소하여 0이 됨을 보이고, 간격이 가장 큰 곳을 구하여라. $kT \le h$이면 어떻게 되는가? 이를 해석하여라.

4 **제설차 세 대.** 세 번째 제설차가 시각 $2T$에 출발한다. 그 운동의 방정식을 써라. 세 번째 제설차는 두 번째 제설차가 첫 번째 제설차를 따라잡기 전에 두 번째 제설차를 따라잡는가, 아니면 그 뒤에 따라잡는가?

더 읽을거리

- **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations*** (McGraw-Hill, 1942). 원래의 제설차 문제가 실린 책이다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*** (CRC Press). 여러 문제와 함께 제설차 문제를 다룬다.
- **Richard Haberman, *Mathematical Models*** (SIAM). 교통 흐름과 특성곡선을 쉽게 접근할 수 있는 수준으로 다룬다.

11.14 현수선이 아니라 포물선

문제

STEP I 1991, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/91-s1-q10`

도입

사슬의 양 끝을 잡고 늘어뜨리면 사슬은 **현수선**(catenary)이라는 곡선을 이룬다(이 이름은 사슬을 뜻하는 라틴어에서 왔다). 갈릴레이(Galileo)는 이 곡선이 포물선(parabola)이라고 생각했지만, 1646년에 십 대의 하위헌스(Huygens)가 보였듯이 그렇지 않다. 그러나 현수교(suspension bridge)처럼 무거운 도로를 같은 간격의 지지대로 사슬에 매달면, 사슬은 **정말로** 포물선을 이룬다. 차이는 무게가 분포하는 방식에 있다. 현수선에서는 무게가 굽은 사슬 자체를 따라 고르게 분포하고, 다리에서는 수평 방향으로 고르게 분포한다.

이 문제는 각 이음점에서 힘을 분해하는 것만으로 포물선임을 증명한다. 핵심은 장력(tension)의 수평 성분(component)이 사슬 전체에서 같다는 것이고, 따라서 각 구간의 기울기는 그 구간이 지탱하는 무게에 비례한다. 그 결과 아름다운 규칙이 나타난다. 연속한 이음점 사이의 낙차는 홀수 $1, 3, 5, 7, \ldots$의 순서로 커지고, 이 홀수들의 부분합(partial sum)은 완전제곱수이다.

시작하기 전에

생각해 보기 각 이음점 A_i에는 세 힘이 작용한다. 이웃한 두 구간의 장력, 그리고 지지대에 매달린 무게 w이다. 무게가 영향을 줄 수 없는 장력의 성분은 무엇인가?

무게는 연직 방향이므로, 각 이음점에서 두 장력의 수평 성분은 서로 평형을 이루어야 한다. 따라서 장력의 수평 성분을 H라 하면, H는 사슬의 모든 구간에서 같다.

차근차근 풀기

1단계 각 이음점에서의 방정식

구간 $A_{i-1}A_i$가 (A_{i-1}에서 가운데 쪽으로 갈 때) 수평선 아래로 각 ϕ_i를 이룬다고 하자. 그러면 이 구간의 장력 T_i의 수평 성분은 $T_i\cos\phi_i$, 연직 성분은 $T_i\sin\phi_i$이다. $1 \le i \le n$에 대하여 A_i에서 힘을 분해하면

$$T_i\cos\phi_i = T_{i+1}\cos\phi_{i+1} = H, \qquad T_i\sin\phi_i - T_{i+1}\sin\phi_{i+1} = w.$$

(바깥쪽 구간은 더 큰 연직 성분으로 위쪽과 바깥쪽으로 당기고, 안쪽 구간은 안쪽과 약간 아래쪽으로 당긴다. 그 차이가 지지대를 지탱한다.)

> **생각해 보기** 가운데 이음점 A_{n+1}에서는 어떻게 되는가? 다리의 대칭성(symmetry)을 이용하라.

대칭성에 의해 A_{n+1}에서 만나는 두 구간은 서로 거울상이므로, 각 구간이 지지대 무게의 절반을 지탱한다: $T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \frac{1}{2}w$.

2단계 무게에서 기울기로

가운데에서 바깥쪽으로 가면서 연직 성분을 구하면

$$T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w, \quad T_n\sin\phi_n = \tfrac{3}{2}w, \quad \dots, \quad T_1\sin\phi_1 = \tfrac{2n+1}{2}w.$$

이다. 각각을 H로 나누면 기울기는 $\tan\phi_i = \frac{(2(n+1-i)+1)w}{2H}$이다. 구간 $A_{i-1}A_i$의 기울기는 $\frac{y_{i-1}-y_i}{h}$이기도 하므로

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{h} = \frac{w}{2H}, \qquad \frac{y_{n-1}-y_n}{h} = \frac{3w}{2H}, \qquad \dots, \qquad \frac{y_0 - y_1}{h} = \frac{(2n+1)w}{2H}.$$

역수를 취하고 홀수를 곱하면, $\frac{h}{y_n-y_{n+1}}$, $\frac{3h}{y_{n-1}-y_n}$, ..., $\frac{(2n+1)h}{y_0-y_1}$는 모두 $\frac{2H}{w}$와 같다. ■

3단계 포물선

> **생각해 보기** 가운데에서 바깥쪽으로 이음점을 세는 번호를 j라 하여, A_{n+1-j}가 A_{n+1}로부터 수평 거리 jh인 곳에 있도록 하자. 이 점은 A_{n+1}보다 얼마나 높은가?

$c = \frac{wh}{2H}$로 두고 낙차를 더하면

$$y_{n+1-j} - y_{n+1} = c(1+3+5+\cdots+(2j-1)) = cj^2.$$

이다. 가운데에서부터 잰 x에 대하여 $x = jh$이므로, 가장 낮은 이음점으로부터의 높이는 $\frac{c}{h^2}x^2 = \frac{w}{2Hh}x^2$이다. 대칭성에 의해 반대쪽에서도 같은 식이 성립하고, 지지점($j = n+1$)도 같은 식을 만족한다. 따라서 모든 점은 포물선

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}(x - x_{n+1})^2. \qquad \blacksquare$$

위에 있다.

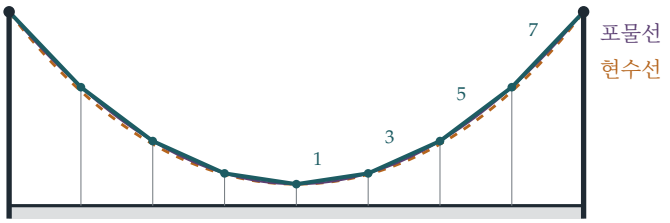


그림 11.14.1 같은 수평 간격마다 같은 하중을 받는 사슬(청록색). 이음점들은 포물선(자주색) 위에 놓이고, 가운데에서 바깥쪽으로 연속한 이음점 사이의 낙차는 $1:3:5:7$의 비를 이룬다. 양 끝과 가장 낮은 점이 같으면서 자기 무게만 받는 자유로운 사슬은 현수선(호박색, 점선)을 이루는데, 이 곡선은 바닥에서 더 평평하고 지지점 근처에서 더 가파르다.

돌아보기

- **일정한 것을 찾아라.** 연직 하중만 있으면 수평 장력은 어디서나 같다.
- **가운데에서부터 누적하라.** 각 구간은 자신과 가운데 사이의 모든 무게를 지탱하므로, 연직 성분은 w씩 커진다.
- **홀수의 합은 제곱수이다.** $1 + 3 + \cdots + (2j-1) = j^2$이라는 사실이 기울기의 목록을 포물선으로 바꾸었다.

숨은 수학

포물선인가, 현수선인가?

이 논증의 연속 버전이 두 곡선을 모두 설명한다. 일정한 수평 장력 H를 받는 사슬 $y(x)$에서 장력의 연직 성분은 Hy'이고, 짧은 구간에서 이 값은 그 구간이 받는 하중만큼 변한다: $H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$.

- 하중이 **수평 방향으로** 고르게 분포하면(도로의 단위 길이당 무게가 ρ인 무거운 도로), $Hy'' = \rho$이므로 y는 이차식, 곧 포물선이다.
- 하중이 사슬 자신의 무게로서 **사슬을 따라** 고르게 분포하면(사슬의 단위 길이당 ρ),

$Hy'' = \rho\sqrt{1+y'^2}$이고, 그 해는 $c = H/\rho$인 현수선 $y = c\cosh\frac{x}{c}$이다.

사슬이 거의 수평인 바닥 근처에서는 두 곡선이 거의 같다. 둘은 지지점 근처에서 달라지는데, 그곳에서는 사슬이 가팔라서 같은 수평 거리 안에 더 많은 사슬이 들어가기 때문이다. 상판이 케이블보다 훨씬 무거운 실제 현수교는 포물선에 매우 가깝다.

거꾸로 된 사슬과 아치

사슬은 순수한 인장 상태에 있다. 그 모양을 위아래로 뒤집으면 순수한 압축(compression) 상태의 아치(arch)가 되며, 이 아치는 휘려는 경향이 전혀 없다. 로버트 훅(Robert Hooke)은 1675년에 이 사실을 애너그램으로 발표했는데, 이를 풀면 다음과 같다: "유연한 줄이 매달린 그대로, 다만 뒤집으면 단단한 아치가 서리라." 크리스토퍼 렌(Christopher Wren)과 훅은 이 아이디어를 세인트폴 대성당(St Paul's Cathedral)의 돔에 이용했고, 안토니 가우디(Antoni Gaudí)는 천장에 추를 단 줄들을 매달고 그것을 거꾸로 사진 찍는 방법으로 바르셀로나의 사그라다 파밀리아(Sagrada Família)를 설계했다. 세인트루이스의 게이트웨이 아치(Gateway Arch)는 (무게가 가해진) 뒤집힌 현수선이다.

현수선 도전 문제

1690년 야코프 베르누이(Jakob Bernoulli)는 매달린 사슬의 모양을 구하라는 문제를 수학자들에게 냈다. 1년도 안 되어 그의 동생 요한(Johann), 라이프니츠(Leibniz), 그리고 하위헌스가 풀이를 발표했다. 요한 베르누이는 훗날, 문제를 낸 형이 정작 그 문제를 풀지 못했다고 고소해하며 회상했다. 현수선은 새로운 미적분학(calculus)이 거둔 첫 승리 가운데 하나였으며, 쌍곡선함수(hyperbolic functions) cosh와 sinh로 이어졌다. 이 함수들은 18세기에 Vincenzo Riccati와 람베르트(Johann Heinrich Lambert)가 체계적으로 연구했다.

사고 기술

모든 이음점에서 힘을 분해하라

이음점과 곧은 부재로 이루어진 구조물에서는 각 이음점에서 힘의 평형을 따져라. 일정한 성분과 누적되는 하중이 모양을 드러내 주는 경우가 많다.

대학에서는 이것이 공학의 트러스(truss)와 골조 해석이 되고, 연속 극한에서는 케이블, 보, 막의 미분방정식(differential equation)이 된다. 이산적인 사슬에서 연속적인 사슬로 넘어가는 것은 Section 10.3에서 본, 합에서 적분으로 넘어가는 것과 같은 방법이다.

더 도전하기

1 **짝수 개의 지지대.** 지지대가 $2n$개여서 사슬의 가장 낮은 부분이 가운데의 수평 구간이 되는 경우에 대해 문제를 다시 풀어라. 이음점들은 여전히 포물선 위에 있는가?

2 **장력.** 사슬에서 가장 큰 장력을 H, w, n으로 나타내어라. 그 장력은 어디에서 생기는가?

3 **현수선.** $y = c\cosh\frac{x}{c}$가 $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$을 만족함을 확인하라. $x = 0$에서 $x = X$까지 현수선의 길이가 $c\sinh\frac{X}{c}$임을 보여라.

4 **갈릴레이의 오류.** 길이가 $2L$인 사슬이 $2d$만큼 떨어진 두 지지점 사이에 매달려 있다. L이 d보다 조금만 클 때, 현수선의 처짐이 포물선의 처짐과 근사적으로 같음을 보여라. 갈릴레이의 실험에서 그 차이가 드러나지 않은 이유는 무엇인가?

더 읽을거리

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves*** (Cambridge University Press). 현수선, 포물선, 그리고 그 친척 곡선들을 다룬다.
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton*** (Cambridge University Press). 축의 사슬에서 시작하여, 석조 아치와 돔이 어떻게 서 있는지를 설명한다.
- **David Billington, *The Tower and the Bridge*** (Princeton University Press). 다리의 예술과 공학을 다룬다.

우리가 배운 것

우리는 흔들리는 것, 회전하는 것, 그리고 움직이는 곳에서 바라본 것에서 출발했다. 그리고 세 가지 질문을 던졌다. 운동은 언제 단순한가? 올바른 관점이란 무엇인가? 직관은 믿을 만한가? 이 장의 열네 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 운동은 언제 단순한가?

진폭과 무관한 하나의 진동수를 갖는 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이 이상적인 경우이다. 이것을 고유 진동수로 강제하면 공명(resonance)이 일어났다(Section 11.1). 공명에서 조금 벗어나면 맥놀이(beats)가 생기고, 정확히 공명할 때는 진폭이 한없이 커진다. 결합된 두 진동자(coupled oscillators)는 사실 서로 독립인 두 단순 진동자가 모습을 바꾼 것이었지만(Section 11.2), 진동수의 비가 무리수 $\sqrt{3}$이므로 합쳐진 운동은 결코 반복되지 않는다. 실제 진자는 전혀 단순하지 않다(Section 11.3). 그 주기는 진폭에 따라 커지며, 이는 타원 적분(elliptic integral)으로 표현되는데, 가우스(Gauss)의 산술-기하 평균(arithmetic–geometric mean)은 이 적분을 놀라운 속도로 계산해 낸다. 그리고 등시 곡선(tautochrone)(Section 11.4)은 궤도를 사이클로이드(cycloid)로 구부려서 운동을 다시 정확히 단순하게 만드는 방법을 보여 주었다.

2. 올바른 관점이란 무엇인가?

거의 모든 문제는 올바른 변수나 올바른 기준틀을 선택함으로써 풀렸다.

- **좌표.** 호의 길이(arc length)는 등시 곡선 문제를 단순하게 만들었고, 조합 $x \pm y$는 용수철들의 결합을 풀어 주었다. 밧줄에서 지나온 부분의 비율은 개미 문제에서 늘어남의 효과를 없애 주었고(Section 11.12), 시간을 거리의 함수로 쓰자 제설차의 방정식이 선형이 되었다(Section 11.13).
- **기준틀.** 가속하는 기차 안에서는(Section 11.5) 가상력(fictitious force)이 중력을 기울였고, 구슬은 새로운 최저점을 중심으로 진동했다. 아인슈타인(Einstein)은 이 관찰을 일반 상대성 이론(general relativity)으로 발전시켰다.
- **모멘트를 잡을 점.** 회전하는 구슬의 경우(Section 11.6), 마찰력이 접촉점에 작용하므로 접촉점에 대한 각운동량(angular momentum)이 보존되었고, 이 덕분에 마찰력을 몰라도 최종 속력을 구할 수 있었다.

- **동등한 계.** 막대는 심프슨 공식(Simpson's rule)의 가중치를 갖는 세 입자와 정확히 똑같이 행동한다(Section 11.7). 그리고 고체의 평형(equilibrium) 위치는 그 법선(normal)이 질량 중심(centre of mass)을 지나는 곳이다(Section 11.8).

3. 직관은 믿을 만한가?

대개는 그렇지 않다. 대포가 도달할 수 있는 영역의 경계는 하나의 궤적(trajectory)이 아니라 궤적들의 포락선(envelope)이다(Section 11.9). 충분히 가파르게 던진 공은 땅에 떨어지기 전에 던진 사람 쪽으로 되돌아온다(Section 11.10). 야수는 공의 상이 일정하게 올라가도록 유지하기만 하면, 공이 어디에 떨어질지 예측하지 않고도 공을 잡을 수 있다(Section 11.11). 개미가 밧줄 위를 천천히 걸어가는데 밧줄이 그보다 십만 배 빠르게 늘어나더라도 개미는 결국 끝에 도달한다(Section 11.12). 매달린 사슬은 포물선(parabola)이 아니지만, 다리를 떠받치는 사슬은 포물선이다(Section 11.14). 어느 경우든 짧은 계산 하나가 확신에 찼지만 틀린 직관을 정확한 명제로 바꾸어 주었고, 대개는 그 이유까지 설명해 주었다.

4. 진동과 기준틀을 위한 도구 모음

방법	사용한 곳
특수해(particular solution)와 여함수(complementary solution)의 합	공명 (11.1)
고유벡터(eigenvector)를 이용한 결합 풀기	기준 진동(normal modes) (11.2)
에너지 적분과 치환	진자 (11.3)
자연스러운 변수	등시 곡선 (11.4); 개미 (11.12)
가상력	기차 (11.5)
한 점에 대한 각운동량	백스핀 (11.6)
모멘트 맞추기	심프슨 막대 (11.7)
정류점(stationary point) 세기	기울어진 평형 (11.8)
판별식(discriminant)과 포락선	안전 포물선 (11.9)
도함수(derivative)의 부호	되돌아오는 공 (11.10)
계수 비교	야수 (11.11)
적분 인자(integrating factor)	개미 (11.12); 제설차 (11.13)
접합점에서 힘의 분해	다리 (11.14)

다음으로

- 다음 두 장에서는 Section 12.1을 시작으로 확률(probability)과 통계(statistics)를 다룬다.

- 기준 진동은 고유벡터이며(Section 7.2), Section 8.6의 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)는 이 장의 진동자를 양자역학에서 다룬 것이다.
- 한계 순환(limit cycle)(Section 8.4)은 스스로 유지되는 진동이고, 혼돈(chaos)(Section 8.7)은 비선형(nonlinear) 진동자를 강제했을 때 나타날 수 있는 현상이다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***: 진동, 공명, 기준 진동을 다루는 고전적인 입문서.
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***: 회전, 기준틀, 그리고 놀라운 문제가 많이 실려 있다.
- **Steven Strogatz, *Sync***: 반딧불이에서 다리에 이르기까지 진동자들이 어떻게 박자를 맞추게 되는지를 다룬다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***: 등시 곡선, 최단 강하 곡선, 제설차 문제를 그 역사와 함께 다룬다.

콜먼(Coleman)은 물리학자의 경력이란 조화 진동자를 점점 더 추상적인 방식으로 다루는 일로 이루어진다고 농담한 적이 있다. 이 장은 그 이유를 보여 주려 했다. 진동자는 존재하는 가장 단순한 운동이며, 올바른 관점을 고르기만 하면 거의 모든 것이 진동자처럼 보인다. 변수든, 기준틀이든, 조합이든 그 관점을 찾아내는 법을 익히는 것이야말로 역학이 가르쳐 주는 가장 쓸모 있는 기술이다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 먼저 각 연습문제를 제대로 풀어 보라.

11.1 공명

1. 엘리베이터(lift)의 기준틀(frame)에서는 중력이 실질적으로 $g - f$이고, 줄의 강성(stiffness)은 $\frac{mg}{a}$이다(mg의 힘을 받으면 a만큼 늘어나기 때문이다). 따라서 처음에 $y = a, \dot{y} = 0$이라는 조건 아래 $\ddot{y} + \frac{g}{a}y = g - f$이다. 새 평형(equilibrium) 위치는 $a - \frac{af}{g}$이므로 $y = a - \frac{af}{g}(1 - \cos \omega t)$이다. 진폭(amplitude)은 $\frac{af}{g}$이고, 가장 작은 늘어난 길이 $a(1 - \frac{2f}{g})$는 양수이다. 엘리베이터의 가속이 멈추면 평형 위치는 다시 a가 되고, 이때 입자의 변위는 $-\frac{af}{g}(1 - \cos \omega T)$, 속도는 $-\frac{af}{g}\omega \sin \omega T$이다. 새 진폭은 $\frac{af}{g}\sqrt{(1 - \cos \omega T)^2 + \sin^2 \omega T} = \frac{2af}{g}\left|\sin \frac{1}{2}\omega T\right|$이다.

2. $x = Ct \cos nt$로 두면 $\ddot{x} + n^2 x = -2Cn \sin nt$이므로 $C = -\frac{nb}{2}$이다. 초기 조건을 맞추기 위해 $\frac{b}{2}\sin nt$를 더하면 $x = \frac{b}{2}(\sin nt - nt \cos nt)$이다. 문제에 주어진 공식에 p에 대한 로피탈 정리(L'Hôpital's rule)를 적용하면 $p \to n$일 때 같은 결과를 얻는다.

3. $n \sin pt - p \sin nt = n(\sin pt - \sin nt) + (n - p)\sin nt = 2n \cos \frac{(n+p)t}{2} \sin \frac{(p-n)t}{2} + (n - p)\sin nt$이다. 두 번째 항은 작다. 첫 번째 항은 천천히 변하는 포락선(envelope) $\left|\sin \frac{(n-p)t}{2}\right|$ 안에서 일어나는 빠른 진동이며, 이 포락선은 $\frac{2\pi}{n-p}$마다 반복된다.

4. 진폭은 $\frac{F}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4k^2p^2}}$이다. 분모를 p^2에 대해 최소화하면 $-2(n^2 - p^2) + 4k^2 = 0$이므로 $p^2 = n^2 - 2k^2$이다.

11.2 기준 진동

1. 미분하면 에너지의 변화율은 $\dot{x}\left(m\ddot{x} + \frac{\lambda}{a}(2x + y)\right) + \dot{y}\left(m\ddot{y} + \frac{\lambda}{a}(x + 2y)\right) = 0$이다. $u = x - y, v = x + y$로 두면 에너지는 $\left(\frac{m}{4}\dot{u}^2 + \frac{\lambda}{4a}u^2\right) + \left(\frac{m}{4}\dot{v}^2 + \frac{3\lambda}{4a}v^2\right)$이고, 각 괄호는 단진동자(simple harmonic oscillator)의 에너지이므로 각각 일정하다.

2. 주기(period) $\frac{2\pi}{\omega}$: $x = -y, \dot{x} = -\dot{y}$에서 시작한다(그러면 $v \equiv 0$이다). 주기 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega}$: $x = y, \dot{x} = \dot{y}$에서 시작한다.

3. X에 작용하는 힘은 $-\frac{\lambda}{a}x - \frac{\mu}{a}(x+y)$이다. 기준 모드(normal mode) $x-y$는 여전히 $\omega^2 = \frac{\lambda}{ma}$를 갖고, $x+y$는 이제 $\frac{\lambda+2\mu}{ma}$를 갖는다. 진동수(frequency)의 비 $\sqrt{1+2\mu/\lambda}$가 유리수일 때, 그리고 그때에만 모든 운동이 주기적이다.

4. 행렬은 $\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$이고, 고윳값(eigenvalue) $2-\sqrt{2}$, 2, $2+\sqrt{2}$에 대한 고유벡터(eigenvector)는 각각 $(1,\sqrt{2},1)$, $(1,0,-1)$, $(1,-\sqrt{2},1)$이다. 모드는 다음과 같다. 셋이 모두 함께 흔들리되 가운데가 가장 크게 흔들리는 모드, 가운데는 정지한 채 바깥 둘이 서로 반대로 흔들리는 모드, 가운데가 바깥 둘과 반대로 흔들리는 모드이다.

11.3 실제 진자

1. 에너지: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2$이다. 최대 변위에서는 $\sqrt{x^2+a^2} = a + \frac{v}{k}$이므로 $x_{\max} = \sqrt{\frac{2av}{k} + \frac{v^2}{k^2}}$이다. v가 작으면 늘어난 길이는 약 $\frac{x^2}{2a}$이므로 $\dot{x}^2 \approx v^2 - \frac{k^2x^4}{4a^2}$이다. $x = Xu$, $X = \sqrt{2av/k}$로 두면 주기 $4\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}}$는 $\frac{4X}{v}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$가 된다. 복원력(restoring force)이 x가 아니라 x^3에 비례하므로($x=0$에서 줄이 정확히 자연 길이이다) 단진동 극한은 존재하지 않는다.

2. $m = \sin^2\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^4}{48}$일 때 $(1-m\sin^2\phi)^{-1/2} \approx 1 + \frac{m}{2}\sin^2\phi + \frac{3m^2}{8}\sin^4\phi$이다. ϕ에 대해 평균을 내면 $1 + \frac{m}{4} + \frac{9m^2}{64}$이고, γ^4 항은 $-\frac{1}{192} + \frac{9}{1024} = \frac{11}{3072}$이다.

3. 1과 $\cos 45^\circ = 0.70711$에서 시작하면 $(0.85355, 0.84090)$, 다음에 $(0.84722, 0.84720)$, 그다음에 0.847213을 얻는다. 주기 인자는 $\frac{1}{0.847213} = 1.18034$이다.

4. 주기 인자는 $\frac{1}{16}(\gamma_5^2 - \gamma_4^2) \approx 1.71\times10^{-4}$(라디안 단위)만큼 변하므로, 시계는 하루에 약 15초 늦어진다.

11.4 등시 곡선

1. $y = \frac{s^2}{4k}$이므로 $\ddot{s} = -g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -\frac{g}{2k}s$이다. 이는 $\omega^2 = \frac{g}{2k}$인 단진동(simple harmonic motion)이다. $s_0 = 2\sqrt{kh}$로부터 V에서의 속력은 $\omega s_0 = \sqrt{2gh}$이다.

2. 그릇은 길이 R인 진자(pendulum)이다. 낮은 높이에서 출발하면 바닥까지 걸리는 시간은 $\frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}$이다. 가장자리($\gamma = 90^\circ$)에서 출발하면 1.180배 더 걸려 약 $1.85\sqrt{R/g}$이다.

3. 그렇다. 두 입자 모두 4분의 1 주기 뒤에 V에 도달하여 그곳에서 충돌한다. 충돌 뒤 어떤 속도로 떠나든 각 입자는 같은 주기로 s에 대한 단진동을 하므로, 정확히 반주기 뒤에 V로 돌아와 다시 V에서 충돌한다. (V에 정지한 채 남은 입자는 그냥 그 자리에 머문다.)

4. $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1-\cos\theta)$이면 $\mathrm{d}s = 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$이므로, 아치 하나의 길이는 $\int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8R$이다. 넓이는 $\int y\,\mathrm{d}x = R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = 3\pi R^2$이다.

11.5 가속하는 기차 안의 중력

1. 객차의 기준틀에서는 단위 질량당 a의 힘이 뒤쪽(남쪽), 즉 발사 방향으로 작용한다. 비행 시간이 $\frac{2V\sin\theta}{g}$이므로 사거리(range)는 $\frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right)$이다. 그 도함수는 $\tan 2\theta = -\frac{g}{a}$일 때 0이 되므로 $2\theta \approx \frac{\pi}{2} + \frac{a}{g}$이다. 최댓값은 $\frac{V^2}{g}\left(\sqrt{1+a^2/g^2} + \frac{a}{g}\right) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2}$이다.

2. $x = ut\cos\theta - \frac{1}{2}ft^2$이고, $t = \frac{2u\sin\theta}{g}$에 $x = \frac{2u^2\sin\theta}{g^2}(g\cos\theta - f\sin\theta)$인 지점에 떨어진다. 수평 속도 $u\cos\theta - ft$는 $\tan\theta > \frac{g}{2f}$이면 착지 전에 음수가 되므로 $\alpha = \tan^{-1}\frac{g}{2f}$이다. $f = g$, $\theta = 45^\circ$이면 가속도가 처음 속도와 정확히 반대 방향이므로, 발사체는 직선 $y = x$를 따라 곧장 올라가 멈춘 뒤 곧장 O로 돌아온다.

3. 유효 중력(effective gravity)은 아래쪽 g와 뒤쪽 a를 합한 것이다. 자유 표면(free surface)은 이에 수직이므로 $\tan^{-1}\frac{a}{g}$만큼 기울어진다.

4. 유효 중력의 크기는 $\sqrt{g^2+a^2}$이고, $x = \frac{ak}{2g}$에서 기울기는 $\frac{a}{g}$, 곡률 반지름(radius of curvature)은 $\rho = \frac{k}{2}\left(1+\frac{a^2}{g^2}\right)^{3/2}$이다. 주기는 $2\pi\sqrt{\rho/\sqrt{g^2+a^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{k(g^2+a^2)}{2g^3}}$이고, $a = 0$이면 $2\pi\sqrt{\frac{k}{2g}}$가 된다.

11.6 백스핀

1. 마찰력은 접촉점에 작용하므로 그 점에 대한 각운동량(angular momentum)이 보존된다: $maV + \frac{2}{5}ma^2\frac{V}{a} = mav_0 + \frac{2}{5}ma^2\omega_0$. 따라서 $V = \frac{5v_0 + 2a\omega_0}{7}$이고, 이는 $\frac{v_0}{a\omega_0} < 1$일 때 v_0보다 크다.

2. $V = \frac{5}{7}v_0$이다. 최종 에너지는 $\frac{1}{2}m\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2\left(1+\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}mv_0^2$이므로, 에너지의 $\frac{2}{7}$을 잃는다.

3. $I = ma^2$으로 같은 논증을 하면 $V = \frac{1}{2}(v_0 - a\omega_0)$이다. $V = -\frac{v_0}{7}$로 두면 $\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{7}{9}$이다.

4. 중심에서 높이 h만큼 위에 충격량(impulse) J를 가하면 $mv = J$, $\frac{2}{5}ma^2\omega = Jh$이다. 구르려면 $v = a\omega$이어야 하므로 $h = \frac{2}{5}a$이다.

11.7 막대 속의 심프슨 공식

1. $\frac{1}{6}\left(1 + 4\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{47}{60} \approx 0.7833$이고, 이를 $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$와 비교할 수 있다. $\int_{-1}^{1}$에 대해 공식 $\frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(-1) + 4\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(1)\big)$은 x^3에 대해 0, x^2에 대해 $\frac{2}{3}$을 주지만(둘 다 정확하다),

적분값이 $\frac{2}{5}$인 x^4에 대해서도 $\frac{2}{3}$을 준다.

2. 각 ψ 방향의 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 이차 형식(quadratic form) $A\cos^2\psi + B\sin^2\psi + 2C\sin\psi\cos\psi$이다. $\psi \mapsto \psi + 90^\circ$에 대해 불변이어야 하므로 $A = B$, $C = 0$이고, 따라서 모든 축에 대해 같은 값, 즉 한 변에 평행한 축에 대한 값 $\frac{1}{3}Ma^2$이다.

3. 넓이의 $\frac{1}{3}$을 각 변의 중점에 놓으면 삼각형 위에서 모든 이차식을 정확히 적분할 수 있다(직각삼각형에서 $1, x, x^2, xy$로 확인해 보라). 따라서 세 입자는 얇은 판(lamina)과 질량, 질량중심(centre of mass), 이차 모멘트(second moment)가 모두 같다.

4. 각 방향으로 $-a$, 0, a에 놓인 막대 가중치 $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$의 곱을 취한다. 그러면 꼭짓점에 $\frac{M}{216}$, 모서리의 중점에 $\frac{M}{54}$, 면의 중심에 $\frac{2M}{27}$, 정육면체의 중심에 $\frac{8M}{27}$이 놓인다. 중심을 지나고 모서리에 평행한 축에 대해서는 $I = M\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2}{3}Ma^2$이다. 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해 모서리에 대해서는 $\frac{2}{3}Ma^2 + M(\sqrt{2}a)^2 = \frac{8}{3}Ma^2$이다.

11.8 기울어진 평형

1. 공통 면에서 원뿔 쪽으로 재면 G의 위치는 $\frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3a}{8} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{\lambda a}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{\lambda}{3}} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(2+\lambda)}$이다. 반구 위에서는 접촉점에서의 법선(normal)이 항상 면의 중심을 지나므로, G가 그 중심보다 아래에 있을 때, 즉 $\lambda < \sqrt{3}$일 때 장난감은 스스로 바로 선다. 옆으로 누우면 장난감은 원뿔의 모선(generator)과 가장자리에서 탁자에 닿고, G를 지나는 연직선이 꼭짓점과 가장자리 사이에 떨어지면 그 상태를 유지한다. 이를 위해서는 G의 높이가 적어도 $-\frac{a}{\lambda}$이어야 하며, 이는 $\lambda^3 + \lambda + 8 > 0$으로 정리되므로 항상 참이다.

2. 균일한 구에서는 모든 점이 평형이다(중립 평형(neutral equilibrium)). 질량중심이 중심에서 약간 벗어나 있으면 평형은 두 개뿐이다. G가 가장 낮은 경우(안정(stable))와 G가 가장 높은 경우(불안정(unstable))이다.

3. 평형은 법선이 중심을 지나는 곳, 즉 두 축의 네 끝점에서 생긴다. 단축(minor axis)의 끝으로 놓이면 안정이고(G가 가능한 한 낮다), 장축(major axis)의 끝으로 놓이면 불안정이다.

4. 대칭성에 의해 G는 원점에 있다. $n = 2$이면 $Y = r\left(\frac{1}{2} - p^2\right)$이고, 기울어진 평형이 되려면 법선이 G를 지나야 하므로 $Y = 0$, $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 그곳에서 기울기는 $-\sqrt{2}$이므로 $\overrightarrow{AB}$는 $\tan^{-1}\sqrt{2} \approx 54.7^\circ$만큼 기울어지고, 다른 포물면(paraboloid) 위에 놓이면 125.3°만큼 기울어진다. 두 경우는 x축에 대해 서로 대칭이며, 그래서 기울기가 짝을 이룬다.

11.9 안전 포물선

1. 각 입자는 $ut\,\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$에 있으므로, 중심이 $-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$이고 반지름이 ut인 구 위에 있다. $(0, \frac{u^2}{2g})$에서 수평으로 발사된 입자는 $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$을 따라가는데, 이것이 정확히 안전 포물선(parabola of safety)이다. 각 α로 발사된 입자는 시각 $\frac{u}{g\sin\alpha}$에 $x = \frac{u^2}{g\tan\alpha}$에서 이 포물선에 접한다. 수평으로 발사된 입자는 그곳까지 $\frac{x}{u}$의 시간이 걸리므로, 시각 $\frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha} = \frac{u}{g}\tan\frac{\alpha}{2}$에 발사되어야 한다(접점이 지면보다 위에 있으려면 $\alpha \geq 45°$이어야 한다).

2. 직선은 $R\sin\beta = \frac{u^2}{2g} - \frac{gR^2\cos^2\beta}{2u^2}$인 곳에서 안전 포물선과 만나므로 $R = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$이다. 최대일 때 연습문제 3의 두 각이 일치하므로, 가장 좋은 각은 이등분선(bisector) 방향인 $45° + \frac{1}{2}\beta$이다.

3. $\lambda = \tan\theta$로 두면 두 값은 $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2u^2}{gx}$, $\lambda_1\lambda_2 = 1 + \frac{2u^2y}{gx^2}$를 만족한다. 따라서 $\tan(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{x}{y}$이고 $\theta_1 + \theta_2 = 90° + \varphi$이다. 여기서 φ는 OP의 앙각(elevation)이다. OP와 연직선의 이등분선은 $\frac{1}{2}(90° + \varphi)$의 각을 이룬다.

4. 꼭짓점(vertex)은 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$이고 초점 거리(focal length)는 $\frac{u^2\cos^2\theta}{2g}$이므로, 초점의 높이는 $\frac{u^2}{2g}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$이다. O에서 초점까지의 거리는 θ에 관계없이 $\frac{u^2}{2g}$이다.

11.10 나에게로 되돌아오는 공

1. $u = g = 1$인 단위에서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = t(t^2 - 3t\sin\alpha + 2)$이고, 그 근은 $t \approx 1.050$(극대(local maximum), $OP \approx 0.516\frac{u^2}{g}$)과 $t \approx 1.904$(극소(local minimum), $OP \approx 0.336\frac{u^2}{g}$)이다. 공은 $t \approx 1.970$에 착지한다.

2. 평면에 나란한 방향과 수직인 방향으로 분해하면 $OP^2 = u^2t^2 - ugt^3\sin(\alpha' + \beta) + \frac{1}{4}g^2t^4$이다. 여기서 α'은 평면에서 잰 각이다. 이는 $\alpha = \alpha' + \beta$로 둔 평지에서의 공식과 같다. 따라서 조건 $\sin(\alpha' + \beta) > \frac{2\sqrt{2}}{3}$은 **수평면**에서 잰 각에 관한 것이며, 평면에서 재면 임계각은 $70.5° - \beta$로 줄어든다(공이 그 전에 이미 착지하지 않았다면).

3. 더 작아진다. 공기 저항(drag)은 수평 운동을 줄이고 하강을 더 가파르게 만들어 공이 더 연직에 가깝게 되돌아 떨어지게 하므로, OP가 줄어들기 쉬워진다.

4. OP^2의 공식에는 착지점이 들어 있지 않으므로, 앞에서와 마찬가지로 $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때, 그리고 그때에만 OP가 한동안 감소한다(비행 시간이 더 길므로 감소 구간은 항상 착지 전에 나타난다). 결국에는 낙하가 지배적이 되어 OP는 증가한다.

11.11 야수는 어떻게 공을 잡는가

1. 수비수가 D_0에 서 있다가 타자(batsman)에게서 멀어지는 방향으로 속도 v로 달린다면, 공은 수비수 앞으로 거리 $D_0 + vt - Ut$인 곳에 있다. 공을 잡으려면 $D_0 + vT = UT$이어야 하고, 그러면 거리는 $(U-v)(T-t)$이므로 $\tan\theta = \frac{gt}{2(U-v)}$로 역시 일차식이다. 공이 수비수 뒤에 떨어진다면 $UT > D_0$이고 $v > 0$이므로, 수비수는 뒤로 달린다.

2. $\theta = \tan^{-1}\frac{gt}{2U}$이므로 $\dot\theta = \frac{g/2U}{1+(gt/2U)^2}$이고, 이는 감소한다. $\tan\theta$가 일차식인 것은 높이 $\frac{1}{2}gt(T-t)$와 거리 $U(T-t)$가 인수 $T-t$를 공유하기 때문이다.

3. 그렇다. 수비수의 눈높이를 기준으로 한 높이는 공을 잡는 순간 0이 되는 이차식이므로 $(T-t)(c+dt)$로 인수분해된다. 이를 $U(T-t)$로 나누면 일차함수가 남는다(이 값은 처음에 음수이다. 즉 수비수는 처음에 아래를 내려다본다).

4. 아니다. 공기 저항이 있으면 수평 거리는 $\frac{U}{k}(\mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-kT})$이고, 높이는 이것에 t의 일차함수를 곱한 꼴이 아니므로 $\tan\theta$는 더 이상 일차식이 아니다.

11.12 고무줄 위의 개미

1. $\frac{x}{a+ut} = \frac{1}{k}\ln\frac{a+ut}{a}$이고, 이는 $t = \frac{a}{u}(\mathrm{e}^{k/2}-1)$일 때 $\frac{1}{2}$이다. $\frac{T}{2} = \frac{a}{2u}(\mathrm{e}^{k/2}-1)(\mathrm{e}^{k/2}+1)$이고 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{k/2}+1) > 1$이므로, 이는 $\frac{T}{2}$보다 앞선다.

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x}{L} = \frac{v}{L} = \frac{v}{a}\mathrm{e}^{-\lambda t}$이므로 $\frac{x}{L} = \frac{v}{a\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})$이고, 이는 $v > \lambda a$일 때에만 1에 도달한다.

3. $\frac{x}{L} = v\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a+\frac{1}{2}bs^2}$이고, 이는 $\frac{v\pi}{\sqrt{2ab}}$에 수렴(converge)한다. 따라서 개미는 $v > \frac{\sqrt{2ab}}{\pi}$일 때에만 도착한다.

4. $\frac{H_N}{100\,000} = \frac{1}{100}$이 되어야 하므로 $H_N = 1000$이고, $N \approx \mathrm{e}^{999.4} \approx 10^{434}$초이다.

11.13 제설차 문제

1. 정오에서 시간 t가 지난 뒤 눈의 깊이는 $t+t_0$에 비례하므로, 제설차(snowplough)가 이동한 거리는 $c\ln\frac{t+t_0}{t_0}$이다. 조건 $x(1)=2$, $x(2)=3$에서 $\left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3 = \left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2$을 얻는다. $u = \frac{1}{t_0}$로 두면 이는 $u^2-u-1=0$으로 정리되므로 $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이고 $t_0 \approx 0.618$시간이다. 즉 눈은 약 11시 23분에 내리기 시작했다.

2. $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} - \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} + \alpha\left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}$이고, $\alpha\left(t - (\mathrm{e}^{\alpha y}-1)\frac{h}{k}\right)$도 이와 같다.

3. 간격은 $\left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}$이고, 그 도함수는 $y = \frac{kT-h}{\alpha h}$에서 0이 된다. $kT > h$이면 간격은 그때까지 커지다가 $y = \frac{kT}{\alpha h}$에서 0으로 줄어든다. $kT \le h$이면 도함수 $\alpha\mathrm{e}^{\alpha y}\left(T - \frac{h}{k} - \frac{\alpha h y}{k}\right)$가 모든 $y > 0$에서 음수이므로 간격은 처음부터 줄어든다. 두 번째 제설차는 깊

이가 $k\times$ (간격)인 눈을 만나며, 이 깊이가 같은 지점에서 첫 번째 제설차가 만난 눈보다 깊은 동안에는 더 뒤처진다.

4. $\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t_3}{\mathrm{d}y} = t_3 - t_2(y)$이다. $t_3 = t_2 + g$로 쓰면 $g = \mathrm{e}^{\alpha y}\left(T - \alpha T y + \frac{\alpha^2 h y^2}{2k}\right)$이다. $kT \geq 2h$이면 이는 두 번째 제설차가 첫 번째를 따라잡기 전에 $y = \frac{k}{\alpha h}\left(T - \sqrt{T^2 - 2hT/k}\right)$에서 0이 된다. $kT < 2h$이면 두 번째 제설차가 첫 번째를 먼저 따라잡는다.

11.14 현수선이 아니라 포물선

1. 그렇다. 수평 장력(tension) H는 여전히 일정하고, 가운데 마디의 기울기는 0이며, 그다음부터 기울기가 $\frac{w}{H}$씩 증가한다. 수평 마디의 가운데에서 x를 재면, k번째 이음점은 $x = (k - \frac{1}{2})h$에 있고 가장 낮은 이음점들보다 $\frac{wh}{2H}k(k-1)$만큼 높다. 이는 $\frac{w}{2Hh}\left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right)$이므로 포물선이다.

2. 장력은 $\sqrt{H^2 + V^2}$이고, 연직 성분 V가 가장 큰 곳에서 가장 크다. 그곳은 끝 마디로, 여기서 V는 하중의 절반인 $\frac{(2n+1)w}{2}$를 지탱한다. 따라서 $T_{\max} = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}(2n+1)^2 w^2}$이다.

3. $y' = \sinh\frac{x}{c}$이고 $y'' = \frac{1}{c}\cosh\frac{x}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{1 + \sinh^2\frac{x}{c}}$이다. 길이는 $\int_0^X \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = c\sinh\frac{X}{c}$이다.

4. 처짐(sag)이 s인 얕은 곡선에서는 현수선(catenary)과 포물선 모두 길이가 약 $2d + \frac{4s^2}{3d}$이므로, 둘 다 $s \approx \sqrt{\frac{3}{2}d(L-d)}$를 주며 차이는 s^4 차수에서만 나타난다. 거의 팽팽한 사슬에서는 그 차이가 갈릴레이(Galileo)가 측정할 수 있었던 어떤 것보다도 훨씬 작다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

전체 13개 장 가운데 제11장. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

