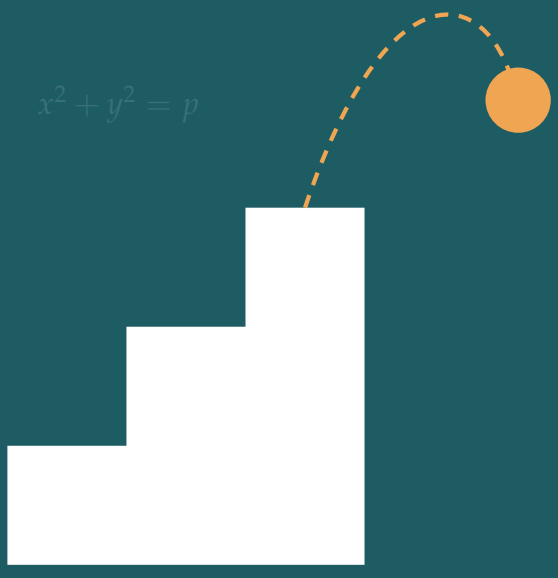
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

제10장

보존 법칙, 충돌, 그리고 중력



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

제10장

보존 법칙, 충돌, 그리고 중력

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

제10장: 보존 법칙, 충돌, 그리고 중력

이 PDF는 *Beyond STEP*의 전체 13개 장 가운데 제10장이다. 책 전체, 각 장의 개별 PDF, 모든 절의 인쇄용 연습지, 모든 STEP 문제의 자세한 풀이를 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 남겨 주기 바란다.

장

10

보존 법칙, 충돌, 그리고 중력

어떤 것들은 결코 변하지 않는다. 그것이 무엇인지 아는 것이 물리학의 절반이다.

이 장의 내용

10.1	뉴턴의 요람	STEP II 1990
10.2	포갠 공 효과	STEP II 2010
10.3	로켓과 대포	STEP III 2017
10.4	분자 하나와 피스톤	STEP I 2002
10.5	유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기	STEP III 2002
10.6	두 물체가 하나가 되다	STEP III 2004
10.7	구 껍질 안의 중력	STEP III 1999
10.8	삼각형을 이룬 세 별	STEP I 1999
A	연습문제 해답	61쪽

변하지 않는 것

> 지금까지 알려진 모든 자연 현상을 지배하는 사실, 원한다면 법칙이라 불러도 좋은 것이 하나 있다. 이 법칙에는 알려진 예외가 없다.
>
> — 리처드 파인만(Richard Feynman), 에너지 보존(conservation of energy)에 관하여, *The Feynman Lectures on Physics* (파인만의 물리학 강의, 1963)

학교에서 배우는 역학은 대개 힘의 문제이다. 그림을 그리고, 힘을 성분으로 분해하고, $F = ma$를 적용한다. 경사면 위의 물체라면 이것으로 충분하다. 그러나 천분의 일 초 동안 일어나는 충돌처럼 그 사이에 작용하는 힘이 매우 크고 알 수도 없는 경우, 날아가면서 질량이 변하는 로켓, 또는 세 별이 동시에 서로를 끌어당기는 경우에는 통하지 않는다. 이런 경우에는 힘에 대해 묻기를 멈추고, 대신 무엇이 **변할 수 없는지**를 물어야 길이 열린다.

운동량(momentum)은 외력이 작용하지 않으면 언제나 보존된다. 에너지는 탄성 충돌(elastic collision)에서 보존되고, 그 밖의 충돌에서는 손실된 양을 측정할 수 있다. 질량, 각운동량(angular momentum), 그리고 질량중심(centre of mass)의 운동도 비슷한 규칙을 따른다. 이 법칙들이 모든 것을 알려 주지는 않지만, 언제나 참이고, 자세히 분석하기에는 지나치게 복잡한 계에도 적용되며, 계산을 시작하기도 전에 대부분의 가능성을 배제해 주는 경우가 많다.

보존 법칙이 중요한 이유

보존 법칙(conservation law)은 물리학에서 가장 믿을 만한 도구이다. 베타 붕괴(beta decay)라 불리는 방사성 과정에서 방출되는 입자들의 에너지를 더하면 합이 맞지 않았다. 볼프강 파울리(Wolfgang Pauli)는 에너지 보존을 포기하는 대신, 1930년에 사라진 에너지를 운반하는 눈에 보이지 않는 입자를 예측했고, 중성미자(neutrino)는 26년 뒤에 검출되었다. 공학자들은 운동량과 에너지의 수지를 따져 충돌 방호벽, 에어백, 로켓을 설계한다. 천문학자들은 질량중심을 관찰하여 별의 질량을 재고 행성을 찾아낸다. 그리고 1918년 에미 뇌터(Emmy Noether)는 이 법칙들이 성립하는 이유를 설명했다. 각각의 보존 법칙은 자연이 지닌 어떤 대칭성(symmetry)의 그림자라는 것이다. 운동량이 보존되는 것은 물리 법칙이 어디에서나 같기 때문이고, 에너지가 보존되는 것은 물리 법칙이 언제나 같기 때문이다.

이 장의 두 번째 주제는 중력이다. 중력은 뉴턴(Newton)이 하늘과 땅을 하나로 통합하는 데 사용한 힘이며, 보존 법칙과 자연스럽게 짝을 이룬다. 궤도, 슬링샷(slingshot), 붕괴하는 구름은 모두 에너지와 운동량, 그리고 구에 관한 놀라운 사실 하나를 통해 이해된다.

대학에서 만나게 될 내용

대학 1학년 동역학 강의는 여기에서 시작한다. 입자계, 질량중심과 환산 질량(reduced mass), 서로 다른 기준틀(frame)에서 본 충돌, 로켓과 같은 가변 질량계(variable-mass system), 그리고 중력을 받는 물체의 운동, 즉 케플러(Kepler) 법칙, 궤도, 탈출 속도(escape velocity)를 배우게 된다. 이후의 강의에서는 역학을 라그랑주(Lagrange)와 해밀턴(Hamilton)의 언어로 다시 정식화하는데, 여기에서 뇌터 정리(Noether's theorem)는 정확한 명제가 되고, 보존 법칙은 하나의 함수가 지닌 대칭성으로부터 곧바로 읽어낼 수 있게 된다. 그 너머에는 천체역학(celestial mechanics)과 삼체 문제(three-body problem), 기체 분자 운동론(kinetic theory)과 통계역학(statistical mechanics)(여기에서 Section 10.4의 피스톤은 기체 이론이 된다), 그리고 아인슈타인(Einstein)의 중력 이론이 있다.

이 장을 관통하는 질문

세 가지 큰 질문

1. **보존 법칙만으로 무엇을 결정할 수 있는가?** 운동량과 에너지가 결과를 결정하는 것은 언제이고, 단지 일부 가능성을 배제하는 데 그치는 것은 언제인가?
2. **작은 단계들은 어떻게 쌓이는가?** 충돌이나 발사 같은 단순한 사건이 여러 번, 또는 무한히 반복되면 어떤 일이 일어나는가?
3. **여러 물체를 어떻게 다룰 것인가?** 어떤 좌표를 고르고 어떤 대칭성을 이용해야 서로 상호작용하는 여러 물체에 관한 문제를 풀 수 있는 문제로 바꿀 수 있는가?

이 장은 충돌로 시작한다. 뉴턴의 요람(Newton's cradle)이 할 수 있는 일과 할 수 없는 일(Section 10.1), 그리고 공을 줄지어 쌓으면 속력이 어떻게 몇 배로 늘어나는지(Section 10.2)를 살펴본다. 이어서 반복되는 과정을 따라간다. 트럭에서 발사하는 포와 로켓 방정식(rocket equation), 피스톤에 부딪히며 빨라지는 분자, 그리고 유한한 시간 동안 무한히 많이 튀어 오르는 퍽이 그것이다. 마지막 세 절에서는 서로 끌어당기거나 밀어내는 물체들을 다룬다. 질량중심과 환산 질량, 구 껍질의 중력, 그리고 라그랑주의 회전하는 별 삼각형이다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
10.1	뉴턴의 요람	제약 조건으로서의 보존 법칙
10.2	쌓아 올린 공	한 번의 충돌을 반복하기; 슬링샷
10.3	로켓	가변 질량; 로켓 방정식
10.4	기체 분자 운동론	단열 불변량(adiabatic invariant)
10.5	비탄성 충돌(inelastic collision)	유한한 시간 동안 무한히 많은 튀어 오름
10.6	이체 문제(two-body problem)	질량중심과 환산 질량
10.7	뉴턴 중력	껍질 정리(shell theorem); 자유 낙하 붕괴(free-fall collapse)
10.8	삼체 문제	라그랑주의 정삼각형 해

이 장을 읽는 방법

계산하기 전에 무엇이 보존되는지, 그리고 어느 기준틀에서 보존되는지를 먼저 적어 보라. 그런 다음 다른 곳에서 보면 문제가 더 간단해 보이지 않는지 물어보라. 질량중심에서, 움직이는 피스톤에서, 튀어 오르는 공에서 보는 것이다. 이 장의 많은 문제는 알맞은 기준틀에서 보면 거의 자명해지며, 역학에서 하는 일의 대부분은 바로 그 기준틀을 찾는 것이다.

10.1 뉴턴의 요람

문제

STEP II 1990, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/90-s2-q14`

도입

뉴턴의 요람(Newton's cradle)에서 공 하나를 당겼다 놓으면 반대쪽 끝에서 공 하나가 튀어 나간다. 두 개를 당겼다 놓으면 두 개가 튀어 나간다. 왜 그럴까? 왜 공 하나가 두 배의 속력으로 튀어 나가거나, 공 세 개가 3분의 2의 속력으로 튀어 나가지는 않을까? 두 경우 모두 운동량(momentum)은 올바르게 전달하는데 말이다.

답은 역학의 두 가지 큰 보존 법칙(conservation laws)에서 출발한다. 운동량과 에너지를 함께 쓰면 어느 한쪽만 쓸 때보다 훨씬 강한 제약이 생기고, 상상할 수 있는 결과 대부분이 배제된다. 이 문제는 보존 법칙을 제약 조건으로 사용한다. 무슨 일이 일어나는지 계산하는 것이 아니라, 무슨 일이 일어날 **수 있는지** 판단하는 것이다. 보존 법칙을 가능한 모든 결과가 따라야 하는 규칙으로 보는 이러한 사고방식은 물리학 전체에 걸쳐 나타난다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 질량이 m이고 속력 u로 움직이는 구슬이 정지해 있는 질량 M의 구슬에 부딪히고, 운동 에너지(kinetic energy)가 보존된다. 충돌 후의 속도는 각각 얼마인가? $M = m$이면 어떻게 되는가?

충돌 후의 속도를 p와 q라 하자. 운동량 보존에서 $mp + Mq = mu$이고, 에너지 보존에서 $mp^2 + Mq^2 = mu^2$이다. 이 두 식을 $m(u - p) = Mq$와 $m(u - p)(u + p) = Mq^2$으로 쓰고 나누면 $u + p = q$를 얻는다. 따라서

$$p = \frac{m - M}{m + M}\,u, \qquad q = \frac{2m}{m + M}\,u.$$

$M = m$이면 첫 번째 구슬은 멈추고 두 번째 구슬이 속력 u로 움직인다. 즉 두 구슬은 속도를 그대로 맞바꾼다. 질량이 같은 구슬들이 줄을 따라 운동을 전달하는 것은 이 때문이다.

차근차근 풀기

1단계 마지막 두 구슬만 움직이는 경우

생각해 보기 충돌 후 A_n(속도 p)과 A_{n+1}(속도 q)만 움직인다고 하자. 보존 법칙을 식으로 써 보라. 어느 구슬의 운동이 p의 부호를 제약하는가?

운동량 보존과 에너지 보존에서

$$mp + \lambda m q = mu, \qquad \tfrac{1}{2}mp^2 + \tfrac{1}{2}\lambda m q^2 = \tfrac{1}{2}mu^2.$$

이는 질량 m인 구슬이 질량 λm인 구슬에 부딪힐 때의 방정식과 같으므로, (A_n이 A_{n+1}을 통과해야 하는 해 $p = u, q = 0$을 제외하면)

$$p = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,u, \qquad q = \frac{2}{1+\lambda}\,u.$$

$\lambda < 1$이면 두 값이 모두 양수이고 $p < q$이다. A_n은 A_{n+1}을 따라가지만 더 느리므로 둘은 멀어지고, 모든 것이 모순 없이 들어맞는다. $\lambda > 1$이면 $p < 0$이므로 A_n은 뒤로 움직인다. 그런데 A_{n-1}이 바로 뒤에 맞닿은 채 정지해 있고, A_n은 그것을 통과할 수 없다. 따라서 이러한 운동은 불가능하다. ■

2단계 세 구슬이 움직이는 경우

생각해 보기 이번에는 A_{n-1}, A_n, A_{n+1}만 각각 속도 a, b, c로 움직인다고 하자. 어느 구슬이 정지해 있고 어느 구슬이 어느 구슬 뒤에 있는지를 고려하면, a, b, c는 어떤 부등식을 만족해야 하는가?

구슬 A_{n-2}가 A_{n-1} 뒤에 정지해 있으므로($n \geq 3$이므로 이 구슬은 존재한다) $a \geq 0$이다. 또 어떤 구슬도 앞의 구슬을 추월할 수 없으므로 $a \leq b \leq c$이다. 이를 합치면 $0 \leq a \leq b \leq c$이다. 보존 법칙은

$$a + b + \lambda c = u, \qquad a^2 + b^2 + \lambda c^2 = u^2.$$

생각해 보기 운동량 방정식을 제곱하여 에너지 방정식과 비교해 보라. 무엇이 남는가?

제곱하면 $u^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 c^2 + 2ab + 2\lambda ac + 2\lambda bc$이다. 여기서 에너지 방정식을 빼면

$$0 = \lambda(\lambda - 1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a + b).$$

$\lambda > 1$이고 $a, b, c \geq 0$이므로 우변의 모든 항은 음이 아니고, 따라서 모든 항이 0이다. 특히 $c = 0$이고, 그러면 $0 \leq a \leq b \leq c$에 의해 $a = b = 0$이다. 그런데 그러면 전체 운동량이 mu가 아니라 0이 된다. 모순이므로 이러한 운동은 불가능하다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** 논증의 구조에 주목하라. 운동량 방정식을 제곱하면 $2ab$와 같은 교차항이 생기지만, 에너지 방정식에는 그런 항이 없다. 그 차이는 운동이 얼마나 "퍼져 있는지"를 나타낸다. $\lambda > 1$일 때, 같은 논증으로 $A_k, \ldots, A_{n+1}$만 음이 아닌 속도로 움직이는 어떠한 결과도 배제된다는 것을 알 수 있겠는가?

3단계 움직일 수 있는 두 구슬

> **생각해 보기** 앞으로 움직이는 구슬들이 모두 맨 끝에 있어야 하는데 그것이 불가능하다면, 어떤 구슬은 뒤로 움직일지도 모른다. 어느 구슬이 뒤로 움직일 수 있는가?

뒤에 아무것도 없는 구슬은 A_0뿐이다. A_0이 속도 p(음수일 수도 있다)로, A_{n+1}이 속도 q로 움직이고 나머지는 모두 정지해 있다고 해 보자. 보존 법칙은 다시 질량 m과 λm의 충돌에 대한 식과 같으므로

$$p = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\, u, \qquad q = \frac{2}{\lambda + 1}\, u.$$

A_0은 튕겨 나오고 A_{n+1}은 앞으로 움직이며 그 사이의 구슬들은 정지한 채로 남는데, 이 모두가 모순 없이 들어맞는다. 마치 A_0이 A_{n+1}에 직접 부딪힌 것과 똑같으며, 그 사이에 늘어선 같은 질량의 구슬들은 완벽한 전달자 역할을 한다. ■

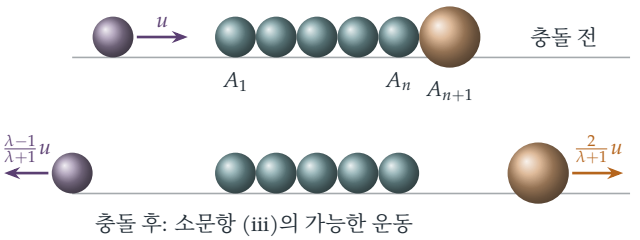


그림 10.1.1 같은 질량의 구슬들(청록색)이 한 줄로 늘어서 있고 끝에 더 무거운 구슬(주황색, $\lambda > 1$)이 있다. 충돌 후 A_0은 튕겨 나오고 무거운 구슬은 앞으로 움직이며, 그 사이의 모든 구슬은 정지한 채로 남는다. 마치 A_0이 A_{n+1}에 직접 부딪힌 것과 똑같다.

돌아보기

▶ **제약 조건으로서의 보존 법칙.** 우리는 충돌 과정을 하나하나 따라가지 않았다. 운동량, 에

너지, 기하학적 조건이 어떤 결과를 허용하는지를 물었을 뿐이다.

- **물리적 부등식이 중요하다.** "구슬은 서로를 통과할 수 없다"는 사실에서 부등식 $0 \le a \le b \le c$를 얻었고, 소문항 (i)과 (ii)의 경우를 배제한 것은 보존 법칙이 아니라 바로 이 부등식이었다.
- **제곱하고 빼기.** 운동량의 제곱을 에너지와 비교하면 0이 되어야 하는 교차항들의 합이 나온다.

숨은 수학

왜 공 하나가 튀어 나오는가

같은 공들로 이루어진 뉴턴의 요람에서 공 k개가 함께 속력 w로 떠난다고 하자. 운동량 보존에서 $kw = u$이고 에너지 보존에서 $kw^2 = u^2$이다. 나누면 $w = u$이고 $k = 1$이다. 따라서 떠나는 공들이 함께 움직이는 결과 중에서 두 법칙을 모두 만족하는 것은 "공 하나가 처음 속력으로 떠나는 것"뿐이다. 공 두 개가 절반의 속력으로 떠나면 운동량은 맞지만 에너지는 절반뿐이고, 공 하나가 두 배의 속력으로 떠나면서 운동량이 맞으려면 그 공이 반쪽짜리 공이어야 한다.

그러나 이것으로 문제가 해결되지는 않는다. 공이 n개이면 미지의 속도는 n개인데 보존 법칙은 두 개뿐이므로, 두 법칙을 모두 만족하는 결과는 무수히 많다(세 공이 서로 다른 속력으로 움직이는 결과를 하나 찾아보라). 실제로 어떤 결과가 일어나는지는 접촉하는 동안 공이 어떻게 변형되는지에 달려 있다. 1980년대 초 Frank Herrmann과 동료들은 우리에게 익숙한 현상이 충격이 **퍼지지 않고** 줄을 따라 전달되는 데 달려 있으며, 이는 단단한 강철 공들 사이에 아주 작은 틈이 있을 때 일어난다는 것을 보였다. 공이 무르거나 공들이 서로 꽉 눌려 있으면 요람은 덜 깔끔하게 움직이며, 정밀하게 측정해 보면 다른 공들도 늘 조금씩 움직인다.

보존 법칙과 대칭

보존 법칙은 어디에서 오는가? 1918년 에미 뇌터(Emmy Noether)는 현대 물리학의 토대 중 하나가 된 정리를 증명했다. 물리계의 모든 연속적인 대칭(symmetry)에는 보존되는 양이 하나씩 대응한다는 것이다. 물리 법칙이 여기에서나 1미터 왼쪽에서나 같다면(공간 평행이동에 대한 대칭) 운동량이 보존된다. 오늘이나 내일이나 같다면(시간 평행이동에 대한 대칭) 에너지가 보존된다. 모든 방향에서 같다면(회전 대칭) 각운동량(angular momentum)이 보존된다. 뇌터 정리는 대학 2학년의 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics) 과목에서 배우게 되며, 이 장에서는 그 결과를 곳곳에서 사용한다.

하위헌스, 렌, 윌리스

1668년 왕립학회(Royal Society)는 물체의 충돌 문제에 대한 해답을 공모했다. 존 윌리스(John Wallis)는 비탄성 충돌(inelastic collision)을 다루었고, 크리스토퍼 렌(Christopher Wren)과 크리스티안 하위헌스(Christiaan Huygens)는 각자 독립적으로 탄성 충돌의 경우를 풀었다. 하위헌스의 핵심 통찰은 기준틀을 바꾸는 것이었다. 질량중심(centre of mass)과 함께 움직이는 배 위에서 충돌을 바라보면, 같은 두 공은 속력이 그대로 반대 방향으로 바뀌어 튕겨 나갈 뿐이다. 그런 다음 다시 강가의 기준틀로 변환하면 된다. 그는 또한 어떤 양, 곧 질량과 속력의 제곱을 곱한 것의 합이 충돌 전후에 같다는 것도 알아차렸다. 다만 운동 에너지가 그 자체로 보존되는 양으로 인정받기까지는 그 후로 한 세기가 더 걸렸다.

사고 기술

보존되는 양을 이용해 가능성을 배제하라

과정이 너무 복잡해서 따라갈 수 없을 때는, 변할 수 없는 양들을 나열하고 그 양들이 어떤 결과를 허용하는지 살펴보라.

물리학자들은 입자 가속기 속 충돌을 바로 이렇게 추론한다. 세부적인 상호작용은 알 수 없지만 운동량, 에너지, 전하는 균형을 이루어야 한다. 여기에 부등식(이 문제에서는 구슬이 서로를 통과할 수 없다는 사실)을 결합하면 어떤 결과가 불가능하다는 것을 증명할 수 있다.

더 도전하기

1 **같은 문제 다시 보기.** STEP I 2006, 11번 문제 (`step.maths.org/questions/06-s1-q11`)을 풀어 보라. 홈통 안에 입자들이 한 줄로 놓여 있고 끝에 더 무거운 입자가 있다. 가능한 최종 상태는 무엇인가?

2 **충돌을 따라가기.** 소문항 (iii)의 충돌을 A_0이 A_1에 부딪히는 것으로 시작하는, 두 구슬 사이의 개별 충돌이 차례로 일어나는 과정으로 모형화하라. 이 과정을 끝까지 따라가서 소문항 (iii)에서 구한 운동으로 끝난다는 것을 보여라.

3 **두 공을 보내기.** 같은 공 다섯 개로 이루어진 요람에서 공 두 개를 함께 놓아 나머지 세 공에 속력 u로 부딪히게 한다. "공 두 개가 속력 u로 떠난다"는 결과가 두 보존 법칙을 모두 만족함을 보이고, 두 법칙을 만족하는 다른 결과를 하나 찾아라.

4 가벼운 끝. $\lambda < 1$일 때 두 구슬 사이의 충돌이 차례로 일어나는 과정을 따라가 보라. A_n과 A_{n+1} 이외의 구슬 중에 결국 움직이게 되는 것이 있는가?

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 5장. 운동량 보존과 에너지 보존을 다루며, 충돌에 관한 문제가 많이 실려 있다.
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle, "Simple explanation of a well-known collision experiment"**, *American Journal of Physics* 49 (1981). 뉴턴의 요람이 왜 그렇게 작동하는지 설명한다.
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem*** (Johns Hopkins University Press). 대칭과 보존 법칙 사이의 관계를 알기 쉽게 설명한다.

10.2 포갠 공 효과

문제

STEP II 2010, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/10-s2-q10`

도입

농구공 위에 테니스공을 올려놓고 함께 떨어뜨려 보자. 농구공이 바닥에서 튀어 오르면, 테니스공은 떨어뜨린 높이의 몇 배나 되는 높이로 솟구치며, 때로는 천장에 닿을 만큼 높이 올라간다. 실외에서 해 보기 바란다.

문제의 소문항 (i)은 한 번의 충돌(collision)에는 속도의 한계가 있음을 보여 준다. 즉 부딪히는 공이 아무리 무거워도, 정지해 있는 공을 들어오는 공의 속력의 두 배보다 빠르게 내보낼 수는 없다. 소문항 (ii)는 이 한계를 깨는 방법을 보여 준다. 점점 더 가벼워지는 공들의 사슬을 따라 운동을 전달하면, 단계마다 속력이 곱절로 불어난다. 같은 아이디어로 우주 탐사선을 외행성까지 보내며, 이것은 초신성(supernova)의 메커니즘의 일부로 제안되기도 했다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** Section 10.1에서: 속력 u로 움직이는 질량 M이 정지해 있는 질량 m과 탄성 충돌(elastic collision)하면, 충돌 후 m의 속력은 얼마인가?

그곳의 결과(두 질량의 역할을 바꾼 것)에 따르면 부딪힌 입자의 속력은 $\frac{2M}{M+m}u$이다. 다르게 기억하는 방법도 있다. 탄성 충돌에서는 **상대** 속도(relative velocity)가 반대로 뒤집힌다. 무거운 공이 거의 느려지지 않는다면, 가벼운 공은 무거운 공의 속력보다 약 u만큼 더 빠르게, 즉 약 $2u$로 떠나야 한다.

차근차근 풀기

1단계 속력의 한계

$M = bm$이면, 충돌 후 A의 속력은

$$v_A = \frac{2bm}{bm + m}\,u = \frac{2b}{b+1}\,u.$$

이다.

> **생각해 보기** $\frac{2b}{b+1}$는 2와 비교하여 어떠한가? $b \to \infty$이면 어떻게 되는가?

모든 b에 대하여 $\frac{2b}{b+1} = 2 - \frac{2}{b+1} < 2$이므로, B가 아무리 무거워도 A의 속력은 항상 $2u$보다 작다. $b \to \infty$이면 이 속력은 $2u$에 가까워진다. 무한히 무거운 공은 마치 움직이는 벽처럼 A를 튕겨 낼 것이다. ■

2단계 사슬을 따라 전달하기

> **생각해 보기** 소문항 (ii)에서 각 입자는 다음 입자보다 λ배 무겁다. 소문항 (i)은 사슬 속의 각 충돌에 대하여 무엇을 말해 주는가?

B_1(질량 $\lambda^n m$)이 λ배 가벼운 B_2(질량 $\lambda^{n-1} m$)에 부딪힌다. $b = \lambda$로 두고 소문항 (i)을 적용하면, B_2는 $\frac{2\lambda}{\lambda+1}u$로 움직이기 시작한다. 다음으로 B_2가 다시 λ배 가벼운 B_3에 부딪히고, B_3은 $\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^2 u$로 움직이기 시작한다. 이러한 충돌이 n번 일어난 뒤, 즉 마지막으로 B_n이 A에 부딪힌 뒤에는

$$v_A = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^n u.$$

이다. (이후 B들 사이에서 일어나는 충돌은 A를 더 밀어 줄 수만 있을 뿐 느리게 할 수는 없다. 앞쪽에서 A에 부딪히는 것은 아무것도 없기 때문이다.)

> **생각해 보기** $\frac{2\lambda}{\lambda+1}$는 1보다 큰가, 작은가?

$\lambda > 1$이므로 $2\lambda > \lambda + 1$이고, 따라서 비 $r = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$는 1보다 크며, $n \to \infty$일 때 $r^n \to \infty$이다. 그러므로 n을 충분히 크게 잡으면 A를 원하는 만큼 빠르게 움직이게 할 수 있다. ■

3단계 스무 배 빠르게

$\lambda = 4$이면 $r = \frac{8}{5} = 1.6$이고, $1.6^n > 20$이어야 한다. 밑이 10인 로그(logarithm)를 취하면

$$\log_{10} 1.6 = \log_{10} 16 - 1 = 4\log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412, \qquad \log_{10} 20 = 1 + \log_{10} 2 \approx 1.30103,$$

이므로 $n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37$이어야 한다. 가장 작은 값은 $n = 7$이다. (실제로 $1.6^6 \approx 16.8$이고 $1.6^7 \approx 26.8$이다.) ■

돌아보기

- **하나의 결과를 반복 적용하기.** 소문항 (i)을 소문항 (ii)에서 n번 사용하여, 유계인 이득을 유계가 아닌 이득으로 바꾸었다.
- **결코 도달하지 않는 극한.** 상계 $2u$에는 가까워지기만 할 뿐 도달하지 않으므로, 올바른 명제는 등호가 없는 부등식(strict inequality)이다.
- **로그는 거듭제곱을 곱으로 바꾼다.** 몇 단계가 필요한가 하는 질문이 나눗셈 하나로 바뀌었다.

숨은 수학

농구공과 테니스공

두 공이 높이 H에서 함께 떨어져 속력 $U = \sqrt{2gH}$로 바닥에 닿는다고 하자. 모든 것이 완전 탄성이고 농구공이 훨씬 더 무겁다고 가정한다. 농구공은 바닥에서 위쪽으로 속력 U로 튀어 오르고, 곧바로 여전히 속력 U로 내려오고 있는 테니스공과 만난다. 농구공의 기준틀(frame of reference)에서 보면 테니스공은 $2U$로 다가오고, 매우 무거운 물체에 튕겨 $2U$로 떠난다. 다시 지면의 기준틀로 돌아오면 이는 위쪽으로 $2U + U = 3U$이다(그림 10.2.1). 올라가는 높이는 발사 속력의 제곱에 비례하므로, 테니스공은 $9H$까지 올라간다.

실제 공은 완전 탄성이 아니다. 반발 계수(coefficient of restitution)가 e이고 질량비가 M/m이면, 테니스공은 속력 $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$로 떠난다. 연습문제에 있는 STEP I 2014 Q10은 측정한 높이로부터 거꾸로 질량비를 구한다.

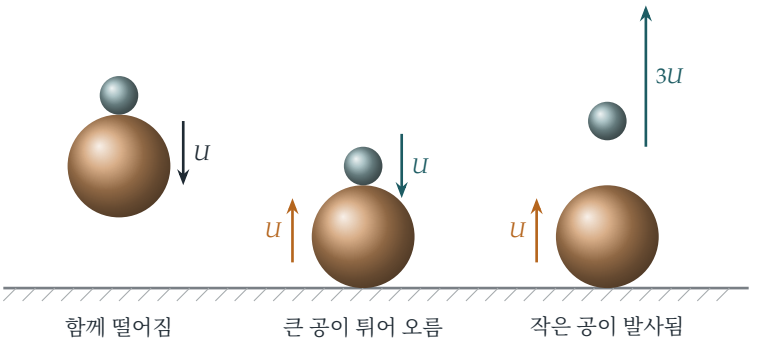


그림 10.2.1 아래쪽 공이 훨씬 무겁고 두 공이 완전 탄성일 때의 쌓인 공 효과. 큰 공은 속력 U로 튀어 올라, U로 내려오는 작은 공과 만난다. 큰 공에 대하여 작은 공은 $2U$로 도착하고 $2U$로 떠나므로, 지면의 기준틀에서는 $3U$로 떠나 처음 높이의 아홉 배에 이른다.

중력 새총 효과

행성 곁을 지나가는 우주 탐사선은 행성에 닿지 않지만, 중력은 매우 무거운 물체와의 아주 부드러운 탄성 충돌처럼 작용한다. 행성의 기준틀에서 탐사선은 행성 주위를 돌아 들어올 때와 같은 속력으로 떠난다. 행성이 속력 V로 탐사선을 향해 움직이고 있다면, 태양의 기준틀에서 탐사선은 테니스공과 꼭 마찬가지로 최대 $2V$만큼 속력을 얻을 수 있다. 1977년에 발사된 두 보이저(*Voyager*) 탐사선은 드물게 찾아온 외행성들의 정렬을 이용하여 목성에서 토성으로(보이저 2호는 다시 천왕성과 해왕성으로) 나아갔고, 만날 때마다 속력을 얻었다. 이러한 중력 도움(gravity assist)이 없었다면 해왕성까지의 여정은 12년이 아니라 약 30년이 걸렸을 것이다. 에너지는 행성에서 오며, 행성은 측정할 수 없을 만큼 아주 조금 느려진다.

슈퍼볼과 초신성

1968년 W. R. Mellen은 *American Journal of Physics*에서 크기가 점점 작아지는 공 여러 개를 쌓아 만든 "슈퍼볼 반동 발사체"를 소개하고, 맨 위의 공이 충돌 속력의 몇 배나 되는 속력으로 발사될 수 있음을 지적하였다. 천체물리학자들은 이것이 핵붕괴 초신성(core-collapse supernova)과 대략적으로 닮았다고 지적해 왔다. 별의 바깥층이 안쪽으로 떨어지다가 단단하고 밀도 높은 중심핵에 부딪혀 되튀고, 충격파(shock wave)가 운동량(momentum)을 점점 밀도가 낮아지는 물질 속으로 바깥쪽으로 실어 날라 그 물질을 엄청난 속력으로 가속한다. 쌓인 공 효과의 시연은 학생들에게 이 아이디어를 설명하는 데 쓰이지만, 실제 초신성에는 튀는 공보다 훨씬 많은 물리학이 관여하며, 중성미자(neutrino)도 그중 하나이다.

사고 기술

하나의 결과를 반복 적용하기

어떤 과정이 하나의 간단한 단계를 되풀이하는 것이라면, 그 단계를 한 번 풀고 그것을 합성하라.

단계마다의 이득 배율이 2보다 작더라도, 배율들이 곱해지므로 여러 단계를 거치면 유계가 아니게 된다. 대학에서는 이것이 전달 행렬(transfer matrix), 다단 증폭기, 다단 로켓(Section 10.3) 뒤에 있는 아이디어이다. 사슬 전체의 이득은 각 고리의 이득의 곱이다.

더 도전하기

1 **실제 상황.** STEP I 2014, 10번 문제 (`step.maths.org/questions/14-s1-q10`)을 풀어 보자. 실제 수치와 불완전한 튕김을 다루는 쌓인 공 문제이다.

2 **비탄성 사슬.** STEP I 2017, 10번 문제 (`step.maths.org/questions/17-s1-q10`)을 풀어 보자. 질량이 등비수열로 커지는 입자들의 사슬을 따라 충돌을 전달하는 문제이다. 각 입자가 정확히 두 번의 충돌에 관여하는 것은 언제인가?

3 **공 세 개.** 완전 탄성인 공 세 개를 쌓되, 각 공은 그 아래의 공보다 훨씬 가볍다. 맨 위의 공이 $7U$로 떠나 $49H$까지 올라감을 보여라. 공이 k개이면 맨 위의 공이 $(2^k - 1)U$로 떠남을 보여라.

4 **에너지는 어디에서 오는가?** 소문항 (ii)에서 A의 속력은 유계가 아니지만 전체 운동 에너지(kinetic energy)는 보존됨을 보여라. 무거운 입자들은 어떻게 되는가?

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 쌓인 공 문제가 실린 5장.
- **W. R. Mellen, "Superball rebound projectiles"**, *American Journal of Physics* 36 (1968). 짧고 재미있다.
- **Gary Flandro, "Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter"**, *Astronautica Acta* 12 (1966). 보이저의 "그랜드 투어"를 제안한 논문이다.

10.3 로켓과 대포

문제

STEP III 2017, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/17-s3-q11`

도입

우주 공간의 로켓에게는 밀어낼 대상이 없다. 로켓은 질량을 뒤로 던져서 앞으로 나아가고, 나머지는 운동량 보존(conservation of momentum)이 해결해 준다. 뒤쪽으로 대포를 쏘는 트럭은 조각으로 나뉜 로켓이다. 발사체 하나하나가 배기가스 한 덩어리인 셈이다.

그렇다면 대포는 한꺼번에 쏘아야 할까, 하나씩 차례로 쏘아야 할까? 이 문제는 분명한 답을 내놓지만, 무엇을 비교하는지 주의 깊게 살펴보아야 한다. 한꺼번에 쏘면 트럭이 더 빨라지지만 에너지도 더 많이 쓰므로, 두 경우에 대포가 하는 일은 같지 않다. 무엇을 고정하느냐를 바꾸면 답이 뒤집힌다. 이 점을 정리하다 보면 우주 비행에서 가장 중요한 방정식인 치올콥스키(Tsiolkovsky)의 **로켓 방정식**(*rocket equation*)에 이르고, 실제 로켓이 여러 단(stage)으로 이루어진 이유도 알게 된다.

시작하기 전에

생각해 보기 대포가 발사되기 전에 트럭은 V로 움직인다. 발사 후 발사체의 속도는 $V - v$이다(즉 뒤쪽으로 속력 $v - V$). **발사 전 트럭에 대한** 발사체의 상대 속도는 얼마인가?

그것은 $(V - v) - V = -v$이다. 따라서 각 대포는 발사 직전 트럭의 속도를 기준으로 발사체를 뒤쪽으로 속력 v로 던진다. 이것이 이 문제의 고정된 규칙이다. 답을 결정하는 것이 바로 이 규칙이므로 꼭 기억해 두자.

차근차근 풀기

1단계 한꺼번에 발사

계는 정지 상태에서 시작하므로 운동량은 0이다. 발사 후 트럭(질량 M)은 앞으로 u로 움직이고, n개의 발사체는 뒤쪽으로 속력 v로 움직인다(발사 전 $V=0$이므로). 따라서

$$Mu - nmv = 0, \qquad u = \frac{nmv}{M}.$$

증가한 운동 에너지(kinetic energy)는

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\Big(1 + \frac{nm}{M}\Big). \qquad \blacksquare$$

2단계 하나씩 발사

> **생각해 보기** r번째 대포가 발사되기 직전에, 남은 발사체를 실은 트럭의 질량은 얼마이고 속력은 얼마인가? r번째 발사에 대한 운동량 보존 식을 써 보아라.

r번째 발사 전에 트럭은 발사체 $n-r+1$개를 싣고 있으므로 질량은 $M+(n-r+1)m$이고 속력은 u_{r-1}이다. 발사 후 발사체 $n-r$개를 실은 트럭의 속력은 u_r이고, 발사된 발사체의 속도는 $u_{r-1}-v$이다. 운동량이 보존되므로

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

mu_{r-1} 항을 정리하면 $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$를 얻고, 이것이 $(*)$이다. $\blacksquare$

증가량을 모두 더하면

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m} = \frac{mv}{M} + \frac{mv}{M+m} + \cdots + \frac{mv}{M+(n-1)m}.$$

첫째 항 이후의 모든 항은 $\frac{mv}{M}$보다 작고 $n>1$이므로 $u_n < \frac{nmv}{M} = u$이다. $\blacksquare$

> **잠깐, 직접 해 보기** 여기서는 왜 하나씩 쏘는 쪽이 불리할까? 첫 번째 대포가 발사될 때는 트럭과 아직 발사되지 않은 발사체 $n-1$개를 함께 가속해야 하므로, 빈 트럭만 가속할 때보다 속력 증가가 작다.

3단계 에너지 비용

> **생각해 보기** r번째 발사에서 운동 에너지의 변화량을 써 보아라. $u_r^2 - u_{r-1}^2$이 들어 있는 항을 간단히 하는 데 $(*)$를 어떻게 이용할 수 있는가?

운동 에너지의 변화량은

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1} - v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r+1)m\big)u_{r-1}^2.$$

마지막 두 항을 합치면 $\tfrac{1}{2}m(v^2 - 2vu_{r-1}) - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_{r-1}^2$이 된다. 이제 제곱의 차(difference of squares)를 인수분해하고 $(*)$를 이용하면

$$\tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)(u_r^2 - u_{r-1}^2) = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}).$$

따라서

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r - u_{r-1}). \qquad \blacksquare$$

$r = 1$부터 n까지 더하면 증가량 $u_r - u_{r-1}$이 연쇄적으로 소거되어(telescoping) u_n만 남는다.

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n. \qquad \blacksquare$$

끝으로 $K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 \cdot \tfrac{nm}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu$이고 $u_n < u$이므로 $K_n < K$이다. $\blacksquare$

돌아보기

- **단계마다 운동량 보존.** 각 발사는 짐을 실은 트럭과 발사체 하나로 이루어진 작은 이체 문제였다.
- **망원 합.** 증가량 $(*)$와 에너지 증가량이 깔끔하게 더해졌다.
- **결론을 주의 깊게 읽기.** 한꺼번에 쏘면 속력은 더 얻지만 에너지가 더 든다. 이 문제는 하는 일의 양이 서로 다른 두 과정을 비교하고 있다.

숨은 수학

무엇을 고정해야 할까?

실제 대포나 로켓 엔진은 발사체가 떠난 직후에 잰, **자기 자신**에 대한 일정한 상대 속력으로 발사체를 던진다. 이 문제에서는 기준이 **발사 전** 트럭의 속력이다. 발사체가 작으면 그 차이는 아주 작지만, 발사체 n개를 한꺼번에 쏠 때는 차이가 매우 크다. 소문항 (i)에서는 무거운 발사체 더미가 마치 트럭에 반동(recoil)이 전혀 없는 것처럼 속력 v로 뒤로 던져지는데, 여기에는 많은 에너지가 필요하다.

대신 모든 발사체가 **발사 후** 트럭에 대해 속력 v로 떠난다고 하면 결론이 뒤집힌다. 한꺼번에 쏘면 $u = \frac{nmv}{M+nm}$이고, 하나씩 쏘면 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$인데, 각 항이 적어도 $\frac{mv}{M+nm}$이므로 이쪽이 더 크다. 이제는 하나씩 쏘는 쪽이 유리하다. 각 발사체는 이미 움직이고 있는 트럭을 밀어내고, 뒤에 발사되는 대포일수록 가속해야 할 질량이 적기 때문이다. (연습문제에서 확인해 보아라.)

로켓 방정식

이제 발사체들의 총질량 $\mu = nm$을 고정한 채 발사체를 아주 작고 아주 많게 하자. 이것은 연료를 연속적으로 태우는 로켓이다. u_n의 합은 적분(integral)이 된다(두 규약 모두 같은 극한(limit)을 준다).

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M+km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,ds}{M+s} = v \ln \frac{M+\mu}{M}.$$

이것이 **치올콥스키의 로켓 방정식**이다. 배기가스가 로켓에 대해 속력 v로 분출되는 로켓이 얻는 속력은

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{\text{처음}}}{m_{\text{나중}}}.$$

그림 10.3.1은 세 가지 답을 비교한다. 문제는 로그(logarithm)이다. 배기 속도(exhaust speed)가 약 4.5 km/s(좋은 화학 연료)일 때 약 7.8 km/s의 궤도 속도(orbital speed)에 도달하려면 질량비(mass ratio)가 $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$이어야 하고, 공기 저항과 중력까지 고려하면 10 이상에 가까워진다. 로켓의 거의 전부가 연료인 것이다.

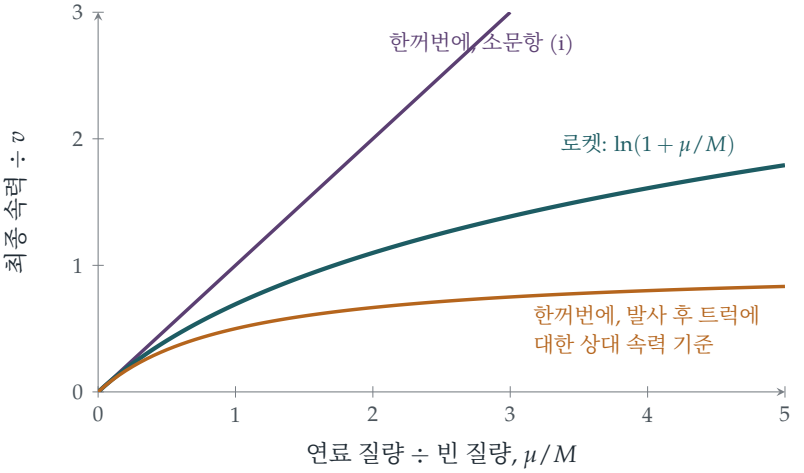


그림 10.3.1 연료 질량과 빈 질량의 비에 따른 최종 속력. 모든 것을 한꺼번에 쏘면 문제의 규약에서는 μ/M(자주색)이지만, 배기 속도를 반동하는 트럭에 대해 재면 $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$(주황색)에 불과하다. 연속적으로 분사하는 로켓은 그 사이인 $\ln(1+\mu/M)$(청록색)에 놓인다. 이 그림은 부등식 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$를 나타낸다.

로켓에 단이 있는 이유

로그는 단 분리(staging)도 설명해 준다. 올라가는 도중에 빈 연료 탱크를 떨어뜨리는 로켓은 더 이상 그 쓸모없는 질량을 가속할 필요가 없다. 연속된 단들이 얻는 속력은 (대포처럼) 더해지는 반면 각 단이 얻는 속력은 그 단의 질량의 비에 따라 정해지므로, 로켓을 여러 단으

로 나누면 같은 총질량의 단일 단 로켓으로는 낼 수 없는 속력에 도달할 수 있다. 우주 비행사들을 달에 데려간 새턴 V(Saturn V)는 3단 로켓이었고, 그 1단은 3분이 채 안 되는 동안 약 2000톤의 연료를 태웠다.

치올콥스키

러시아의 지방 도시 칼루가(Kaluga)에서 학교 교사로 일하던 청각 장애인 콘스탄틴 치올콥스키(Konstantin Tsiolkovsky)는 1903년 "반작용 장치를 이용한 우주 공간 탐사(Exploration of outer space by means of reaction devices)"라는 제목의 논문에서 로켓 방정식을 발표했다. 그는 다단 로켓, 액체 수소와 산소 연료, 우주 정거장을 그 어느 것도 실제로 만들 수 있게 되기 수십 년 전에 구상했다. 이 방정식은 그보다 앞서 덜 알려진 곳에 등장한 적이 있지만(William Moore가 1810년에 한 형태를 유도했다), 그것이 우주 비행에 어떤 의미를 갖는지 처음 알아본 사람은 치올콥스키였다. 그는 이렇게 썼다. "지구는 인류의 요람이다. 그러나 사람이 언제까지나 요람 속에서 살 수는 없다."

사고 기술

이산 과정에서 극한으로

연속적인 과정은 흔히 수많은 작은 이산 단계의 극한으로 이해할 수 있다. 이산 문제를 정확히 푼 다음 단계의 크기를 줄여 나가면, 합이 적분이 된다.

여기서는 대포 n문이 로켓이 되었고, 합이 로그가 되었다. 대학에서는 물리 법칙을 유도할 때마다 같은 방법을 보게 된다. 작은 요소 하나를 분석하고, 그 결과를 모아 적분이나 미분방정식(differential equation)으로 만드는 것이다.

더 도전하기

1 **다른 규약.** 각 발사체가 발사 후 트럭에 대해 속력 v로 떠난다고 가정하고 소문항 (i)과 (ii)를 다시 풀어 보아라. 이번에는 하나씩 쏘는 쪽이 더 큰 최종 속력을 준다는 것을 보여라.

2 **먼지 구름 속의 혜성.** STEP III 2009, 11번 문제 (`step.maths.org/questions/09-s3-q11`)에 도전해 보아라. 로켓과 같은 가변 질량(variable-mass) 문제이지만, 혜성은 질량을 잃는 대신 얻는다. 혜성의 속력이 어떤 값으로 다가가는지 눈여겨보아라.

3 **2단 로켓.** 배기 속도가 v이고 빈 질량이 M, 연료 질량이 $9M$인 로켓이 있다. 이 로켓의 최종 속력을 구하여라. 이제 이 로켓을 빈 질량이 각각 $\frac{1}{2}M$이고 연료가 각각 $4.5M$인 두

단으로 나누고, 1단은 연료가 바닥나면 떨어뜨린다고 하자. 두 최종 속력을 비교하여라.

4 **부등식.** 구간 $[0, x]$에서 $\frac{1}{1+s}$를 1 및 $\frac{1}{1+x}$와 비교하여, $x \geq 0$일 때 $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$임을 증명하여라.

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press), 4장. 운동량, 가변 질량, 로켓 방정식을 다룬다.
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements*** (Wiley). 표준적인 공학 교재로, 이 절을 공부한 뒤라면 앞부분의 장들을 읽을 수 있다.
- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight*** (NASA 번역본, 온라인에서 무료). 선구자가 직접 쓴 기록이다.

10.4 분자 하나와 피스톤

문제

STEP I 2002, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/02-s1-q10`

도입

자전거 타이어에 바람을 넣고 펌프를 만져 보면 뜨겁다. 기체를 압축하면 온도가 올라가는데, 이것은 디젤 엔진(압축만으로 연료에 불을 붙인다), 냉장고, 그리고 별이 생겨나는 과정의 바탕이 되는 원리이다. 그렇다면 압축은 왜 기체를 데우는가? 온도는 분자들의 평균 운동 에너지(kinetic energy)이므로, 질문은 이렇게 바뀐다. 분자들은 왜 빨라지는가?

이 문제는 분자 하나만으로 그 답을 보여 준다. 분자는 다가오는 피스톤에 부딪혀 튕겨 나올 때마다, 움직이는 라켓에 맞은 테니스공처럼 속력을 조금씩 더 얻는다. 충돌을 하나하나 정확히 따라가 보면 숨은 법칙이 드러난다. 분자의 속력과 실린더 길이의 곱이 거의 일정하게 유지된다는 것이다. 이러한 양을 **단열 불변량**(*adiabatic invariant*)이라 하며, 이것이 물리에서 배우는 기체 법칙의 미시적 기원이다.

시작하기 전에

생각해 보기 속력 w로 움직이는 공이 속력 u로 자신을 향해 다가오는 벽에 부딪혀 탄성적으로(elastically) 튕겨 나온다. 튕겨 나온 뒤 공의 속력은 얼마인가? (벽의 기준틀에서 생각해 보라.)

벽의 기준틀(frame)에서 공은 $w+u$로 다가오고, 매우 무거운 물체에 탄성적으로 튕겨 나오므로 $w+u$로 멀어진다. 다시 지면의 기준틀로 돌아오면 벽은 튕겨 나오는 공과 같은 방향으로 u로 움직이고 있으므로, 공의 속력은 $w+2u$이다. 다가오는 피스톤에 한 번 튕길 때마다 속력이 $2u$씩 늘어난다. (정지해 있는 실린더 끝에 튕기는 것은 아무것도 바꾸지 않는다.)

차근차근 풀기

1단계 n번 충돌한 뒤의 속력

입자는 속력 v로 출발한다. 피스톤과 한 번 충돌할 때마다 속력이 $2u$씩 늘고, 끝과의 충돌은 속력을 바꾸지 않는다. 따라서 피스톤과 n번 충돌한 뒤에는

$$v_n = v + 2nu. \qquad \blacksquare$$

2단계 길이에 대한 점화식

> **생각해 보기** n번째 충돌과 $(n+1)$번째 충돌 사이에 입자는 피스톤에서 끝까지 갔다가 되돌아온다. 입자는 얼마나 이동하는가? 피스톤은 얼마나 움직이는가?

시간 t_n 동안 피스톤은 ut_n만큼 움직이므로 $d_n - d_{n+1} = ut_n$이다. 그동안 입자는 속력 v_n으로 피스톤에서 끝까지(거리 d_n) 갔다가 다시 피스톤까지(거리 d_{n+1}) 돌아오므로 $d_n + d_{n+1} = v_n t_n$이다. 한 식을 다른 식으로 나누면 t_n이 소거된다.

$$\frac{d_n + d_{n+1}}{d_n - d_{n+1}} = \frac{v_n}{u}, \qquad \text{따라서} \qquad d_{n+1}(v_n + u) = d_n(v_n - u).$$

$v_n = v + 2nu$를 대입하면

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n. \qquad \blacksquare$$

3단계 망원 소거

> **생각해 보기** d_n을 d_1에 이런 분수 $n-1$개의 곱을 곱한 꼴로 써 보라. 무엇이 약분되는가?

$$d_n = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v+(2n-3)u}{v+(2n-1)u} = \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1. \qquad \blacksquare$$

각 분자가 바로 앞의 분모와 약분되어, 첫 분자와 마지막 분모만 남는다(망원 소거(telescoping)).

4단계 $v = u$인 경우

이때 $d_n = \frac{2u}{2nu} d_1 = \frac{d_1}{n}$이고,

$$ut_n = d_n - d_{n+1} = d_1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{d_1}{n(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

이것들을 모두 더하면 $u(t_1 + t_2 + \cdots) = d_1\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots\right) = d_1$이다. 즉 피스톤은 첫 충돌 후 시간 d_1/u에 실린더 끝에 도달하는데, 당연히 그래야 한다. 피스톤이 끝에 도달하기 전에 입자는 무한히 많이 튕긴다(그림 10.4.1).

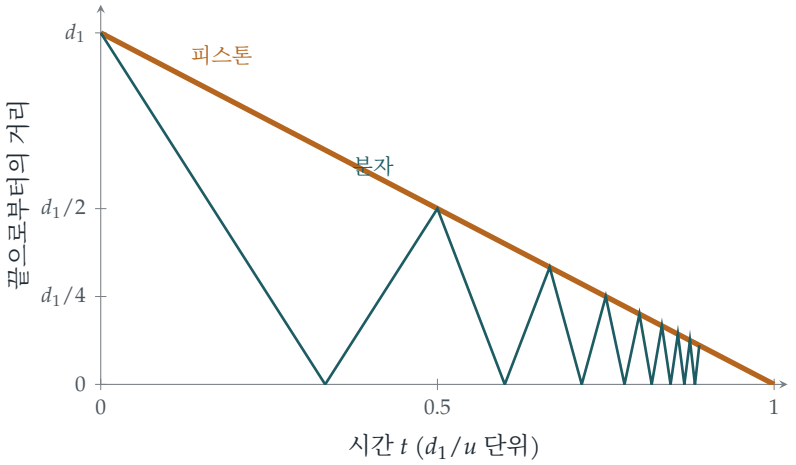


그림 10.4.1 $v = u$인 경우의 시공간 도표(space–time diagram): 시간에 따른 실린더 끝으로부터의 거리. 피스톤(호박색)은 일정하게 전진하고, 분자(청록색)는 피스톤과 끝 사이를 오가며 튕긴다. 지그재그는 점점 가팔라지고(빨라지고) 짧아진다. 피스톤과의 n번째 충돌은 거리 d_1/n에서 일어나므로, 분자의 속력은 대략 1/(길이)에 비례한다.

돌아보기

- **충돌은 기준틀을 바꾸어 본다.** 피스톤의 기준틀에서 보면 튕김은 자명하다.
- **두 식을 세워 미지수를 소거한다.** 같은 시간 동안 입자와 피스톤이 이동한 거리로부터 t_n이 없는 점화식(recurrence)을 얻었다.
- **망원 소거.** $\frac{1}{n(n+1)}$의 합이 그랬듯이, 곱도 한꺼번에 줄어들었다.

숨은 수학

단열 불변량

속력에 길이를 곱해 보자.

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v + u}{v + (2n-1)u}\, d_1 \approx (v + u) d_1$$

이 근사는 n이 크거나 u가 v보다 훨씬 작을 때 성립한다. 따라서

$$\text{속력} \times \text{길이} \approx \text{상수}.$$

피스톤이 분자에 비해 천천히 움직이면, 피스톤이 아무리 멀리 움직여도 곱 vd는 거의 변하지 않는다. 이처럼 계를 천천히 변화시킬 때 거의 일정하게 유지되는 양을 **단열 불변량**이라 한다. 일반적으로 왕복 운동의 단열 불변량은 $\oint p\,\mathrm{d}q$, 즉 운동량(momentum)을 한 주기 동안 적분한 값이다. 여기서는 그 값이 $mv \times 2d$이다.

분자 하나에서 기체로

$v \propto 1/d$이므로 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$은 $1/d^2$에 비례한다. 한 방향으로 움직이는 많은 분자로 이루어진 기체에서 온도는 평균 운동 에너지에 비례하므로 $T \propto 1/d^2$이다. 즉 길이를 절반으로 줄이면 온도는 네 배가 된다. 3차원에서는 에너지가 세 운동 방향에 나누어지며, 같은 논증(파인먼(Feynman)이 그의 **강의록**에서 제시한다)으로부터 단원자 기체(monatomic gas)의 단열 압축 법칙을 얻는다.

$$TV^{2/3} = \text{상수}, \qquad \text{또는 동치로} \qquad pV^{5/3} = \text{상수}.$$

지수 $\frac{5}{3}$은 단원자 기체의 유명한 비열비(ratio of specific heats) γ이다. 자전거 펌프 속 공기를 부피의 5분의 1로 압축하면, 빠르게 하여 열이 전혀 빠져나가지 않는다고 할 때 절대 온도가 $5^{0.4} \approx 1.9$배로 올라간다(공기 분자는 원자 두 개로 이루어져 있어 대신 $\gamma = 1.4$가 된다). 즉 20°C에서 약 280°C까지 오른다. 펌프가 그만큼 뜨거워지지 않는 것은 오로지 압축이 느리고 열이 새어 나가기 때문이다.

페르미의 우주선

1949년 엔리코 페르미(Enrico Fermi)는 우주에서 엄청난 에너지를 지니고 날아오는 입자인 우주선(cosmic rays)이 바로 이 문제의 분자와 똑같은 방식으로 가속된다고 제안하였다. 성간 기체 구름 속에서 움직이는 자기장에 거듭 튕기면서 매번 에너지를 조금씩 얻는다는 것이다. 오늘날 "페르미 가속(Fermi acceleration)"은 초신성 잔해의 충격파에서 일어나는 것으로 여겨지는데, 그곳에서 입자들은 피스톤과 벽 사이의 분자처럼 충격파를 앞뒤로 가로지른다. 단열 불변량은 양자역학의 탄생에도 한몫을 하였다. 1916년 파울 에렌페스트(Paul Ehrenfest)는 느린 변화로는 계가 양자 상태 사이를 건너뛸 수 없으므로, 양자화되는 양은 단열 불변량이어야 한다고 주장하였다.

사고 기술

물리적 과정에서 점화식을 세운다

과정이 반복될 때는 한 주기를 정확히 기술하고, 한 주기에서 다음 주기로 상태가 어떻게 바뀌는지 적는다.

여기서 상태는 각 충돌 때의 (속력, 길이) 쌍이었다. 점화식은 정확히 풀 수 있었고, 그 해는 근사적으로 보존되는 양을 드러냈다. 대학에서는 같은 접근(한 주기를 본 다음 점화식이나 "귀환 사상(return map)"을 세우는 것)을 궤도, 진동자, 그리고 Section 8.7의 반복 사상(iterated maps)에 사용한다.

더 도전하기

1 **정확한 불변량.** $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$임을 보이고, 이로부터 $n \to \infty$일 때 $v_n d_n \to (v+u)d_1$임을 유도하라.

2 **피스톤을 당겨 빼기.** 피스톤을 속력 $u < v$로 빼내는 경우에 대해 문제를 다시 풀어라. 입자가 느려짐을 보이고, $v_n d_n$을 구하라. (팽창하는 기체는 식는다.)

3 **에너지.** $v = u$인 경우, 피스톤이 끝에 가까워질수록 분자의 속력은 한없이 커진다. n번째 주기 동안 피스톤에 작용하는 평균 힘(운동량의 변화를 t_n으로 나눈 값)을 구하고, 그것이 n^3처럼 커짐을 보여라. 이것은 피스톤을 끝까지 밀어 넣는 데 필요한 일에 대해 무엇을 말해 주는가?

4 **튀는 공.** 중력 아래에서 공이 바닥에 탄성적으로 튀고, 바닥을 천천히 들어 올린다. 이 운동의 단열 불변량을 추측해 보라. (**힌트**: vd에 해당하는 것은 평균 속력과 튀어 오르는 높이의 곱, 또는 동치로 에너지와 튀는 사이의 시간의 곱이다.)

더 읽을거리

- **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I** (온라인 무료 공개), 39장 "The kinetic theory of gases"(기체 운동론). 같은 피스톤 논증을 3차원으로 확장한다.
- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics*** (Oxford University Press). 대학 1학년 수준에서 다루는 단열 과정과 기체 운동론.
- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics*** (Butterworth-Heinemann), §49. 단열 불변

량을 간결하게 다룬다. 나중을 위한 책이다.

10.5 유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기

문제

STEP III 2002, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/02-s3-q11`

도입

엘레아의 제논(Zeno of Elea)은 사람이 결코 벽에 닿을 수 없다고 주장했다. 먼저 거리의 절반을 가야 하고, 그다음에는 남은 거리의 절반을 가야 하며, 이런 일이 끝없이 이어지기 때문이다. 무한히 많은 단계가 유한한 총시간 안에 끝날 수 있다는 해결책은 바로 수렴하는(converge) 무한급수(infinite series)이다. 이 문제는 제논의 역설(Zeno's paradox)을 실제로 구현한 것이다. 쐐기의 꼭짓점을 향해 미끄러져 들어가는 퍽(puck)은 벽에 무한히 많이 부딪혀 튀지만, 유한한 시간 뒤에 꼭짓점에 도달한다.

자연에서도 이런 일이 일어난다. 반발계수(coefficient of restitution)가 1보다 작은 공을 바닥에 튀기면, 공은 유한한 시간 동안 무한히 많이 튄 뒤 멈춘다. 입상 물질(granular materials, 모래, 곡물, 눈 등)의 컴퓨터 시뮬레이션에서는 이러한 "비탄성 붕괴(inelastic collapse)"가 실제로 골칫거리이다. 컴퓨터가 유한한 시간 안에 무한히 많은 충돌을 처리해야 하기 때문이다.

시작하기 전에

생각해 보기 입자가 반발계수 e인 매끄러운 벽에 부딪힐 때, 속도의 벽 방향 성분은 어떻게 되는가? 벽에 수직인 성분은 어떻게 되는가?

매끄러운 벽은 벽 방향으로 힘을 작용하지 않으므로, 속도의 벽에 평행한 성분은 변하지 않는다. 수직 성분은 방향이 반대로 바뀌고 e배가 된다. 따라서 입자가 벽과 각 α를 이루며 들어와서 각 β를 이루며 나간다면

$$\tan\beta = e\tan\alpha,$$

이고, 평행 성분이 변하지 않으므로 (들어올 때의 속력)$\cos\alpha$ = (나갈 때의 속력)$\cos\beta$이다.

차근차근 풀기

1단계 튀어 나가는 각

생각해 보기 입자가 벽 OA와 각 θ를 이루며 M_1에 도달한다(각은 O에서 먼 쪽에서 잰다). 입자는 OA와 어떤 각 φ를 이루며 튀어 나가는가? 삼각형 OM_1N_1을 이용하여 φ를 θ로 나타내어라.

입자는 M_1에서 O 쪽을 향해 벽과 각 φ를 이루며 튀어 나가므로, 각 OM_1N_1은 φ이다. 삼각형 OM_1N_1에서 O에서의 각은 30°이다. N_1에서 각 M_1N_1B는 θ이고 O, N_1, B가 한 직선 위에 있으므로, 각 ON_1M_1은 $180^\circ - \theta$이다. 삼각형의 세 각의 합은 180°이므로

$$30^\circ + \varphi + (180^\circ - \theta) = 180^\circ, \qquad \text{따라서} \qquad \varphi = \theta - 30^\circ.$$

(특히 $\theta > 30^\circ$이다.) 그러면 반발 법칙 $\tan\varphi = e\tan\theta$로부터

$$e = \frac{\tan(\theta - 30^\circ)}{\tan\theta},$$

를 얻고, 평행 성분의 보존 $u_1\cos\theta = v_1\cos\varphi$로부터

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30^\circ)}. \qquad \blacksquare$$

를 얻는다.

2단계 반복되는 패턴

생각해 보기 N_1에서 입자는 벽 OB와 각 θ를 이루며 도달하며, 이 각은 O에서 먼 쪽에서 잰 것이다. 이를 M_1에 도달할 때와 비교해 보아라. 그다음에는 어떤 일이 일어나는가?

N_1에서의 상황은 M_1에서의 상황을 거울에 비춘 것과 같다. 입자가 O에서 먼 쪽에서 각 θ를 이루며 벽에 부딪힌다. 따라서 입자는 각 $\theta - 30^\circ$를 이루며 튀어 나가 다시 각 θ를 이루며 OA에 부딪히고, 이런 일이 끝없이 이어진다. 모든 튕김은 첫 번째 튕김을 확대·축소한 복사본이다. 각 삼각형 OM_kN_k, ON_kM_{k+1}, ... 는 바로 앞의 삼각형과 닮음(similar)이고(그림 10.5.1), 속력은 튕길 때마다 같은 비율로 곱해진다.

3단계 두 개의 비

생각해 보기 한 번 튕긴 뒤 다음에 튕길 때까지 O로부터의 거리는 어떤 비율 ρ로 줄어드는가? 속력은 어떤 비율 k로 줄어드는가? 그렇다면 각 구간을 지나는 데 걸리는 시간은 어떤 비율로 줄어드는가?

삼각형 OM_1N_1에서 사인법칙(sine rule)을 쓰면

$$\rho = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta}.$$

이다. 다음 삼각형의 모든 길이는 이 삼각형의 길이의 ρ배이므로, 경로의 각 구간의 길이는 앞 구간의 ρ배이다. 속력은 튕길 때마다 $k = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}$배가 된다. 시간은 길이를 속력으로 나눈 것이므로, 각 구간에 걸리는 시간은 앞 구간에 걸린 시간의

$$\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)\cos(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta - 60^\circ)}{\sin 2\theta}$$

배이다.

4단계 등비급수

총 시간은 $T_1(1 + r + r^2 + \cdots)$이다. 여기서 T_1은 첫 구간에 걸리는 시간이고 $r = \frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin 2\theta}$이다. 이 등비급수(geometric series)는 $0 < r < 1$이면 유한하다.

생각해 보기 $\sin(2\theta - 60^\circ) < \sin 2\theta$는 언제 성립하는가? 항등식 $\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X+Y)\sin\frac{1}{2}(X-Y)$를 이용하여라.

$$\sin 2\theta - \sin(2\theta - 60^\circ) = 2\cos(2\theta - 30^\circ)\sin 30^\circ = \cos(2\theta - 30^\circ),$$

이 값은 $2\theta - 30^\circ < 90^\circ$일 때, 즉 $\theta < 60^\circ$일 때 양수이다. 또 $\theta > 30^\circ$이므로 $r > 0$이다. 따라서 $30^\circ < \theta < 60^\circ$이면 급수가 수렴한다. 입자는 무한히 많이 튕기고, O로부터의 거리는 매번 비율 $\rho < 1$로 줄어들며, 유한한 시간 $\frac{T_1}{1-r}$ 뒤에 O에 도달한다. ■

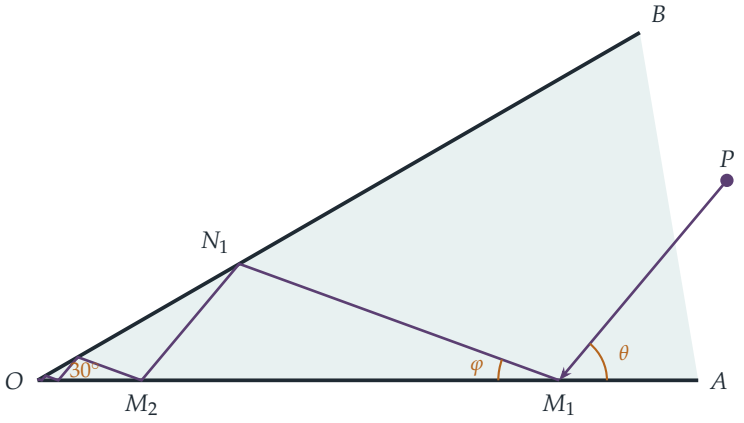


그림 10.5.1 $\theta = 50°$일 때 쐐기 안의 경로. 이때 $\varphi = 20°$이고 $e = \tan 20° / \tan 50° \approx 0.31$이다. 각 튕김은 앞의 튕김을 $\rho \approx 0.45$배로 축소한 복사본이고, 각 구간에 걸리는 시간은 앞 구간의 약 0.65배이다. 입자는 무한히 많이 튕긴 뒤 유한한 시간 안에 O에 도달한다.

돌아보기

- **자기 닮음(self-similarity).** 한 번의 튕김을 이해하고 나면 그 뒤의 모든 튕김은 축소된 복사본이므로, 무한한 과정 전체가 두 개의 비로 정리되었다.
- **비를 올바르게 결합하기.** 거리는 ρ배, 속력은 k배로 줄어들므로 시간은 ρ/k배로 줄어든다.
- **무한히 많은 사건, 유한한 합.** 공비가 1보다 작은 등비급수는 수렴한다.

숨은 수학

$\theta \geq 60°$일 때

$\theta = 60°$이면 비가 정확히 1이다. 모든 구간에 같은 시간이 걸리므로, 입자는 O에 한없이 가까워지기는 하지만 결코 도달하지 못한다. (속력과 구간의 길이가 같은 비율로 줄어들기 때문이다.) $\theta > 60°$이면 구간을 지나는 시간이 점점 길어진다. 어느 경우든 입자는 O에 가까워지며 무한히 많이 튕기지만, 유한한 시간 안에 도달하는 것은 $\theta < 60°$일 때뿐이다. 값 $e = \tan 30° / \tan 60° = \frac{1}{3}$이 그 경계이다.

튀는 공과 비탄성 붕괴

같은 현상의 가장 간단한 예는 다음과 같다. 바닥에 떨어뜨린 공은 높이 e^2H까지 올라가고, 그다음에는 e^4H까지 올라가며, 이런 식으로 계속된다. 튕김 사이의 시간은 각 튕김에서의 속력에 비례하고, 이 속력은 매번 e배로 줄어들므로 총시간은 등비급수가 된다. 첫 낙하에 걸리는 시간을 $T_0 = \sqrt{2H/g}$라 하면, 공은

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

뒤에 튀기를 멈춘다. 무한히 많이 튄 다음 정지하는 것이다. 1992년 Sean McNamara와 William Young은 한 직선 위에 놓인 많은 비탄성 입자의 시뮬레이션에서도 같은 일이 일어남을 보였다. 입자 무리가 유한한 시간 안에 무한히 많은 충돌을 겪을 수 있는데, 이것이 "비탄성 붕괴"이다. 모래와 입상 흐름의 시뮬레이션에는 이를 피하기 위한 특별한 규칙이 들어가야 하며, 이 현상은 입상 기체가 저절로 덩어리를 이루는 이유를 설명하는 데 도움이 된다.

제논과 수렴

기원전 450년 무렵에 나온 제논의 역설은 이천 년 동안 철학자들을 괴롭혔다. 무한한 합이 유한한 값을 가질 수 있다는 수학적 해결은 19세기에 이르러서야 엄밀해졌는데, 이때 코시(Cauchy), 바이어슈트라스(Weierstrass) 등이 극한(제2장의 주제)을 이용하여 수렴을 정의하였다. 이 문제의 놀라운 점은 과정이 **물리적으로** 무한하다는 것이다. 유한한 시간 안에 실제로 무한히 많은 충돌이 일어난다. 다각형 안의 당구(billiards)와 충돌하는 입자의 운동을 연구하는 수학자들은 이러한 거동을 **제논 현상**(*Zeno phenomenon*)이라 부르며, 이는 충돌하는 단단한 구들의 계가 모든 시간에 대해 잘 정의된 운동을 가진다는 것을 증명할 때 나타나는 미묘한 문제 가운데 하나이다.

사고 기술

무한한 과정을 합하기

과정이 일정한 배율로 반복될 때, 더할 수 있는 양(시간, 거리, 에너지)의 총합은 등비급수이다. 수렴 여부는 공비로 판단한다.

여기서 핵심은 올바른 비를 찾는 것이었다. 거리의 비도, 속력의 비도 아닌 시간의 비이다. 대학에서는 같은 추론이 반복법의 수렴, 프랙털 이론, 그리고 문제를 반복해서 절반으로 나누는 알고리즘의 분석을 지배한다.

더 도전하기

1 **총 이동 거리.** M_1에서 O까지 이동한 총거리가 30°와 90° 사이의 모든 θ에 대해 유한함을 보이고, 이를 OM_1과 θ로 나타내어라.

2 **다른 쐐기.** 30° 대신 각이 α인 쐐기에 대해 문제를 다시 풀어라. $\varphi = \theta - \alpha$임을 보이고, 입자가 유한한 시간 안에 O에 도달하기 위한 θ의 조건을 구하여라.

3 **완전 탄성 벽.** $e = 1$이면 입자가 O에 도달할 수 있는가? (**힌트**: 쐐기를 그 벽에 대해 거듭 대칭이동하여 경로가 직선이 되게 하여라. O 둘레에 30° 쐐기가 몇 개 들어가는가?)

4 **튀는 공.** 공을 높이 $1\ \mathrm{m}$에서 $e = 0.8$로 떨어뜨린다. 공은 얼마 동안 튀며, 총 얼마의 거리를 이동하는가? ($g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$로 하여라.)

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 5장. 튀는 공과 무한히 이어지는 충돌에 관한 문제가 여럿 실려 있다.
- **Sean McNamara & William Young, "Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium"**, *Physics of Fluids A* 4 (1992). (1차원 입상 매질에서의 비탄성 붕괴와 뭉침)
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards*** (American Mathematical Society; 온라인 무료 공개). 연습문제에 나온 펼치기 기법을 포함한 당구의 수학을 다룬다.

10.6 두 물체가 하나가 되다

문제

STEP III 2004, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/04-s3-q11`

도입

두 물체가 서로 끌어당기거나 밀어낸다. 지구와 달, 두 별, 양성자와 전자가 그렇다. 각 물체의 운동은 다른 물체의 위치에 따라 달라지므로 방정식들이 서로 얽혀(coupled) 있고, 두 운동을 한꺼번에 구해야 할 것처럼 보인다. 뉴턴(Newton)의 위대한 단순화는 변수를 바꾸는 것이었다. 두 위치 대신, 마치 아무 힘도 작용하지 않는 것처럼 움직이는 **질량중심**(centre of mass)과, 질량이 바뀐 하나의 입자처럼 움직이는 **상대 거리**(separation)를 쓰는 것이다. 어려운 문제 하나가 쉬운 문제 두 개가 된다.

이 문제는 직선 위의 두 입자에 대해 이 분리를 실행한다. 그 과정에서 작은 기적이 일어난다. 상대 거리가 t에 대한 이차식의 제곱근으로 밝혀지는데, 그 이유는 주어진 문제와는 아무 상관이 없고 오로지 평면 위의 운동과 관련이 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 각 입자에 대해 뉴턴의 제2법칙을 써 보라. 각 힘은 어느 방향으로 작용하는가?

힘은 척력이므로 (왼쪽에 있는) P는 왼쪽으로, (오른쪽에 있는) Q는 오른쪽으로 민다.

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad 1 \cdot \ddot{x}_2 = +\frac{2}{z^3}.$$

두 방정식은 모두 $z = x_2 - x_1$을 포함하므로 서로 얽혀 있다.

차근차근 풀기

1단계 상대 거리

생각해 보기 두 방정식을 어떻게 결합하면 z만 포함하게 되는가?

빼면 $\ddot{z} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3}$이다. ■

상대 거리는 힘 $\frac{2}{z^3}$에 의해 밀리는 질량 $\frac{2}{3}$인 하나의 입자처럼 행동한다. 수 $\frac{2}{3} = \frac{2\times 1}{2+1}$은 **환산 질량**(reduced mass) $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$이다.

2단계 상대 거리의 에너지

생각해 보기 $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$로 놓고 변수를 분리하여 적분(integrate)하라. z와 $v = \dot{z}$의 초깃값은 무엇인가?

$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3}$을 적분하면 $\frac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C$이다. 처음에 $z = 1$이고 $\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0 - 1 = -1$이므로 $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$, 즉 $C = 2$이다.

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}.$$

(이것은 상대 거리에 대한 에너지 보존(conservation of energy)이다. 환산질량 단위당 운동 에너지와 위치 에너지 $\frac{3}{2z^2}$의 합이 일정하다.)

3단계 놀랍도록 간단한 해

생각해 보기 보여야 할 답은 $z^2 = 4t^2 - 2t + 1$이다. 그러니 z 대신 $w = z^2$을 살펴보라. $\dot{w}^2$을 w로 나타내면 무엇인가?

$w = z^2$이면 $\dot{w} = 2z\dot{z}$이므로

$$\dot{w}^2 = 4z^2\dot{z}^2 = 4z^2\left(4 - \frac{3}{z^2}\right) = 16w - 12.$$

미분하면 $2\dot{w}\ddot{w} = 16\dot{w}$이므로 ($\dot{w} \neq 0$일 때마다) $\ddot{w} = 8$이다. 따라서 w는 t에 대한 이차식 $w = 4t^2 + \alpha t + \beta$이다. 처음에 $w = 1$이고 $\dot{w} = 2z\dot{z} = -2$이므로 $\beta = 1$, $\alpha = -2$이다.

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}. \quad ■$$

(직접 확인할 수도 있다. $\dot{w}^2 = (8t-2)^2 = 64t^2 - 32t + 4 = 16(4t^2 - 2t + 1) - 12$이다.) 두 입자는 $t = \frac{1}{4}$에서 $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$로 가장 가까워지고, 그 뒤로는 영원히 멀어진다.

4단계 질량중심

생각해 보기 $2x_1 + x_2$는 어떤 방정식을 만족하는가? 왜 이것이 살펴보기에 자연스러운 결합인가?

두 운동 방정식을 더하면 $2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0$이다. 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이므로(뉴턴의 제3법칙) 전체 운동량(momentum) $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$는 일정하다. 그 값은 처음에 $2 \times 1 + 0 = 2$이고, $2x_1 + x_2$는 처음에 1이므로

$$2x_1 + x_2 = 1 + 2t.$$

$\frac{2x_1+x_2}{3}$에 있는 질량중심은 속력 $\frac{2}{3}$으로 일정하게 움직인다. $x_2 - x_1 = z$와 결합하면

$$x_1 = \frac{1 + 2t - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{1 + 2t + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}. \qquad \blacksquare$$

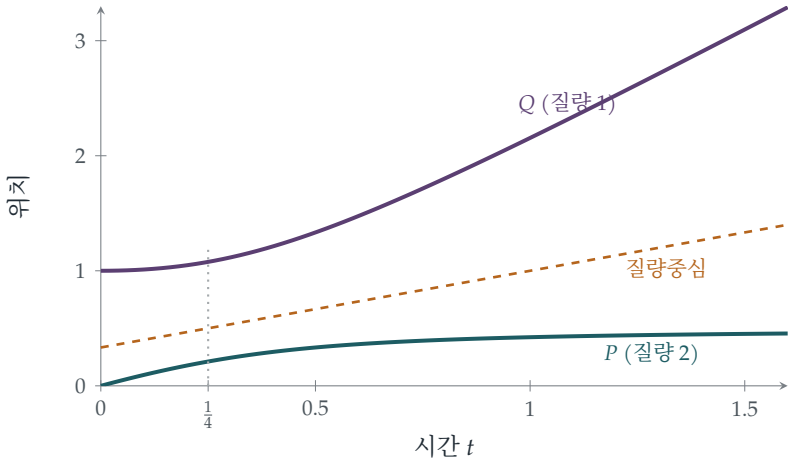


그림 10.6.1 시간에 따른 P(청록색)와 Q(자주색)의 위치. P는 Q를 향해 움직이다가 척력 때문에 느려지고 되돌아가 일정한 위치에 가까워지며, Q는 밀려난다. 두 입자는 $t = \frac{1}{4}$에서 가장 가깝다. 질량중심(호박색, 점선)은 내내 일정한 속력으로 움직인다.

돌아보기

- **변수를 바꾸어 얽힘을 푼다.** 방정식들의 차는 z만 포함했고, 가중합은 질량중심만 포함했다.
- **에너지 적분.** $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$로 쓰면 2계 방정식이 1계 방정식, 곧 에너지 보존으로 바뀌었다.
- **미지수를 바꾼다.** z에 대한 방정식은 다루기 어려웠지만 z^2에 대한 방정식은 아주 쉬웠다.

숨은 수학

z^2이 이차식인 이유

$\ddot{z} = k/z^3$ 꼴의 어떤 힘의 법칙에 대해서도, 같은 계산으로 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 상수를 얻는다. $\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$이 보존되는 에너지이기 때문이다. 따라서 z^2은 언제나 t에 대한 이차식이다. 왜 그럴까?

숨은 이유는 이렇다. **평면** 위에서 자유롭게, 즉 일정한 속력으로 직선을 따라 움직이는 입자를 생각하자. $r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$이므로 원점으로부터의 거리 r는 $r^2 =$ (이차식, 변수는t)를 만족한다. 그리고 극좌표(polar coordinates)에서 이 입자의 지름 방향 운동 방정식은 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$이다. 각운동량(angular momentum) $h = r^2\dot{\theta}$가 일정하므로 이 방정식은 다음이 된다.

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

역세제곱 척력은 정확히 숨은 회전 운동의 **원심**(centrifugal) 효과이다. 우리 문제에서 $z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$은 원점에서 거리 $\frac{\sqrt{3}}{2}$만큼 떨어져 지나가는 직선 위를 속력 2로 움직이는 점의, 원점으로부터의 거리의 제곱이다. 서로 밀어내는 일차원의 두 입자는 이차원 자유 운동의 그림자이다.

이체 문제

이 문제의 방법은 두 물체 사이의 힘이 상대 거리에만 의존하고 두 물체를 잇는 직선을 따라 작용하기만 하면, 일차원뿐 아니라 삼차원에서도 통한다. 질량중심은 등속으로 움직이고, 상대 위치 벡터(vector) $\mathbf{r}$는 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$에 대해 $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$를 따른다. 중력의 경우 이것이 뉴턴이 *Principia*에서 푼 **케플러 문제**(Kepler problem)이다. 상대 위치는 타원, 포물선 또는 쌍곡선을 그린다. 지구와 태양은 둘 다 공통의 질량중심 둘레를 도는데, 이 점은 태양 내부에 있다. 지구와 달은 지구 중심에서 약 4700 km 떨어진 점 둘레를 도는데, 이 점은 지구 내부에 있지만 중심에서 꽤 떨어져 있으며, 그래서 지구는 한 달 주기로 흔들린다. 천문학자들은 별에서 바로 이 흔들림을 검출하여 다른 별 둘레의 행성을 찾는다.

적분가능계

1969년 Francesco Calogero는 직선 위의 많은 입자가 역제곱 퍼텐셜(즉 역세제곱 힘)로 서로 밀어내는 계를 연구하여, 놀랍게도 이 계가 입자의 개수와 상관없이 정확히 풀린다는 것을 발견했다. 1975년 Jürgen Moser는 시간에 따라 변해도 고윳값(eigenvalue)이 일정하게 유지되는 행렬, 곧 Section 7.7의 **락스 쌍**(Lax pairs)을 이용하여 그 이유를 설명했다. *Calogero–Moser* **계**(Calogero–Moser system)는 이제 **적분가능계**(integrable system), 즉 완전히 풀 수 있을 만큼 보존량이 충분히 많은 계의 중심적인 예이며, 역학을 무작위 행렬, 양자장론, 솔리톤 이론과 연결한다.

사고 기술

얽힘을 푸는 좌표를 골라라

두 양이 서로 얽혀 있으면, 얽혀 있지 않은 결합을 찾아라. 알맞은 상수로 가중한 합과 차는 종종 문제를 독립적인 조각들로 나누어 준다.

질량중심과 상대 좌표가 첫 번째 예이다. 대학에서는 같은 아이디어가 행렬의 대각화(diagonalisation, 정규 모드(normal modes), Section 11.2), 편미분방정식의 변수분리법(separation of variables), 그리고 양자역학에서 나타난다.

더 도전하기

1 **끈으로 연결된 두 질량.** STEP III 2023, 9번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`)을 풀어 보라. 끈으로 연결된 두 입자를 따라가며, 질량중심을 이용해 운동을 분리한다. 한 입자가 언제 뒤로 움직이는지 살펴보라.

2 **인력.** 인력 $\frac{2}{z^3}$으로 이 문제를 다시 풀어 보라. z^2이 여전히 t에 대한 이차식임을 보이고, 두 입자가 언제 충돌하는지 구하라.

3 **숨은 평면.** 이 문제의 운동에 대해, 원점으로부터의 거리가 $z(t)$인 평면 위의 직선과 쓸고 지나간 각 $\theta(t)$를 구하라. $z^2\dot{\theta}$가 일정하고 $(z^2\dot{\theta})^2 = 3$임을 확인하라.

4 **케플러의 제3법칙.** 질량이 m_1, m_2인 두 별이 서로 거리 a만큼 떨어져 중력에 의해 질량중심 둘레를 원운동한다. 주기 T가 $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$을 만족함을 보여라.

더 읽을거리

- **John Taylor, *Classical Mechanics*** (University Science Books), 8장. 이체 문제, 환산질량, 궤도.
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press), 10장, 중심력에 관한 내용.
- **Francesco Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*** (Springer). 의욕 있는 독자를 위한 책으로, 정확히 풀리는 계의 세계를 다룬다.

10.7 구 껍질 안의 중력

문제

STEP III 1999, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/99-s3-q9`

도입

속이 빈 행성을 상상해 보자. 안에는 아무것도 없고 얇은 구 모양의 암석 껍질만 있는 행성이다. 그 안쪽, 벽 가까이에 서 있다면 가까운 암석 쪽으로 끌려갈 것이라고 예상할지도 모른다. 그러나 실제로는 둥둥 떠 있게 된다. 껍질 내부의 모든 곳에서 껍질이 작용하는 중력(gravitational pull)은 정확히 0이기 때문이다. 껍질의 가까운 쪽은 더 가깝지만 먼 쪽은 더 크고, 이 두 효과가 완벽하게 상쇄된다.

이것이 **뉴턴**(*Newton*)**의 껍질 정리**(*shell theorem*)이다. 뉴턴은 이 정리를 증명하는 데 여러 해가 걸렸고, 이 정리는 그의 중력 이론에 꼭 필요했다. 짝을 이루는 정리(구의 바깥에서는 모든 질량이 중심에 모여 있는 것처럼 끌어당긴다)와 함께, 이 정리는 지구와 태양을 점으로 취급하는 것을 정당화한다. 연습 문제와 숨은 수학 절에서는 이 정리를 이용하여 기체 구름이 붕괴하여 별이 되는 데 걸리는 시간을 계산한다.

시작하기 전에

생각해 보기 고리에서 지름의 양 끝에 서로 마주 보는 작은 두 조각을 생각하자. 이 두 조각이 입자에 작용하는 힘을 그려 보자. 어떤 성분은 상쇄되고, 어떤 성분은 더해지는가?

두 조각은 입자로부터 같은 거리에 있다. 두 조각이 끌어당기는 힘의 축 방향 성분은 크기가 같아서 더해지고, 축에 수직인 성분은 크기가 같고 방향이 반대여서 상쇄된다. 고리 전체를 이런 식으로 짝지으면 알짜힘은 축 방향, 즉 고리의 중심을 향한다.

차근차근 풀기

1단계 고리

고리의 모든 조각은 입자로부터 거리 $\sqrt{x^2+r^2}$에 있고, 입자에서 조각으로 그은 직선은 축과 각 ψ를 이룬다. 여기서 $\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$이다. 질량 δm인 조각은 크기 $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}$의 힘으로 끌어당기며, 그중 축 방향 성분은 $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$이다. 모든 조각의 거리와 각이 같으므로 이 성분들을 그냥 더하면

$$\frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$ ■

2단계 껍질을 고리로 자르기

> ? **생각해 보기** 껍질의 중심을 O에 두고, 입자를 축 위의 O로부터 거리 b인 곳에 두자. 껍질을 축에 수직인 얇은 고리들로 자르고, 각 고리를 그 고리 위의 한 점이 O에서 축과 이루는 각 ϕ로 나타내자. 고리의 반지름, 위치, 질량은 각각 무엇인가?

각 ϕ에 있는 고리의 반지름은 $a\sin\phi$이고, 그 중심은 축을 따라 O로부터 거리 $a\cos\phi$에 있으므로 입자로부터는 거리 $a\cos\phi - b$에 있다. 고리의 폭은 $a\,\delta\phi$이므로 넓이는 $2\pi a\sin\phi\cdot a\,\delta\phi$이고, 이는 껍질의 넓이 $4\pi a^2$의 $\frac{1}{2}\sin\phi\,\delta\phi$배이다. 따라서 고리의 질량은 $\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi$이다. 1단계에 의해 이 고리는 입자를 축을 따라 $\phi = 0$ 쪽 끝으로 다음 크기의 힘으로 끌어당긴다.

$$\frac{G\cdot\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi\,(a\cos\phi - b)}{\left((a\cos\phi-b)^2 + a^2\sin^2\phi\right)^{3/2}} = \frac{GM}{2}\cdot\frac{(a\cos\phi-b)\sin\phi\,\delta\phi}{(a^2-2ab\cos\phi+b^2)^{3/2}}.$$

(부호는 저절로 처리된다. $a\cos\phi > b$인, 입자 너머의 고리들은 한쪽으로 끌어당기고, 입자 뒤쪽의 고리들은 반대쪽으로 끌어당긴다.)

3단계 알맞은 변수

> ? **생각해 보기** 분모에는 $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$이 들어 있다. s는 기하학적으로 무엇을 나타내는가? $\mathrm{d}s$를 $\mathrm{d}\phi$로 나타내면 무엇인가?

코사인 법칙(cosine rule)에 의해 s는 입자에서 고리까지의 거리이다. 미분하면 $2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$이고, $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$을 $a\cos\phi$에 대하여 풀면 $a\cos\phi - b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}$이다. 따라서 전체 힘은

$$\frac{GM}{2}\int\frac{a^2-b^2-s^2}{2b\,s^3}\cdot\frac{s\,\mathrm{d}s}{ab} = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\right)\mathrm{d}s,$$

이다. 여기서 s는 $a-b$(가장 가까운 점, $\phi=0$)부터 $a+b$(가장 먼 점, $\phi=\pi$)까지 변한다.

4단계 **힘이 사라진다**

$$\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\,\mathrm{d}s = (a^2-b^2)\Big(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\Big) - 2b = (a^2-b^2)\cdot\frac{2b}{a^2-b^2} - 2b = 0.$$

껍질은 입자에 아무런 힘도 작용하지 않는다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** 입자가 껍질의 **바깥**, 즉 $b > a$인 곳에 있으면 무엇이 달라지는가? s의 범위의 끝값이 $b-a$와 $b+a$가 된다. 마지막 줄을 다시 계산하여, 힘이 중심을 향하고 크기가 $\frac{GM}{b^2}$임을, 즉 모든 질량이 중심에 모여 있는 것과 같음을 보여라.

돌아보기

- **대칭성을 먼저 보라.** 마주 보는 조각을 짝지어 보는 것만으로, 계산하기 전에 힘의 방향을 알 수 있었다.
- **더 간단한 도형에서부터 쌓아 올려라.** 점들이 모여 고리가 되고, 고리들이 모여 껍질이 되었다.
- **물리적 상황에 맞는 변수를 골라라.** 각 ϕ에서 거리 s로 변수를 바꾸자 까다로운 적분이 아주 쉬운 적분이 되었다.

숨은 수학

뉴턴의 원뿔 논증

뉴턴 자신의 증명(**프린키피아**, 제1권, 명제 70)에는 적분이 전혀 쓰이지 않는다. 입자를 꼭짓점으로 하는 좁은 이중 원뿔을 그리면, 이 원뿔은 껍질을 작은 두 조각으로 잘라 낸다(그림 10.7.1). 두 조각의 넓이는 입자로부터의 거리의 제곱 r_1^2과 r_2^2에 비례한다(현은 양 끝에서 원과 같은 각으로 만나므로, 두 조각은 원뿔과 같은 각을 이룬다). 따라서 두 조각의 질량은 r_1^2과 r_2^2에 비례하고, 질량을 거리의 제곱으로 나눈 값에 비례하는 두 조각의 인력은 크기가 같고 방향이 반대이다. 입자를 지나는 모든 이중 원뿔에서 힘이 상쇄되므로 전체 힘은 0이다. 바로 역제곱 법칙(inverse-square law) 덕분에 이러한 상쇄가 일어난다. 거리의 다른 거듭제곱을 따른다면 껍질은 입자를 밀거나 끌어당길 것이다.

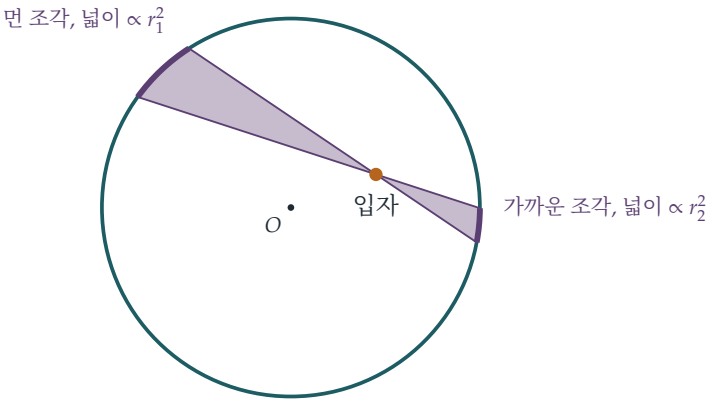


그림 10.7.1 뉴턴의 논증. 입자에서 뻗어 나간 가는 이중 원뿔이 껍질을 두 조각으로 잘라 낸다. 먼 조각은 거리의 제곱의 비만큼 더 크지만, 그 인력은 정확히 같은 비만큼 더 약하다. 두 인력은 상쇄되고, 다른 모든 쌍도 마찬가지이다. 껍질 내부에서 중력은 사라진다.

붕괴하는 구름

STEP III 1987 Q14는 이 정리를 반대 방향으로 이용한다. 균일한 구의 바깥에서, 표면에 있는 입자에 작용하는 인력은 전체 질량이 중심에 있는 것처럼 GMm/r^2이다. 이제 정지해 있는 반지름 R, 질량 M인 균일한 구 모양의 먼지 구름을 생각하고, 이 구름이 자체 중력으로 붕괴하게 하자. 표면의 입자는 자신보다 안쪽에 있는 질량만 느끼는데, 모든 것이 안쪽으로 떨어지므로 이 질량은 계속 M이다. 따라서 안쪽으로 향하는 속력 $v = -\dot{r}$는 다음을 만족한다.

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

$r = R\cos^2\alpha$로 치환하면(연습 문제 중 하나이다) 반지름 r에 이르기까지 걸리는 시간은 $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$이다. 구름 전체는 $\alpha = \frac{\pi}{2}$일 때 한 점으로 붕괴하며, 이는 다음 **자유 낙하 시간**(*free-fall time*)이 지난 뒤이다.

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

여기서 ρ는 밀도이다. 놀랍게도 이 시간은 밀도에만 의존하므로, 구름의 모든 껍질이 같은 순간에 중심에 도달한다(그림 10.7.2). 세제곱미터당 약 10^{-17} kg인 전형적인 성간 구름의 경우 t_{ff}는 약 700 000년이며, 이것이 별이 형성되는 시간 규모를 정한다.

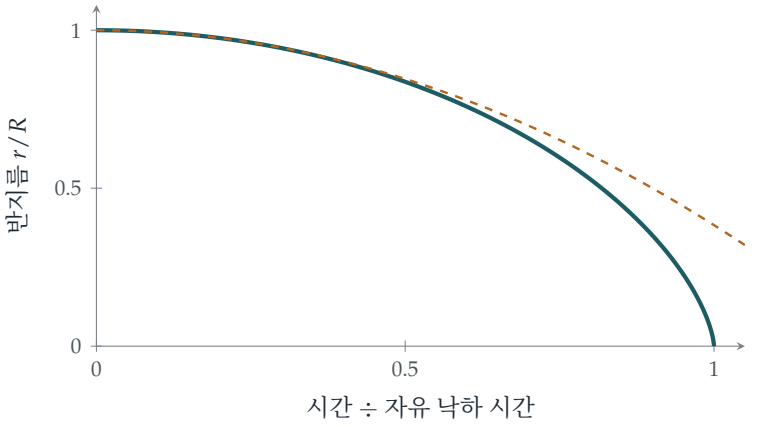


그림 10.7.2 붕괴하는 균일한 먼지 구름의 반지름을 시간에 대하여 나타낸 그래프(청록색). 처음에는 떨어뜨린 돌처럼 천천히 시작하고(호박색 점선 포물선은 등가속도 근사 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$이다), 그다음 급격히 빨라져서 $t = t_{\text{ff}}$일 때 0에 이른다. 이 곡선은 사이클로이드(cycloid)의 절반이다.

뉴턴의 지연과 가우스 법칙

뉴턴은 1660년대에 이미 역제곱 법칙을 알고 있었지만, 중력 이론은 1687년에야 발표했다. 일부 역사가들에 따르면 그 이유 중 하나는, 껍질 정리를 증명하기 전까지는 지구를 질점으로 취급하는 것을 정당화할 수 없었기 때문이다. 일단 증명하고 나자 **프린키피아**의 나머지 내용이 뒤따랐다. 오늘날 이 정리는 **가우스**(*Gauss*) **법칙**(*Gauss's law*)의 간단한 결과이다. 가우스 법칙은 임의의 닫힌곡면을 통해 바깥으로 흘러 나가는 중력장의 총량이 그 안의 질량에 비례한다는 법칙이다. 껍질 내부에 중심이 같은 구를 하나 잡자. 이 구는 질량을 하나도 둘러싸지 않으므로, 이 구를 통과하는 총 흐름은 0이다. 이것만으로 장이 0이 되지는 않지만(균일한 장은 한쪽으로 흘러 들어와 다른 쪽으로 흘러 나가므로, 어떤 닫힌곡면을 통과하는 총 흐름도 0이다), 여기서는 대칭성이 도움이 된다. 장은 중심을 곧장 향하거나 중심에서 곧장 멀어지는 방향이어야 하고, 구 위의 모든 곳에서 세기가 같아야 하므로, 총 흐름이 0이라는 것은 장이 0이라는 뜻이다. 같은 법칙이 전기장도 지배한다. 그래서 대전된 금속 껍질 내부에는 전기장이 없고, 자동차가 번개로부터 우리를 보호해 준다.

사고 기술

합으로서의 적분

연속적인 물체의 효과를 구하려면, 그 물체를 효과를 이미 아는 조각들로 자르고 그것들을 모두 더하라. 조각을 고를 때는 대칭성을 이용하라.

점들이 모여 고리가 되고, 고리들이 모여 껍질이 되며, 껍질들이 모여 속이 찬 구가 된다. 대학에서는 모든 장(중력장, 전기장, 자기장)을 이런 방식으로 그 원천으로부터 계산하며, 이는 가우스 정리와 스토크스(Stokes) 정리의 벡터 미적분학으로 이어진다.

더 도전하기

1 **껍질의 바깥.** 잠깐 생각하기 상자의 내용을 완성하라. 즉, 껍질의 바깥에서 힘이 $\frac{GM}{b^2}$임을 보여라. 이로부터 질량 M인 속이 찬 균일한 구가 바깥의 입자를, 질량이 모두 중심에 있는 것처럼 끌어당김을 이끌어 내라.

2 **붕괴 시간.** STEP III 1987, 14번 문제 (`step.maths.org/questions/87-s3-q14`)에 도전해 보라. 먼지 구름이 자체 중력으로 붕괴하는 데 걸리는 시간을 구하는 문제이며, 삼각치환으로 적분을 계산할 수 있다.

3 **지구를 관통하는 터널.** 속이 찬 균일한 구의 내부에서, 중심으로부터 거리 b인 곳의 힘이 b에 비례하는 $\frac{GMb}{a^3}$임을 보여라. 이로부터 지구 중심을 지나는 터널에 떨어뜨린 공이 주기 $2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$, 약 84분으로 진동함을 이끌어 내라. 이는 지표면을 스치듯 도는 인공위성의 주기와 같다.

4 **다른 힘의 법칙.** 중력이 역세제곱 법칙을 따른다면, 껍질 내부의 힘은 여전히 0일까? ($\frac{1}{s^2}$ 대신 $\frac{1}{s^3}$을 넣어 3단계를 다시 해 보라.)

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 껍질 정리를 포함한 중력에 관한 장들.
- **찬 드 라 세 카 르(Subrahmanyan Chandrasekhar), *Newton's Principia for the Common Reader*** (Oxford University Press). 명제 70과 71을 포함한 뉴턴의 증명들을 노벨상 수상자가 해설한 책.

- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box*** (Riverhead). 중력, 붕괴, 시뮬레이션이 우주의 구조를 어떻게 설명하는지 다룬 책.

10.8 삼각형을 이룬 세 별

문제

STEP I 1999, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/99-s1-q11`

도입

중력으로 서로 끌어당기는 두 물체의 운동은 뉴턴(Newton)이 보였고 Section 10.6에서 설명했듯이 완전히 풀 수 있다. 각 물체는 공통 질량중심(centre of mass)을 초점으로 하는 원뿔곡선(conic) 위를 움직이는데, 두 물체가 서로 묶여 있으면 타원(ellipse), 서로에게서 벗어날 만큼 에너지가 충분하면 포물선(parabola)이나 쌍곡선(hyperbola)을 그린다. 그런데 세 번째 물체를 더하면 모든 것이 달라진다. **삼체 문제**(three-body problem)는 익숙한 함수로 나타낼 수 있는 일반해가 없으며, 1890년 앙리 푸앵카레(Henri Poincaré)는 그 해가 혼돈(chaos)적일 수 있음을 발견했다. 이것이 수학에 혼돈이 처음 등장한 순간이다.

그러나 어떤 특수해는 아주 단순하다. 1772년 조제프루이 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange)는 정삼각형(equilateral triangle)의 세 꼭짓점에 놓인 세 물체가 삼각형 모양을 그대로 유지한 채 바퀴처럼 강체 회전할 수 있음을 발견했다. 이 문제는 질량이 같은 경우에 그 해를 구한다. 라그랑주의 삼각형은 단순한 호기심거리가 아니다. 태양, 목성, 그리고 수천 개의 "트로이(Trojan)" 소행성이 정확히 이런 배치를 이루고 있으며, 오늘날 우주 망원경들도 이와 비슷한 지점에 자리 잡고 있다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 별 하나가 반지름 R인 원 위를 각속도(angular velocity) ω로 움직이려면 그 별에 작용하는 힘의 합은 어떠해야 하는가?

그 크기는 $m\omega^2 R$이고 방향은 원의 중심을 향해야 한다. 따라서 각 별에 작용하는 중력의 합이 삼각형의 중심을 향하는지 확인하고, 그 크기가 알맞도록 하는 ω를 구하면 된다.

차근차근 풀기

1단계 기하

생각해 보기 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 각 꼭짓점에서 중심까지의 거리는 얼마인가?

중심은 각 중선(median) 위에 있으며, 꼭짓점에서부터 중선 길이의 3분의 2인 지점에 있다. 중선의 길이는 $a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로 각 꼭짓점에서 중심까지의 거리는

$$R = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

이다. 대칭성에 의해 삼각형의 중심은 질량이 같은 세 별의 질량중심이다.

2단계 별 하나에 작용하는 힘

생각해 보기 나머지 두 별은 각각 크기 $\frac{\gamma m^2}{a^2}$인 힘으로 끌어당긴다. 두 힘 사이의 각은 얼마인가? 두 힘의 합력(resultant)은 무엇이며, 어느 방향을 향하는가?

두 힘은 그 별에서 만나는 삼각형의 두 변을 따라 향하므로, 두 힘 사이의 각은 60°이다. 대칭성에 의해 합력은 이 각의 이등분선(bisector) 위에 놓이고, 이 이등분선은 중심을 지난다. 각 힘은 이등분선과 30°를 이루므로 합력의 크기는

$$2\cdot\frac{\gamma m^2}{a^2}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2},$$

이고 방향은 중심을 향한다(그림 10.8.1).

3단계 각속도

합력을 $m\omega^2 R$와 같게 놓으면

$$m\omega^2\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

이다. 이 각속도에서는 (대칭성에 의해) 같은 계산이 각 별에 똑같이 적용되므로, 세 별 모두 중심 둘레의 원 위를 움직이며 삼각형의 모양은 그대로 유지된다. ■

4단계 중심에 놓인 네 번째 별

생각해 보기 중심에 놓인 질량 λm인 별은 각 꼭짓점에서 거리 $\frac{a}{\sqrt{3}}$만큼 떨어져 있다. 이 별은 각 꼭짓점의 별에 어떤 힘을 추가로 가하는가? 질량중심은 움직이는

? 가? 중심의 별은 알짜힘을 받는가?

중심의 별은 질량중심을 바꾸지 않으며, 대칭성에 의해 그 별에 작용하는 세 힘은 서로 상쇄되므로 그 별은 정지해 있다. 이 별은 각 꼭짓점의 별을 크기 $\frac{\gamma\lambda m^2}{(a/\sqrt{3})^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2}$인 힘으로 중심 쪽으로 끌어당긴다. 이제 꼭짓점의 별에 안쪽으로 작용하는 힘의 합은 $(\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}$이므로

$$m\omega^2\frac{a}{\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}, \qquad \omega^2 = \frac{(3+3\sqrt{3}\,\lambda)\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}(1+\sqrt{3}\,\lambda). \qquad \blacksquare$$

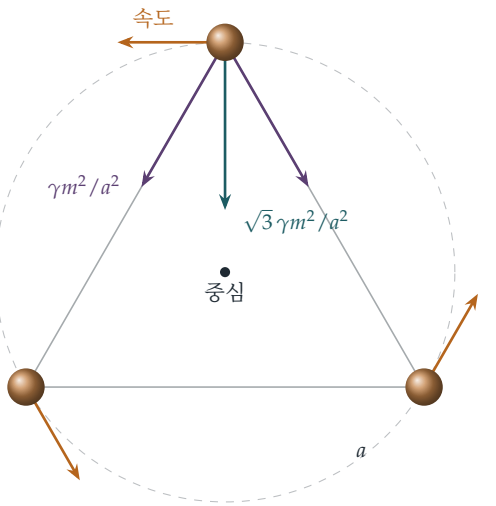


그림 10.8.1 정삼각형의 꼭짓점에 놓인 질량이 같은 세 별. 맨 위 별에 작용하는 두 힘(자주색)은 합쳐져 중심을 향하는 하나의 힘(청록색)이 된다. 각 별이 알맞은 속력(주황색)으로 점선 원 위를 움직이면 삼각형 전체가 모양을 유지한 채 회전한다. 이것이 삼체 문제에 대한 라그랑주의 정삼각형 해이다.

돌아보기

- **대칭적인 해를 추측하라.** 우리는 삼체 문제를 푼 것이 아니다. 대칭성이 높은 운동을 추측하고 뉴턴의 법칙이 그 운동을 허용함을 확인했을 뿐이다.
- **대칭성이 방향을 정해 준다.** 합력은 이등분선 위에 놓일 수밖에 없었으므로 그 크기만 계산하면 되었다.
- **모든 물체를 확인하라.** 대칭성에 의해 별 하나를 확인하면 세 별을 모두 확인한 것이 되었다. 중심의 별은 따로 (쉽게) 확인해야 했다.

숨은 수학

모습을 바꾼 케플러 법칙

답을 $\omega^2 a^3 = \gamma(3m)$로 써 보자. 거리 a만큼 떨어져 원 궤도를 도는 두 물체에 대해 케플러 제3법칙(Kepler's third law)(Section 10.6의 연습문제)은 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2)$, 즉 전체 질량을 준다. 세 별도 전체 질량을 $3m$으로 하여 같은 법칙을 따른다. 사실 라그랑주는 질량이 같은 경우뿐 아니라 **임의의** 세 질량에 대해서도 정삼각형 해가 존재함을 보였다. 이때 삼각형은 질량중심을 중심으로 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)$를 만족하며 회전한다. 오일러(Euler)는 그보다 몇 년 앞서 세 물체가 회전하는 한 직선 위에 놓이는 두 번째 해의 족을 발견했다. (이름 붙이는 방식의 차이를 무시하면) 이 다섯 가지 배치, 즉 공선(collinear) 배치 세 가지와 삼각형 배치 두 가지가 세 물체가 같은 모양을 유지하는 유일한 경우이다.

라그랑주 점

m_1을 태양, m_2를 행성, m_3을 아주 작은 소행성이라 하자. 정삼각형 해에 따르면 소행성은 태양 및 행성과 정삼각형을 이루는 세 번째 꼭짓점, 즉 궤도에서 행성보다 앞이나 뒤에 머무를 수 있다. 이 지점들이 **라그랑주 점**(Lagrange points) L_4와 L_5이며, 오일러의 공선 해는 L_1, L_2, L_3을 준다. 목성의 L_4와 L_5 점 주변에는 알려진 것만 만 개가 넘는 "트로이" 소행성이 모여 있다. 제임스 웹 우주 망원경은 태양–지구 L_2 점 근처, 지구 너머 1.5백만 km 떨어진 곳을 돌고 있으며, 그곳에서는 태양, 지구, 달을 모두 차광막 뒤쪽에 둘 수 있다.

안정성

별을 만드는 이들(Starmakers)의 삼각형은 오래 유지될까? 질량이 같으면 그렇지 않다. 아주 작은 교란도 점점 커져서 별들은 흩어지거나 충돌한다. 에드워드 라우스(Edward Routh)는 1875년 라그랑주의 삼각형이 한 질량이 압도적으로 클 때에만 안정(stable)하다는 것, 정확히는

$$27(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

일 때에만 안정하다는 것을 보였다. 태양과 목성에 대해서는 이 조건이 넉넉히 성립하며, 그래서 트로이 소행성들이 살아남는다. 질량이 같은 세 별에 대해서는 $27 \times 3m^2 > 9m^2$이므로 이 배치는 불안정하다.

푸앵카레의 실수와 8자 궤도

1887년 스웨덴 국왕 오스카르 2세(King Oscar II)는 다체 문제의 해에 상금을 걸었다. 앙리 푸앵카레는 1889년 삼체 문제에 관한 긴 논문으로 상을 받았지만, 논문이 인쇄되는 동안 한 편집자가 허점을 발견했다. 이를 바로잡는 과정에서 푸앵카레는 어떤 해들이 "너무나 놀랍도록 복잡해서 그려 볼 엄두조차 낼 수 없는" 거동을 보인다는 사실을 발견했다. 이

것이 혼돈을 처음 엿본 순간이다. 이미 인쇄된 사본들은 푸앵카레의 비용으로 회수되어 폐기되었다. 새로운 특수해는 지금도 발견되고 있다. 1993년 Cristopher Moore는 질량이 같은 세 물체가 8자 모양의 곡선을 따라 서로를 쫓아 돌 수 있음을 수치적으로 발견했고, 2000년 Alain Chenciner와 Richard Montgomery가 이를 증명했다. 그 뒤로 컴퓨터를 이용해 수천 개의 주기 궤도가 더 발견되었다.

사고 기술

> **대칭적인 해를 추측하고 검증하기**
>
> 문제가 너무 어려워서 일반적으로 풀 수 없을 때에는 가능한 한 대칭성이 높은 해를 찾아라. 대칭적인 추측은 많은 미지수를 한두 개로 줄여 주며, 그것을 확인하는 일은 대개 쉽다.
>
> 이것은 수학과 물리학에서 강력한 전략이다. 대칭적인 평형, 정상 상태, 진행파, 모양을 유지하며 회전하는 배치 등은 흔히 가장 먼저 발견되는 해이며, 나머지 해를 연구하는 출발점이 된다. 그다음 질문은 언제나 그 대칭적인 해가 안정한가 하는 것이다.

더 도전하기

1 **정사각형을 이루는 네 별.** 질량 m인 네 별이 한 변의 길이가 a인 정사각형의 꼭짓점에 놓여 있다. 이 별들이 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$로 중심 둘레를 모양을 유지한 채 회전할 수 있음을 보여라.

2 **질량이 같은 두 별과 행성 하나.** 질량 M인 두 별이 거리 a만큼 떨어져 질량중심 둘레를 돈다. 질량을 무시할 수 있는 행성 하나가 중심에 놓여 있다. 이 행성은 평형(equilibrium) 상태인가? 두 별을 잇는 직선을 따른 작은 변위에 대해 안정한가? 그 직선에 수직인 방향의 변위에 대해서는 어떠한가?

3 **질량이 다른 경우.** 질량이 m_1, m_2, m_3인 세 별이 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 꼭짓점에 놓여 질량중심 G 둘레를 회전한다. m_1에 작용하는 중력이 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$임을 보여라. 여기서 P_1은 m_1의 위치이다. (*힌트:* 힘을 벡터로 쓰고 질량중심의 정의를 이용하라.) 이로부터 라그랑주의 결과를 이끌어 내라.

4 **n개의 별.** 질량이 같은 n개의 별이 반지름 R인 원에 내접하는 정n각형의 꼭짓점에 놓여 있다. 모양을 유지한 채 회전하기 위한 ω^2을 $\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$의 k에 대한 합으로 나타내라.

더 읽을거리

- **June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*** (American Mathematical Society). 상금 이야기와 푸앵카레가 혼돈을 발견한 과정을 다룬다.
- **Richard Montgomery, "A new solution to the three-body problem"**, *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001). 8자 궤도를 발견자 중 한 사람이 직접 설명한다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Florin Diacu & Philip Holmes, *Celestial Encounters*** (Princeton University Press). 삼체 문제와 혼돈의 역사를 다룬 대중서이다.

우리가 배운 것

우리는 어떤 것들은 결코 변하지 않으며, 그것이 무엇인지 아는 것이 물리학의 절반이라는 말로 시작했다. 그리고 세 가지 질문을 던졌다. 보존 법칙(conservation laws)만으로 무엇을 결정할 수 있는가, 작은 단계들은 어떻게 쌓이는가, 그리고 많은 물체를 어떻게 다룰 것인가. 이 장의 여덟 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 보존 법칙만으로 무엇을 결정할 수 있는가?

두 물체가 일직선 위에서 탄성 충돌(elastic collision)할 때에는 운동량(momentum)과 에너지가 결과를 완전히 결정하며, 우리는 이 하나의 결과를 거듭 사용했다. 그러나 물체가 더 많으면 그렇지 않다. Section 10.1에서 한 줄로 늘어선 구슬들은 두 법칙을 모두 만족하는 결과를 여러 개 가졌고, 그중 일부를 배제하려면 또 하나의 물리적 사실(구슬은 서로를 통과할 수 없다)이 필요했다. 운동량의 제곱에서 에너지를 빼면 반드시 0이 되어야 하는 교차항들의 합이 나왔고, 이 부등식(inequality) 논증으로 어떤 운동은 불가능함을 증명했다. 그리고 뉴턴(Newton)의 요람이 보이는 익숙한 움직임은 보존 법칙 너머의 세부 사항, 즉 충격이 공들을 따라 어떻게 전달되는가에 달려 있음이 드러났다.

보존 법칙은 숨은 가정을 드러내기도 했다. Section 10.3에서 대포를 한꺼번에 쏘는 쪽이 하나씩 쏘는 쪽보다 더 빠른 속력을 냈지만, 이는 오직 더 많은 에너지를 썼기 때문이었다. 올바른 양을 고정하자 결론이 뒤집혔다.

2. 작은 단계들은 어떻게 쌓이는가?

여러 절에서 하나의 간단한 단계를 되풀이했다. Section 10.2에서는 속력을 기껏해야 두 배로 만드는 충돌이, 점점 더 가벼워지는 공들의 사슬을 거치며 한없는 이득이 되었다. 이것이 농구공과 테니스공 실험, 그리고 중력 새총의 원리이다. Section 10.3에서는 수많은 작은 발사가 적분(integral)이 되었고, 그로부터 치올콥스키(Tsiolkovsky)의 로그가 나왔다. 이 로그는 로켓이 대부분 연료로 이루어진 까닭과 로켓에 단이 있는 까닭을 설명한다. Section 10.4에서는 움직이는 피스톤에 한 번 튕길 때마다 분자의 속력이 $2u$씩 늘었고, 정확한 점화식(recurrence)으로부터 속력과 길이의 곱이 거의 일정하게 유지됨이 드러났다. 이것이 단열 불변량(adiabatic invariant)이며, 압축된 기체가 뜨거워지는 이유이다. 그리고 Section 10.5에서는 무한히 많은 튕김이 유한한 시간 안에 일어났는데, 그 시간들이 수렴하는 등비급수(convergent geometric series)를 이루었기 때문이다.

3. 많은 물체를 어떻게 다룰 것인가?

좌표를 잘 고르고 대칭(symmetry)을 활용하면 된다. Section 10.6에서 질량 중심(centre of mass)은 등속으로 움직였고, 두 물체 사이의 변위는 환산 질량(reduced mass)을 가진 하나의 입자처럼 행동했다. 숨은 평면 하나가 변위의 제곱이 시간에 대한 이차식인 이유까지 설명해 주었다. Section 10.7에서는 대칭과 적분을 써서 구 껍질(spherical shell)이 내부에는 아무런 중력도 미치지 않고 외부에는 점질량처럼 작용함을 보였다. 덕분에 붕괴하는 먼지 구름을 하나의 방정식으로 다룰 수 있었고, 그로부터 별이 형성되는 속도를 정하는 자유 낙하 시간(free-fall time)을 얻었다. 그리고 Section 10.8에서는 대칭적인 추측 하나로 풀 수 없는 삼체 문제(three-body problem)의 특수한 경우를 풀었다. 이것이 라그랑주(Lagrange)의 회전하는 삼각형이며, 트로이 소행성군(Trojan asteroids)에서 실제로 나타난다.

4. 역학의 도구 상자

방법	사용한 곳
제약 조건으로서의 보존 법칙	뉴턴의 요람 (10.1)
기준계(frame) 바꾸기	충돌 (10.2); 피스톤 (10.4)
하나의 결과를 반복 적용하기	쌓아 올린 공 (10.2)
질량이 변하는 경우의 운동량	로켓 (10.3)
합에서 적분으로	로켓 방정식 (10.3); 구 껍질 (10.7)
점화식과 망원 합(telescoping)	피스톤 (10.4)
등비급수	쐐기 (10.5)
질량 중심과 환산 질량	두 물체 (10.6)
에너지 적분 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$	두 물체 (10.6); 붕괴 (10.7)
대칭적인 추측	세 별 (10.8)

다음으로

- 제11장에서는 보존에서 진동과 회전으로 넘어간다. 공명(resonance), 정규 모드(normal modes), 실제 진자, 그리고 가속하거나 회전하는 기준계에서의 운동을 다룬다.
- Section 8.2의 에너지 방법과 Section 8.4의 극한 순환(limit cycles)은 같은 아이디어를 미분방정식 쪽에서 본 것이다.
- 푸앵카레(Poincaré)가 삼체 문제에서 발견한 혼돈(chaos)은 Section 8.7의 주제이다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***: 대학 1학년 교재의 고전으로, 어렵지만 그만한 보람이 있다.
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***: 수백 개의 문제가 실려 있으며, 그중 상당수는 이 장의 문제들만큼이나 놀랍다.
- **Richard Feynman, *The Character of Physical Law***: 보존 법칙, 대칭, 중력에 관한 일반인 대상 강연집(『물리법칙의 특성』).
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***: 대칭이 왜 보존을 함의하는지 설명한다.

파인만(Feynman)은 에너지 보존에 대해 알려진 예외가 하나도 없다고 말했다. 이 장에서는 보존 법칙이 얼마나 많은 일을 할 수 있는지 보이고자 했다. 불가능한 결과를 배제하고, 숨은 불변량을 드러내고, 손쓸 수 없을 만큼 복잡한 계를 이해할 수 있는 계로 바꾸어 준다. 그러나 이 장은 그 한계도 보여 주었다. 보존 법칙은 제약을 가하지만 언제나 결과를 결정하지는 않는다. 보존 법칙이 멈추는 곳에서는 힘, 대칭, 기준계의 세부 사항이 그 뒤를 이어받아야 한다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 먼저 제대로 풀어 보아라.

10.1 뉴턴의 요람

1. 모든 충돌(collision)이 끝난 뒤에는 움직이는 입자 뒤를 더 느린 입자가 따라갈 수 없다. 따라서 정확히 하나만 움직인다면 그것은 A_n이고, $\lambda m v = m u$, $\lambda m v^2 = m u^2$는 $\lambda \neq 1$일 때 서로 모순이다. A_{n-1}과 A_n만 움직인다면 방정식은 m과 λm 사이의 충돌 방정식이 되고, 이로부터 A_{n-1}의 속도는 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u < 0$이다. 그러나 그러면 이 입자는 A_{n-2}와 부딪치게 된다. 세 입자가 움직이는 경우는 소문항 (ii)와 똑같은 방법으로 배제된다. 움직이는 두 입자는 뒤쪽으로 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$로 움직이는 A_0과, 앞쪽으로 $\frac{2u}{\lambda+1}$로 움직이는 A_n이다.

2. 질량이 같은 구슬끼리는 속도를 서로 맞바꾸므로 속력 u는 A_n까지 전달된다. 그다음 A_n이 A_{n+1}과 부딪친다. A_{n+1}은 $\frac{2u}{1+\lambda}$로 떠나고 A_n은 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$로 튕겨 나온다. 이 뒤쪽 방향의 속도는 줄을 따라 다시 A_0까지 전달되고, 이 구슬은 그 속력으로 뒤쪽으로 떠난다.

3. "두 개가 u로 튀어 나가는" 경우는 운동량(momentum) $2mu$와 에너지 mu^2를 가지며, 이는 처음과 같다. 더 이상의 충돌이 없는 또 다른 해도 있다. 마지막 세 공이 $\frac{u}{3}$, $\frac{u}{3}$, $\frac{4u}{3}$로 움직여 나가는 것이다(확인: 합계 $2u$, 제곱의 합 $2u^2$). 실제 요람 장치가 첫 번째 해를 택하는 것은 공들이 완전히 맞닿아 있지 않아서 충돌이 한 번에 한 쌍씩 일어나기 때문이다.

4. 속력은 A_n까지 전달되고, 이 구슬이 더 가벼운 A_{n+1}과 부딪친다. A_{n+1}은 $\frac{2u}{1+\lambda}$로 떠나고 A_n은 그보다 느린 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u$로 뒤따른다. 다른 것은 움직이지 않는다.

10.2 포갠 공 효과

1. 공은 $U = \sqrt{2gH}$의 속력으로 바닥에 닿고 eU로 튀어 올라 e^2H만큼 올라간다. 작은 공을 위에 올리면, eU로 올라가는 큰 공이 U로 내려오는 작은 공과 만난다. 운동량과 반발 법칙(restitution)으로부터 작은 공의 위쪽 속력은 $w = U\frac{Me(2+e)-m}{M+m}$이다. 작은 공의 중심은 $2R + r = 0.45$에서 출발하여 4.5까지 올라가므로 $\frac{w^2}{2g} = 4.05$이고

$\frac{w}{U} = \sqrt{\frac{4.05}{1.8}} = 1.5$이다. $e = \frac{2}{3}$이면 $\frac{16}{9}M - m = 1.5(M+m)$이므로 $M = 9m$이다.

2. 운동량과 반발 법칙으로부터 P_1의 속력은 $\frac{1+e}{1+\lambda}u$이다. 각 충돌은 같은 질량비로 이를 되풀이하므로 P_n은 $\left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u$로 움직인다. 속력이 s인 입자는 다음 입자와 충돌한 뒤 $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda}s$의 속력이 남고, 다음 입자는 그 자신의 다음 충돌로 $\frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}s$로 느려진다. $\lambda e < 1$일 때 첫 번째 입자가 두 번째 입자를 다시 따라잡는 것은 $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda} > \frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}$, 즉 $\lambda > e$일 때뿐이다. 따라서 $e > \lambda$이면 각 입자는 한 번 맞고 한 번 친다. $\lambda e = 1$이면 각 입자는 다음 입자와 충돌한 뒤 그 자리에 멈춘다.

3. 맨 아래 공은 U로 튀어 올라 (U로 내려오는) 가운데 공과 만난다. 상대 속력이 $2U$이므로 가운데 공은 $3U$로 떠난다. 맨 위 공은 상대 속력 $4U$로 이 공과 만나 $7U$로 떠나며, $49H$만큼 올라간다. 일반적으로 $u_{j+1} = 2u_j + U$이므로 $u_j + U = 2^j U$이다.

4. 탄성 충돌(elastic collision)은 운동에너지(kinetic energy)를 보존한다. A의 에너지는 $\frac{1}{2}m\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^{2n}u^2$이고 처음 에너지는 $\frac{1}{2}\lambda^n m u^2$이며, $\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} < 1$이므로 A는 원래 있던 것보다 더 많이 가져가지 않는다. 무거운 입자들은 각자 자기 속력의 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$만큼을 유지하며 계속 앞으로 움직이고, 나머지 에너지를 간직한다.

10.3 로켓과 대포

1. 한꺼번에 쏘면 $Mu = nm(v-u)$이므로 $u = \frac{nmv}{M+nm}$이다. 하나씩 쏘면 r번째 발사에서 $\big(M+(n-r+1)m\big)(u_r - u_{r-1}) = mv$이므로 $u_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{mv}{M+jm}$이고, 마지막 항을 제외한 모든 항이 $\frac{mv}{M+nm}$보다 크다. 따라서 $u_n > u$이다.

2. 운동량: $M(1+bx)v = MV$. 따라서 $(1+bx)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V$이므로 $x + \frac{1}{2}bx^2 = Vt$이고 $x = \frac{\sqrt{1+2bVt}-1}{b}$이다. 힘이 작용하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(M(1+bx)v\big) = Mf$로부터 $(1+bx)v = ft + V$를 얻는다. 속력이 일정한 값 c이려면 $x = ct$이고 $(1+bct)c = ft + V$이어야 하므로 $c = V$, $bV^2 = f$이다. 그렇지 않으면 $x + \frac{1}{2}bx^2 = \frac{1}{2}ft^2 + Vt$이므로 $x \sim t\sqrt{f/b}$이고 $v \to \sqrt{f/b}$이다.

3. 1단 로켓: $v\ln 10 \approx 2.30v$. 2단 로켓: $v\ln\frac{10}{5.5} + v\ln\frac{5}{0.5} \approx 0.60v + 2.30v = 2.90v$.

4. $0 \le s \le x$일 때 $\frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+s} \le 1$이다. 이를 $[0,x]$에서 적분(integrate)하면 된다.

10.4 분자 하나와 피스톤

1. 점화식(recurrence)은 연쇄적으로 소거되어 $d_n = \frac{(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$이 되므로 $v_n d_n = \frac{(v+2nu)(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$이고, 이는 $(v+u)d_1$보다 $\frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u} \to 0$만큼 크다.

2. u를 $-u$로 바꾼다. 물러나는 피스톤에서 한 번 튕길 때마다 $2u$를 잃으므로 (입자가 아직 피스톤을 따라잡을 수 있는 동안) $v_n = v - 2nu$이고, $d_n = \frac{(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$, $v_n d_n = \frac{(v-2nu)(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$이며, 이번에도 $(v-u)d_1$에 가깝다.

3. $v = u$이면 $v_n = (2n+1)u$이다. n번째 충돌에서 운동량은 $m(v_{n-1} + v_n) = 4nmu$만큼 변하고 $t_n = \frac{d_1}{un(n+1)}$이므로 평균 힘은 $\frac{4mu^2n^2(n+1)}{d_1}$로, n^3 정도의 크기이다. 각 주기에서 한 일은 대략 힘 $\times$ ut_n, 곧 약 $4nmu^2$이고, 이들을 모두 더하면 무한대가 된다. 피스톤을 끝까지 밀어 넣으려면 무한한 일이 필요하며, 이는 분자의 에너지 $\frac{1}{2}m(2n+1)^2u^2$이 한없이 커지는 것과 같다.

4. 불변량(invariant)은 $\oint p\,\mathrm{d}q = 2\int_0^h m\sqrt{2g(h-z)}\,\mathrm{d}z \propto h^{3/2}$이고, 여기서 h는 바닥으로부터 튀어 오르는 높이이다. 따라서 바닥이 천천히 올라갈 때 $h^{3/2}$(동치로 v^3, 또는 에너지와 주기의 곱)은 거의 일정하게 유지된다.

10.5 유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기

1. 사인 법칙(sine rule)에 의해 $M_1N_1 = \frac{OM_1 \sin 30^\circ}{\sin\theta}$이고, 이어지는 구간은 $\rho = \frac{\sin(\theta-30^\circ)}{\sin\theta} < 1$의 비율로 줄어든다. 전체 길이는 $\frac{M_1N_1}{1-\rho} = \frac{OM_1}{2\big(\sin\theta - \sin(\theta-30^\circ)\big)} = \frac{OM_1}{4\sin 15^\circ \cos(\theta-15^\circ)}$이다.

2. 삼각형 OM_1N_1의 각으로부터 $\varphi = \theta - \alpha$이다. 시간의 비는 $\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta-2\alpha)}{\sin 2\theta}$이고, 이 값은 정확히 $\alpha < \theta < 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$일 때 1보다 작다.

3. 쐐기를 그 벽에 대하여 반사시키면 경로가 펼쳐져 직선이 된다. 쐐기 열두 개가 O 둘레에 꼭 맞게 들어가고, O를 지나지 않는 직선은 그중 많아야 여섯 개를 가로지른다. 따라서 입자를 O 쪽으로 정확히 겨냥하지 않는 한, 입자는 유한 번만 튕긴 뒤 빠져나간다.

4. 공은 먼저 $t_0 = \sqrt{2/9.8} \approx 0.452\,\mathrm{s}$ 동안 떨어진다. 각 튀어 오름은 $2e^k t_0$ 동안 지속되므로 전체 시간은 $t_0\big(1 + \frac{2e}{1-e}\big) = 9t_0 \approx 4.07\,\mathrm{s}$이다. 이동 거리는 $1 + 2\sum_{k\ge1} e^{2k} = 1 + \frac{2(0.64)}{0.36} \approx 4.56\,\mathrm{m}$이다.

10.6 두 물체가 하나가 되다

1. 줄은 팽팽하게 유지되고 상대 속도는 줄에 수직이며 크기가 u로 일정하므로 $\theta = \frac{ut}{r}$이다. 운동량으로부터 $my + MY = mut$이다. $A = G - \frac{M}{m+M}\overrightarrow{AB}$이고 $\overrightarrow{AB} = r(\cos\theta, -\sin\theta)$이므로 $y = \frac{1}{m+M}\big(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\big)$이다. 그러면 $\dot y = \frac{u}{m+M}\big(m + M\cos\frac{ut}{r}\big)$이고, 이는 $\cos\frac{ut}{r} < -\frac{m}{M}$일 때 음수이며, 이런 일은 $M > m$이면 일어날 수 있다.

2. 이제 $\ddot z = -\frac{3}{z^3}$이므로 ($z = 1, \dot z = -1$을 이용하면) $\dot z^2 = \frac{3}{z^2} - 2$이다. $w = z^2$이라 하면 $\ddot w = 2\dot z^2 + 2z\ddot z = -4$이므로 $z^2 = 1 - 2t - 2t^2$이다. 두 물체는 $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$일 때 충돌한다.

3. $\mathbf{p} = (1,0)$, $\mathbf{q} = (-1, \sqrt{3})$이라 하면 $z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = |\mathbf{p} + \mathbf{q}t|^2$이다. 즉 $(1,0)$을 지나고 방향이 $(-1,\sqrt{3})$인 직선이며, $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}t}{1-t}$이다. 그러면 $z^2\dot\theta = |\mathbf{p}\times\mathbf{q}| = \sqrt{3}$이

다. 이 척력은 각운동량(angular momentum)이 $h = \sqrt{3}$인 평면 위 자유 운동의 "원심(centrifugal)" 항 $\frac{h^2}{z^3}$과 정확히 같다.

4. 두 별은 질량중심(centre of mass)으로부터 각각 $\frac{m_2 a}{m_1+m_2}$와 $\frac{m_1 a}{m_1+m_2}$만큼 떨어져 있다. 첫 번째 별에 대해 $\frac{G m_1 m_2}{a^2} = m_1 \omega^2 \frac{m_2 a}{m_1+m_2}$이므로 $\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}$이고 $T = \frac{2\pi}{\omega}$이다.

10.7 구 껍질 안의 중력

1. 바깥($b > a$)에서는 3단계와 같은 적분이 s에 대해 $b-a$에서 $b+a$까지 이루어지며, 그 결과는 $\frac{GM}{b^2}$이다. 속이 찬 구는 동심 구껍질들의 합집합이고, 각 껍질은 질량이 중심에 모여 있는 것처럼 작용한다.

2. $r = R\cos^2\alpha$라 하면 $\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{\tan^2\alpha}{R}$이므로 속력은 $\sqrt{2GM/R}\tan\alpha$이다. 그러면 $\mathrm{d}t = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2GM/R}\tan\alpha} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\,2\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$이다. 이를 적분한다.

3. (껍질 정리(shell theorem)에 의해) 반지름 b 안쪽의 질량, 즉 $M\frac{b^3}{a^3}$만 끌어당기므로 $\frac{GMb}{a^3}$을 얻는다. 이는 $\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$인 단진동(simple harmonic motion)이며, $a = 6.37\times10^6\,\mathrm{m}$, $GM = 3.99\times10^{14}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}}$일 때 주기는 $2\pi\sqrt{a^3/GM} \approx 84$분이다. 반지름 a에 있는 인공위성은 $\omega^2 a = \frac{GM}{a^2}$이므로 같은 ω를 가진다.

4. 그렇지 않다. $\frac{1}{s^3}$이면 피적분 함수가 더 이상 상수로 간단해지지 않고, 껍질의 가까운 쪽이 이긴다. 즉 입자는 껍질의 가장 가까운 부분 쪽으로 끌려간다. 역제곱 법칙(inverse-square law)만이 정확한 상쇄를 준다(껍질 조각의 넓이가 s^2처럼 커져서 힘의 감소를 정확히 상쇄한다).

10.8 삼각형을 이룬 세 별

1. 각 별은 중심에서 $\frac{a}{\sqrt{2}}$만큼 떨어져 있다. 이웃한 두 별은 중심 쪽으로 합계 성분 $\frac{2\gamma m^2}{a^2}\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}\gamma m^2}{a^2}$으로 끌어당기고, 맞은편 별은 $\frac{\gamma m^2}{2a^2}$으로 끌어당긴다. $\frac{\gamma m^2}{a^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = m\omega^2\frac{a}{\sqrt{2}}$로 놓으면 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$이다.

2. 중심에서는 인력들이 상쇄되므로 행성은 평형(equilibrium) 상태에 있다. 별들을 잇는 직선을 따라서는 불안정(unstable)하다. 한 별 쪽으로 거리 x만큼 움직이면 바깥쪽으로 약 $\frac{32\gamma M x}{a^3}$의 알짜힘이 생긴다. 궤도면에 수직인 방향으로는 안정(stable)하며, 복원력은 약 $\frac{16\gamma M z}{a^3}$이다. (궤도면 안에서 그 직선에 수직인 방향으로는 중력이 복원력으로 작용하지만, 회전 때문에 이 운동이 불안정한 방향과 결합된다.)

3. m_1에 작용하는 힘은 $\frac{\gamma m_1}{a^3}\big(m_2(P_2-P_1)+m_3(P_3-P_1)\big)$이다. $m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3 = (m_1+m_2+m_3)G$이므로 이 힘은 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}(G-P_1)$이다. 모든 별이 같은 상수로, G로부터의 거리에 비례하여 G 쪽으로 끌리므로, 모두가 $\omega^2 = \frac{\gamma(m_1+m_2+m_3)}{a^3}$으로 강체처럼 회전할 수 있다.

4. k칸 떨어진 별까지의 거리는 $2R\sin\frac{k\pi}{n}$이고, 그 인력은 중심 쪽으로 $\sin\frac{k\pi}{n}$의 비율만큼 성분을 가진다. 따라서 $m\omega^2 R = \frac{\gamma m^2}{4R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$이므로 $\omega^2 = \frac{\gamma m}{4R^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$이다. $n=3, R=\frac{a}{\sqrt{3}}$이면 이 값은 $\frac{3\gamma m}{a^3}$이다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

전체 13개 장 가운데 제10장. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.