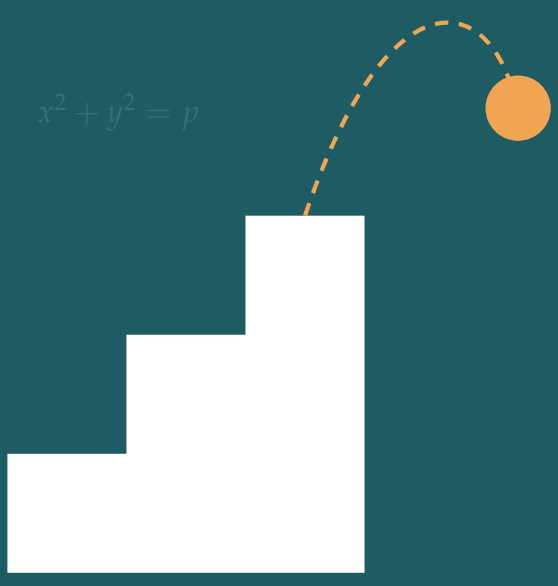
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

제9장

경우의 수와 확률



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

제9장

경우의 수와 확률

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

제9장: 경우의 수와 확률

이 PDF는 *Beyond STEP*의 전체 13개 장 가운데 제9장이다. 책 전체, 각 장의 개별 PDF, 모든 절의 인쇄용 연습지, 모든 STEP 문제의 자세한 풀이를 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 남겨 주기 바란다.

장

9

세기와 확률

세기는 존재하는 수학 가운데 가장 오래된 것이다. 그것을 영리하게 해내는 일은 지금도 가장 어려운 일 가운데 하나다.

이 장의 내용

9.1	평면을 자르는 직선	STEP II 1990
9.2	축소판 램지 정리	STEP I 1989
9.3	울타리 기둥 색칠하기	STEP II 1995
9.4	함수로서의 수열	STEP I 2016
9.5	거스름돈 만들기	STEP I 1997
9.6	이상한 주사위	STEP I 1993
9.7	같은 거듭제곱의 합	STEP I 1992
9.8	아무도 자기 셔츠를 받지 못한다	STEP II 2016
9.9	생일 문제	STEP II 2007
9.10	언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록	STEP I 2011
9.11	한 세트 모두 모으기	STEP II 1994
9.12	무작위 부분집합	STEP III 2019
9.13	조작된 주사위	STEP I 1999
A	연습문제 해답	89쪽

세기의 기술

> 조합론은 위상수학의 빈민가이다.
>
> — J. H. C. 화이트헤드(Whitehead), 1950년대. 오늘날 이런 견해를 가진 사람은 아무도 없다.

누구나 셀 수 있다. 그러나 동전으로 £1을 만드는 방법이 몇 가지인지, 열 사람을 아무도 자기 자리에 앉지 않도록 앉히는 방법이 몇 가지인지, 지도를 네 가지 색으로 칠하는 방법이 몇 가지인지 물으면 단순한 세기는 금세 무너진다. 나열하기에는 경우가 너무 많고, 경우끼리 서로 겹친다. 세기와 배열의 수학인 **조합론**(combinatorics)은 이런 문제를 나열하지 않고도 풀 수 있도록 정리하는 기술이다.

화이트헤드의 말이 보여 주듯이, 오랫동안 조합론은 진지한 학문이라기보다 영리한 요령의 모음으로 여겨졌다. 이런 인식은 20세기 후반에 바뀌었다. 한편으로는 알고리즘이 거치는 단계의 수를 세는 일 자체가 조합론의 문제인 컴퓨터 과학이 그 변화를 이끌었고, 다른 한편으로는 대수학, 기하학, 확률(probability)과의 깊은 연관이 발견되었기 때문이다. 오늘날 조합론은 수학에서 가장 활발한 분야 가운데 하나다. 2022년 허준이(June Huh)는 수학 최고의 영예인 필즈상(Fields Medal)을 받았는데, 그 업적 가운데 하나가 Section 9.3의 채색 다항식(chromatic polynomial)에 관한 1968년의 추측(conjecture)을 대수기하학(algebraic geometry)의 아이디어로 증명한 것이었다.

세기가 중요한 이유

가장 단순한 형태의 확률은 곧 세기다. 모든 결과가 똑같이 일어날 법할 때, 어떤 사건의 확률은 유리한 결과의 수를 전체 결과의 수로 나눈 값이다. 그래서 카드, 주사위, 복권에 관한 모든 질문은 세기 문제이며, 바로 이 때문에 이 장의 후반부는 확률 문제에서 가져왔다. 그러나 세기는 게임을 훨씬 넘어서는 곳에서도 중요하다. 컴퓨터 과학자는 알고리즘에 필요한 연산의 수와 알고리즘이 실패할 수 있는 경우의 수를 센다. 화학자는 분자가 가질 수 있는 구조의 수를 센다. 생물학자는 DNA 가닥이 접힐 수 있는 방법의 수를 센다. 암호학자는 공격자가 시도해야 하는 키의 수를 세고, Section 9.9에서 보듯이 무언가 두 개가 일치하기까지 몇 개가 필요한지도 센다.

대학에서 만나게 될 것

대부분의 대학은 1학년이나 2학년에 조합론 또는 이산수학(discrete mathematics) 과목을 개설하며, 그 주제는 이 장의 주제와 같다. 기본적인 세기 원리(곱의 법칙(product rule), 전단사(bijection), 포함–배제의 원리(inclusion–exclusion), 비둘기집 원리(pigeonhole principle))를 배우고, 점화식(recurrence relation)을 세우고 푸는 방법을 배운다. 수열을 함수로, 세기를 대수로 바꾸어 주는 **생성함수**(generating function)를 만나게 된다. 채색에서 램지 이론(Ramsey theory)에 이르기까지 그래프(graph)를 공부하고, 부분집합 격자(lattice of subsets) 같은 부분순서집합(partially ordered set)을 공부한다. 그리고 확률 과목에서는 같은 도구를 기댓값의 선형성(linearity of expectation)과 함께 사용하여 무작위 구조를 분석한다. 더 나아가 조합론은 대수학(대칭함수(symmetric function), 표현론(representation theory)), 정수론(분할(partition), 덧셈 조합론(additive combinatorics)), 컴퓨터 과학(알고리즘 분석, 계산 복잡도 이론(complexity theory))과 연결된다.

이 장을 관통하는 질문

세 가지 큰 질문

1. **나열하지 않고 어떻게 셀 수 있는가?** 어떤 구조(점화식, 전단사, 생성함수)가 있어야 거대한 모임을 정확하게 셀 수 있는가?
2. **언제 반드시 무언가가 일어나는가?** 언제 크기만으로 어떤 패턴, 우연의 일치, 짝이 강제되는가?
3. **세기와 확률은 서로를 어떻게 돕는가?** 언제 확률은 세기로 구하는 것이 가장 좋고, 언제 개수는 확률로 구하는 것이 가장 좋은가?

이 장은 두 부분으로 이루어진다. 앞의 일곱 절은 순수수학 문제에서 가져왔다. 점화식(평면을 자르는 직선, 울타리 기둥 칠하기)과 비둘기집 원리(램지 정리)로 시작한 다음, 생성함수를 전개하고 이를 이용해 동전의 조합을 세고, 이상한 주사위를 설계하고, 수를 거듭제곱의 합이 같은 두 팀으로 나눈다. 뒤의 여섯 절은 확률 문제에서 가져온 고전적인 세기 문제들이다. 완전순열(derangement)과 $1/e$의 등장, 생일 문제(birthday problem), 투표 문제(ballot problem)와 그 반사 원리(reflection principle), 쿠폰 수집가 문제(coupon collector problem), 무작위 부분집합, 그리고 모든 합이 똑같은 확률로 나오도록 주사위를 조작하는 것이 불가능하다는 사실을 다룬다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
9.1	평면의 영역	하나를 더 추가하면 무엇이 바뀌는가
9.2	램지 이론	비둘기집 원리
9.3	그래프 채색	연립 점화식; 채색 다항식
9.4	생성함수	수열이 함수가 된다
9.5	분할	계수를 이용한 세기
9.6	시커먼 주사위(Sicherman dice)	다항식의 인수분해
9.7	투에–모스(Thue–Morse)	중근이 균형 잡힌 합을 준다
9.8	완전순열	포함–배제의 원리; $1/e$
9.9	우연의 일치	여사건(complement); 제곱근 법칙
9.10	투표 문제	반사 원리
9.11	쿠폰 수집가 문제	기댓값의 선형성; $n \ln n$
9.12	무작위 부분집합	한 번에 원소 하나씩
9.13	조작된 주사위	산술–기하 평균 부등식(AM–GM)에 의한 불가능성

이 장을 읽는 방법

언제나 작은 경우부터 시작하라. 직선 세 개를 그려 보고, 카드 세 장을 늘어놓는 여섯 가지 순서를 나열해 보고, 5p를 만드는 방법을 세어 보라. 작은 경우는 추측의 근거가 되는 자료를 주고, 마지막에는 공식을 검산해 준다. 그러나 이유를 찾기 전까지는 패턴을 믿지 마라. Section 9.1에는 $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$로 시작하지만 다음 항이 31인 유명한 수열이 나온다.

9.1 평면을 자르는 직선

문제

STEP II 1990, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/90-s2-q4`

도입

조각의 크기가 같지 않아도 된다면, 피자를 n번 곧게 잘라 최대 몇 조각으로 나눌 수 있을까? 한 번 자르면 2조각, 두 번이면 4조각, 세 번이면 7조각(8조각이 아니다. 직접 해 보라), 네 번이면 11조각이다. 수열 $1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots$은 **게으른 요리사 수열**(*lazy caterer's sequence*)이라고 불리며, 이 문제는 그 일반항을 구하라고 한다.

이 문제는 조합론(combinatorics) 전체에 걸쳐 쓰이는 기법의 첫 수업이다. 모든 것을 한꺼번에 세려고 하지 말라. 대신 대상을 하나 더 추가할 때 무엇이 바뀌는지 물어라. 그리고 그 답은 Section 7.9에서 정다면체(Platonic solids)와 함께 만났던 오일러(Euler) 공식 $V - E + F = 2$의 특수한 경우임이 밝혀진다.

시작하기 전에

잠깐, 직접 해 보기 직선들이 일반적 위치(general position)에 있도록(어느 두 직선도 평행하지 않고, 어느 세 직선도 한 점을 지나지 않도록) 하여 $n = 1, 2, 3, 4$인 경우를 조심스럽게 그려 보라. 각 경우에 선분과 영역의 개수를 세어 보라. 규칙을 추측할 수 있는가?

다음과 같은 결과를 얻을 것이다.

n	0	1	2	3	4
선분	0	1	4	9	16
영역	1	2	4	7	11

선분의 개수는 n^2인 것처럼 보인다. 영역의 개수는 $1, 2, 3, 4$씩 늘어난다. 즉 계차가 자연수이다.

차근차근 풀기

1단계 선분 세기

생각해 보기 직선 하나에만 집중하라. 다른 직선 중 몇 개가 이 직선과 만나고, 그 직선들은 이 직선을 몇 조각으로 자르는가?

각 직선은 나머지 $n-1$개의 직선 각각과 만나고(어느 것도 이 직선과 평행하지 않으므로), 그 교점은 서로 다른 $n-1$개의 점이다(어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않으므로). 이 $n-1$개의 점은 직선을 n개의 선분으로 자른다. 양 끝의 무한한 선분 두 개와 그 사이의 유한한 선분 $n-2$개이다. 직선이 n개이므로, 모두

$$n \times n = n^2\text{개의 선분.} \qquad \blacksquare$$

이 있다. 이것은 직접 센 것이며 수학적 귀납법(induction)이 필요하지 않다. 직선 하나씩 선분을 세었을 뿐이다.

2단계 직선을 하나 더하면 어떻게 되는가?

생각해 보기 $n-1$개의 직선이 그려져 있고, 여기에 n번째 직선을 더한다고 하자. 이 직선은 다른 직선들에 의해 n개의 선분으로 잘린다. 각 선분은 자신이 지나가는 영역에 어떤 일을 하는가?

새 직선을 그으면, 그 n개의 선분은 각각 기존 영역 중 하나를 지나가면서 그 영역을 둘로 나눈다(그림 9.1.1). 한 영역에서 다른 영역으로 넘어가려면 기존 직선을 지나야 하므로, 서로 다른 선분은 서로 다른 영역에 놓인다. 따라서 n번째 직선을 더하면 영역의 개수는 정확히 n만큼 늘어난다.

$$R(n) = R(n-1) + n.$$

3단계 점화식(recurrence relation) 풀기

$R(0) = 1$(직선이 없으면 영역은 하나)에서 시작하면

$$R(n) = 1 + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

이를 귀납법으로 제시하면 다음과 같다. $\frac{1}{2}(1+1+2) = 2$이므로 $n = 1$일 때 공식이 성립한다. 그리고 $R(n-1) = \frac{1}{2}\big((n-1)^2 + (n-1) + 2\big) = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$이면 $R(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) + n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$이다. $\blacksquare$

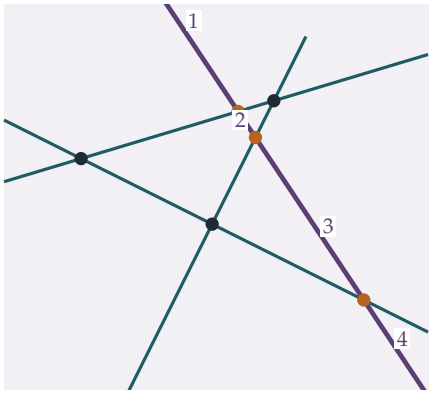


그림 9.1.1 세 직선(청록색)은 평면을 7개의 영역으로 나눈다. 네 번째 직선(자주색)은 호박색 점들에서 다른 세 직선과 만나며, 이 점들이 직선을 1부터 4까지 번호가 붙은 네 개의 선분으로 자른다. 각 선분은 영역 하나를 둘로 나누므로, 네 번째 직선은 영역을 4개 늘려 모두 11개가 된다.

돌아보기

- **한 번에 한 조각씩 세라.** 선분은 직선 하나씩 세었고, 영역은 새 직선 하나가 더하는 개수로 세었다.
- **기하학적 단계를 점화식으로 바꾸라.** "새 선분 하나가 영역 하나를 나눈다"는 관찰이 $R(n) = R(n-1) + n$이 되었다.
- **일반적 위치가 중요하다.** 평행한 직선이 있거나 세 직선이 한 점을 지나면 영역이 더 적어진다. 각 가정이 어디에서 쓰였는지 찾아보라.

숨은 수학

변장한 오일러 공식

여기 두 번째 증명이 있다. 이 증명은 답을 단지 유도하는 데 그치지 않고 설명해 준다. 직선들의 배치를 하나의 지도로 생각하자. 교점은 **꼭짓점**(*vertex*), 선분은 **변**(*edge*), 영역은 **면**(*face*)이다. 꼭짓점은 $V = \binom{n}{2}$개(직선 두 개의 쌍마다 하나), 변은 $E = n^2$개이다. 무한한 선분은 끝점이 하나뿐이므로, 이들이 모두 만나는 "무한대" 꼭짓점 하나를 추가한다. 그러면 이 그림은 구 위에 그려진 지도가 된다(평면으로 공을 감싸고 무한대가 꼭대기에 있다고 상상하라). Section 7.9의 오일러 공식 $V - E + F = 2$에 의해

$$\left(\binom{n}{2} + 1\right) - n^2 + F = 2, \qquad \text{따라서} \qquad F = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

완전히 다른 방향에서 같은 수가 나온다. 영역들은 종류별로도 깔끔하게 나뉜다. 그중 $2n$개는 유계가 아니고(이웃한 무한 반직선 쌍마다 하나), 나머지 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)-2n=\binom{n-1}{2}$개는 유계이다.

이항계수와 고차원

공식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2},$$

그리고 이것은 우연이 아니다. 어떤 직선도 수평이 되지 않도록 그림을 돌리자. 아래로 유계인 영역에는 가장 낮은 점이 있는데, 이 점은 교점이어야 하고, 각 교점은 정확히 한 영역(그 바로 위의 영역)의 가장 낮은 점이다. 이로써 직선 쌍마다 하나씩 $\binom{n}{2}$개의 영역을 얻는다. 나머지 영역은 모두 아래로 끝없이 뻗어 있으므로, 모든 교점보다 훨씬 아래에 그은 수평선과 만난다. n개의 직선은 그 수평선을 $n+1$개의 구간으로 자르고, 그러한 영역마다 구간이 하나씩 있다. 모두 합하면 $\binom{n}{2}+n+1$이다. 3차원에서는 일반적 위치에 있는 n개의 평면이 공간을

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

개의 조각(**케이크 수**(*cake numbers*) $1,2,4,8,15,26,\ldots$)으로 자르며, 이 규칙은 모든 차원에서 계속된다. 증명은 같은 귀납법이다. 새 평면은 다른 평면들에 의해 평면 위의 직선들처럼 배열된 영역들로 잘리고, 그 영역 각각이 공간의 한 조각을 둘로 나눈다.

슈타이너와 초평면 배열

직선과 평면으로 잘린 영역의 개수에 대한 공식은 1826년 슈타이너(Jakob Steiner)가 발견했다. 오늘날 이 공식은 **초평면 배열**(*hyperplane arrangements*) 이론의 출발점이다. 이 이론은 일반적 위치가 아닌 경우를 포함하여, 직선, 평면, 그리고 이들의 고차원 유사물을 임의로 모아 놓았을 때 생기는 영역의 개수를 센다. 1975년 Thomas Zaslavsky의 놀라운 정리는 어떤 초평면들이 만나는지를 담고 있는 다항식을 이용하여 임의의 배열의 영역 개수를 센다. 같은 아이디어가 기계 학습에도 나타난다. "ReLU" 단위로 만든 신경망은 입력 공간을 초평면으로 잘라 영역들로 나누며, 그 영역의 개수는 신경망이 나타낼 수 있는 함수가 얼마나 복잡한지를 가늠하는 척도가 된다.

사고 기술

하나를 더 추가하면 무엇이 바뀌는지 물어라

n개의 대상으로 이루어진 배치를 세려면, $n-1$개로 이루어진 배치와 비교하라. 변화량은 전체보다 훨씬 세기 쉬운 경우가 많다.

이것은 증명만을 위해서가 아니라 발견의 도구로 쓰이는 귀납법이다. 조합론에서 가장 흔한 수법 중 하나이며, 기하학적 질문을 풀 수 있는 점화식으로 바꾸어 준다.

더 도전하기

1 **원.** 어느 두 원도 두 점에서 만나고 어느 세 원도 한 점을 지나지 않는 n개의 원이 평면을 n^2-n+2개의 영역으로 나눔을 보여라.

2 **평행선.** n개의 직선 중 k개가 모두 서로 평행하다면(그 밖에는 일반적 위치), 영역은 몇 개인가?

3 **케이크 수.** 일반적 위치에 있는 n개의 평면이 공간을 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$개의 영역으로 나눔을 귀납법으로 증명하라.

4 **깨지는 규칙.** 원 위에 n개의 점을 놓고 모든 쌍을 현으로 잇되, 원 내부의 한 점을 세 현이 지나지 않도록 하라. $n=1,2,3,4,5$일 때 영역은 $1,2,4,8,16$개이다. $n=6$일 때 영역의 개수를 세어 보라. (**힌트:** 오일러 공식을 이용하라. 네 점의 집합마다 교점이 하나씩 생긴다.) 그 개수가 $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley), 1장. 바로 이 문제와 그 변형인 "피자" 문제, "지그(zig)" 문제로 시작한다.
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 친절한 입문 교재로, 귀납법, 그래프, 오일러 공식을 다루는 장이 있다.
- **Richard Guy, "The strong law of small numbers"**, *American Mathematical Monthly* 95 (1988). 당연해 보이지만 거짓으로 밝혀지는 여러 규칙을 소개하며, 연습 문제의 원 문제도 포함되어 있다.

9.2 축소판 램지 정리

문제

STEP I 1989, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/89-s1-q4`

도입

여섯 사람이 모인 파티에서는 언제나 서로 모두 아는 세 사람이 있거나, 서로 모두 모르는 세 사람이 있다. 여섯 사람이 누구이든 이것은 반드시 성립한다. 다섯 사람이라면 그렇지 않다. 이 작은 사실은 **램지 정리**(Ramsey's theorem)의 첫 번째 경우이며, 현대 조합론 전체를 관통하는 원리 하나를 담고 있다. 그것은 **완전한 무질서는 불가능하다**는 것이다. 충분히 큰 구조는 어떻게 색칠하거나 배열하든 반드시 고도로 질서 잡힌 부분을 포함한다.

증명은 네 줄이면 된다. 그러나 당연히 이어지는 질문(서로 모두 아는 네 사람이나 서로 모두 모르는 네 사람을 보장하려면 몇 명이 필요할까? 다섯 사람이라면?)은 수학에서 가장 어려운 미해결 문제 몇 가지로 이어진다.

시작하기 전에

생각해 보기 여섯 개의 점은 어떤 쌍이 어떤 색으로 이어져 있는지를 통해서만 의미를 가진다. 기하학적 배치는 주의를 흐트러뜨릴 뿐이다. 선분은 모두 몇 개이고, 각 점에서 나가는 선분은 몇 개인가?

선분은 $\binom{6}{2} = 15$개이고, 각 점에서 5개가 나간다. (일반적 위치(general position) 조건은 단지 어느 세 점이든 진짜 삼각형을 이루도록 보장할 뿐이다. 이 문제는 사실 꼭짓점이 여섯 개인 **완전 그래프**(complete graph) K_6의 변을 두 가지 색으로 칠하는 문제이다.)

차근차근 풀기

1단계 선분 다섯 개, 색 두 가지

> **생각해 보기** A에서 다섯 개의 선분이 나가고, 각각은 금색이거나 은색이다. 이들의 색에 대해 확실히 말할 수 있는 것은 무엇인가?

그중 적어도 세 개는 같은 색이다. 금색이 많아야 두 개이고 은색도 많아야 두 개라면, 선분은 많아야 네 개일 것이기 때문이다. 이것이 **비둘기집 원리**(pigeonhole principle)이다. 다섯 개의 물건을 두 상자에 넣으면 어느 한 상자에는 적어도 세 개가 들어간다. (필요하면 두 색의 이름을 서로 바꾸어) AB, AC, AD가 모두 금색이라고 하자.

2단계 반대쪽 끝을 보라

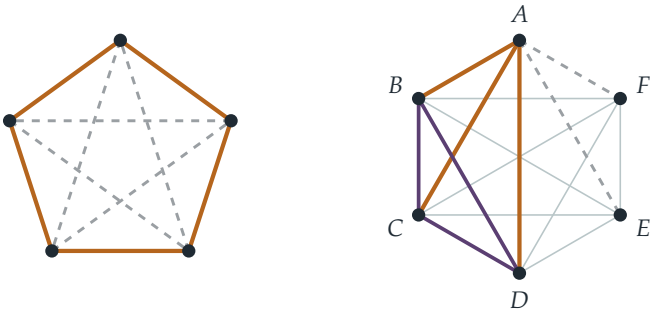
> **생각해 보기** 이제 삼각형 BCD를 보자. 이 삼각형의 변 중 하나라도 금색이면 어떻게 되는가? 하나도 금색이 아니면 어떻게 되는가?

삼각형 BCD의 변 중 하나, 예를 들어 BC가 금색이면 ABC는 세 변 AB, AC, BC가 모두 금색이다. BCD의 어느 변도 금색이 아니면 BC, CD, DB가 모두 은색이므로 BCD는 은색 삼각형이다. 어느 쪽이든 단색 삼각형이 존재한다(그림 9.2.1의 오른쪽). ■

3단계 다섯 점으로는 부족하다

> **생각해 보기** 점이 다섯 개이면 각 점에는 선분이 네 개뿐이다. 각 점마다 두 색이 정확히 두 개씩 되도록 어떻게 칠할 수 있을까?

다섯 점을 정오각형 모양으로 놓는다(일반적 위치를 원한다면 점들을 평면에서 살짝 들어 올린다). 오각형의 다섯 변을 금색으로, 다섯 대각선을 은색으로 칠한다(그림 9.2.1의 왼쪽). 금색 변들은 길이 5인 순환(cycle)을 이루므로 삼각형을 포함하지 않는다. 은색 변들은 오각별을 이루는데, 이것도 길이 5인 순환이므로 삼각형을 포함하지 않는다. 따라서 단색 삼각형은 없다. ■



다섯 점: 단색 삼각형 없음　　여섯 점: BCD를 보라

그림 9.2.1 왼쪽: 다섯 점에서 오각형을 금색(실선)으로, 오각별을 은색(점선)으로 칠하면 단색 삼각형이 없다. 오른쪽: 여섯 점에서는 A에서 나가는 다섯 선분 중 세 개가 같은 색이며, 이를테면 B, C, D로 가는 선분이 금색이다. 그러면 삼각형 BCD(자주색)가 결론을 정한다. 금색 변이 하나라도 있으면 A와 함께 금색 삼각형을 이루고, 금색 변이 없으면 BCD가 은색 삼각형이 된다.

돌아보기

- **관계없는 것을 걷어 내라.** 공간의 점들은 색칠된 그래프가 되었고, 중요한 것은 변의 색뿐이었다.
- **비둘기집.** 변 다섯 개와 색 두 가지가 같은 색 세 개를 강제했다.
- **알맞은 대상에 대한 경우 나누기.** 금색 변 세 개를 찾고 나자, 그 반대쪽 끝이 이루는 삼각형이 모든 것을 결정했다.
- **최선성.** 오각형은 여섯이라는 수를 더 줄일 수 없음을 보여 준다. 좋은 정리에는 그것이 최선임을 보여 주는 예가 함께 따른다.

숨은 수학

램지 수

램지 수(Ramsey number) $R(s,t)$는 K_N의 변을 금색과 은색으로 어떻게 칠하든 금색 K_s(s개의 점으로 이루어진 집합으로, 그 사이의 변이 모두 금색인 것)나 은색 K_t가 반드시 포함되도록 하는 가장 작은 N이다. 이 문제는 $R(3,3) = 6$임을 보였다. 여섯 점이면 언제나 성립하고, 오각형은 다섯 점으로는 성립하지 않음을 보여 준다.

프랭크 램지(Frank Ramsey)는 1928년에 이 수들이 항상 존재함을, 즉 모든 s와 t에 대해 조건을 만족하는 N이 있음을 증명했다. 그 증명은 위의 논증을 일반화한 귀납법(induction)이

며, $R(s,t) \le R(s-1,t) + R(s,t-1)$임을 보여 준다. 그러나 정확한 값을 구하는 것은 엄청나게 어렵다.

$$R(3,3) = 6, \qquad R(4,4) = 18, \qquad 43 \le R(5,5) \le 46.$$

$R(4,4)$의 값은 1955년에 밝혀졌다. 막대한 컴퓨터 탐색에도 불구하고 $R(5,5)$는 아직 알려지지 않았으며, 상계 46도 2024년에야 증명되었다. 컴퓨터로 K_{43}의 모든 색칠을 하나하나 확인할 수는 없다. 그런 색칠은 2^{903}가지로, 우주에 있는 원자의 수보다 훨씬 많다.

에르되시와 외계인

램지 이론을 발전시키는 데 누구보다 많은 일을 한 폴 에르되시(Paul Erdős)는 이런 이야기를 즐겨 했다. 외계인이 지구를 침공해, $R(5,5)$의 값을 알려 주지 않으면 지구를 파괴하겠다고 위협한다고 하자. 우리는 모든 컴퓨터와 수학자를 총동원해야 하며, 그러면 그 값을 찾아낼 수도 있다. 하지만 그들이 $R(6,6)$을 요구한다면, 우리는 외계인을 무찌르려고 해야 한다. 에르되시는 또한 1947년에 놀라운 방법으로 $R(k,k) > 2^{k/2}$임을 증명했다. 그는 점이 $2^{k/2}$개보다 적은 그래프를 **무작위로** 색칠하면 단색 K_k를 포함하지 않을 확률이 양수임을 보였다. 따라서 아무도 그것을 만드는 방법을 모르더라도 좋은 색칠은 반드시 존재한다. 이 **확률론적 방법**(probabilistic method)은 오늘날 조합론에서 가장 강력한 도구 가운데 하나이다.

혼돈 속의 질서

램지 정리에는 친척이 많으며, 모두 같은 생각, 즉 충분히 큰 구조는 질서를 피할 수 없다는 생각을 표현한다. **판 데르 베르던 정리**(van der Waerden's theorem)는 자연수를 유한 개의 색으로 칠하면 한 가지 색으로 이루어진 등차수열(arithmetic progression)이 얼마든지 긴 것이 존재한다고 말한다. **에르되시-세케레시 정리**(Erdős–Szekeres theorem)는 서로 다른 n^2+1개의 수로 이루어진 수열은 길이가 $n+1$인 증가하는 부분수열(subsequence)이나 감소하는 부분수열을 포함한다고 말한다. 그리고 램지 자신은 논리학의 질문에 관심이 있었다. 그는 논리적 명제의 참거짓을 판정하는 문제에 관한 논문에서 보조정리(lemma)로서 자신의 정리를 증명했다.

사고 기술

비둘기집 원리

kn개보다 많은 물건을 n개의 상자에 넣으면, 어떤 상자에는 k개보다 많은 물건이 들어 있다.

이 원리는 자명하지만, 잘 쓰는 것은 하나의 기술이다. 핵심은 무엇을 물건으로, 무엇을 상자로 삼을지 고르는 데 있다. 여기서는 한 점에서 나가는 다섯 변이 물건이었고, 두 가지 색이 상자였다. 대학에서 비둘기집 논법은 정수론(무리수를 분수로 근사하기), 해석학(볼차노-바이어슈트라스 정리(Bolzano–Weierstrass theorem)), 그리고 조합론 전반에 등장한다.

더 도전하기

1 **적어도 두 개.** K_6를 두 가지 색으로 어떻게 칠하든 사실은 단색 삼각형이 적어도 **두 개** 있음을 보여라. (**힌트:** "이색 각", 즉 한 꼭짓점을 공유하면서 색이 서로 다른 변의 쌍을 세어라. 금색 변 g개와 은색 변 $5-g$개를 가진 점은 그런 각 $g(5-g) \leq 6$개의 꼭짓점이다. 단색이 아닌 삼각형은 각각 그런 각을 정확히 두 개 포함한다.)

2 **세 가지 색.** K_{17}의 변을 세 가지 색으로 칠하면 단색 삼각형이 있음을 보여라. (**힌트:** 어떤 점에는 같은 색의 변이 적어도 여섯 개 있다.)

3 **셋 또는 넷.** $R(3,4) \leq 10$임을 보여라. 즉 K_{10}을 금색과 은색으로 어떻게 칠하든 금색 삼각형이나 은색 K_4가 있다. (**힌트:** 한 점에는 금색 변이 적어도 4개 있거나 은색 변이 적어도 6개 있다.) 실제로는 $R(3,4) = 9$이다.

4 **단조 부분수열.** $n = 2$일 때 에르되시-세케레시 정리를 증명하여라. 즉 서로 다른 5개의 수로 이루어진 수열은 길이가 3인 증가하는 부분수열이나 감소하는 부분수열을 포함한다. 둘 다 포함하지 않는, 길이가 4인 수열을 찾아라.

더 읽을거리

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 비둘기집 원리와 램지 이론을 다룬 장.
- **Ronald Graham & Joel Spencer, "Ramsey theory"**, *Scientific American* (1990년 7월). 두 선도적 연구자가 쓴 대중적인 입문 글.
- **Noga Alon & Joel Spencer, *The Probabilistic Method*** (Wiley). 에르되시의 방법을 다룬 표준 교재로, 첫 장은 읽기 쉽다.
- **Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers*** (Fourth Estate). 에르되시의 전기.

9.3 울타리 기둥 색칠하기

문제

STEP II 1995, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/95-s2-q2`

도입

일렬로 늘어선 기둥을 칠하는 것은 쉽다. 첫 번째 기둥은 3가지, 나머지 기둥은 각각 2가지(바로 앞 기둥의 색만 아니면 된다)를 고를 수 있으므로 $3 \times 2^{n-1}$가지이다. 그런데 이 줄을 구부려 원으로 만들면 문제는 뜻밖에 까다로워진다. 이제 마지막 기둥은 이웃한 기둥뿐 아니라 첫 번째 기둥과도 색이 달라야 하는데, 이 조건 때문에 배제되는 색이 하나인지 없는지는 앞에서 일어난 모든 일에 따라 달라지기 때문이다.

이 문제는 고전적인 기법으로 이 어려움을 피해 간다. 마지막 기둥의 색에 따라 경우를 나누어 세고, 각 경우가 서로 어떻게 이어지는지 찾는 것이다. 답 $2^n + 2(-1)^n$은 **채색 다항식**(chromatic polynomial)의 첫 번째 예로, 4색 정리(four colour theorem)의 바탕에 있는 수학의 일부이다.

시작하기 전에

잠깐, 직접 해 보기 원 모양으로 놓인 기둥 3개와 4개를 칠하는 방법의 수를 세어 보아라. $3 \times 2^{n-1}$은 실제보다 많이 세는가? 그렇다면 얼마나 많이 세는가?

원 모양으로 놓인 기둥 세 개는 모두 서로 이웃하므로 세 가지 색을 모두 다르게 써야 한다. 따라서 $3! = 6$가지이다. 원 모양으로 놓인 기둥 네 개는 18가지이다(마지막에 확인할 수 있다). 일렬로 놓인 경우의 $3 \times 2^2 = 12$, $3 \times 2^3 = 24$와 비교해 보라. 원에서는 마지막 기둥이 첫 번째 기둥과 같은 색인 칠하기가 빠진다.

차근차근 풀기

1단계 두 종류의 칠하기

생각해 보기 기둥 $n+1$개를 첫 번째와 마지막 기둥이 빨간색이 되도록 칠한 것을 하나 생각하자. 마지막 기둥을 없애면, 남은 처음 n개 기둥의 칠하기에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

기둥 n은 빨간색인 기둥 $n+1$과 이웃하므로, 기둥 n은 빨간색이 아니다. 기둥 $n+1$을 없애면 첫 번째 기둥은 빨간색이고 마지막 기둥은 빨간색이 아닌 n개 기둥의 칠하기, 곧 s_n가지 칠하기 중 하나가 남는다. 거꾸로, s_n가지 칠하기 중 어느 것이든 기둥 $n+1$을 빨간색으로 칠하는 단 한 가지 방법으로 확장할 수 있다. 따라서 두 집합은 정확히 일대일로 대응하고, $r_{n+1} = s_n$이다.

생각해 보기 $r_n + s_n$은 무엇인가?

첫 번째 기둥이 빨간색인 칠하기에서 마지막 기둥은 빨간색이거나 빨간색이 아니므로, $r_n + s_n$은 첫 번째 기둥이 빨간색인 n개 기둥의 칠하기 전체의 수이다. 첫 번째 기둥 다음의 각 기둥은 2가지씩 고를 수 있으므로 $r_n + s_n = 2^{n-1}$이다. 따라서

$$r_{n+1} + r_n = s_n + r_n = 2^{n-1}. \qquad \blacksquare$$

2단계 귀납법으로 구하는 공식

$n = 1$이면 기둥이 하나이고 빨간색으로 칠하므로 $r_1 = 1$이며, 공식도 $\frac{1}{3}(1+2) = 1$을 준다. 공식이 r_n에 대해 성립한다고 가정하자. 그러면

$$r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n = 2^{n-1} - \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} = \frac{2 \cdot 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1}}{3} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3},$$

이고, 이것은 r_{n+1}에 대한 공식이다. 따라서 수학적 귀납법(induction)에 의해 공식이 성립한다. $\blacksquare$

잠깐, 직접 해 보기 이 공식은 어디에서 나왔을까? 점화식(recurrence) $r_{n+1} + r_n = 2^{n-1}$은 미분방정식(differential equation)과 비슷하다. 즉 "특수해(particular solution)" $c \cdot 2^n$에 $r_{n+1} + r_n = 0$을 만족하는 "여함수(complementary function)" $A(-1)^n$을 더한 꼴이다. c와 A를 구하여라.

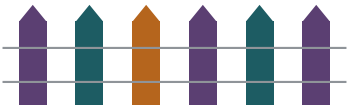
3단계 원

생각해 보기 n개의 기둥이 놓인 원에서 기둥 1의 색을 빨간색으로 고정하자. 이제 기둥 n과 기둥 1 사이에서 원을 끊어 일직선으로 펴자. 일렬로 놓인 기둥의 칠하기 중 어느 것이 올바른 원의 칠하기에 대응하는가?

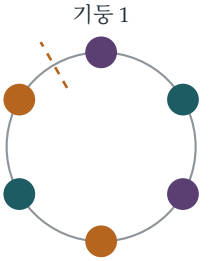
원을 펴면 빨간색으로 시작하는 n개 기둥의 줄이 되는데, 이때 마지막 기둥은 기둥 1과도 색이 달라야 한다. 즉 마지막 기둥은 빨간색이 아니다. 이것이 바로 s_n가지 칠하기이다. 기둥 1은 3가지 색 중 어느 것이든 될 수 있으므로, 원의 칠하기의 수는

$$3s_n = 3(2^{n-1} - r_n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} = 2^n + 2(-1)^n. \qquad \blacksquare$$

검산: $n = 3$이면 $8 - 2 = 6$이고, $n = 4$이면 $16 + 2 = 18$이다.



일렬로 놓인 기둥: $3 \times 2^{n-1}$



원 모양: $2^n + 2(-1)^n$

그림 9.3.1 왼쪽: 일렬로 놓인 경우, 첫 번째 다음의 각 기둥은 바로 앞 기둥과 색이 다르기만 하면 된다. 오른쪽: 원 모양인 경우, 마지막 기둥은 기둥 1과도 색이 달라야 한다. 점선에서 원을 끊으면 원의 칠하기는 첫 번째 기둥과 마지막 기둥의 색이 다른 일렬 칠하기, 곧 문제에서 센 s_n가지 칠하기 중 하나가 된다.

돌아보기

- **서로 이어지는 경우로 나누기.** 마지막 기둥이 빨간색인지를 기록하자 두 수열 r_n과 s_n이 생겼고, 이들은 간단한 점화식으로 연결되었다.
- **전단사(bijection).** $r_{n+1} = s_n$은 계산이 아니라 칠하기를 일대일로 짝지어 증명하였다.
- **원을 끊기.** 원형 문제가 양 끝에 조건이 붙은 일렬 문제로 바뀌었다.

숨은 수학

채색 다항식

기둥과 그 이웃 관계는 **그래프**(graph)를 이룬다. 일렬로 놓인 경우는 경로(path), 원 모양인 경우는 사이클(cycle)이다. **적절한 색칠**(proper colouring)이란 이웃한 꼭짓점에 서로

다른 색을 칠하는 것이다. k가지 색으로 하는 적절한 색칠의 수는 k에 대한 다항식이며, 이를 그래프의 **채색 다항식**이라 한다. 이 개념은 1912년 조지 버코프(George Birkhoff)가 도입하였다. 문제의 논증을 k가지 색으로 반복하면

$$\text{경로: } k(k-1)^{n-1}, \qquad \text{사이클: } (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

을 얻는다. $k=3$이면 사이클의 공식은 $2^n + 2(-1)^n$이다. 버코프는 모든 지도의 그래프의 채색 다항식이 $k=4$에서 양수임을 보여 4색 정리(모든 지도는 이웃한 나라끼리 색이 다르도록 네 가지 색으로 칠할 수 있다)를 증명하고자 했다. 이 접근법은 끝내 성공하지 못했고, 4색 정리는 1976년에 케네스 아펠(Kenneth Appel)과 볼프강 하켄(Wolfgang Haken)이 컴퓨터의 대대적인 도움을 받아 마침내 증명하였다. 채색 다항식은 지금도 활발한 연구 분야이며, 통계물리학과 놀라운 연관이 있는데, 그곳에서는 자성에 관한 **포츠 모형**(Potts model)으로 나타난다.

행렬로 같은 수 세기

7장의 선형대수를 이용하여 답을 보는 다른 방법도 있다. $\mathbf{M}$을 대각성분이 0이고 나머지 성분이 1인 3×3 행렬이라 하자. 즉 색 j가 색 i 다음에 올 수 있을 때 (i,j) 성분이 1이다. 그러면 $\mathbf{M}^{n-1}$의 (i,j) 성분은 색 i로 시작하여 색 j로 끝나는 일렬 칠하기의 수이므로, r_n은 $\mathbf{M}^{n-1}$의 대각성분이다. 원의 칠하기는 n걸음 후에 출발점으로 돌아오는 수열이므로, 원의 칠하기의 수는 $\mathbf{M}^n$의 **대각합**(trace)이다. 모든 성분이 1인 행렬 $\mathbf{J}$에 대해 $\mathbf{M} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$이므로, $\mathbf{M}$의 고유값(eigenvalue)은 $3-1=2$(고유벡터(eigenvector) $(1,1,1)$)와 -1(중복도 2)이고, $\mathbf{M}^n$의 대각합은 고유값의 n제곱의 합이다.

$$\operatorname{tr}\mathbf{M}^n = 2^n + (-1)^n + (-1)^n = 2^n + 2(-1)^n.$$

이 **전달 행렬**(transfer matrix) 방법은 한 단계씩 쌓아 올리는 배열의 수를 세는 데 조합론과 통계물리학 전반에서 쓰인다.

사고 기술

연립 점화식 세우기

하나의 수열만으로는 간단한 점화식을 만족하지 않을 때, 약간의 추가 정보(여기서는 마지막 기둥의 색)를 기록하고 각 경우를 연결하는 점화식을 찾는다.

이것이 **상태**(state)라는 개념이다. 다음 단계로 나아가는 데 꼭 필요한 정보만, 그 이상은 아무것도 기록하지 않는 것이다. 이는 컴퓨터 과학의 동적 계획법(dynamic programming), 확률론의 마르코프 연쇄(Markov chain)(Section 12.16), 그리고 전

달 행렬 방법의 기초이다.

더 도전하기

1 **k가지 색.** k가지 색으로 문제를 반복하여라. $r_{n+1} = s_n$이 여전히 성립하고 $r_{n+1} + r_n = (k-1)^{n-1}$임을 보이고, r_n을 구한 다음, 사이클의 채색 다항식 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$을 이끌어 내어라.

2 **빨간색끼리 이웃하지 않기.** 일렬로 놓인 n개의 기둥을 이웃한 두 기둥이 모두 빨간색이 되는 일이 없도록 빨간색 또는 흰색으로 칠하는 방법은 몇 가지인가? (피보나치 수(Fibonacci numbers)가 나올 것이다.)

3 **바퀴.** 원의 모든 기둥과 이웃하는 가운데 기둥을 하나 더하자("바퀴(wheel)"). 이것을 4가지 색으로 칠하는 방법은 몇 가지인가? (**힌트**: 가운데 기둥이 한 가지 색을 쓰고, 원은 나머지 세 가지 색을 써야 한다.)

4 **목걸이.** 원의 두 칠하기 중 하나가 다른 하나를 회전한 것일 때 같은 것으로 본다면, $n = 4$일 때 서로 다른 칠하기는 몇 가지인가? $n = 5$일 때는? (이것이 **번사이드 보조정리**(Burnside's lemma)의 출발점이다.)

더 읽을거리

- **Robin Wilson, *Introduction to Graph Theory*** (Pearson). 그래프 이론 입문. 표준적인 첫 강의 교재로, 색칠과 4색 문제를 다룬다.
- **Robin Wilson, *Four Colours Suffice*** (Penguin). 네 가지 색이면 충분하다. 일반 독자를 위한 4색 정리 이야기이다.
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (온라인 무료 공개). 생성함수론. 점화식과 그 풀이 방법을 다루며, 전달 행렬 방법도 포함한다.

9.4 함수로서의 수열

문제

STEP I 2016, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s1-q8`

도입

계산기로 $1/89$를 계산해 보자: $0.011235955\ldots$. 숫자들이 $0, 1, 1, 2, 3, 5$로 시작하는데, 이것은 피보나치 수(Fibonacci numbers)이다. 우연일까? 우연이 아니며, 이 문제가 그 이유를 설명해 준다.

이 아이디어는 조합론(combinatorics)에서 가장 강력한 것 가운데 하나이다. 무한수열(infinite sequence)을 하나 잡아, 그 항들을 멱급수(power series)의 계수로 사용하여 하나의 함수로 묶는다. 그러면 수열에 관한 사실이 함수에 관한 사실이 되고, 여기에 대수와 미적분을 사용할 수 있다. Herbert Wilf는 이를 인상적으로 표현했다: "생성함수(generating function)는 수열을 걸어 놓고 보여 주는 빨랫줄이다."

시작하기 전에

생각해 보기 생성함수가 $\dfrac{1}{1-x}$인 수열은 무엇인가? $\dfrac{1}{1-2x}$는 어떤가? 생성함수에 x를 곱하면 수열은 어떻게 되는가?

등비급수(geometric series) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$는 $1, 1, 1, \ldots$의 생성함수이고, $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + \cdots$는 2의 거듭제곱들의 생성함수이다. x를 곱하면 모든 항이 한 자리씩 뒤로 밀린다: $x \cdot \frac{1}{1-x} = x + x^2 + \cdots$는 $0, 1, 1, 1, \ldots$의 생성함수이다.

차근차근 풀기

1단계 자연수와 삼각수

생각해 보기 이항급수(binomial series)로 $(1-x)^{-2}$를 전개하라. x^n의 계수는 무엇인가?

이항급수에 의해

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n,$$

이므로 $x(1-x)^{-2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \sum nx^n$이다. 이것이 $u_n = n$의 생성함수이다.

마찬가지로 $(1-x)^{-3}$에서 x^n의 계수는 $\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$이므로

$$x(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 1} \frac{n(n+1)}{2}\, x^n = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \cdots,$$

이고, 이것이 삼각수(triangle numbers) $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$의 생성함수이다.

생각해 보기 n^2을 n과 $\frac{1}{2}n(n+1)$로 어떻게 나타낼 수 있는가?

$n^2 = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n$이고, 생성함수는 수열과 똑같이 더해지므로

$$\sum n^2x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}. \qquad \blacksquare$$

2단계 점화식이 방정식이 된다

생각해 보기 $u_n = ku_{n-1}$에 x^n을 곱하고 모든 $n \geq 1$에 대하여 더하라. 각 변을 f로 나타내면 무엇인가?

좌변은 $\sum_{n\geq 1} u_n x^n = \mathrm{f}(x) - u_0 = \mathrm{f}(x) - a$이다. 우변은 $kx\sum_{n\geq 1} u_{n-1}x^{n-1} = kx\,\mathrm{f}(x)$이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = a + kx\,\mathrm{f}(x)$이고,

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a}{1-kx}. \qquad \blacksquare$$

물론 $u_n = ak^n$이다. $\frac{a}{1-kx}$를 등비급수로 전개하면 이를 확인할 수 있다.

3단계 피보나치 수

$n \geq 2$에 대하여 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$에도 같은 일을 한다:

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = x\sum_{n\geq 2} u_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} u_{n-2}x^{n-2},$$

즉,

$$\mathrm{f}(x) - u_0 - u_1 x = x\big(\mathrm{f}(x) - u_0\big) + x^2\,\mathrm{f}(x).$$

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$이므로 이 식은 $\mathrm{f}(x) - x = x\,\mathrm{f}(x) + x^2\,\mathrm{f}(x)$가 되고, 따라서

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \qquad \blacksquare$$

4단계 $1/89$**의 설명**

> **잠깐, 직접 해 보기** 수렴(convergence)은 무시하고(여기서는 괜찮다: 이 급수는 $|x| < 0.618$에서 수렴한다), f에 $x = \frac{1}{10}$을 대입하라. 무엇을 얻는가?

$$\frac{1}{10}F_1 + \frac{1}{100}F_2 + \frac{1}{1000}F_3 + \cdots = \mathrm{f}\Big(\frac{1}{10}\Big) = \frac{1/10}{1 - 1/10 - 1/100} = \frac{10}{89}.$$

10으로 나누면 $\frac{1}{89} = \sum F_n/10^{n+1}$이다. 피보나치 수들이 소수점 아래 연속된 자리에 차례로 놓이고, 9보다 커지면 서로 겹친다(그림 9.4.1). $1/89$의 앞쪽 숫자들에는 피보나치 수가 보이지만, 뒤쪽 숫자들은 자리올림(carrying) 때문에 흐려진다.

```
0.  1
0.    1
0.      2
0.        3
0.          5
0.            8
0.            1 3
0.              2 1
0.                3 4
0.                  5 5
 ⋮
0. 0 1 1 2 3 5 9 5 5 0 5
```

그림 9.4.1 $n = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여 $F_n/10^{n+1}$을 더한다. 각 피보나치 수는 앞의 것보다 소수점 아래 한 자리 더 오른쪽에서 끝난다. 두 자리 수가 되면 서로 겹치고, 자리올림 때문에 일곱째 자리부터 숫자가 바뀐다: $\frac{1}{89} = 0.01123595505\ldots$.

돌아보기

- **수열을 함수로 바꾼다.** 무한수열 전체가 하나의 유리함수(rational function)가 되었다.

- **점화식(recurrence)이 방정식이 된다.** x^n을 곱하고 더하면 규칙 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$가 대수로 풀 수 있는 f에 관한 방정식으로 바뀌었다.
- **옛것에서 새것을 만든다.** 생성함수를 더하고, 밀고, 미분하여 처음부터 다시 시작하지 않고도 새로운 생성함수를 얻었다.

숨은 수학

생성함수에서 공식으로

생성함수는 수열을 담아 두기만 하는 것이 아니라, 수열을 구해 낼 수도 있다. 분모는 $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$로 인수분해되는데, 여기서 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$와 $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$는 $t^2 = t + 1$의 근이다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x}\Big),$$

이고, 각 분수를 등비급수로 전개하면

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

이것이 비네(*Binet*) 공식이다. $|\psi| < 1$이므로 둘째 항은 매우 작고, 따라서 F_n은 $\varphi^n/\sqrt{5}$에 가장 가까운 정수이며, 연속한 피보나치 수의 비는 황금비(golden ratio)로 수렴한다(Section 2.2의 주제이다). 같은 방법으로 상수계수 선형 점화식(linear recurrence with constant coefficients)을 모두 풀 수 있다. 연습문제에 STEP I 2004의 예가 있다.

생성함수가 그토록 쓸모 있는 이유

진짜 힘은 곱셈에서 드러난다. 곱 $f(x)g(x)$에서 x^n의 계수는 $\sum_k u_k v_{n-k}$인데, 이는 n을 두 부분으로 나누는 모든 방법에 대하여 더한 것이다. 두 조각으로 이루어진 것을 셀 때 정확히 필요한 것이 이것이다. 다음 두 절에서는 이를 이용하여 거스름돈을 만드는 방법의 수를 세고(Section 9.5), 보통 주사위와 합의 분포가 같은 이상한 눈의 주사위를 찾는다(Section 9.6). 확률에서는 같은 아이디어로 **확률생성함수**(*probability generating function*)를 얻는데, 이는 독립 확률변수(independent random variables)의 합을 곱으로 바꾼다.

드무아브르, 오일러, 라플라스

아브라함 드무아브르(Abraham de Moivre)는 1720년대에 생성함수를 사용하여 선형 점화식을 풀었는데, 본질적으로 위의 방법이었다. 레온하르트 오일러(Leonhard Euler)는 1748년에 자연수의 분할(partitions)을 연구하는 데 생성함수를 사용했고, 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace)는 생성함수를 그의 저서 *Théorie analytique des*

probabilités(확률의 해석적 이론, 1812)의 토대로 삼았다. 20세기에 생성함수는 조합론의 중심이 되었고, 오늘날에는 해석적 방법(생성함수를 복소변수(complex variable)의 함수로 연구하는 것)으로 정확히 풀기에는 너무 복잡한 세기 문제에 대해서도 정밀한 추정을 얻는다.

사고 기술

표현을 바꾸어라

수열에 관한 문제는 수열을 함수, 행렬, 또는 그림으로 바꾸면 쉬워질 수 있다.

생성함수는 점화식을 대수로, 세기를 곱셈으로 옮긴다. 대학에서는 이런 옮기기를 많이 만나게 된다: 푸리에 급수(Fourier series)는 함수를 수열로 바꾸고, 라플라스 변환(Laplace transform)은 미분방정식(differential equation)을 대수로 바꾸며, 행렬(matrix)은 기하를 산술로 바꾼다.

더 도전하기

1 **한 번에 두 자리씩.** STEP II 2022, 3번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`)을 풀어 보라. 이 문제는 $\frac{1}{89}$의 소수 전개가 왜 피보나치 수로 시작하는지 설명하고, 소수 표현에서 이 패턴이 두 자리씩 나타나는 분수를 구하게 한다.

2 **점화식 풀기.** STEP I 2004, 7번 문제 (`step.maths.org/questions/04-s1-q7`)을 풀어 보라. 이 문제는 생성함수와 부분분수로 선형 점화식을 푼 다음, 그 방법을 거꾸로 적용한다.

3 **수 세기.** $\frac{1}{9801} = 0.00\,01\,02\,03\,04\ldots$임을 보여라. 여기서 두 자리씩 끊은 묶음이 하나씩 커진다. 이 패턴은 어디에서 처음 깨지는가? 그 이유는 무엇인가?

4 **제곱의 합.** $\frac{1}{1-x}f(x)$가 부분합(partial sums) $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$의 생성함수인 이유를 설명하라. 이것과 소문항 (i)의 답을 이용하여 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$의 공식을 구하라.

더 읽을거리

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (A K Peters; 온라인 무료). 고전적인 입문서이다. 이 절을 읽은 뒤에는 1장이 안성맞춤이다.

- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley), 7장.
- **Philippe Flajolet & Robert Sedgewick, *Analytic Combinatorics*** (Cambridge University Press; 온라인 무료). 대학 1학년 수준을 훨씬 넘어서지만, 첫 몇 쪽에서 이 분야가 어디로 이어지는지 볼 수 있다.

9.5 거스름돈 만들기

문제

STEP I 1997, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/97-s1-q1`

도입

이 문제는 책 전체에서 가장 쉬운 문제처럼 보인다. 가능한 경우를 나열하기만 하면 되기 때문이다. 그러나 나열은 금세 감당할 수 없게 된다. 영국 사람들이 주머니에 넣고 다니는 동전으로 20p를 만드는 방법은 41가지, 50p를 만드는 방법은 451가지, £1을 만드는 방법은 4563가지나 된다. 이 문제가 실제로 요구하는 것은 하나의 **체계**, 즉 빠뜨리는 것도 없고 두 번 세는 것도 없도록 개수를 정리하는 방법이다.

그 체계 뒤에는 아름다운 수학이 숨어 있다. 각 동전은 하나의 등비급수(geometric series)에 대응하고, n펜스를 만드는 방법의 수는 이 급수들의 곱에서 나타나는 계수(coefficient)이다. 같은 아이디어를 모든 자연수에 한꺼번에 적용하면 정수론에서 가장 깊은 주제 가운데 하나인 오일러(Euler)의 **분할**(partition) 이론이 나온다.

시작하기 전에

생각해 보기 2p와 1p 동전만으로 n펜스를 만드는 방법은 몇 가지인가? 왜 그 답은 2p 동전을 몇 개 쓰는지에만 의존하는가?

2p 동전의 개수를 정하고 나면 나머지는 모두 1p 동전이어야 하므로, 가능한 2p 동전의 개수 $0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ 각각에 대하여 정확히 한 가지 방법이 있다. 따라서 방법은 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$가지이다. 이것을 $a(n)$이라 하자. 예를 들어 $a(10) = 6$이고 $a(5) = 3$이다.

차근차근 풀기

1단계 10펜스

생각해 보기 가장 큰 동전부터 기준으로 삼아 개수를 정리하라. 10p 동전은 몇 개 쓸 수 있는가? 그것이 정해졌을 때 5p 동전은 몇 개 쓸 수 있는가?

- 10p 동전 하나: 1가지.
- 10p 없이 5p 두 개: 1가지.
- 10p 없이 5p 하나: 나머지 5p를 2p와 1p로 만드는 방법은 $a(5) = 3$가지.
- 10p도 5p도 없이: 10p를 2p와 1p로 만드는 방법은 $a(10) = 6$가지.

합계는 $1 + 1 + 3 + 6 = 11$이다. ■

2단계 한 층씩 쌓아 올리기

생각해 보기 5p, 2p, 1p 동전으로 n펜스를 만드는 방법의 수를 $b(n)$이라 하자. 함수 a를 이용하여 $b(n)$을 어떻게 나타낼 수 있는가?

5p 동전의 개수 k를 정하면, 남은 $n - 5k$펜스는 2p와 1p 동전으로 만든다. 따라서

$$b(n) = a(n) + a(n-5) + a(n-10) + \cdots.$$

이로부터 다음을 얻는다.

n	0	5	10	15	20
$a(n)$	1	3	6	8	11
$b(n) = a(n) + b(n-5)$	1	4	10	18	29

마찬가지로 10p 동전까지 쓰는 방법의 수를 $c(n)$이라 하면 $c(n) = b(n) + b(n-10) + \cdots$이므로 $c(10) = 10 + 1 = 11$(1단계의 결과와 일치한다)이고 $c(20) = b(20) + b(10) + b(0) = 29 + 10 + 1 = 40$이다.

3단계 20펜스

마지막으로 20p 동전을 생각하자. 이 동전을 쓰거나(한 가지) 쓰지 않는다($c(20)$가지). 따라서 방법은

$$40 + 1 = 41\text{가지이다.} \quad ■$$

잠깐, 직접 해 보기 구조에 주목하라. 새 동전이 하나 추가될 때마다 층이 하나 더 해지고, 각 층은 바로 앞 층의 값을 새 동전의 액면가만큼의 간격으로 더한 것이다. 컴퓨터가 £1이나 £100에 대해 이 계산을 어떻게 수행할지 짐작할 수 있는가?

돌아보기

- **가장 큰 부분을 기준으로 정리하라.** 가장 큰 동전의 개수를 먼저 고정하자 개수 세기가 체계적으로 되었다.
- **표를 만들어라.** 새 동전이 추가될 때마다 바로 앞 행으로부터 새 행을 계산했다. 이것이 바로 **동적 계획법**(dynamic programming)으로, 컴퓨터가 이런 것을 셀 때 쓰는 표준적인 방법이다.
- **알려진 경우와 대조하라.** 표는 10p를 만드는 11가지 방법을 그대로 재현했다.

숨은 수학

등비급수로서의 동전

이 문제를 대수로 바꾸어 주는 아이디어는 다음과 같다. 사용하는 5p 동전의 개수는 $0, 1, 2, \ldots$일 수 있고, 이는 각각 $0, 5, 10, \ldots$펜스를 기여한다. 이것을 다음 급수로 기록한다.

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

각 동전에 대해 똑같이 한 다음 모두 곱한다.

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} = \sum_n w(n)x^n.$$

괄호를 전개하면 각 항 x^n은 각 괄호에서 항을 하나씩, 즉 각 동전의 개수를 하나씩 골라 총액이 n이 되게 할 때 생긴다. 따라서 x^n의 계수 $w(n)$은 정확히 n펜스를 만드는 방법의 수이다. 2단계의 표는 이 곱을 괄호 하나씩 전개한 것에 불과했다. 이것이 Section 9.4에서 다룬 생성함수(generating function)의 아이디어이며, 그 위력이 드러나는 곳이 바로 곱셈이다. 생성함수의 곱은 선택들의 조합을 센다.

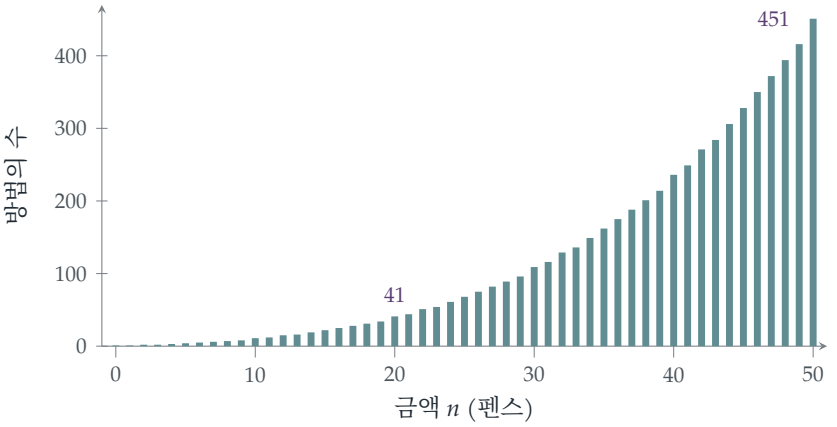


그림 9.5.1 1p, 2p, 5p, 10p, 20p, 50p 동전으로 n펜스를 만드는 방법의 수. 5와 10의 배수에서 생기는 도약은 새 동전을 처음 쓸 수 있게 되는 지점을 보여 준다. 동전이 여섯 종류일 때 방법의 수는 대략 n^5처럼 증가한다. 일반적으로는 차수가 동전 종류의 수보다 하나 작은 다항식처럼 증가한다.

분할

모든 자연수를 동전으로 쓸 수 있다면 어떻게 될까? 그러면 순서를 무시하고 n을 양의 정수들의 합으로 나타내는 방법의 수가 **분할수**(partition number) $p(n)$이다. 예를 들어 $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$이므로 $p(4) = 5$이다. 오일러는 1748년에

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots},$$

임을 알아내고, 이를 이용하여 놀라운 항등식들을 발견했다. 그 가운데 하나는 다음과 같다. n을 **서로 다른** 부분들의 합으로 나타내는 방법의 수는 **홀수인** 부분들의 합으로 나타내는 방법의 수와 같다. (생성함수를 쓰면 증명은 대수 계산 한 줄이다. 연습문제에서 직접 해 보라.)

하디, 라마누잔 그리고 $p(200)$

분할수는 빠르게 커진다. $p(10) = 42$, $p(100) = 190\,569\,292$이다. 1918년 하디(G. H. Hardy)와 라마누잔(Srinivasa Ramanujan)은 $p(n)$에 대한 놀라운 공식을 발견했는데, 이는 무한급수로서 그 첫째 항은 다음과 같다.

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

이 공식을 검증하기 위해 퍼시 맥마흔(Percy MacMahon)은 오일러의 항등식을 이용하여 손으로 $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$을 계산했다. 하디와 라마누잔의 급수에서 처음 몇 항만으로도 오차가 1보다 작은 정확한 답이 나왔다. 라마누잔은 또한 $p(5n+4)$는 항상 5로,

$p(7n+5)$는 7로, $p(11n+6)$은 11로 나누어떨어진다는 것도 발견했다. 이런 패턴이 더 이상 없는 이유를 설명하는 데에는 21세기까지 시간이 걸렸다.

사고 기술

계수를 통해 세기

어떤 대상이 서로 독립적인 선택들로 만들어질 때, 각 선택은 하나의 인수가 되고, 전체 크기가 n인 대상의 개수는 그 곱에서 x^n의 계수이다.

이 방법은 개수 세기를 대수로 바꾸어 준다. 대학에서는 이것이 열거 조합론(enumerative combinatorics)의 기초가 되며, 확률생성함수(probability generating function)가 독립 확률변수(independent random variables)의 합을 다루는 방식도 바로 이것이다.

더 도전하기

1 **두 종류의 6.** STEP II 2012, 1번 문제 (`step.maths.org/questions/12-s2-q1`)에 도전해 보라. 이 문제는 등비급수의 곱으로 개수를 센다. 마지막에, 그 계수들이 답이 되는 동전 세기 문제를 하나 설명해 보라.

2 **서로 다른 부분과 홀수 부분.** $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$이 서로 다른 부분들로의 분할에 대한 생성함수임을 보여라. $1+x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$를 이용하여 이것이 $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$와 같음을 보이고, 오일러의 정리를 이끌어 내라. $n=6$일 때 확인해 보라.

3 **공식.** 1p, 2p, 5p 동전만으로 n펜스를 만드는 방법의 수가 $\frac{(n+4)^2}{20}$에 가장 가까운 정수임을 보여라. (먼저 작은 n에 대해 확인해 보라.)

4 **순서가 중요할 때.** 순서를 고려하여 1p와 2p 동전을 투입구에 하나씩 넣어 n펜스를 만드는 방법은 몇 가지인가? (이 수열은 이전에 본 적이 있다.)

더 읽을거리

- **George Andrews & Kimmo Eriksson, *Integer Partitions*** (Cambridge University Press). 학부생을 위한 짧고 읽기 쉬운 입문서.
- **George Pólya, "On picture-writing"**, *American Mathematical Monthly* 63 (1956). 1달러를

바꾸는 문제(방법은 292가지이다)를 이용하여 생성함수를 설명한 포여(Pólya)의 고전적인 글.

- **Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity*** (Abacus). 라마누잔의 생애와 하디와의 협업을 다룬 책.

9.6 이상한 주사위

문제

STEP I 1993, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/93-s1-q1`

도입

육면체 주사위(dice) 두 개에 양의 정수를 적는 방법 가운데, 2부터 12까지의 모든 합이 보통 주사위와 정확히 같은 횟수만큼 나오도록 하는 다른 방법이 있을까? 1978년에 마틴 가드너(Martin Gardner)는 *Scientific American*에서 그런 방법이 정확히 하나 있다고 발표했다. $1,2,2,3,3,4$가 적힌 주사위와 $1,3,4,5,6,8$이 적힌 주사위이다. 이 주사위는 조지 시커먼(George Sicherman) 대령이 발견했으며, 지금은 **시커먼 주사위**(*Sicherman dice*)라는 이름으로 판매된다. 이 주사위로 모노폴리를 하면 보통 주사위로 하는 게임과 전혀 구별할 수 없을 것이다.

이 문제는 준비 운동이다. 합의 표로부터 두 주사위에 어떤 수가 적혀 있는지 추론하는 것이다. 이를 체계적으로 하는 방법과, 시커먼 주사위가 유일한 이상한 주사위 쌍이라는 증명은 모두 각 주사위를 다항식(polynomial)으로 바꾸는 데서 나온다.

시작하기 전에

생각해 보기 첫 번째 주사위에 i가 적힌 면이 p_i개 있고 두 번째 주사위에 j가 적힌 면이 q_j개 있다면, 합이 t가 되도록 던지는 방법은 몇 가지인가?

방법의 수는 $\sum_i p_i q_{t-i}$이다. 첫 번째 주사위의 수 i를 고르면 두 번째 주사위는 $t-i$를 보여야 하기 때문이다. 첫 번째 주사위 쌍의 경우, 합 6은 $1+5$($1\times$1가지), $2+4$($2\times$1가지), $3+3$($2\times$2가지)에서 나오고 그 밖에는 없다. 첫 번째 주사위에는 4나 5가 없고 두 번째 주사위에는 0이 없기 때문이다. 따라서 $1+2+4=7$가지이다. ■

차근차근 풀기

1단계 양 끝

두 주사위를 A와 B라 하고, 각 주사위에서 i가 적힌 면의 개수를 a_i, b_i라 하자.

> **생각해 보기** 합 2를 던지는 방법도, 합 12를 던지는 방법도 없다. 이것은 1과 6에 대해 무엇을 말해 주는가? 합 3을 던지는 방법은 두 가지 있다. 어느 주사위에 1이 있는가?

합 2가 나오지 않으므로 $a_1 b_1 = 0$이다. 즉 1이 적힌 면은 많아야 한 주사위에만 있다. 합 3은 $1+2$ 또는 $2+1$로만 나올 수 있고 그 방법이 두 가지이므로, 어떤 주사위에는 1이 실제로 있다. 그 주사위를 A라 하면 $b_1 = 0$이다. 그러면

$$\text{합3}: \quad a_1 b_2 = 2, \qquad \text{따라서} (a_1, b_2) = (2,1) \text{ 또는} (1,2).$$

마찬가지로 합 12가 나오지 않으므로 $a_6 b_6 = 0$이다.

2단계 위로 올라가기

> **생각해 보기** $b_1 = 0$임을 기억하면서 합 4에 대한 방정식을 써 보라. 두 경우 각각에서 이 방정식은 무엇을 말해 주는가?

합 4는 $1+3$ 또는 $2+2$이므로($b_1 = 0$이므로 $3+1$은 불가능하다) $a_1 b_3 + a_2 b_2 = 1$이다.

- **경우 (a)**, $a_1 = 2$, $b_2 = 1$: $2b_3 + a_2 = 1$이므로 $b_3 = 0$, $a_2 = 1$이다.
- **경우 (b)**, $a_1 = 1$, $b_2 = 2$: $b_3 + 2a_2 = 1$이므로 $a_2 = 0$, $b_3 = 1$이다.

합 5: $a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 1$.

- 경우 (a): $2b_4 + 0 + a_3 = 1$이므로 $b_4 = 0$, $a_3 = 1$이다. 지금까지 A에는 $1, 1, 2, 3$이 있고 B에는 2가 있다. B의 나머지 다섯 면은 5 또는 6이다.
- 경우 (b): $b_4 + 0 + 2a_3 = 1$이므로 $a_3 = 0$, $b_4 = 1$이다. 지금까지 A에는 1이 있고 B에는 $2, 2, 3, 4$가 있다. A의 나머지 다섯 면은 $4, 5, 6$ 중에서, B의 나머지 두 면은 $5, 6$ 중에서 나온다.

3단계 경우 (a)는 실패한다

> **생각해 보기** 경우 (a)에서 합 7에 대한 방정식을 쓰고 $b_5 + b_6 = 5$를 이용하라.

합 7: $a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2 = 2b_6 + b_5 + 0 + 0 + a_5 = 3$. $b_6 = 5 - b_5$를 대입하

면 $10 - b_5 + a_5 = 3$이므로 $b_5 = 7 + a_5 \geq 7$이다. 그러나 B의 면은 여섯 개뿐이다. 따라서 경우 (a)는 불가능하다.

4단계 경우 (b)는 성공한다

? **생각해 보기** 경우 (b)에서 합 6과 11, 그리고 $a_6 b_6 = 0$이라는 사실을 이용하라.

합 6: $a_1 b_5 + a_4 b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$이다(나머지 곱에는 $a_2 = a_3 = 0$ 또는 $b_1 = 0$이 들어 있다). $b_5 \leq 2$이고 $b_5 = 4 - 2a_4$는 짝수이므로, $b_5 = 0, a_4 = 2$이거나 $b_5 = 2, a_4 = 1$이다.

- $b_5 = 0$이면 B는 $2, 2, 3, 4, 6, 6$이므로 $a_6 = 0$이고 A는 $1, 4, 4, 5, 5, 5$이다. 그런데 그러면 합 7이 나오는 방법은 3가지가 아니라 $a_1 b_6 + a_4 b_3 + a_5 b_2 = 2 + 2 + 6 = 10$가지가 된다.
- $b_5 = 2$이면 B는 $2, 2, 3, 4, 5, 5$이고 $b_6 = 0$이며, A는 $1, 4$와 $5, 6$ 중에서 나온 네 면으로 이루어진다. 합 11: $a_6 b_5 = 2a_6 = 6$이므로 $a_6 = 3, a_5 = 1$이다.

가능한 것은 다음뿐이다.

$$A: \ 1, 4, 5, 6, 6, 6, \qquad B: \ 2, 2, 3, 4, 5, 5.$$

마지막으로, 지금까지 합의 일부만 사용했으므로 이 주사위가 표 전체를 만들어 내는지 확인해야 한다. 곱을 전개해 보면(또는 아래의 다항식을 이용하면) 모든 항목이 맞음을 확인할 수 있다. ■

돌아보기

- **양 끝에서 시작하라.** 가장 작은 합과 가장 큰 합에는 곱이 한두 개만 들어 있으므로 가장 강력한 정보를 준다.
- **경우를 나누고 하나씩 제거하라.** 각각의 합이 가능성을 줄여 나갔고, 결국 하나의 경우만 살아남았다.
- **충분성(sufficiency)을 확인하라.** 추론은 주사위가 반드시 어떠해야 하는지를 보여 주었고, 마지막 확인은 그 주사위가 실제로 조건을 만족함을 보여 주었다.

숨은 수학

다항식으로 나타낸 주사위

각 주사위를 다항식으로 나타내되, i가 적힌 면 하나마다 항 x^i를 하나씩 둔다. 보통 주사위는 $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$이고, 문제의 주사위는

$$A(x) = x + x^4 + x^5 + 3x^6, \qquad B(x) = 2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5.$$

이다. 곱하면 면의 각 쌍이 $x^i x^j = x^{i+j}$를 기여하므로, $A(x)B(x)$에서 x^t의 계수는 합 t를 던지는 방법의 수이다. 이것은 다시 한번 Section 9.4의 생성함수(generating function) 아이디어이다. 합의 표는 곱 $A(x)B(x)$일 뿐이며, 앞에서 경우를 나누어 한 추론은 이 곱을 인수분해(factorisation)하는 한 가지 방법이었다.

시커먼 주사위

보통 주사위 두 개의 경우 곱은 $(x + x^2 + \cdots + x^6)^2$이다. 같은 합의 분포를 갖는 주사위 쌍은 $P(x)Q(x) = (x + \cdots + x^6)^2$을 만족하는 다항식 $P(x)$, $Q(x)$를 가져야 한다. 이제 인수분해하면

$$x + x^2 + \cdots + x^6 = x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2),$$

이고, 이 인수들은 (정수 계수 다항식으로) 더 이상 분해할 수 없다. 따라서 P와 Q는 각각 인수 $x, 1+x, 1+x+x^2, 1-x+x^2$로 만들어져야 하며, 각 인수는 모두 합쳐 두 번씩 나타난다. 세 가지 조건이 선택의 폭을 좁힌다.

- 각 주사위는 면이 6개이므로 $P(1) = Q(1) = 6$이다. 각 인수는 $x = 1$에서 값 1, 2, 3, 1을 가지므로, 각 주사위는 $1+x$ 하나와 $1+x+x^2$ 하나를 갖는다.
- 0이 적힌 면은 없으므로 $P(0) = Q(0) = 0$이다. 즉 각 주사위는 인수 x를 하나씩 갖는다.
- 남은 자유는 $1-x+x^2$ 두 개를 어떻게 나누느냐뿐이다. 하나씩 나누면 보통 주사위가 된다. 둘 다 한 주사위에 주면

$$x(1+x)(1+x+x^2) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4,$$
$$x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8.$$

이것이 시커먼 주사위 1, 2, 2, 3, 3, 4와 1, 3, 4, 5, 6, 8이며(그림 9.6.1), 이 논증은 이것이 유일한 대안임을 증명한다. 핵심은 다항식도 정수처럼 기약(irreducible) 다항식으로 유일하게 인수분해된다는 사실이다. 정수론(number theory)과 조합론(combinatorics)이 여기서 만난다.

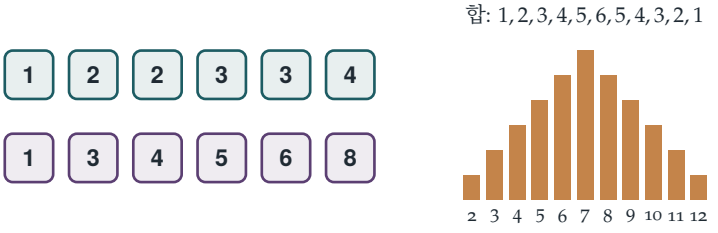


그림 9.6.1 시커먼 주사위. 함께 던지면 2부터 12까지의 모든 합이 보통 주사위 두 개와 정확히 같은 빈도로 나온다(오른쪽). 합 2가 나오는 방법은 한 가지, 합 3은 두 가지이고, 이렇게 계속하여 합 7은 여섯 가지이다.

확률생성함수

확률에서는 같은 아이디어가 **확률생성함수**(*probability generating function*)로 나타난다. 값 $0, 1, 2, \ldots$를 갖는 확률변수(random variable) X에 대하여 $G(t) = E(t^X) = \sum P(X = k)t^k$이고, 서로 독립(independent)인 X와 Y에 대하여 $E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y)$이다. 독립인 확률변수의 합은 생성함수의 곱에 대응한다. STEP III 2003 Q14(연습문제에 있다)는 이 방법으로 시커먼 주사위를 찾으며, Section 9.13에서는 이와 관련된 논증으로 두 주사위에 어떻게 무게를 실어도 모든 합이 같은 확률로 나오게 할 수 없음을 보인다.

사고 기술

세기 문제를 다항식으로 부호화하기

대상들이 그 값을 더하는 방식으로 결합될 때, 각 대상을 x에 대한 다항식으로 나타내라. 결합은 곱셈이 되고, 결합에 관한 질문은 인수분해에 관한 질문이 된다.

여기서는 주사위에 관한 질문이 다항식의 유일 인수분해 문제로 바뀌었다. 대학에서는 이런 부호화가 어디에나 있다. 조합론에서, 확률에서, 그리고 다항식을 정수와 비슷한 산술을 갖는 환(ring)으로서 그 자체로 연구하는 대수학에서도 그렇다.

더 도전하기

1 **사면체 주사위.** STEP III 2003, 14번 문제 (`step.maths.org/questions/03-s3-q14`)를 풀어 보라. 이 문제는 면이 네 개인 주사위에 대해 시커먼의 질문을 던진다. (**힌트:** $x + x^2 + x^3 + x^4 = x(1 + x)(1 + x^2)$.)

2 **표 확인하기.** $(x + x^4 + x^5 + 3x^6)(2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5)$를 전개하여 문제의 표와 맞는지 확인하라.

3 **주사위 세 개.** 모두 표준 주사위는 아니면서 양의 정수가 적힌 육면체 주사위 세 개로, 합의 분포가 표준 주사위 세 개와 같은 것이 있는가? (**힌트:** 이제 $(x + \cdots + x^6)^3$의 인수에는 $1 - x + x^2$가 세 개 들어 있다.)

4 **동전과 팔면체.** $1, \ldots, 8$이 적힌 팔면체 주사위와 1, 2가 적힌 이면 "주사위"(동전)가 있다. 같은 합의 분포를 유지하면서 수를 다르게 적을 수 있는가?

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*** (Mathematical Association of America). 시커먼 주사위에 관한 칼럼이 실려 있다.
- **Joseph Gallian & David Rusin, "Cyclotomic polynomials and nonstandard dice"**, *Discrete Mathematics* 27 (1979). 면의 개수가 임의인 주사위에 대한 일반 이론을 다룬다.
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (온라인에서 무료로 볼 수 있다), 1장.

9.7 같은 거듭제곱의 합

문제

STEP I 1992, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/92-s1-q5`

도입

1부터 16까지의 수를 여덟 개씩 두 팀으로 나누어 보자.

$$\{1,4,6,7,10,11,13,16\} \quad \text{그리고} \quad \{2,3,5,8,9,12,14,15\}.$$

두 팀의 합은 모두 68이다. 제곱의 합은 둘 다 748이다. 세제곱의 합은 둘 다 9248이다. 우연이 아니고서야 이럴 수 없을 것 같지만, 사실 이것은 끝없이 이어지는 패턴의 세 번째 단계일 뿐이다. 1부터 32까지를 올바르게 나누면 네제곱의 합까지 같아진다.

이렇게 나누는 방법은 1851년에 Eugène Prouhet가 발견했으며, 그 배후의 규칙인 **투에–모스 수열**(*Thue–Morse sequence*)은 놀라울 만큼 다양한 곳에 등장한다. 정수론, 계산 이론, 체스, 그리고 가장 공정하게 차례를 정하는 방법에서도 나타난다. 이 문제는 다항식(polynomial)과 그 도함수(derivative)를 통해 이 수열을 드러낸다.

시작하기 전에

생각해 보기 다항식 $\mathrm{p}(x) = \sum c_k x^k$가 $\mathrm{p}(1) = 0$을 만족하면 계수(coefficient)에 대해 무엇을 알 수 있는가? $\mathrm{p}'(1) = 0$이면 어떤가?

$\mathrm{p}(1) = \sum c_k$이므로 $\mathrm{p}(1) = 0$은 계수의 합이 0이라는 뜻이다. 또 $\mathrm{p}'(x) = \sum k c_k x^{k-1}$이므로 $\mathrm{p}'(1) = \sum k c_k$이다. 계수가 모두 ± 1이라면, 이 조건들은 $+1$이 놓인 위치와 -1이 놓인 위치의 개수가 같고, 그 위치들의 합도 같다는 뜻이다.

차근차근 풀기

1단계 삼중근

생각해 보기 $1-x^2$와 $1-x^4$를 인수분해(factorise)하라. $1-x$라는 인수가 몇 번 나타나는가?

$1-x^2=(1-x)(1+x)$이고 $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$이므로

$$\mathrm{p}_0(x)=(1-x)^3(1+x)^2(1+x^2),$$

따라서 $(1-x)^3$은 인수이다. ■

2단계 1에서의 도함수 값

생각해 보기 $(1-x)^3$이 p_0를 나누어떨어뜨리면, $(1-x)$의 몇 제곱이 p_0'를 나누어 떨어뜨리는가? 그렇다면 $\mathrm{p}_1=x\mathrm{p}_0'$와 p_1'는 어떤가?

$\mathrm{p}_0(x)=(1-x)^3\mathrm{q}(x)$로 쓰자. 곱의 미분법(product rule)에 의해 $\mathrm{p}_0'(x)=-3(1-x)^2\mathrm{q}(x)+(1-x)^3\mathrm{q}'(x)$이고, 이는 $(1-x)^2$을 인수로 가진다. 따라서 $\mathrm{p}_0'(1)=0$이다. 그러면 $\mathrm{p}_1(x)=x\mathrm{p}_0'(x)$도 $(1-x)^2$을 인수로 가지며, 같은 논증으로 p_1'가 $(1-x)$를 인수로 가짐을 알 수 있으므로 $\mathrm{p}_1'(1)=0$이다. ■

3단계 계수 읽어 내기

전개하면 $(1-x)(1-x^2)=1-x-x^2+x^3$이고, 이어서

$$\mathrm{p}_0(x)=1-x-x^2+x^3-x^4+x^5+x^6-x^7.$$

생각해 보기 $\mathrm{p}_0'(1)$과 $\mathrm{p}_1'(1)$을 계수 c_k로 나타내면 무엇인가?

$\mathrm{p}_1(x)=x\mathrm{p}_0'(x)=\sum kc_kx^k$이므로 $\mathrm{p}_1'(1)=\sum k^2c_k$이다. 계수는 $k=0,3,5,6$에서 $+1$이고 $k=1,2,4,7$에서 -1이다. 따라서 $\mathrm{p}_0'(1)=0$과 $\mathrm{p}_1'(1)=0$은

$$0+3+5+6=1+2+4+7\quad(=14),$$
$$0^2+3^2+5^2+6^2=1^2+2^2+4^2+7^2\quad(=70),$$

을 뜻하며, 여기서 0을 빼면 바로 요구된 항등식이다. ■

4단계 인수 하나 더

> **잠깐, 직접 해 보기** 세제곱의 합까지 같게 만들려면 $(1-x)$라는 인수가 네 번째로 필요하다. p_0 대신 어떤 다항식을 써야 할까?

$\mathrm{P}(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)$을 잡자. 이 다항식은 $(1-x)^4$을 인수로 가진다. 그 계수는 $\mathrm{p}_0(x)-x^8\mathrm{p}_0(x)$의 계수이다. 즉 0부터 7까지의 부호 패턴 다음에, 8부터 15까지 같은 패턴의 부호를 뒤집은 것이 이어진다.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_k	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+

2단계의 논증을 한 번 더 적용하면 $r=0,1,2,3$에 대해 $\sum c_k k^r=0$임을 알 수 있다. $+$ 위치 $\{0,3,5,6,9,10,12,15\}$와 $-$ 위치 $\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$를 잡자. $r=1,2,3$일 때 0에서 오는 항은 0이므로 빼도 된다. 따라서 다음 순서

$$a_1,\dots,a_8=1,2,4,7,8,11,13,14,\qquad a_9,\dots,a_{15}=3,5,6,9,10,12,15$$

가 조건을 만족한다. 두 부분의 합은 모두 60, 제곱의 합은 620, 세제곱의 합은 7200이다. ■

돌아보기

- **도함수는 중근을 찾아낸다.** 인수 $(1-x)^m$이 있으면 처음 $m-1$개의 도함수가 $x=1$에서 모두 0이 된다.
- **미분하기 전에 x를 곱하면** $\sum kc_k$가 $\sum k^2c_k$로 바뀌고, 같은 방식으로 더 높은 거듭제곱으로 나아간다.
- **두 배 늘리기.** 인수 $(1-x^{2^m})$을 하나 더할 때마다 길이가 두 배가 되고, 합이 같아지는 거듭제곱이 하나 늘어났다.

숨은 수학

투에–모스 수열

$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\cdots$의 계수의 부호는 **투에–모스 수열**을 이룬다. $+$를 0으로, $-$를 1로 쓰면 다음과 같다.

$$0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\ \dots$$

이 수열은 서로 동치인 세 가지 방식으로 설명할 수 있다.

- **두 배 늘리기:** 0에서 시작하여, 지금까지 얻은 것의 보수(complement, 0과 1을 맞바꾼 것)를 계속 뒤에 붙인다: $0\to01\to0110\to01101001\to\cdots$.

- **이진법 자릿수:** k번째 항은 k를 이진법(binary)으로 썼을 때 1의 개수가 짝수이면 0, 홀수이면 1이다. (그래서 x^k의 부호가 $(-1)^{\text{이진법으로 쓴 다음 수에 있는 1의 개수: } k}$인 것이다. 곱에서 x^k를 만들려면 k의 이진 표현을 이루는 인수 x^{2^m}들을 골라야 하고, 각 인수가 마이너스 부호를 하나씩 가져온다.)
- **다항식:** 문제에서처럼 $\prod_m (1 - x^{2^m})$의 계수이다.

$0, 1, \ldots, 2^N - 1$을 투에–모스 수열에 따라 나누면, 모든 $r < N$에 대해 r제곱의 합이 같은 두 집합을 얻는다(그림 9.7.1). 이것이 **프루에–태리–에스콧 문제**(*Prouhet–Tarry–Escott problem*)이다. 즉 $r = 1, \ldots, k$에 대해 r제곱의 합이 같은 서로 다른 두 정수 집합을 찾는 문제이다. Prouhet의 풀이는 2^{k+1}개의 수를 사용한다. 실제로 최소 몇 개의 수가 필요한지 알아내는 것은 유명한 미해결 문제이다.



$1 + 4 + 6 + 7 + 10 + 11 + 13 + 16 = 68$

$2 + 3 + 5 + 8 + 9 + 12 + 14 + 15 = 68$

제곱: $748 = 748$ 세제곱: $9248 = 9248$ 네제곱: $122\,692 \neq 121\,156$

그림 9.7.1 투에–모스 수열에 따라 나눈 1부터 16까지의 수. 두 집합은 합, 제곱의 합, 세제곱의 합이 각각 같지만 네제곱의 합은 같지 않다. 네제곱의 합까지 같게 하려면 1부터 32까지가 필요하다. 색을 왼쪽부터 읽으면 청록–자주–자주–청록, 자주–청록–청록–자주, ...의 패턴이 된다.

가장 공정하게 차례를 정하는 방법

두 아이가 사탕 더미에서 좋은 것부터 번갈아 고른다고 하자. $ABABAB\ldots$ 순서로 번갈아 고르면 A가 매 쌍에서 언제나 더 좋은 사탕을 가져가므로 체계적으로 유리하다. $ABBA$ 순서가 더 공정하고, $ABBABAAB$는 그보다 더 공정하다. 이것이 바로 투에–모스 수열이며, 거듭제곱의 합이 같다는 성질이 정확히 그 이유이다. 사탕의 가치가 위치에 대한 매끄러운 함수로 주어진다면, 그 함수를 다항식으로 전개해 보면 투에–모스 순서가 앞쪽의 주요 항들을 상쇄한다는 것을 알 수 있다. 같은 아이디어가 축구의 승부차기에도 제안되었으며(축구 규칙 제정 기구가 2017년부터 시험한 "$ABBA$" 순서), 테니스 타이브레이크의 서브 순서에도 쓰인다.

Thue, Morse, Euwe

이 수열은 여러 번 거듭 발견되었다. Prouhet가 1851년에 이 수열을 사용했다. Axel Thue는 1912년에 반복 패턴이 없는 수열을 연구하다가 이 수열을 다시 발견했다. 이 수열에는 같은 블록이 세 번 연달아 나타나는 일이 결코 없다("세제곱이 없는(cube-free)" 수열이다). Marston Morse는 1921년에 곡면 위의 측지선(geodesic)을 연구하다가 이 수열

을 또다시 발견했다. 그리고 체스 세계 챔피언 Max Euwe는 1929년에 이 수열을 이용하여, 당시 시행되던 반복에 의한 무승부 규칙으로는 무한히 긴 게임을 막을 수 없음을 보였다. 오늘날 이 수열은 **자동 수열**(*automatic sequence*), 즉 n의 이진법 자릿수를 읽는 간단한 기계로 계산되는 수열 이론의 핵심적인 예이다.

사고 기술

조합적 성질을 다항식으로 부호화하기

거듭제곱의 합이 같다는 것은 $+$ 부호와 $-$ 부호가 어디에 놓이느냐의 문제이다. 그 부호들을 계수로 하는 다항식을 만들면, 이 성질이 근(*root*)에 관한 명제로 바뀐다.

이 문제는 결코 일일이 찾아보라고 요구하지 않는다. $x = 1$에서의 중근(repeated root)이 모든 일을 해 준다. 조합적 대상을 시행착오로 찾는 대신 대수를 이용해 만들어 내는 것은 대학 조합론(combinatorics)에서 거듭 등장하는 아이디어이다.

더 도전하기

1 **평행이동.** STEP II 2025, 8번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`)에 도전해 보라. 합과 제곱의 합이 같아지도록 나눈 것에서, 한 목록을 평행이동하여 결합함으로써 세제곱의 합까지 같아지는 더 큰 분할을 만드는 방법을 보여 준다.

2 **제곱수의 제곱.** (이 문제도 STEP II, 2025에서 나왔다.) 집합 $A = \{1, 3, 4, 5, 9, 11\}$과 $B = \{2, 6, 7, 8, 10\}$은 합이 같고 제곱의 합도 같다. 모든 양의 정수 n에 대해 $\{n^2, (n+1)^2, \ldots, (n+11)^2\}$을 합이 같은 두 집합으로 나누어라. (**힌트:** 두 번째 집합에 0을 추가하라.)

3 **평행이동 불변성(translation invariance).** 두 수 집합이 $r = 0, 1, \ldots, k$에 대해 r제곱의 합이 같으면, 모든 원소에 같은 수 c를 더해 얻은 집합들도 그러함을 보여라. 이로부터 문제의 집합 $\{1, \ldots, 15\}$를 임의의 연속한 16개의 정수로 바꾸어도 된다는 것은 왜인가?

4 **공정한 사탕.** 사탕의 가치가 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$이다. $ABABABAB$ 순서와 $ABBABAAB$ 순서에서 A가 얻는 총합을 비교하라.

더 읽을거리

- **Jean-Paul Allouche & Jeffrey Shallit, "The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence"**, *Sequences and Their Applications* (Springer, 1999) 수록. 이 수열이 등장하는 수많은 곳을 개관한 글로, 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Matt Parker, *Things to Make and Do in the Fourth Dimension*** (Penguin). 거듭제곱의 합이 같은 집합을 비롯한 여러 수의 신기한 성질을 다룬다.
- **Joshua Cooper & Aaron Dutle, "Greedy Galois games"**, *American Mathematical Monthly* 120 (2013). 공정한 차례 정하기와 투에–모스 수열을 다룬다.

9.8 아무도 자기 셔츠를 받지 못한다

문제

STEP II 2016, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s2-q12`

도입

열한 명의 축구 선수가 급하게 옷을 갈아입느라 아무 셔츠나 집어 든다. 아무도 자기 셔츠를 입지 않게 될 확률(probability)은 얼마일까? 이번에는 선수단이 쉰 명이라고, 혹은 군중이 백만 명이라고 해 보자. 틀릴 사람이 더 많아지니 확률이 올라갈까? 아니면 운 좋게 맞힐 사람도 더 많아지니 내려갈까? 놀랍게도 확률은 거의 변하지 않는다. 다섯 명부터는 확률이 $1/e \approx 0.368$과 0.5퍼센트 이내로 차이 난다.

이것은 조합적 확률론에서 가장 오래된 문제로, 1708년 Pierre de Montmort가 *problème des rencontres*(만남의 문제)라는 이름으로 제기하였다. 이 문제는 겹치는 대상을 세는 도구인 **포함배제의 원리**(inclusion–exclusion principle)로 이 문제를 풀며, 그 답은 수학에서 e가 가장 뜻밖에 등장하는 사례 가운데 하나이다.

시작하기 전에

잠깐, 직접 해 보기 $n = 3$인 경우를 해 보자. 카드 $1, 2, 3$을 늘어놓는 여섯 가지 순서를 모두 적고, 어떤 카드도 제자리에 있지 않은 것이 몇 개인지 세어 보자. 인내심이 있다면 $n = 4$인 경우도 해 보자(24가지 순서가 있다).

$n = 3$일 때 어떤 카드도 제자리에 있지 않은 것은 231과 312뿐이므로 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$이다. $n = 4$일 때는 24가지 중 9가지가 그러하므로 확률은 $\frac{3}{8} = 0.375$이다. 제자리에 고정된 카드가 하나도 없는 배열을 **교란순열**(derangement)이라 한다.

차근차근 풀기

1단계 세 사건에 대한 포함배제

생각해 보기 두 사건에 대한 공식을 적용할 수 있도록 $A \cup B \cup C$를 두 사건의 합사건으로 나타내려면 어떻게 해야 할까?

$A \cup B$를 하나의 사건으로 보고, 이것과 C에 공식을 적용한다.

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}((A \cup B) \cap C).$$

이제 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$이고, 공식을 한 번 더 적용하면 $\mathrm{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$이다. $\mathrm{P}(A \cup B)$도 전개하여 항을 정리하면 결과를 얻는다. ■

네 사건에 대해서도 같은 패턴이 이어진다. 네 개의 단일 확률을 더하고, 여섯 개의 두 사건 교집합을 빼고, 네 개의 세 사건 교집합을 더한 다음, $\mathrm{P}(A \cap B \cap C \cap D)$를 뺀다.

2단계 확률 구하기

생각해 보기 카드 i가 i번째 자리에 있다면 나머지를 배열하는 방법은 몇 가지일까? 카드 i와 j가 모두 고정되어 있다면 어떨까?

일어날 가능성이 같은 순서가 $n!$가지 있다. 카드 i가 i번째 자리에 고정되면 나머지 $n-1$장의 카드는 어떤 순서로든 놓일 수 있으므로 $(n-1)!$가지이다. 따라서

$$\mathrm{P}(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{P}(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$
$$\mathrm{P}(E_i \cap E_j \cap E_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

일반적으로, 지정된 k장의 카드가 모두 제자리에 있을 확률은 $\frac{(n-k)!}{n!}$이다.

3단계 모두 더하기

생각해 보기 $\mathrm{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$에 대한 포함배제 공식에서 k개 사건의 교집합을 포함하는 항은 몇 개이며, 그 합은 얼마일까?

k개의 사건을 고르는 방법은 $\binom{n}{k}$가지이고, 각 교집합의 확률은 $\frac{(n-k)!}{n!}$이다. 따라서 k겹 항들의 합은

$$\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

$k!$를 제외한 모든 것이 약분된다. 부호를 번갈아 붙이면

$$\mathrm{P}(\text{적어도 한 장의 카드가 제자리에 있음}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}. \qquad \blacksquare$$

따라서 교란순열이 될 확률은

$$d_n = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

4단계 정확히 한 장

> ? **생각해 보기** 정확히 한 장의 카드만 제자리에 있으려면, 그 카드는 어느 것이고 나머지 카드는 어떠해야 할까?

제자리에 있을 카드를 고른다(n가지). 카드 i가 제자리에 있을 확률은 $\frac{1}{n}$이고, 그런 조건에서 나머지 $n-1$장의 카드는 자기들끼리 교란순열을 이루어야 하며, 그 확률은 d_{n-1}이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{정확히 한 장}) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot d_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}. \qquad \blacksquare$$

돌아보기

- **많이 센 다음 바로잡기.** $\mathrm{P}(E_i)$를 더하면 두 장의 카드가 고정된 배열이 두 번 세어진다. 두 사건의 교집합을 빼면 이것은 바로잡히지만 세 사건의 경우에는 너무 많이 빼게 되며, 이런 식으로 계속된다.
- **대칭성이 항들을 같게 만든다.** 모든 k겹 교집합의 확률이 같으므로, 공식의 각 층은 하나의 수에 이항계수를 곱한 것이 된다.
- **더 작은 경우로 환원하기.** "정확히 한 장"은 $n-1$장 카드의 교란순열 문제가 되었다.

숨은 수학

e는 어디서 오는가

급수(series) $\sum (-1)^k/k!$는 지수급수 $e^x = \sum x^k/k!$에 $x = -1$을 대입한 것이다. 따라서 $n \to \infty$일 때

$$d_n \to e^{-1} \approx 0.3679,$$

이고, 정확히 한 장이 일치할 확률도 같은 극한으로 간다. 수렴(convergence)은 놀라울 정도로 빠르다(그림 9.8.1). $1/n!$에서 멈출 때의 오차는 $1/(n+1)!$보다 작으므로, $n = 7$이면

이미 답이 소수점 아래 넷째 자리까지 $1/e$와 일치한다. 사실 n개 대상의 교란순열의 개수 $n!$ d_n은 정확히 $n!/e$에 가장 가까운 정수이다.

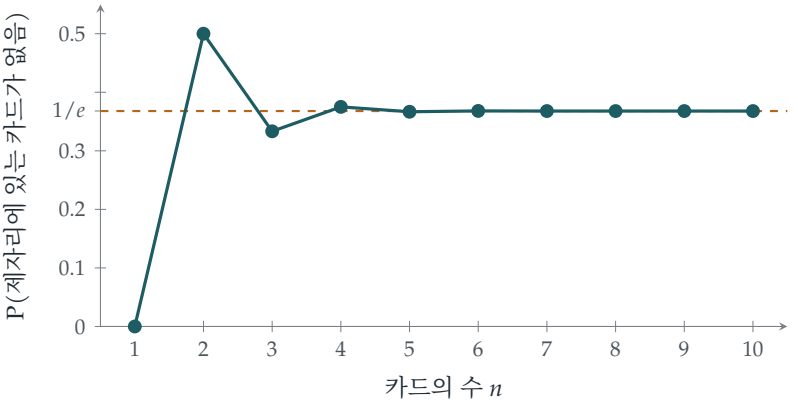


그림 9.8.1 n장의 카드를 무작위로 섞었을 때 어떤 카드도 제자리에 남지 않을 확률. 이 확률은 $1/e$의 위아래를 번갈아 오가며, $n = 6$부터는 이 척도에서 $1/e$와 구별할 수 없다.

일치하는 개수는 푸아송 분포를 따른다

더 많은 것이 성립한다. 제자리에 있는 카드의 수를 N이라 하자. 그러면 각 k에 대하여 $\mathrm{P}(N = k) \to \frac{e^{-1}}{k!}$이다. 즉 일치하는 개수는 극한에서 평균이 1인 **푸아송 분포**(Poisson distribution)를 따른다. 평균이 1인 이유는 계산 없이도 알 수 있다. N은 $E_1, \ldots, E_n$의 지시변수(indicator variable)들의 합이고, 각 지시변수의 기댓값(expectation)은 $\frac{1}{n}$이며, 사건들이 독립이 아니더라도 기댓값은 더할 수 있다. STEP III 2004 Q12(연습문제에 있다)는 분산(variance)도 1임을 보인다. 푸아송 분포는 일어날 가능성이 낮고 거의 독립인 사건이 많을 때마다 나타난다. 교란순열은 그 고전적인 예이며, 12장 Section 12.11의 주제이기도 하다.

Montmort의 *treize* 게임

프랑스 귀족 Pierre Rémond de Montmort는 *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*(1708)에서 운에 좌우되는 게임을 연구하였다. *treize*(열셋) 게임에서 한 사람이 "하나, 둘, 셋, ..."을 외치며 카드 열세 장을 한 장씩 나누어 주는데, 나누어 준 카드가 외친 수와 한 번이라도 일치하면 이긴다. Montmort는 이길 확률을 구하였고, 니콜라우스 베르누이(Nicolaus Bernoulli)와 주고받은 서신을 통해 1713년까지 일반 공식이 확립되었다. 오일러(Euler)는 1753년에 이를 다시 발견하였다. 포함배제의 원리는 나중에 드 무아브르(Abraham de Moivre)가, 그리고 일반적인 형태로는 19세기에 실베스터(James Joseph Sylvester)가 정식화하였다.

사고 기술

포함배제

서로 겹치는 집합들의 합집합의 크기를 세려면, 각 집합의 크기를 더하고, 두 집합씩 겹치는 부분을 빼고, 세 집합씩 겹치는 부분을 더하는 식으로 계속한다.

이 방법은 이 문제에서처럼 대칭성 덕분에 같은 크기의 겹침이 모두 같을 때 가장 강력하다. 대학에서는 조합론, 확률론, 그리고 정수론에서 나타난다. 정수론에서는 주어진 소수(prime)들 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 정수를 세는 데 쓰이며, 오일러 피 함수(Euler's totient function)와 뫼비우스 함수(Möbius function)로 이어진다.

더 도전하기

1 **셔츠.** STEP III 2004, 12번 문제 (`step.maths.org/questions/04-s3-q12`)를 풀어 보자. 이 문제는 자기 셔츠를 입은 선수의 수를 지시변수로 세고, 평균과 분산을 구한 다음, 그 결과를 푸아송 분포와 비교한다.

2 **점화식.** n개 대상의 교란순열의 개수를 D_n이라 하자. 카드 1이 어디로 가는지, 그리고 그 자리에 있던 카드가 1번째 자리로 가는지를 고려하여 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$임을 보여라. 이 식을 $D_3 = 2$, $D_4 = 9$와 대조하여 확인해 보자.

3 **정확히 k장.** 정확히 k장의 카드가 제자리에 있을 확률이 $\frac{1}{k!}d_{n-k}$이고, 이것이 $\frac{e^{-1}}{k!}$로 수렴함을 보여라.

4 **서로소인 정수.** 포함배제를 이용하여 1부터 30까지의 정수 중 2, 3, 5 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 것의 개수를 세어라. 그 답은 $30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$와 어떤 관계가 있는가?

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 포함배제와 일치 문제를 다루는 대학 1학년 교재이다.
- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley), Chapter IV. 일치 문제의 다양한 변형을 담은 고전이다.
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 포함배제에 관한 내용

이 있다.

9.9 생일 문제

문제

STEP II 2007, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/07-s2-q13`

도입

한 방에 몇 명이 있어야 그중 두 사람의 생일이 같을 확률이 같지 않을 확률보다 커질까? 대부분의 사람은 365의 절반인 180 근처라고 짐작한다. 답은 23이다. 서른 명인 학급에서는 생일이 같은 두 사람이 있을 확률이 70%이고, 쉰 명이 모인 파티에서는 97%이다.

이 놀라움은 서로 다른 두 질문을 혼동하는 데서 온다. 하나는 "누군가 **나와** 생일이 같은가?"(이 경우에는 실제로 약 253명이 필요하다)이고, 다른 하나는 "**어떤 두 사람이든** 생일이 같은가?"이다. 23명이 있으면 쌍이 $\binom{23}{2} = 253$개 생기고, 각 쌍이 모두 생일이 일치할 기회가 된다. 이 문제는 그 직관을 정확하게 만들어 주며, 같은 수학이 여러분의 은행 계좌를 보호하는 암호(cryptography)가 얼마나 안전한지를 결정한다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 왜 어떤 두 손님도 생일이 같지 **않을** 확률을 계산하는 편이 더 쉬울까? 손님들을 한 줄로 세워 보자. 두 번째 손님이 첫 번째 손님의 생일을 피할 확률은 얼마인가? 세 번째 손님이 두 사람의 생일을 모두 피할 확률은?

"적어도 두 사람의 생일이 같다"는 서로 겹치는 많은 경우(두 사람이 같은 경우, 세 사람이 같은 경우, 서로 다른 두 쌍이 같은 경우, ...)를 포함한다. 그 여사건(complement)인 "모두 다르다"는 하나의 깔끔한 사건이다. 두 번째 손님은 확률 $\frac{364}{365}$로 첫 번째 손님의 생일을 피하고, 그렇다는 조건 아래에서 세 번째 손님은 확률 $\frac{363}{365}$로 두 사람의 생일을 모두 피한다. 이런 식으로 계속된다.

차근차근 풀기

1단계 유용한 근사

생각해 보기 $x=0$에서 $y=e^{-x}$의 접선(tangent line)은 무엇인가?

$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\cdots$이므로, x가 작을 때 $e^{-x}\approx 1-x$이다. $x=r/n$으로 두면

$$\frac{n-r}{n}=1-\frac{r}{n}\approx e^{-r/n}. \qquad \blacksquare$$

오차는 약 $\frac{r^2}{2n^2}$이며, r이 n보다 훨씬 작으면 작다.

2단계 생일이 같은 사람이 있을 확률

k명의 생일이 모두 다를 확률은

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{365-(k-1)}{365}=\prod_{r=0}^{k-1}\frac{365-r}{365}.$$

각 인수에 근사(approximation)를 적용하고, 지수함수를 곱하면 지수(exponent)가 더해진다는 사실을 이용하면

$$\prod_{r=0}^{k-1}e^{-r/365}=\exp\!\left(-\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{365}\right)=\exp\!\left(-\frac{k(k-1)}{730}\right).$$

따라서 생일이 같은 쌍이 적어도 하나 있을 확률은 근사적으로 $1-e^{-k(k-1)/730}$이다. $\blacksquare$

생각해 보기 지수를 살펴보자. $\frac{k(k-1)}{730}=\binom{k}{2}\Big/365$이다. 이것을 말로 하면 무슨 뜻인가?

이것은 손님 쌍의 개수에 주어진 한 쌍의 생일이 같을 확률 $\frac{1}{365}$를 곱한 것, 즉 생일이 같은 쌍의 개수의 기댓값(expected value)이다. 이 근사는 일치가 **하나도 없을** 확률이 $e^{-(\text{일치하는 쌍의 개수의 기댓값})}$이라고 말해 준다. Section 9.8에서처럼 여기서도 푸아송 분포(Poisson distribution)의 흔적이 보인다.

3단계 스물셋

$1-e^{-k(k-1)/730}\ge\frac{1}{2}$, 즉 $e^{-k(k-1)/730}\le\frac{1}{2}$이어야 하므로

$$\frac{k(k-1)}{730}\ge\ln 2\approx\frac{253}{365}, \qquad \text{즉} \qquad k(k-1)\ge 506.$$

$22\times 21=462$이고 $23\times 22=506$이므로 가장 작은 값은 $k=23$이다. $\blacksquare$

(23명일 때의 정확한 확률은 0.507이고 22명일 때는 0.476이므로, 근사로 올바른 답을 얻는다.)

4단계 주인과 생일이 같은 경우

> ? **생각해 보기** 각 손님에 대해, 파티 주인과 생일이 같지 **않을** 확률은 얼마인가? 이 점에서 손님들은 서로 독립(independent)인가?

각 손님은 독립적으로 확률 $\frac{364}{365} \approx e^{-1/365}$로 주인의 생일을 비켜 간다. 따라서 k명의 손님 중 아무도 주인과 생일이 같지 않을 확률은 $\left(\frac{364}{365}\right)^k \approx e^{-k/365}$이고, 다음이 성립해야 한다.

$$e^{-k/365} \le \frac{1}{2}, \qquad \text{즉} \qquad k \ge 365 \ln 2 \approx 253.$$

그러므로 손님이 253명 있어야 한다. ■

이 대비가 핵심이다. 특정한 한 사람과 일치하려면 손님이 253명 필요하지만, 어떤 쌍이 일치하는 데는 23명이면 충분하다. 23명이 253개의 쌍을 이루기 때문이다.

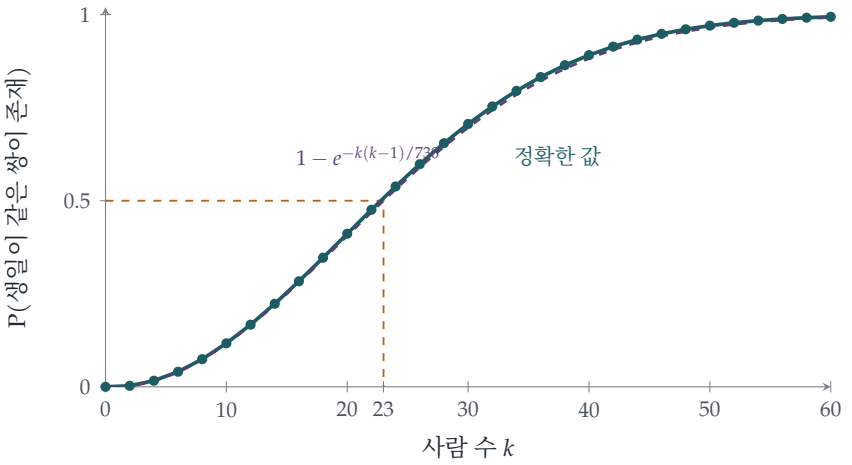


그림 9.9.1 k명 중 적어도 두 사람의 생일이 같을 확률: 정확한 값(청록색)과 근사 $1 - e^{-k(k-1)/730}$(자주색, 점선). 두 값은 매우 가깝고, 둘 다 $k = 22$와 $k = 23$ 사이에서 $\frac{1}{2}$를 넘는다.

돌아보기

- **여사건을 이용하라.** "모두 다르다"는 하나의 곱이었지만, "적어도 하나 일치한다"는 엉망이었다.
- **선형화한 다음 지수화하라.** 각 인수 $1 - x$를 e^{-x}로 바꾸자 곱이 합으로 바뀌었다.
- **쌍을 세어라.** 지수는 쌍의 개수에 한 쌍이 일치할 확률을 곱한 것이었다. $k(k-1)$ 속의 제

곱이 이 역설에 대한 설명의 전부이다.

숨은 수학

제곱근 법칙

365일 대신 똑같이 가능한 날이 n일 있다면, 같은 논증으로

$$\text{P(일치가 있을 확률, 인원}k\text{)} \approx 1 - e^{-k^2/(2n)},$$

을 얻는다. 따라서 k가 n이 아니라 $\sqrt{n}$ 정도만 되어도 일치가 일어날 가능성이 커진다. 더 정확히 말하면, 확률은 $k \approx 1.18\sqrt{n}$에서 $\frac{1}{2}$에 이르고, 처음으로 겹치는 사람이 나올 때까지 만나야 하는 사람 수의 기댓값은 약 $\sqrt{\pi n/2}$이다($n = 365$이면 약 24.6). 이 **제곱근 법칙**(square-root law)이 우연의 일치가 그토록 흔한 이유이다. 사건들을 크게 모아 놓으면, 특정한 일치 하나하나는 일어날 것 같지 않아도 어떤 쌍은 어떤 식으로든 일치할 가능성이 크다.

생일 공격

컴퓨터는 파일이 변조되지 않았는지 확인하기 위해 **해시**(hash)를 계산한다. 해시는 예컨대 $n = 2^{128}$가지의 값 중 하나를 갖는 지문과 같은 것이다. 해시가 같은 두 문서(무해한 계약서와 사기성 계약서)를 원하는 위조자는 2^{128}개의 문서를 시도할 필요가 없다. 생일 논증에 따르면 각 문서의 변형을 약 $\sqrt{2^{128}} = 2^{64}$개씩 만들어 내면 아마도 일치가 생길 것이다. 이 **생일 공격**(birthday attack) 때문에 현대의 해시 함수는 256비트 이상을 사용한다. 제곱근 법칙 때문에 비트의 절반을 잃기 때문이다. 비슷한 계산으로, 두 컴퓨터가 실수로 같은 식별자를 고르는 일이 결코 없도록 무작위 식별자의 길이를 얼마로 해야 하는지도 정한다.

처음 물은 사람은 누구인가?

생일 문제는 보통 1939년에 이 문제를 다룬 리하르트 폰 미제스(Richard von Mises)의 공으로 돌려지지만, 그 이전부터 퍼져 있었다. 해럴드 대븐포트(Harold Davenport)도 그보다 먼저 이 문제를 알고 있었으나 너무 단순해 보여서 발표하지 않았다고 전해진다. 워런 위버(Warren Weaver)가 전하는 이야기에 따르면, 그는 제2차 세계 대전 중 육군 장교들의 만찬에서 이 문제를 보여 주기를 좋아했다. 한번은 그 자리에 있던 스물두 명 중 두 사람의 생일이 같다는 데 내기를 걸었다가 졌는데, 그때 한 웨이트리스가 자신이 장교 중 한 명과 생일이 같다고 밝혔다.

사고 기술

여사건을 계산하고, 신중하게 근사하라

"적어도 하나"가 복잡할 때는 "하나도 없음"의 확률을 구하라. 곱이 다루기 까다로울 때는 각 인수를 지수함수로 근사하고 지수를 더하라.

두 방법 모두 대학에서 표준적으로 쓰인다. 두 번째 방법인 $1 - x \approx e^{-x}$는 푸아송 근사 이론의 출발점이며, 정확히 계산하기에는 너무 복잡한 양을 추정하는 데 쓰이는 점근적 방법(asymptotic methods)의 출발점이기도 하다.

더 도전하기

1 **첫 번째 반복.** STEP II 2014, 13번 문제 (`step.maths.org/questions/14-s2-q13`)에 도전해 보자. 이 문제는 난수 생성기에서 처음으로 반복되는 값을 다루는데, 이는 모습을 바꾼 생일 문제이며, 확률들을 놀라운 두 항등식으로 바꾸어 놓는다.

2 **세 사람의 생일이 같은 경우.** 어떤 세 사람의 생일이 같을 확률이 절반보다 커지려면 대략 몇 명이 필요한가? (힌트: 생일이 같은 세 사람 묶음의 개수의 기댓값은 $\binom{k}{3}/365^2$이다. 이 값을 약 $\ln 2$로 놓아라.) 실제 답은 88이다.

3 **아슬아슬한 경우.** 두 사람의 생일이 같은 날이거나 이웃한 날일 확률이 절반이 되려면 몇 명이 필요한가?

4 **고르지 않은 생일.** 실제 생일은 균등하게 분포하지 않는다. 각 날의 확률이 $p_1, \ldots, p_{365}$일 때 두 사람의 생일이 같을 확률은 $\sum p_i^2$이고, 이 값은 모든 p_i가 같을 때 가장 작음을 보여라. (따라서 분포가 고르지 않으면 일치가 오히려 더 일어나기 쉬워진다.)

더 읽을거리

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley), 제II장. 생일 문제와 그 근사.
- **Persi Diaconis & Frederick Mosteller, "Methods for studying coincidences"**, *Journal of the American Statistical Association* 84 (1989). 우연의 일치가 흔한 이유를 다루며, 매우 읽기 쉽다.
- **David Hand, *The Improbability Principle*** (Bantam). 제곱근 법칙을 비롯해, 일어날 것 같지 않은 일이 늘 일어나는 이유들을 다룬다.

9.10 언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록

문제

STEP I 2011, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/11-s1-q12`

도입

$\frac{m}{m+1}$, $\frac{m-1}{m+1}$, $\frac{m-2}{m+1}$라는 패턴은 그냥 지나치기 어렵다. £2 동전을 가진 사람이 n명이면 답은 분명 $\frac{m-n+1}{m+1}$일 것이다. 실제로 그렇다. 그리고 가장 매끄러운 증명은 조합론(combinatorics)에서 가장 우아한 아이디어 가운데 하나인 **반사 원리**(*reflection principle*)이다. 이 원리는 그림의 일부를 직선에 대하여 반사시켜, 세기 어려운 것(거스름돈이 한 번도 떨어지지 않는 줄)을 세기 쉬운 것으로 바꾸어 준다.

같은 문제는 여러 모습으로 나타난다. 개표하는 동안 당선자가 한 번도 뒤지지 않는 선거(1887년 베르트랑(Bertrand)의 투표 문제(ballot problem)), 끝내 파산하지 않는 도박꾼, 올바르게 짝지어진 괄호 등이 그 예이다. $m = n$일 때 이 개수는 **카탈랑 수**(*Catalan numbers*)가 되는데, 이것은 아마도 조합론에서 이항계수(binomial coefficients) 다음으로 자주 등장하는 수열일 것이다.

시작하기 전에

생각해 보기 £1 손님은 동전을 하나씩 주고, £2 손님은 (거스름돈으로) 동전을 하나씩 가져간다. 언제 막히게 되는가?

가지고 있는 £1 동전의 개수를 추적하자. 이 개수는 £1 손님마다 1씩 늘고, £2 손님마다 1씩 준다. 막히는 것은 정확히 동전이 하나도 없을 때 £2 손님이 오는 경우, 곧 개수가 -1이 되려는 경우이다. 따라서 성공할 필요충분조건은 줄의 모든 지점에서 그때까지의 £1 손님 수가 그때까지의 £2 손님 수 이상인 것이다.

차근차근 풀기

1단계 £2 동전이 하나일 때

$n = 1$이면 £2 손님이 맨 앞에 있을 때만 실패한다. £2 손님은 $m+1$개의 자리 중 어느 자리에나 같은 확률로 있을 수 있으므로

$$\mathrm{P}(\text{성공}) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}. \qquad \blacksquare$$

2단계 £2 동전이 둘일 때

> **생각해 보기** 첫 번째 사람은 반드시 £1 동전을 가지고 있어야 한다. 두 번째 사람에게는 어떤 일이 일어날 수 있으며, 각 경우에 어떤 상황에 놓이게 되는가?

첫 번째 사람이 £1 동전을 가지고 있을 확률은 $\frac{m}{m+2}$이고, 그렇지 않으면 곧바로 실패한다. 그러면 동전을 하나 가지게 되고, 남은 줄에는 £1을 가진 사람 $m-1$명과 £2를 가진 사람 2명이 있다.

- 두 번째 사람이 £1 동전을 가지고 있으면(확률 $\frac{m-1}{m+1}$), 동전이 두 개가 되어 £2 동전 두 개가 언제 오든 모두 거슬러 줄 수 있다. 성공이 확실하다.
- 두 번째 사람이 £2 동전을 가지고 있으면(확률 $\frac{2}{m+1}$), 다시 동전이 하나도 없는 상태가 되고, £1을 가진 사람 $m-1$명과 £2를 가진 사람 1명이 남는다. 소문항 (i)에서 m 대신 $m-1$을 쓰면 성공할 확률은 $\frac{m-1}{m}$이다.

따라서

$$\mathrm{P}(\text{성공}) = \frac{m}{m+2}\left(\frac{m-1}{m+1} + \frac{2}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m}\right) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{m+2}{m} = \frac{m-1}{m+1}. \qquad \blacksquare$$

> **잠깐, 직접 해 보기** $n = 3$일 때도 같은 방법을 시도해 보아라. 가능하기는 하지만 경우가 급격히 늘어난다. 성공하는 줄을 한꺼번에 셀 방법은 없을까?

3단계 줄을 경로로 보기

> **생각해 보기** 응대한 사람 수에 대하여 가지고 있는 동전의 개수를 그래프로 그려 보아라. 줄은 어떤 모양이 되는가? 성공하는 줄은 어떤 모양인가?

줄은 m개의 올라가는 걸음(£1)과 n개의 내려가는 걸음(£2)으로 이루어진 경로로, 높이 0에서 출발하여 높이 $m-n$에서 끝난다. 이런 경로는 $\binom{m+n}{n}$개이고, 모두 같은 확률로 일어난다.

줄이 성공하는 것은 정확히 그 경로가 한 번도 0 아래로 내려가지 않을 때이다. 따라서 높이 -1에 닿는 **나쁜** 경로의 개수를 세면 된다.

4단계 반사

> **?** **생각해 보기** 나쁜 경로를 하나 잡자. 그 경로가 처음으로 -1에 닿는 순간을 찾고, 그 순간 **이전**의 경로 부분을 직선 $y=-1$에 대하여 반사시켜라. 새 경로는 어디에서 출발하고 어디에서 끝나는가?

반사된 경로는 -2(직선 $y=-1$에 대한 0의 대칭점)에서 출발하고, 원래 경로와 같은 곳인 $m-n$에서 끝난다(그림 9.10.1). 거꾸로, -2에서 $m-n$으로 가는 모든 경로는 어딘가에서 반드시 $y=-1$을 지난다($m \geq n$이므로 아래에서 출발하여 위에서 끝나기 때문이다). 이 경로를 처음 $y=-1$에 닿기 전까지 반사시키면 0에서 출발하는 나쁜 경로를 되찾는다. 따라서 0에서 출발하는 나쁜 경로는 -2에서 $m-n$으로 가는 **모든** 경로와 정확히 대응한다.

$m+n$걸음 동안 -2에서 $m-n$으로 가는 경로는 $m-n+2$만큼 올라가므로, 올라가는 걸음이 $m+1$개, 내려가는 걸음이 $n-1$개이다. 이런 경로는 $\binom{m+n}{n-1}$개이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{실패}) = \frac{\binom{m+n}{n-1}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{n!\,m!}{(n-1)!\,(m+1)!} = \frac{n}{m+1},$$

이고

$$\mathrm{P}(\text{성공}) = 1 - \frac{n}{m+1} = \frac{m-n+1}{m+1}.$$

$n=3$이면 이 값은 $\frac{m-2}{m+1}$이다. ■

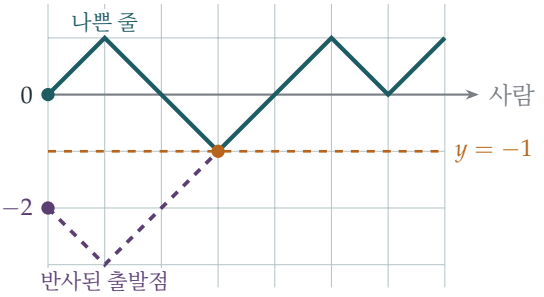


그림 9.10.1 £1 동전 $m=4$개와 £2 동전 $n=3$개로 이루어진 줄을 경로(청록색)로 나타낸 것이다. 이 경로는 세 번째 사람에서 처음으로 -1에 닿고(호박색), 이때 거스름돈을 줄 수 없다. 그 지점까지의 경로를 직선 $y=-1$에 대하여 반사시키면 -2에서 출발하여(자주색, 점선) 같은 끝점에 이르는 경로가 된다. 나쁜 줄과 -2에서 출발하는 경로 사이의 이 대응이 바로 반사 원리이다.

돌아보기

- **알맞은 상태를 찾아라.** 중요한 것은 가지고 있는 동전의 개수뿐이었고, 이것이 줄을 하나의 행보로 바꾸어 주었다.
- **처음 몇 걸음으로 조건을 나누어라.** 소문항 (i)과 (ii)는 처음 몇 사람이 무엇을 하는지 물어서 더 작은 경우로 줄여 풀었다.
- **전단사로 여사건을 세어라.** 나쁜 경로는 직접 세기 어려웠지만, 반사를 통해 세기 쉬운 집합과 짝지을 수 있었다. 이처럼 여사건(complement)을 전단사(bijection)로 세는 것이 핵심이었다.

숨은 수학

카탈랑 수

$m = n$일 때(£1 동전이 딱 필요한 만큼 있을 때), 성공하는 줄의 개수는

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

즉 n번째 **카탈랑 수** C_n: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$이다. Richard Stanley의 책 *Catalan Numbers*에는 이 수가 세는 서로 다른 대상이 이백 가지 넘게 실려 있다. 그 가운데 몇 가지를 들면, n쌍의 괄호를 올바르게 배열하는 방법의 수("(())()"는 되지만 "())(()"는 안 되는데, 이는 "("를 £1로, ")"를 £2로 보면 동전 논증과 정확히 같다), $n+2$각형을 서로 교차하지 않는 대각선으로 삼각형들로 나누는 방법의 수, $n+1$개 인수의 곱에 괄호를 치는 방법의 수가 있다.

무작위 행보

줄은 무작위 행보(random walk)이고, 반사 원리는 무작위 행보를 연구하는 기본 도구 가운데 하나이다. 예를 들어 이 원리를 쓰면 0에서 출발하는 공정한 무작위 행보는 언젠가 반드시 0으로 돌아오며, 처음 $2n$걸음 동안 줄곧 양수에 머물 확률이 $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}2^{-2n} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$임을 보일 수 있다. 연속인 경우에 같은 반사 논증을 **브라운 운동**(*Brownian motion*)에 적용하면 그 최댓값의 분포를 얻는다. 이것은 주가가 어떤 경계를 한 번이라도 넘는지에 따라 수익이 달라지는 특정 금융 옵션의 가격을 매기는 바탕이 된다.

베르트랑의 투표 문제

1887년 Joseph Bertrand는 다음과 같이 물었다. 후보 A가 a표를, B가 $b < a$표를 얻는 선거에서, 개표하는 내내 A가 엄격하게 앞서 있을 확률은 얼마인가? 답 $\frac{a-b}{a+b}$는 같은 해에

Désiré André가 증명하였고, 그의 논증은 흔히 반사 원리로 기억된다(다만 역사가들은 André의 실제 증명이 약간 다른 전단사를 썼다고 지적한다). 우리의 추첨권 문제는 동점을 허용하는 변형으로, 성공이란 £1의 개수가 한 번도 £2의 개수 **아래로** 떨어지지 않는 것을 뜻한다. 연습문제 하나에서 우리의 답으로부터 베르트랑의 답을 이끌어 낸다.

사고 기술

전단사를 이용한 세기

어떤 집합의 원소를 세려면, 셀 수 있는 집합과의 일대일 대응(*one-to-one correspondence*)을 찾아라.

반사는 나쁜 줄을 다른 출발점에서 시작하는 제한 없는 경로와 짝지어 주었다. 전단사는 조합론에서 가장 만족스러운 증명이다. 두 수가 같다는 것을 보이는 데 그치지 않고 왜 같은지를 설명해 주기 때문이다. 대학에서는 조합론 전반에 걸쳐 전단사 증명을 만나게 되고, 무작위 행보와 브라운 운동을 공부할 때 반사 원리를 다시 만나게 된다.

더 도전하기

1 **경우를 나누어 셋까지.** 소문항 (ii)에서처럼 줄의 처음 몇 사람으로 조건을 나누어 소문항 (iii)을 증명하고, 반사 원리가 얼마나 많은 수고를 덜어 주는지 확인하여라.

2 **베르트랑의 투표 문제.** 어떤 선거에서 A는 a표를, B는 $b < a$표를 얻는다. 개표하는 내내 A가 엄격하게 앞서 있을 확률이 $\frac{a-b}{a+b}$임을 보여라. (**힌트:** 첫 표는 반드시 A의 것이어야 한다. 그 뒤로 A는 B보다 ...넘게 뒤처져서는 안 된다.)

3 **괄호.** 세 쌍의 괄호를 올바르게 배열하는 5가지 방법과 오각형을 삼각형들로 나누는 5가지 방법을 모두 나열하여라. 둘 사이의 전단사를 찾을 수 있는가?

4 **£5 지폐.** 가격이 £1인 표를 사려는 줄에 £1 동전을 가진 사람 m명과 £5 지폐를 가진 사람 n명이 있다. 이 경우에는 왜 반사 원리로 간단한 답을 얻을 수 없는지 설명하여라. (이 일반화는 훨씬 어렵다.)

더 읽을거리

► **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley),

제III장. 무작위 행보와 반사 원리를 다룬 고전적인 책이다.

- **Richard Stanley, *Catalan Numbers*** (Cambridge University Press). 이백 가지가 넘는 해석과 연습문제가 실려 있다.
- **Marc Renault, "Lost (and found) in translation: André's actual method and its application to the generalized ballot problem"**, *American Mathematical Monthly* 115 (2008). 반사 원리의 역사를 다룬다.

9.11 한 세트 모두 모으기

문제

STEP II 1994, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/94-s2-q13`

도입

어떤 축구 스티커 앨범에는 모아야 할 스티커가 600장 있고, 스티커는 한 장씩 무작위로 판매된다. 앨범을 다 채우려면 스티커를 몇 장 사야 한다고 기대할 수 있을까? 처음 몇백 장은 금방 모인다. 거의 모든 스티커가 새것이기 때문이다. 그러나 앨범이 채워질수록 새 스티커는 점점 드물어지고, 마지막 한 장만 해도 평균 600번을 사야 나온다. 전체는 약 4200장으로, 앨범 크기의 일곱 배에 이른다.

이것이 **쿠폰 수집가 문제**(*coupon collector's problem*)이다. 그 답은 두 가지 아이디어를 결합한다. 하나는 성공할 때까지의 대기 시간이고, 다른 하나는 $\ln n$처럼 증가하는 조화급수(harmonic series) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$이다. 조화급수가 발산한다는 것은 Section 2.3에서 보았다. 여기서는 바로 그 느린 증가가 수집을 완성하는 데 치러야 하는 대가이다.

시작하기 전에

생각해 보기 각 봉지에서 독립적으로 확률 p로 새 카드가 나온다면, 첫 번째 새 카드가 나올 때까지(그 봉지 포함) 뜯는 봉지 수의 기댓값은 얼마인가?

봉지 수 X는 **기하분포**(*geometric distribution*) $\mathrm{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$를 따른다. 그 기댓값(expectation)은 $\frac{1}{p}$이다. (이를 빠르게 확인하는 방법 하나: 봉지 하나를 뜯고, 확률 $1-p$로 처음 상태로 돌아가므로 $\mathrm{E}(X) = 1 + (1-p)\mathrm{E}(X)$이다.) 새 카드가 세 번에 한 번꼴로 나온다면, 세 봉지를 기다릴 것으로 기대된다.

차근차근 풀기

1단계 새 카드 기다리기

이미 서로 다른 카드 r장을 가지고 있다면, 한 봉지에서 새 카드가 나올 확률은 이전 봉지들과 독립적으로 $\frac{n-r}{n}$이다. 따라서 다음 새 카드가 나올 때까지 뜯는 봉지 수의 기댓값은

$$\frac{1}{(n-r)/n} = \frac{n}{n-r}. \qquad \blacksquare$$

2단계 합과 적분 비교하기

> **생각해 보기** 구간 $r \le x \le r+1$에서 $\frac{1}{x}$는 어떤 두 값 사이에 있는가? 이것은 곡선 아래의 넓이에 대해 무엇을 말해 주는가?

$\frac{1}{x}$는 감소하므로 $[r, r+1]$에서 $\frac{1}{r+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{r}$이다. 길이가 1인 구간에서 적분하면

$$\frac{1}{r+1} \le \int_r^{r+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{r}. \qquad \blacksquare$$

그림으로 보면(그림 9.11.1) 곡선 아래의 넓이가 높이 $\frac{1}{r+1}$인 직사각형과 높이 $\frac{1}{r}$인 직사각형 사이에 끼어 있다. 이것을 $r=1$부터 $r=n-1$까지 더하면 적분들이 이어져 $\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$이 되고, 따라서

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \le \ln n \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}. \qquad \blacksquare$$

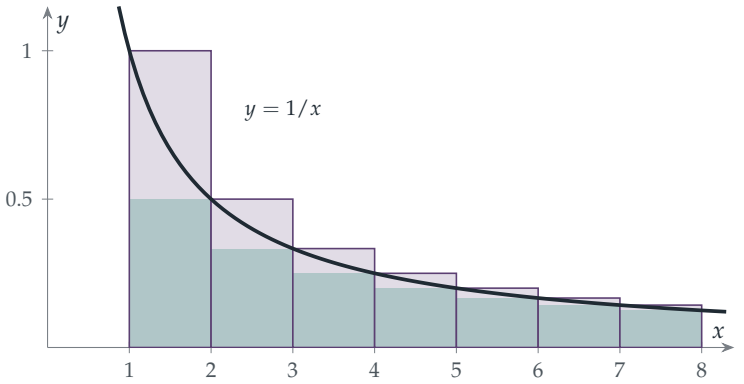


그림 9.11.1 각 구간 $[r, r+1]$에서 $y = 1/x$ 아래의 넓이는 청록색 직사각형(높이 $\frac{1}{r+1}$)과 그보다 큰 자주색 직사각형(높이 $\frac{1}{r}$) 사이에 있다. 이를 모두 더하면 $\ln n$은 $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$과 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$ 사이에 있다. 곡선과 자주색 직사각형 사이의 틈을 모두 더하면 유한한 값이 되는데, 이것이 오일러(Euler) 상수 $\gamma \approx 0.577$이다.

3단계 세트 완성하기

생각해 보기 전체 봉지 수는 첫 번째 카드, 두 번째 새 카드 등을 기다리는 대기 시간들의 합이다. 그 기댓값은 얼마인가?

서로 다른 카드 r장에서 $r+1$장이 되기까지 필요한 봉지 수를 X_r라 하자. 전체는 $X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$이고, 기댓값은 더해지므로

$$\mathrm{E}(\text{전체}) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n}{n-r} = n\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\Big) = nH_n,$$

이다. 여기서 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$은 n번째 **조화수**(*harmonic number*)이다. 2단계에서 $\ln n + \frac{1}{n} \le H_n \le \ln n + 1$이므로, n이 클 때 H_n은 대략 $\ln n$이고, 나는 대략

$$n \ln n \text{ 봉지.} \qquad \blacksquare$$

를 먹어야 한다고 예상해야 한다.

돌아보기

- **긴 기다림을 단계로 나누어라.** 전체 시간은 n개의 대기 시간으로 나뉘었고, 각각은 단순한 기하분포 형태였다.
- **기댓값은 더할 수 있다.** 전체의 분포는 전혀 필요하지 않았고, 각 조각의 기댓값만 있으면 되었다.
- **합을 적분과 비교하라.** 그림을 통해 계산할 수 없는 합을 오차가 최대 1인 로그로 바꾸었다.

숨은 수학

이 추정은 얼마나 정확한가?

비교를 더 정밀하게 할 수 있다. 그림 9.11.1에서 곡선과 위쪽 직사각형 사이의 색칠된 틈들은 넓이의 합이 유한하므로, $H_n - \ln n$은 어떤 극한으로 수렴(converge)한다.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = 0.5772156649\ldots,$$

이것이 **오일러 상수**(*Euler's constant*)이다. (γ가 유리수(rational)인지는 아무도 모른다.) 따라서 봉지 수의 기댓값은 $n \ln n + \gamma n + \frac{1}{2} + \cdots$이다. 스티커 600장짜리 앨범의 경우 $600 \times (\ln 600 + 0.577) \approx 4185$로, 도입에서 말한 수치가 바로 이것이다.

시간은 어디에 쓰이는가? 각 단계는 매우 불균등하다. 세트의 처음 절반을 모으는 데는 약 $n \ln 2 \approx 0.69n$봉지밖에 들지 않지만, 마지막 카드 하나에만 평균 n봉지가 든다. 노력의 대부분은 마지막 몇 장에 들어가며, 그래서 수집가들은 중복된 카드를 서로 교환한다.

집중

기댓값은 시작일 뿐이다. 전체는 얼마나 변동하는가? 전체의 분산(variance)은 $\sum nr/(n-r)^2$이고, 이는 약 $\frac{\pi^2}{6}n^2$이다(Section 2.4에서 나온 합 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$이 등장한다). 따라서 표준편차(standard deviation)는 약 $1.28n$으로, n이 클 때 평균 $n \ln n$보다 훨씬 작다. 즉 전체는 평균 주위에 **집중**(*concentrated*)되어 있다. 폴 에르되시(Paul Erdős)와 알프레드 레니(Alfréd Rényi)는 1961년에 더 정확하게, 전체에서 $n \ln n$을 빼고 n으로 나눈 값이 극한분포(limiting distribution)를 가지며, 그것이 **굼벨 분포**(*Gumbel distribution*)임을 보였다. 굼벨 분포는 많은 확률적인 양 가운데 가장 큰 값을 기술하는 분포이기도 하다(Section 12.25).

어디에나 있는 쿠폰

이 문제는 아브라암 드무아브르(Abraham de Moivre, 1712)와 라플라스(Laplace)까지 거슬러 올라간다. 오늘날 이 문제는 여러 모습으로 나타난다. 시스템의 모든 부품을 점검하려면 무작위 검사가 몇 번 필요한가? 네트워크 위의 랜덤 워크(random walk)가 모든 노드를 방문할 때까지 얼마나 걸리는가? 컴퓨터 해시 테이블(hash table)을 몇 번 탐색해야 하는가? 어느 경우든 답에는 $n \ln n$이 들어 있다. 생물학에서는 같은 계산으로 유전체 전체를 덮는 데 필요한 염기서열 분석 "리드(reads)"의 수를 추정한다.

사고 기술

기댓값의 선형성

합의 기댓값은 기댓값의 합이며, 이는 각 조각이 독립(*independent*)이든 아니든 성립한다. 복잡한 확률적인 양을 단순한 조각들로 나누어라.

이것은 확률에서 가장 유용한 사실 가운데 하나인 기댓값의 선형성(linearity of expectation)이다. 여기서는 쿠폰 수집가 문제를 n개의 기하분포 대기로 환원했고, Section 9.8에서는 아무 계산 없이 일치하는 개수의 기댓값을 구해 주었다. 대학에서는 같은 아이디어가 알고리즘 분석과 조합론(combinatorics)의 확률적 방법(probabilistic method)을 뒷받침한다.

더 도전하기

1 **세트의 절반.** (n이 짝수일 때) 서로 다른 카드 $\frac{n}{2}$장을 모으는 데 필요한 봉지 수의 기댓값이 $n(H_n - H_{n/2})$이고, 이것이 약 $n \ln 2$임을 보여라.

2 **서로 다른 카드.** k봉지를 뜯은 뒤 가지고 있는 서로 다른 카드 수의 기댓값이 $n\big(1-(1-\frac{1}{n})^k\big)$임을 보여라. (**힌트:** 각 카드에 대해 그 카드를 가지고 있을 확률을 구하고, 모두 더하라.) 대략 몇 봉지를 뜯으면 세트의 95%를 얻는가?

3 **두 수집가.** 두 아이가 같은 세트를 모으면서 봉지를 함께 나누어, 한 아이에게 중복인 카드가 다른 아이에게는 새 카드가 될 수 있다. 두 세트를 모두 완성하는 데 필요한 봉지 수의 기댓값이 약 $n(\ln n + \ln\ln n)$임을 보여라. (이 문제는 더 어렵다. 먼저 이것이 $2n\ln n$보다 훨씬 작다는 것을 납득해 보라.)

4 **더 정밀한 한계.** 직사각형 대신 사다리꼴 공식(trapezium rule)의 그림을 이용하여 $H_n - \ln n$이 감소하고 $H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$이 증가함을 보여라. 작은 n 값들로부터 $0.5 < \gamma < 0.7$을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *One Thousand Exercises in Probability*** (Oxford University Press). 쿠폰 수집가 문제의 다양한 변형이 많이 실려 있다.
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*** (Princeton University Press). γ와 조화급수에 관한 모든 것을 쉽게 읽을 수 있는 수준으로 다룬다.
- **Michael Mitzenmacher & Eli Upfal, *Probability and Computing*** (Cambridge University Press). 쿠폰 수집가 문제와 컴퓨터 과학에서의 활용을 다룬다.

9.12 무작위 부분집합

문제

STEP III 2019, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

도입

$\{1, 2, \ldots, 100\}$의 부분집합(subset) 두 개를 완전히 무작위로 고른다고 하자. 두 집합이 공통 원소를 하나도 갖지 않을 가능성은 얼마나 될까? 직관은 "꽤 높다. 대부분의 집합 쌍은 서로 다르니까"라고 말할지도 모른다. 그러나 실제 확률(probability)은 $\left(\frac{3}{4}\right)^{100}$, 즉 약 3×10^{-13}이다. 무작위 집합은 크기가 크고(전체의 약 절반), 그래서 거의 언제나 서로 겹친다.

문제는 짧지만, 그 안에 담긴 한 가지 아이디어는 강력하다. 집합을 통째로 생각하지 말고, 원소를 하나씩 생각하라는 것이다. 무작위 부분집합은 각 원소마다 한 번씩, 모두 n번의 독립적인 동전 던지기일 뿐이며, 무작위 부분집합에 관한 모든 질문은 이 동전 던지기에 관한 질문이 된다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\{1, \ldots, n\}$의 부분집합을 예/아니요 질문에 대한 n개의 답의 나열로 어떻게 나타낼 수 있을까?

각 원소 i에 대하여 "i가 집합에 속하는가?"라는 질문에 답한다. 부분집합이 정해지면 답이 정해지고, 답이 정해지면 부분집합이 정해진다. 원소마다 선택지가 2가지이므로 부분집합은 모두 2^n개이다. 부분집합을 균등하게 무작위로 고르는 것은 각 질문에 공정한 동전을 독립적으로 던져 답하는 것과 같다.

차근차근 풀기

1단계 원소 하나

동전 던지기 설명에 따르면 $\mathrm{P}(1 \in A_1) = \frac{1}{2}$이다. 실제로 2^n개의 부분집합 중 정확히 절반이 1을 포함한다. 1을 포함하지 않는 각 부분집합을, 거기에 1을 추가하여 얻은 부분집합과 짝지으면 된다.

2단계 서로소인 집합

> **생각해 보기** $A_1 \cap A_2 = \varnothing$이려면 각 원소 i에 대해 무엇이 성립해야 하는가? 원소 하나에 대해 그 확률은 얼마인가? 왜 원소들에 걸쳐 곱할 수 있는가?

A_1과 A_2는 두 집합 모두에 속하는 원소가 없을 때 정확히 서로소(disjoint)이다. 원소 i 하나에 대해서는 같은 확률로 일어나는 네 가지 경우가 있다. 어느 집합에도 속하지 않는 경우, A_1에만 속하는 경우, A_2에만 속하는 경우, 둘 다에 속하는 경우이다(그림 9.12.1의 왼쪽). 마지막 경우만 금지되므로, i가 두 집합 모두에 속하지 않을 확률은 $\frac{3}{4}$이다. 서로 다른 원소는 서로 다른 독립(independent)인 동전 던지기로 정해지므로

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 = \varnothing) = \left(\frac{3}{4}\right)^n. \qquad \blacksquare$$

집합이 세 개라면 원소 i가 세 집합 모두에 속할 확률은 $\frac{1}{8}$이므로 $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing) = \left(\frac{7}{8}\right)^n$이다. 일반적으로

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_m = \varnothing) = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^n. \qquad \blacksquare$$

3단계 부분집합

> **생각해 보기** $A_1 \subseteq A_2$이려면 원소에 대한 네 가지 경우 중 어느 것이 금지되는가?

$A_1 \subseteq A_2$는 어떤 원소가 A_1에는 속하지만 A_2에는 속하지 않을 때 정확히 성립하지 않는다. 이번에도 네 가지 패턴 중 하나가 금지되므로

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

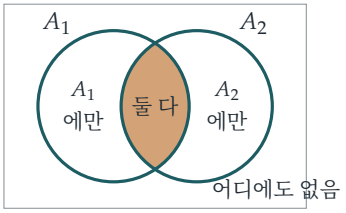
즉 서로소일 확률과 같다. 이것은 우연이 아니다. $A_1 \subseteq A_2$는 A_1이 A_2의 여집합(complement)과 서로소일 때 정확히 성립하며, 무작위 집합의 여집합은 또 다른 무작위 집합이다.

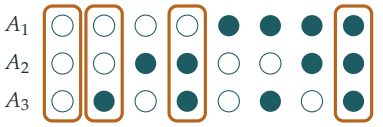
생각해 보기 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$이려면, 원소의 소속 패턴(각 집합에 속하는지 아닌지) 8가지 중 어느 것이 허용되는가?

사슬(chain) A_1, A_2, A_3을 따라가면서, 원소가 일단 들어오면 계속 들어 있어야 한다. 따라서 허용되는 패턴은 "밖, 밖, 밖", "밖, 밖, 안", "밖, 안, 안", "안, 안, 안"으로 8가지 중 4가지이다(그림 9.12.1의 오른쪽). 그러므로 $\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3) = \left(\frac{4}{8}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

집합 m개로 이루어진 사슬에서는, 허용되는 패턴이 원소가 처음 들어가는 집합($A_1, \ldots, A_m$ 중 하나, 또는 끝내 들어가지 않음)에 의해 결정되므로 2^m개의 패턴 중 $m+1$개가 허용된다.

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_m) = \left(\frac{m+1}{2^m}\right)^n. \qquad \blacksquare$$





각 원소: 같은 확률의 4가지 위치 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$에 허용되는 패턴: 8가지 중 4가지

그림 9.12.1 왼쪽: S의 원소는 A_1과 A_2에 대하여 네 가지 위치 중 하나에 있을 수 있으며, 각각의 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 서로소 조건은 "둘 다"(호박색)를 금지하고, $A_1 \subseteq A_2$는 "A_1에만"을 금지한다. 오른쪽: A_1, A_2, A_3에 대한 여덟 가지 소속 패턴(채워진 원은 "안"을 뜻한다). 사슬 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$은 상자로 표시한 네 패턴만 허용하는데, 이 패턴들에서는 원소가 일단 들어오면 계속 들어 있다.

돌아보기

- **원소별로 분해하기.** 집합 수준의 각 조건(서로소, 부분집합, 사슬)은 각 원소에 대한 개별 조건이었다.
- **원소 사이의 독립성.** 원소들은 독립적인 동전 던지기로 정해지므로 확률을 곱한다.
- **패턴 세기.** 각 답은 (허용되는 패턴 수 ÷ 전체 패턴 수)^{n}이었다.

숨은 수학

확률 없이 세기

선택의 가짓수를 곱하면 각 확률이 개수로 바뀐다. $A_1 \subseteq A_2$인 순서쌍 (A_1, A_2)의 개수는 $4^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3^n$이다. 이 쌍들을 직접 셀 수도 있다. A_2의 크기 k를 정하고, A_2 자체를 $\binom{n}{k}$가지 방법으로 고른 다음, A_1을 A_2의 2^k개 부분집합 중 하나로 고르면 된다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n,$$

이것은 $(1+2)^n$에 대한 이항정리(binomial theorem)이다. 같은 대상을 한 번은 원소별로, 한 번은 크기별로, 두 가지 방법으로 세어 항등식을 증명한 것이다. 이것이 **이중 계수**(*double counting*)라는 방법으로, Section 7.9에서 정다면체를 다룰 때 만난 적이 있다. 마찬가지로 사슬 $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_m$의 개수는 $(m+1)^n$이다.

부분집합의 격자

$\{1, \ldots, n\}$의 부분집합들은 포함 관계로 순서를 매기면 **불 격자**(*Boolean lattice*)라는 구조를 이룬다. 이것은 n차원 정육면체로 그려 볼 수 있다. 각 부분집합은 예/아니요 답의 나열로 이름 붙은 꼭짓점이고, 모서리를 따라 움직이는 것은 원소 하나를 추가하거나 제거하는 것이다. 사슬은 위로 올라가는 경로이다. 부분집합족에 조건이 주어졌을 때 그 족이 얼마나 클 수 있는지를 밝히는 깊은 결과들이 있다. **슈페르너 정리**(*Sperner's theorem*)(1928)는 어떤 집합도 다른 집합을 포함하지 않는 가장 큰 족이 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$개의 집합으로 이루어짐을 말하고, **에르되시–코–라도 정리**(*Erdős–Ko–Rado theorem*)(1961)는 어느 두 집합도 서로 겹치도록 k개 원소의 집합을 몇 개까지 고를 수 있는지를 말한다. 두 정리 모두 조합론(combinatorics) 입문 강의의 표준 내용이며, 부분집합을 동전 던지기로 보는 관점은 가장 매끄러운 증명 몇 가지를 제공한다.

불의 대수

조지 불(George Boole)의 *The Laws of Thought*("사고의 법칙", 1854)는 논리적 명제를 집합으로, "그리고", "또는", "아니다"를 각각 교집합, 합집합, 여집합으로 다루었다. 집합을 예/아니요 답의 문자열로 부호화하는 것은 바로 컴퓨터가 집합을 표현하는 방식이다. $\{1, \ldots, 64\}$의 부분집합은 하나의 64비트 수이고, 교집합은 "비트 AND" 명령이다. 원소 하나(비트 하나)씩 다루는 이 문제의 방법은 바로 그러한 연산을 분석하는 방법이다.

사고 기술

원소를 하나씩 생각하기

대상이 각 원소에 대한 독립적인 선택으로 만들어질 때, 모든 원소에 개별적으로 적용되는 조건의 확률은 곱과 같다.

이 방법은 2^n개의 부분집합에 관한 질문을 4개 또는 8개의 패턴에 관한 질문으로 바꾸었다. 대학에서는 조합론(집합과 중복집합(multiset)의 생성함수(generating function)), 확률론(독립인 좌표), 컴퓨터 과학(비트 단위 추론)에서 다시 등장한다.

더 도전하기

1 **덮기.** $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 = S)$와 $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = S)$를 구하여라.

2 **같은 크기.** $\mathrm{P}(|A_1| = |A_2|) = \binom{2n}{n}/4^n$임을 보여라. (힌트: $|A_1| = |A_2|$는 $|A_1| + |S \setminus A_2| = n$일 때 정확히 성립한다.) n이 클 때 이 값이 약 $1/\sqrt{\pi n}$임을 보여라.

3 **셋으로 분할하기.** S의 서로소인 부분집합의 순서쌍 (A, B)의 개수가 3^n임을 보이고, 서로소인 부분집합의 순서 없는 쌍 $\{A, B\}$의 개수를 구하여라.

4 **작은 n에 대한 슈페르너 정리.** $n = 3$과 $n = 4$에 대하여, 어떤 집합도 다른 집합을 포함하지 않는 $\{1, \ldots, n\}$의 부분집합족 중 가장 큰 것을 구하여라.

더 읽을거리

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 부분집합과 부분순서집합을 다루는 장들.
- **Béla Bollobás, *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability*** (Cambridge University Press). 슈페르너 정리에서 출발하여 부분집합족을 다루는 짧고 우아한 책.
- **Peter Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*** (Cambridge University Press). 두 가지 방법으로 세기를 특히 강조하는 입문서.

9.13 조작된 주사위

문제

STEP I 1999, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/99-s1-q12`

도입

공정한 주사위(fair dice) 두 개를 던지면 합이 7이 나올 가능성은 합이 2가 나올 가능성의 여섯 배이다. 보드게임 설계자들은 때때로 그렇지 않기를 바란다. 주사위를 조작하여(loaded, 어떤 면이 더 자주 나오도록 무게를 조절하여) 2부터 12까지의 모든 합이 같은 확률 $\frac{1}{11}$을 갖게 할 수 있을까? 열두 개의 확률을 자유롭게 정할 수 있으니 여지는 충분해 보인다.

답은 "불가능하다"이며, 그 증명은 보석 같다. 열한 가지 합 가운데 세 가지와 부등식 $x + \frac{1}{x} \geq 2$만을 사용한다. 이 증명은 어떤 것이 **불가능함**을 증명하는 방법의 모범이 되는데, 이런 증명은 어떤 것이 가능함을 보이는 것보다 더 어렵고 더 흥미로운 경우가 많다.

시작하기 전에

생각해 보기 $x > 0$일 때 $x + \frac{1}{x} \geq 2$를 어떻게 증명하겠는가? 등호는 언제 성립하는가?

양변에 $x > 0$을 곱하면 부등식은 $x^2 + 1 \geq 2x$, 즉 $(x-1)^2 \geq 0$이 되고, 이는 참이다. 등호는 $x = 1$일 때만 성립한다. (또는 $x + \frac{1}{x} - 2 = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2$을 이용해도 된다.) 이것은 가장 단순한 형태의 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이다. 즉 x와 $\frac{1}{x}$의 산술평균은 둘의 기하평균(geometric mean)인 1 이상이다.

차근차근 풀기

1단계 양 끝의 합

생각해 보기 합 2가 나오는 경우는 몇 가지인가? 합 12는? 그 확률을 q_i와 r_j로 나타내어 보아라.

합 2가 나오려면 두 주사위 모두 1이 나와야 하고, 12가 나오려면 둘 다 6이 나와야 하므로 $\mathrm{P}(2) = q_1 r_1$이고 $\mathrm{P}(12) = q_6 r_6$이다.

귀류법(proof by contradiction)을 쓰기 위해, 열한 가지 합이 모두 같은 가능성, 즉 각각 확률 $\frac{1}{11}$을 갖는다고 가정하자. 그러면

$$q_1 r_1 = \frac{1}{11}, \qquad q_6 r_6 = \frac{1}{11}.$$

특히 q_1, r_1, q_6, r_6 네 값은 모두 양수이다.

2단계 가운데 합

생각해 보기 합 7을 만드는 방법은 여섯 가지이다. 그중 면 1과 6만 관련된 두 가지는 무엇인가? 위의 식을 이용하여 그 확률을 나타내어 보아라.

합 7에는 결과 $(1, 6)$과 $(6, 1)$이 포함되므로

$$\mathrm{P}(7) \geq q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

이제 1단계의 식을 이용하여 비를 끌어들이자. $q_1 = \frac{1}{11 r_1}$이고 $q_6 = \frac{1}{11 r_6}$이므로

$$q_1 r_6 + q_6 r_1 = \frac{1}{11}\left(\frac{r_6}{r_1} + \frac{r_1}{r_6}\right) \geq \frac{1}{11} \times 2 = \frac{2}{11},$$

이다. 여기서 $x = r_6 / r_1 > 0$으로 두고 $x + \frac{1}{x} \geq 2$를 사용하였다. 따라서 $\mathrm{P}(7) \geq \frac{2}{11}$이고, 이는 $\mathrm{P}(7) = \frac{1}{11}$에 모순이다. 그러므로 모든 합이 같은 가능성을 가질 수는 없다. ■

잠깐, 직접 해 보기 증명이 성립하게 만든 것이 무엇인지 살펴보자. 2와 12가 7만큼 나올 가능성을 갖게 하려면 1과 6이 꽤 자주 나와야 하고, 그러면 "혼합된" 결과 $(1, 6)$과 $(6, 1)$만으로도 7이 너무 자주 나오게 된다. 그림 9.13.1에 관련된 칸들이 나타나 있다.



그림 9.13.1 두 주사위의 결과 36가지를 합으로 표시한 것이다. 증명에는 네 모서리 칸만 사용된다. 두 호박색 칸의 확률의 곱은 두 짙은 청록색 칸의 확률의 곱과 같고($q_1r_1q_6r_6 = q_1r_6 \cdot q_6r_1$), 산술-기하 평균 부등식에 의해 청록색 두 칸의 합은 호박색 두 칸의 기하평균의 두 배 이상이다.

3단계 주사위 하나를 두 번 던지기

? **생각해 보기** 주사위 하나를 두 번 던질 때 두 수가 같을 확률을 q_j로 나타내면 무엇인가? 공정한 주사위라면 얼마인가?

두 번의 결과가 같을 확률은 $q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2$이다. 공정한 주사위라면 이 값은 $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$이고, 이미 $\frac{1}{36}$보다 훨씬 크다.

? **생각해 보기** 주사위를 조작하여 $\sum q_j^2$을 $\frac{1}{6}$보다 작게 만들 수 있는가? $\sum q_j = 1$임을 알고 있다.

$q_j = \frac{1}{6} + e_j$로 쓰자. 여기서 편차(deviation) e_j들의 합은 0이다. 그러면

$$\sum q_j^2 = \sum\left(\frac{1}{36} + \frac{e_j}{3} + e_j^2\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\sum e_j + \sum e_j^2 = \frac{1}{6} + \sum e_j^2 \geq \frac{1}{6}.$$

따라서 같은 수가 반복될 확률은 항상 $\frac{1}{6}$ 이상이고, 등호는 공정한 주사위일 때만 성립한다. 이 확률이 $\frac{1}{36}$보다 작을 수는 결코 없다. ■

돌아보기

- **귀류법.** 모든 합이 같은 가능성을 갖는다고 가정하고 불가능한 결론을 이끌어 내었다.
- **필요한 것만 사용하라.** 열한 개의 식 가운데 세 개로 충분했다. 알맞은 식을 고르는 것이 핵심 단계였다.
- **부등식은 불가능성을 증명한다.** (i)에서는 산술-기하 평균 부등식이, (ii)에서는 "제곱의

합은 음이 아니다"라는 사실이 가능성의 모든 경우를 한꺼번에 배제하였다.

숨은 수학

다항식을 이용한 증명

이번에는 Section 9.6의 생성함수(generating function)를 이용한 완전히 다른 증명을 보자. $Q(x) = q_1 x + \cdots + q_6 x^6$, $R(x) = r_1 x + \cdots + r_6 x^6$이라 하자. 모든 합의 확률이 $\frac{1}{11}$이라면

$$Q(x)R(x) = \frac{x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}}{11} = \frac{x^2}{11}\bigl(1 + x + \cdots + x^{10}\bigr).$$

이다. 그런데 $Q(x)/x$는 실수 계수를 갖는 5차 다항식이고, 차수가 홀수인 실계수 다항식은 모두 실근을 갖는다(그래프가 $-\infty$에서 $+\infty$로, 또는 그 반대로 가기 때문이다). 따라서 좌변은 0이 아닌 실근을 갖는다. 하지만 $1 + x + \cdots + x^{10} = \frac{x^{11}-1}{x-1}$이고, 그 근은 1을 제외한 11차 단위근(roots of unity)이며, 그중 실수인 것은 없다. 모순이다. 같은 논증으로, $n - 1$이 홀수일 때, 즉 n이 짝수일 때 두 개의 n면체 주사위를 어떻게 조작해도 합들이 같은 가능성을 갖게 할 수 없음을 보일 수 있다. (n이 홀수이면 다항식 논증에 더 많은 작업이 필요하지만, 위의 산술-기하 평균 증명은 모든 $n \geq 2$에 대해 성립한다.)

충돌 확률

(ii)에 나온 양 $\sum q_j^2$, 즉 서로 독립인 두 번의 추출 결과가 같을 확률을 분포의 **충돌 확률**(collision probability)이라 한다. (ii)는 이 값이 균등분포(uniform distribution)에서 가장 작다는 것을 보여 준다. 충돌 확률은 분포가 얼마나 집중되어 있는지를 측정한다. 생태학에서 $\sum q_j^2$은 심프슨(Simpson)의 다양성 지수인데, 여기서 q_j는 서식지에서 종 j가 차지하는 비율이다. 경제학에서는 시장 집중도를 나타내는 Herfindahl 지수이고, 암호학에서는 비밀번호 분포를 얼마나 쉽게 추측할 수 있는지를 측정한다. 또한 이것은 Section 9.9 끝의 언급을 설명해 준다. 생일의 확률이 균등하지 않으면 생일이 같은 사람이 있을 가능성은 커질 수밖에 없다.

불가능성 증명

수학에서 가장 유명한 결과 가운데 일부는 어떤 것을 할 수 없다고 말한다. 제곱하여 2가 되는 분수는 없다. 자와 컴퍼스만으로 하는 작도(ruler-and-compass construction)로는 모든 각을 삼등분할 수 없다. 거듭제곱근(radicals)을 이용한 공식으로 모든 5차방정식(quintic)을 풀 수는 없다. 모든 수학적 명제를 판정하는 알고리즘은 없다. 이 결과들은 각각 그 분야를 바꾸어 놓았다. 어떤 방법도 통하지 **않음**을 증명하려면 가능한 방법 전체의 공간을 이해해야 하기 때문이다. 조작된 주사위 문제는 그 축소판이다. 모든 조작을 배제하기 위해 모든 조작이 따라야 하는 불변 성질(invariant, 산술-기하 평균 부등식)이 필

요했다.

사고 기술

귀류법과 부등식으로 불가능성을 증명하라

어떤 매개변수 선택도 통하지 않음을 보이려면, 통하는 선택이 있다고 가정하고, 서로 충돌하는 몇 가지 조건을 골라낸 뒤, 부등식을 이용하여 그 조건들이 동시에 성립할 수 없음을 보여라.

대학에서는 귀류법과 부등식의 결합이 대상의 존재하지 않음을 증명하는 표준적인 방법이다. 해석학(analysis), 조합론(combinatorics), 최적화(optimisation)에서 그러한데, 이 분야들에서는 산술-기하 평균 부등식이나 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality) 같은 부등식이 달성할 수 있는 것의 한계를 정한다.

더 도전하기

1 **코시-슈바르츠.** 코시-슈바르츠 부등식 $\left(\sum a_j b_j\right)^2 \le \sum a_j^2 \sum b_j^2$에 $a_j = q_j$, $b_j = 1$을 대입하여 (ii)를 한 줄로 증명하여라.

2 **서로 다른 두 주사위.** 서로 다른 조작된 주사위 두 개를 각각 한 번씩 던질 때, 두 주사위에서 같은 수가 나올 확률이 $\frac{1}{6}$보다 작을 수 있는가? 0이 될 수 있는가?

3 **다른 눈을 가진 주사위의 균등한 합.** 면에 다른 수를 적으면 두 주사위의 합이 같은 가능성을 가질 수 있음을 보여라. 한 주사위에는 $0, 1, 2, 3, 4, 5$를, 다른 주사위에는 $0, 6, 12, 18, 24, 30$을 적어 보아라. 어떤 합들이 나오는가? 이것이 왜 문제의 결론에 모순되지 않는가?

4 **주사위 세 개.** 면에 1부터 6까지 적힌 조작된 육면체 주사위 세 개로 3부터 18까지의 모든 합이 같은 가능성을 갖게 할 수 있는가? (**힌트:** 합 3, 8, 13, 18과 여섯 개의 수에 대한 산술-기하 평균 부등식을 이용하여라. 이번에는 다항식 증명이 왜 통하지 않는가?)

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 산술-기하 평균 부등식에서 출발하는 아름다운 부등식 입문서이다.

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 생성함수와 위와 같은 증명에서의 활용을 다룬다.
- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press)의 앞부분 장들. 가장 유명한 불가능성 증명인 5차방정식에 관한 증명을 다룬다.

우리가 배운 것

이 장을 시작하며 우리는 세는 일이 가장 오래된 수학이면서, 영리하게 세는 일은 여전히 가장 어려운 일 가운데 하나라고 말했다. 그리고 세 가지 질문을 던졌다. 하나하나 나열하지 않고 어떻게 셀 수 있는가? 어떤 일은 언제 반드시 일어나는가? 세기와 확률은 서로를 어떻게 돕는가? 이 장의 열세 문제가 보여 준 것은 다음과 같다.

1. 나열하지 않고 어떻게 셀 수 있는가?

이 장에서는 여러 도구를 차례로 갖추었다.

- **점화식(recurrence).** 평면에 직선을 하나 더 긋거나(Section 9.1) 울타리에 기둥을 하나 더 세우면(Section 9.3) 개수가 간단한 방식으로 바뀌었고, 이로부터 풀 수 있는 점화식을 얻었다. 마지막 기둥의 색처럼 약간의 정보를 더 기록해 두면 점화식이 닫힌 형태로 맞물렸다.
- **생성함수(generating function).** 수열을 멱급수(power series)로 묶어 놓으면 점화식이 대수 문제로 바뀌었고(Section 9.4), $1/89 = 0.01123\ldots$인 까닭이 설명되었으며, 조합의 개수를 세는 일이 다항식의 곱셈으로 바뀌었다. Section 9.5의 동전, Section 9.6의 주사위, 그리고 Section 9.7의 균형 잡힌 거듭제곱 합이 그 예이다. 마지막 예에서는 $x = 1$에서의 중근이 모든 일을 해냈다.
- **전단사(bijection).** 반사 원리(reflection principle)(Section 9.10)는 나쁜 줄을 제한 없는 경로와 짝지어 그 개수를 세었고, 무작위 집합의 여집합(complement)을 이용하면 부분집합이 서로소인 쌍으로 바뀌었다(Section 9.12).
- **포함–배제 원리(inclusion–exclusion).** 중복하여 센 뒤 바로잡는 방법으로 완전순열(derangement)의 개수를 구했다(Section 9.8).
- **이중 계산(double counting).** 오일러(Euler) 공식으로 영역을 세는 일(Section 9.1)과 부분집합의 쌍을 크기별로 세는 일(Section 9.12)은 서로 다른 길로 같은 답에 이르렀고, 그 과정에서 항등식을 증명해 주었다.

2. 어떤 일은 언제 반드시 일어나는가?

여러 절에서 크기만으로도 구조가 강제된다는 것을 보았다. 여섯 명 가운데에는 서로 모두 아는 세 사람이나 서로 모두 모르는 세 사람이 반드시 있다(Section 9.2). 이는 비둘기

집 원리(pigeonhole principle)로 보일 수 있으며, 다섯 명으로는 충분하지 않다. 스물세 명이 모이면 생일이 같은 사람이 있을 확률이 절반을 넘는다(Section 9.9). 쌍의 개수가 사람 수의 제곱처럼 커지기 때문이다. 큰 집합의 무작위 부분집합들은 거의 언제나 겹친다(Section 9.12). 그리고 아무리 애써도 **일어날 수 없는** 일도 있다. 두 주사위에 어떻게 무게를 실어도 모든 합이 같은 확률로 나오게 할 수는 없고(Section 9.13), Sicherman의 주사위를 빼면 어떤 눈의 배치도 보통 주사위의 합을 그대로 재현하지 못한다(Section 9.6).

3. 세기와 확률은 서로를 어떻게 돕는가?

이 장의 후반부에서는 세기를 통해 확률을 구했다. 완전순열은 포함–배제 원리로, 생일 문제는 곱으로, 투표 문제는 반사로 해결했다. 그러나 반대 방향의 흐름도 있었다. 기댓값의 선형성(linearity of expectation)은 아무것도 세지 않고 쿠폰 수집가 문제(coupon collector)의 nH_n(Section 9.11)과 카드를 섞었을 때 제자리에 오는 카드 수의 기댓값을 알려주었다. 무작위 부분집합을 동전 n번 던지기로 생각하면(Section 9.12) 3^n이나 $(m+1)^n$ 같은 개수가 한 줄짜리 계산이 되었다. 그리고 에르되시(Erdős)의 확률적 방법(probabilistic method)(Section 9.2)은 무작위 색칠이 양의 확률로 조건을 만족함을 보임으로써 좋은 색칠이 존재함을 증명했다. 두 상수가 난데없이 나타나기도 했다. 하나는 완전순열이 될 확률의 극한에 나타난 e이고, 다른 하나는 수집을 완성하는 데 드는 비용에 나타난 오일러 상수 γ이다.

4. 세기를 위한 도구 모음

방법	사용한 곳
하나를 더할 때 무엇이 바뀌는가	직선(9.1); 울타리 기둥(9.3)
비둘기집 원리	램지(Ramsey)(9.2)
연립 점화식	울타리 기둥(9.3)
생성함수	9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.13
양 끝에서 출발하는 경우 나누기	이상한 주사위(9.6); 무게 실린 주사위(9.13)
포함–배제 원리	완전순열(9.8)
여사건과 지수 근사	생일(9.9)
반사 원리	투표 문제(9.10)
기댓값의 선형성	쿠폰(9.11); 제자리 일치(9.8)
원소를 하나씩	무작위 부분집합(9.12)
산술–기하 평균 부등식(AM–GM)을 이용한 귀류법	무게 실린 주사위(9.13)

다음으로

- 완전순열의 푸아송(Poisson) 극한은 Section 12.11에서 다시 등장하고, 확률변수의 생성함수는 Section 12.15에서 가계도 연구를 이끈다.
- 연립 점화식은 Section 12.16에서 마르코프 연쇄(Markov chain)가 된다.
- 쿠폰 수집가 문제의 검벨 분포(Gumbel distribution)는 Section 12.25에서 수많은 확률적 양 가운데 가장 큰 값을 기술한다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***: 이 장의 거의 모든 아이디어를 다루는 친절한 입문서이다.
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***: 생성함수에 관한 고전으로, 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***: 합, 점화식, 생성함수를 재치 있게 다루며 연습문제가 많다.
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***: 대학 1학년 확률론의 세기 측면을 다룬다.

화이트헤드(Whitehead)는 조합론(combinatorics)을 "위상수학(topology)의 빈민가"라고 불렀다. 이 장은 오늘날 왜 아무도 그렇게 말하지 않는지를 보여 주려 했다. 영리한 세기 뒤에는 언제나 그것을 훨씬 넘어서는 아이디어가 있었다. 생성함수, 전단사, 점화식, 부등식이 그것이다. 이런 아이디어들은 세기를 대수학, 해석학, 확률론과 이어 주며, 요령 하나를 더 찾는 대신 이런 아이디어를 찾는 법을 배우는 것이야말로 세기를 수학으로 바꾸어 준다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 스스로 푼 결과를 확인할 수 있도록 결과와 핵심 단계만 제시한다. 답을 보기 전에 먼저 각 연습문제를 제대로 풀어 보도록 한다.

9.1 평면을 자르는 직선

1. 원 하나는 2개의 영역(region)을 만든다. n번째 원은 나머지 원들과 $2(n-1)$개의 점에서 만나고, 이 점들은 그 원을 $2(n-1)$개의 호(arc)로 나누며, 각 호는 한 영역을 둘로 가른다. 따라서 $R_n = R_{n-1} + 2(n-1)$이고, 이로부터 $n^2 - n + 2$를 얻는다.

2. 각 직선은 1에 그 직선 위의 교점 개수를 더한 만큼 영역을 늘리므로, 전체 영역의 수는 $1 + n +$ (교점의 개수)이다. k개의 평행선 때문에 교점이 $\binom{k}{2}$개 줄어든다: $1 + n + \binom{n}{2} - \binom{k}{2}$.

3. n번째 평면은 나머지 평면들에 의해 일반적 위치(general position)에 있는 $n-1$개의 직선으로 잘리고, 이 직선들은 평면을 $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$개의 조각으로 나누며, 각 조각은 공간의 한 영역을 둘로 가른다. 이를 $\frac{1}{6}\big((n-1)^3 + 5(n-1) + 6\big)$에 더하면 $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$을 얻는다.

4. $n = 6$이면 영역은 32개가 아니라 31개이다. 원 내부에서 그래프(graph)는 $V = n + \binom{n}{4}$개의 꼭짓점(vertex)(각 교점은 네 점에서 생긴다)과 $E = n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$개의 변(edge)(원의 호들과 현(chord)들이며, 교점 하나마다 조각이 두 개씩 늘어난다)을 가진다. 오일러(Euler) 공식 $V - E + F = 2$는 바깥 영역도 세므로, 영역의 개수는 $F - 1 = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$이다.

9.2 축소판 램지 정리

1. 이색(bichromatic) 각은 많아야 $6 \times 6 = 36$개이다. 한 가지 색이 아닌 삼각형은 각각 이런 각을 정확히 두 개 포함하므로, 그런 삼각형은 많아야 18개이다. $\binom{6}{3} = 20$이므로 적어도 2개의 삼각형은 한 가지 색이다.

2. 한 점에서 나가는 변은 16개이므로 적어도 6개는 같은 색, 예컨대 빨간색이고, 이 변들은 점 $P_1, \ldots, P_6$으로 간다. P_i들 사이의 변 중 하나라도 빨간색이면 빨간 삼각형이 생긴다. 그렇지 않으면 P_i들은 두 가지 색으로 칠해진 K_6을 이루고, 여기에는 한 가지 색 삼각형이 있다.

3. 점 v에는 변이 9개 있으므로 금색이 적어도 4개이거나 은색이 적어도 6개이다. 금색 이웃이 4개인 경우: 그들 사이에 금색 변이 있으면 v와 함께 금색 삼각형이 생기고, 그렇지 않으면 그들은 은색 K_4를 이룬다. 은색 이웃이 6개인 경우: 그들 사이에 한 가지 색 삼각형이 있다. 그 삼각형이 금색이면 끝이고, 은색이면 v와 함께 은색 K_4를 이룬다.

4. 각 항에 (i, d)라는 이름표를 붙인다. 이는 그 항에서 끝나는 가장 긴 증가 부분수열(subsequence)과 가장 긴 감소 부분수열의 길이이다. 두 항을 비교하면 뒤의 항은 i가 더 크거나 d가 더 크므로, 이름표는 모두 다르다. 길이 3인 부분수열이 없다면 5개의 항에 가능한 이름표는 4개뿐이다. 둘 다 없는 예: $2, 1, 4, 3$.

9.3 울타리 기둥 색칠하기

1. 앞에서와 같이 $r_{n+1} = s_n$이고(기둥 n이 빨간색이 아니므로 기둥 $n+1$은 빨간색일 수 있다), 첫 기둥 다음의 각 기둥은 $k-1$가지로 고를 수 있으므로 $r_n + s_n = (k-1)^{n-1}$이다. 따라서 $r_{n+1} + r_n = (k-1)^{n-1}$이고, $r_n = \frac{(k-1)^{n-1} + (k-1)(-1)^{n-1}}{k}$이다. 원형으로 놓인 경우: 기둥 1의 색을 k가지로 고른 다음, 같은 색으로 끝나는 $n+1$개 기둥의 일렬 배치를 생각하면 $kr_{n+1} = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$을 얻는다.

2. $2, 3, 5, 8, \ldots$: 경우의 수를 a_n이라 하면, 흰색으로 끝나는 배열은 길이 $n-1$인 아무 배열에나 이어 붙인 것이고, 빨간색으로 끝나는 배열은 흰색으로 끝나는 길이 $n-2$인 배열에 이어 붙인 것이므로 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$이다. 답은 F_{n+2}이다.

3. 가운데에 4가지 선택이 있고, 그다음 n-순환(cycle)을 3가지 색으로 칠한다: $4\big(2^n + 2(-1)^n\big)$.

4. $n = 4$이면 색칠은 18가지이다. 사분의 일 회전은 어느 것도 고정하지 않고, 반 회전은 마주 보는 기둥의 색이 같은 6가지를 고정하므로, 목걸이(necklace)는 $\frac{1}{4}(18 + 0 + 6 + 0) = 6$개이다. $n = 5$이면 색칠은 30가지이고 어떤 회전도 이들 중 어느 것도 고정하지 않으므로 6개이다.

9.4 함수로서의 수열

1. 꼬리 부분은 많아야 $F_7 \sum_{r \geq 7} 2^{r-7} 10^{-r} = \frac{13 \times 10^{-7}}{0.8} < 2 \times 10^{-6}$이다. $\sum F_r 10^{-r} = \frac{10}{89}$이고 처음 여섯 항의 합이 0.112358이므로, $\frac{10}{89}$는 0.112358과 0.112360 사이에 있고, 따라서 $\frac{1}{89} = 0.011235\ldots$이다. 두 자리씩 묶으면 $\sum F_r 100^{-r-1} = \frac{1}{9899}$이다.

2. 점화식(recurrence relation)을 모두 더하면 $f(x)(1 - 7x + 10x^2) = 2 - 7x$이고, $\frac{2-7x}{(1-2x)(1-5x)}$는 주어진 대로 분해된다. b_n의 경우: $10p + 5q = 40$과 $40p + 10q = 100$에서 $p = 1, q = 6$을 얻는다. $t^2 = t + 6$의 근은 3과 -2이고, $b_n = 4 \cdot 3^n + (-2)^n$이다.

3. $\sum n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$이고, $x = \frac{1}{100}$에서 이 값은 $\frac{100}{9801}$이므로 $\frac{1}{9801} = \sum n \cdot 100^{-n-1}$이다. 이

패턴은 98 블록에서 어긋난다: 100에 해당하는 블록이 99로 1을 올리고, 이것이 다시 98로 올라가므로, 전개는 . . . 96 97 99 00 01 . . .와 같이 이어진다.

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$를 곱하면 x^n의 계수가 $u_0 + \cdots + u_n$이 된다. 제곱수의 생성함수(generating function)는 $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$이므로 부분합의 생성함수는 $\frac{x+x^2}{(1-x)^4}$이고, x^n의 계수는 $\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이다.

9.5 거스름돈 만들기

1. x^{24}의 계수는 $6a + 6b + 3c = 24$의 해의 개수를 센다: 0부터 4까지의 각 $s = a + b$에 대해 선택이 $s + 1$가지이므로 15이다. 일반적으로 x^n의 계수는 $n = 3m$이 아니면 0이고, $n = 3m$이면 $k = \lfloor m/2 \rfloor$에 대해 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$이다. 추가 인수를 곱하면 계수는 부분합이 된다: x^{24}, x^{25}, x^{66}에 대해 각각 55, 55, 650이다. 이는 1p, 3p 동전과 서로 다른 두 종류의 6p 동전으로 지불하는 방법의 수이다.

2. 각 부분 k는 한 번 쓰이거나 전혀 쓰이지 않는다. 곱은 연쇄적으로 소거된다(telescopes): $\prod \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$에서 분모의 지수가 짝수인 인수가 모두 소거되어 $\prod \frac{1}{1-x^{\text{홀수}}}$만 남는데, 이것은 홀수 부분으로의 분할(partition)의 생성함수이다. $n = 6$인 경우: 6, $5+1$, $4+2$, $3+2+1$, 그리고 $5+1$, $3+3$, $3+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1$: 각각 네 개씩이다.

3. $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대한 값은 $1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots$이고, $\frac{(n+4)^2}{20}$은 항상 이 값들과의 차이가 $\frac{1}{2}$ 이내이다($n = 60$까지 확인했다. 증명에는 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$의 부분분수(partial fractions)를 이용한다).

4. 마지막 동전은 1p 또는 2p이므로 $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$이다: 피보나치(Fibonacci) 수이며, $c_n = F_{n+1}$이다.

9.6 이상한 주사위

1. 각 주사위는 x에 인수 $1+x, 1+x, 1+x^2, 1+x^2$ 중 일부의 곱을 곱한 것이고 $x = 1$에서의 값이 4이므로, 그중 두 개를 가진다. 표준 쌍을 제외하면 가능한 것은 $x(1+x)^2$과 $x(1+x^2)^2$뿐이다: 면이 $1, 2, 2, 3$인 주사위와 $1, 3, 3, 5$인 주사위이다.

2. 곱은 $2x^3 + x^4 + x^5 + 4x^6 + 3x^7 + 8x^8 + 6x^9 + 5x^{10} + 6x^{11}$이고, 표와 일치한다.

3. 그렇다: Sicherman 쌍 $1, 2, 2, 3, 3, 4$와 $1, 3, 4, 5, 6, 8$에 표준 주사위 하나를 함께 쓰면 된다.

4. $(x + x^2)(x + \cdots + x^8) = x^2(1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)$이다. 동전에는 값이 2인 인수가 필요하다: 표준 선택 $x(1+x)$ 외에도 $x(1+x^2)$(면이 $1, 3$이고, 정팔면체(octahedron)는 $1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7$) 또는 $x(1+x^4)$(면이 $1, 5$이고, 정팔면체는 $1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5$)일 수 있다.

9.7 같은 거듭제곱의 합

1. $\sum (c+b_k)^3 - \sum (c+a_k)^3 = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right) + \sum b_k^3 - \sum a_k^3$이고, 처음 두 괄호는 0이 된다. $\{1,4,6,7\}$, $\{2,3,5,8\}$에서 $c = 8$로 시작하면 $\{1,4,6,7,10,11,13,16\}$과 $\{2,3,5,8,9,12,14,15\}$를 얻는다.

2. A와 $B \cup \{0\}$은 모두 원소가 6개이고, 합이 33, 제곱의 합이 253이다. 그러면 $\sum_{a\in A}(n+a)^2 = \sum_{b\in B\cup\{0\}}(n+b)^2$이므로, $\{n^2, \ldots, (n+11)^2\}$이 둘로 나뉜다.

3. 이항정리(binomial theorem)로 $(x+c)^r$을 전개하면 r 이하의 거듭제곱만 나오고, 그 합들은 서로 같다. 문제의 집합들은 두 번째 집합에 0을 넣으면 $\{0,\ldots,15\}$가 되고, 평행이동하면 연속한 정수 16개 어느 것이든 얻는다.

4. $ABABABAB$이면 A는 약 1.676, B는 약 1.042를 얻는다. $ABBABAAB$이면 A는 약 1.560, B는 약 1.158을 얻는다: 여전히 같지는 않지만 훨씬 가깝다.

9.8 아무도 자기 셔츠를 받지 못한다

1. $\mathrm{E}(C_1) = \frac{1}{m}$, $\mathrm{Var}(C_1) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}$이고, $\mathrm{Cov}(C_1, C_2) = \frac{1}{m(m-1)} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^2(m-1)}$이다. 그러면 $\mathrm{E}(N) = 1$이고 $\mathrm{Var}(N) = m\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}\right) + m(m-1)\frac{1}{m^2(m-1)} = 1$이다. $m = 4$이면 $\mathrm{P}(N=0) = \frac{9}{24} = 0.375$이고, 이는 $\mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$과 비교된다.

2. 카드 1은 어떤 위치 i로 간다($n-1$가지). 카드 i가 위치 1로 가면 나머지는 $n-2$개의 교란순열(derangement)이다. 그렇지 않으면 위치 1을 카드 i의 금지된 자리로 보면 $n-1$개의 교란순열이 된다. 확인: $D_3 = 2(1+0) = 2$, $D_4 = 3(2+1) = 9$.

3. 고정되는 카드 k장을 고르고 나머지를 교란하면 $\binom{n}{k}\frac{D_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{D_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{d_{n-k}}{k!}$이고, 이는 $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$로 수렴한다.

4. $30 - (15+10+6) + (5+3+2) - 1 = 8$이고, 이는 $30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$와 같다: 포함배제(inclusion–exclusion) 합이 인수분해되는 것이다(이것은 오일러의 $\varphi(30)$이다).

9.9 생일 문제

1. $\mathrm{P}(X=r) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-2}{n}\right)\frac{r-1}{n}$이고, 이들의 합은 1이다. 기댓값(expectation)에 대해서는, $\mathrm{P}(Y=r)$이 $\mathrm{P}(Y\ge 1), \ldots, \mathrm{P}(Y \ge r)$ 각각에서 한 번씩 세어진다. $Q_k = \mathrm{P}(X > k) = \prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$라 하자. 그러면 $\mathrm{E}(X) = \sum (k+1)\frac{k}{n}Q_k$이고 또 $\mathrm{E}(X) = 1 + \sum Q_k$이다. $\sum \frac{k}{n}Q_k = 1$을 이용하여 빼면 $\sum Q_k\left(1-\frac{k^2}{n}\right) = 0$을 얻는다.

2. $\binom{k}{3} \approx 365^2 \ln 2$에서 $k \approx 82$를 얻는다. 이 근사는 세 사람 묶음들 사이의 종속성을 무시한 것이며, 실제 답은 88이다.

3. 14명. (각 쌍이 "가까울" 확률은 $\frac{3}{365}$이고, $\binom{k}{2}\frac{3}{365} \approx \ln 2$에서 $k \approx 14$를 얻는다. 정확히 세면 14명일 때 확률은 약 0.537, 13명일 때 약 0.483이다.)

4. 두 사람이 날 i를 공유할 확률은 p_i^2이고, 이를 모두 더한다. 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식에 의해 $1 = \left(\sum p_i\right)^2 \leq 365 \sum p_i^2$이고, 등호는 모든 p_i가 같을 때만 성립한다.

9.10 언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록

1. 첫 번째 사람은 £1 동전을 가지고 있어야 한다. 다음 몇 사람에 대해 조건을 걸면 여러 경우(£2를 내는 손님이 지나갈 때마다 어떤 동전을 가지고 있는지)로 나뉘고, 각 경우는 소문항 (i)과 (ii)의 답으로 마무리된다. 이를 모으면 $\frac{m-2}{m+1}$을 얻는다. 반사 원리(reflection principle)를 쓰면 한 줄로 끝난다.

2. 첫 표는 A의 표여야 한다. A로 시작하는 개표 순서 중 나쁜 것(동점에 이르는 것)은, 첫 동점 이전 부분을 반사하면 B로 시작하는 개표 순서와 대응한다. 따라서 좋은 개표 순서의 수는 $\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}$이고, 이를 $\binom{a+b}{a}$로 나누면 $\frac{a-b}{a+b}$를 얻는다.

3. ((())), (()()), (())(), ()((()), ()()(). 전단사(bijection): 첫 번째 괄호 쌍은 수열을 그 안쪽 부분과 그 뒤 부분으로 나눈다. 이에 대응하여 고정된 변 위의 삼각형은 다각형을 두 개의 더 작은 다각형으로 나눈다. 양쪽에 같은 과정을 재귀적으로 적용한다.

4. £5를 내는 손님은 거스름돈으로 £1 동전 네 개가 필요하므로, 경로는 1만큼 올라가거나 4만큼 내려간다. 경로가 장벽에 닿지 않고 건너뛸 수 있으므로, 반사로는 더 이상 나쁜 경로들을 간단한 집합과 대응시킬 수 없다.

9.11 한 세트 모두 모으기

1. 기대 대기 시간의 합은 $\frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{n/2+1} = n(H_n - H_{n/2}) \approx n(\ln n - \ln \frac{n}{2}) = n \ln 2$이다.

2. 각 카드가 빠져 있을 확률은 $(1 - \frac{1}{n})^k$이고, 이를 n장의 카드에 대해 더한다. 95%의 경우, $(1 - \frac{1}{n})^k \approx \mathrm{e}^{-k/n} = 0.05$이므로 $k \approx n \ln 20 \approx 3n$이다.

3. 봉지 t개를 연 뒤, 주어진 카드가 두 번 미만으로 나왔을 확률은 약 $\mathrm{e}^{-t/n}(1 + \frac{t}{n})$이다. 두 아이는 그런 카드의 기대 개수 $n\mathrm{e}^{-t/n}(1 + \frac{t}{n})$이 약 1로 떨어질 무렵 대략 수집을 마치며, 이로부터 $\frac{t}{n} \approx \ln n + \ln \ln n$을 얻는데, 이는 $2 \ln n$보다 훨씬 작다.

4. $\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n}$([$n, n+1$]에서 $\frac{1}{x}$ 아래의 넓이)이므로 $H_n - \ln n$은 감소한다. 볼록성(convexity)에 의해 사다리꼴(trapezium)은 넓이를 과대평가한다: $\ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$이므로 $H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$은 증가한다. $n = 1$이면 $\gamma > \frac{1}{2}$이고, $n = 4$이면 $\gamma < H_4 - \ln 4 \approx 0.697$이다.

9.12 무작위 부분집합

1. 각 원소는 적어도 하나의 집합에 들어 있어야 한다: $\left(\frac{3}{4}\right)^n$이고, 일반적으로는 $\left(1-2^{-m}\right)^n$이다.

2. $|S \setminus A_2|$는 $|A_2|$와 같은 분포(distribution)를 가지고 A_1과 독립(independent)이므로, 구하는 확률은 $|A_1| + |S \setminus A_2| = n$일 확률과 같다. 쌍 $(A_1, S \setminus A_2)$는 원소가 $2n$개인 집합의 임의의 부분집합에 대응하며, 그 크기가 n일 확률은 $\binom{2n}{n}/4^n$이다. 스털링(Stirling) 공식(또는 월리스(Wallis) 공식, Section 4.4)에 의해 이 값은 $\approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$이다.

3. 각 원소는 A에 들어가거나, B에 들어가거나, 어느 쪽에도 들어가지 않는다: 3^n. $A = B$인 순서쌍은 $(\varnothing, \varnothing)$뿐이므로, 순서 없는 쌍은 $\frac{3^n-1}{2} + 1 = \frac{3^n+1}{2}$개이다.

4. $n = 3$이면 집합 3개(모든 한원소 집합, 또는 모든 두원소 집합). $n = 4$이면 집합 6개(모든 두원소 집합). 일반적으로 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$개이다(슈페르너(Sperner) 정리).

9.13 조작된 주사위

1. $1 = \left(\sum q_j\right)^2 \le 6\sum q_j^2$이므로 $\mathrm{P}(\text{같음}) = \sum q_j^2 \ge \frac{1}{6} > \frac{1}{36}$이다.

2. 둘 다 그렇다: 확률은 $\sum q_j r_j$이고, 예컨대 한 주사위는 항상 1, 다른 주사위는 항상 2가 나오면 이 값은 0이다.

3. 합은 $0, 1, \ldots, 35$이고 각각 정확히 한 번씩 나온다: 균등분포이다. 문제에서는 두 주사위 모두 1부터 6까지 번호가 매겨져 있어야 하는데, 여기서는 그렇지 않다.

4. 아니다. $\mathrm{P}(3) = q_1r_1s_1$, $\mathrm{P}(18) = q_6r_6s_6$이라 쓰면, 둘 다 $\frac{1}{16}$이다. $\mathrm{P}(8) + \mathrm{P}(13)$은 여섯 항 $q_1r_1s_6, \ldots, q_1r_6s_6$(1 두 개와 6 하나, 또는 6 두 개와 1 하나)을 포함하며, 이들의 곱은 $(\mathrm{P}(3)\mathrm{P}(18))^3$이다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $\mathrm{P}(8) + \mathrm{P}(13) \ge 6 \cdot \frac{1}{16} > \frac{2}{16}$이다. 주어진 다항식을 이용한 증명은 $1 + x + \cdots + x^{15}$가 실근(real root) -1을 **가지기** 때문에 실패한다. (이 증명은 살릴 수 있다: 세 개의 실계수 5차식(quintic)은 실근을 세 개 가져야 하는데, -1은 단순근(simple root)일 뿐이다.)

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 중 8개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

전체 13개 장 가운데 제9장. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

