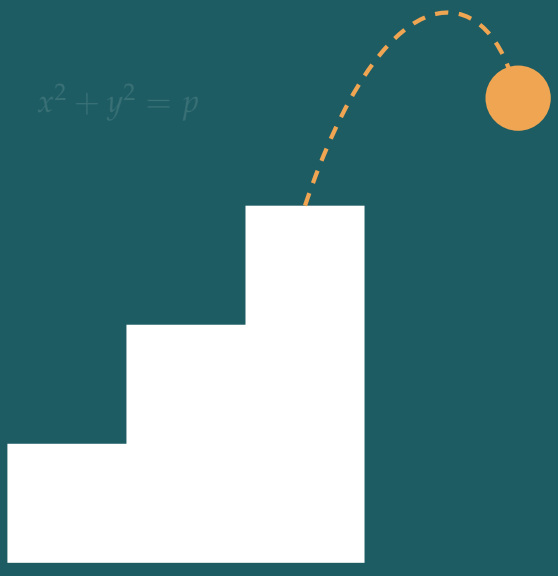
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

제8장

미분방정식(differential equations)과 동역학계(dynamical systems)



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

제8장

미분방정식(differential equations)과 동역학계(dynamical systems)

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

제8장: 미분방정식(differential equations)과 동역학계(dynamical systems)

이 PDF는 *Beyond STEP*의 전체 13개 장 가운데 제8장이다. 책 전체, 각 장의 개별 PDF, 모든 절의 인쇄용 연습지, 모든 STEP 문제의 자세한 풀이를 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 남겨 주기 바란다.

장

8

미분방정식과 동역학계

대부분의 미분방정식은 풀 수 없다. 그래도 이해하는 것, 그것이 기술이다.

이 장의 내용

8.1	해가 유일하지 않을 때	STEP III 1994
8.2	풀지 않고 범위 구하기	STEP III 2013
8.3	개체군 수확하기	STEP II 1995
8.4	원으로 감겨드는 나선	STEP III 2015
8.5	그레이하운드를 쫓는 그레이하운드	STEP III 1988
8.6	양자 진동자	STEP III 1988
8.7	풀 수 있는 혼돈	STEP I 2014
8.8	주기 3이면 혼돈이다	STEP III 2025
A	연습문제 해답	63쪽

변화의 규칙

자연은 적분의 어려움을 비웃는다.

— 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace)의 말로 전해짐

학교에서 미분방정식(differential equation)은 푸는 대상이다. 변수를 분리하거나, 적분인자(integrating factor)를 찾거나, $e^{\lambda x}$ 꼴의 해를 추측하면 마지막에 공식 하나를 얻는다. 교과서에 나오는 방정식들은 이 방법이 통하기 때문에 골라 놓은 것이다. 안타깝게도 현실 세계에서 나오는 미분방정식(세 행성의 운동, 날씨, 포식자와 피식자의 개체군, 진폭이 큰 진자의 흔들림) 거의 모두는 우리가 아는 함수로 적어 낼 수 있는 해를 갖지 않는다.

이 장은 그 대신 무엇을 할 것인가에 관한 것이다. "공식은 무엇인가?"라고 묻는 대신, 공식 없이도 답할 수 있는 질문을 던진다. 애초에 해가 존재하는가, 그리고 하나뿐인가? 해는 유계로 남는가? 정상 상태나 반복되는 순환으로 안착하는가, 아니면 끝없이 헤매는가? 오랜 시간이 지나면 어떻게 되는가? 푸는 것에서 이해하는 것으로의 이러한 관점 전환은 1880년대에 앙리 푸앵카레(Henri Poincaré)가 시작했으며, 오늘날 **동역학계**(dynamical systems)라고 부르는 분야를 탄생시켰다.

미분방정식이 중요한 이유

미분방정식은 과학의 언어이다. 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙은 미분방정식이며, 전자기학의 맥스웰(Maxwell) 방정식, 양자역학의 슈뢰딩거(Schrödinger) 방정식, 그리고 날씨를 예보하고 항공기를 설계하는 데 쓰이는 유체 흐름의 방정식도 마찬가지이다. 역학자는 질병의 확산을, 생태학자는 어류 자원의 개체 수를, 경제학자는 경제 성장을, 공학자는 온도 조절기에서 자동 조종 장치에 이르는 모든 제어 시스템의 반응을 미분방정식으로 모형화한다. 어떤 양이 현재 상태에 따라 정해지는 비율로 변할 때마다 그곳에는 미분방정식이 있으며, 대개는 아무도 정확히 풀 수 없는 방정식이다.

이러한 연속 모형과 나란히, 시간이 한 단계씩 나아가는 이산 모형도 있다. 올해의 개체 수가 내년의 개체 수를 결정하는 식이다. 이러한 **반복 사상**(iterated map)은 적어 내기는 더 간단하지만, 마지막 두 절에서 보듯이 그만큼 격렬하게 움직일 수 있다. 1970년대의 위대한 발견 중 하나는 아주 단순한 규칙이 **혼돈**(chaos), 곧 완전히 결정되어 있으면서도 실제로는 예측할 수 없는 행동을 만들어 낼 수 있다는 것이었다.

대학에서 만나게 될 것

대학 1학년 미분방정식 강좌는 표준적인 풀이법을 다루지만, 이 장의 질문들도 소개한다. 해가 언제 존재하는지, 그리고 언제 초깃값에 의해 결정되는지를 알려 주는 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)를 만나게 된다. 모든 해를 한꺼번에 나타낸 그림인 **상 초상**(phase portrait)을 그리는 법과, 선형화(linearisation)를 통해 평형점(equilibrium)을 안정 또는 불안정으로 분류하는 법을 배운다. 이후의 강좌는 훨씬 더 나아간다. **비선형 동역학**(nonlinear dynamics)은 극한 순환(limit cycle), 분기(bifurcation), 혼돈을 연구하고, **수리생물학**(mathematical biology)은 이를 개체군과 전염병에 적용하며, 편미분방정식(partial differential equation), 푸리에 급수(Fourier series), 직교 함수(orthogonal function)의 이론(Section 8.6에서 엿볼 수 있다)은 양자역학과 응용수학의 많은 부분을 떠받친다.

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **현재가 미래를 결정하는가?** 초깃값이 주어진 미분방정식은 언제 정확히 하나의 해를 갖는가?
2. **풀지 않고 무엇을 알 수 있는가?** 공식이 존재하지 않을 때, 어떻게 해의 범위를 제한하고, 해가 어디에 안착하는지 찾고, 해의 모양을 기술할 수 있는가?
3. **오랜 시간이 지나면 어떻게 되는가?** 해는 정상 상태로 안착하는가, 순환에 다가가는가, 아니면 혼돈스럽게 행동하는가? 그리고 이를 어떻게 알 수 있는가?

이 장은 유일성과 그것이 깨질 때 일어나는 일(Section 8.1)에서 시작하여, 방정식을 풀지 않고 이해하는 도구들을 발전시킨다. 증가할 수 없는 에너지 비슷한 양, 평형점과 그 안정성, 그리고 문제의 대칭성에 맞춘 좌표가 그것이다. 두 절에서는 이러한 아이디어를 물리 문제에 적용한다. 정사각형 위에서 서로를 쫓는 개들과 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)이다. 이 장은 이산 사상으로 끝을 맺는데, 여기서는 공식 하나가 혼돈을 드러내고, 길이 3인 순환 하나가 모든 길이의 순환을 강제한다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
8.1	유일성	포락선(envelope)과 특이해(singular solution); 이어 붙이기
8.2	에너지 방법	결코 증가하지 않는 양
8.3	개체군 모형	평형점, 안정성, 그리고 임계점(tipping point)
8.4	극한 순환	극좌표와 베르누이 치환(Bernoulli substitution)
8.5	추적 곡선(pursuit curve)	대칭성이 네 물체를 하나로 줄인다
8.6	직교 함수	론스키안(Wronskian)과 직교성
8.7	혼돈	변수 변환: 로지스틱 사상(logistic map)은 변장한 각의 두 배 사상이다
8.8	주기 궤도(periodic orbit)	구간 덮기; 샤르코프스키 정리(Sharkovskii's theorem)

이 장을 읽는 방법

무엇이든 풀기 전에 먼저 그려 보아라. 미분방정식 $y' = F(y)$에 대해서는 F가 양수, 음수, 0인 곳을 표시하고 y축 위에 화살표를 그린다. 사상 $x \mapsto f(x)$에 대해서는 직선 $y = x$와 함께 그래프를 그리고, 거미줄 방법(cobweb method)으로 수열 몇 개를 따라가 본다. 이런 그림은 1분이면 그릴 수 있고, 대수 계산을 시작하기도 전에 답이 어떤 모습이어야 하는지 대개 알려 줄 것이다.

8.1 해가 유일하지 않을 때

문제

STEP III 1994, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/94-s3-q4`

도입

미분방정식(differential equation)은 어떤 양이 어떻게 변하는지를 알려 주는 규칙이다. 뉴턴(Newton)의 법칙은 행성이 지금 어디에 있는지가 주어지면 그 행성이 어떻게 움직여야 하는지를 알려 준다. 고전 물리학의 세계관에 따르면 이것으로 충분하다. 지금 세계의 상태를 알면 법칙이 그 미래 전체를 결정한다. 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace)는 모든 위치와 속도를 아는 지성이라면 모든 것을 예측할 수 있으리라고 상상했다. 이 세계관은 하나의 수학적 가정에 기대고 있다. 미분방정식에 초기 조건이 주어지면 해가 **정확히 하나** 존재한다는 가정이다.

이 문제는 그 가정이 깨질 수 있음을 보여 준다. 겉보기에 순진한 방정식 $(y')^2 = 4y$에는 x축을 따라 달리다가 스스로 고른 순간에 축에서 떨어져 나가는 해들이 있다. 어떤 점들을 지나는 해는 무한히 많다. 현재를 안다고 해서 미래가 결정되지는 않는다. 유일성(uniqueness)이 정확히 언제 성립하는지 밝히는 것은 대학 미분방정식 강의에서 맨 처음 배우는 정리 가운데 하나이다.

시작하기 전에

생각해 보기 양변에 제곱근을 취하면 $y' = \pm 2\sqrt{y}$이다. $y = (x-c)^2$을 대입해 보자. 이것이 방정식을 만족하는가? 이보다 더 간단한 해가 있는가?

$y = (x-c)^2$이면 $y' = 2(x-c)$이고 $(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$이다. 따라서 모든 포물선 $y = (x-c)^2$은 모든 x에 대하여 해이다. 그리고 $y = 0$도 해이다. $(0)^2 = 4 \times 0$이기 때문이다. 이 마지막 해를 기억해 두자. 이것이 문제 전체의 열쇠이다.

차근차근 풀기

1단계 한 점을 지나는 해

생각해 보기 포물선 $y = (x-c)^2$ 가운데 (a, b^2)을 지나는 것은 무엇인가?

$(a-c)^2 = b^2$이어야 하므로 $a - c = \pm b$, 즉 $c = a - b$ 또는 $c = a + b$이다. $b \neq 0$이므로 이 둘은 서로 다르고, 다음 두 해를 얻는다.

$$y = (x - a + b)^2 \qquad \text{그리고} \qquad y = (x - a - b)^2. \qquad \blacksquare$$

(빠뜨린 해가 없는지도 확인해야 한다. $y > 0$인 영역에서는 부호가 고정된 채로 $y' = \pm 2\sqrt{y}$이고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{y} = \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \pm 1$이므로 $\sqrt{y} = \pm(x-c)$가 되어 위의 포물선들을 얻는다. 따라서 주어진 점 근처에서, 그리고 y가 양수로 남아 있는 동안에는 이 두 해가 유일한 해이다. 그러나 해가 일단 x축에 닿으면, 3단계에서 보겠지만 영 해(zero solution)와 이어 붙일 수 있고, 그렇게 하면 모든 x에서 정의된 해가 무한히 더 생긴다. 문제에서 말하는 "두 해"는 두 포물선이다.)

2단계 두 점과 공통인 해

원점을 지나는 해는 $y = x^2$($c = 0$인 포물선)이어야 한다. 이 해는 $x = 1$과 $x = -1$에서 높이 1을 지난다. 따라서 $(a_1, 1) = (1, 1)$, $(a_2, 1) = (-1, 1)$로 잡는다.

$(1, 1)$을 지나는 해($a = 1$, $b = \pm 1$)는 $y = x^2$과 $y = (x-2)^2$이다. $(-1, 1)$을 지나는 해는 $y = (x+2)^2$과 $y = x^2$이다. 원점을 지나는 해는 두 경우 모두 같은 곡선 $y = x^2$이다. $\blacksquare$

3단계 해의 족 전체와 공통접선

잠깐, 직접 해 보기 여러 c에 대하여 포물선 $y = (x-c)^2$을 몇 개 그려 보자. 이 모두에 접하는 직선은 무엇인가? 그 직선 자체도 해인가?

모든 포물선 $y = (x-c)^2$은 꼭짓점 $(c, 0)$에서 x축에 접하므로, x축은 이 족 전체의 공통접선(common tangent), 즉 **포락선**(envelope)이다(그림 8.1.1). 그리고 x축 $y = 0$은 그 자체로 미분방정식의 해이다. 이것은 포물선들 가운데 하나가 아니라 별개의 **특이해**(singular solution)이다.

4단계 이것이 중요한 이유

생각해 보기 원점에서 출발해 보자. 원점을 지나는 해는 무엇인가? 한동안 x축을 따라가다가 축을 떠나는 해를 만들 수 있는가?

원점을 지나는 해로는 $y = x^2$과 $y = 0$이 있다. 하지만 사실은 훨씬 더 많다. 각 포물선은 x축과 접하며 만나므로(만나는 점에서 둘 다 기울기가 0이다), 조각들을 매끄럽게 이어 붙일 수 있다. 임의의 $c_1 \le 0 \le c_2$에 대하여

$$y = \begin{cases} (x - c_1)^2 & x < c_1, \\ 0 & c_1 \le x \le c_2, \\ (x - c_2)^2 & x > c_2 \end{cases}$$

은 모든 곳에서 $(y')^2 = 4y$를 만족하는 미분가능한(differentiable) 함수이고, 원점을 지난다. x축 위의 모든 점을 지나는 해는 무한히 많다. 해는 원하는 만큼 $y = 0$에 머물다가 떠날 수 있다. 유일성이 무너지는 곳이 바로 공통접선이다. ■

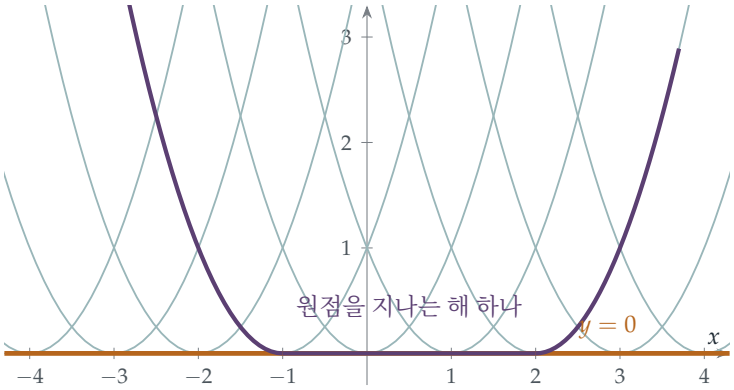


그림 8.1.1 $(y')^2 = 4y$의 해 $y = (x - c)^2$(청록색)은 모두 x축에 접한다. x축은 이들의 포락선이며 그 자체로 해이다(호박색). 조각들을 이어 붙이면 자주색 해와 같은 새로운 해들을 얻는다. 이 해는 포물선을 따라 축까지 내려온 뒤 축을 따라 달리다가 스스로 고른 때에 다시 떠난다. x축 위의 어느 점을 지나는 해든 무한히 많다.

돌아보기

- **간단한 해부터 찾아라.** $y = (x - c)^2$과 $y = 0$을 시도해 본 것만으로 전체 그림이 드러났다.
- **포락선은 특이해를 준다.** 해의 족에 대한 공통접선은 그 족에 속하지 않는 해가 될 수 있다.
- **이어 붙이기.** 두 해가 접하며 만나는 곳에서는 둘을 이어 새로운 미분가능한 해를 만들 수 있다. 비유일성은 이렇게 퍼져 나간다.

숨은 수학

해는 언제 유일한가?

피카르-린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)(1890–1894년 무렵 에밀 피카르(Émile Picard)와 에른스트 린델뢰프(Ernst Lindelöf)가 증명했다)에 따르면, F가 y에 대하여 **립시츠**(Lipschitz)이면, 즉 $|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$를 만족하는 상수 L이 있으면, $y(x_0)=y_0$인 방정식 $y'=F(x,y)$는 x_0 근처에서 해를 정확히 하나 가진다. 대략 말하면, y가 변할 때 F가 무한히 빠르게 변해서는 안 된다는 뜻이다. 우리 방정식은 $y'=\pm 2\sqrt{y}$이고, $\sqrt{y}$는 $y=0$에서 기울기가 무한대이다. 그곳에서 립시츠가 아니며, 바로 그곳에서 유일성이 깨진다. (주세페 페아노(Giuseppe Peano)는 1886년에 F가 연속이기만 하면 해가 **존재**함은 보장되지만 유일함은 보장되지 않는다는 것을 보였다.) 피카르-린델뢰프 정리의 증명에는 Section 2.2의 축약 사상 원리(contraction mapping principle)에 의해 수렴하는 반복법이 쓰인다.

새는 양동이

물리적인 예를 하나 보자. 바닥에 구멍이 난 양동이는 토리첼리(Torricelli)의 법칙에 따라 비워진다. 물의 높이 h는 $h'=-k\sqrt{h}$를 만족한다. 시간을 앞으로 흘려보내면 아무 문제가 없다. 양동이는 비워지고, 빈 채로 남는다. 그러나 시간을 거꾸로 돌려 보자. 빈 양동이를 발견했을 때, 방정식은 그것이 언제 비워졌는지 알려 주지 못한다. 모든 시간에 $h=0$인 해도, 어느 순간까지 가득 차 있다가 빠져나간 해들도 모두 "지금 비어 있음"과 모순되지 않는다. 비유일성은 과거에 관한 정보가 사라졌다는 사실이 수학에 드리운 그림자이다.

노턴의 돔

2003년에 철학자 John Norton은 마찰이 없는 돔을 하나 묘사했다. 그 모양이 특별해서, 꼭대기에 정확히 놓인 공은 $r''=\sqrt{r}$ 꼴의 뉴턴 법칙을 따른다. 한 가지 해는 공이 꼭대기에 영원히 머무르는 것이다. 그러나 다른 해들도 있다. 공이 아무 시간 동안 그곳에 머물다가 아무 원인 없이 저절로 아무 방향으로나 굴러 내려가는 해들이다. 이 예는 지금도 논쟁거리이다. 고전역학은 결국 결정론적(deterministic)인가? 수학적으로 보면 이것은 바로 이 문제에서 본 것과 같은 종류의 비유일성이다.

사고 기술

유일성을 가정하지 마라

해를 하나 찾았다고 그것이 유일한 해임이 보여진 것은 아니다. 다른 해가 있는지 물어라. 특히 방정식에 매끄럽지 않은 함수가 들어 있을 때 그렇다.

대학에서는 존재성과 유일성 정리가 어떤 조건이 필요한지 정확히 알려 준다. 여기서는 영에서 기울기가 무한대인 제곱근 하나만으로도 유일성이 깨졌다.

더 도전하기

1 **두 가지 증가율.** STEP II 2018, 8번 문제 (`step.maths.org/questions/18-s2-q8`)을 풀어 보자. 이 문제는 치환을 이용해 두 성장 방정식을 푼다. 그런 다음 왜 $y = 0$도 같은 초깃값을 갖는 해인지, 그리고 이것이 유일성에 관해 무엇을 말해 주는지 생각해 보자.

2 **새는 양동이.** $h(0) = h_0 > 0$일 때 $h' = -k\sqrt{h}$를 풀어라. 양동이는 언제 비는가? 어떤 T에 대하여 $h(T) = 0$이고 모든 $t \geq T$에 대하여 $h(t) = 0$인 서로 다른 두 해를 써라.

3 **되찾은 유일성.** $y(0) = 0$인 $y' = 2y$의 해는 $y = 0$뿐임을 보여라. (**힌트:** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$를 생각해 보아라.) $2\sqrt{y}$에는 없고 $2y$에는 있는 성질은 무엇인가?

4 **세제곱.** 원점을 지나는 $y' = 3y^{2/3}$의 해를 모두 구하여라.

더 읽을거리

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*** (Academic Press). 존재성과 유일성, 그리고 이 장의 나머지 내용 대부분을 다룬다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*** (CRC Press). 역사 이야기가 가득한 고전이다. 특이해와 포락선을 다룬다.
- **John Norton, "The dome: an unexpectedly simple failure of determinism"**, *Philosophy of Science* 75 (2008). 짧고 읽기 쉽다.

8.2 풀지 않고 범위 구하기

문제

STEP III 2013, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s3-q7`

도입

대부분의 미분방정식(differential equation)은 풀 수 없다. $y'' + y^3 = 0$의 해를 익숙한 함수로 나타내는 공식은 없으며, 소문항 (iii)의 괴물 같은 방정식은 더 말할 것도 없다. 그런데도 해에 대해서는 많은 것을 말할 수 있다. 해가 유계(bounded)로 머문다는 것, 진동(oscillate)한다는 것, 어떤 상태로 안정된다는 것 등이다. 비결은 해와 그 도함수로 만든 양 가운데 절대 증가하지 않는 것을 찾는 것이다. 그러면 해는 그 안에 갇힌다.

물리학에서 그런 양은 대개 **에너지**(*energy*)이다. 그릇 안에서 구르는 공은 처음 높이보다 높이 올라갈 수 없다. 에너지가 보존되거나, 마찰이 있으면 감소하기 때문이다. 이 문제는 같은 추론을 세 방정식에 적용하는데, 마지막 방정식은 "에너지"를 스스로 만들어 내야 하도록 골라져 있다. 1892년 알렉산드르 랴푸노프(Aleksandr Lyapunov)가 고안한 이 방법은 미분방정식 연구에서 가장 중요한 도구 가운데 하나이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 소문항 (i)에서 y를 입자의 위치로, x를 시간으로 생각하자. 그러면 $y'' = -y^3$은 힘이 $-y^3$인 뉴턴(Newton)의 법칙이다. 운동 에너지(kinetic energy)와 위치 에너지(potential energy)는 무엇인가?

운동 에너지는 (질량을 1로 두면) $\frac{1}{2}(y')^2$이고, 힘은 $-V'(y)$이므로 힘 $-y^3$은 위치 에너지 $V(y) = \frac{1}{4}y^4$에서 나온다. 전체 에너지는 $\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{4}y^4$이고, 이는 E의 절반이다. 에너지 보존(conservation of energy)이 말하는 것이 바로 E가 상수라는 사실이다.

차근차근 풀기

1단계 보존

연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2y'y'' + 2y^3y' = 2y'(y'' + y^3) = 0.$$

따라서 E는 상수이고, $x = 0$에서의 값과 같다: $\mathrm{E} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. $(y')^2 \geq 0$이므로 $\frac{1}{2}y^4 \leq \frac{1}{2}$이고, 따라서 $y^4 \leq 1$, 즉 $|y| \leq 1$이다. ■

해는 -1과 1 사이에서 진동하며, (y, y') 평면에서 닫힌곡선 $(y')^2 + \frac{1}{2}y^4 = \frac{1}{2}$를 그린다(그림 8.2.1).

2단계 소산(dissipation)

> **생각해 보기** $\mathrm{E} = (v')^2 + 2\cosh v$를 미분하라. 미분방정식을 이용해 v''를 바꾸어 넣어라. 결과의 부호는 어떠한가?

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2v'v'' + 2\sinh v\, v' = 2v'(v'' + \sinh v) = 2v'(-xv') = -2x(v')^2 \leq 0 \quad \text{단, } x \geq 0.$$

항 xv'은 마찰(friction)처럼 작용하여 에너지를 없앤다. 따라서 $x \geq 0$에서 $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$이다. $x = 0$에서 $\cosh(\ln 3) = \frac{3+\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$이므로 $\mathrm{E}(0) = \frac{10}{3}$이다. 그러므로

$$2\cosh v \leq (v')^2 + 2\cosh v = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad \cosh v(x) \leq \tfrac{5}{3}.$$ ■

3단계 에너지 만들어 내기

소문항 (iii)에는 아무런 힌트가 없다. 증가하지 않는 함수 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$를 찾아야 한다.

> **생각해 보기** $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$이면 $\mathrm{E}' = 2w'w'' + F'(w)w'$이다. 방정식을 이용해 w''를 바꾸어 넣었을 때 $(w')^2$의 배수만 남으려면 $F'(w)$는 무엇이어야 하는가?

$\mathrm{E}' = 2w'\big(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\big)$이 되기를 원하므로 $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$가 필요하다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(w\sinh w) = \sinh w + w\cosh w$이므로 다음과 같이 잡을 수 있다.

$$F(w) = 2w\sinh w + 2\cosh w, \qquad \mathrm{E} = (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w.$$

그러면 방정식을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = -2(5\cosh x - 4\sinh x - 3)(w')^2.$$

잠깐, 직접 해 보기 모든 x에 대하여 $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$임을 보여라. ($e^x$로 나타낸 다음 완전제곱식(perfect square)을 찾아보라.) 그런 다음 논증을 마무리하라.

$5\cosh x - 4\sinh x - 3 = \frac{5}{2}(e^x + e^{-x}) - 2(e^x - e^{-x}) - 3 = \frac{1}{2}e^x - 3 + \frac{9}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\left(e^{x/2} - 3e^{-x/2}\right)^2 \geq 0$이다. 따라서 E는 절대 증가하지 않는다. $x = 0$에서 $\mathrm{E}(0) = \frac{1}{2} + 0 + 2 = \frac{5}{2}$이다. 모든 w에 대하여 $w\sinh w \geq 0$이므로(두 인수의 부호가 같다)

$$2\cosh w \leq (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \cosh w(x) \leq \tfrac{5}{4}. \quad \blacksquare$$

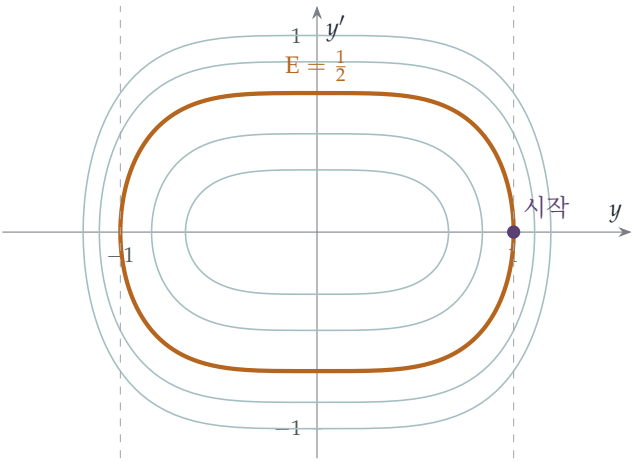


그림 8.2.1 (y, y') 평면에서 에너지 $\mathrm{E} = (y')^2 + \frac{1}{2}y^4$의 등위곡선(level curve). E가 상수이므로, $y = 1, y' = 0$에서 출발하는 소문항 (i)의 해는 영원히 곡선 $\mathrm{E} = \frac{1}{2}$(호박색) 위에 머물고, 따라서 띠 $|y| \leq 1$(점선)을 결코 벗어나지 않는다. y에 대한 공식을 전혀 구하지 않고도 이 사실을 알 수 있다.

돌아보기

- **y'을 곱하라.** 각 소문항에서 E′은 방정식 좌변의 $2y'$배에 남은 항을 더한 것이었다. 그 남은 항이 E가 보존되는지 감소하는지를 결정했다.
- **에너지가 위치를 제한한다.** 운동 에너지 부분 $(y')^2$이 음이 아니므로, E에 대한 한계는 곧 위치 에너지 부분에 대한 한계이고, 따라서 y에 대한 한계이다.
- **숨은 제곱을 찾아라.** 소문항 (iii)의 감쇠 계수(damping coefficient)는 부호가 바뀔 것처럼 보였지만, 실은 모습을 감춘 완전제곱식이었다.

숨은 수학

랴푸노프 함수

1892년 박사 학위 논문에서 랴푸노프는 운동의 **안정성**(*stability*)을 연구했다. 계를 평형(equilibrium)에서 살짝 흐트러뜨리면 다시 돌아오는가, 아니면 멀리 떠나가는가? 그의 "제2방법"은 평형에서 가장 작고 해를 따라 절대 증가하지 않는 함수, 오늘날 **랴푸노프 함수**(*Lyapunov function*)라고 부르는 함수를 찾는 것이었다. 그러면 평형 근처에서 출발한 해는 계속 그 근처에 머문다. 이 방법의 아름다움은 해의 공식이 전혀 필요 없고 미분방정식 자체만 있으면 된다는 데 있으며, 이 문제가 보여 주는 것이 바로 그 점이다. 오늘날 랴푸노프 함수는 항공기 제어 시스템에서 전력망, 생태계에 이르기까지 온갖 것의 안정성을 증명하는 데 쓰인다.

물리학과 공학에서의 에너지

소문항 (i)은 비선형 진동자(nonlinear oscillator)이다. 용수철과 비슷하지만, 복원력(restoring force)이 변위(displacement)의 세제곱에 비례한다. 단순 조화 진동자(simple harmonic oscillator)와 달리 주기(period)가 진폭(amplitude)에 따라 달라지지만(진동이 클수록 빠르다), 에너지 보존 때문에 여전히 갇혀 있다. 소문항 (ii)는 시간에 따라 커지는 감쇠(damping)를 더하며, 에너지가 빠져나간다. 공학에서는 구조물이 스스로 흔들려 부서지지 않는다는 것, 제어 시스템이 통제를 벗어나 진동하지 않는다는 것을 보이는 데 에너지 방법(energy method)이 쓰인다. 편미분방정식(partial differential equation) 이론에서는 이런 종류의 "에너지 추정(energy estimate)"이 해가 존재하고 잘 행동함을 증명하는 주된 도구이다. 유체 흐름 방정식에 관한 문제들, 그 가운데 밀레니엄 상 문제(Millennium Prize Problems)의 하나인 나비에–스토크스 문제(Navier–Stokes problem)도 결국 그러한 한계를 찾을 수 있느냐로 귀결된다.

사고 기술

증가할 수 없는 양을 찾아라

방정식을 풀 수 없다면, 해로 만든 양 가운데 도함수의 부호가 일정한 것을 찾아라. 그 양이 해의 범위를 제한해 줄 것이다.

이 탐색은 물리학("에너지는 무엇인가?")과 대수("도함수가 간단히 정리되려면 무엇을 더해야 하는가?")의 안내를 받는다. 소문항 (iii)은 기댈 물리적 직관이 없을 때

대수적인 길을 보여 준다.

더 도전하기

1 **단진동.** $y(0) = A$, $y'(0) = 0$인 $y'' + y = 0$에 대하여 보존되는 에너지를 구하고 $|y| \le A$임을 이끌어 내라. 정확한 해와 비교하여 확인하라.

2 **진자.** 진자(pendulum)의 각 θ는 (적당한 단위에서) $\theta'' + \sin\theta = 0$을 만족한다. $(\theta')^2 - 2\cos\theta$가 상수임을 보여라. 진자가 $|\theta_0| \le \pi$인 각 θ_0에서 정지 상태로 출발하면 $|\theta|$가 결코 $|\theta_0|$를 넘지 않음을 보여라. $|\theta_0| > \pi$이면 무엇이 잘못되는가?

3 **감쇠.** $k > 0$일 때 $y'' + 2ky' + y = 0$에 대하여 $(y')^2 + y^2$이 감소함을 보여라. 이 값은 반드시 0으로 수렴하는가?

4 **탈출.** $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$인 $y'' - y^3 = 0$에 대하여 보존량(conserved quantity)을 구하고, 그 보존량으로는 y를 유계로 묶을 수 없음을 보여라. 무엇이 잘못되는가?

더 읽을거리

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 제 6장과 제 7장에서 위상 평면(phase plane), 보존계(conservative system), 랴푸노프 함수를 다룬다.
- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*** (Oxford University Press). 에너지 방법의 예가 많이 실린 표준 학부 교재이다.
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems*** (Basic Books). 나비에–스토크스 문제에 대한 이해하기 쉬운 설명이 실려 있다.

8.3 개체군 수확하기

문제

STEP II 1995, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/95-s2-q8`

도입

먹이가 무한한 개체군은 지수적으로(exponentially) 증가한다. 하지만 실제 개체군은 공간이 부족해진다. 개체군이 환경이 감당할 수 있는 크기, 곧 **수용력**(*carrying capacity*)에 가까워질수록 증가가 느려진다. 이를 나타내는 가장 단순한 모형인 **로지스틱 방정식**(*logistic equation*)이 문제의 앞부분에 나오며, 이 방정식은 배양 접시 속 세균에서 새로운 기술의 확산에 이르기까지 온갖 현상을 설명한다.

문제의 뒷부분은 실용적으로 매우 중요한 질문을 던진다. 개체군을 일정한 비율로 수확(harvest)하면 어떻게 될까? 수확량이 어떤 문턱값보다 작으면 개체군은 더 낮은 새로운 평형(equilibrium)에 맞추어 자리를 잡는다. 그러나 수확량을 그 문턱값보다 조금이라도 늘리면 평형이 사라지고 개체군은 0으로 붕괴한다. 이것이 어장 붕괴 뒤에 숨은 수학이며, 어획 할당량이 존재하는 이유이다.

시작하기 전에

생각해 보기 무엇이든 풀기 전에, 증가율 $(2K - x)x$를 x의 함수(function)로 보고 그래프를 그려 보자. 어디에서 0이 되는가? 어디에서 양수인가? 이로부터 x가 어떻게 움직일지 알 수 있는가?

증가율은 $x = 0$과 $x = 2K$에서 0이고, 그 사이에서는 양수이며, $2K$보다 큰 곳에서는 음수이다. 따라서 0과 $2K$ 사이에서 출발한 개체군은 $2K$를 향해 증가하고, $2K$보다 큰 값에서 출발한 개체군은 그 값을 향해 감소한다. 수용력은 $2K$이고, 증가가 가장 빠른 곳은 $x = K$이며 이때 증가율은 K^2이다. 방정식을 풀지 않고도 장기적인 거동을 예측할 수 있다.

차근차근 풀기

1단계 로지스틱 방정식 풀기

생각해 보기 변수를 분리하자(separation of variables): $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2K-x)x} = \int \mathrm{d}t$. 좌변을 부분분수(partial fractions)로 나누어 보자.

$\dfrac{1}{(2K-x)x} = \dfrac{1}{2K}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2K-x}\right)$이므로

$$\frac{1}{2K}\ln\frac{x}{2K-x} = t + C.$$

$t=0$일 때 $x=K$이므로 $\ln 1 = 0$이고 $C=0$이다. 그러면 $\frac{x}{2K-x} = e^{2Kt}$이고, 따라서

$$x = \frac{2Ke^{2Kt}}{1+e^{2Kt}} = \frac{2K}{1+e^{-2Kt}} = K + K\frac{1-e^{-2Kt}}{1+e^{-2Kt}}. \qquad \blacksquare$$

이 분수는 $\tanh(Kt)$이므로 $x = K + K\tanh Kt$이다. 이는 K에서 출발하여 $2K$를 향해 올라가는 S자 모양의 곡선이다. $t\to\infty$일 때 $e^{-2Kt}\to 0$이고 $x\to 2K$이다.

2단계 수확

세균을 비율 L로 제거하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K-x)x - L.$$

생각해 보기 $(2K-x)x - L$을 완전제곱식으로 고쳐 보자(completing the square). 그 영점은 어디인가?

$(2K-x)x - L = K^2 - L - (x-K)^2 = \alpha^2 - (x-K)^2 = \big(\alpha-(x-K)\big)\big(\alpha+(x-K)\big)$이다. 평형점은 $x = K \pm \alpha$이다.

잠깐, 직접 해 보기 이제 $y = x - K + \alpha$로 치환(substitution)하자. y는 어떤 방정식을 만족하는가? 원래의 로지스틱 방정식과 비교해 보자.

$y = x - K + \alpha$로 두면 $x - K = y - \alpha$이므로 $\alpha + (x-K) = y$이고 $\alpha - (x-K) = 2\alpha - y$이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (2\alpha - y)y,$$

이는 K를 α로 바꾼 로지스틱 방정식 그대로이다. 처음 값은 $y(0) = K - K + \alpha = \alpha$로, 첫 부분의 $x(0)=K$와 정확히 같은 꼴이다. 그러므로 1단계에 의해(K 대신 α를 넣으면) $y(t) = \alpha + \alpha\tanh\alpha t \to 2\alpha$이고, 따라서

$$x(t) = K + \alpha\tanh\alpha t \to K + \alpha. \qquad \blacksquare$$

돌아보기

- **정성적 분석이 먼저이다.** 증가율의 부호만으로, 아무것도 풀기 전에 장기적인 거동을 예측할 수 있었다.
- **완전제곱식이 평형점을 드러낸다.** 수확이 있는 방정식의 평형점은 $K \pm \alpha$였다.
- **치환으로 새로운 문제를 이미 푼 문제로 바꾼다.** 변수를 평행이동하자 수확이 있는 방정식이 이미 풀어 본 로지스틱 방정식으로 바뀌었다.

숨은 수학

티핑 포인트

수확이 있는 방정식에는 두 평형점 $K + \alpha$와 $K - \alpha$가 있다. 위쪽 평형점은 **안정**(*stable*)하다. 개체군이 그보다 약간 크거나 작아도 다시 그 값으로 돌아온다. 아래쪽 평형점은 **불안정**(*unstable*)하다. $K - \alpha$보다 조금이라도 작은 개체군은 줄어들어 멸종한다. 수확률 L이 커지면 $\alpha = \sqrt{K^2 - L}$이 작아지고 두 평형점은 서로 가까워진다. $L = K^2$에서 두 평형점은 하나로 합쳐지고, $L > K^2$이면 평형점이 전혀 없어 모든 개체군이 붕괴한다(그림 8.3.1). 이것이 **안장-마디 분기**(*saddle-node bifurcation*)로, 가장 단순한 종류의 **티핑 포인트**(*tipping point*)이다. 무서운 점은 이를 미리 알려 주는 극적인 징후가 전혀 없다는 것이다. L이 K^2에 가까워지는 동안 평형 개체군은 완만하게 줄어들 뿐이다가, 갑자기 평형이 사라진다. 그 뒤에 수확량을 줄여도 소용이 없을 수 있는데, 개체군이 이미 불안정한 문턱값 아래로 내려갔을 수 있기 때문이다.

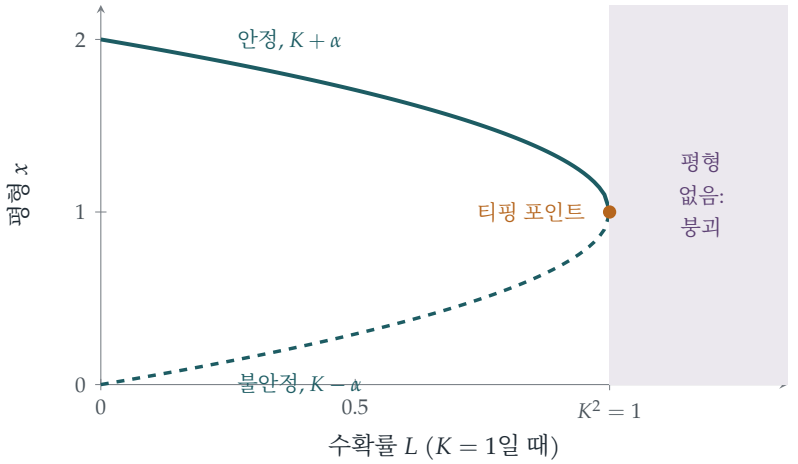


그림 8.3.1 $K=1$일 때 수확률 L에 따른 평형 개체군. 안정 평형점(실선)과 불안정한 문턱값(점선)은 L이 커질수록 서로 가까워지다가 $L=K^2$에서 만난다. 그보다 크면 평형점이 존재하지 않고, 개체군은 크기와 관계없이 붕괴한다.

최대 지속 가능 수확량

개체군이 지속적으로 감당할 수 있는 가장 큰 수확량은 얼마일까? 그것은 증가율 $(2K-x)x$의 최댓값인 $L=K^2$이며, 개체군을 수용력의 절반인 K로 유지할 때 얻어진다. 수산학은 20세기 중반에 이 "최대 지속 가능 수확량(maximum sustainable yield)"을 관리 목표로 채택했다. 그러나 정확히 최댓값만큼 수확하면 계는 정확히 티핑 포인트에 놓이게 되고, 그곳에서는 K를 아주 조금만 과대평가하거나 한 해만 흉년이 들어도 붕괴가 일어난다. 뉴펀들랜드(Newfoundland) 앞바다의 그랜드뱅크스(Grand Banks) 대구 어장은 500년 동안 세계에서 가장 풍요로운 어장 가운데 하나였지만 1990년대 초에 붕괴했고, 1992년 캐나다 정부는 조업 중단 조치(moratorium)를 내려 수만 명이 일자리를 잃었다. 어족 자원은 아직도 완전히 회복되지 않았다.

다른 곳의 로지스틱 성장

로지스틱 방정식은 1838년 페르휠스트(Pierre-François Verhulst)가 인구를 모형화하기 위해 제안했다. 같은 S자 곡선이 초기 단계의 전염병 확산, 신기술의 보급, 자기촉매 화학 반응, 종양의 성장을 설명한다. 이산 시간 버전인 로지스틱 **사상**(*map*)은 매우 다르게 행동한다. Section 8.7에서 보겠지만, 이 사상은 카오스적(chaotic)일 수 있다.

사고 기술

평형점과 그 안정성

방정식 $x' = f(x)$에서 평형점은 f의 영점이며, 평형점 사이에서 f의 부호를 보면 해가 어느 쪽으로 움직이는지 알 수 있다.

f가 양수에서 음수로 바뀌는 평형점은 안정하고, 음수에서 양수로 바뀌는 평형점은 불안정하다. f의 그래프를 그리면 아무것도 풀지 않고도 중요한 질문에 답할 수 있는 경우가 많다.

더 도전하기

1 **낮은 곳에서 출발하기.** 수확이 있고 $K^2 > L$일 때, $x(0) < K - \alpha$이면 개체군이 유한한 시간 안에 0에 도달함을 보여라. (힌트: $y(0) < 0$이면 y는 어떻게 되는가?)

2 **남획.** $L > K^2$이면 $\beta = \sqrt{L - K^2}$로 두자. $x(0) = 2K$일 때 $x' = -(x - K)^2 - \beta^2$을 풀고, 개체군이 0에 도달하는 시각을 구하여라.

3 **비례 수확.** 대신 개체군의 일정한 비율을 제거한다고 하자: $x' = (2K - x)x - hx$. 평형점을 구하고, 모든 $h < 2K$에 대하여 개체군이 살아남음을 보여라. 이 정책이 더 안전한 이유는 무엇인가?

4 **도달 시간.** 수확이 없는 경우, 개체군이 $\frac{3}{2}K$에 도달하는 시각을 구하여라.

더 읽을거리

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 비선형 동역학과 카오스. 3장은 분기를 다루며, 이 수확 모형이 연습문제로 나온다.
- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology*** (Springer). 학부생을 위한 개체군 모형.
- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World*** (Penguin). 대구 어업의 역사와 그 붕괴.

8.4 원으로 감겨드는 나선

문제

STEP III 2015, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/15-s3-q8`

도입

자연의 많은 계는 처음 상태와 상관없이 일정한 리듬에 자리 잡는다. 뛰는 심장, 우는 귀뚜라미, 고르게 활을 긋는 바이올린 현, 포식자와 피식자의 개체 수 순환이 그렇다. 이들을 조금 흔들어도 다시 같은 리듬으로 돌아온다. 미분방정식(differential equation)의 언어로 말하면, 이런 계의 해는 하나의 닫힌 고리에 다가가는데, 이 고리를 **극한 순환**(*limit cycle*)이라고 한다.

이 문제는 극한 순환을 하나 직접 만든다. 방정식은 x와 y로는 손댈 수 없어 보이지만, 극좌표(polar coordinates)로 바꾸면 풀 수 있는 꼴로 단순해지고, 해는 안쪽과 바깥쪽 모두에서 단위원으로 감겨 들어가는 나선임이 드러난다. 핵심이 되는 수, 즉 문제의 대칭성에 맞는 좌표를 고르는 일은 이 책 전체에서 거듭 써 온 방법이다.

시작하기 전에

생각해 보기 두 방정식에는 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$와 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$라는 조합이 숨어 있다. 이들을 극좌표로 나타내면 무엇인가?

$r^2 = x^2 + y^2$이므로 미분하면 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$이다. 또 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$이다(이것은 Section 4.9의 넓이 공식이다). 이 두 항등식 덕분에 변수 변환이 거의 수월해진다. 방정식을 이 조합들만 나타나도록 다시 쓰면 된다.

차근차근 풀기

1단계 극좌표로 본 소문항 (i)

방정식을 $(y+x)\,dy-(y-x)\,dx=0$으로 쓰고 정리하면 다음과 같다.

$$(x\,dx+y\,dy)+(x\,dy-y\,dx)=0.$$

생각해 보기 전개하여 이 정리가 맞는지 확인하라. 그다음 위의 두 항등식을 써라.

$(y+x)\,dy-(y-x)\,dx = y\,dy+x\,dy-y\,dx+x\,dx$이고, 이는 위의 식과 같다. 극좌표로 쓰면 $r\,dr+r^2\,d\theta=0$이며, ($r>0$에서) $r^2\,d\theta$로 나누면 다음을 얻는다.

$$\frac{dr}{d\theta}+r=0. \qquad \blacksquare$$

해는 $r=Ce^{-\theta}$이다. 이는 로그 나선(*logarithmic spiral*)으로, θ가 증가하면 원점을 향해 감겨 들어가고 θ가 감소하면 무한히 멀어진다.

2단계 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 새 방정식은 옛 방정식에 $x^2+y^2=r^2$이 들어간 항을 더한 것이다. 같은 방법으로 다시 쓰고 $\frac{dr}{d\theta}$를 구하라.

방정식은 $(y+x-xr^2)\,dy-(y-x-yr^2)\,dx=0$, 즉

$$\big[(y+x)\,dy-(y-x)\,dx\big]-r^2\big(x\,dy-y\,dx\big)=0.$$

첫째 괄호는 앞에서처럼 $r\,dr+r^2\,d\theta$이고, 둘째 괄호는 $r^2\,d\theta$이다. 따라서 $r\,dr+r^2(1-r^2)\,d\theta=0$이고, 다음을 얻는다.

$$\frac{dr}{d\theta}=r^3-r.$$

생각해 보기 이 식은 r에 대해 선형(linear)이 아니지만, $u=r^{-2}$에 대해서는 선형이 된다. u는 어떤 방정식을 만족하는가?

$u=r^{-2}$로 두면 $\frac{du}{d\theta}=-2r^{-3}\frac{dr}{d\theta}=-2r^{-3}(r^3-r)=-2+2u$이다. 따라서 $\frac{du}{d\theta}-2u=-2$이고, 그 해는 $u=1+Ae^{2\theta}$이다. 그러므로

$$r^2=\frac{1}{1+Ae^{2\theta}}. \qquad \blacksquare$$

3단계 세 종류의 해

- $A = 0$: $r = 1$. 단위원이 해이다.
- $A > 0$: 항상 $r < 1$이다. $\theta \to -\infty$일 때 $r \to 1$이고, $\theta \to +\infty$일 때 $r \to 0$이다. 곡선은 원과 원점 사이를 나선을 그리며 돈다.
- $A < 0$: $r > 1$이고, 이 공식은 $1 + Ae^{2\theta} > 0$, 즉 $\theta < \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{A}\right)$인 동안에만 뜻이 있다. $\theta \to -\infty$일 때 $r \to 1$이고, θ가 그 경계에 다가가면 $r \to \infty$이다. 곡선은 원과 무한 사이를 나선을 그리며 돈다.

따라서 모든 해곡선은 $\theta \to -\infty$일 때 안쪽 또는 바깥쪽에서 단위원에 다가간다(그림 8.4.1).

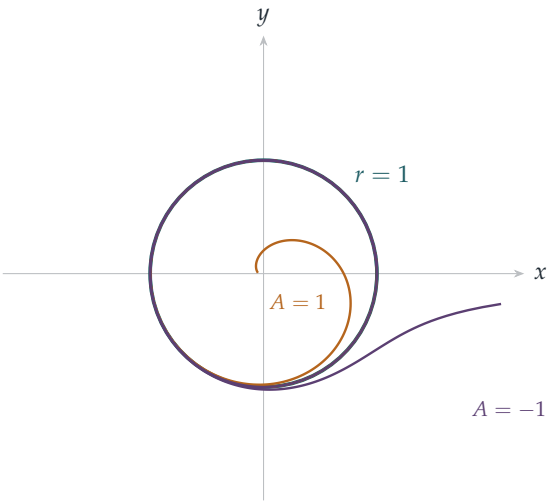


그림 8.4.1 소문항 (ii)의 해. 단위원(청록색)은 해이다. $A = 1$인 해(호박색)는 원의 안쪽에 있으며, ($\theta \to -\infty$일 때의) 원에서 출발해 원점을 향해 나선을 그린다. $A = -1$인 해(자두색)는 원의 바깥쪽에 있으며, 원에서 출발해 무한히 멀어지는 나선을 그린다. 반대 방향(θ가 감소하는 방향)으로 보면 모든 해가 원으로 감겨 들어간다. 이것이 극한 순환이다.

돌아보기

- **대칭성을 이용하라.** 방정식은 모든 방향을 똑같이 다루었고, 극좌표는 그 사실을 눈에 보이게 해 주었다.
- **표준적인 조합을 알아보라.** $x\,dx + y\,dy = r\,dr$와 $x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$가 일의 대부분을 해냈다.
- **치환으로 선형화한다.** 비선형 방정식 $r' = r^3 - r$은 $u = r^{-2}$에 대해 선형이 되었다(베르누이 방정식(*Bernoulli equation*)).

숨은 수학

극한 순환

앙리 푸앵카레(Henri Poincaré)는 1880년대에 평면 위 미분방정식의 정성적 거동을 연구하면서 극한 순환을 도입했다. 문제의 방정식을 평면 위를 움직이는 점의 경로를 나타내는 것으로 해석해 보자. 단위원은 고립된 닫힌 궤도(orbit)이고, 그 근처의 모든 궤도는 (시간의 방향에 따라) 단위원을 향해 감겨 들어가거나 단위원에서 멀어진다. 1926년 네덜란드의 공학자 발타사르 판데르폴(Balthasar van der Pol)은 진공관이 들어간 전기 회로에서 극한 순환을 발견했고, 비슷한 방정식이 심장 박동을 묘사한다고 제안했다. 극한 순환은 스스로 유지되는 안정된 리듬을 가진 모든 계의 모형이 된다. 일주기 생체 시계, 신경 자극, 포식자와 피식자 개체 수의 순환이 그 예이다.

평면에는 혼돈이 없다

푸앵카레–벤딕손 정리(*Poincaré–Bendixson theorem*)에 따르면, 평면 위의 매끄러운 계에서 유계인 영역에 머무르면서 평형점(equilibrium)에 다가가지 않는 궤도는 반드시 닫힌 궤도에 다가간다. 따라서 2차원에서 장기적인 거동은 평형점과 순환에 한정된다. 궤도끼리 교차할 수 없으므로 혼돈(chaos)이 생길 여지가 없다. 혼돈에는 적어도 3차원이 필요한데, 이는 1963년 에드워드 로렌즈(Edward Lorenz)가 대류를 나타내는 유명한 세 변수 모형("나비")으로 발견한 사실이다. 이산 시간에서는 Section 8.7에서 보듯이 1차원에서도 혼돈이 가능하다.

풀리지 않은 문제

1900년 다비트 힐베르트(David Hilbert)는 그의 열여섯 번째 문제의 일부로 다음을 물었다. P와 Q가 n차 다항식일 때, 계 $x' = P(x,y)$, $y' = Q(x,y)$가 가질 수 있는 극한 순환의 최대 개수는 얼마인가? 이는 $n = 2$일 때조차 아직 알려져 있지 않다. 이 경우 극한 순환이 네 개인 계는 알려져 있지만, 그보다 많을 수 있는지는 모른다. 이것은 힐베르트의 문제 가운데 완전히 미해결로 남아 있는 아주 드문 문제 중 하나이다.

사고 기술

대칭성에 맞게 좌표를 바꾸어라

문제가 회전 대칭을 가지면 극좌표를 쓰고, 다른 대칭을 가지면 그 대칭을 존중하는 좌표를 찾아라.

알맞은 좌표는 손댈 수 없던 방정식을 변수분리형(separable) 방정식으로 바꾸었고, 해의 기하(원과 나선)를 뚜렷하게 보여 주었다.

더 도전하기

1 **나선.** 소문항 (i)의 해 $r = e^{-\theta}$에 대하여, 이 곡선이 원점에서 나가는 모든 반직선과 같은 각 45°로 만남을 보여라. (로그 나선을 **등각 나선**(equiangular spiral)이라고 부르는 이유가 이것이다.)

2 **극좌표 항등식.** $x\,dx + y\,dy = r\,dr$와 $x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$를 증명하라.

3 **시간에 따른 계.** 계 $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\theta} = 1$을 생각하자. $r(0) > 0$인 모든 해가 $t \to \infty$일 때 단위원에 다가감을 보여라. 이 계를 x와 y로 나타내라.

4 **두 개의 순환.** $r = 1$과 $r = 2$에 극한 순환을 두 개 가지며, 하나는 끌어당기고 하나는 밀어내는, $\dot{r} = f(r)$, $\dot{\theta} = 1$ 꼴의 계를 찾아라.

더 읽을거리

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 7장에서 극한 순환과 푸앵카레–벤딕손 정리를 다룬다.
- **Steven Strogatz, *Sync*** (Hyperion). 자연의 리듬과 동기화를 다룬 교양서이다.
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science*** (Penguin). 로렌즈와 혼돈의 발견 이야기이다.

8.5 그레이하운드를 쫓는 그레이하운드

문제

STEP III 1988, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/88-s3-q10`

도입

정사각형 모양 들판의 네 꼭짓점에 개 네 마리가 서 있다. 각 개는 자기 왼쪽에 있는 개를 쫓아간다. 개들은 어디에서 만나고, 만나기까지 시간은 얼마나 걸리며, 어떤 경로를 따라갈까? 그 경로는 중심 둘레를 무한히 많이 감아 도는 아름다운 나선이다. 그런데도 각 개가 달리는 거리는 유한하며, 정확히 정사각형 한 변의 길이와 같다.

이것은 **추적 문제**(pursuit problem)로, 1732년 피에르 부게(Pierre Bouguer)가 해적선을 쫓는 배를 두고 처음 연구한 유형의 문제이다. 이 문제를 풀 수 있게 해 주는 비결은 대칭(symmetry)이다. 한 마리의 개에게 일어나는 일은 모든 개에게 똑같이 일어나므로, 네 마리 개는 언제나 정사각형을 이룬다. 이 점만 알아차리면 미분방정식(differential equation)은 거의 저절로 세워진다.

시작하기 전에

생각해 보기 대칭성에 따르면, 네 마리 개는 매 순간 어떤 도형을 이루는가? 그 도형의 중심은 어디인가?

이 상황은 정사각형의 중심에 대한 4분의 1 회전($A \to B \to C \to D \to A$로 옮기는 회전)으로 바뀌지 않으므로, 개들은 항상 같은 중심 O를 갖는 정사각형을 이룬다. 정사각형은 회전하면서 줄어들지만 계속 정사각형으로 남는다. 특히 A와 B는 항상 O로부터 같은 거리 r에 있고, OB는 항상 OA보다 4분의 1 회전만큼 앞서 있다.

차근차근 풀기

1단계 운동 방향

생각해 보기 A는 B를 향해 달린다. 삼각형 OAB에서 AB가 AO(중심을 향하는 방향)와 이루는 각은 얼마인가?

삼각형 OAB는 $OA = OB$이고 O에서의 각이 직각이므로, 나머지 두 각은 45°이다. 따라서 크기가 v인 A의 속도는 중심을 향하는 동경 방향과 45°를 이루며, B 쪽으로, 즉 θ가 증가하는 방향으로 기울어 있다(B가 A로부터 반시계 방향에 있도록 각을 정한 경우).

2단계 미분방정식

생각해 보기 A의 속도를 동경 성분과 횡 성분으로 나누어 보자. 극좌표(polar coordinates)에서 동경 방향 속도(radial velocity)는 $\dot r$이고 횡 방향 속도(transverse velocity)는 $r\dot\theta$이다.

(안쪽으로 향하는) 동경 성분은 $v\cos 45^\circ$이고 횡 성분은 $v\sin 45^\circ$이므로

$$\dot r = -\frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad r\dot\theta = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

두 식을 나누면 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\dot r}{\dot\theta} = -r$이므로 $r = \lambda e^{-\theta}$이다. 여기서 처음에 $\theta = 0$이라면 λ는 중심으로부터의 처음 거리이다. ■

3단계 개 n마리

잠깐, 직접 해 보기 정n각형에서 삼각형 OAB의 O에서의 각은 얼마인가? AB가 AO와 이루는 각은 얼마인가? 2단계를 반복해 보자.

O에서의 각은 $\frac{2\pi}{n}$이므로, 크기가 같은 두 밑각은 $\frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{n}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$이다. 속도는 안쪽을 향하는 반지름과 이 각을 이루므로

$$\dot r = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot\theta = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

따라서 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\dfrac{\pi}{n}$이고,

$$r = \lambda e^{-\theta\tan(\pi/n)}. \qquad ■$$

$n = 4$일 때 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$이므로 정사각형의 경우가 다시 얻어진다.

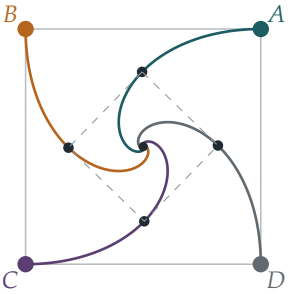


그림 8.5.1 정사각형의 꼭짓점에서 출발하여 서로를 쫓는 개 네 마리. 각 개는 (자신의 출발 방향을 기준으로) 로그 나선 $r = \lambda e^{-\theta}$를 따라가며 중심 둘레를 무한히 감아 돈다. 매 순간 개들은 정사각형(점선, 어느 한 중간 시각의 모습)을 이루며, 이 정사각형은 회전하고 줄어들다가 중심에서 만난다.

돌아보기

- **대칭은 여러 물체를 하나로 줄여 준다.** 배치가 계속 정사각형으로 유지되므로, 서로 영향을 주고받는 네 마리 개가 간단한 규칙을 따르는 하나의 입자로 바뀌었다.
- **중심 둘레의 운동에는 극좌표를.** 속도의 동경 성분과 횡 성분 $\dot{r}$과 $r\dot{\theta}$로부터 곧바로 방정식을 얻었다.
- **나누어서 시간을 소거하라.** 비 $\dot{r}/\dot{\theta}$를 이용하면 각 점에 언제 도달하는지 몰라도 경로의 모양을 알 수 있었다.

숨은 수학

무한히 많은 회전, 유한한 거리

동경 방향 속력 $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$은 일정하므로, 개들은 시간 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ 뒤에 중심에 도달하고, 각자 거리 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$를 달린다. 한 변의 길이가 s인 정 n각형에서는 $r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$이므로, 각 개가 달리는 거리는

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

이다. 개가 네 마리일 때 이 값은 정확히 s이다. 즉 각 개는 정확히 한 변의 길이만큼 달린다. (이것을 깔끔하게 보는 방법이 있다. B의 속도는 항상 AB에 수직이므로 거리 AB를 바꾸지 않는다. 오직 AB를 따라 곧장 속력 v로 움직이는 A의 운동만이 간격을 좁히며, 처음 간격은 s이다.) 개가 세 마리일 때 거리는 $\frac{2}{3}s$이고, 여섯 마리일 때는 $2s$이다. 그런데도 모든 경우에 나선은 중심 둘레를 무한히 많이 감아 도는데, $r \to 0$일 때 $\theta \to \infty$이기 때문이다.

길이가 유한하면서 무한히 많이 회전하는 곡선은 역설이 아니다. 회전이 충분히 빠르게 작아지기 때문이다.

로그 나선

곡선 $r = \lambda e^{-k\theta}$를 **로그 나선**(logarithmic spiral) 또는 **등각 나선**(equiangular spiral)이라 한다. 이 곡선은 중심에서 뻗어 나가는 모든 반직선과 같은 각도로 만난다. 모양을 유지하는 성장이 이 곡선을 만들어 내므로, 앵무조개의 껍데기나 일부 은하의 나선팔처럼 자연에서도 나타난다. 야코프 베르누이(Jacob Bernoulli)는 이 곡선에 너무나 매료되어, 자신의 묘비에 *Eadem mutata resurgo*("변하여도 나는 같은 모습으로 다시 일어나리라")라는 문구와 함께 이 곡선을 새겨 달라고 부탁했다. 이 문구는 로그 나선이 어떤 배율에서 보아도 똑같아 보인다는 사실을 가리킨다. 그러나 석공은 그 대신 아르키메데스 나선(Archimedean spiral)을 새겼다.

실제 세계의 추적

항상 목표물을 곧장 향하는 "순수 추적"(pure pursuit)은 미사일이나 포식자에게 가장 단순한 유도 법칙이다. 하지만 최선은 아니다. 목표물이 **앞으로** 있을 곳을 향하는 방식("비례 항법"(proportional navigation))이 더 효율적이며, 현대의 미사일과 잠자리, 매 같은 일부 포식자가 실제로 쓰는 방식이 바로 이것이다. 추적과 회피의 수학은 20세기에 **미분 게임**(differential games)이라는 이름으로 독자적인 분야가 되었다.

사고 기술

대칭을 활용하여 다체 문제를 단순화하기

계가 대칭적이고 규칙이 그 대칭을 존중한다면, 대칭은 모든 시간 동안 유지되며 계의 한 부분만 따라가면 된다.

이 아이디어는 역학과 동역학의 많은 문제를 해결해 준다. 이는 대칭과 보존 사이의 깊은 관계를 보여 주는 간단한 예이다.

더 도전하기

1 **깔끔한 논증.** 개 네 마리 문제에서 거리 AB가 정확히 비율 v로 줄어드는 이유를 꼼꼼히 설명하고, 이로부터 개들이 시간 s/v 뒤에 만난다는 것을 유도하여라.

2 **개 세 마리.** 개 세 마리가 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 꼭짓점에서 출발한다. 각 경로의 방정식, 만날 때까지 걸리는 시간, 각 개가 달리는 거리를 구하여라.

3 **몇 바퀴일까?** 중심에서 100 m 떨어진 곳에서 출발한 개 네 마리는 한 바퀴를 완전히 돈 뒤 중심에 얼마나 가까워지는가? 몇 바퀴를 완전히 돌아야 중심으로부터 1 mm 이내에 들어오는가?

4 **개 두 마리.** $n = 2$(서로 마주 보는 개 두 마리)일 때는 어떻게 되는가? 공식이 여전히 의미가 있는가?

더 읽을거리

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*** (Princeton University Press). 추적과 회피의 수학. 부게에서 미사일까지, 추적 곡선에 관한 모든 것을 다룬다.
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number*** (Princeton University Press). 수 e의 이야기. 로그 나선과 베르누이의 묘비 이야기가 실려 있다.
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*** (Cambridge University Press). 성장과 형태에 관하여. 나선 성장을 포함하여 자연 속의 수학을 다룬 고전이다.

8.6 양자 진동자

문제

STEP III 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/88-s3-q7`

도입

용수철에 매달린 물체는 원하는 어떤 에너지로든 진동할 수 있다. 조금 당겼다 놓아도 되고 많이 당겼다 놓아도 된다. 그런데 1900년에 막스 플랑크(Max Planck)는 뜨거운 물체가 내는 빛의 색을 설명하려면 진동하는 원자가 일정한 크기의 계단 간격으로 떨어진 특정한 에너지만 가질 수 있어야 한다는 사실을 발견했다. 원자 규모에서 에너지는 **양자**(*quanta*) 단위로 주어진다. 그로부터 25년 뒤, 양자역학(quantum mechanics)이 그 이유를 설명했다.

이 문제에는 바로 그 설명이 담겨 있다. 문제의 미분방정식(differential equation)은 단위를 바꾸고 나면 용수철과 같은 퍼텐셜(potential) 안에 있는 양자 입자에 대한 슈뢰딩거 방정식(Schrödinger equation), 곧 **양자 조화 진동자**(*quantum harmonic oscillator*)의 방정식이 된다. 이 방정식은 특별한 에너지 값에서만 잘 행동하는 해, 즉 무한대에서 사라지는 해를 가진다. 이 에너지 값들은 $n = 0, 1, 2, \ldots$로 번호가 매겨지며 같은 간격으로 늘어서 있다. 또한 서로 다른 n에 대한 해들은 **직교**(*orthogonal*)한다. 즉 두 해의 곱의 적분이 0이며, 이는 푸리에 급수(Fourier series)에서 $\sin mx$와 $\sin nx$가 그러한 것과 똑같다. 양자 진동자는 분자, 고체, 빛의 물리학의 출발점이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $e^{-\lambda x^2}$ 같은 함수가 왜 그럴듯한 추측일까? $x \to \pm\infty$일 때 $e^{-\lambda x^2}$와 그 도함수는 어떻게 되는가?

$|x|$가 클 때 방정식은 $y'' \approx \omega^2 x^2 y$가 지배하며, 가우스 함수(Gaussian) $e^{-\lambda x^2}$는 큰 x에서 $y'' \approx 4\lambda^2 x^2 y$를 만족하므로 $4\lambda^2 = \omega^2$이면 서로 맞아떨어진다. $\lambda > 0$이면 가우스 함수

와 그 모든 도함수는 x의 어떤 거듭제곱보다도 빠르게 0으로 감소한다. 따라서 경계 조건(boundary conditions)은 저절로 만족되고, 해야 할 일은 방정식을 맞추는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 바닥 상태

> **생각해 보기** $y_0 = e^{-\lambda x^2}$를 두 번 미분하여 $n = 0$인 방정식에 대입하고, x^2의 계수와 상수항을 비교하라.

$y_0' = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$이고 $y_0'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)e^{-\lambda x^2}$이다. $n = 0$인 방정식이 성립하려면 모든 x에 대하여

$$4\lambda^2 x^2 - 2\lambda - \omega^2 x^2 = -\omega$$

이어야 한다. 계수를 비교하면 $4\lambda^2 = \omega^2$이고 $2\lambda = \omega$이다. 둘 다 $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$일 때 성립한다($y_0 \to 0$이 되도록 $\lambda > 0$을 택한다). 그리고 $x \to \pm\infty$일 때 $y_0, y_0' \to 0$이다. 이것이 바닥 상태(ground state)이다. ■

2단계 첫 번째 들뜬 상태

$y_1 = x e^{-\lambda x^2}$에 대하여 $y_1' = (1 - 2\lambda x^2)e^{-\lambda x^2}$이고 $y_1'' = (4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x)e^{-\lambda x^2}$이다. $n = 1$인 방정식이 성립하려면

$$4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x - \omega^2 x^3 = -3\omega x,$$

이어야 하는데, 이는 같은 $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$에서 성립한다. 이번에도 y_1과 y_1'은 $\pm\infty$에서 감소한다. 이것이 첫 번째 들뜬 상태(excited state)이다. ■

3단계 항등식

> **생각해 보기** 곱의 미분법(product rule)으로 $y_m y_n' - y_n y_m'$을 미분하라. 네 항 가운데 두 항이 소거된다. 그다음 미분방정식을 이용하여 y_n''과 y_m''을 바꾸어 넣어라.

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m' y_n' + y_m y_n'' - y_n' y_m' - y_n y_m'' = y_m y_n'' - y_n y_m''$이다. 방정식에서 $y_n'' = (\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega) y_n$이고, m에 대해서도 마찬가지이다. 따라서

$$y_m y_n'' - y_n y_m'' = y_m y_n[\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega - \omega^2 x^2 + (2m+1)\omega] = 2(m-n)\omega y_m y_n.$$ ■

4단계 직교성

잠깐, 직접 해 보기 이 항등식을 $-\infty$에서 ∞까지 적분하라. 좌변은 무엇이 되는가?

좌변을 적분하면 $\left[y_m y_n' - y_n y_m'\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0$이다. 각 y와 y'이 양 끝에서 0으로 가기 때문이다. 따라서 $2(m-n)\omega \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n \, dx = 0$이고, $m \neq n$이며 $\omega > 0$이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m(x) y_n(x) \, dx = 0. \qquad \blacksquare$$

y_0과 y_1의 경우에는 이를 직접 쉽게 알 수 있다. $y_0 y_1 = xe^{-\omega x^2}$은 기함수(odd function)이기 때문이다. 그러나 위의 항등식은 함수를 구체적으로 몰라도 모든 쌍에 대하여 이를 증명해 준다.

돌아보기

- **계수를 비교하라.** 추측한 꼴을 대입하고 방정식이 모든 x에 대하여 성립하도록 요구하여 λ를 결정했다.
- **론스키안 기법.** 조합 $y_m y_n' - y_n y_m'$의 도함수에서는 이계도함수를 방정식을 이용해 바꿔 넣을 수 있고, 그러면 간단한 식이 남는다. 이 조합을 론스키안(Wronskian)이라 한다.
- **경계 조건이 경계항을 없앤다.** 무한대에서의 감소 덕분에 적분한 좌변이 0이 되었고, 이로부터 직교성을 얻었다.

숨은 수학

슈뢰딩거 방정식

1926년에 에르빈 슈뢰딩거(Erwin Schrödinger)는 양자 입자가 **파동함수**(*wave function*) $\psi(x)$로 기술된다고 제안했다. 퍼텐셜 $V(x)$ 안에서 에너지가 E인 입자의 파동함수는

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

를 만족한다. 용수철의 경우 $V(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$이고, x의 척도를 바꾸면 이는 정확히 문제의 방정식이 되며, 이때 $E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\Omega$이다. ψ가 무한대에서 사라져야 한다는(그래야 입자가 어딘가에 존재한다는) 물리적 요구는 이 에너지들에서만 충족될 수 있다. 이것이 바로 수학에서 저절로 튀어나오는 **양자화**(*quantisation*)이다. 가장 낮은 에너지가 0이 아니라 $\frac{1}{2}\hbar\Omega$임에 주목하라. 양자 진동자는 결코 완전히 정지해 있을 수 없다. 이 **영점 에너지**(*zero-point energy*)는 실재하며 측정할 수 있다. 액체 헬륨이 보통 압력에서는 절대영도에서도 얼지 않는 것이 바로 이 때문이다.

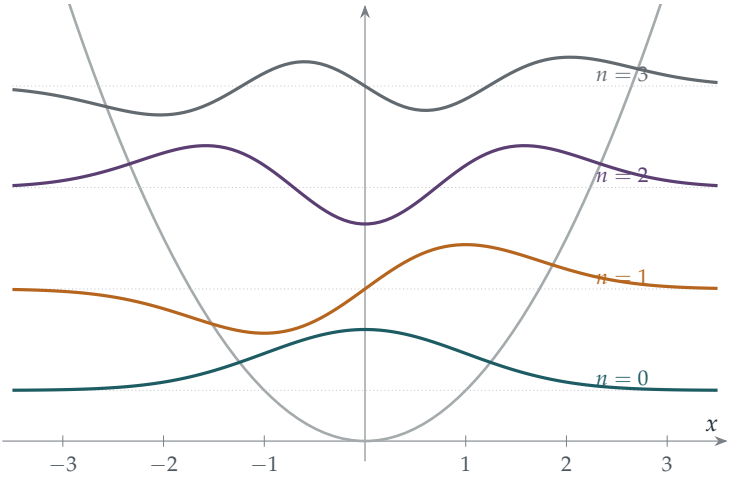


그림 8.6.1 양자 조화 진동자($\omega = 1$인 경우). 포물선은 퍼텐셜 에너지이다. 각 파동함수 y_n은 그 에너지 준위 $n + \frac{1}{2}$의 높이에 그려져 있다. 준위들은 같은 간격으로 놓여 있고, 가장 낮은 준위는 0보다 위에 있다. 함수 y_n은 n번 0을 지나며, 어느 두 함수도 서로 직교한다.

에르미트 함수와 스튀름–리우빌 이론

일반적인 해는 $y_n = H_n(\sqrt{\omega}x)e^{-\omega x^2/2}$이며, 여기서 H_n은 n차 다항식인 **에르미트 다항식**(*Hermite polynomial*)이다(그림 8.6.1). 직교성은 이 방정식에만 있는 특별한 성질이 아니다. 방정식을 적절한 경계 조건과 함께 $(py')' + qy = -\lambda wy$ 꼴로 쓸 수 있으면, 서로 다른 λ 값에 속하는 해들은 4단계와 똑같은 논증에 의해 직교한다. 이것이 **스튀름–리우빌 이론**(*Sturm–Liouville theory*)(1830년대)이며, 푸리에 급수의 사인 함수(Section 3.7), 북의 진동, 정전기학의 르장드르 다항식(Legendre polynomial), 수소 원자의 파동함수를 모두 아우른다. Section 4.7의 고유값 문제(eigenvalue problem)도 또 하나의 예이다. 거기서 구한 임계값들이 고유값 λ이고, 직교하는 함수들은 그 계의 자연스러운 "모드(mode)"이다.

사고 기술

항등식으로부터 직교성 얻기

서로 관련된 방정식의 두 해가 직교함을 보이려면, 경계 조건에 의해 적분이 0이 되면서 두 해의 곱의 상수배와 같은 완전 도함수를 찾아라.

이 방법은 적분을 직접 계산하는 것보다 훨씬 강력하다. 해를 구체적으로 쓸 수 없을 때에도 모든 쌍에 대하여 한꺼번에 통하기 때문이다.

더 도전하기

1 **다음 상태.** $\lambda = \frac{\omega}{2}$일 때 $y_2 = (4\lambda x^2 - 1)e^{-\lambda x^2}$이 $n = 2$인 방정식을 만족함을 보여라. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/\omega}$와 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega}$를 이용하여 $\int_{-\infty}^{\infty} y_0 y_2\,\mathrm{d}x = 0$임을 직접 확인하라.

2 **다른 에너지는 없다.** n을 일반적인 수 ν로 바꾼 방정식에 $y = e^{-\lambda x^2}$을 대입해 보라. 이것이 $\nu = 0$일 때만 성립함을 보여라. (사실 감소하는 해는 ν가 음이 아닌 정수일 때만 존재한다.)

3 **사인파.** $y(0) = y(\pi) = 0$인 $y'' = -n^2 y$에서 출발하여, 같은 방법으로 $m \neq n$일 때 $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$임을 보여라.

4 **사다리.** y_n이 방정식의 해이면 $y_{n+1} = \omega x y_n - y_n'$은 n 대신 $n+1$을 넣은 방정식의 해임을 보여라. 이를 이용하여 y_0으로부터 y_1과 y_2를 만들어라. (이것이 양자역학의 "올림 연산자(raising operator)"이다.)

더 읽을거리

- **David Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*** (Cambridge University Press). 『양자역학 입문』. 학부 물리학의 표준 교재로, 2장에서 조화 진동자를 다룬다.
- **리처드 파인만(Richard Feynman), *QED: The Strange Theory of Light and Matter*** (Princeton University Press). 『QED: 빛과 물질의 신기한 이론』. 양자역학의 대가 가운데 한 사람이 쓴 대중적인 해설서이다.
- **Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*** (Wiley). 『물리과학을 위한 수학적 방법』. 수학과 물리학을 공부하는 학생을 위해 에르미트 다항식과 스튀름–리우빌 이론을 다룬다.

8.7 풀 수 있는 혼돈

문제

STEP I 2014, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s1-q6`

도입

규칙 $u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$을 **로지스틱 사상**(logistic map)이라 한다. 이것은 자원이 제한된 개체군을 나타내는 가장 단순한 모형이다. u_n은 n번째 해의 개체 수를 환경이 감당할 수 있는 최대 개체 수에 대한 비율로 나타낸 것이고, k는 번식률이며, 인수 $1 - u_n$은 과밀의 효과를 나타낸다. 1976년 생물학자 로버트 메이(Robert May)는 *Nature*에 "Simple mathematical models with very complicated dynamics(매우 복잡한 동역학을 지닌 단순한 수학적 모형)"라는 짧은 논문을 발표했다. 그는 k가 4를 향해 커짐에 따라 이 한 줄짜리 규칙이 한 값으로 안정되는 상태에서 진동하는 상태로, 그리고 완전히 무작위처럼 보이는 상태로 바뀐다는 것을 보였다. 이것은 **혼돈**(chaos)의 기초가 된 대표적인 예 가운데 하나가 되었다.

혼돈계는 보통 풀 수 없다. u_n에 대한 공식이 없으므로 u_{100}을 구하는 유일한 방법은 그 앞의 모든 항을 계산하는 것이다. 이 문제는 그 예외를 찾아낸다. 가장 혼돈스러운 값인 $k = 4$에서는 공식이 **존재하며**, 그 공식은 수열이 왜 예측 불가능한지를 정확히 설명해 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 $s = \sin^2\theta$일 때 식 $4s(1 - s)$를 어디서 본 적이 있는가? $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\sin 2\theta$를 이어 주는 항등식(identity)은 무엇인가?

$s = \sin^2\theta$이면 $1 - s = \cos^2\theta$이므로 $4s(1 - s) = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta$이다. 사상 $s \mapsto 4s(1 - s)$는 모습을 바꾼 배각 공식(double-angle formula)이다.

차근차근 풀기

1단계 규칙 추측하기

$u_0 = \sin^2\theta$로 두면 위의 항등식으로부터

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2 2\theta, \qquad u_2 = 4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

> **생각해 보기** 각 단계에서 각은 어떻게 되는가? u_n에 대한 추측(conjecture)은 무엇인가?

각이 매번 두 배가 되므로 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$라고 추측한다.

2단계 증명하기

> **생각해 보기** 한 항에서 다음 항으로 가는 규칙으로 정의된 수열의 모든 항에 대한 명제에는 어떤 증명 방법이 알맞은가?

수학적 귀납법(induction)이다. $u_0 = \sin^2\theta = \sin^2(2^0\theta)$이므로 명제는 $n = 0$일 때 성립한다. 어떤 n에 대하여 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$라고 가정하자. 그러면

$$u_{n+1} = 4\sin^2(2^n\theta)(1 - \sin^2(2^n\theta)) = \left(2\sin(2^n\theta)\cos(2^n\theta)\right)^2 = \sin^2(2^{n+1}\theta),$$

이고, 이것은 $n+1$에 대한 명제이다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$이다. ■

$[0,1]$에 속하는 모든 시작값 u는 $\sin^2\theta$ 꼴로 쓸 수 있으므로($\theta = \arcsin\sqrt{u}$로 잡으면 된다), 이것으로 $[0,1]$의 모든 시작값에 대하여 $k = 4$인 로지스틱 사상이 풀린다는 점에 주목하자.

3단계 변수 바꾸기

> **생각해 보기** $v_n = \alpha u_n + \beta$를 v_{n+1}에 대한 규칙에 대입하라. 그 결과가 $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$이 되어야 한다. 이로부터 조건이 몇 개 나오고, 미지수는 몇 개인가?

대입하면

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r,$$

이므로

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + q\beta + r - \beta}{\alpha}.$$

이것이 $4u_n - 4u_n^2$이 되려면 세 가지가 필요하다.

$$p\alpha = 4, \qquad q - 2p\beta = 4, \qquad -p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0.$$

앞의 두 식에서 $\alpha = 4/p$, $\beta = (q-4)/(2p)$로 정해진다. 남은 미지수가 없으므로 세 번째 식은 p, q, r에 대한 실질적인 조건이 된다. β를 대입하고 $4p$를 곱하면

$$-(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr = 0,$$

이고, 전개하면 $-(q^2 - 8q + 16) + (2q^2 - 10q + 8) + 4pr = 0$, 즉 $q^2 - 2q - 8 + 4pr = 0$, 다시 말해

$$4pr = 8 + 2q - q^2. \qquad \blacksquare$$

> **잠깐, 직접 해 보기** 식은 세 개인데 미지수는 두 개뿐이다. 조건이 나타나는 이유가 바로 이것이다. 계산하기 전에, 일반적인 이차 사상이 왜 항상 $(*)$와 동치일 수는 없는지 알 수 있겠는가? (일차 변수변환이 바꿀 수 있는 것과 바꿀 수 없는 것을 생각해 보라.)

4단계 예

$v_{n+1} = -v_n^2 + 2v_n + 2$에서는 $p = 1$, $q = 2$, $r = 2$이고 $4pr = 8 = 8 + 4 - 4$이므로 조건이 성립한다. 그러면 $\alpha = 4$, $\beta = -1$이므로 $v_n = 4u_n - 1$이고, u_n은 $(*)$를 만족한다. $v_0 = 1$이므로 $u_0 = \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$이고, 따라서

$$u_n = \sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right), \qquad v_n = 4\sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right) - 1 = 1 - 2\cos\!\left(\frac{2^n\pi}{2}\right).$$

이로부터 $v_0 = 1$, $v_1 = 3$이고 모든 $n \geq 2$에 대하여 $v_n = -1$이다. (직접 확인해 보자. $-1 + 2 + 2 = 3$, 다음으로 $-9 + 6 + 2 = -1$, 다음으로 $-1 - 2 + 2 = -1$이다.) $\blacksquare$

이 특별한 시작값은 각이 π의 배수에 떨어져 수열이 멈추도록 고른 것이다. 그 때문에 흥미로운 부분이 가려져 있는데, 그것이 다음에 이어진다.

돌아보기

- **변장을 알아보라.** 사상 $s \mapsto 4s(1-s)$는 $s = \sin^2\theta$로 쓰자마자 각을 두 배로 하는 사상이 되었다.
- **추측하고, 귀납법으로 증명하라.** 두 항이 규칙을 암시했고, 귀납법이 그것을 증명했다.
- **식과 미지수의 개수를 세라.** 일차 치환에는 자유로운 매개변수가 두 개, 이차식에는 계수가 세 개 있으므로 조건 하나가 남을 수밖에 없다.

숨은 수학

수열이 예측 불가능한 이유

공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$는 이야기의 끝처럼 보인다. 어떤 항이든 직접 계산할 수 있기 때문이다. 하지만 이 공식이 무엇을 말하는지 살펴보자. $\sin^2$의 주기는 π이므로 $2^n\theta$를 π로 나눈 나머지만 의미가 있다. $0 \le x < 1$인 x로 $\theta = \pi x$라 쓰고, x를 이진법(binary)으로 나타내자.

$$x = 0.b_1b_2b_3\ldots \quad (\text{밑}2).$$

2를 곱하면 소수점이 오른쪽으로 한 자리 이동하고, 그 결과를 1로 나눈 나머지를 취하면 소수점을 넘어간 자릿수가 버려진다. 따라서 u_n은 x의 이진 자릿수 가운데 b_{n+1} 이후의 것에만 의존한다. 로지스틱 사상의 각 단계는 시작값의 자릿수를 하나 더 읽고, 맨 앞의 자릿수 하나를 버린다.

이것이 혼돈의 결정적 특징인 **초기 조건에 대한 민감한 의존성**(sensitive dependence on initial conditions)이다. 이진법으로 20자리(십진법으로 약 여섯 자리)까지 일치하는 두 시작값은 대체로 약 20단계 동안 일치하는 수열을 만들고, 그 뒤에는 서로 아무 관계가 없어진다(그림 8.7.1). u_{100}을 예측하려면 u_0을 이진법으로 100자리까지 알아야 한다. 시작 각의 오차는 아무리 작더라도 매 단계 두 배가 된다. (개체 수 u 자체의 오차는 매번 정확히 같은 비율로 커지지는 않는다. 사상이 $[0,1]$의 어떤 부분은 다른 부분보다 더 많이 늘리기 때문이다. 그러나 평균적으로는 같은 비율로 커진다.) 공식이 도움이 되는 것은 아니다. 공식은 그저 그 메커니즘을 눈에 보이게 해 줄 뿐이다.

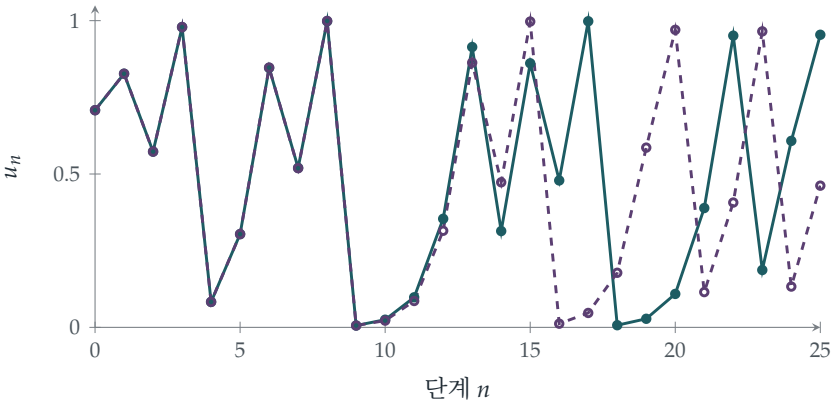


그림 8.7.1 $k = 4$인 로지스틱 사상에서 $\sin^2(1)$(청록색)과 $\sin^2(1.00001)$(자주색, 점선)로 시작하는 두 수열. 약 열 단계 동안은 구별할 수 없고, 12단계에서는 눈에 띄게 달라지며, 그 뒤로는 서로 무관하다. 12단계까지 각의 차이 10^{-5}는 열두 번 두 배가 되어 약 $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$가 된다.

어디에나 있는 주기점

이 공식으로 사상의 모든 순환도 찾을 수 있다. 수열이 N단계 뒤에 시작값으로 돌아오는 것은 정확히 $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$일 때, 즉 $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$일 때이다. 따라서

$\theta = m\pi/(2^N - 1)$ 또는 $\theta = m\pi/(2^N + 1)$은 주기가 N의 약수인 점을 준다. 예를 들어 $\theta = \pi/5$는 $4\theta \equiv -\theta$를 만족하므로 $\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$는 2-순환이다. 모든 주기의 주기점(periodic point)이 존재하며, 이들은 $[0,1]$에서 조밀(dense)하다. 즉 아무리 작은 구간에도 수열이 반복되는 시작값이 있다. 그런데도 오차가 두 배씩 커지므로 이들은 모두 불안정하다. 주변의 모든 것을 밀어내는 조밀한 주기점은 혼돈의 두 번째 특징이다.

혼돈에 이르는 길

k가 더 작으면 공식이 없고, 행동 양상은 k에 따라 극적으로 달라진다(그림 8.7.2). $1 < k < 3$이면 $(0,1)$에서 시작하는 모든 수열이 고정점(fixed point) $1 - 1/k$로 수렴한다. $k = 3$에서 고정점이 불안정해지고 2-순환이 그 자리를 차지한다(이것이 STEP II 2002 Q5의 주제이다. 연습문제를 보라). $k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$에서 2-순환은 4-순환에, 이어서 8-순환에 자리를 내주며, 주기 배가(period doubling)는 점점 더 빨리 일어나다가 $k \approx 3.5699$에서 순환의 길이가 무한대가 되고 혼돈이 시작된다. 혼돈 영역 안에는 질서의 창이 있다. 가장 뚜렷한 것은 $k = 3.83$ 근처에 있으며 3-순환을 포함하는데, 이것이 Section 8.8의 주제이다.

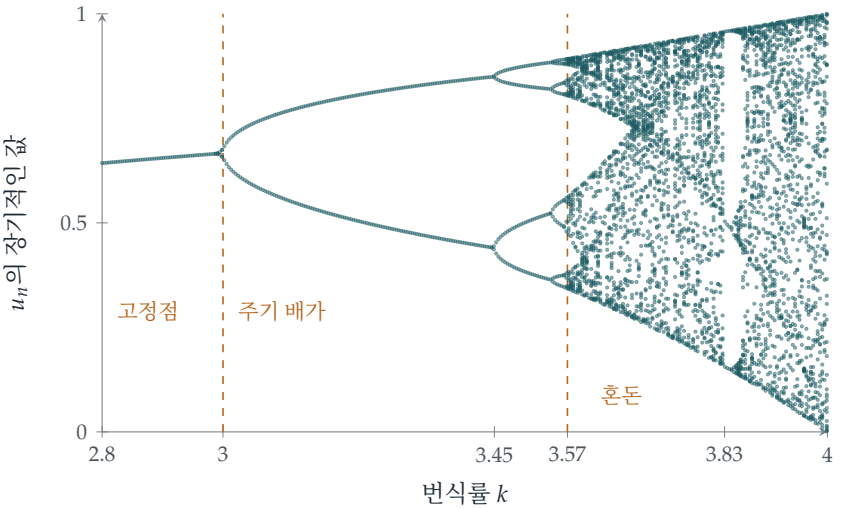


그림 8.7.2 로지스틱 사상의 분기 도표(bifurcation diagram). 각 k에 대하여 $u_0 = 0.31416$에서 시작해 사상을 300번 반복한 뒤 그다음 40개의 값을 찍었다. 하나의 고정점이 $k = 3$에서 2-순환으로 갈라지고, 이어서 4, 8, ...로 갈라지다가 $k = 3.57$ 근처에서 혼돈이 시작된다. $k = 3.83$ 근처의 옅은 세로 틈은 안정한 3-순환을 포함하는 창이다. $k = 4$에서는 값들이 $[0,1]$ 전체를 채운다.

파이겐바움 상수

1975년 로스앨러모스(Los Alamos)에서 일하던 미첼 파이겐바움(Mitchell Feigenbaum)은 프로그래밍이 가능한 휴대용 계산기로 주기가 두 배가 되는 k의 값 $k_1 = 3$, $k_2 \approx 3.4495$, $k_3 \approx 3.5441$, $k_4 \approx 3.5644$, ...를 측정했다. 그는 그 간격이 일정한 비율로 줄어든다는 것,

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

을 알아챘고, 놀랍게도 같은 수 $4.6692\ldots$가 $x \mapsto k\sin(\pi x)$에서도, 그리고 꼭대기가 포물선처럼 둥근 봉우리 하나를 가진(**이차 극대**(quadratic maximum)) 다른 모든 매끄러운 사상에서도 나타난다는 것을 발견했다. 이 상수는 그 부류 전체에 대하여 **보편적**(universal)이다. $-x^4$ 모양처럼 봉우리 꼭대기가 더 평평한 사상들은 저마다의 보편 상수를 가진다. 이 상수는 그 뒤 물방울이 떨어지는 수도꼭지, 가열된 유체, 전자 회로에 대한 실험에서도 측정되었다. 그 이유를 설명하려면 상전이 물리학에서 빌려 온 아이디어가 필요했고, 1982년에야 Oscar Lanford가 컴퓨터의 도움을 받아 엄밀하게 증명했다.

같은 기법, 세 번

소문항 (ii)의 치환은 **켤레**(conjugacy)의 한 예이다. 변수변환으로 한 사상을 다른 사상으로 바꿀 수 있으면 두 사상은 켤레라 하고, 이때 두 사상은 정확히 같은 동역학을 가진다. 이 문제는 조건을 만족하는 모든 이차 사상이 $k = 4$인 로지스틱 사상과 켤레임을 보여 주며, 로지스틱 사상은 다시 $u = \sin^2\theta$를 통해 모습을 바꾼 각 배가 사상이다. (엄밀히 말하면 이 마지막 연결은 **반켤레**(semiconjugacy)이다. θ와 $\pi - \theta$가 같은 u를 주므로 이 변수변환은 일대일(one-to-one)이 아니다. 로지스틱 사상은 $[0,1]$에서 일대일인 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$를 통해, $t \le \frac{1}{2}$일 때 $t \mapsto 2t$이고 $t \ge \frac{1}{2}$일 때 $t \mapsto 2 - 2t$인 **텐트 사상**(tent map)과 진정으로 켤레이다.) Section 2.8에서 만난 $x \mapsto x^2 - 2$는 $x = 2\cos\theta$로 풀렸고 각이 매 단계 두 배가 되었다. 이 사상도 조건을 만족한다(확인해 보라). 따라서 이것들은 모두 모습만 바꾼 같은 사상이다. Section 8.8에서는 이 가족의 세 번째 구성원, 즉 직선으로 만든 사상인 **텐트 사상**이 등장한다.

사고 기술

> **변수를 바꾸어 구조를 보라**
>
> 좋은 치환은 복잡한 규칙을 단순한 규칙으로 바꿀 수 있다. 문제를 이미 이해하고 있는 문제로 바꾸어 주는 변수변환을 찾아라.

여기서는 $u = \sin^2\theta$가 이차 사상을 각 배가 사상으로 바꾸었고, 일차 치환이 이차식의 한 가족 전체를 하나로 바꾸었다. 대학에서 켤레는 핵심적인 도구이다. 동역학계(dynamical systems)에서, 선형대수학(linear algebra)에서(행렬을 대각화(diagonalising)하는 것은 그 행렬이 단순해지는 좌표를 고르는 일이다), 그리고 군론(group theory)에서 쓰인다.

더 도전하기

1 **로지스틱 사상의 순환.** STEP II 2002, 5번 문제 (`step.maths.org/questions/02-s2-q5`)를 풀어 보라. 그런 다음 2-순환은 $k > 3$일 때에만 존재함을 보여라.

2 **제곱하고 2 빼기.** $v_{n+1} = v_n^2 - 2$가 소문항 (ii)의 조건을 만족함을 보여라($p = -1$로 두고 $-pv_n^2 + qv_n + r$ 꼴로 써라). α와 β를 구하고, 그 답이 $v_n = 2\cos(2^n\phi)$와 일치하는지 확인하라.

3 **3-순환.** 공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$를 이용하여 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$의 3-순환을 구하라. (힌트: $\theta = \pi/7$이나 $\theta = \pi/9$를 시도해 보라.) 주기가 정확히 3인 점은 몇 개인가?

4 **사라지는 자릿수.** 컴퓨터는 수를 이진법으로 약 53자리까지 저장한다. 컴퓨터로 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$을 반복하면 대략 몇 단계 뒤에 계산된 값이 참인 수열과 아무 관계가 없어지는가? 그렇다면 그때 계산된 수열은 쓸모없는가?

더 읽을거리

- **Robert May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics"**, *Nature* 261 (1976). 고전이며, 지금도 매우 읽기 쉽다.
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science*** (Penguin). 메이, 파이겐바움, 그리고 혼돈의 발견에 관한 이야기이다.
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press), 10장. 1차원 사상, 로지스틱 사상, 파이겐바움 상수를 대학 1학년 수준에서 다룬다.
- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?*** (Penguin). 혼돈을 대중적으로 소개하는 책으로, 로지스틱 사상에 관한 좋은 장이 있다.

8.8 주기 3이면 혼돈이다

문제

STEP III 2025, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

도입

1975년 Tien-Yien Li와 James Yorke는 *American Mathematical Monthly*에 논문 한 편을 발표했는데, 그 제목은 수학에서 가장 유명한 제목 가운데 하나가 되었다. 바로 "Period three implies chaos(주기 3이면 혼돈이다)"이다. 이들은 구간에서 그 구간 자신으로 가는 연속 함수(continuous function)가 주기(period) 3인 점(정확히 세 단계 뒤에 처음으로 되돌아오는 시작값)을 가지면, **모든** 주기의 점을 가진다는 것을 증명했다. 1, 2, 4, 5, 17, 1000, 그 무엇이든 말이다. 또한 이 논문은 "혼돈(chaos)"이라는 낱말을 수학에 들여왔다.

2025년에 출제된 이 문제는 그 정리를 직접 손으로 짚어 보는 여행이다. 함수 $f(x) = 7 - 2|x|$는 두 직선으로 이루어져 있으므로 모든 것을 정확히 계산할 수 있다. 이 함수의 2-순환(2-cycle)과 3-순환을 구하면서, 하나가 존재하면 나머지가 모두 존재할 수밖에 없는 이유를 보게 된다.

시작하기 전에

생각해 보기 $y = 7 - 2|x|$의 그래프는 어떤 모양인가? 이 그래프는 직선 $y = x$와 어디에서 만나는가? 이 함수는 구간 $[-7, 7]$을 어디로 보내는가?

그래프는 꼭짓점이 $(0, 7)$이고 기울기가 ± 2인, 뒤집힌 V자 모양이다. 이 그래프는 $x = 7 - 2x$ $(x \geq 0)$인 곳, 곧 $x = \frac{7}{3}$에서, 그리고 $x = 7 + 2x$ $(x < 0)$인 곳, 곧 $x = -7$에서 $y = x$와 만난다. 이것들이 **고정점**(fixed point)이다. 여기서 시작하면 수열은 전혀 움직이지 않는다. 또 $f(-7) = f(7) = -7$이고 $f(0) = 7$이므로, f는 $[-7, 7]$을 자기 자신 위로 보내는데, 이때 구간을 두 배 길이로 늘린 다음 반으로 접는다.

차근차근 풀기

1단계 $f \circ f$의 그래프

생각해 보기 x가 -7에서 7까지 움직일 때, $f(x)$는 -7에서 7까지 올라갔다가 다시 -7로 내려온다. 그러면 $f(f(x))$는 어떻게 움직이는가?

x가 -7에서 0까지 움직이는 동안 $f(x)$는 $[-7,7]$ 전체를 지나가므로, $f(f(x))$는 V자 하나를 온전히 그린다. 곧 -7에서 7까지 올라갔다가 다시 내려온다. x가 0에서 7까지 움직일 때도 마찬가지이다. 따라서 $[-7,7]$에서 $f \circ f$의 그래프는 뒤집힌 W자 모양이다. 기울기가 ± 4인 네 개의 선분으로 이루어지고, 각 선분은 높이 -7과 7 사이를 오가며, $x = \pm\frac{7}{2}$ ($f(x) = 0$인 곳)에서 꼭대기에 이르고 $x = 0$에서 -7까지 내려간다(그림 8.8.1). $[-7,7]$ 바깥에서는 두 그래프 모두 가파르게 떨어진다.

2단계 $f(f(x)) = x$ 풀기

생각해 보기 네 선분은 각각 대각선 $y = x$와 정확히 한 번씩 만난다. 그 가운데 두 교점은 이미 알고 있다. 왜 그런가? 중첩된 절댓값(absolute value)을 풀어 전개하지 않고 나머지 두 교점을 어떻게 구할 수 있을까?

고정점 $\frac{7}{3}$과 -7은 당연히 $f(f(x)) = x$를 만족한다. 그 밖의 해 p는 $q = f(p) \neq p$인 2-순환 $p \to q \to p$에 속한다. 부호를 따져 보자. p와 q가 모두 양수이면 $q = 7 - 2p$이고 $p = 7 - 2q$이므로 $p = q = \frac{7}{3}$일 수밖에 없다. 둘 다 음수이면 같은 논법으로 -7을 얻는다. 따라서 하나는 양수, 하나는 음수이다. $p > 0 > q$라 하면

$$q = 7 - 2p, \qquad p = 7 + 2q.$$

그러면 $p = 7 + 14 - 4p$이므로 $p = \frac{21}{5}$, $q = -\frac{7}{5}$이고, 실제로 $q < 0$이다.

$[-7,7]$ 바깥에는 해가 없다. $x > 7$이면 $f(f(x)) = 21 - 4x < x$이고, $x < -7$이면 $f(f(x)) = 21 + 4x < x$이기 때문이다. 따라서 네 해는

$$x = -7, \quad -\frac{7}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{21}{5}. \qquad \blacksquare$$

수열의 주기가 2인 것은 정확히 $a = \frac{21}{5}$ 또는 $a = -\frac{7}{5}$일 때이다. (고정점에서는 수열이 상수이고 주기는 1이다.)

3단계 늦게 순환에 들어서기

$a = \frac{28}{5}$이면 $u_1 = 7 - \frac{56}{5} = -\frac{21}{5}$, $u_2 = 7 - \frac{42}{5} = -\frac{7}{5}$, $u_3 = 7 - \frac{14}{5} = \frac{21}{5}$, $u_4 = -\frac{7}{5}$, 이런 식으로 계속된다. u_2부터는 수열이 2-순환이지만, $u_0 = \frac{28}{5}$과 $u_1 = -\frac{21}{5}$은 그 순환에 속하지 않는다. $\blacksquare$

생각해 보기 $\frac{28}{5}$를 스스로 찾아낼 수는 없었을까? 거꾸로 거슬러 올라가 보자. f가 $-\frac{7}{5}$로 보내는 수는 무엇인가?

$f(x) = -\frac{7}{5}$는 $|x| = \frac{21}{5}$, 곧 $x = \pm\frac{21}{5}$을 뜻한다. 이 가운데 하나는 순환 안에 있고, 다른 하나인 $-\frac{21}{5}$은 순환으로 들어가는 입구이다. 다시 $f(x) = -\frac{21}{5}$은 $|x| = \frac{28}{5}$을 뜻한다. f는 2대1 함수이므로 $(-7, 7)$의 모든 점은 원상(preimage)을 두 개 가지며, 따라서 모든 순환에는 그 순환으로 흘러 들어가는 시작값들이 나무 모양으로 달려 있다.

4단계 3-순환

잠깐, 직접 해 보기 $a = 1$과 $a = -\frac{7}{9}$에서 시작하는 수열을 계산하라.

$a = 1$에서 시작하면 $1 \to 5 \to -3 \to 1$이다. $a = -\frac{7}{9}$에서 시작하면 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$이다. 둘 다 3-순환이다.

생각해 보기 $f(f(f(x))) = x$는 해를 몇 개까지 가질 수 있는가? 1단계에서처럼 그래프의 모양을 생각해 보라.

1단계의 논법을 되풀이하면, f를 한 번 더 적용할 때마다 선분의 개수가 두 배가 된다. 따라서 $[-7, 7]$에서 $f \circ f \circ f$의 그래프는 기울기가 ± 8인 여덟 개의 선분으로 이루어진 지그재그이고, 각 선분은 -7에서 7까지 전체 높이를 지나간다(그림 8.8.2). 각 선분은 대각선과 정확히 한 번 만나므로 $[-7, 7]$에는 해가 정확히 여덟 개 있고, (앞에서처럼) 바깥에는 해가 없다. 우리는 이미 여덟 개를 찾았다. 두 고정점과 두 3-순환의 여섯 점이다. 따라서 해는

$$x = -7,\ \frac{7}{3},\ 1,\ 5,\ -3,\ -\frac{7}{9},\ \frac{49}{9},\ -\frac{35}{9}. \qquad \blacksquare$$

5단계 3-순환에 늦게 들어서기

순환 $1 \to 5 \to -3$에서 거꾸로 거슬러 올라가자. u_3은 순환 안에 있지만 u_2는 그렇지 않기를 바란다. 1의 원상은 $|x| = 3$, 곧 $x = \pm 3$을 만족한다. -3은 순환 안에 있으므로 $u_2 = 3$으로 잡는다. 3의 원상은 $|x| = 2$를 만족하므로 $u_1 = 2$로 잡는다. 2의 원상은 $|x| = \frac{5}{2}$를 만족하므로 $u_0 = \frac{5}{2}$로 잡는다. 그러면

$$\frac{5}{2} \to 2 \to 3 \to 1 \to 5 \to -3 \to 1 \to \cdots,$$

이고, $\frac{5}{2}, 2, 3$ 가운데 어느 것도 순환에 속하지 않는다. 따라서 $a = \frac{5}{2}$가 조건을 만족한다. $\blacksquare$

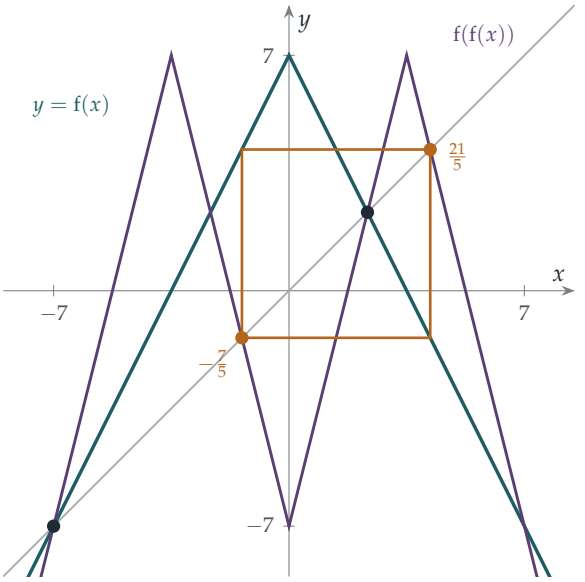


그림 8.8.1 $y = \mathrm{f}(x)$(청록색), $y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$(자주색), $y = x$(회색)의 그래프. 자주색 그래프는 대각선과 네 번 만난다. 고정점 -7과 $\frac{7}{3}$(검은색)에서, 그리고 2-순환 $\frac{21}{5} \leftrightarrow -\frac{7}{5}$(호박색)에서 만난다. 호박색 정사각형은 2-순환의 **거미줄 그림**(cobweb)이다. f의 그래프까지 세로로 간 다음 대각선까지 가로로 가고, 이를 되풀이한다.

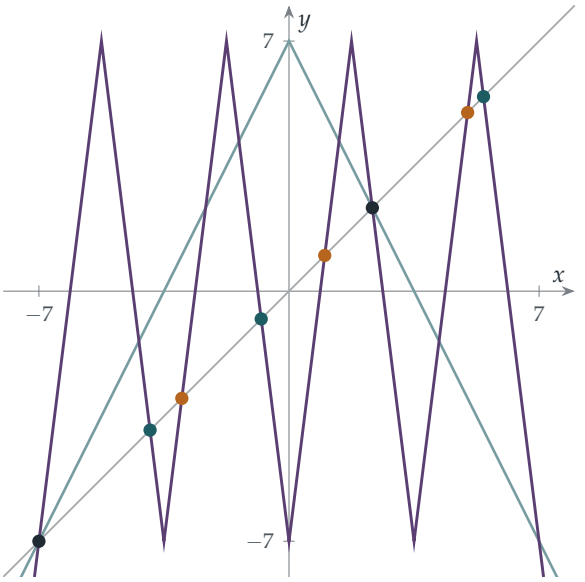


그림 8.8.2 $[-7, 7]$에서 $y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$의 그래프(자주색)는 기울기가 ± 8인 여덟 개의 선분으로 이루어진 지그재그이며, 각 선분은 대각선과 한 번씩 만난다. 여덟 교점은 두 고정점(검은색), 3-순환 $1 \to 5 \to -3$(호박색), 그리고 3-순환 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9}$(청록색)이다.

돌아보기

- **모양으로 세기.** 중첩된 절댓값을 전개하는 대신 그래프의 선분 개수를 셌다. 그 덕분에 해를 몇 개 찾아야 하는지, 그리고 언제 모두 찾았는지를 알 수 있었다.
- **순환의 구조 이용하기.** $f(f(x)) = x$의 해는 고정점이거나 둘씩 짝을 지어 나타나고, $f(f(f(x))) = x$의 해는 고정점이거나 셋씩 묶여 나타난다.
- **거꾸로 거슬러 올라가기.** (i)(d)와 (ii)(c)의 "늦게 들어서는 점"은 원상을 이용해 만들었다.

숨은 수학

모든 길이의 순환

4단계의 세기 방법은 단계 수가 몇이든 통한다. f를 n번 적용한 것을 f^n으로 쓰자. $[-7,7]$에서 f^n의 그래프는 각각 전체 높이를 지나가는 2^n개의 선분으로 이루어지므로, $f^n(x) = x$의 해는 정확히 2^n개이다. 그 가운데 일부는 n의 약수(divisor)인 더 짧은 주기 d를 가지지만, 각 d에 대해 그런 해는 많아야 2^d개이고,

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad (n\text{의 약수 가운데 } d < n\text{인 것에 대해 합한다})$$

이다. n보다 작은 약수는 모두 $n/2$ 이하이고, $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \le 2^n$이기 때문이다. 따라서 모든 n에 대해 주기가 정확히 n인 점이 존재한다. 이 함수는 모든 길이의 순환을 가진다.

주기 3이 모든 것을 강제하는 이유

Li와 Yorke의 정리는 이것이 우리 함수만의 특별한 성질이 아니라고 말한다. 구간에서 그 구간 자신으로 가는 연속함수 g가 3-순환을 가지면, 어떤 함수이든 모든 길이의 순환을 가진다. 증명에는 사잇값 정리(intermediate value theorem) 말고는 아무것도 쓰이지 않으며, 우리의 3-순환이 증명의 흐름을 잘 보여 준다.

> ? **생각해 보기** 순환 $1 \to 5 \to -3$의 점들 사이에 있는 두 구간을 $I_1 = [-3,1]$, $I_2 = [1,5]$라 하자. f는 각 구간을 어디로 보내는가?

I_2에서 f는 $f(1) = 5$에서 $f(5) = -3$까지 감소하므로 $f(I_2) = [-3,5] = I_1 \cup I_2$이다. I_1에서 f는 $f(-3) = 1$에서 $f(0) = 7$까지 올라갔다가 $f(1) = 5$로 내려오므로 $f(I_1) = [1,7]$이고, 이는 I_2를 포함한다. 여기서 순환의 세 점만 사용했다는 데 주목하자. $a < b < c$인 3-순환 $a \to b \to c$를 가지는 연속함수는 어느 것이나 같은 방식으로 구간들을 덮는다. 이를 어느

구간이 어느 구간을 덮는지 나타내는 도표로 요약할 수 있다(그림 8.8.3).

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

그러면 정리는 다음 두 사실에서 나오는데, 둘 다 사잇값 정리의 결과이다.

- $g(I) \supseteq I$이면 g는 I 안에 고정점을 가진다. ($g(x) - x$에 사잇값 정리를 적용한다.)
- $g(I) \supseteq J$이면 $g(I') = J$를 정확히 만족하는 더 작은 닫힌구간 $I' \subseteq I$가 존재한다.

주기 n인 점을 찾으려면 도표에서 고리 $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$를 따라가면 된다. I_2 안에서 $n-1$단계를 머물고, 한 단계 동안 I_1로 나갔다가 돌아오는 것이다. 두 번째 사실을 되풀이해 쓰면, I_2를 줄여서 그 점들의 궤도(orbit)가 이 경로(itinerary)를 따르는 시작점들의 구간을 얻을 수 있고, g^n은 그 구간을 I_2 전체 위로 보낸다. 첫 번째 사실에 따라 $g^n(x) = x$이면서 $n-1$번째 단계에서만 I_1을 방문하는 점 x가 존재한다. 그 주기는 n보다 작을 수 없다. 그렇다면 I_1 방문이 더 일찍 되풀이될 것이기 때문이다. (I_1과 I_2가 점 1을 공유하므로 미묘한 점이 하나 있는데, 이것이 문제를 일으키지 않음을 확인하는 것은 연습문제로 남긴다.)

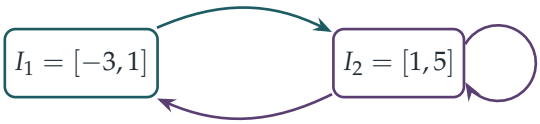


그림 8.8.3 3-순환의 덮개 도표(covering diagram). 한 구간에서 다른 구간으로 가는 화살표는 앞 구간의 상이 뒤 구간을 포함한다는 뜻이다. 도표의 모든 고리는 함수의 순환 하나를 준다. 고리 $I_2 \to I_2$는 고정점을, $I_1 \to I_2 \to I_1$은 2-순환을 주고, I_1을 방문하기 전에 I_2에서의 고리를 $n-1$번 돌면 길이 n인 순환을 얻는다.

샤르코우스키 정리

Li와 Yorke가 처음은 아니었다. 1964년 우크라이나 수학자 샤르코우스키(Oleksandr Sharkovskii)는 훨씬 더 완전한 결과를 증명했는데, 이 결과는 *Ukrainian Mathematical Journal*에 러시아어로 발표되어 서방에는 10년 동안 알려지지 않았다. 양의 정수를 다음과 같이 늘어놓자.

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ \ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \ldots,\ \ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \ldots,\ \ \ldots,\ \ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1:$$

먼저 3부터 시작하는 홀수, 다음으로 홀수의 두 배, 그다음 홀수의 네 배, 이런 식으로 이어지다가 마지막에 2의 거듭제곱이 내림차순으로 온다. 샤르코우스키 정리는 구간에서 정의된 연속함수가 길이 m인 순환을 가지면, 이 목록에서 m 뒤에 오는 모든 길이의 순환을 가진다고 말한다. 3이 맨 앞에 오므로 주기 3이면 모든 주기가 존재한다. 게다가 이 정리는 더 이상 개선할 수 없다. 모든 m에 대해 길이 m인 순환은 가지지만 목록에서 그보다 앞선 길이

의 순환은 가지지 않는 함수가 존재한다. 끝에 오는 2의 거듭제곱들은 바로 Section 8.7에 나오는 로지스틱 사상의 주기 배가 연쇄이며, 3-순환은 그곳에서 $k = 1 + \sqrt{8}$일 때 나타난다.

텐트 사상과 로지스틱 사상

$[0,1]$을 $[-7,7]$ 위로 보내는 치환 $x = 14y - 7$을 하자. 간단한 계산으로 f가 **텐트 사상**(tent map)

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \tfrac{1}{2}, \\ 2 - 2y & \tfrac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

이 됨을 알 수 있고, 여기에 치환 $u = \sin^2(\pi y/2)$를 한 번 더 하면 텐트 사상은 로지스틱 사상(logistic map) $u \mapsto 4u(1-u)$로 바뀐다. 따라서 이 문제의 함수는 Section 8.7의 혼돈 로지스틱 사상을 곧게 편 것이다. $f^3(x) = x$의 여덟 해는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$의 여덟 해에 대응한다.

사고 기술

사잇값 정리로 존재 보이기

해가 존재함을 보이려고 해를 꼭 구해야 하는 것은 아니다. 연속함수의 부호가 바뀐다는 것, 또는 어떤 구간이 자기 자신을 덮도록 보내진다는 것을 보이면 된다.

이 문제에서는 모든 해를 계산할 수 있었다. 그러나 Li와 Yorke의 정리는 전혀 계산할 수 없는 함수에도 적용되며, 사잇값 정리와 어느 구간이 어느 구간을 덮는지 나타내는 도표만으로 무한히 많은 순환의 존재를 증명한다. 대학에서는 이런 방식의 논증, 곧 구성하지 않고 존재를 보이는 논증이 해석학(analysis)(사잇값 정리 자체), 위상수학(topology)(고정점 정리), 그리고 동역학계(dynamical systems) 전반에 걸쳐 나타난다.

더 도전하기

1 **4-순환.** 덮개 도표를 이용하여 f의 4-순환이 어디에 있어야 하는지 예측하라(I_2에서 세 단계, I_1에서 한 단계). 그런 다음 그것을 정확히 구하라. (**힌트:** 이 순환은 양수인 점 세 개와 음수인 점 한 개로 이루어진다. 네 개의 일차방정식을 세워 보라.)

2 **미묘한 점.** 주기 3이면 주기 n이 존재한다는 증명에서, $n \geq 4$일 때 찾은 점 x가 점 1(또는 원래 3-순환의 어떤 점)일 수 없는 이유를 설명하라.

3 **주기 3 없이 주기 5.** $g(1) = 3, g(3) = 4, g(4) = 2, g(2) = 5, g(5) = 1$을 만족하고 이 점들을 선분으로 이은, $[1,5]$에서 정의된 연속함수의 그래프를 그려라. 구간 $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$에 대한 덮개 도표를 그려라. 길이 3인 고리를 찾을 수 있는가? (샤르코우스키 정리에 따르면 3-순환은 없다.)

4 **텐트 사상.** $x = 14y - 7$이 f를 텐트 사상으로 바꾼다는 것을 확인하라. 그런 다음 텐트 사상이 이진법(binary)으로 쓴 y를 두 배 하되, 맨 앞자리가 1일 때마다 모든 자릿수를 뒤집는다는 것을 보이고, 이를 이용하여 텐트 사상의 3-순환을 구하라.

더 읽을거리

- **Tien-Yien Li & James Yorke, "Period three implies chaos"**, *American Mathematical Monthly* 82 (1975). 짧고, 사잇값 정리만 알면 읽을 수 있다.
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press). 학부생을 위해 쓴 책으로, 텐트 사상, 로지스틱 사상, 샤르코우스키 정리를 완전한 증명과 함께 다룬다.
- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, "The Sharkovsky theorem: a natural direct proof"**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011). 덮개 도표를 이용한 현대적인 증명이다.

우리가 배운 것

우리는 대부분의 미분방정식(differential equation)은 풀 수 없으며, 그럼에도 그것을 이해하는 것이 바로 기술이라는 말로 이 장을 시작했다. 그리고 세 가지 질문을 던졌다. 현재는 미래를 결정하는가? 풀지 않고도 무엇을 알 수 있는가? 장기적으로는 어떤 일이 일어나는가? 이 장의 여덟 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 현재는 미래를 결정하는가?

대개는 그렇지만, 항상 그런 것은 아니다. Section 8.1에서 방정식 $(y')^2 = 4y$는 x축 위의 모든 점을 지나는 해(solution)를 무수히 많이 가졌다. 해는 원하는 만큼 $y = 0$에 머물다가 떠날 수 있었다. 원인은 제곱근이었다. 제곱근은 0에서 기울기가 무한대이므로 피카르-린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리의 립시츠 조건(Lipschitz condition)을 깨뜨린다. 같은 메커니즘으로, 물이 새는 양동이를 보고 그것이 언제 비었는지 알 수 없는 이유가 설명된다. 또한 고전역학의 결정론(determinism)에 관한 수수께끼인 노턴의 돔(Norton's dome)의 배경에도 이 메커니즘이 있다.

미래가 결정되어 있더라도 예측할 수 없을 수 있다. Section 8.7의 로지스틱 사상(logistic map)에는 정확한 공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$가 있지만, 매 단계마다 처음 각 θ의 오차가 두 배가 되고, 초깃값의 오차도 평균적으로 그만큼 빠르게 커진다. 원리상의 결정론이 곧 실제의 예측 가능성은 아니다.

2. 풀지 않고도 무엇을 알 수 있는가?

아주 많은 것을 알 수 있다.

- **에너지.** Section 8.2에서 방정식에 y'을 곱하자 증가할 수 없는 양이 나왔고, 이 양으로 아무도 풀 수 없는 방정식의 해가 유계(bounded)임을 보였다. 이런 양을 **랴푸노프 함수**(*Lyapunov function*)라고 하며, 이는 안정성(stability)을 증명하는 주된 도구이다.
- **평형점과 안정성.** Section 8.3에서 증가율의 부호로 물고기 개체군의 운명을 예측했고, 어떤 임계값을 넘어서 어획하면 갑작스러운 붕괴가 일어남을 보였다. 이때 평형점(equilibrium)이 핵심 역할을 했다.
- **알맞은 좌표.** Section 8.4에서 극좌표(polar coordinates)는 연립계를 r에 대한 하나의 방정식으로 바꾸어, 모든 해가 나선을 그리며 원에 다가감을 보여 주었다. Section 8.5에서

는 대칭성을 이용해 서로를 쫓는 네 마리의 개를 한 마리로 줄였고, 나눗셈으로 시간을 소거하여 그 경로의 모양을 얻었다.

- **항등식에서 얻는 구조.** Section 8.6에서 론스키안(Wronskian)은 방정식의 해들이 서로 직교(orthogonal)함을 보여 주었다. 그 해들 가운데 어느 하나도 적분하지 않고서 말이다.
- **세기와 덮기.** Section 8.8에서 그래프 조각의 개수를 세어 모든 순환(cycle)을 찾았고, 중간값 정리(intermediate value theorem)로 모든 길이의 순환이 존재함을 증명했다.

3. 장기적으로는 어떤 일이 일어나는가?

이 장에서는 온갖 종류의 장기적 거동을 만났다. 해는 안정 평형점에 자리 잡거나(Section 8.3), 반복되는 순환에 다가가거나(Section 8.4), 유한 시간 안에 나선을 그리며 한 점으로 모이거나(Section 8.5), 카오스(chaos)적으로 움직였다(Section 8.7). 로지스틱 사상에서는 매개변수 하나가 계를 이 모든 상태로 옮겨 간다. 고정점(fixed point), 파이겐바움(Feigenbaum)의 보편 상수가 지배하는 주기 배가(period doubling)의 연쇄, 그리고 마침내 카오스가 차례로 나타나며, 그 사이사이에 3-순환과 같은 질서의 창이 있다. 그리고 Section 8.8에서는 일단 3-순환이 나타나면 모든 길이의 순환이 존재해야 함을 보였다. 이는 정수에 대한 샤르코프스키(Sharkovskii) 순서의 첫걸음이다.

4. 미분방정식과 동역학을 위한 도구 모음

방법	사용한 곳
특이해(singular solution) 찾기	비유일성 (8.1)
증가할 수 없는 양	해의 범위 제한 (8.2)
증가율의 부호	어획 (8.3)
대칭에 맞는 좌표	극한 순환(limit cycle) (8.4); 추적 (8.5)
선형화(linearisation)를 위한 치환	베르누이 방정식(Bernoulli equation) (8.4)
론스키안	직교성 (8.6)
켤레(conjugacy)	로지스틱 사상 (8.7)
수학적 귀납법(induction)	$u_n = \sin^2(2^n\theta)$ (8.7)
그래프 조각 세기	f^n의 순환 (8.8)
중간값 정리	주기 3 (8.8)

다음으로

- 에너지와 보존 법칙(conservation law)은 Section 10.1부터 시작하는 역학에서 다시 등장한다.
- 미지수가 여러 개인 선형 미분방정식은 고유벡터(eigenvector)로 풀리며, Section 11.2에

서 진동계를 지배한다. 초등함수로 풀 수 없는 비선형 진자(pendulum)는 Section 11.3에서 다룬다.

- Section 12.15에서는 사상을 반복하여 고정점을 찾는 방법으로 어떤 성씨가 사라질지를 판정하며, 무작위 수열의 장기적 거동은 Section 12.16의 주제이다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***: 동역학계(dynamical system)에 관한 최고의 입문서로, 응용과 그림이 가득하다. 이 책을 바탕으로 한 Strogatz의 강의 녹화본이 온라인에 무료로 공개되어 있다.
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***: 카오스가 어떻게 발견되었는지에 대한 이야기이다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***: 역사 이야기가 풍부하게 담긴 고전적인 입문 교재이다.
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems***: 반복 사상을 증명과 함께 대학 1학년 수준에서 다룬다.

라플라스(Laplace)는 현재를 정확히 알면 미래 전체를 계산할 수 있다고 상상했다. 이 장은 그 꿈이 어디에서 멈추는지 보여 주었다. 유일성(uniqueness)은 성립하지 않을 수 있고, 성립하더라도 카오스가 아주 작은 불확실성을 증폭하여 예측을 불가능하게 만들 수 있다. 그러나 이 장은 공식 없이도 많은 것을 이해할 수 있음을 보여 주기도 했다. 해의 범위, 평형점, 순환과 그 안정성, 그리고 카오스 자체의 구조가 그렇다. "방정식을 풀어라"에서 "해를 이해하라"로 넘어가는 것은 대학 수학 과정이 여러분에게 요구하는 가장 중요한 사고의 전환 가운데 하나이다.

더 도전하기 해답

이 해답은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계만 제시하므로, 스스로 푼 것을 확인하는 데 쓰면 된다. 해답을 보기 전에 먼저 각 연습문제를 제대로 풀어 보도록 하자.

8.1 해가 유일하지 않을 때

1. $y = v^2$로 두면 $2vv' = \alpha v - \beta v^2$이므로 $v' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta v)$이고 $y_1 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/2}\right)^2$이다. $y = v^3$으로 두면 $v' = \frac{1}{3}(\alpha - \beta v)$이고 $y_1 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/3}\right)^3$이다. 상수 함수 $y = 0$도 양변을 모두 0으로 만든다. 유도 과정에서 v로 나눌 때 이 해가 버려진 것이다.

2. $2\sqrt{h} = 2\sqrt{h_0} - kt$이므로 $h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}kt\right)^2$이고, 양동이는 $T = \frac{2\sqrt{h_0}}{k}$에서 빈다. $h \equiv 0$과, $t \le T$에서 $h = \frac{k^2}{4}(T - t)^2$이고 $t \ge T$에서 $h = 0$인 함수는 모두 방정식을 만족하며 T 이후로 0이다. 빈 양동이를 보고는 언제 비었는지 알 수 없다.

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-2x}) = (y' - 2y)\mathrm{e}^{-2x} = 0$이므로 $y = C\mathrm{e}^{2x}$이고, $y(0) = 0$에서 $C = 0$이어야 한다. 함수 $2y$는 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지만(변화량이 많아야 $2|y_1 - y_2|$이다), $2\sqrt{y}$는 0에서 기울기가 무한대이다.

4. 임의의 $b \le 0 \le a$에 대하여($b = -\infty$ 또는 $a = \infty$도 허용한다) $x < b$에서 $y = (x - b)^3$, $b \le x \le a$에서 $y = 0$, $x > a$에서 $y = (x - a)^3$이다. $a = b = 0$인 경우가 $y = x^3$이다.

8.2 풀지 않고 범위 구하기

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = 0$이므로 $(y')^2 + y^2 = A^2$이고 $|y| \le A$이다. 정확한 해는 $A\cos x$이다.

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\theta')^2 - 2\cos\theta\right) = 2\theta'(\theta'' + \sin\theta) = 0$이다. 정지 상태에서 출발하면 $(\theta')^2 = 2(\cos\theta - \cos\theta_0) \ge 0$이므로 $\cos\theta \ge \cos\theta_0$이다. $|\theta_0| < \pi$이면 연속성(continuity)에 의해 θ는 $[-|\theta_0|, |\theta_0|]$ 안에 머물고, $|\theta_0| = \pi$이면 진자(pendulum)는 거꾸로 선 채 균형을 이루어 그대로 머문다. $|\theta_0| > \pi$이면, 예를 들어 $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$이면 $\theta''(0) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1 > 0$이므로 θ는 증가하면서 출발한다. 진자는 실제로는 각도 $\theta_0 - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$에 있으며, 그 위치를 기준으로 잰 $\pm\frac{\pi}{2}$ 사이에서 흔들린다.

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = -4k(y')^2 \le 0$이다. 실제로 0으로 수렴하지만, 단조성(monotonicity)만으로는 이를 보일 수 없다. 예를 들어 지수 $-k \pm \sqrt{k^2 - 1}$의 실수부가 음수인 명시적인 해가 필요하다.

4. $(y')^2 - \frac{1}{2}y^4$는 상수이고 그 값은 $-\frac{1}{2}$이다. 이로부터 $(y')^2 = \frac{1}{2}(y^4 - 1)$을 얻는데, 이것으로는 아무것도 유계로 만들 수 없다. "퍼텐셜(potential)" $-\frac{1}{2}y^4$에는 y를 가둘 우물이 없으며, 실제로 y는 유한 시간 안에 발산한다(blows up).

8.3 개체군 수확하기

1. 방정식은 $x' = \alpha^2 - (x - K)^2$이고, 이는 $y' = y(2\alpha - y)$가 된다. $w = \frac{1}{y}$로 두면 $w' = 1 - 2\alpha w$이므로 $w = \frac{1}{2\alpha} + Ce^{-2\alpha t}$이다. $y(0) < 0$이면 $w(0) < 0 < \frac{1}{2\alpha}$이므로 w는 유한 시간 안에 0을 지나고 $y \to -\infty$이다. x는 그 전에 0에 도달한다.

2. $z = x - K$로 두면 $z' = -(z^2 + \beta^2)$이므로 $\tan^{-1}\frac{z}{\beta} = \tan^{-1}\frac{K}{\beta} - \beta t$이다. 개체 수는 $t = \frac{2}{\beta}\tan^{-1}\frac{K}{\beta}$에서 0$(z = -K)$에 도달한다.

3. $x' = x(2K - h - x)$는 평형점(equilibrium) 0과 $2K - h$를 가진다. $h < 2K$이면 이는 양의 환경 수용력(carrying capacity)을 가진 로지스틱 방정식(logistic equation)이며, 모든 양의 해는 $2K - h$로 수렴한다. 개체 수가 줄면 어획량도 줄어들므로, 어획이 개체 수를 0으로 몰아갈 수는 없다.

4. $x = K + K\tanh Kt$이고, $\tanh Kt = \frac{1}{2}$에서 $t = \frac{1}{K}\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\ln 3}{2K}$이다.

8.4 원으로 감겨드는 나선

1. 곡선과 반지름 사이의 각 ψ는 $\tan\psi = \frac{r}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta} = -1$을 만족하며, 이 값은 모든 점에서 같다. 즉 곡선은 모든 반직선과 45°로 만난다.

2. $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2 + y^2) = r\,\mathrm{d}r$이다. 또한 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r\cos\theta(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = r^2\,\mathrm{d}\theta$이다.

3. $s = r^2$으로 두면 $\dot{s} = 2s(1 - s)$, 즉 로지스틱 방정식이므로 임의의 $s(0) > 0$에 대하여 $s \to 1$이다. 직교좌표(Cartesian) 형태로 쓰면 $\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y$, $\dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x$이다.

4. $\dot{r} = r(r - 1)(r - 2)$, $\dot{\theta} = 1$이다. 0과 1 사이에서는 $\dot{r} > 0$이고, 1과 2 사이에서는 $\dot{r} < 0$이며, 2보다 크면 $\dot{r} > 0$이다. 따라서 $r = 1$은 끌어당기고(attracting) $r = 2$는 밀어낸다(repelling).

8.5 그레이하운드를 쫓는 그레이하운드

1. 대칭성에 의해 개들은 항상 정사각형을 이룬다. A는 AB를 따라 속력 v로 달리므로 간격을 비율 v로 줄인다. B는 AB에 수직인 BC를 따라 달리므로 1차 근사에서 거리를 바꾸지 않는다. 따라서 AB는 정확히 비율 v로 s에서 0까지 줄어들고, 걸리는 시간은 $\frac{s}{v}$이다.

2. $r = \lambda \mathrm{e}^{-\sqrt{3}\theta}$이다. 간격은 비율 $v - v\cos 120^\circ = \frac{3}{2}v$로 줄어들므로, 시간 $\frac{2s}{3v}$ 후에 만나며 각자 $\frac{2s}{3}$를 달린다(이는 $n = 3$일 때의 $\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}$와 일치한다).

3. 한 바퀴 돌 때마다 r에 $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx \frac{1}{535}$가 곱해진다. 한 바퀴 후에는 약 19 cm이고, 두 바퀴 후에는 약 0.35 mm이므로 두 바퀴면 충분하다.

4. 두 개는 서로를 향해 곧장 달려 시간 $\frac{s}{2v}$ 후에 가운데에서 만난다. 이때 공식은 성립하지 않는다. $\tan\frac{\pi}{2}$가 무한대인데, 이는 회전이 전혀 없다는 사실과 맞아떨어진다.

8.6 양자 진동자

1. (지루하기는 하지만) 직접 미분하면 된다. 또는 연습문제 4에서 따라 나온다. $2\lambda = \omega$이면 $\int y_0 y_2 = \int (2\omega x^2 - 1)\mathrm{e}^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = 2\omega \cdot \frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} - \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} = 0$이다.

2. $y'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)y$이므로, 방정식이 성립하려면 $4\lambda^2 = \omega^2$이고 $2\lambda = (2\nu + 1)\omega$이어야 한다. (감쇠하려면) $\lambda = \frac{\omega}{2} > 0$이어야 하므로 $\nu = 0$이다.

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m y_n'' - y_n y_m'' = (m^2 - n^2) y_m y_n$이다. 이를 0에서 π까지 적분한다. y_m과 y_n이 양 끝에서 0이므로 좌변은 0이 되고, $m^2 \neq n^2$이다.

4. $c = (2n+1)\omega$로 쓰면 $y_n'' = (\omega^2 x^2 - c)y_n$이다. $z = \omega x y_n - y_n'$을 두 번 미분하고 이 식(과 그 도함수)을 이용하면 $z'' - \omega^2 x^2 z = -(c + 2\omega)z$를 얻으며, $c + 2\omega = (2n + 3)\omega$이다. $y_0 = \mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$에서 출발하면 $2\omega x \mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$, 그다음 $2\omega(2\omega x^2 - 1)\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$를 얻는데, 이들은 각각 y_1과 y_2의 상수배이다.

8.7 풀 수 있는 혼돈

1. (i) 수학적 귀납법(induction)으로 보인다. $0 < x < 1$이면 $0 < x(1-x) \leq \frac{1}{4}$이므로 $0 < kx(1-x) < 1$이다. (ii) $a = ka(1-a)$에서 $k = \frac{1}{1-a}$이다. (iii) $x_1 = ka(1-a) = ab$로 두면 조건 $x_2 = a$는 $kab(1-ab) = a$이다. $k = \frac{b}{1-a}$를 이용하면 이는 $ab^3 - b^2 + 1 - a = 0$이 된다. 근 $b = 1$은 고정점(fixed point)($x_1 = a$)에 해당하므로 이를 인수로 묶어 내면 $ab^2 + (a-1)b + (a-1) = 0$이다. 이를 b에 대해 풀면 $k = \frac{b}{1-a}$를 얻는다. 같은 말로, 2-순환(cycle)의 두 점은 $k^2x^2 - k(k+1)x + (k+1) = 0$의 근이며, 그 판별식(discriminant) $k^2(k+1)(k-3)$은 $k > 3$일 때에만 양수이다.

2. $p = -1$, $q = 0$, $r = -2$이면 $4pr = 8 = 8 + 2q - q^2$이다. 계수를 비교하면

$\alpha = \frac{4}{p} = -4$이고 $\beta = \frac{q-4}{2p} = 2$이므로 $v_n = 2 - 4\sin^2(2^n\theta) = 2\cos(2^{n+1}\theta)$이며, 이는 $\phi = 2\theta$일 때의 $2\cos(2^n\phi)$이다.

3. $u_3 = u_0$이려면 $\sin^2 8\theta = \sin^2\theta$이어야 하므로 $8\theta = \pm\theta + k\pi$이다. $\theta = \frac{\pi}{7}$이면 순환 $\sin^2\frac{\pi}{7} \to \sin^2\frac{2\pi}{7} \to \sin^2\frac{4\pi}{7} \to \sin^2\frac{8\pi}{7} = \sin^2\frac{\pi}{7}$이 생긴다. $\theta = \frac{\pi}{9}$이면 $\sin^2\frac{\pi}{9}$, $\sin^2\frac{2\pi}{9}$, $\sin^2\frac{4\pi}{9}$이다. 사상(map) $u \mapsto u_3$은 $2^3 = 8$개의 고정점을 가진다. 그중 두 개(0과 $\frac{3}{4}$)는 사상 자체의 고정점이므로, 정확히 주기(period) 3인 점 6개, 즉 3-순환 두 개가 남는다.

4. 각 단계에서 θ가 두 배가 되어 정확도가 이진(binary) 자릿수 하나만큼 줄어들므로, 대략 50단계 후에는 계산된 값이 참값과 아무 관계가 없어진다. 그렇다고 쓸모없는 것은 아니다. 계산된 수열은 약간 다른 출발점에서 시작한 참 궤도(orbit)에 가깝게 머물므로(**추적**(*shadowing*) 성질), 그 통계적 성질은 여전히 옳다.

8.8 주기 3이면 혼돈이다

1. $a, b, c > 0$이고 $d < 0$이면 $b = 7 - 2a$, $c = 7 - 2b$, $d = 7 - 2c$, $a = 7 + 2d$이다. 이를 풀면 $17a = 49$이므로 순환은 $\frac{49}{17} \to \frac{21}{17} \to \frac{77}{17} \to -\frac{35}{17} \to \frac{49}{17}$이고, 세 점은 $I_2 = [1, 5]$에, 한 점은 $I_1 = [-3, 1]$에 있다.

2. 찾은 점의 경로(itinerary)는 $I_2, I_2, \ldots, I_2, I_1$이다($I_2$에서 $n - 1 \geq 3$단계). 순환 $1 \to 5 \to -3$은 이 경로를 따를 수 없다. -3은 I_2에 속하지 않으므로, 1(두 번째 상이 -3)도, 5(첫 번째 상이 -3)도, -3 자신도 그 점이 될 수 없다.

3. 덮음 그림(covering diagram)은 $[1,2] \to [3,4], [4,5]$; $[2,3] \to [4,5]$; $[3,4] \to [2,3], [3,4]$; $[4,5] \to [1,2]$이다. 길이 3인 고리는 $[3,4] \to [3,4] \to [3,4]$뿐이며, 이는 3-순환이 아니라 고정점을 준다.

4. $x = 14y - 7$로 두면 $\frac{f(x)+7}{14} = 1 - |2y - 1|$, 즉 텐트 사상(tent map)이다. 두 배를 하면 이진 자릿수가 왼쪽으로 한 칸 이동한다. 밀려 나간 자릿수가 1이면 결과는 $2 - 2y$이고, 이는 나머지 자릿수를 뒤집는다. 3-순환은 $\frac{2}{7} \to \frac{4}{7} \to \frac{6}{7}$과 $\frac{2}{9} \to \frac{4}{9} \to \frac{8}{9}$이며(즉 $x = -3, 1, 5$와 $x = -\frac{35}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{49}{9}$), 이진법으로 나타내면 $\frac{2}{7} = 0.\overline{010}$이고 $\frac{2}{9} = 0.\overline{001110}$이다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 중 8개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

전체 13개 장 가운데 제8장. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

