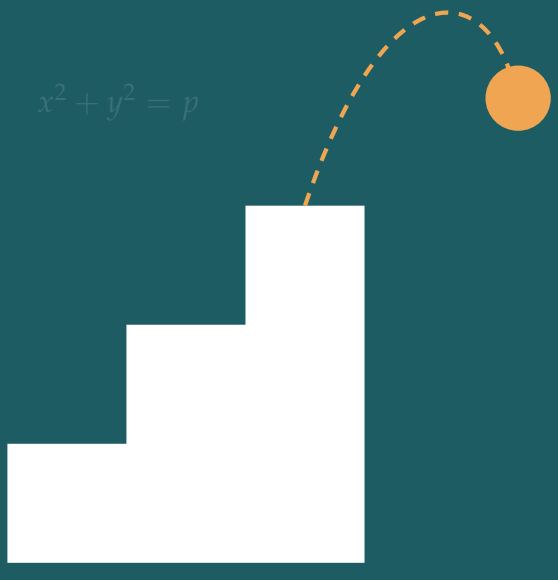
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

제7장

선형대수(linear algebra)와 기하학(geometry)



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

제7장

선형대수(linear algebra)와 기하학(geometry)

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

제7장: 선형대수(linear algebra)와 기하학(geometry)

이 PDF는 *Beyond STEP*의 전체 13개 장 가운데 제7장이다. 책 전체, 각 장의 개별 PDF, 모든 절의 인쇄용 연습지, 모든 STEP 문제의 자세한 풀이를 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 남겨 주기 바란다.

장

7

선형대수학과 기하학

행렬은 수를 늘어놓은 표가 아니다. 행렬은 공간의 변환이며, 그 자체로 살아 움직이는 대상이다.

이 장의 내용

7.1 행렬에서는 성립하지 않는 법칙 STEP II 1993

7.2 돌지 않고 늘어나기 STEP III 1990

7.3 행렬식을 행렬식이게 하는 것 STEP II 2019

7.4 제자리로 돌아오는 행렬 STEP II 2020

7.5 3차원에서의 회전 STEP III 2022

7.6 쌍곡 회전과 상대성 이론 STEP III 1991

7.7 결코 변하지 않는 양 STEP III 2024

7.8 네 제곱수 STEP III 1994

7.9 정다면체는 다섯 개뿐이다 STEP III 1999

A 연습문제 해답 65쪽

공간의 변환

> 우리는 기저 없이 생각하고, 기저 없이 쓴다. 하지만 막상 일이 닥치면 연구실 문을 닫고 미친 듯이 행렬로 계산한다.
>
> — Irving Kaplansky, 자신과 Paul Halmos의 선형대수학 접근 방식에 대하여

학교에서 행렬(matrix)은 보통 연립방정식(simultaneous equations)을 푸는 도구로, 또는 점을 변환하는 방법으로 등장한다. 행렬에 열벡터(column vector)를 곱하고 새 좌표를 읽어 내는 식이다. 둘 다 쓸모 있지만, 이런 시각은 행렬이 수학에서 가장 중요한 개념 가운데 하나인 이유를 가려 버린다. 행렬은 **선형변환**(*linear transformation*), 곧 공간을 늘이고, 회전하고, 반사하고, 층밀리기하는 방법이며, 수처럼 더하고, 곱하고, 거듭제곱하고, 미분할 수 있다. 그런데 행렬은 수와 같지 않다. 행렬의 곱셈은 순서에 따라 달라지고, 영이 아닌 두 행렬을 곱해 영이 될 수 있으며, 행렬에는 어떻게 적느냐와 상관없이 그 본질적인 성질을 담아내는 숨은 불변량(invariant)(대각합(trace), 행렬식(determinant), 고윳값(eigenvalue))이 있다.

선형대수학이 중요한 이유

선형대수학(linear algebra)은 아마 수학에서 가장 널리 쓰이는 분야일 것이다. 비디오 게임에서 영화 애니메이션에 이르기까지 모든 컴퓨터 그래픽 엔진은 행렬을 곱하는 기계이다. 캐릭터의 모든 회전, 모든 카메라 각도, 모든 원근 투영(perspective projection)이 행렬이다. 인터넷의 검색 엔진과 추천 시스템은 고유벡터(eigenvector) 위에 세워져 있다. 공학자는 고윳값으로 다리와 건물의 진동수를 구하고, 통계학자는 고윳값으로 데이터의 주요 패턴을 찾아내며, 양자역학은 전부 선형대수학의 언어로 쓰여 있다. 그리고 현대 기계학습은 그 핵심을 들여다보면 엄청난 양의 행렬 곱셈이다.

이렇게 어디에나 쓰이는 데에는 이유가 있다. 선형 문제는 우리가 완전히 풀 수 있는 문제이고, 거의 모든 비선형 문제는 충분히 가까이 확대해 보면 선형처럼 보인다. 이것이 미적분학(calculus)의 아이디어이며, 이는 곧 선형대수학이 거의 모든 것의 국소적인 행동을 기술하는 언어라는 뜻이다.

대학에서 만나게 될 내용

선형대수학은 해석학(analysis)과 함께 대학 1학년 과정의 두 기둥 가운데 하나이다. 여러분은 **벡터공간**(*vector space*)(더하고 스칼라배할 수 있는 집합으로, 평면과 3차원 공간

은 그 첫 번째 예일 뿐이다)과 그 사이의 **선형사상**(*linear map*)을 만나게 되고, 행렬이란 단지 선형사상을 좌표로 적은 것임을 배우게 된다. 행렬식, 고윳값과 고유벡터, 그리고 대칭행렬(symmetric matrix)은 회전으로 대각화(diagonalise)할 수 있다는 **스펙트럼 정리**(*spectral theorem*)도 공부한다. 이후의 과목들은 이것을 어디서나 사용한다. 미분방정식(differential equations)(제8장)에서, 기하학(회전과 반사가 군(group)을 이루는 곳)에서, 연속적인 대칭을 기술하는 **리 군**(*Lie group*) 이론에서, 그리고 무한 차원의 선형대수학이라 할 수 있는 함수해석학(functional analysis)에서 말이다.

이 장을 관통하는 질문

세 가지 큰 질문

1. **행렬은 어떤 점에서 수와 같고, 어떤 점에서 다른가?** 산술의 어떤 법칙이 살아남고, 어떤 법칙이 무너지는가?
2. **행렬은 실제로 무엇을 하는가?** 변환의 기하학적 모습을 어떻게 볼 수 있으며, 좌표와 무관하게 그것을 담아내는 수는 무엇인가?
3. **무엇이 변하지 않는가?** 변환이나 운동에 의해 보존되는 양은 무엇이며, 그것은 우리에게 무엇을 알려 주는가?

이 장은 행렬 대수의 법칙(Section 7.1)에서 시작하여 변환의 기하학으로 넘어간다. 고유벡터, 행렬식, 유한 위수(finite order)의 행렬, 3차원 회전, 그리고 특수상대성이론(special relativity)의 쌍곡 회전(hyperbolic rotation)을 다룬다. 이어서 시간에 따라 변하는 행렬의 보존량(conserved quantity), 행렬식에서 나오는 네 제곱수 항등식을 살펴보고, 마지막으로 정다면체(Platonic solids)를 분류하는 세기 논법인 오일러(Euler) 공식으로 마무리한다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
7.1	무너지는 법칙	비가환성(non-commutativity); 영인자(zero divisor)
7.2	고유벡터	변환이 회전시키지 않는 방향
7.3	행렬식	곱셈성(multiplicativity)에 의한 특징짓기; 부호 있는 넓이(signed area)
7.4	유한 위수의 행렬	대각합, 행렬식, 케일리–해밀턴(Cayley–Hamilton)
7.5	3차원 회전	외적(cross product)에서 얻는 Rodrigues 공식
7.6	로런츠 부스트(Lorentz boost)	쌍곡각은 더해진다
7.7	보존량	교환자(commutator)의 대각합은 0이다
7.8	네 제곱수	곱셈적인 행렬식
7.9	정다면체	이중 세기(double counting)와 오일러 공식

이 장을 읽는 방법

이 장에 나오는 모든 행렬에 대해, 그 행렬이 하는 일을 그림으로 그려 보아라. 단위정사각형이나 단위원, 또는 벡터 몇 개를 잡고 그 상을 대강 그려 보는 것이다. 2분짜리 스케치만으로도 계산을 시작하기 전에 답(고유벡터, 반례(counterexample), 불변직선(invariant line))이 보이는 경우가 많고, 나중에 계산을 검산하는 데에도 도움이 된다.

7.1 행렬에서는 성립하지 않는 법칙

문제

STEP II 1993, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/93-s2-q6`

도입

행렬(matrix)은 더하고 곱할 수 있으므로 수처럼 다루고 싶어진다. 이 문제는 수에서는 참인 네 가지 "규칙"을 제시하고, 그중 어느 것이 행렬에서도 살아남는지를 물으며 바로 그 유혹을 시험한다. 대부분은 성립하지 않으며, 성립하지 않는 방식이 많은 것을 알려 준다. 행렬의 곱셈은 교환법칙(commutative law)을 만족하지 않는다. 곱이 영행렬인 영이 아닌 행렬들이 있다. 그리고 행렬에 대한 이차방정식(quadratic equation)은 해를 무한히 많이 가질 수 있다.

이러한 실패는 결함이 아니다. 오히려 행렬이 쓸모 있는 이유가 바로 여기에 있다. 행렬은 공간의 변환을 나타내며, 두 변환을 다른 순서로 하면 실제로 다른 결과가 나온다. 1925년 하이젠베르크(Werner Heisenberg)는 양자역학의 물리량이 수가 아니라 행렬처럼 행동한다는 것, 그리고 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$가 성립하지 않는다는 사실이 불확정성 원리(uncertainty principle)의 수학적 형태라는 것을 발견하였다.

시작하기 전에

생각해 보기 실수에서 $ab = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$인 이유는 무엇인가? 그 논증은 수의 어떤 성질을 사용하며, 그 성질은 행렬에서도 성립하는가?

$ab = 0$이고 $a \neq 0$이면 양변을 a로 나누어 $b = 0$을 얻는다. 이 논증에는 영이 아닌 모든 수가 역원(inverse)을 가진다는 사실이 필요하다. 영이 아닌 행렬이 반드시 역행렬을 가지는 것은 아니므로(행렬식(determinant)이 0인 행렬은 역행렬이 없다) 이 논증은 무너진다. 기하적인 그림도 함께 염두에 두자. 행렬은 평면의 변환이며, 곱 $\mathbf{AB}$는 "$\mathbf{B}$를 먼저 하고, 그다음

$\mathbf{A}$를 한다"는 뜻이다.

차근차근 풀기

1단계 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이지만 $\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$일 수 있는가?

> **생각해 보기** 기하적으로 생각해 보자. $\mathbf{B}$가 모든 것을 한 직선 위로 보내고, $\mathbf{A}$가 그 직선을 0으로 찌그러뜨리게 하고 싶다. 그러나 반대 순서에서는 $\mathbf{A}$가 남긴 것을 $\mathbf{B}$가 모두 없애 버려서는 안 된다.

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$로 두자. 이 행렬은 x축 위로의 사영(projection)이다(y축을 없앤다). 또 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$로 두면, 이 행렬은 (x, y)를 y축 위의 점 $(0, x)$로 보낸다. 그러면

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

따라서 이 명제는 **거짓**이다(그림 7.1.1). ■

2단계 제곱의 차

모든 곱의 순서를 유지하면서 주의 깊게 전개하면

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2.$$

이것은 정확히 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$일 때 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$와 같다. 단계 1의 행렬들에서는 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$이므로 이 명제는 **거짓**이다. ■

3단계 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$의 영이 아닌 해

> **생각해 보기** $\det \mathbf{A} \neq 0$이면 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$에 무엇을 할 수 있는가? $\det \mathbf{A} = 0$이면 $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$인 영이 아닌 열벡터(column vector) $\mathbf{v}$를 찾을 수 있는가?

$\det \mathbf{A} \neq 0$이면 $\mathbf{A}^{-1}$이 존재하고 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{0}$이다. 즉 영이 아닌 해는 없다.

$\det \mathbf{A} = 0$이면 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad = bc$로 쓰자. 벡터 $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$는 $\mathbf{A}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - ba \\ cb - da \end{pmatrix} = \mathbf{0}$을 만족하고, 다른 하나도 마찬가지이다. $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이므로 둘 중 적어도 하나는 영벡터가 아니다. 그것을 $\mathbf{v}$라 하자. 그러면 두 열이 모두 $\mathbf{v}$인 행렬 $\mathbf{X}$는 영행렬이 아니고 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$이다. 따라서 이 명제는 **참**이다. ■

4단계 제곱근은 몇 개인가?

> **잠깐, 직접 해 보기** $\mathbf{X}^2 + \mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$이 해를 무한히 많이 가지도록 하는 영이 아닌 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$를 찾아라. (힌트: 좌변을 완전제곱 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2$으로 만들고, 제곱이 영행렬인 행렬을 생각해 보라.)

둘 다 영이 아닌 $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$를 택하자. 그러면 방정식은 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$이 된다. $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$인 임의의 행렬 $\mathbf{N}$은 해 $\mathbf{X} = \mathbf{I} + \mathbf{N}$을 주며, 이러한 $\mathbf{N}$은 무한히 많다.

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}, \text{ 임의의 실수} t.$$

따라서 모든 t에 대하여 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$은 해이고, 이 명제는 **거짓**이다. ■

돌아보기

- **순서가 중요하다.** 모든 전개에서 곱의 순서를 지켜야 한다. $\mathbf{AB}$와 $\mathbf{BA}$는 대개 다르다.
- **영인자.** 영이 아닌 행렬끼리 곱해서 영행렬이 될 수 있으며, 이 때문에 "이차방정식의 근은 많아야 두 개"라는 논증이 무너진다.
- **변환으로 생각하라.** 각 반례(counterexample)는 행렬이 평면에 무엇을 하는지 그려 보면 쉽게 찾을 수 있었다.

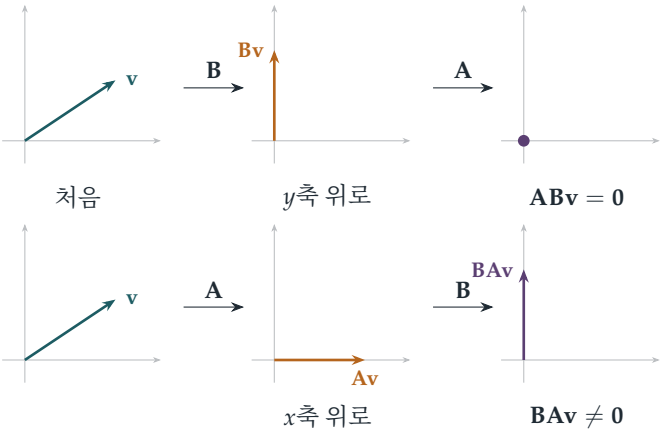


그림 7.1.1 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이지만 $\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$인 이유. 위: $\mathbf{B}$는 모든 벡터를 y축 위로 보내고, $\mathbf{A}$(x축 위로의 사영)가 이를 o으로 짓눌러 버린다. 아래: 반대 순서에서는 $\mathbf{A}$가 x성분을 남기고, $\mathbf{B}$가 그것을 y축 위로 옮기며, 그곳에서 벡터는 살아남는다.

숨은 수학

대수로서의 행렬

케일리(Arthur Cayley)는 1858년에 행렬을 단순한 계수의 표가 아니라 더하고 곱할 수 있는 하나의 대상으로 다루는 행렬 대수를 도입하였다. 그는 곱셈이 교환법칙을 만족하지 않는다는 것을 곧바로 알아차렸고, **케일리–해밀턴 정리**(*Cayley–Hamilton theorem*)를 증명하였다. 이 정리는 모든 정사각행렬이 자기 자신의 특성방정식(characteristic equation)을 만족한다는 것이다. 대각합(trace)이 t이고 행렬식이 d인 2×2 행렬에 대해서 이 정리는 $\mathbf{M}^2 - t\mathbf{M} + d\mathbf{I} = \mathbf{0}$임을 말하며, 이 사실은 이 장에서 거듭 사용된다(Section 7.4). 2×2 실수 행렬 전체는 **환**(*ring*)을 이룬다. 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 할 수 있지만 곱셈은 교환법칙을 만족하지 않으며, **영인자**(*zero divisor*), 즉 곱이 영이 되는 영이 아닌 원소들이 존재한다.

무한히 많은 제곱근

단계 4는 훨씬 더 인상적으로 만들 수 있다. 방정식 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$는 뻔한 해 $\pm\mathbf{I}$뿐 아니라, 원점을 지나는 직선에 대한 평면의 모든 반사(reflection) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$도 해로 가진다. 두 번 반사하면 아무것도 변하지 않기 때문이다. 이것은 $\mathbf{I}$의 제곱근이 원 하나만큼 있다는 뜻이다. 계수가 수인 n차 다항식(polynomial)이 많아야 n개의 근을 가지는 것은 수에 영인자가 없기 때문이다. 행렬에는 영인자가 있으므로 이 개수 세기가 성립하지 않는다.

물리학에서의 비가환성

고전역학에서 위치 x와 운동량(momentum) p는 수이며 $xp = px$이다. 양자역학에서 이들은 $xp - px = i\hbar$를 만족하는 연산자(operator, 무한 행렬)가 된다. 여기서 $\hbar$는 플랑크 상수(Planck's constant)를 2π로 나눈 값이다. 이 하나의 비가환 관계로부터 하이젠베르크의 불확정성 원리, 즉 위치와 운동량을 동시에 정확히 알 수 없다는 사실이 나온다. 1925년 하이젠베르크가 양자역학의 규칙을 발견했을 때 그는 행렬이 무엇인지 알지 못했다. 하이젠베르크가 고안한 이상한 곱셈 규칙이 바로 행렬의 곱셈이라는 것을 알아본 사람은 막스 보른(Max Born)이었다.

사고 기술

익숙한 규칙을 새로운 상황에서 시험하기

새로운 종류의 대상을 만나면, 익숙한 규칙 중 어느 것이 여전히 성립하는지 확인하고, 각 규칙이 정확히 어떤 성질에 의존하는지 알아내라.

"$ab = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$"이라는 규칙은 나눗셈에 의존한다. "$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$"은 교환법칙에 의존한다. 각 규칙이 무엇에 기대고 있는지 알면 그 규칙을 언제 여전히 쓸 수 있는지 알 수 있다.

더 도전하기

1 **언제 교환되는가?** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$과 교환되는 2×2 행렬을 모두 구하여라.

2 **영행렬의 제곱근.** $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$인 2×2 실수 행렬 $\mathbf{N}$을 모두 구하여라. (힌트: 케일리–해밀턴 정리를 사용하여 $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \det\mathbf{N} = 0$임을 보여라.)

3 **반사.** 모든 반사 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$을 제곱하면 $\mathbf{I}$가 됨을 보이고, 이 행렬이 반사의 기준으로 삼는 직선을 구하여라.

4 **케일리–해밀턴.** 모든 2×2 행렬이 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$을 만족함을 직접 계산하여 증명하여라.

더 읽을거리

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 가장 널리 쓰이는 입문 선형대수(linear algebra) 교재로, 이해를 강조한다.
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*** (Springer; 온라인 무료). 행렬보다 선형사상(linear map)을 중심에 둔, 좀 더 추상적인 접근이다.
- **Jim Baggott, *The Quantum Story*** (Oxford University Press). 하이젠베르크의 행렬역학을 포함한 양자역학의 역사이다.

7.2 돌지 않고 늘어나기

문제

STEP III 1990, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/90-s3-q6`

도입

행렬 변환은 보통 모든 벡터를 새로운 방향으로 옮긴다. 그러나 많은 행렬에는 전혀 돌리지 않고 그 방향으로 늘이거나 줄이기만 하는 특별한 방향이 몇 개 있다. 이것을 그 행렬의 **고유벡터**(eigenvector)라 하고(독일어 *eigen*은 "자신의" 또는 "고유한"이라는 뜻이다), 늘어나는 비율을 **고윳값**(eigenvalue)이라 한다. 이 문제의 행렬처럼 대칭행렬에서는 언제나 그렇듯이 고유벡터가 충분히 많으면, 변환이 투명하게 드러난다. 알맞은 좌표에서 보면 그것은 단지 두 축 방향으로 늘이는 것일 뿐이다.

이 문제는 특정한 행렬의 고유벡터를 구하고, 이를 이용해 그 행렬이 원을 어떻게 바꾸는지 이해한다. 고유벡터는 응용수학 전체에서 가장 유용한 개념 가운데 하나이다. 고유벡터는 다리의 고유 진동, 회전하는 물체의 주축, 원자의 에너지 준위, 데이터 구름에서 가장 중요한 방향, 그리고 구글(Google)의 초기 PageRank 알고리즘에 의한 웹 페이지 순위를 설명한다.

시작하기 전에

생각해 보기 T가 벡터를 "방향은 그대로 두고 스칼라배만 한다"는 것은 무슨 뜻인가? 이를 식으로 써 보아라.

이는 어떤 수 λ에 대하여 $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$라는 뜻이다. 즉 $\mathbf{v}$는 고윳값이 λ인 고유벡터이다. 문제에 나오는 두 벡터 $(1, 2)$와 $(2, -1)$이 서로 수직이라는 점에 주목하자. 이는 우연이 아니다. 이 행렬은 **대칭**(symmetric)행렬이고, 대칭행렬의 고유벡터는 언제나 서로 수직이다.

차근차근 풀기

1단계 고유벡터

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

따라서 $(1,2)$는 2배로, $(2,-1)$은 4배로 늘어난다. ■

2단계 원의 상

> **생각해 보기** E의 방정식을 구하려면 x와 y를 X와 Y로 나타내고(역행렬을 구한다), 이를 $x^2+y^2=1$에 대입하면 된다.

행렬 $\frac{2}{5}\begin{pmatrix}9&-2\\-2&6\end{pmatrix}$의 행렬식(determinant)은 $\frac{4}{25}(54-4) = 8$이고, 역행렬(inverse matrix)은 $\frac{1}{20}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}$이다. 따라서 $x = \frac{6X+2Y}{20}$, $y = \frac{2X+9Y}{20}$이고, $x^2+y^2=1$은

$$(6X+2Y)^2 + (2X+9Y)^2 = 400 \quad\Longrightarrow\quad 40X^2+60XY+85Y^2 = 400,$$

이 되며, 이를 5로 나누면 $8X^2+12XY+17Y^2=80$이다. ■

> **생각해 보기** E는 어떤 모양이며, 그 넓이는 얼마인가? 고유벡터를 이용하여라.

단위원은 모든 방향으로 반지름이 1이다. $(2,-1)$ 방향으로는 4배로, 이에 수직인 방향 $(1,2)$로는 2배로 늘어난다. 따라서 E는 고유벡터 방향을 따라 반축(semi-axis)의 길이가 4와 2인 타원(ellipse)이고(그림 7.2.1), 그 넓이는 $\pi\times4\times2 = 8\pi$이다. (같은 이야기로, 모든 선형사상(linear map)은 넓이를 $|\det T|=8$배로 만들고, 원의 넓이는 π이다.)

3단계 X의 최댓값

> **생각해 보기** C 위에서 $X=\frac{2}{5}(9x-2y)$이다. $x^2+y^2=1$일 때 $9x-2y$는 얼마나 커질 수 있는가?

$9x-2y$는 $(9,-2)$와 단위벡터 (x,y)의 내적(dot product)이므로, 그 최댓값은 $|(9,-2)| = \sqrt{85}$이고 (x,y)가 $(9,-2)$ 방향을 향할 때 이 값을 가진다. 따라서 X의 최댓값은 $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{\frac{85}{25}} = 2\sqrt{\frac{17}{5}}$이다. ■

4단계 접선

잠깐, 직접 해 보기 C 위의 점 $\frac{1}{5}(3,4)$에서의 접선(tangent line)은 $3x+4y=5$이다. 선형사상은 접선을 접선으로 보낸다. 이를 이용하여 E의 접선을 구하여라.

$3x+4y=5$에 $x=\frac{6X+2Y}{20}$, $y=\frac{2X+9Y}{20}$을 대입하면

$$\frac{3(6X+2Y)+4(2X+9Y)}{20}=5 \quad\Longrightarrow\quad 26X+42Y=100,$$

즉 $13X+21Y=50$이다. ■

(검산: 그 점 자체는 $T(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(\frac{38}{25},\frac{36}{25})$이고, $13\cdot\frac{38}{25}+21\cdot\frac{36}{25}=\frac{494+756}{25}=50$이다.)

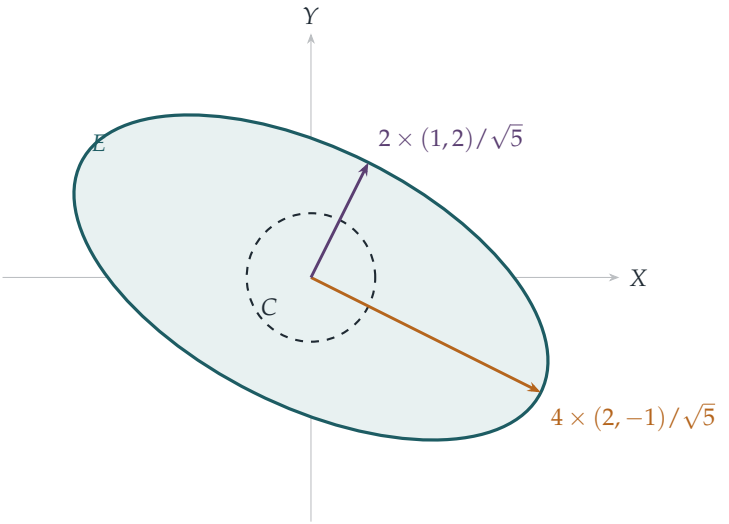


그림 7.2.1 단위원 C(점선)와 T에 의한 그 상 E. 고유벡터 $(2,-1)$ 방향으로 원은 4배로 늘어나고, 이에 수직인 고유벡터 $(1,2)$ 방향으로는 2배로 늘어난다. 따라서 E는 그 방향들을 따라 반축의 길이가 4와 2이고 넓이가 8π인 타원이다.

돌아보기

- **고유벡터는 자연스러운 축이다.** 고유벡터로 주어지는 좌표에서 T는 단지 4배와 2배로 늘이는 것일 뿐이고, 원에 미치는 효과도 뻔하다.
- **행렬식은 넓이를 잰다.** E의 넓이는 C의 넓이의 $|\det T|$배이다.
- **선형사상은 접함을 보존한다.** 원의 접선을 변환하자 계산을 거의 하지 않고도 타원의 접선을 얻었다.

숨은 수학

스펙트럼 정리

모든 실대칭행렬은 서로 수직인 고유벡터를 빠짐없이 갖추고 있으며, 고윳값은 모두 실수이다. 이것이 **스펙트럼 정리**(spectral theorem)로, 처음 배우는 선형대수(linear algebra) 과목의 핵심 결과 가운데 하나이다. 이 정리에 따르면 모든 대칭 선형사상은 적절한 직교좌표에서 각 축 방향으로 늘이는 것일 뿐이다. 같은 이야기로, $8X^2 + 12XY + 17Y^2$ 같은 모든 이차형식(quadratic form)은 회전을 통해 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ 꼴로 바꿀 수 있으며, 그래서 모든 유심 원뿔곡선(central conic)은 서로 수직인 축을 가진 타원이나 쌍곡선(hyperbola)이다(**주축 정리**(principal axis theorem)). 이 아이디어는 1820년대의 코시(Cauchy)까지 거슬러 올라가는데, 그는 이를 이용해 이차곡면의 주축과 고체 내부 응력의 주축을 구했다.

이것이 성립하게 하는 것은 대칭성이다. 대칭이 아닌 행렬은 이렇게 고분고분하지 않을 수 있다. 90° 회전은 모든 방향을 돌리므로 실수 고유벡터가 전혀 없고, 전단(shear) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$은 고유벡터 방향이 하나뿐이므로 어떤 두 축을 택해도 그 방향으로 늘이는 변환이 되지 않는다.

어디에나 있는 고유벡터

고유벡터가 등장하는 곳 몇 군데를 소개한다.

- **진동.** 질점과 용수철로 이루어진 계는 **정규 모드**(normal mode)로 진동한다. 정규 모드란 모든 부분이 하나의 진동수로 발맞추어 움직이는 패턴이다. 이것은 어떤 행렬의 고유벡터이고, 진동수는 고윳값에서 나온다(Section 11.2).
- **데이터.** 데이터 점들의 구름이 가장 넓게 퍼져 있는 방향은 그 공분산 행렬(covariance matrix)의 고유벡터이다. 이를 찾는 것이 **주성분 분석**(principal component analysis)으로, 통계학과 기계 학습의 기본 도구 가운데 하나이다(Section 13.7).
- **양자역학.** 어떤 물리량을 측정했을 때 나올 수 있는 결과는 어떤 행렬(또는 연산자(operator))의 고윳값이며, 원자의 에너지 준위도 고윳값이다.
- **웹 검색.** 구글 검색 엔진의 바탕이 된 최초의 아이디어인 PageRank는 페이지 사이의 링크를 나타내는 거대한 행렬에서 고윳값이 1인 고유벡터의 성분에 따라 페이지의 순위를 매긴다.

사고 기술

변환에 맞는 좌표를 골라라

선형변환을 이해하려면 그 변환이 돌리지 않는 방향을 찾아라. 그 좌표에서 변환은 단순해진다.

이것은 Section 5.6에서 페르마(Fermat) 점을 원점으로 잡은 것이나, Section 2.8에서 사상을 단순하게 만들려고 변수를 바꾼 것과 같은 아이디어이다. 알맞은 좌표를 잡으면 구조가 뻔히 드러난다.

더 도전하기

1 **고윳값 구하기.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 고윳값이 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$의 근임을 보이고, 문제의 행렬에서 $\lambda = 2$와 4가 나옴을 확인하여라.

2 **수직인 고유벡터.** $\mathbf{M}$이 대칭행렬이고 $\lambda \neq \mu$에 대하여 $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{Mv} = \mu\mathbf{v}$이면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$임을 보여라. (힌트: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu}$를 두 가지 방법으로 계산하여라.)

3 **회전.** 회전행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$은 θ가 π의 배수가 아니면 실수 고유벡터를 갖지 않음을 보여라. 이 행렬의 복소수 고윳값은 무엇인가?

4 **거듭제곱.** 고유벡터를 이용하여 $T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$을 구하여라. (힌트: $(1,0)$을 $(1,2)$와 $(2,-1)$의 일차결합으로 나타내어라.)

더 읽을거리

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 선형대수 입문서. 6장은 고윳값과 그 응용에 대한 훌륭한 입문이다.
- **Kurt Bryan & Tanya Leise, "The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google"**, *SIAM Review* 48 (2006). 구글 뒤에 숨은 선형대수를 다룬 논문으로, 읽기 쉽고 무료로 볼 수 있다.
- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra*** (동영상 시리즈, 온라인 무료). 이 절에서 다룬 기하학적 아이디어를 정확히 보여 주는 아름다운 애니메이션이다.

7.3 행렬식을 행렬식이게 하는 것

문제

STEP II 2019, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

도입

2×2 행렬의 행렬식(determinant)은 $ad - bc$이다. 이 공식은 어디에서 왔으며, 왜 그렇게 중요할까? 한 가지 답은 행렬식이 그 행렬이 넓이를 늘리거나 줄이는 비율이라는 것이다. 이 문제가 탐구하는 또 다른 답은, 행렬식이 행렬의 곱셈을 보통의 곱셈으로 바꾸어 주는 사실상 **유일한** 함수라는 것이다: $\det(\mathbf{MN}) = \det \mathbf{M} \det \mathbf{N}$.

이 문제는 바로 이 성질 하나(와 자명한 경우를 배제하기 위한 가벼운 조건 두 개)만을 가진 미지의 함수 f를 주고, 그 함수가 어떻게 행동해야 하는지를 한 단계씩 연역하도록 한다. Section 6.5의 도함수 문제처럼, 이것은 대상을 오직 그 성질만으로 확정해 내는 연습이다. 끝에 이르면 f는 행을 바꾸면 부호가 바뀌고, 특이(singular) 행렬에서는 값이 영이 되며, 층밀림(shear)에서는 1이 될 수밖에 없다. 이는 정확히 행렬식의 행동이다.

시작하기 전에

생각해 보기 문제에 나오는 각각의 특수한 행렬은 무슨 일을 하는가? 일반적인 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 **JM**, **MJ**, **KM**, **PM**을 계산해 보라.

JM은 **M**의 두 행을 맞바꾸고, **MJ**는 두 열을 맞바꾼다. **KM**은 둘째 행에 k를 곱한다. **PM**은 둘째 행을 첫째 행에 더한다. 이것들은 가우스(Gauss) 소거법(Gaussian elimination)의 기본행연산(elementary row operations)이다. f는 곱을 곱으로 바꾸므로, 이 특수한 행렬들에서 f의 값을 알면 각 행연산에 대해 f가 어떻게 반응하는지 알 수 있다.

차근차근 풀기

1단계 항등행렬

$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I})$이다. $\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$이므로 양변을 나누면 $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$을 얻는다. ■

2단계 행 바꾸기

$\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이고, 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$이다. $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$이다. 이제 $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{JM}$이므로 이 행렬에서의 값은 $\mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{M}) = -\mathrm{f}(\mathbf{M})$이다. 또 $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \mathbf{JMJ}$(행을 바꾼 다음 열을 바꾼 것)이므로 이 행렬에서의 값은 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})$이다. ■

3단계 종속인 행

생각해 보기 먼저 두 행이 같은 행렬 $\mathbf{B}$를 생각하자. $\mathbf{JB}$는 무엇인가? 이것은 $\mathrm{f}(\mathbf{B})$에 대해 무엇을 말해 주는가?

$\mathbf{B}$의 두 행이 모두 (a, b)라면, 두 행을 바꾸어도 달라지는 것이 없다: $\mathbf{JB} = \mathbf{B}$. 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = \mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B})$이고, 이로부터 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$일 수밖에 없다.

이제 $\mathbf{A}$의 행이 (a, b)와 $k(a, b)$라면, 두 행이 모두 (a, b)인 $\mathbf{B}$에 대해 $\mathbf{A} = \mathbf{KB}$이다. 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$이다. ■(여기에는 둘째 행이 영벡터인 $k = 0$인 경우도 포함된다.)

4단계 층밀림

잠깐, 직접 해 보기 $\mathbf{P}^2$과 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$를 계산하라. 두 값이 같아지도록 k를 고르라. 그러면 $\mathrm{f}(\mathbf{P})$에 대해 무엇을 알 수 있는가?

$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이고, $k \neq 0$이면

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이다. $k = 2$로 두면 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \mathbf{P}^2$이다. 양변에 f를 취하고 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$을 이용하면

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ 또는 1이다. 그런데 $\mathbf{P}$는 가역(invertible)이고 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) \neq 0$이다. 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$이다. ■

돌아보기

- **특수한 원소가 함수의 정체를 드러낸다.** 곱셈적 성질을 $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{P}$에 적용하여 각각에서의 f의 값과, 각 행연산이 미치는 효과를 얻었다.
- **변환해도 자기 자신과 같은 원소.** 두 행이 같은 행렬은 행 바꾸기로 변하지 않는데, 행 바꾸기는 f의 부호를 바꾼다. 따라서 그런 행렬에서 f는 영이어야 한다.
- **켤레(conjugation)는 f를 보존한다.** $f(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = f(\mathbf{P})$이며, 이 사실은 대수학에서 거듭 쓰인다.

숨은 수학

모든 곱셈적 함수는 행렬식의 함수이다

문제는 $f(\mathbf{P}) = 1$에서 멈추지만, 논증을 끝까지 완성할 수 있다. 모든 가역 행렬은 기본행렬(elementary matrices)(행 바꾸기, 행의 상수배, 층밀림)의 곱이고, 이 문제는 각각에서 f가 어떻게 행동하는지 보여 준다. 이로부터 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$를 만족하는 어떤 실수 한 변수 함수 ϕ에 대해 $f(\mathbf{M}) = \phi(\det \mathbf{M})$임이 따라 나온다. 행렬식 자체는 $\phi(x) = x$인 경우이지만, $\phi(x) = x^3$이나 $\phi(x) = |x|^{1/2}\operatorname{sign}(x)$도 조건을 만족한다. 다시 말해, **행렬식은 행렬 위에서 정의되는 본질적으로 새로운 유일한 곱셈적(*multiplicative*) 함수이다.** 군론(group theory)의 언어로 말하면, 행렬식은 가역 행렬들의 군에 대해 가환군(commutative group)이 볼 수 있는 모든 것을 담고 있다.

넓이로서의 행렬식

기하적으로 보면, 2×2 행렬은 단위정사각형을 평행사변형으로 보내며, $\det \mathbf{M}$은 그 평행사변형의 **부호 있는 넓이**(signed area)이다. 방향(orientation)이 보존되면 양수, 뒤집히면 음수이다(그림 7.3.1). 그러면 곱셈적 성질의 의미가 분명해진다. 두 변환을 차례로 하면 넓이의 확대 비율이 곱해진다. 행 바꾸기는 방향을 뒤집으므로 $\det \mathbf{J} = -1$이고, 층밀림은 정사각형을 밀어서 넓이가 같은 평행사변형으로 만들므로 $\det \mathbf{P} = 1$이며, 행이 종속인 행렬은 정사각형을 납작하게 짓눌러 버리므로 행렬식이 영이다. 문제의 모든 단계에는 그에 맞는 그림이 있다.

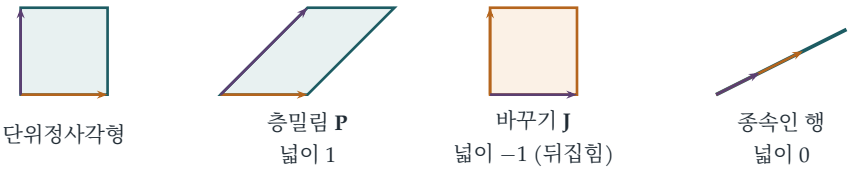


그림 7.3.1 부호 있는 넓이로서의 행렬식. 두 기저 벡터(basis vectors)의 상(호박색, 자주색)이 평행사변형을 만든다. 층밀림은 넓이를 보존하고, 기저 벡터를 맞바꾸면 방향이 뒤집히며, 행(또는 열)이 종속이면 정사각형이 직선 위로 무너진다. 두 변환을 차례로 하면 부호 있는 넓이가 곱해지는데, 이것이 바로 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$이라는 성질이다.

고차원의 행렬식

$n \times n$ 행렬에서 행렬식은 부호 있는 부피의 확대 비율이며, 세 가지 성질로 특징지어진다. 각 행에 대해 선형이고, 두 행을 바꾸면 부호가 바뀌며, 항등행렬에서 값이 1이다. 이 성질들만으로 익숙한 전개 공식들을 유도할 수 있고, 가우스 소거법은 행렬식을 효율적으로 계산하는 방법을 준다. 행렬식은 중적분의 변수변환 공식(**야코비안**(Jacobian))에, 역행렬 공식에, 그리고 Section 5.4에서 보았듯이 다항식의 판별식(discriminant)에 나타난다.

사고 기술

> **특수한 입력으로 미지의 함수를 탐색하라**
>
> 어떤 함수가 오직 하나의 성질로만 알려져 있을 때는, 떠올릴 수 있는 가장 단순한 특수한 입력에 그 성질을 적용해 보고 무엇이 강제되는지 살펴보라.
>
> 여기서는 항등행렬, 행 바꾸기, 상수배, 층밀림만으로 거의 모든 것을 결정할 수 있었다. 자기 자신의 제곱, 역원, 켤레가 되는 입력을 고르는 것이 특히 효과적이다.

더 도전하기

1 **다른 예.** $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^3$은 문제의 모든 조건을 만족하고, $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = |\det \mathbf{M}|$은 곱셈적 성질은 만족하지만 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$은 만족하지 않음을 보여라.

2 **열연산.** 둘째 열이 첫째 열의 상수배인 행렬에서도 f의 값이 영임을 보여라.

3 **상수배.** $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$라 하자. $\mathrm{f}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$이고 $\mathrm{f}(\mathbf{K}_k)\mathrm{f}(\mathbf{K}_l) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_{kl})$임을 보여라.

4 **행렬식으로의 환원.** 심화모든 가역 2×2 행렬은 $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}_k$, $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 꼴의 행렬들의 곱으로 나타낼 수 있음을 보여라. 이로부터 $\mathrm{f}(\mathbf{M})$이 $\det \mathbf{M}$에만 의존함을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*** (Springer; 온라인 무료 공개). 이 문제와 같은 정신으로, 행렬식을 그 성질로부터 정의한다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 5장에서 세 가지 규칙으로부터 행렬식을 전개한다.
- **3Blue1Brown, "The determinant"** (영상, 온라인 무료 공개). 넓이로서의 해석을 아름다운 애니메이션으로 보여 준다.

7.4 제자리로 돌아오는 행렬

문제

STEP II 2020, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip`

도입

어떤 변환은 충분히 여러 번 반복하면 모든 것을 처음 자리로 되돌려 놓는다. 90° 회전은 네 번 만에, 반사는 두 번 만에 그렇게 한다. 어떤 n에 대하여 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$라는 성질을 가지는 2×2 행렬은 어떤 것들이며, 그것을 어떻게 알아볼 수 있을까?

이 문제의 놀라운 점은 두 수, 곧 **대각합**(*trace*)과 **행렬식**(*determinant*)만으로 판정이 된다는 것이다. 네 성분을 알 필요 없이 $a + d$와 $ad - bc$만 알면 된다. 그리고 그 답은 물리적 세계에 대해 놀라운 결과를 낳는다. 결정이 2-, 3-, 4-, 6-회 대칭은 가질 수 있지만 5-회 대칭은 결코 가질 수 없는 이유를 설명해 주는 것이다. 이는 두 세기 동안 성립해 온 결정학의 "법칙"이었는데, 1982년의 한 발견이 이를 뒤집고 노벨상을 받았다.

시작하기 전에

생각해 보기 모든 2×2 행렬은 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$을 만족한다(케일리–해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem). 직접 곱해서 확인해 보라). 이것이 $\mathbf{M}^2$에 관한 질문에 어떻게 도움이 될 수 있을까?

이 식은 $\mathbf{M}^2$을 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{I}$로 나타내 준다. 즉 $t = \operatorname{tr}\mathbf{M}$, $d = \det\mathbf{M}$이라 하면 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$이다. 따라서 $\mathbf{M}^2$에 대한 조건은 $\mathbf{M}$, t, d를 잇는 조건이 된다. 이것이 문제 전체의 열쇠이다.

차근차근 풀기

1단계 제곱의 대각합

$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$이므로 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = a^2 + 2bc + d^2 = (a+d)^2 - 2(ad-bc)$이다. ■

2단계 $\pm\mathbf{I}$의 제곱근

> **생각해 보기** $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$라고 하자. 이를 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$에 대입하라. $t \neq 0$이면 이것은 $\mathbf{M}$에 대해 무엇을 말해 주는가?

$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$이면 $\mathbf{I} = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$이므로 $t\mathbf{M} = (1+d)\mathbf{I}$이다. $t \neq 0$이면 $\mathbf{M}$은 $\mathbf{I}$의 상수배, 예컨대 $c\mathbf{I}$이고 $c^2 = 1$이므로 $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}$인데, 이는 제외된 경우이다. 따라서 $t = 0$이고, 그러면 $(1+d)\mathbf{I} = \mathbf{0}$이므로 $d = -1$이다.

역으로 $t = 0$이고 $d = -1$이면 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I} = \mathbf{I}$이고, $\operatorname{tr}(\pm\mathbf{I}) = \pm 2 \neq 0$이므로 $\mathbf{M} \neq \pm\mathbf{I}$이다. ■

$\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$인 경우: 대입하면 $t\mathbf{M} = (d-1)\mathbf{I}$를 얻는다. $t \neq 0$이면 $\mathbf{M} = c\mathbf{I}$이고 $c^2 = -1$인데, 이는 실수 c에 대해 불가능하다. 따라서 $t = 0$이고 $d = 1$이다. 역으로 $t = 0$이고 $d = 1$이면 $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$이다. ■

3단계 네제곱근

> **잠깐, 직접 해 보기** $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$이라 하면, $\mathbf{M}^4 = \mathbf{I}$는 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}$를 뜻한다. (ii)에 의해 $\mathbf{N} = \pm\mathbf{I}$이거나, $\operatorname{tr}\mathbf{N} = 0$이고 $\det\mathbf{N} = -1$이다. 두 번째 경우는 왜 불가능한가?

$\det\mathbf{N} = \det(\mathbf{M}^2) = (\det\mathbf{M})^2 \geq 0$이므로 $\det\mathbf{N} \neq -1$이다. 따라서 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I}$이다. 역은 분명하다. ■

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$인 경우: $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$에 (ii)를 적용하면, 이 식은 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = 0$이고 $\det(\mathbf{M}^2) = 1$일 때, 곧 $t^2 - 2d = 0$이고 $d^2 = 1$일 때에만 성립한다. $t^2 = 2d \geq 0$이므로 $d = 1$이어야 하고, 그러면 $t^2 = 2$이다. 따라서

$$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det\mathbf{M} = 1 \text{ 이고 } \operatorname{tr}\mathbf{M} = \pm\sqrt{2}. \qquad ■$$

4단계 회전이 아닌 $\mathbf{I}$의 여덟제곱근

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$인 행렬은 모두 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$를 만족한다. 45° 회전은 대각합이 $\sqrt{2}$이고 행렬식이 1이

다. 우리는 대각합과 행렬식이 같으면서 회전이 아닌 다른 행렬을 원한다. 다음을 잡자.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathbf{M} = \sqrt{2}, \quad \det\mathbf{M} = 1.$$

3단계에 의해 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$이므로 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$이다. 그러나 $\mathbf{M}$은 회전도 반사도 아니다. 회전과 반사는 길이를 보존하는데, $\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$의 길이는 $\sqrt{3} \neq 1$이기 때문이다. ■

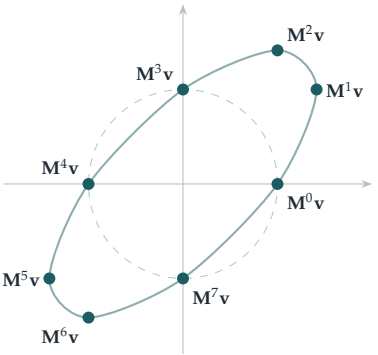


그림 7.4.1 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 의한 $\mathbf{v} = (1,0)$의 궤도(orbit). 여덟 단계 뒤에 출발점으로 돌아온다. 점들이 원(점선) 위에 있지 않으므로 $\mathbf{M}$은 회전이 아니지만, 점들은 타원 위에 놓인다. 즉 $\mathbf{M}$은 비스듬한 좌표에서 본 45° 회전이다.

돌아보기

- **케일리–해밀턴 정리는 거듭제곱을 일차결합으로 바꾼다.** 2×2 행렬의 모든 거듭제곱은 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{I}$의 일차결합(linear combination)이며, 그 계수는 대각합과 행렬식에만 의존한다.
- **제곱의 행렬식은 음이 아니다.** 이 단순한 사실 하나로 (iii)에서 한 경우 전체를 배제할 수 있었다.
- **대각합과 행렬식은 불변량이다.** 대각합과 행렬식이 같은 두 행렬은($\mathbf{I}$의 상수배가 아니라면) 겉모습이 닮았든 아니든 거듭제곱에 대해 같은 방식으로 행동한다.

숨은 수학

닮은 행렬

4단계의 $\mathbf{M}$은 왜 "변장한 회전"일까? 어떤 가역행렬 $\mathbf{S}$에 대하여 $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$이면 두 행렬 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{R}$은 **닮았다**(*similar*)고 한다. 이들은 서로 다른 좌표에서 같은 변환을 나타낸다. 닮은 행렬은 대각합과 행렬식이 같으며, ($\mathbf{I}$의 상수배가 아닌 2×2 행렬에 대해서는) 그 역도 성립한다. 따라서 대각합이 $\sqrt{2}$이고 행렬식이 1인 실행렬은 모두 45° 회전과 닮았고, $\mathbf{S}$가 주는 비스듬한 좌표에서는 그저 회전할 뿐이다(그림 7.4.1). 일반적으로 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$인 실수 2×2 행렬은 언제나 회전이나 반사와 닮았다.

결정에 5회 대칭이 없는 이유

결정은 원자가 규칙적으로 반복되어 배열된 것이다. 결정의 회전 대칭은 원자의 격자(lattice)를 자기 자신으로 보내므로, 격자를 기준으로 한 좌표에서는 **정수** 성분을 가지는 행렬로 주어진다. 따라서 그 대각합은 정수이다. 그런데 각 θ만큼의 회전은 어떤 좌표에서든 대각합이 $2\cos\theta$이고, $2\cos\theta$가 정수인 것은 그 값이 $-2, -1, 0, 1$ 또는 2일 때뿐이다. 곧 위수(order)가 2, 3, 4, 6인(그리고 1인) 회전뿐이다. 5회 대칭이 되려면 $2\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$이어야 하는데, 이는 정수가 아니다. 이것이 **결정학적 제한 정리**(*crystallographic restriction theorem*)이다. 1982년 단 셰흐트만(Dan Shechtman)은 겉보기에 5회 대칭을 가진 합금을 관찰했고 처음에는 조롱을 받았다. 그것은 펜로즈(Penrose) 타일링처럼 질서는 있지만 주기적이지 않은 **준결정**(*quasicrystal*)으로 밝혀졌고, 따라서 이 정리의 적용 대상이 아니었다. 그는 2011년에 노벨 화학상을 받았다.

사고 기술

본질적인 행동을 담아내는 불변량을 찾아라

매개변수가 많은 대상에 관한 문제라면, 관점을 바꾸어도 변하지 않는 몇 가지 조합만으로 충분한지 물어보라.

여기서는 네 성분이 두 불변량(invariant), 곧 대각합과 행렬식으로 줄어들었다. 질문("$\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$인가?")이 좌표에 의존하지 않기 때문이다. 알맞은 불변량을 찾는 것이 분류 문제의 열쇠인 경우가 많다.

더 도전하기

1 **위수가 3인 회전.** STEP II 2021, 7번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`)에 도전해 보라. 이 문제는 특이한 성질을 가진 회전행렬에서 출발하여, 세제곱이 단위행렬인 모든 실수 2×2 행렬에 관한 사실로 끝난다.

2 **위수가 6인 경우.** $\mathbf{M}^6 = \mathbf{I}$이지만 $\mathbf{M}^2 \neq \mathbf{I}$이고 $\mathbf{M}^3 \neq \mathbf{I}$이기 위한 대각합과 행렬식의 조건을 구하라.

3 **결정학적 제한.** $\mathbf{M}$의 성분이 정수이고 $\det \mathbf{M} = 1$이며 어떤 n에 대하여 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$이면 $\operatorname{tr} \mathbf{M} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$임을 보여라. 위수가 6인 정수 행렬을 하나 구하라.

4 **거듭제곱에 대한 케일리–해밀턴 정리.** $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$를 이용하여 $\mathbf{M}^3$과 $\mathbf{M}^4$를 $p\mathbf{M} + q\mathbf{I}$ 꼴로 나타내고, 이를 이용하여 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$가 되는 조건을 다시 유도하라.

더 읽을거리

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*** (Springer). 『군과 대칭』. 결정학적 제한과 벽지 무늬의 분류를 다룬다.
- **Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry*** (Cambridge University Press). 『준결정과 기하학』. 준결정과 비주기적 질서의 수학을 다룬다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 『선형대수학 입문』. 닮은 행렬과 케일리–해밀턴 정리를 다룬다.

7.5 3차원에서의 회전

문제

STEP III 2022, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

도입

2차원에서 점을 회전시키는 것은 쉽다. $e^{i\theta}$를 곱하면 된다. 3차원에서는 훨씬 어렵다. 곱할 복소수 하나가 따로 있는 것도 아니고, 서로 다른 축에 대한 회전은 교환법칙이 성립하지 않으며(do not commute), "$(1,2,2)$를 지나는 축을 중심으로 $37°$ 회전"의 행렬을 적는 일은 막막해 보인다.

이 문제는 임의의 축과 임의의 각에 대해 그 행렬을 외적(cross product)으로부터 만들어 낸다. 그 결과가 1840년에 Olinde Rodrigues가 발표한 **로드리게스 회전 공식**(*Rodrigues' rotation formula*)이다. 이 공식은 로봇 공학, 컴퓨터 그래픽스, 우주선 항법에서 매일 쓰이며, 아름다운 사실 하나를 드러낸다. $\mathbf{n}$과 외적하는 것은 "$\mathbf{n}$을 축으로 하는 $90°$ 회전"이고, $\mathbf{n}$을 축으로 하는 모든 회전은 이것으로 만들어진다. 이는 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$가 i를 곱하는 것으로부터 만들어지는 것과 꼭 같다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\mathbf{r}$이 $\mathbf{n}$에 수직일 때 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$는 기하적으로 어떤 모습인가? 또 $\mathbf{r}$이 $\mathbf{n}$에 평행할 때는 어떤가?

$\mathbf{r}\parallel\mathbf{n}$이면 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}=\mathbf{0}$이다. $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$이면 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$는 $\mathbf{r}$과 길이가 같고($|\mathbf{n}|=1$이고 사잇각이 $90°$이므로), 두 벡터 모두에 수직이며, 오른손 법칙(right-hand rule)에 따라 $\mathbf{r}$을 $\mathbf{n}$을 축으로 시계 반대 방향으로 $90°$ 회전한 것이다($\mathbf{n}$의 끝에서 내려다볼 때). 따라서 f는 $\mathbf{r}$의 $\mathbf{n}$ 방향 성분(component)을 없애고, 수직 성분을 $90°$ 회전시킨다. 이 그림이 문제 전체를 설명해 준다.

차근차근 풀기

1단계 두 번 외적하기

$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = (bz - cy,\ cx - az,\ ay - bx)$이다. 이것을 다시 $\mathbf{n} = (a, b, c)$와 외적하면 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$의 x성분은

$$b(ay - bx) - c(cx - az) = -x(b^2 + c^2) + aby + acz. \qquad \blacksquare$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$이므로 이는 $-x(1 - a^2) + aby + acz = a(ax + by + cz) - x$이고, 이것은 $(\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$의 x성분이다. 나머지 성분도 대칭성에 의해 마찬가지이므로 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$이다. $\blacksquare$

> **생각해 보기** $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$로 쓰자. 여기서 $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n}$은 $\mathbf{n}$ 방향의 성분이다. $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$를 이들로 나타내면 무엇인가?

$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r} = -\mathbf{r}_{\perp}$이다. f를 두 번 적용하면 평행 성분은 사라지고 수직 성분은 $\mathbf{n}$을 축으로 $180°$ 회전하는데, 이는 그 방향을 그저 뒤집는 것이다(그림 7.5.1). 이것이 $\mathrm{i}^2 = -1$에 해당하는 사실이다.

2단계 회전

> **생각해 보기** $\mathrm{g}(\mathbf{n})$을 계산하라. 그다음 $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$인 경우, 이러한 $\mathbf{r}$에 대해 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$임을 이용하여 $\mathrm{g}(\mathbf{r})$를 계산하라.

$\mathrm{f}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$이므로 $\mathrm{g}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$이다. 즉 축은 고정된다. $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$이면 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$이고

$$\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) - (1 - \cos\theta)\mathbf{r} = \cos\theta\,\mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$는 $\mathbf{r}$을 $\mathbf{n}$을 축으로 $90°$ 돌린 것이고 길이도 같으므로, 이것은 $\mathbf{r}$을 $\mathbf{n}$을 축으로 θ만큼 회전한 것이다. 평면에서의 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)z$와 똑같다. g는 선형(linear)이고 모든 벡터는 $\mathbf{n}$의 상수배와 $\mathbf{n}$에 수직인 벡터의 합으로 나타낼 수 있으므로, g는 **원점을 지나고 방향이 $\mathbf{n}$인 축을 중심으로 각 θ만큼 회전하는 변환**이다($\mathbf{n}$의 끝에서 볼 때 시계 반대 방향). $\blacksquare$

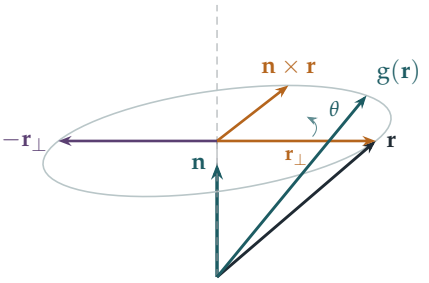


그림 7.5.1 로드리게스 공식. 벡터 $\mathbf{r}$은 축 $\mathbf{n}$ 방향의 성분과, 이에 수직이면서 원을 그리는 성분 $\mathbf{r}_\perp$로 나뉜다. $\mathbf{n}$과 외적하면 $\mathbf{r}_\perp$가 90° 회전하고(호박색), 두 번 외적하면 $-\mathbf{r}_\perp$가 된다(자주색). 회전된 벡터 $g(\mathbf{r})$는 $\mathbf{r}_\parallel + \cos\theta\,\mathbf{r}_\perp + \sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$이다.

3단계 반사

잠깐, 직접 해 보기 소문항 (i)의 결과를 이용하여 $h(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2f(f(\mathbf{s}))$를 간단히 하라. 이 변환은 $\mathbf{n}$ 방향의 벡터와 $\mathbf{n}$에 수직인 벡터를 각각 어떻게 바꾸는가?

$h(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2\big((\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n} - \mathbf{s}\big) = \mathbf{s} - 2(\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n}$이다. $\mathbf{n}$에 수직인 벡터는 변하지 않고, $h(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$이다. 따라서 h는 **원점을 지나고 $\mathbf{n}$에 수직인 평면에 대한 반사(reflection)**이다. ■

돌아보기

- **평행 성분과 수직 성분으로 분해하라.** $\mathbf{r}$을 $\mathbf{n}$ 방향의 성분과 이에 수직인 성분으로 나누자 모든 단계가 명확해졌다.
- **선형성이 일을 줄여 준다.** 선형사상(linear map)이 무엇인지 알아내려면, 잘 고른 몇 개의 벡터에 그것이 어떻게 작용하는지만 알면 충분하다.
- **복소수와의 유사성.** $\mathbf{n}$에 수직인 벡터에 대해 f는 i를 곱하는 것처럼 작용한다. 즉 $f^2 = -1$이고 $g = \cos\theta + \sin\theta\, f$이다.

숨은 수학

오일러의 회전 정리

원점을 고정하는 3차원 공간의 모든 회전은 원점을 지나는 어떤 축을 중심으로 한 회전이다. 오일러(Euler)는 1775년에 이를 증명하였다. 행렬의 언어로 말하면, 모든 3×3 회전 행렬은 고윳값(eigenvalue)이 1인 고유벡터(eigenvector)를 가지며, 그것이 바로 축이다.

로드리게스 공식은 그 역(converse)을 준다. 모든 축 $\mathbf{n}$과 각 θ에 대해 회전행렬은

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{K} + (1-\cos\theta)\,\mathbf{K}^2, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

이다. 여기서 $\mathbf{K}$는 $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$의 행렬이다. $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$이므로 지수 급수(exponential series) $e^{\theta\mathbf{K}} = \mathbf{I} + \theta\mathbf{K} + \frac{\theta^2}{2!}\mathbf{K}^2 + \cdots$는 정확히 이 공식으로 정리되며, 이것은 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$의 3차원 버전이다. 회전과 "무한소 회전" $\mathbf{K}$의 지수 사이의 이러한 연결은 **리 군**(*Lie groups*) 이론의 출발점이다.

회전은 교환법칙을 만족하지 않는다

책을 평평하게 들고, 수직축을 중심으로 90° 돌린 다음 수평축을 중심으로 90° 돌려 보자. 그다음 처음부터 다시 시작하여 두 회전을 반대 순서로 해 보자. 책은 서로 다른 위치에 놓이게 된다. 2차원과 달리 3차원에서는 회전의 합성에 대해 교환법칙이 성립하지 않는다. 이것이 Section 6.7의 사원수(quaternion)가 유용한 이유 중 하나이다. $\mathbf{n}$을 축으로 하는 θ만큼의 회전은 사원수 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k})$에 대응하고, 회전의 합성은 사원수의 곱셈이 되며, 비가환성도 그 안에 자연스럽게 담겨 있다. 로드리게스 자신도 1840년 논문에서, 해밀턴(Hamilton)이 사원수를 발명하기 3년 전에 이미 회전의 합성 공식을 찾아냈다.

사고 기술

불변(invariant)인 부분으로 나누기

변환을 이해하려면, 공간을 그 변환이 단순하게 다루는 조각들로 나누라. 여기서는 축(그대로 둔다)과 그에 수직인 평면(회전시킨다)이다.

이는 Section 7.2의 고유벡터와 같은 아이디어이다. 변환이 보존하는 부분공간(subspace)을 찾고, 각 조각 위에서 변환을 살펴보는 것이다.

더 도전하기

1 **평면에서의 회전.** STEP III 2017, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/17-s3-q2`)를 풀어 보라. 이 문제는 복소수를 이용하여, 평면의 두 회전을 합성하면 한 가지 예외를 제외하고 회전이 됨을 보인다. 그 예외를 찾고, 그때 합성이 무엇이 되는지 구하라.

2 **특정한 회전.** $(1,1,1)$ 방향의 축을 중심으로 $120°$만큼 회전하는 변환의 행렬을 구하라. 이 변환이 좌표축들을 순환적으로 치환함을 보여라.

3 **$\mathbf{K}$의 거듭제곱.** $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$이고 $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$임을 보이고, 지수 급수로부터 로드리게스 공식을 유도하라.

4 **두 반사가 회전을 만든다.** 서로 각 α를 이루며 원점을 지나는 두 평면에 대해 차례로 반사하는 것은, 두 평면의 교선을 축으로 하는 2α만큼의 회전임을 보여라.

더 읽을거리

- **Simon Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*** (Dover). 3차원 회전에 관한 결정판 저서로, 로드리게스의 기여도 다룬다.
- **Simon Altmann, "Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal"**, *Mathematics Magazine* 62 (1989). 짧고 생생한 역사 이야기이다.
- **John Stillwell, *Naive Lie Theory*** (Springer). 학부생을 위한 회전, 사원수, 리 군 입문서이다.

7.6 쌍곡 회전과 상대성 이론

문제

STEP III 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/91-s3-q6`

도입

회전행렬(rotation matrix) $\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}$은 점을 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위에서 돌려 옮기고, u만큼 회전한 뒤 w만큼 회전하는 것은 $u + w$만큼 회전하는 것과 같다. 여기서 cos와 sin을 cosh와 sinh로 바꾸고 부호 하나를 조정하면 이 문제의 행렬을 얻는다. 이 행렬은 점을 원 대신 쌍곡선(hyperbola) $x^2 - y^2 = 1$을 따라 옮기며, 역시 "각"을 더한다. 이것이 **쌍곡회전**(*hyperbolic rotation*)이다.

이것은 단순한 호기심거리가 아니다. x를 시간, y를 거리로 보면(빛의 속력이 1이 되는 단위에서), 이 행렬은 **로렌츠 부스트**(*Lorentz boost*)가 된다. 즉 아인슈타인(Einstein)의 특수상대성이론(special relativity)에서 발견된, 서로에 대해 일정한 속도로 움직이는 두 관찰자의 측정값 사이의 변환이다. "쌍곡각(hyperbolic angle)" u는 **신속도**(*rapidity*)이며, 신속도가 더해진다는 사실이 Section 3.8에서 만난 기묘한 속도 덧셈 법칙을 설명해 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$에 대응하여 $\cosh u$와 $\sinh u$가 만족하는 항등식(identity)은 무엇인가? 또 $\cosh(u + v)$와 $\sinh(u + v)$의 덧셈정리(addition formula)는 무엇인가?

$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$이고,

$$\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v,$$
$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v.$$

이 식들은 정의 $\cosh u = \tfrac{1}{2}(e^u + e^{-u})$와 $\sinh u = \tfrac{1}{2}(e^u - e^{-u})$로부터 확인할 수 있다. $(\cos v, \sin v)$가 원 위에 있는 것과 마찬가지로, 점 $(\cosh v, \sinh v)$는 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위에 있다.

차근차근 풀기

1단계 쌍곡선은 불변이다

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (x\cosh u + y \sinh u)^2 - (x \sinh u + y \cosh u)^2 \\ &= (x^2 - y^2)(\cosh^2 u - \sinh^2 u) = x^2 - y^2, \end{aligned}$$

교차항 $2xy \cosh u \sinh u$가 서로 소거되기 때문이다. 따라서 T는 $x^2 - y^2$을 보존하며, 특히 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$을 자기 자신으로 보낸다. ■

> **생각해 보기** 원점을 지나는 직선 가운데 자기 자신으로 옮겨지는 것은 어느 것인가? (고유벡터(eigenvector)를 찾아보라.)

$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (\cosh u + \sinh u)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = e^u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$이고 $T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = e^{-u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$이다. 따라서 직선 $y = x$와 $y = -x$는 각각 자기 자신으로 옮겨진다. 하나는 e^u배로 늘어나고, 다른 하나는 e^{-u}배로 줄어든다. 이 두 직선은 쌍곡선의 점근선(asymptote)이다. ■

2단계 쌍곡각의 덧셈

기울기(gradient)가 $\tanh v$인 직선은 방향벡터(direction vector) $(\cosh v, \sinh v)$를 갖는다. 그 상의 방향은

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\ \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v\\ \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\ \sinh(u+v)\end{pmatrix},$$

이고, 이 벡터의 기울기는 $\tanh(u+v)$이다. 선형사상(linear map)은 평행한 직선을 평행한 직선으로 보내므로, 이 결과는 직선이 원점을 지나든 지나지 않든 성립한다. 따라서 $v' = v + u$이다. ■

3단계 각은 언제 보존되는가?

생각해 보기 기울기가 m_1, m_2인 두 직선 사이의 각 ψ는 $\tan\psi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$를 만족한다. $m_i = \tanh v_i$일 때 이 식을 간단히 하라. (**힌트**: 모든 것을 $\cosh v_1 \cosh v_2$를 분모로 하여 나타내라.)

$\tanh v_1 - \tanh v_2 = \dfrac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$와 $1 + \tanh v_1 \tanh v_2 = \dfrac{\cosh(v_1 + v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$를 이용하면

$$\tan\psi = \left|\frac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh(v_1 + v_2)}\right|.$$

변환 후 $v_1 - v_2$는 변하지 않고, $v_1 + v_2$는 $v_1 + v_2 + 2u$가 된다.

잠깐, 직접 해 보기 $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$는 언제 성립하는가?

두 직선이 평행하지 않다고($v_1 \neq v_2$) 가정하면, 두 각이 같을 필요충분조건은 $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$이다. cosh는 우함수(even function)이고 $[0, \infty)$에서 순증가하므로, 이는 $v_1 + v_2 = \pm(v_1 + v_2 + 2u)$를 뜻한다. 양의 부호이면 $u = 0$이 되는데 이는 제외되므로,

$$v_1 + v_2 = -u. \qquad \blacksquare$$

4단계 그림으로 보기

$v_1 + v_2 = -u$일 때, 변환된 각은 $v_1' = v_1 + u = -v_2$와 $v_2' = v_2 + u = -v_1$이다. 따라서 ℓ_1의 상은 기울기가 $-\tanh v_2$이다. 즉 ℓ_1의 상은 ℓ_2를 x축에 대하여 대칭이동한 것이고, ℓ_2의 상은 ℓ_1을 대칭이동한 것이다. 원점을 지나는 직선의 경우, 이 변환은 두 직선을 맞바꾸고 대칭이동하므로, 두 직선 사이의 각이 변하지 않는 이유가 설명된다(그림 7.6.1).

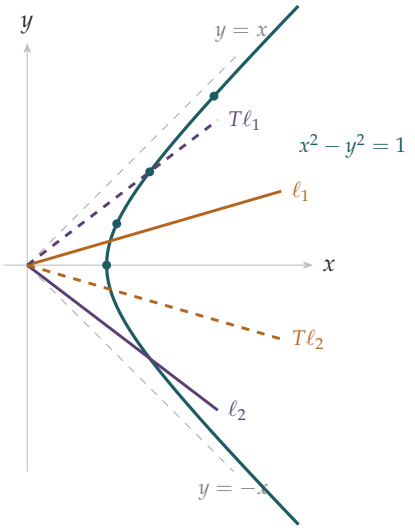


그림 7.6.1 $u = 0.7$인 쌍곡회전을 원점을 지나는 직선 ℓ_1, ℓ_2($v_1 = 0.3$, $v_2 = -1.0$)에 적용한 모습으로, $v_1 + v_2 = -u$가 성립한다. ℓ_1의 상(자주색 점선)은 ℓ_2의 거울상이고, ℓ_2의 상(호박색 점선)은 ℓ_1의 거울상이므로, 두 직선 사이의 각이 보존된다. 쌍곡선 위의 청록색 점들은 쌍곡각으로 같은 간격($v = 0, 0.5, 1, 1.5$)에 놓여 있으며, T는 각 점을 쌍곡선을 따라 0.7만큼 더 나아간 점으로 옮긴다.

돌아보기

- **불변 이차형식.** 회전이 $x^2 + y^2$을 보존하듯이, T는 $x^2 - y^2$을 보존한다. 이를 불변 이차형식(invariant quadratic form)이라 한다.
- **고유벡터는 점근선이다.** 변하지 않는 직선은 $y = \pm x$이며, 각각 $e^{\pm u}$배로 늘어나고 줄어든다.
- **쌍곡각은 더해진다.** 방향을 $\tanh v$로 매개화하자 T의 작용이 단순한 덧셈 $v \mapsto v + u$가 되었다.

숨은 수학

특수상대성이론

아인슈타인의 특수상대성이론(1905)에서, 서로에 대해 일정한 속도로 움직이는 관찰자들은 시간과 거리에 대해서는 서로 다른 값을 얻지만, 양 $t^2 - x^2$(빛의 속력 $c = 1$)에 대

해서는 모두 같은 값을 얻는다. 이 양을 **시공간 간격**(*spacetime interval*)이라 한다. 이것을 보존하는 변환이 **로렌츠 변환**(*Lorentz transformation*)이며, 공간이 1차원일 때 이 변환은 x를 시간, y를 거리로 볼 때 정확히 이 문제의 행렬들이다. 속도 $v = \tanh u$로 움직이는 관찰자는 우리 좌표와 이 행렬로 연결되는 좌표를 사용하며, 이때 $\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$은 시간 지연(time dilation)의 유명한 인자 γ이다. 1908년 민코프스키(Hermann Minkowski)는 이로써 시공간이 부호에 음수가 섞인 "거리"를 갖는 4차원 기하가 된다는 것을 간파했다. "이제부터 공간 그 자체와 시간 그 자체는 단순한 그림자로 사라질 운명이다."

문제의 물리적 의미

- **불변 직선** $y = \pm x$는 광선의 경로이다. 이 직선들은 모든 관찰자에게 같다. 빛의 속력이 누구에게나 같다는 것, 이것이 상대성이론의 기본 원리이다.
- **쌍곡선** $x^2 - y^2 = 1$은 가능한 모든 일정한 속도로 움직이는 관찰자들이 측정했을 때 원점으로부터 "고유시간(proper time)" 한 단위만큼 떨어진 사건들의 집합이다.
- **신속도의 덧셈.** 원점을 지나고 기울기가 $\tanh v$인 직선은 속도 $\tanh v$로 움직이는 물체의 경로이다. 신속도 u만큼 부스트하면 그 속도는 $\tanh(v+u) = \frac{\tanh v + \tanh u}{1 + \tanh v \tanh u}$로 바뀌는데, 이것이 바로 Section 3.8에서 본 아인슈타인의 속도 덧셈 공식이다. 속도는 더해지지 않지만, 신속도는 더해진다.

그리고 Section 5.8에서 우리는 같은 덧셈 공식을 푸앵카레 원판(Poincaré disc)의 거리 규칙으로 만났다. 상대성이론에서 가능한 속도들의 집합은 신속도로 측정하면 쌍곡공간(hyperbolic space)이 된다.

사고 기술

알맞은 매개화를 찾아라

변환이 단순해지는 매개변수로 대상을 나타내라.

방향을 기울기로 나타내면 T는 복잡한 식으로 작용하지만, 기울기가 $\tanh v$가 되도록 v로 나타내면 단순히 u를 더할 뿐이다. 같은 아이디어로 각을 쓰면 회전이 단순해졌고, Section 2.8에서는 사상 $x \mapsto x^2 - 2$가 단순해졌다. 이런 방법을 매개화(parametrisation)라 한다.

더 도전하기

1 **부스트의 합성.** $T(u)$가 문제의 행렬일 때 $T(u)T(w) = T(u+w)$임을 보여라. $T(u)^{-1}$은 무엇인가?

2 **시간 지연.** 우주선이 빛의 속력의 0.8배로 날아간다. 신속도 u와 $\cosh u$를 구하라. 지구에서 10년이 흐르면 우주선에서는 시간이 얼마나 흐르는가? ($t_{\text{우주선}} = t_{\text{지구}} / \cosh u$를 이용하라.)

3 **쌍곡 넓이.** 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$, x축, 그리고 원점에서 $(\cosh v, \sinh v)$까지의 선분으로 둘러싸인 넓이가 $\frac{v}{2}$임을 보여라. 이는 원에서 대응하는 넓이가 $\frac{\theta}{2}$인 것과 같다. T가 이러한 넓이를 보존해야 하는 이유는 무엇인가?

4 **압착.** 좌표를 $p = x + y$, $q = x - y$로 바꾸어라. T가 $p \mapsto e^{u}p$, $q \mapsto e^{-u}q$가 되고, 쌍곡선이 $pq = 1$이 됨을 보여라. 이 좌표에서 변환을 기하적으로 설명하라.

더 읽을거리

- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman). 신속도와 시공간 도표로 설명하는 특수상대성이론으로, A 레벨(A level, 영국의 대학 입학 자격 시험) 수학을 갖춘 학생을 대상으로 한다.
- **Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity*** (CRC Press). 상대성이론을 쌍곡 삼각법으로 다루며, 이 절의 정신과 꼭 맞는다.
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory*** (여러 판). 아인슈타인 자신이 쓴 대중 해설서로, 지금도 매우 읽기 쉽다.

7.7 결코 변하지 않는 양

문제

STEP III 2024, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

도입

물리학에서 가장 깊은 사실들 가운데 일부는 **보존 법칙**(*conservation laws*)이다. 운동이 아무리 복잡해도 에너지, 운동량, 각운동량은 변하지 않는다. 계에 보존량이 충분히 많으면 그 운동을 정확히 풀 수 있고, 너무 적으면 운동이 혼돈적일 수 있다.

이 문제는 보존량을 만들어 내는 놀라운 방법을 보여 준다. 행렬이 시간에 따라 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$에 따라 변하면, 성분들이 아무리 크게 요동쳐도 대각합(trace)과 행렬식(determinant), 따라서 고유값(eigenvalues)은 결코 변하지 않는다. 이러한 쌍 $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$을 **랙스 쌍**(*Lax pair*)이라 한다. 이 이름은 피터 랙스(Peter Lax)에게서 왔는데, 그는 서로를 통과한 뒤에도 모양이 변하지 않는 고립파인 **솔리톤**(*solitons*)의 놀라운 성질을 설명하기 위해 1968년에 이 아이디어를 도입하였다.

시작하기 전에

생각해 보기 식 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$을 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{N}$의 **교환자**(*commutator*)라 한다. 이것은 언제 0이 되는가? 소문항 (i)을 이용하면 그 대각합은 얼마인가?

교환자는 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{N}$이 교환 가능할 때, 그리고 그때에만 0이다. 또 소문항 (i)에 의해 그 대각합은 언제나 $\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) - \mathrm{tr}(\mathbf{NM}) = 0$이다. 이 하나의 사실이 이 문제에 나오는 모든 보존 법칙의 출발점이다.

차근차근 풀기

1단계 대각합

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 $\mathbf{MN}$의 대각 성분은 $ap + br$와 $cq + ds$이므로 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds$이다. $\mathbf{M}$과 $\mathbf{N}$의 역할을 바꾸면 $pa + qc + rb + sd$가 되어 같은 값이다. $\operatorname{tr}(\mathbf{M}+\mathbf{N}) = \operatorname{tr}\mathbf{M} + \operatorname{tr}\mathbf{N}$임은 분명하다. ■

2단계 행렬식의 도함수

> **생각해 보기** 곱의 미분법(product rule)으로 $\det\mathbf{M} = ad - bc$를 미분하여라. 그 다음 $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$를 이용하여 $\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$와 그 대각합을 계산하여라.

도함수를 점으로 나타내면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \dot{a}d + a\dot{d} - \dot{b}c - b\dot{c}$이다. 또

$$\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix}$$

의 대각 성분은 $\frac{d\dot{a}-b\dot{c}}{\det\mathbf{M}}$와 $\frac{-c\dot{b}+a\dot{d}}{\det\mathbf{M}}$이다. 이 둘의 합은 $\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M}$이다. ■

3단계 세 가지 보존량

> **생각해 보기** $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$의 대각합을 구하여라. 행렬식에 대해서는 소문항 (ii)를 이용하여라. $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})$은 무엇인가?

대각합: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}\mathbf{M} = \operatorname{tr}\dot{\mathbf{M}} = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$.

행렬식: 소문항 (ii)에 의해

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}\mathbf{N} = 0,$$

이다. 여기서 소문항 (i)을 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{NM})) = \operatorname{tr}((\mathbf{NM})\mathbf{M}^{-1}) = \operatorname{tr}\mathbf{N}$의 꼴로 이용하였다.

제곱의 대각합: $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = (\operatorname{tr}\mathbf{M})^2 - 2\det\mathbf{M}$이고(Section 7.4 참고), 두 항이 모두 상수이므로 이 값도 상수이다. ■

4단계 명시적인 해

잠깐, 직접 해 보기 $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$일 때 $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{E}$로 놓고 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$을 계산한 다음, a, b, c, d에 대한 미분방정식(differential equations)을 써라. 이를 c, 그다음 a와 d, 그다음 b의 순서로 풀어라.

$t\mathbf{I}$ 부분은 모든 행렬과 교환 가능하므로 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t(\mathbf{ME} - \mathbf{EM})$이다. 이제 $\mathbf{ME} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\mathbf{EM} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$$\dot{a} = -tc, \qquad \dot{b} = t(a - d), \qquad \dot{c} = 0, \qquad \dot{d} = tc.$$

따라서 $c = C$는 상수이다. 그러면 $a = A - \frac{1}{2}Ct^2$, $d = D + \frac{1}{2}Ct^2$이고, 이어서 $\dot{b} = t(A - D - Ct^2)$이므로 $b = B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4$이다. 그러므로

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{2}Ct^2 & B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4 \\ C & D + \frac{1}{2}Ct^2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

확인: 대각합은 $A + D$이고, 행렬식은 $(A - \frac{1}{2}Ct^2)(D + \frac{1}{2}Ct^2) - C\big(B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4\big) = AD - BC$로, 예상대로 상수이다(그림 7.7.1).

5단계 다른 방정식

생각해 보기 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$이면 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$이고, 소문항 (ii)에 의해 $\operatorname{tr}\mathbf{N}$은 $\det\mathbf{M}$의 로그 도함수(logarithmic derivative)이다. $\mathbf{M}$의 행렬식은 변하면서 대각합은 일정하게 유지될 수 있는가?

물론 가능하다. $|t| < 1$에 대하여 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$로 놓자(이때 $\det\mathbf{M} = 1 - t^2 \neq 0$). 그 대각합은 항상 2이다. $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$으로 정의하면 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$이고

$$\mathbf{N} = \frac{1}{1 - t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - t^2}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix},$$

이다. 이 행렬은 정칙(non-singular)이고, $t \neq 0$일 때 $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \frac{-2t}{1-t^2} \neq 0$이다. 따라서 답은 **아니다**. $\operatorname{tr}\mathbf{N}$이 반드시 0일 필요는 없다. $\blacksquare$

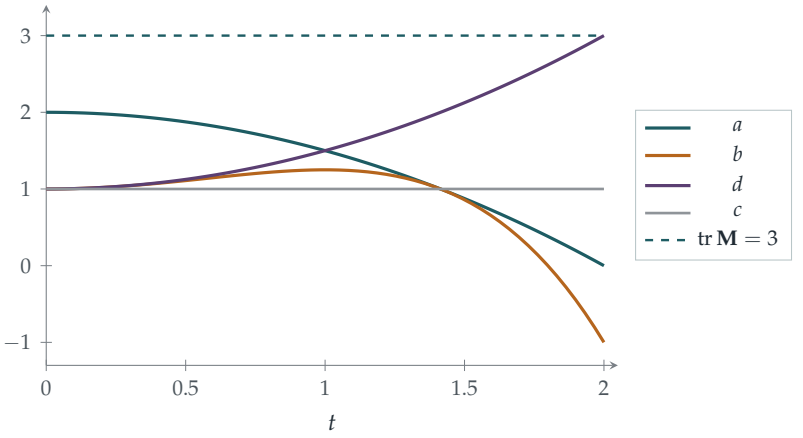


그림 7.7.1 단계 4에서 $A = 2, B = 1, C = 1, D = 1$로 둔 $\mathbf{M}(t)$의 성분들. 네 성분 가운데 c를 제외한 모든 성분이 변하지만, 대각합은 줄곧 3, 행렬식은 줄곧 1로 유지된다. 따라서 고유값 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$는 결코 변하지 않는다. 즉 이 흐름은 **등스펙트럼**(*isospectral*) 흐름이다.

돌아보기

- **교환자의 대각합은 0이다.** $\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{tr}(\mathbf{NM})$으로부터 모든 보존 법칙이 따라 나왔다.
- **로그 도함수.** 소문항 (ii)는 행렬식의 도함수를 대각합으로 바꾸어 주었는데, 대각합은 선형이어서 다루기 쉽다.
- **명시적인 해에서 보존을 확인한다.** $\mathbf{M}(t)$의 식은 그 대각합과 행렬식이 상수임을 확인하는 방법으로 검산하였다.

숨은 수학

솔리톤과 랙스 쌍

1834년 스코틀랜드의 공학자 John Scott Russell은 에든버러 근처의 유니언 운하(Union Canal)를 따라 나아가는 고립파 하나를 말을 타고 1마일 넘게 쫓아갔는데, 그 파동은 모양을 잃지 않았다. 이러한 파동은 **코르테베흐-드프리스**(*Korteweg–de Vries, KdV*) **방정식**으로 기술되며, 1960년대에 Norman Zabusky와 Martin Kruskal의 컴퓨터 실험은 이러한 "솔리톤" 두 개가 마치 입자처럼 충돌한 뒤에도 변하지 않은 채로 빠져나올 수 있음을 보여 주었다. 이를 설명하려면 무한히 많은 보존량이 필요했다. 피터 랙스는 1968년에 KdV 방정식을 한 쌍의 미분 연산자(differential operators) L과 P에 대하여 $\dot{L} = LP - PL$로 쓸 수

있음을 보였다. 그러면 이 문제에서와 똑같이 L의 고유값이 보존되고, 이 고유값들이 무한히 많은 보존 법칙을 준다. 랙스 쌍을 갖는 계를 **적분가능계**(*integrable*)라 하며, 이들은 정확히 풀 수 있는 몇 안 되는 비선형(nonlinear) 계에 속한다.

등스펙트럼 흐름

$\mathbf{M}$의 대각합과 행렬식이 그 특성다항식(characteristic polynomial) $\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\lambda + \det\mathbf{M}$을 결정하므로, $\mathbf{M}$의 고유값은 시간에 따라 변하지 않는다. 흐름 $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}]$은 $\mathbf{M}$을 고유값이 고정된 행렬들의 집합 안에서 움직인다. 실제로 해는 언제나 어떤 가역(invertible) 행렬 $\mathbf{S}(t)$에 대하여 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{M}(0)\mathbf{S}(t)$의 꼴이다. 즉 행렬은 처음 값과 계속 닮음(similar)이다. 같은 아이디어가 물리학 전반에 흐른다. 양자역학에서 관측가능량 $\mathbf{A}$는 $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$에 따라 변하는데, 여기서 $\mathbf{H}$는 에너지이므로 에너지와 교환 가능한 것은 무엇이든 보존된다.

야코비 공식

소문항 (ii)는 임의의 크기의 가역행렬에 대하여 성립하며, 이를 **야코비**(*Jacobi*) **공식**(*Jacobi's formula*)이라 한다. $\det\mathbf{M}$이 음수일 수도 있으므로 로그 없이 $\frac{d}{dt}\det\mathbf{M} = \det\mathbf{M}\,\operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$로 쓰는 것이 가장 안전하다. 로그 꼴 $\frac{d}{dt}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$은 $\det\mathbf{M} > 0$이어야 한다(일반적으로는 $\ln|\det\mathbf{M}|$을 쓴다). 그 결과 하나로, 상수 행렬 $\mathbf{A}$에 대하여 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$이면 $\det\mathbf{M}(t) = e^{t\operatorname{tr}\mathbf{A}}\det\mathbf{M}(0)$이다. 미분방정식 연구에서 이것은 위상 공간(phase space)의 부피가 어떻게 늘어나거나 줄어드는지 알려 준다. 고전역학의 방정식에서는 대각합이 0이어서 부피가 보존되는데, 이 결과를 **리우빌**(*Liouville*) **정리**(*Liouville's theorem*)라 한다.

사고 기술

> **변하지 않는 것을 찾아라**
>
> 무언가가 변해 갈 때, 그것으로 만든 양 가운데 일정하게 유지되는 것을 찾아라. 그러한 양은 운동을 제약하고, 종종 그 구조를 드러낸다.
>
> 여기서는 변화율이 교환자였기 때문에 대각합과 행렬식이 보존되었다. 역학에서 보존량은 대칭성에서 나오며(뇌터(Noether) 정리(Noether's theorem)), 이를 찾는 것이 종종 문제를 푸는 첫걸음이 된다.

더 도전하기

1 **해를 확인하기.** 단계 4의 행렬 $\mathbf{M}(t)$가 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$을 만족함을 미분하여 확인하여라.

2 **닮음.** $\mathbf{M}_0$이 상수이고 $\mathbf{S}(t)$가 $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{SN}$을 만족할 때 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S}$이면 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$임을 보여라. (힌트: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$.)

3 **부피의 증가.** $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$라 하자. $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$을 만족하는 $\mathbf{N}$을 구하고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\mathbf{N}$임을 확인하여라.

4 **더 높은 거듭제곱.** $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$일 때, 모든 양의 정수 k에 대하여 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = 0$임을 직접 보여라.

더 읽을거리

- **P. G. Drazin & R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*** (Cambridge University Press). 랙스 쌍을 포함하여 솔리톤을 다루는 대표적인 학부 입문서이다.
- **Thierry Dauxois & Michel Peyrard, *Physics of Solitons*** (Cambridge University Press). Scott Russell이 본 파동의 이야기가 실려 있다.
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem*** (Johns Hopkins University Press). 대칭성이 어떻게 보존 법칙을 낳는지 설명한다.

7.8 네 제곱수

문제

STEP III 1994, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/94-s3-q8`

도입

7은 두 제곱수(square)의 합으로도, 세 제곱수의 합으로도 나타낼 수 없다. 그러나 네 제곱수의 합으로는 나타낼 수 있다: $7 = 4 + 1 + 1 + 1$. 1770년 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange)는 **모든** 양의 정수가 네 제곱수의 합(0^2도 허용한다)임을 증명하였다. 이 정리는 1621년 바셰(Bachet)가 추측하였고, 페르마(Fermat)도 이를 주장하였지만 늘 그렇듯 증명을 남기지 않았다. 오일러(Euler)는 40년 동안 이 문제에 매달렸으나 끝내 완성하지 못하였다.

핵심 도구는 1748년 오일러가 발견한 것으로, 바로 이 문제에 담겨 있다. 네 제곱수의 합 두 개를 곱한 것은 다시 네 제곱수의 합이라는 사실이다. 따라서 라그랑주의 정리는 소수(prime)에 대해서만 증명하면 되고, 나머지는 곱셈으로 따라 나온다. 이 문제는 복소수(complex number) 행렬의 행렬식(determinant)으로부터 몇 줄 만에 이 항등식을 유도하는데, 이 행렬들은 사실 Section 6.7의 사원수(quaternion)가 모습을 바꾼 것이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 두 제곱수 버전을 떠올려 보자. 복소수 $z = a + bi$, $w = p + qi$에 대하여 $|z|^2|w|^2 = |zw|^2$이므로 $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2)$은 두 제곱수의 합이다. 행렬을 이용하면 이것을 어떻게 네 제곱수로 확장할 수 있을까?

아이디어는 네 실수로 만들어지는 일종의 "수"로서, 그 "크기의 제곱"이 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$이고 곱셈적(multiplicative)인 것을 찾는 것이다. 행렬은 행렬식에 대하여 곱셈적이다: $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$. 그러므로 a, b, c, d로 만든 행렬로서 행렬식이 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$이

고, 그러한 행렬끼리의 곱이 다시 같은 꼴이 되는 것을 찾으면 된다.

차근차근 풀기

1단계 행렬식은 네 제곱수의 합이다

생각해 보기 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$의 행렬식은 무엇인가? $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$이면 이를 a, b, c, d로 나타내면 어떻게 되는가?

$\det = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$이다. 마찬가지로 $z_3 = p + q\mathrm{i}$, $z_4 = r + s\mathrm{i}$로 두면 두 번째 행렬의 행렬식은 $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$이다.

2단계 곱도 같은 꼴이다

곱하면

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -z_4^* & z_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_3 - z_2 z_4^* & z_1 z_4 + z_2 z_3^* \\ -z_2^* z_3 - z_1^* z_4^* & -z_2^* z_4 + z_1^* z_3^* \end{pmatrix}.$$

$w_1 = z_1 z_3 - z_2 z_4^*$, $w_2 = z_1 z_4 + z_2 z_3^*$으로 두면 아래 행은 $(-w_2^*, w_1^*)$이므로, 곱은 $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2^* & w_1^* \end{pmatrix}$로 같은 꼴이다. 이 행렬의 행렬식은 $|w_1|^2 + |w_2|^2$이고, 행렬식은 곱에 대하여 곱해지므로

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = |w_1|^2 + |w_2|^2.$$

3단계 네 제곱수 읽어 내기

잠깐, 직접 해 보기 $w_1 = (a + b\mathrm{i})(p + q\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i})(r - s\mathrm{i})$와 $w_2 = (a + b\mathrm{i})(r + s\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i})(p - q\mathrm{i})$를 전개하여 실수부와 허수부로 나누어 보아라.

$$w_1 = (ap - bq - cr - ds) + \mathrm{i}(aq + bp + cs - dr),$$
$$w_2 = (ar - bs + cp + dq) + \mathrm{i}(as + br - cq + dp).$$

따라서

$$L_1 = ap - bq - cr - ds, \qquad L_2 = aq + bp + cs - dr,$$
$$L_3 = ar - bs + cp + dq, \qquad L_4 = as + br - cq + dp,$$

은 각각 a,b,c,d에 대해서도, p,q,r,s에 대해서도 일차식이며, $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)=L_1^2+L_2^2+L_3^2+L_4^2$이다. ■

예를 들어 $7=2^2+1^2+1^2+1^2$이고 $3=1^2+1^2+1^2+0^2$이다. $(a,b,c,d)=(2,1,1,1)$, $(p,q,r,s)=(1,1,1,0)$으로 두면 위 공식에서 $(L_1,L_2,L_3,L_4)=(0,2,4,1)$을 얻고, 실제로 $0^2+2^2+4^2+1^2=21=7\times 3$이다.

돌아보기

- **곱셈성이 일을 다 한다.** 이 항등식은 $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$에서 나왔으며, 이는 두 제곱수 항등식이 $|zw|=|z||w|$에서 나오는 것과 똑같다.
- **곱셈에 대하여 닫혀 있음(closure).** 특별한 꼴 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$은 곱해도 유지되며, 바로 이 때문에 결과가 다시 네 제곱수의 합이 된다.
- **꼼꼼한 계산이 중요하다.** 마지막 단계는 기계적이지만 실수하기 쉽다. 부호와 켤레(conjugate)를 주의해서 다루어야 한다.

숨은 수학

라그랑주의 네 제곱수 정리

라그랑주의 증명의 개요는 다음과 같다. 오일러의 항등식에 의해 모든 소수 p가 네 제곱수의 합임을 보이면 충분하다. 개수 세기 논법으로 $m<p$인 어떤 배수 mp가 네 제곱수의 합임을 보인다. 그다음 교묘한 "강하법(descent)"으로, $1<m<p$인 mp가 네 제곱수의 합이면 더 작은 어떤 m'에 대하여 $m'p$도 네 제곱수의 합임을 보인다. 이를 반복하면 $m=1$에 도달한다. (Section 1.5의 페르마의 강하법과 비교해 보아라.) 1834년 야코비(Jacobi)는 훨씬 더 나아가 n을 네 제곱수의 합으로 나타내는 방법의 정확한 개수를 구하였다. 그 개수는 n의 약수(divisor) 중 4의 배수가 아닌 것들의 합의 8배이다. 예를 들어 1은 8가지 방법으로 나타낼 수 있다(네 자리 중 어느 한 곳에 ± 1).

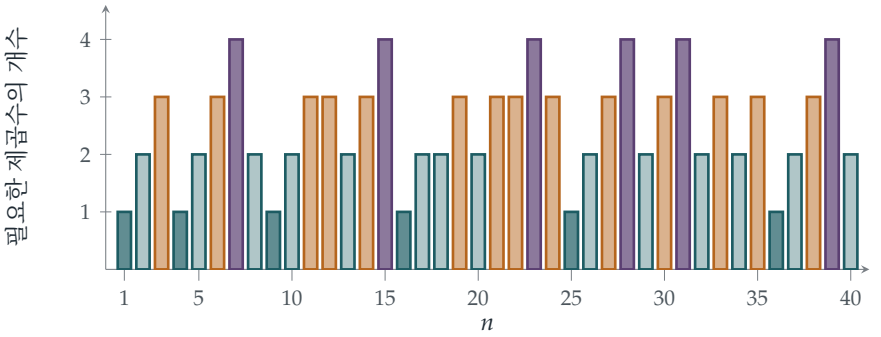


그림 7.8.1 1부터 40까지의 각 n을 만드는 데 필요한 제곱수의 최소 개수. 라그랑주의 정리에 의해 모든 수는 많아야 네 개면 된다. 네 개가 필요한 수(자주색)는 $7, 15, 23, 28, 31, 39, \ldots$이며, 르장드르(Legendre)와 가우스(Gauss)의 정리에 의해 정확히 $4^k(8m+7)$ 꼴의 수들이다.

둘, 셋, 넷

차원에 따른 양상은 미묘하다. 두 제곱수의 합은 복소수에서 나오며, 어떤 수가 두 제곱수의 합일 필요충분조건은 그 수의 $4k+3$ 꼴인 소인수가 모두 짝수 거듭제곱으로 나타나는 것이다(Section 1.6). 네 제곱수의 합은 사원수에서 나오며, 모든 수가 네 제곱수의 합이다. 그러나 세 제곱수의 합에는 곱셈 항등식이 전혀 없으며(크기가 곱셈적인 3차원 수 체계는 존재하지 않는다. 해밀턴(Hamilton)이 세 쌍으로 실패한 이유가 이것이다. Section 6.7 참고), 정리도 더 어렵다. 르장드르와 가우스는 $n = 4^k(8m+7)$이 아닌 한 n이 세 제곱수의 합임을 보였다(그림 7.8.1). 넷을 넘어서면 8차원의 팔원수(octonion)가 여덟 제곱수 항등식을 주는데, 이는 Degen과 Graves가 발견하였다. 후르비츠(Hurwitz)는 1898년에 이런 종류의 항등식이 1, 2, 4, 8개의 제곱수에 대해서만 존재함을 증명하였다.

워링의 문제

라그랑주의 정리는 1770년 워링(Edward Waring)이 제기한 질문의 첫 번째 경우이다. 각 k에 대하여, 모든 양의 정수가 많아야 $g(k)$개의 k제곱수의 합이 되는 수 $g(k)$가 존재하는가? 힐베르트(David Hilbert)는 1909년에 그러한 수가 존재함을 증명하였다. 오늘날 우리는 $g(2) = 4$, $g(3) = 9$(예를 들어 $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$은 세제곱수 아홉 개가 필요하다), $g(4) = 19$임을 알고 있다.

사고 기술

곱셈적인 구조를 찾아라

어떤 성질이 곱셈에 대하여 보존됨을 보이려면, 그 성질이 어떤 대상의 "크기"이고 그 크기가 곱셈적인 대수적 구조(복소수, 사원수, 행렬)를 찾아라.

그런 구조를 찾고 나면 곱셈 항등식은 저절로 얻어지고, 모든 수에 대한 문제가 소수에 대한 문제로 줄어든다.

더 도전하기

1 **계산 예제.** $(a,b,c,d) = (p,q,r,s) = (2,1,1,1)$로 두고 $L_1,\dots,L_4$의 공식을 이용하여 $49 = 7\times 7$을 네 제곱수의 합으로 나타내고, 답을 확인하여라. 이것은 자명한 $49 = 7^2+0^2+0^2+0^2$과 같은가?

2 **넷 속의 둘.** $c=d=r=s=0$이면 이 항등식이 Section 1.6의 두 제곱수 항등식으로 줄어듦을 보여라.

3 **네 제곱수가 필요한 수.** 제곱수를 8로 나눈 나머지를 생각하여, $8m+7$ 꼴의 수는 세 제곱수의 합이 될 수 없음을 보여라.

4 **야코비의 공식.** 2를 네 제곱수의 합으로 나타내는 방법(순서와 부호를 구별한다)의 수를 세고, 그 답이 $8\times(1+2) = 24$임을 확인하여라.

더 읽을거리

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic*** (Cambridge University Press). 제 V장에서 라그랑주의 네 제곱수 정리를 증명한다.
- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions*** (A. K. Peters). 사원수의 산술을 다루며, 사원수 정수를 이용한 네 제곱수 정리의 증명도 담고 있다.
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***, "Representing numbers as sums of two squares" 장(수를 두 제곱수의 합으로 나타내기). 이 절과 짝을 이루는 두 제곱수 이야기이다.

7.9 정다면체는 다섯 개뿐이다

문제

STEP III 1999, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/99-s3-q4`

도입

정다각형(regular polygon)은 무한히 많다. 정삼각형, 정사각형, 정오각형처럼 변의 개수마다 하나씩 있다. 그렇다면 정다면체(regular polyhedron)도 무한히 많으리라 생각할 수 있다. 하지만 정다면체는 정확히 다섯 개뿐이다. 정사면체(tetrahedron), 정육면체(cube), 정팔면체(octahedron), 정십이면체(dodecahedron), 정이십면체(icosahedron)가 그것이다. 플라톤(Plato)은 이 중 넷을 원소(불, 흙, 공기, 물)에, 다섯 번째를 우주에 대응시켰다. 지금까지 쓰인 수학책 가운데 가장 큰 영향을 끼친 유클리드(Euclid)의 **원론**(Elements)은 이 밖에 다른 정다면체가 없다는 증명으로 끝맺는다. 케플러(Kepler)는 정다면체로 태양계의 모형을 만들기도 했다.

이 문제는 1750년에 오일러(Euler)가 발견한 놀라운 공식 하나로부터 이 분류를 단 몇 줄 만에 증명한다. 그 공식은 모든 볼록다면체(convex polyhedron)에 대하여 $V - E + F = 2$라는 것이다. 개수를 세는 공식이 도형에 관한 정리로 바뀌고, 수 2는 구의 지문과 같은 것으로 드러난다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 정육면체에서 오일러 공식을 확인해 보자. 꼭짓점, 모서리, 면은 각각 몇 개인가? 사각뿔에서는 어떠한가?

정육면체는 $V = 8$, $E = 12$, $F = 6$이고 $8 - 12 + 6 = 2$이다. 사각뿔은 꼭짓점 5개, 모서리 8개, 면 5개를 가지며 $5 - 8 + 5 = 2$이다. 이 공식은 구멍이 없는 다면체라면 아무리 불규칙하더라도 성립한다.

생각해 보기 정다면체에서 각 면은 m개의 모서리를 가지고, 각 모서리는 두 면에 접한다. 이로부터 E와 F 사이에 어떤 등식이 얻어지는가? 마찬가지로 E와 V 사이에는 어떠한가?

모서리와 면의 접속 관계를 두 가지 방법으로 세어 보자. F개의 면은 각각 m개의 모서리를 가지고, 각 모서리는 (두 면에서 한 번씩) 두 번 세어지므로 $mF = 2E$이다. 마찬가지로 각 꼭짓점에는 n개의 모서리가 모이고 각 모서리는 두 끝점을 가지므로 $nV = 2E$이다. 이처럼 "같은 것을 두 가지 방법으로 세는" 기법을 **이중 계산**(double counting)이라고 한다.

차근차근 풀기

1단계 F에 대한 공식

$mF = 2E$와 $nV = 2E$로부터 $E = \frac{mF}{2}$, $V = \frac{mF}{n}$이다. 이를 오일러 공식에 대입하면

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2 \quad\Longrightarrow\quad F\,\frac{2m - mn + 2n}{2n} = 2 \quad\Longrightarrow\quad F = \frac{4n}{2m + 2n - mn}.$$

또한 $4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn = h$이다. 따라서 $F = \frac{4n}{h}$이다. ■

2단계 m과 n은 어떤 값이 될 수 있는가?

생각해 보기 m(면의 변의 수)과 n(한 꼭짓점에 모이는 면의 수)의 가능한 최솟값은 각각 얼마인가? 또 $F > 0$이므로 h의 부호는 어떠해야 하는가?

다각형은 적어도 3개의 변이 필요하므로 $m \geq 3$이고, 입체의 각 꼭짓점에는 적어도 3개의 면이 모여야 하므로 $n \geq 3$이다. $F > 0$이므로 $h > 0$, 즉 $(n-2)(m-2) < 4$이어야 한다. 두 인수가 모두 1 이상이므로 $(m-2, n-2)$로 가능한 것은 $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$뿐이다.

잠깐, 직접 해 보기 다섯 가지 경우 각각에 대하여 h, F를 차례로 구하고, $E = \frac{mF}{2}$와 $V = \frac{mF}{n}$을 계산하라. 각각이 어떤 입체인지 확인하라.

m	n	h	F	E	V	입체
3	3	3	4	6	4	정사면체
3	4	2	8	12	6	정팔면체
4	3	2	6	12	8	정육면체
3	5	1	20	30	12	정이십면체
5	3	1	12	30	20	정십이면체

가능한 경우는 이것뿐이므로 정다면체는 많아야 다섯 개이다. 그리고 다섯 개 모두 실제로 존재한다(유클리드가 각각을 작도하는 방법을 보였다). ■

돌아보기

- **이중 계산.** 모서리와 면, 모서리와 꼭짓점의 접속 관계를 두 가지 방법으로 세어 $mF = 2E$와 $nV = 2E$를 얻었다.
- **양수 조건에서 나온 부등식.** $F > 0$이라는 단순한 조건이 무한히 많은 후보를 다섯 개로 줄였다.
- **존재성은 별개의 문제이다.** 이 논증은 정다면체가 *많아야* 다섯 개임을 보여 줄 뿐이다. 각각이 실제로 존재한다는 것은 직접 작도하여 확인해야 한다.

숨은 수학

오일러 공식과 위상수학

오일러는 1750년에 $V - E + F = 2$를 제시했지만 그의 증명에는 빈틈이 있었고, 이 공식에는 증명 시도와 반례와 수정이 이어진 흥미로운 역사가 있다. 가운데에 사각형 구멍이 뚫린 "액자" 모양 다면체는 $V - E + F = 0$이고, 두 정육면체를 한 꼭짓점에서 붙인 다면체는 $V - E + F = 3$이다. 임레 라카토슈(Imre Lakatos)는 이 역사를 바탕으로 수학적 개념이 반례를 통해 어떻게 다듬어지는지를 다룬 유명한 책 *Proofs and Refutations*(증명과 반박)를 썼다. 결론은 $V - E + F$가 위상수학의 느슨한 의미에서 곡면의 **모양**에만 의존한다는 것이다. 구로 변형할 수 있는 곡면에서는 2, 원환면(torus, 도넛 모양)에서는 0, 구멍이 g개인 곡면에서는 $2 - 2g$이다. 이 수, 곧 **오일러 지표**(Euler characteristic)는 늘이거나 구부려도 변하지 않는 성질을 연구하는 위상수학(topology)의 초창기 개념 가운데 하나였다.

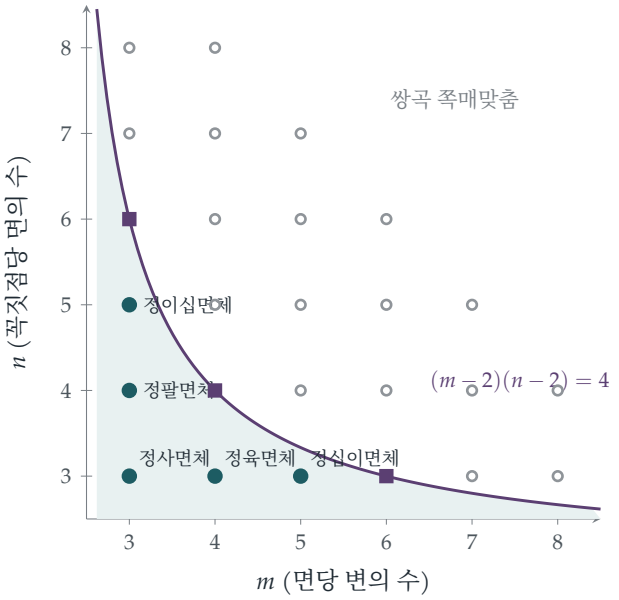


그림 7.9.1 $m, n \geq 3$인 가능한 순서쌍 (m, n). 곡선 $(m-2)(n-2) = 4$ 아래(색칠한 부분)에는 다섯 개의 플라톤 입체(청록색)가 있다. 곡선 위에는 평평한 평면의 세 가지 쪽매맞춤(자주색 사각형)이 있다. 정삼각형$(m = 3, n = 6)$, 정사각형$(4, 4)$, 정육각형$(6, 3)$에 의한 쪽매맞춤이다. 곡선보다 위에 있는 모든 점(속이 빈 원)은 쌍곡평면의 정규 쪽매맞춤을 준다.

구를 넘어서

$h = 0$이거나 $h < 0$이면 어떻게 될까? $(m-2)(n-2) = 4$일 때는 해가 $(3,6)$, $(4,4)$, $(6,3)$의 세 개이다. 정삼각형 여섯 개, 정사각형 네 개, 또는 정육각형 세 개가 한 점에 모이면 각의 합이 정확히 360°가 된다. 이것이 평평한 평면의 세 가지 정규 쪽매맞춤(tiling)으로, 욕실 바닥이나 벌집에서 볼 수 있는 무늬이다. 그리고 $(m-2)(n-2) > 4$이면 한 꼭짓점에 모인 각의 합이 360°보다 **크다**. 이는 평평한 평면에서는 불가능하지만 Section 5.8의 쌍곡평면(hyperbolic plane)에서는 얼마든지 가능하다. 쌍곡평면의 정규 쪽매맞춤은 무한히 많으며, 그림 7.9.1에서 곡선보다 위에 있는 점마다 하나씩 있다. 에셔(Escher)의 *Circle Limit*(원의 극한) 목판화 연작은 그중 몇 가지를 그린 것이다. 그러므로 플라톤 입체의 분류는 사실 기하학 전체를 관통하는 삼분법(구, 평면, 쌍곡평면)의 첫 번째 경우인 셈이다.

대칭군

플라톤 입체의 대칭은 군(group)을 이룬다. 회전 대칭은 정사면체가 12개, 정육면체와 정팔면체가 24개(이 둘은 쌍대(dual)이다. 즉 면과 꼭짓점을 맞바꾸면, 곧 $m \leftrightarrow n$이면 서로 바뀐다), 정십이면체와 정이십면체가 60개이다. 위수가 60인 정이십면체군은 Section 6.4에서

언급했듯이 5차 방정식을 거듭제곱근(radical)으로 풀 수 없게 만드는 "단순(simple)" 군이다. 펠릭스 클라인(Felix Klein)은 정이십면체를 5차 방정식의 풀이와 연결한 책 *Lectures on the Icosahedron*(정이십면체에 관한 강의, 1884)을 한 권 통째로 썼다.

사고 기술

> **이중 계산**
>
> 같은 대상을 서로 다른 두 가지 방법으로 세고, 그 결과를 같다고 놓는다.
>
> 여기서 센 대상은 모서리가 면 위에 있는 (모서리, 면) 쌍의 집합이었다. 이중 계산은 조합론에서 가장 강력한 도구 가운데 하나이며, 제9장 곳곳에서 다시 등장한다.

더 도전하기

1 **쌍대성.** m과 n을 맞바꾸면 V와 F가 맞바뀌고 E는 변하지 않음을 보여라. 어떤 플라톤 입체끼리 서로 쌍대인가? 자기 자신과 쌍대인 것은 어느 것인가?

2 **축구공.** 전통적인 축구공은 정오각형 12개와 정육각형 20개로 이루어지며, 각 꼭짓점에 세 면이 모인다. 이중 계산과 오일러 공식을 이용하여 $V - E + F = 2$임을 확인하라. 더 일반적으로, 오각형과 육각형으로 이루어지고 각 꼭짓점에 세 면이 모이는 다면체는 언제나 오각형을 정확히 12개 가짐을 보여라.

3 **원환면.** "액자" 모양 다면체(사각형 구멍이 뚫린 사각 블록)를 만들어 V, E, F를 세어라. $V - E + F = 0$임을 확인하라.

4 **꼭짓점에 모인 각.** 정m각형의 한 내각은 $180^\circ(1 - \frac{2}{m})$이다. 이러한 각 n개가 볼록 입체의 한 꼭짓점 둘레에 들어맞을(합이 360°보다 작을) 필요충분조건이 $(m-2)(n-2) < 4$임을 보여, 분류에 대한 두 번째 증명을 제시하라.

더 읽을거리

- **David Richeson, *Euler's Gem*** (Princeton University Press). $V - E + F = 2$의 역사와 그것이 어떻게 위상수학으로 이어졌는지를 다룬다. 식스폼(sixth form, 영국의 대학 진학 준비 과정) 학생에게 매우 좋은 책이다.
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*** (Cambridge University Press). 오일러 공식과 증명의 본성에 관한 대화편이다.

- **H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*** (Dover). 정다면체와 그 고차원 친척들을 다룬 고전이다.

우리가 배운 것

이 장은 행렬(matrix)이 그 자체로 생명을 지닌 공간의 변환(transformation)이라는 말로 시작했고, 세 가지 질문을 던졌다. 행렬은 수와 어떤 점에서 닮았고 어떤 점에서 다른가, 행렬은 실제로 무엇을 하는가, 그리고 무엇이 변하지 않는가. 이 장의 아홉 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 행렬은 수와 어떤 점에서 닮았고, 어떤 점에서 다른가?

행렬은 더하고 곱할 수 있지만, Section 7.1에서는 익숙한 규칙 가운데 어떤 것이 성립하지 않는지 살펴보았다. 곱셈은 교환법칙(commutative law)이 성립하지 않으므로 $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$가 반드시 $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$인 것은 아니다. 영인자(zero divisor)가 존재하므로 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$이라고 해서 $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$이 되는 것도 아니다. 또한 행렬에 대한 이차방정식은 근을 무수히 많이 가질 수 있다. 이러한 실패에는 저마다 행렬이 평면에 무엇을 하는지에 근거한 기하학적 설명이 있었다. 결정적으로 살아남는 성질은 행렬식(determinant)이 곱셈을 보존한다는 것, 곧 $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$이다. Section 7.3에서는 이 성질이 사실상 행렬식을 **규정한다**는 것을 보였고, Section 7.8에서는 이 성질을 이용해 오일러(Euler)의 네 제곱수 항등식(four-square identity)을 증명(proof)했다. 이 항등식은 모든 자연수가 네 제곱수의 합이라는 라그랑주(Lagrange)의 정리에서 핵심 단계이다.

2. 행렬은 실제로 무엇을 하는가?

여러 절에서 올바른 관점을 찾아 이 질문에 답했다.

- **고유벡터(eigenvector)**(Section 7.2)는 행렬이 방향을 돌리지 않는 벡터이다. 고유벡터를 좌표축으로 삼으면 대칭행렬(symmetric matrix)은 단순한 늘이기에 지나지 않으며, 원의 상은 타원(ellipse)이 되고 그 축과 넓이를 바로 읽어 낼 수 있다.
- **행렬식**(Section 7.3)은 부호가 있는 넓이 배율이다. 층밀림(shear)은 넓이를 보존하고, 두 축을 맞바꾸면 방향(orientation)이 뒤집히며, 특이행렬(singular matrix)은 평면을 납작하게 짓누른다.
- **대각합(trace)과 행렬식**(Section 7.4)은 케일리–해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)를 통해 행렬이 몇 단계 뒤에 항등행렬(identity matrix)로 돌아오는지를 결정한다. $\mathbf{M}^8=\mathbf{I}$인 행렬이 반드시 회전일 필요는 없다. 그것은 비스듬한 좌표에서 본 회전이다. 그리고 정수 행렬의 대각합은 정수이므로, 결정(crystal)은 5회 대칭을 가질 수 없다.

- **3차원 회전**(Section 7.5)은 로드리게스 공식(Rodrigues' formula)에 따라 외적(cross product)으로 만들어진다. 이 공식은 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$의 3차원 판이다.
- **쌍곡회전(hyperbolic rotation)**(Section 7.6)은 점을 쌍곡선을 따라 옮기며, 쌍곡각은 더해진다. 쌍곡회전은 특수상대성이론(special relativity)의 로런츠 부스트(Lorentz boost)이고, 그 불변직선은 빛의 경로이다.

3. 무엇이 변하지 않는가?

불변량(invariant)은 어디에나 있었다. 회전은 $x^2 + y^2$을 보존하고, 로런츠 부스트는 $x^2 - y^2$을 보존하며, 닮은 행렬(similar matrices)은 대각합과 행렬식이 같다. Section 7.7에서는 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$에 따라 변하는 행렬이 성분이 아무리 바뀌어도 대각합과 행렬식, 따라서 고유값(eigenvalue)을 일정하게 유지했다. 이것이 솔리톤(soliton)의 보존 법칙(conservation law) 뒤에 숨은 원리이다. 그리고 Section 7.9에서는 불변량이 하나의 수, $V - E + F = 2$였다. 이 식은 모든 볼록다면체(convex polyhedron)에서 성립하며, 정다면체를 단 다섯 개로 한정한다. 이 수, 곧 오일러 지표(Euler characteristic)는 위상수학(topology)의 최초의 불변량 가운데 하나였다.

4. 선형대수학의 도구 상자

방법	사용한 곳
기하학적 반례	성립하지 않는 규칙 (7.1)
자연스러운 축으로서의 고유벡터	타원 (7.2); 부스트 (7.6)
특수한 행렬로 탐색하기	행렬식 (7.3)
케일리–해밀턴 정리	유한 위수 (7.4)
평행 성분과 수직 성분으로 나누기	로드리게스 공식 (7.5)
알맞은 매개변수 고르기	라피디티(rapidity) (7.6)
$\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{tr}(\mathbf{NM})$	보존량 (7.7)
행렬식의 곱셈성	네 제곱수 (7.8)
이중 세기(double counting)	플라톤 입체(Platonic solids) (7.9)

다음으로

- Section 11.2에서는 고유값과 고유벡터가 용수철과 질점으로 이루어진 계의 진동을 지배한다.
- Section 13.7에서는 공분산 행렬(covariance matrix)의 고유벡터가 통계학에 등장한다.
- 미분방정식(differential equation)과 동역학계(dynamical system)는 8장의 주제이다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***(선형대수학의 본질): 행렬이 무엇을 하는지 보여 주는 무료 동영상 시리즈이다. 가장 먼저 보기를 권한다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***(선형대수학 입문): 이해와 응용을 강하게 강조하는 고전적인 입문 교재이다.
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***: 선형사상을 중심에 둔 좀 더 추상적인 접근이다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **David Richeson, *Euler's Gem***(오일러의 보석): 오일러 공식과 위상수학의 탄생을 다룬다.

Kaplansky는 자신과 Halmos가 좌표 없이 생각하지만, 닫힌 문 뒤에서는 행렬로 "미친 듯이" 계산한다고 농담한 적이 있다. 이 말은 이 장이 보여 주려 한 것을 잘 담고 있다. 행렬은 구체적이고 계산할 수 있지만, 모든 계산 뒤에는 기하(늘이기, 회전, 사영, 부스트)가 있고, 어떻게 적느냐에 따라 달라지지 않는 불변량이 있다. 이 두 관점 사이를 자유롭게 오가는 법을 익히는 것은 수학자가 지닐 수 있는 가장 값진 기술 가운데 하나이다.

더 도전하기 해답

아래는 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계만 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓰면 된다. 답을 보기 전에 각 문제를 제대로 풀어 보기 바란다.

7.1 행렬에서는 성립하지 않는 법칙

1. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 두고 $\mathbf{XP}$와 $\mathbf{PX}$를 비교하면 $c = 0$, $a = d$이어야 한다. 따라서 답은 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 꼴의 행렬(matrix)이다.

2. 케일리–해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)에 의해 $\mathbf{N}^2 = t\mathbf{N} - d\mathbf{I}$이므로 $t\mathbf{N} = d\mathbf{I}$이다. $t \neq 0$이면 $\mathbf{N}$은 $\mathbf{I}$의 상수배이고, $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$에서 $\mathbf{N} = \mathbf{0}$이 되어 $t \neq 0$에 모순이다. 따라서 $t = 0$이고, 그러면 $d = 0$이다. 답은 $a^2 + bc = 0$인 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$이다.

3. 제곱한 행렬의 대각성분(diagonal entries)은 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이고 대각성분이 아닌 성분은 0이다. 고정 벡터(fixed vector)는 $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$이므로, 이 변환은 원점을 지나고 각이 $\frac{\theta}{2}$인 직선에 대한 반사(reflection)이다.

4. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이면 $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$이다. 여기서 $(a+d)\mathbf{M}$을 빼고 $(ad - bc)\mathbf{I}$를 더하면 $\mathbf{0}$이 된다.

7.2 돌지 않고 늘어나기

1. $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$에 대하여 $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$이려면 $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$이어야 하고, 이것이 바로 그 이차방정식이다. 여기서 대각합(trace)은 6이고 행렬식(determinant)은 $\frac{4}{25}(54 - 4) = 8$이므로 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$이다. 따라서 고유값(eigenvalue)은 $\lambda = 2$($(1,2)$에 대응)와 4($(2,-1)$에 대응)이다.

2. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \lambda\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$이고, $\mathbf{M}$이 대칭(symmetric)이므로 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \mathbf{Mv} \cdot \mathbf{u} = \mu\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$이다. 따라서 $(\lambda - \mu)\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$이다.

3. 특성방정식(characteristic equation) $\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$의 판별식(discriminant)은 $-4\sin^2\theta$이고, θ가 π의 정수배가 아니면 음수이다. 고유값은 $e^{\pm i\theta}$이다.

4. $(1,0) = \frac{1}{5}(1,2) + \frac{2}{5}(2,-1)$이므로 $T^n(1,0) = \frac{2^n}{5}(1,2) + \frac{2\cdot 4^n}{5}(2,-1) = \frac{1}{5}\big(2^n + 4^{n+1},\ 2^{n+1} - 2\cdot 4^n\big)$이다. $n = 1$이면 이 값은 $(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5})$로, 예상대로이다.

7.3 행렬식을 행렬식이게 하는 것

1. $(\det \mathbf{MN})^3 = (\det \mathbf{M})^3(\det \mathbf{N})^3$이고 $(\det \mathbf{J})^3 = -1 \neq 1$이다. 함수 $|\det \mathbf{M}|$은 곱셈적(multiplicative)이지만 $|\det \mathbf{J}| = 1$이다.
2. $\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이고, 두 번째 인수는 둘째 행이 첫째 행의 0배이므로 그 f 값은 0이다.
3. $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$이므로 그 값은 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{K}_k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$이다. 또한 $\mathbf{K}_k\mathbf{K}_l = \mathbf{K}_{kl}$이다.
4. 행 축약(row reduction)을 하면 모든 가역(invertible) 행렬을 기본행렬(elementary matrix)의 곱으로 나타낼 수 있다. 기본행렬은 행 교환($\mathbf{J}$), 행의 상수배($\mathbf{K}_k$ 또는 $\mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$), 전단(shear)($\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 또는 이것을 $\mathbf{J}$로 켤레(conjugate)시킨 것)이다. 전단은 $\mathrm{f} = 1$이다(소문항 (iv)에서처럼 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$를 이용한다). 또한 $\mathbf{J}$는 전단들과 $\mathbf{K}_{-1}$의 곱이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{K}_{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$이다. 따라서 $\mathrm{g}(k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$라 하면 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{g}(\det \mathbf{M})$이다. 특이(singular) 행렬 $\mathbf{M}$에 대해서는 소문항 (iii)에 의해 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = 0$이다.

7.4 제자리로 돌아오는 행렬

1. $|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|^2 = 2 + 2\cos\phi = 1$에서 $\phi = \pm\frac{2\pi}{3}$이므로 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$이다. $\mathbf{S}$의 고유값은 1의 세 제곱근이다. 두 고유값이 모두 1이라면, $x^3 - 1$의 근이 서로 다르므로 $\mathbf{S}$는 대각화 가능(diagonalisable)하고 $\mathbf{I}$와 같아진다. 실수 행렬의 허근 고유값은 켤레 쌍으로 나타나므로 고유값은 $\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}/3}$이다. 따라서 $\det \mathbf{S} = 1$, $\operatorname{tr} \mathbf{S} = -1$이다.
2. 고유값은 원시 6제곱근(primitive sixth root) $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$이어야 한다(6제곱근을 켤레와 짝지어 달리 고르면 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ 또는 $\mathbf{M}^3 = \mathbf{I}$가 된다). 따라서 $\operatorname{tr} \mathbf{M} = 1$, $\det \mathbf{M} = 1$이다.
3. 고유값은 곱이 1인 단위근(root of unity)이므로 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$(또는 둘 다 ± 1)이고, 대각합 $2\cos\theta$는 $[-2,2]$에 속하는 정수이다. 위수(order)가 6인 예: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $\mathbf{M}^3 = (t^2 - d)\mathbf{M} - td\mathbf{I}$이고 $\mathbf{M}^4 = (t^3 - 2td)\mathbf{M} - d(t^2 - d)\mathbf{I}$이다. $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$이려면($\mathbf{M}$은 $\mathbf{I}$의 상수배일 수 없으므로) $t(t^2 - 2d) = 0$이고 $d(t^2 - d) = 1$이어야 한다. $t = 0$이면 $-d^2 = 1$이 되어 불가능하다. 따라서 $t^2 = 2d$, $d^2 = 1$이고, $d = 1$, $t^2 = 2$이다.

7.5 3차원에서의 회전

1. $z \mapsto a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)$. 합성(composite)은 $k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$에 대하여 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + k$이다. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} \neq 1$이면 고정점(fixed point) $c = \frac{k}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}}$를 가진다. $\theta+\phi = 2\pi$이면 이것은 $(b-a)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$만큼의 평행이동(translation)이다.

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: 이 행렬은 $(1,1,1)$을 고정하고, 대각합이 $0 = 1 + 2\cos 120^\circ$이며, $\mathbf{i} \to \mathbf{j} \to \mathbf{k} \to \mathbf{i}$로 보낸다.

3. $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$이고, 따라서 $\mathbf{K}^3\mathbf{r} = \mathbf{n} \times \big((\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}\big) = -\mathbf{K}\mathbf{r}$이다. 급수(series)에서 홀수 거듭제곱은 $(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots)\mathbf{K} = \sin\theta\,\mathbf{K}$를 주고, ($\mathbf{K}^2$부터의) 짝수 거듭제곱은 $(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \cdots)\mathbf{K}^2 = (1-\cos\theta)\mathbf{K}^2$를 준다.

4. 합성은 두 평면의 교선 위의 모든 점을 고정하고, 행렬식은 $(-1)^2 = 1$이다. 그 교선에 수직인 각 평면에서 이 합성은 사잇각이 α인 두 직선에 대한 반사의 곱이고, 이는 2α만큼의 회전(rotation)이다.

7.6 쌍곡 회전과 상대성 이론

1. $T(u)T(w)$의 성분은 $\cosh u\cosh w + \sinh u\sinh w = \cosh(u+w)$와 $\sinh u\cosh w + \cosh u\sinh w = \sinh(u+w)$이다. 따라서 $T(u)^{-1} = T(-u)$이다.

2. $\tanh u = 0.8$에서 $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1.8}{0.2} = \ln 3 \approx 1.099$이고 $\cosh u = \frac{1}{2}(3+\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$이다. 우주선 안에서는 $10 \times \frac{3}{5} = 6$년이 흐른다.

3. 넓이는 $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$이다. 직선 변은 아무것도 기여하지 않고, 쌍곡선(hyperbola)을 따라 $x = \cosh s$, $y = \sinh s$로 두면 피적분함수는 $(\cosh^2 s - \sinh^2 s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}s$이므로 넓이는 $\frac{v}{2}$이다. T의 행렬식은 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$이므로 T는 넓이를 보존한다. 또한 T는 쌍곡선을 자기 자신으로 보내고, 매개변수가 v인 점을 매개변수가 $v+u$인 점으로 옮긴다.

4. $x' + y' = (\cosh u + \sinh u)(x+y) = \mathrm{e}^u p$이고 $x' - y' = \mathrm{e}^{-u}q$이며, 또한 $x^2 - y^2 = pq$이다. 이 좌표에서 T는 스퀴즈(squeeze)이다. 즉 점근선(asymptote) $y = x$ 방향으로 e^u배 늘이고 $y = -x$ 방향으로 e^{-u}배 줄이는 변환이며, 각 쌍곡선 $pq =$ 상수를 따라 점들을 미끄러지게 한다.

7.7 결코 변하지 않는 양

1. $\dot{a} = -Ct = -tc$, $\dot{d} = Ct = tc$, $\dot{c} = 0$이고 $\dot{b} = (A-D)t - Ct^3 = t(a-d)$이므로 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t\begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$와 일치한다.

2. $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{SN}$을 이용하면 $\dot{\mathbf{M}} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{NM} + \mathbf{MN}$이다.

3. $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이고 $\ln\det\mathbf{M} = 2t - t = t$이며, 그 도함수(derivative)는 $1 = \operatorname{tr}\mathbf{N}$이다.

4. 순환(cycling) 성질에 의해 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = \sum_j \operatorname{tr}(\mathbf{M}^j\dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{k-1-j}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\dot{\mathbf{M}})$이고, 다시 순환 성질에 의해 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}^k\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\mathbf{NM}) = 0$이다.

7.8 네 제곱수

1. $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1, 4, 4, 4)$이고 $1 + 16 + 16 + 16 = 49$이다. 이것은 $7^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$과는 다른 표현(representation)이다.

2. $c = d = r = s = 0$으로 두면 $L_1 = ap - bq$, $L_2 = aq + bp$, $L_3 = L_4 = 0$이 되고, 이는 $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap - bq)^2 + (aq + bp)^2$이다.

3. 제곱수는 8을 법(modulo)으로 0, 1 또는 4이다. 이 중 세 개의 합은 8을 법으로 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$이 되고, 7은 절대 되지 않는다.

4. $2 = (\pm1)^2 + (\pm1)^2 + 0^2 + 0^2$이다. 0이 아닌 두 자리를 고르고(6가지) 그 부호를 정하면(4가지) 24가지이다. 2는 4로 나누어떨어지지 않으므로 야코비(Jacobi)의 공식은 $8\sigma(2) = 8 \times 3 = 24$를 준다.

7.9 정다면체는 다섯 개뿐이다

1. $h = 2m + 2n - mn$으로 두면 $V = \frac{4m}{h}$, $E = \frac{2mn}{h}$, $F = \frac{4n}{h}$이다. m과 n을 바꾸면 V와 F가 바뀐다. 정육면체와 정팔면체는 서로 쌍대(dual)이고, 정십이면체와 정이십면체도 그러하며, 정사면체는 자기쌍대(self-dual)이다.

2. $F = 32$, $E = \frac{1}{2}(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) = 90$, $V = \frac{1}{3}(180) = 60$이고 $60 - 90 + 32 = 2$이다. 일반적으로 오각형이 P개, 육각형이 H개이면 $E = \frac{1}{2}(5P + 6H)$, $V = \frac{1}{3}(5P + 6H)$이므로 $V - E + F = -\frac{1}{6}(5P + 6H) + P + H = \frac{P}{6}$이다. 이 값이 2이므로 $P = 12$이다.

3. (구멍이 뚫린) 윗면과 아랫면을 각각 네 개의 사다리꼴(trapezium)로 나눈다. 그러면 $V = 16$, $F = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$, $E = 12 + 12 + 8 = 32$이므로 $V - E + F = 0$이다.

4. $180°n(1 - \frac{2}{m}) < 360°$는 $n(m-2) < 2m$, 즉 $mn - 2m - 2n < 0$, 곧 $(m-2)(n-2) < 4$이다. $m, n \geq 3$일 때 해는 $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$, $(5,3)$이다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

전체 13개 장 가운데 제7장. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

