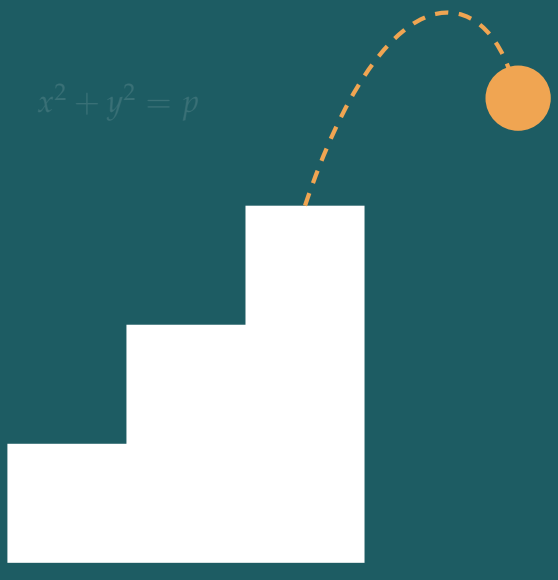
STEP 대비 · 대학 수학

# Beyond STEP

제5장

## 복소수(Complex Numbers)



KEITH McNULTY

# Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

제5장

## 복소수(Complex Numbers)

Keith McNulty

**Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계**

**제5장: 복소수(Complex Numbers)**

이 PDF는 *Beyond STEP*의 전체 13개 장 가운데 제5장이다. 책 전체, 각 장의 개별 PDF, 모든 절의 인쇄용 연습지, 모든 STEP 문제의 자세한 풀이를 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 남겨 주기 바란다.

장

# 5

# 복소수

실수 영역의 두 진리를 잇는 가장 짧은 길은 복소수 영역을 지나간다.

**이 장의 내용**


**5.1** 마친의 공식 STEP III 1987

**5.2** 단위근 필터 STEP I 1990

**5.3** $z^{2n}+1$의 인수분해 STEP III 2013

**5.4** 정다각형 속의 거리 STEP III 2016

**5.5** 유리수처럼 보이지만 아닌 각 STEP III 2022

**5.6** 페르마 점 STEP III 2000

**5.7** 사상으로서의 복소 지수함수 STEP II 1997

**5.8** 원판에 숨은 거리 STEP III 2013

**A** 연습문제 해답 59쪽

# 허수, 실제의 답

> 실수 영역의 두 진리를 잇는 가장 짧은 길은 복소수 영역을 지나간다.
>
> — 자크 아다마르(Jacques Hadamard)

1545년 카르다노(Gerolamo Cardano)는 삼차방정식(cubic equation)의 해법 공식을 발표했는데, 그 과정에서 당혹스러운 사실을 발견했다. 세 개의 멀쩡한 실근을 가진 어떤 삼차방정식에서는, 공식을 적용하는 도중에 음수의 제곱근을 구해야 했던 것이다. 이 제곱근들은 마지막에 서로 상쇄되어 실수인 답을 남겼지만, 계산 중간에는 당시의 어떤 기준으로 보아도 존재하지 않는 양이 등장했다. 카르다노는 이런 조작을 "미묘한 만큼 쓸모없다"고 했다. 그 뒤 두 세기 동안 수학자들은 이 "허수(imaginary number)"를 어쩌다 잘 통하는 요령쯤으로 여기며 불편한 마음으로 사용했다.

허수가 제대로 인정받게 된 것은 19세기 초, 베셀(Caspar Wessel), 아르강(Jean-Robert Argand), 가우스(Gauss)가 복소수(complex number)를 평면 위의 점으로 나타내면서부터였다. 그렇게 되자 복소수는 요령이 아니라 하나의 계시였음이 드러났다. 복소수는 실제 현상이 왜 그렇게 행동하는지를 설명해 주며, 아다마르의 말처럼 실수에 관한 결과에 이르는 가장 짧은 길을 거듭 제공한다.

### 복소수가 중요한 이유

모든 다항방정식은 복소수 범위에서 해를 가진다. 이것이 **대수학의 기본정리**(*fundamental theorem of algebra*)이다. 따라서 복소수는 정확한 의미에서 대수학이 완비되는 곳이다. 복소수는 또한 회전과 진동을 나타내는 자연스러운 언어이기도 하다. 절댓값(modulus)이 1인 복소수를 곱하면 평면이 회전하므로, 각, 파동, 주기적인 현상이 관련된 문제는 복소수를 쓰면 더 간단해진다. 전기 공학자는 교류 전류를 분석할 때 복소수를 사용하고, 물리학자는 복소수 없이는 양자역학을 적어 내려갈 수조차 없으며, 휴대전화에서 MRI 스캐너에 이르기까지 신호 처리는 복소 푸리에 변환(Fourier transform)으로 돌아간다. 그리고 순수수학에서 복소변수 함수는 놀라울 만큼 경직되어 있고 아름답다는 것이 밝혀졌다. 아주 작은 영역에서 복소함수를 알면 그 함수가 모든 곳에서 결정된다.

### 대학에서 만나게 될 내용

복소수는 대학 첫 주부터 사용하게 되지만, 큰 도약은 보통 2학년에 배우는 **복소해석학**(*complex analysis*)과 함께 찾아온다. 복소해석학의 중심 대상은 미분 가능한 복소함수인 **정칙**(*holomorphic*) 함수이며, 이 이론은 놀라운 사실로 가득하다. 모든 정칙함수는 자동으로 무한 번 미분 가능하고, 자신의 테일러 급수(Taylor series)와 같다. 닫힌 곡선을 따라 구하는 적분은 함수가 발산하는 점들만 살펴보아 계산할 수 있으며(코시(Cauchy)의 유수 정리(residue theorem)), 이를 이용하면 다른 어떤 방법으로도 풀리지 않는 실수 적분을 계산할 수 있다. 이 이론은 등각사상(conformal map)(Section 5.7), 리만 곡면(Riemann surface), 그리고 소수(prime)의 분포를 지배하는 리만(Riemann) 제타 함수(Section 1.2)로 이어진다. 이와 나란히, 1의 거듭제곱근(roots of unity)의 대수(Section 5.2, Section 5.3)는 갈루아(Galois) 이론으로 이어지고, 복소 기하는 Section 5.8의 비유클리드 기하학(non-Euclidean geometry)으로 이어진다.

### 이 장을 관통하는 질문들

**세 가지 큰 질문**

1. **복소수는 실수 문제를 푸는 데 어떻게 도움이 되는가?** 복소평면을 거쳐 돌아가는 길이 왜 $\pi$, 이항계수, 코사인에 관한 사실을 만들어 내는가?
2. **1의 거듭제곱근은 무엇이 특별한가?** $z^n = 1$의 해들은 왜 합, 곱, 다각형, 각에서 거듭 나타나는가?
3. **복소함수는 어떻게 생겼는가?** 입력과 출력이 모두 평면 위의 점인 함수를 어떻게 그림으로 나타낼 수 있으며, 그 그림은 어떤 기하를 드러내는가?

이 장은 편각(argument)과 곱셈(마친(Machin)의 공식)에서 출발하여, 1의 거듭제곱근의 대수(필터, 인수분해, 다각형의 거리, 무리수 각)를 거쳐, 복소수를 이용한 기하(페르마(Fermat) 점)로 나아가고, 마지막으로 사상으로서의 복소함수(지수함수, 그리고 단위원판 속에 숨은 거리)에 이른다.

## 이 장의 아이디어

| § | 주제 | 아이디어 |
|---|---|---|
| 5.1 | 마친의 공식 | 복소수를 곱하면 편각이 더해진다 |
| 5.2 | 세 개마다 하나씩 고른 이항계수 | 1의 거듭제곱근에 대해 평균을 내면 나머지에 따라 걸러진다 |
| 5.3 | 코사인의 곱 | 근들로 인수분해한 다음 대입한다 |
| 5.4 | 정다각형의 현 | 거리는 절댓값이다; $z^n - 1 = \prod(z - \omega^k)$ |
| 5.5 | $\cos^{-1}\frac{1}{3}$은 무리수이다 | 드무아브르(De Moivre), 홀짝성, 최소 반례 |
| 5.6 | 페르마 점 | 회전은 곱셈이다; 좋은 좌표 |
| 5.7 | 사상으로서의 $e^w$ | 복소함수를 그림으로 나타내기; 다대일 사상 |
| 5.8 | 숨은 거리 | 쌍곡기하학의 삼각부등식으로서의 부등식 |

## 이 장을 읽는 방법

그림을 그려라. 이 장의 거의 모든 결과에는 기하학적 의미가 있으며, 복소평면을 간단히 스케치해 보면(1의 거듭제곱근이 어디에 있는지, 곱셈이 어느 방향으로 회전시키는지, 격자선이 어디로 가는지) 대수 계산을 하기도 전에 무엇을 해야 할지 보이는 경우가 많다. 그런 다음 대수 계산은 꼼꼼하게 하라. 그림은 부호나 $2\pi$의 배수에 관해서는 잘못된 인상을 줄 수 있기 때문이다.

# 5.1 마친의 공식

**문제**

**STEP III 1987, 3번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/87-s3-q3`

## 도입

1706년 런던의 수학자 존 마친(John Machin)은 손 계산만으로 $\pi$를 소수점 아래 100자리까지 구했다. 그 전에는 누구도 그 근처에조차 가지 못했다. 그의 비결은 소문항 (ii)의 공식으로, 이 공식은 $\frac{\pi}{4}$를 탄젠트 값이 아주 작은 분수인 각들로 나타낸다. 분수가 작으면 급수(series) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$가 매우 빠르게 수렴(converge)하며, 마친의 공식과 그 변형들은 컴퓨터와 Section 2.6의 방법이 등장하기 전까지 두 세기 반 동안 $\pi$를 계산하는 표준적인 방법이었다.

이 공식은 삼각함수 항등식이 빚어낸 기적처럼 보인다. 그러나 이 문제는 이것이 사실 복소수의 곱셈에 관한 사실임을 보여 준다. 복소수를 곱하면 편각(argument)이 더해진다. 성분이 정수인 복소수들의 곱셈 한 번으로 전체가 증명된다.

## 시작하기 전에

**생각해 보기** $5 - \mathrm{i}$의 편각은 무엇인가? $1 + \mathrm{i}$의 편각은? 복소수를 곱하면 편각은 어떻게 되는가?

$\arg(5 - \mathrm{i}) = -\tan^{-1}\frac{1}{5}$로 작은 음의 각이고, $\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$이다. 복소수를 곱하면 절댓값(modulus)은 곱해지고 편각은 ($2\pi$의 정수배 차이를 제외하면) 더해진다. 따라서

$$\arg((5 - \mathrm{i})^4(1 + \mathrm{i})) = \frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} \quad \text{(경우에 따라 } 2\pi\text{의 정수배를 더함).}$$

이 곱을 직접 계산하여 편각을 다른 방법으로 구할 수 있다면 항등식을 얻는다.

## 차근차근 풀기

### 1단계 절댓값의 범위

**생각해 보기** 상한(upper bound)을 보이려면 양변을 제곱해 보라. 하한(lower bound)을 보이려면 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$를 두 벡터의 내적(dot product)으로 생각해 보라.

상한: $(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y| \geq x^2+y^2 = |z|^2$이고 양변이 모두 음이 아니므로 $|z| \leq |x|+|y|$이다.

하한: $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$는 길이가 $|z|$인 벡터 $(|x|, |y|)$와 단위벡터 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$의 내적이다. 내적은 두 벡터의 길이의 곱보다 클 수 없으므로 이 값은 $|z|$ 이하이다. (대수적으로는 $|z|^2 - (|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha)^2 = (|x|\sin\alpha - |y|\cos\alpha)^2 \geq 0$이다.) ■

### 2단계 핵심이 되는 곱셈

**생각해 보기** $(5-\mathrm{i})^2$을 계산하고, 그것을 다시 제곱한 뒤, $1+\mathrm{i}$를 곱하라.

$(5-\mathrm{i})^2 = 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i}$이다. 그러면 $(24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i}$이다. 마지막으로

$$(476-480\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i}.$$

**잠깐, 직접 해 보기** 이제 편각을 비교하라. $956-4\mathrm{i}$의 편각은 무엇인가? $2\pi$의 정수배가 더 붙지 않는다고 어떻게 확신할 수 있는가?

$956 - 4\mathrm{i} = 4(239-\mathrm{i})$이므로 편각은 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$이다. 따라서 어떤 정수 $k$에 대하여

$$\frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi$$

이다. 그런데 $0 < \tan^{-1}\frac{1}{5} < \frac{1}{5}$이므로 좌변은 $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5}$와 $\frac{\pi}{4}$ 사이, 즉 대략 $-0.02$와 $0.79$ 사이에 있고, 우변에서 $2k\pi$를 뺀 부분은 $-0.005$와 $0$ 사이에 있다. $2\pi$는 이 차이보다 훨씬 크므로 $k=0$이다. 정리하면

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}. \qquad ■$$

그림 5.1.1은 무슨 일이 일어났는지 보여 준다. $45^\circ$에서 출발하여 $5-\mathrm{i}$를 한 번 곱할 때마다 시계 방향으로 약 $11.3^\circ$씩 회전(rotation)하고, 네 번 곱하고 나면 실수축을 겨우 $0.24^\circ$ 지나친다.

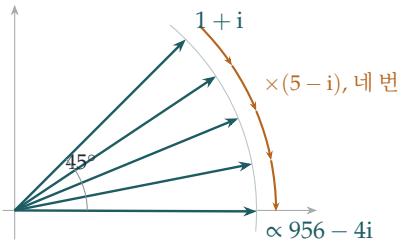



**그림 5.1.1** $1+\mathrm{i}$에 $5-\mathrm{i}$를 네 번 곱하기. 한 번 곱할 때마다 시계 방향으로 $\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 11.31°$만큼 회전한다(길이도 늘어나지만 여기서는 무시한다). 네 번 회전하면 $45°$가 $-0.24°$가 되는데, 이것이 $956-4\mathrm{i}$의 편각인 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$이다.

### 3단계 두 번째 공식

**생각해 보기** 앞의 경우에서 유추하면, 이번에는 어떤 곱을 계산해야 하는가?

$(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$를 생각하자. 이 수의 편각은 $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$이다. 이제 $(4+\mathrm{i})^2=15+8\mathrm{i}$이므로 $(4+\mathrm{i})^3=(15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i})=52+47\mathrm{i}$이다. 그러면 $(52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i})=1040+52\mathrm{i}+940\mathrm{i}-47=993+992\mathrm{i}$이고,

$$(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})=(1971105-992)+(993+1969120)\mathrm{i}=1970113+1970113\mathrm{i}.$$

실수부분과 허수부분이 같으므로 편각은 $\frac{\pi}{4}$이다. 세 각은 모두 작은 양수이므로(그 합은 $3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{1985}<1<2\pi$보다 작다) $2\pi$의 정수배를 걱정할 필요가 없고, 공식이 성립한다. ■

## 돌아보기

- **곱셈에서 편각은 더해진다.** 이 하나의 사실이 가우스 정수의 곱을 각 사이의 항등식으로 바꾸어 주었다.
- **$2\pi$의 정수배에 주의하라.** 편각은 $2\pi$의 정수배 차이를 제외하고만 정해지므로, 각 항등식마다 크기를 어림하여 그 정수배를 확정해야 했다.
- **정수가 일을 한다.** 모든 계산은 정수로 이루어졌고, $\pi$에 대한 항등식은 근사 없이 정확하게 나왔다.

## 숨은 수학

### 손으로 $\pi$ 계산하기

마친의 공식은 왜 계산에 그토록 유용할까? 급수 $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$는 $|x| \leq 1$에서 수렴하지만, $x = 1$에서는 고통스러울 만큼 느리게 수렴한다. $\frac{\pi}{4}$를 소수점 아래 세 자리까지 구하려면 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$의 항이 약 천 개나 필요하다. $x = \frac{1}{5}$이면 각 항이 앞의 항보다 약 25배씩 작아져서 항 하나당 대략 1.4자리를 얻고, $x = \frac{1}{239}$이면 항 하나당 약 4.8자리를 얻는다. 마친의 100자리 계산에는 첫 번째 급수의 항 약 70개와 두 번째 급수의 항 20개 정도만 필요했다. 1873년 William Shanks는 마친형 공식을 이용해 707자리를 계산하느라 수년을 계산에 쏟았는데, 1944년에 그가 528번째 자리에서 실수를 했고 그 뒤의 자리는 모두 틀렸다는 사실이 밝혀졌다.

### 다시 만나는 가우스 정수

$a, b$가 정수일 때 $a + b\mathrm{i}$ 꼴의 수는 Section 1.6에서 다룬 **가우스 정수**(Gaussian integers)이다. $5 - \mathrm{i}$가 이렇게 잘 들어맞는 이유는 인수분해(factorisation)에 있다. $239^2 + 1 = 57122 = 2 \times 13^4$이고, 이를 가우스 정수에서 쓰면 $(239 + \mathrm{i})(239 - \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})^4(3 - 2\mathrm{i})^4$가 되며, $5 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$도 같은 가우스 소수(Gaussian primes)들로 이루어져 있다. 마친형 공식을 찾는 일은 사실 $n^2 + 1$ 꼴의 수를 인수분해하는 문제이다. 1899년 Carl Størmer는 바로 이 아이디어를 이용하여, $a, b, m, n$이 정수일 때 $\frac{\pi}{4} = a\tan^{-1}\frac{1}{m} + b\tan^{-1}\frac{1}{n}$ 꼴의 공식은 마친의 공식과 오일러(Euler), Hermann, Hutton이 찾은 세 공식, 이렇게 네 개뿐임을 증명했다.

### 회전

절댓값이 1인 복소수를 곱하는 것은 평면의 회전이다. 그래서 복소수는 이 장 뒷부분의 기하학에서부터 전기공학의 교류, 양자역학의 파동함수에 이르기까지 회전과 각이 관련된 모든 것을 나타내는 자연스러운 언어가 된다. Section 4.2에서는 $\tan^{-1}$의 덧셈정리를 교묘한 치환으로 얻었지만, 여기서는 복소수의 곱셈에서 얻었다. 두 가지는 같은 사실을 서로 다른 쪽에서 본 것이다.

## 사고 기술

> **각을 복소수의 곱셈으로 옮겨 생각하기**
>
> 각의 합 사이의 항등식은 곱의 편각 사이의 항등식이다. 곱을 정확하게 계산하고 그 편각을 읽어 내라.
>
> 복소수의 계산은 기계적이고 정확한 반면, 역삼각함수(inverse trigonometric functions)를 다루는 일은 실수하기 쉽다. 한쪽에서 다른 쪽으로 옮겨 생각하는 것이 증명에 이르는 가장 빠른 길일 때가 많다.

## 더 도전하기

1 **사촌 격인 문제.** STEP II 2000, 4번 문제 (`step.maths.org/questions/00-s2-q4`)에 도전해 보라. 이 문제는 이 절과 같은 방법, 즉 복소수를 곱하고 편각을 읽어 내는 방법으로 $\frac{\pi}{4}$에 대한 또 다른 아크탄젠트 공식을 증명한다.

2 **오일러의 공식.** $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$를 생각하여 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$임을 보여라.

3 **Hutton의 공식.** $\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$임을 보여라.

4 **항이 몇 개 필요할까?** 마친의 공식으로 $\pi$를 소수점 아래 20자리까지 계산하려면 각 급수의 항이 몇 개씩 필요한지 어림해 보라. 그다음 계산기로 처음 몇 자리를 직접 계산해 보라.

## 더 읽을거리

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). 마친형 공식의 역사를 담고 있다.
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed*** (Springer). $\pi$를 계산하는 옛 방법과 새 방법을 생동감 있게 소개한다.
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 복소수를 기하학적으로 보는 데 가장 좋은 책이다. 제1장은 회전과 확대로서의 곱셈을 다룬다.

# 5.2 단위근 필터

**문제**

**STEP I 1990, 2번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/90-s1-q2`

## 도입

파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)의 한 행에 있는 이항계수(binomial coefficient)를 모두 더하면 $2^n$이다. $(1+x)^n$에 $x = 1$을 대입하면 된다. 대신 $x = -1$을 대입하면 교대합(alternating sum)을 얻는데, 그 값은 0이다. 두 식을 더하면 짝수 번째 자리에 있는 계수의 합이 정확히 절반인 $2^{n-1}$임을 알 수 있다. 즉 짝수 번째 항과 홀수 번째 항이 전체 합을 똑같이 나누어 가진다.

그렇다면 **세 번째마다** 있는 계수는 어떨까? $0, 3, 6, \ldots$번째 자리만 골라내는 실수 $x$는 존재하지 않는다. 그러나 복소수(complex number) 중에는 그런 수가 있다. 1의 세제곱근(cube roots of unity)은 필터 역할을 한다. 거듭제곱 $\omega^k$를 $1, \omega, \omega^2$에 대하여 평균 내면, $k$가 3의 배수일 때는 1이 되고 그렇지 않을 때는 0이 된다. 이 아이디어, 즉 **1의 거듭제곱근 필터**(roots-of-unity filter)는 지금까지 고안된 가장 중요한 알고리즘(algorithm) 가운데 하나인 **이산 푸리에 변환**(discrete Fourier transform)의 축소판이다.

## 시작하기 전에

**생각해 보기** $\omega$는 $z^3 - 1 = 0$의 근이다. $z^3 - 1$을 인수분해(factorise)하여라. 이로부터 왜 $1 + \omega + \omega^2 = 0$이 성립하는가?

$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$이다. $\omega^3 = 1$이지만 $\omega \neq 1$이므로, $\omega$는 두 번째 인수의 근이어야 한다. 즉 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$이다. 기하학적으로 보면 $1, \omega, \omega^2$는 원점을 중심으로 하는 정삼각형(equilateral triangle)의 꼭짓점이고, 이들의 합은 삼각형의 무게중심(centre of mass), 곧 0이다.

## 차근차근 풀기

### 1단계 절댓값과 편각

$1+\omega+\omega^2=0$으로부터 $1+\omega^2=-\omega$이다. $\omega=e^{2\pi\mathrm{i}/3}$이므로 $-\omega=e^{\mathrm{i}\pi}e^{2\pi\mathrm{i}/3}=e^{5\pi\mathrm{i}/3}=e^{-\pi\mathrm{i}/3}$이다. 따라서 $1+\omega^2$의 절댓값(modulus)은 1이고 편각(argument)은 $-\frac{\pi}{3}$이다. 마찬가지로 $1+\omega=-\omega^2=e^{\pi\mathrm{i}/3}$이고, 절댓값은 1, 편각은 $\frac{\pi}{3}$이다.

### 2단계 필터

> **생각해 보기** $k$가 3의 배수일 때 $1+\omega^k+\omega^{2k}$의 값은 무엇인가? 3의 배수가 아닐 때는?

$3\mid k$이면 $\omega^k=1$이므로 합은 3이다. 그렇지 않으면 $\omega^k$는 $\omega$ 또는 $\omega^2$이고, 어느 경우든 $1+\omega^k+\omega^{2k}=1+\omega+\omega^2=0$이다. 따라서 식 $\frac{1}{3}(1+\omega^k+\omega^{2k})$는 $3\mid k$일 때 1이고 그 밖의 경우에는 0이다. 즉 이 식은 3의 배수를 가려내는 판별기이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** $r=1,2,3$에 대하여 $(1+\omega^r)^n$을 각각 이항정리(binomial theorem)로 전개하여 모두 더하여라. 무엇을 얻는가?

$\omega^3=1$이므로

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\omega^k+\omega^{2k}+1)=3\sum_{3\mid k}\binom{n}{k}.$$

한편 1단계에 의하여

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+2^n=e^{n\pi\mathrm{i}/3}+e^{-n\pi\mathrm{i}/3}+2^n=2\cos\frac{n\pi}{3}+2^n.$$

양변을 3으로 나누면 원하는 공식을 얻는다. ∎

### 3단계 두 가지 계산

$n=25$일 때, $\frac{25\pi}{3}=8\pi+\frac{\pi}{3}$이므로 $\cos\frac{25\pi}{3}=\frac{1}{2}$이고,

$$\binom{25}{0}+\binom{25}{3}+\cdots+\binom{25}{24}=\frac{33554432+1}{3}=11184811.$$

> **생각해 보기** 두 번째 합에서는 $k\equiv 2\pmod 3$인 자리가 필요하다. $k\equiv 0$ 대신 $k\equiv 2$를 가려내려면 필터를 어떻게 바꾸면 될까?

판별기를 평행이동한다. $\frac{1}{3}(1+\omega^{k-2}+\omega^{2(k-2)})$는 정확히 $k \equiv 2 \pmod 3$일 때 1이다. $\omega^{-2}=\omega$이고 $\omega^{-4}=\omega^2$이므로

$$\sum_{k\equiv 2}\binom{n}{k} = \frac{1}{3}\Big(2^n + \omega(1+\omega)^n + \omega^2(1+\omega^2)^n\Big).$$

$n=24$이면 $(1+\omega)^{24}=e^{8\pi i}=1$이고 마찬가지로 $(1+\omega^2)^{24}=1$이므로, 괄호 안은 $2^{24}+\omega+\omega^2 = 2^{24}-1$이다. $2^{24}=16777216$이므로

$$\binom{24}{2}+\binom{24}{5}+\cdots+\binom{24}{23} = \frac{16777215}{3} = 5592405. \qquad \blacksquare$$

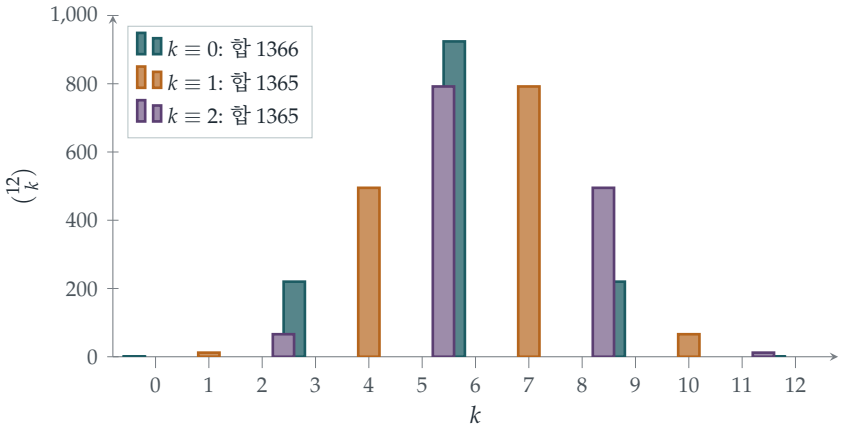



**그림 5.2.1** 파스칼의 삼각형의 12번째 행을 $k$를 3으로 나눈 나머지에 따라 색칠한 그림. 세 부류의 합은 각각 1366, 1365, 1365로, $2^{12}=4096$의 거의 정확히 3분의 1씩이다. 1의 거듭제곱근 필터는 $\frac{4096}{3}$과의 작은 차이 $+\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$까지 정확히 예측한다.

## 돌아보기

- **1의 거듭제곱근에 대한 평균은 나머지(residue)에 따라 걸러 낸다.** $\frac{1}{3}\sum_r \omega^{rk}$는 3이 $k$를 나누는지에 따라 1 또는 0이다. 다항식(polynomial)의 값을 1의 거듭제곱근에서 구해 더하면 세 번째마다 있는 계수만 골라낼 수 있다.
- **필터 평행이동하기.** 평균을 내기 전에 $\omega^{-rj}$를 곱하면 $k \equiv j$인 계수만 골라낸다.
- **실수 답을 위한 복소수.** 답은 정수이고 문제도 정수에 관한 것이었지만, 풀이는 복소평면(complex plane)을 거쳐 갔다.

## 숨은 수학

### 이산 푸리에 변환

3을 임의의 $N$으로, $\omega$를 $e^{2\pi \mathrm{i}/N}$로 바꾸어 보자. 수의 목록 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$에 대하여 수

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

들은 이 목록의 **이산 푸리에 변환**을 이루며, 필터 항등식 $\sum_r \omega^{rk} = N$ 또는 0 덕분에 $\hat{a}_r$로부터 $a_k$를 복원할 수 있다. 이 변환은 신호를 그 구성 주파수들로 분해한다. 1965년 제임스 쿨리(James Cooley)와 존 튜키(John Tukey)는 이 변환을 $N^2$단계 대신 약 $N \log_2 N$단계 만에 계산하는 방법, 곧 **고속 푸리에 변환**(fast Fourier transform)을 발표하였다. 가우스(Gauss)는 1805년에 본질적으로 같은 아이디어를 발견하였지만 끝내 발표하지 않았다. FFT는 오디오와 이미지 압축(MP3와 JPEG), 휴대전화 신호, 의료 영상 장비, 그리고 엄청나게 큰 수의 곱셈에 쓰이며, 20세기의 가장 중요한 알고리즘 가운데 하나로 자주 꼽힌다.

### 생성함수

이 필터는 더 큰 아이디어의 한 사례이다. 수열(sequence) $a_0, a_1, a_2, \ldots$는 다항식이나 멱급수(power series) $A(x) = \sum a_k x^k$로 묶어 나타낼 수 있는데, 이것을 수열의 **생성함수**(generating function)라 한다. 그러면 수열에 대한 연산이 함수에 대한 연산이 된다. 1에서 값을 구하면 수열의 합이 되고, 1의 거듭제곱근에서 값을 구하면 잉여류(residue class)를 골라내며, 미분하면 각 항에 $k$를 가중치로 곱하게 된다. 이 방법은 많은 세기 문제를 대수 문제로 바꾸어 주며, 9장의 핵심 기법이다. 같은 필터를 1의 다섯제곱근과 함께 $(1+x)^n$에 적용하면 정오각형(regular pentagon)과 황금비(golden ratio)로 이어진다. 1의 거듭제곱근의 대수는 Section 6.1에서 더 깊이 다룬다.

## 사고 기술

### 대칭을 이용하여 걸러 내기

**합에서 어떤 조건을 만족하는 항만 골라내려면, 원하는 항에서는 1이고 나머지 항에서는 0인 함수를 대칭(*symmetry*)적인 평균으로 만들어라.**

1의 거듭제곱근에 대한 평균이 대표적인 예이다. "대칭들의 군(group)에 대하여 평균을 내어 원하는 부분을 분리한다"는 같은 원리는 1의 거듭제곱근 필터부터 군의

표현론(representation theory)에 이르기까지 대수학 곳곳에 나타난다.

## 더 도전하기

1 **짝수 번째 자리.** 1의 제곱근(1과 $-1$)으로 필터를 사용하여 $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$임을 보여라.

2 **나머지 한 부류.** $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$에 대한 공식을 구하고, 세 공식을 더하면 $2^n$이 됨을 확인하여라.

3 **네 번째마다.** i를 사용하여 $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$임을 보여라.

4 **나누어떨어짐.** $\{1, 2, \ldots, 12\}$의 부분집합(subset) 가운데 원소의 개수가 3으로 나누어떨어지는 것은 몇 개인가? 원소의 합이 3으로 나누어떨어지는 것은 몇 개인가? (두 번째 질문의 힌트: $\prod_{j=1}^{12}(1 + x^j)$를 1의 세제곱근에서 생각해 보아라.)

## 더 읽을거리

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (A. K. Peters; 온라인 무료 공개). 생성함수에 대한 즐거운 입문서로, 1의 거듭제곱근 필터가 앞부분에 나온다.
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count*** (Mathematical Association of America). 이항 항등식을 세기로 증명하는 책이다.
- **T. W. Körner, *Fourier Analysis*** (Cambridge University Press). 이산 푸리에 변환과 FFT를 다룬다.

# 5.3 $z^{2n}+1$의 인수분해

**문제**

**STEP III 2013, 4번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s3-q4`

## 도입

$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$의 값은 얼마인가? 각 인수는 제곱근이 겹겹이 들어간 복잡한 수이지만, 이들의 곱은 정확히 $\frac{1}{8}$이다. 같은 간격으로 놓인 각에서의 코사인 값들의 곱은 이처럼 자꾸 간단한 수로 정리되는데, 이 문제는 그 이유를 설명해 준다. 요령은 이 각들을 어떤 다항식(polynomial)의 근(root)의 편각(argument)으로 알아보고, 그 다항식을 인수분해(factorise)한 다음, 교묘하게 고른 값을 대입하는 것이다.

복소수 범위에서는 모든 다항식이 일차 인수(linear factor)들로 완전히 인수분해된다. 실수 범위에서는 실수가 아닌 근들이 켤레(conjugate) 쌍으로 나타나고, 이 쌍들이 합쳐져 실수 계수 이차 인수가 된다. 여기서는 이 두 사실이 모두 드러나며, 특히 두 번째 사실 덕분에 실근이 하나도 없는 $z^{2n}+1$을 실수 계수 이차식(quadratic)들의 곱으로 나타낼 수 있다.

## 시작하기 전에

**생각해 보기** 복소평면(complex plane)에서 $z^{2n}=-1$의 해들은 어디에 있는가? $n=2$와 $n=4$일 때 그려 보아라.

이 해들의 절댓값(modulus)은 모두 1이고, 편각 $\theta$는 $2n\theta=\pi+2m\pi$를 만족하므로 $\theta$는 $\frac{\pi}{2n}$의 홀수 배이다. 이 해들은 단위원(unit circle) 위에서 정$2n$각형을 이루며, 어느 꼭짓점도 실수축 위에 놓이지 않도록 회전되어 있다(그림 5.3.1). 이들은 실수축에 대해 서로 대칭인 켤레 쌍 $e^{\pm i\theta}$로 짝지어진다.

## 차근차근 풀기

**1단계** **켤레 쌍은 실수 계수 이차식을 준다**

$(z-e^{\mathrm{i}\theta})(z-e^{-\mathrm{i}\theta}) = z^2-(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta})z+1 = z^2-2z\cos\theta+1.$ ■

**2단계** **인수분해**

$-\pi<\theta\le\pi$인 $-1$의 $2n$제곱근은 $e^{\pm\mathrm{i}\theta_k}$이고, 여기서

$$\theta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2n},\qquad k=1,2,\dots,n.$$

이들은 서로 다른 $2n$개의 수이고 모두 $2n$차 다항식 $z^{2n}+1$의 근이므로, 이것이 근의 전부이며

$$z^{2n}+1=\prod_{k=1}^{n}(z-e^{\mathrm{i}\theta_k})(z-e^{-\mathrm{i}\theta_k})=\prod_{k=1}^{n}(z^2-2z\cos\theta_k+1).$$ ■

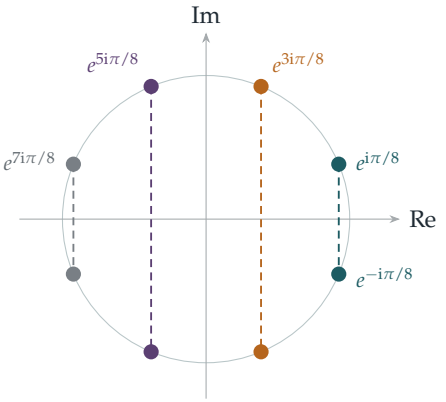



**그림 5.3.1** $z^8=-1$의 여덟 개의 해($n=4$인 경우). 이들은 점선으로 연결된 네 개의 켤레 쌍을 이루며, 각 쌍은 $z^8+1$의 실수 계수 이차 인수 $z^2-2z\cos\theta_k+1$ 하나를 준다.

**3단계** **$z=\mathrm{i}$ 대입하기**

**?** **생각해 보기** $\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}\cos\theta+1$은 무엇인가? 또 $n$이 짝수일 때 $\mathrm{i}^{2n}+1$은 무엇인가?

각 인수는

$$\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}\cos\theta_k+1=-2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

가 되므로 우변은 $(-2\mathrm{i})^n\prod_k\cos\theta_k$이다. 좌변은 $\mathrm{i}^{2n}+1=(-1)^n+1$이고, $n$이 짝수이면 이 값은 2이다. 또 $n$이 짝수일 때

$$(-2\mathrm{i})^n=2^n(-\mathrm{i})^n=2^n\bigl((-\mathrm{i})^2\bigr)^{n/2}=2^n(-1)^{n/2}.$$

따라서

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{n/2}} = (-1)^{\frac{1}{2}n} 2^{1-n}. \qquad \blacksquare$$

$n=4$이면 이것은 도입에서 본 곱이 된다: $(-1)^2 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

#### 4단계 $n$이 홀수일 때

> **생각해 보기** $n$이 홀수이면 각 $\theta_k$ 가운데 하나가 $\frac{\pi}{2}$와 같다. 그것은 어느 것이며, 그 때문에 왜 $z=\mathrm{i}$를 그대로 대입하는 것이 쓸모없게 되는가?

$k=\frac{n+1}{2}$일 때 $\theta_k = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$이므로 해당 인수는 $z^2+1$이고, 이는 $z=\mathrm{i}$에서 0이 된다. 그러면 양변이 모두 0이 되어 아무것도 알 수 없다. 이를 피하는 방법은 먼저 그 인수로 나누어 없애는 것이며, 문제에 주어진 항등식이 바로 그렇게 한 것이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 인수분해의 양변을 $1+z^2$으로 나누고, $z=\mathrm{i}$를 대입한 뒤 정리하여라. 남은 코사인들을 짝지어야 할 것이다.

인수 $z^2+1 (k=\frac{n+1}{2}$인 항)로 나누면

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + z^{2n-2} = \prod_{k\neq\frac{n+1}{2}} \left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right).$$

$z=\mathrm{i}$에서 좌변의 모든 항은 $(-z^2)^j = 1^j = 1$이고 항이 $n$개이므로 좌변은 $n$이다. 우변은 $(-2\mathrm{i})^{n-1}\prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\cos\theta_k$이다. $n-1$이 짝수이므로 $(-2\mathrm{i})^{n-1} = 2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}$이다.

이제 각들을 짝지어 보자. $\theta_{n+1-k} = \pi - \theta_k$이므로 $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$이다. 남은 $n-1$개의 인수는 $k=1,\ldots,\frac{n-1}{2}$에 대하여 이러한 쌍 $\frac{n-1}{2}$개를 이루고, 각 쌍은 $-\cos^2\theta_k$를 기여한다. 따라서

$$n = 2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}\cdot(-1)^{(n-1)/2}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k,$$

이고, 이로부터 $\prod\cos^2\theta_k = n2^{1-n}$을 얻는다. $k=\frac{n-1}{2}$인 마지막 인수는 문제에서처럼 $\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}$이다. $\blacksquare$

$n=3$으로 확인해 보자: $\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 3\cdot 2^{-2}$.

## 돌아보기

- **근을 알면 다항식을 안다.** 다항식은 (상수배를 제외하면) 근에 의해 결정되므로, $z^{2n}+1$의 근을 나열하는 것만으로 인수분해를 얻었다.
- **교묘한 값을 대입하라.** $z=\mathrm{i}$를 대입하자 모든 이차 인수가 코사인의 상수배로 바뀌었다.

▶ **대입했더니 $0 = 0$이 나오면, 먼저 나누어라.** $n$이 홀수일 때는 인수 하나가 $z = \mathrm{i}$에서 0이 되었으므로, 대입하기 전에 그 인수를 제거하였다.

## 숨은 수학

### 대수학의 기본정리

$z^{2n} + 1$이 $\mathbb{C}$ 위에서 일차 인수들로 완전히 인수분해된다는 사실은 **대수학의 기본정리**(*fundamental theorem of algebra*)의 특수한 경우이다. 이 정리는 복소수 계수의 상수가 아닌 모든 다항식이 복소수 근을 가지며, 따라서 일차 인수들로 완전히 인수분해된다는 것이다. 가우스(Gauss)는 1799년 박사 학위 논문에서 널리 인정받은 최초의 증명을 내놓았고, 이후에도 여러 차례 이 정리로 돌아와 새로운 증명을 제시하였다. 이 정리의 결과로, 실수가 아닌 근은 1단계에서 본 것과 똑같이 켤레 쌍으로 나타나므로, 모든 실수 계수 다항식은 실수 계수의 일차 인수와 이차 인수들로 인수분해된다. 이 정리는 이름은 "대수학"이지만 실질은 해석학이다. 모든 증명은 연속성 같은 실수의 어떤 성질을 사용하며, 복소해석학(complex analysis) 첫 강의에서 가장 매끄러운 증명 가운데 하나를 보게 될 것이다.

### 사인과 코사인의 곱

이 방법으로 항등식들을 한 무리 얻을 수 있다. $z^{2n} + 1$ 대신 $z^n - 1$을 사용하면

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

을 얻으며, 이것의 기하학적 형태는 Section 5.4에서 증명된다. 이런 항등식들은 진동계의 분석(용수철로 연결된 $n$개의 질점의 진동수에는 $\sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$이 나타난다)과 세기 문제(어떤 그래프(graph)의 신장 트리(spanning tree)의 개수나 직사각형의 도미노 타일링(domino tiling)의 개수가 코사인들의 곱으로 주어진다)에 등장한다. $m \times n$ 직사각형의 도미노 타일링에 대한 Kasteleyn의 1961년 공식은 $\cos^2 \frac{j\pi}{m+1}$과 $\cos^2 \frac{k\pi}{n+1}$로 이루어진 식들의 이중 곱이다.

## 사고 기술

**근에서 곱으로**

같은 간격으로 놓인 각에서의 삼각함수 값들의 곱을 계산하려면, 그 값들이 간단한 다항식의 근에서 나온 것임을 알아보고, 인수분해한 뒤, 편리한 값을 대입하라.

어떤 값을 고르느냐가 기술의 핵심이다. 여기서는 $z=\mathrm{i}$가 각 이차 인수를 코사인으로 바꾸어 주었다. 다른 값($z=1$이나 $z=-1$ 등)을 고르면 다른 항등식을 얻는다.

## 더 도전하기

**1** **칠각형과 관련된 곱.** 소문항 (ii)에 $n=7$을 적용하여 $\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}$임을 보여라. 그리고 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$임을 보여라. (**힌트:** $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$를 이용하여 각들 사이의 관계를 찾거나, 항등식 $\sin 2x=2\sin x\cos x$를 반복해서 사용하여라.)

**2** **또 다른 대입.** 인수분해에 $z=1$을 대입하여 다음을 보여라.

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}=2^{\frac{1}{2}-n}.$$

**3** **$z^6+1$을 인수분해하기.** $z^6+1$을 세 개의 실수 계수 이차식의 곱으로 나타내고, 전개하여 답을 확인하여라.

**4** **사인.** $z^{2n}-1$을 같은 방법으로 인수분해하고 $z^2-1$로 나누어 다음을 보여라.

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

## 더 읽을거리

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 『시각적 복소해석학』. 2장에서 1의 거듭제곱근(roots of unity)과 다항식을 아름다운 그림과 함께 다룬다.
- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra*** (Springer). 『대수학의 기본정리』. 해석학, 대수학, 위상수학(topology)에서 나온 이 정리의 여러 증명을 학부생을 위해 서술하였다.
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale*** (Princeton University Press). 『허수 이야기』. 1의 거듭제곱근과 그 쓰임을 포함한 $\sqrt{-1}$의 역사.

# 5.4 정다각형 속의 거리

**문제**

**STEP III 2016, 7번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s3-q7`

## 도입

반지름이 1인 원에 정칠각형(regular heptagon)을 그린다. 한 꼭짓점에서 나머지 꼭짓점으로 여섯 개의 현(chord)을 긋고 그 길이를 잰다. 여섯 길이를 모두 곱한다. 답은 정확히 7이다. 정100각형에서 한 꼭짓점에서 그은 99개의 현의 길이를 모두 곱하면 정확히 100이다.

이렇게 깔끔한 결과가 왜 성립할까? 현의 길이 자체는 지저분하다($2\sin\frac{\pi}{7}$, $2\sin\frac{2\pi}{7}$ 등). 이 문제는 이 결과가 간단한 대수적 항등식, 즉 단위근(roots of unity)을 이용한 $z^n - 1$의 인수분해(factorisation)의 기하학적 그림자라는 것, 그리고 평면 위의 거리가 복소수의 절댓값(modulus)이라는 것을 보여 준다.

## 시작하기 전에

**생각해 보기** 다각형의 꼭짓점을 1의 $n$제곱근 $X_k = \omega^k$에 놓자. $P$가 점 $z$일 때 $|PX_k|$를 $z$로 나타내면 무엇인가? 그렇다면 모든 거리의 곱은 무엇인가?

$|PX_k| = |z - \omega^k|$이고, 이들을 모두 곱하면 $|(z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1})|$인데, 문제의 첫 부분에 따르면 이는 $|z^n - 1|$이다. $n$개의 거리의 곱이 하나의 절댓값이 되었다. 나머지는 모두 $z$를 영리하게 고르는 일이다.

## 차근차근 풀기

### 1단계 인수분해

각 $\omega^k$는 $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$을 만족하므로 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$은 $z^n - 1$의 근이다. 이들은 서로 다르다(편각 $\frac{2\pi k}{n}$이 0과 $2\pi$ 사이에서 모두 다르다). 따라서 이들은 이 $n$차 다항식의 근 $n$개 전부이고, 최고차항의 계수가 1이므로 $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k)$이다. ■

### 2단계 수직이등분선 위의 점

그림을 회전하여 $X_k = \omega^k$가 되게 하자. $X_0 = 1$과 $X_1 = \omega$에서 같은 거리에 있는 점들은 $X_0X_1$의 수직이등분선(perpendicular bisector)을 이루며, 이는 $O$를 지나고 각이 $\frac{\pi}{n}$인 직선이다.

**생각해 보기** 따라서 $P$는 어떤 실수 $t$(양수 또는 음수)에 대해 $z = te^{i\pi/n}$이고, $|OP| = |t|$이다. $z^n$은 무엇인가?

$z^n = t^n e^{i\pi} = -t^n$이다. 따라서

$$|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |z^n - 1| = |-t^n - 1| = |t^n + 1|.$$

$n$이 짝수이면 $t^n = |t|^n \geq 0$이므로 이 값은 $|OP|^n + 1$이다. ■

**잠깐, 직접 해 보기** $n$이 홀수이면 어떻게 될까? $t > 0$인 경우와 $t < 0$인 경우를 따로 생각하고, 각 경우가 기하학적으로 무엇을 뜻하는지 말해 보아라.

$n$이 홀수이면 $t^n$은 $t$와 부호가 같다.

- $t \geq 0$이면, 즉 $P$가 $O$를 기준으로 $X_0X_1$의 중점과 같은 쪽에 있으면, 곱은 $|OP|^n + 1$이다.
- $t < 0$이면, 즉 $P$가 $O$를 기준으로 반대쪽(변 $X_0X_1$의 맞은편 꼭짓점 쪽)에 있으면, $t^n = -|OP|^n$이고 곱은 $\left|1 - |OP|^n\right|$이다.

$n$이 홀수일 때, $O$를 지나고 $X_0X_1$에 수직인 직선은 반대편의 한 꼭짓점을 지난다. 두 번째 경우에서 $P$가 그 꼭짓점일 때($|OP| = 1$) 곱은 0이 되는데, 이때 거리 중 하나가 0이므로 당연한 결과이다.

### 3단계 꼭짓점에서 그은 현

**생각해 보기** 이제 $P = X_0$이고 거리 중 하나인 $|X_0X_0|$가 0이므로 $|z^n - 1| = 0$은 쓸모가 없다. $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$을 근으로 갖지만 1은 근으로 갖지 않는 다항식은 무엇인가?

$z^n - 1$을 $z - 1$로 나누면

$$(z - \omega)(z - \omega^2)\cdots(z - \omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

우변은 다항식이므로 이 식은 모든 $z$에 대해 성립하며, $z = 1$에서도 성립하고 이때 값은 $n$이다. $z = 1$에서 절댓값을 취하면

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = |1-\omega|\,|1-\omega^2| \cdots |1-\omega^{n-1}| = n. \qquad \blacksquare$$

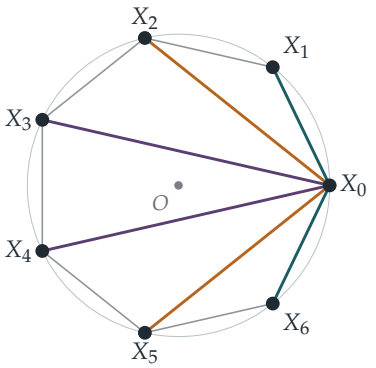



**그림 5.4.1** 반지름이 1인 원에 내접하는 정칠각형. $X_0$에서 그은 여섯 현의 길이는 $2\sin\frac{k\pi}{7}$이며, 약 0.868(청록색), 1.564(호박색), 1.950(자주색)이 각각 두 번씩 나타난다. 이들의 곱은 정확히 7이다.

## 돌아보기

- **거리는 절댓값이다.** $|PX_k| = |z - \omega^k|$이므로 거리의 곱은 곱의 절댓값이고, 그 곱은 닫힌 꼴(closed form)로 나타낼 수 있었다.
- **대칭을 이용해 좌표를 정한다.** 꼭짓점이 단위근이 되도록 회전하고 $O$를 지나는 대칭축을 이용하자 $z^n$을 쉽게 계산할 수 있었다.
- **대입하기 전에 0이 되는 인수를 소거한다.** Section 5.3에서처럼, 관심 있는 점에서 0이 되는 인수를 나누어 없애자 대입이 가능해졌다.

## 숨은 수학

### 코츠(Cotes)의 정리

소문항 (i)은 로저 코츠의 정리이다. 코츠는 뉴턴(Newton)의 *Principia*(프린키피아) 제2판을 편집한 케임브리지의 뛰어난 젊은 수학자로, 1716년 서른세 살의 나이로 세상을 떠났다(뉴턴은 "그가 살았더라면 우리는 무언가를 알게 되었을 것이다"라고 말했다). 코츠는 $P$가 $O$에서 정$n$각형의 한 꼭짓점을 지나는 반직선 위에 있으면 $P$에서 꼭짓점들까지

의 거리의 곱이 $||OP|^n - 1|$이고, $P$가 한 변의 중점을 지나는 반직선 위에 있으면 그 곱이 $|OP|^n + 1$임을 발견했다. 그는 복소수를 쓰지 않고 이 결과를 이용해 $x^n \pm 1$을 실수 계수 이차식들로 인수분해했는데, 이는 유리함수(rational function)를 적분하는 데 필요했다. 이 정리는 그가 죽은 뒤인 1722년에 출판되었다.

### 사인의 곱

$|1 - \omega^k| = |e^{-\mathrm{i}\pi k/n} - e^{\mathrm{i}\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$이므로 소문항 (ii)는 다음을 말한다.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

이것은 Section 5.3의 코사인 곱과 짝을 이룬다. 이와 관련된 곱은 $z^n - 1$의 **판별식**(discriminant)을 준다. 서로 다른 1의 $n$제곱근의 모든 쌍 사이 거리의 제곱을 곱하면 $n^n$이다. 판별식은 다항식의 근들이 서로 얼마나 떨어져 있는지를 재며, 다항식의 대수학과 수체(number field)의 대수학에서 핵심적인 역할을 한다. 이 내용은 6장에서 다룬다.

### 정전기학과 균등한 간격

물리적으로 해석할 수도 있다. 원 위에 크기가 같은 전하 $n$개를 놓자. (2차원 정전기학의 로그 퍼텐셜을 쓸 때) 퍼텐셜 에너지를 최소화하는 배치는 정다각형이며, 그 에너지에는 정확히 $\sum \ln|X_jX_k|$, 즉 거리의 곱의 로그가 들어 있다. "가능한 한 넓게 퍼진" 점들은 수치해석(Section 3.6에서 최적의 보간점은 $x = \cos\theta$를 통해 정다각형에서 나온다)과 무작위 행렬(random matrices) 이론에서 중요하다.

## 사고 기술

> **복소수로 기하를 대수로 바꾸기**
>
> 평면 위의 점은 복소수이고, 거리는 절댓값이며, 정다각형은 단위근이다. 거리의 곱은 다항식의 절댓값이 된다.
>
> 이렇게 옮기면 $z^n - 1$의 인수분해 같은 대수적 항등식으로, 직접 보기는 매우 어려운 기하학적 사실을 증명할 수 있다.

## 더 도전하기

1 **작은 경우 확인하기.** 정사각형($n=4$)과 정삼각형($n=3$)에 대해 소문항 (ii)를 직접 확인하여라.

2 **꼭짓점을 지나는 경우.** $P$가 $O$에서 $X_0$을 지나는 반직선 위에 있으면 $|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = \big||OP|^n - 1\big|$임을 보여라.

3 **평균 거리.** 소문항 (ii)와 Section 3.2의 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 이용하여 $X_0$에서 그은 $n-1$개의 현의 평균 길이가 $n^{1/(n-1)}$ 이상임을 보여라. 실제 평균 $\frac{1}{n-1}\sum_{k} 2\sin\frac{k\pi}{n}$을 $n=6$일 때 구하고 비교하여라.

4 **모든 현.** 심화단위원에 내접하는 정$n$각형의 $\binom{n}{2}$개 현의 길이를 모두 곱하면 $n^{n/2}$임을 보여라.

## 더 읽을거리

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 복소수를 이용한 기하학을 아름다운 그림과 함께 다룬다.
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems*** (Mathematical Association of America). 정다각형에 관한 우아한 문제 여러 개가 실려 있다.
- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher*** (Cambridge University Press). 코츠의 생애와 그의 수학을 다룬 전기이다.

# 5.5 유리수처럼 보이지만 아닌 각

**문제**

**STEP III 2022, 8번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

## 도입

학교 기하에서 만나는 각은 대개 $30°$, $45°$, $60°$처럼 도 단위로 정수이다. 이 각들의 코사인 값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$나 $\frac{1}{2}$ 같은 수이다. 그렇다면 반대 방향은 어떨까? 코사인 값이 $\frac{1}{3}$ 같은 간단한 분수라면, 그 각도 도 단위로 깔끔한 수일까?

각 $\cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.528779\ldots°$는 과학의 여러 분야에 등장한다. 이 각은 정사면체(regular tetrahedron)의 두 면 사이의 각이고, 그 보각(supplement)인 $109.47°$는 메테인 분자에서 두 결합 사이의 각이다. 이 문제는 이 각이 도 단위로 유리수(rational)가 아님을 증명한다. 즉 $70\frac{1}{2}$도 아니고, $\frac{1411}{20}$도 아니며, 어떤 분수도 아니다. 이 각의 소수 전개는 결코 순환하지 않는다. 언뜻 사소해 보이는 이 사실이 1900년에 다비트 힐베르트(David Hilbert)가 제시한 유명한 문제 가운데 하나를 해결했다.

## 시작하기 전에

**생각해 보기** $\theta$가 유리수, 예를 들어 $\theta = \frac{p}{q}$도라고 가정하자. $\sin(k\theta) = 0$을 만족하는 양의 정수 $k$를 찾아라.

$k = 180q$로 잡으면 $k\theta = 180p$도이고, 이는 반 바퀴의 정수배이므로 $\sin(k\theta) = 0$이다. 따라서 유리수 각은 언제나 어떤 배수가 $180°$의 배수에 떨어진다. 그러므로 $\theta$가 무리수(irrational)임을 증명하려면 어떤 배수 $k\theta$도 사인 값이 0이 아님을 보이면 충분하다. 소문항 (ii)는 그런 $k$가 있다면 그 가운데 가장 작은 것을 잡고 모순(contradiction)을 이끌어 냄으로써 이를 보인다. 이는 다시 Section 1.3의 정렬 원리(well-ordering principle)이다.

## 차근차근 풀기

### 1단계 배각 공식

**생각해 보기** $\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$로 쓰고, 인수 $\cos^k\theta$를 묶어 내어라. 괄호 안에는 무엇이 남는가?

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k = \cos^k\theta \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{i}^j \tan^j\theta$이다. 허수부(imaginary part)는 홀수 $j = 2m+1$에서 나오며, 이때 $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}(-1)^m$이다.

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m+1}\theta \\ &= \sin\theta\cos^{k-1}\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m}\theta.\end{aligned}$$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$이므로 이것이 구하는 공식이다. ■짝수 $j = 2m$에서 나오는 실수부(real part)는 다음을 준다.

$$\cos k\theta = \cos^k\theta \left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

### 2단계 홀짝성

이제 $\sec\theta = a$는 홀수인 정수이므로 $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$은 짝수인 정수이다. 또 $\theta$는 $0^\circ$와 $90^\circ$ 사이에 있으며 양 끝값은 아니므로 $\sin\theta \neq 0$이고 $\cos\theta \neq 0$이다.

**생각해 보기** $\sin(k\theta) = 0$이면 괄호 $k - \binom{k}{3}(a^2-1) + \cdots$는 0이어야 한다. 첫째 항을 뺀 모든 항은 $a^2 - 1$의 배수이다. 이로부터 $k$에 대해 무엇을 알 수 있는가?

괄호는 $k$에 짝수 $a^2 - 1$의 배수들을 더한 것이다. $k$가 홀수라면 괄호는 홀수가 되는데, 홀수인 정수는 0일 수 없다. 따라서 $k$는 짝수여야 한다.

그러면 $\sin(k\theta) = 2\sin(\tfrac{1}{2}k\theta)\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$이다. 그런데 $\tfrac{1}{2}k$는 $k$보다 작은 양의 정수이므로, $k$의 최소성에 의해 $\sin(\tfrac{1}{2}k\theta) \neq 0$이다. 따라서 $\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$이다. ■

### 3단계 모순

**잠깐, 직접 해 보기** $m = \tfrac{1}{2}k$로 두고 코사인 공식을 적용하여라. $\cos(m\theta)$는 왜 결코 0이 될 수 없는가?

1단계에 의해 $\cos(m\theta) = a^{-m}\left(1 - \binom{m}{2}(a^2-1) + \binom{m}{4}(a^2-1)^2 - \cdots\right)$이다. 괄호는 1에 짝수 $a^2 - 1$의 배수들을 더한 것이므로 홀수이고, 특히 0이 아니다. 따라서 $\cos(m\theta) \neq 0$이며,

이는 2단계와 모순이다.

그러므로 $\sin(k\theta) = 0$을 만족하는 양의 정수 $k$는 존재하지 않는다. (그런 것이 하나라도 있다면 가장 작은 것이 있어야 하는데, 방금 가장 작은 것이 존재할 수 없음을 보였다.) 시작하기 전에에서 관찰한 사실에 의해, $\theta$는 도 단위로 유리수일 수 없다. ■

#### 4단계 코탄젠트 버전

? **생각해 보기** $\cot\phi = \frac{1}{b}$이면 $\sec^2\phi - 1$은 무엇인가? 그것은 짝수인가?

$\tan\phi = b$이므로 $\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2$이고, $b$가 짝수이므로 이 값은 짝수이다(실제로는 4의 배수이다). 또 $0° < \phi < 90°$이므로 $\sin\phi$와 $\cos\phi$는 0이 아니다. 이제 똑같은 논증이 그대로 통한다. $k$가 $\sin(k\phi) = 0$을 만족하는 가장 작은 양의 정수라면, 괄호 $k - \binom{k}{3}b^2 + \cdots$는 0이 되어야 하므로 $k$는 짝수이다. 그러면 $\cos(\frac{1}{2}k\phi) = 0$이다. 그러나 코사인의 괄호 $1 - \binom{m}{2}b^2 + \cdots$는 홀수이다. 모순이므로 $\phi$는 무리수이다. ■

예를 들어 $\cot^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}2 \approx 63.43°$는 무리수이다.

## 돌아보기

- **유리수 각은 주기적인 배수를 가진다.** 이렇게 바꾸어 말함으로써 무리수임을 보이는 문제가 모든 $k$에 대한 $\sin(k\theta)$에 관한 명제로 바뀌었다.
- **홀짝성 논증.** 2를 법으로(modulo 2) 계산하여 어떤 정수들이 홀수이고 따라서 0이 아님을 보였다. 단순하지만 결정적이다.
- **가장 작은 반례.** 가장 작은 $k$를 가정하고 그보다 작은 것(여기서는 $\frac{1}{2}k$)이 존재해야 함을 보이는 것은 1장의 정렬 원리 논증이다.

## 숨은 수학

#### 무리수 각만큼의 회전

$\theta$가 도 단위로 유리수이면, $\theta$만큼 계속 회전할 때 결국 출발점으로 돌아온다. $\theta$가 무리수이면 결코 돌아오지 않으며, 놀라운 일이 일어난다. 점 $k\theta$들(360°를 법으로 생각한다)이 원 위에 **고르게** 퍼져서 모든 각에 얼마든지 가까이 다가간다. 이것이 **균등분포 정리**(equidistribution theorem)로, 1910년 무렵 헤르만 바일(Hermann Weyl), 바츨라프 시에르핀스키(Wacław Sierpiński), Piers Bohl이 각자 독립적으로 증명하였다. 그림 5.5.1은 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$의 처음 40개 배수를 보여 준다. 이 점들은 이미 원을 채워 가고 있으며, 어느 점도

반복되지 않는다.

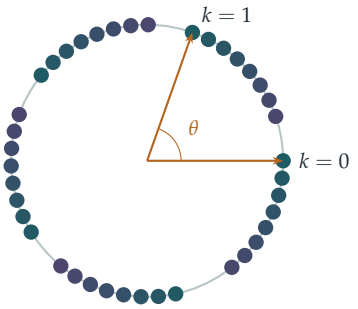



**그림 5.5.1** $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$일 때, $k = 0, 1, \ldots, 39$에 대한 각 $k\theta$의 점들($k$가 커질수록 청록색에서 자두색으로 바뀐다). $\theta$가 무리수이므로 어느 점도 반복되지 않으며, 점들은 원 전체에 고르게 퍼진다.

### 힐베르트의 세 번째 문제

1900년 힐베르트는 새로운 세기를 위한 스물세 개의 문제를 제시하였다. 그 세 번째 문제는 다음과 같다. 두 다면체(polyhedron)의 부피가 같다면, 한쪽을 유한 개의 다면체 조각으로 잘라 다시 이어 붙여 언제나 다른 쪽을 만들 수 있는가? (평면의 다각형에 대해서는 답이 "그렇다"이며, 이것이 월리스–보여이–게르비엔 정리(Wallace–Bolyai–Gerwien theorem)이다.) 1년도 안 되어 힐베르트의 제자 막스 덴(Max Dehn)은 답이 **아니다**임을 보였다. 정사면체는 잘라서 다시 이어 붙여 같은 부피의 정육면체로 만들 수 없다. 덴의 증명은 각 다면체에 모서리의 길이와 이면각(dihedral angle)으로 만든 양, 오늘날 **덴 불변량**(Dehn invariant)이라 부르는 양을 대응시키는데, 이 양은 자르고 다시 이어 붙여도 변하지 않는다. 정육면체에서는 이 값이 0이고, 정사면체에서는 0이 아닌데, 그 까닭은 바로 이면각 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이 $180°$의 유리수 배가 아니기 때문이다. 이것이 정확히 이 문제가 증명하는 내용이다.

### 니븐의 정리

이 이야기는 어디까지 나아갈까? 1956년 이반 니븐(Ivan Niven)은 $\theta$가 도 단위로 유리수이고 $\cos\theta$가 유리수이면 $\cos\theta$는 $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ 가운데 하나임을 증명하였다. 따라서 코사인 값이 유리수인 "좋은" 각은 $0°, 60°, 90°, 120°, 180°$와 이와 관련된 각들뿐이다. 이 증명은 $2\cos\theta$가 정수 계수를 갖는 최고차항 계수가 1인 다항식(monic polynomial)의 근, 즉 **대수적 정수**(algebraic integer)라는 사실을 이용하며, 이는 Section 1.3의 끝에서 언급한 아이디어이다.

## 사고 기술

**0이 아님을 보이는 증명으로서의 홀짝성**

정수로 이루어진 식이 결코 $0$이 아님을 보이려면, 그것이 언제나 홀수임을 보여라. 즉 2를 법으로 줄여라.

이 단순한 아이디어가 최소 반례(minimal counterexample)와 결합하여 깊은 사실을 증명하였다. 작은 수를 법으로 줄여 어떤 방정식이 성립할 수 없음을 보이는 것은 Section 1.5에서처럼 정수론(number theory)에서 가장 흔히 쓰이는 수법 가운데 하나이다.

## 더 도전하기

1 **정사면체.** 정사면체의 두 면 사이의 각이 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이고, 메테인 분자에서 두 결합 사이의 각(정사면체의 중심에서 두 꼭짓점으로 향하는 선분 사이의 각)이 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$임을 보여라.

2 **3–4–5 삼각형.** 3–4–5 삼각형의 가장 작은 각이 도 단위로 무리수임을 보여라. (*힌트:* 이 각은 $\cot^{-1}\frac{4}{3}$이다. 논증을 적절히 고치거나, 가우스 정수(Gaussian integer) $4+3i$의 거듭제곱을 생각하여 어느 것도 실수가 아님을 보여라.)

3 **왜 $a$가 홀수인가?** $a=2$일 때 논증의 어디가 잘못되는가? $\cos^{-1}\frac{1}{2}$는 유리수인가?

4 **작은 경우에 대한 니븐의 정리.** $0°$와 $90°$ 사이에서 도 단위로 정수인 각 $\theta$ 가운데 $\cos\theta$가 유리수인 것을 모두 찾고, 그 목록이 니븐의 정리와 일치하는지 확인하여라.

## 더 읽을거리

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). 삼각함수의 유리수 값에 관한 니븐의 정리가 실려 있다.
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK*,** 힐베르트의 세 번째 문제를 다룬 장. 덴의 해법을 아름답게 설명한다.
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*** (A. K. Peters). 스물세 개 문제 모두에 얽힌 이야기를 들려준다.

# 5.6 페르마 점

**문제**

**STEP III 2000, 3번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/00-s3-q3`

## 도입

세 마을이 서로를 모두 잇는 도로망을 가능한 한 짧게 건설하려 한다. 교차점은 어디에 두어야 할까? 1640년경 페르마(Pierre de Fermat)는 삼각형 내부에서 $PA + PB + PC$를 최소로 하는 점 $P$를 찾는 문제를 제기했고, 토리첼리(Evangelista Torricelli)가 이를 풀었다. 그 점은 세 변이 모두 $120^\circ$의 각으로 보이는 점이다.

이 문제는 복소수(complex numbers)를 이용하여 그 점을 작도하는 아름다운 방법을 증명한다. 삼각형의 각 변 위에 바깥쪽으로 정삼각형(equilateral triangle)을 세우고, 새로 생긴 각 꼭짓점을 원래 삼각형의 마주 보는 꼭짓점과 잇는다. 세 직선은 한 점, 곧 **페르마 점**(Fermat point)에서 만나며, 세 선분의 길이는 모두 같고 그 길이가 바로 도로 총길이의 최솟값이다. 복소수와 $e^{\mathrm{i}\pi/3}$에 관한 항등식 하나만 있으면 전체 논증은 몇 줄의 대수 계산으로 끝난다.

## 시작하기 전에

**생각해 보기** $A, B, C$는 어디에 있는가? 각각의 편각(argument)은 무엇인가? $OA$, $OB$, $OC$가 서로 이루는 각은 얼마인가?

$A = p$는 양의 실수축(real axis) 위에 있다(편각 $0^\circ$). $B = q\alpha^2 = qe^{2\pi\mathrm{i}/3}$의 편각은 $120^\circ$이다. $C = -r\alpha = re^{\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}\pi/3}$의 편각은 $240^\circ$이다. 따라서 원점은 삼각형 내부의 점으로, 이 점에서 세 꼭짓점은 서로 $120^\circ$의 각을 이루며 보이고, 각 꼭짓점까지의 거리는 $p$, $q$, $r$이다. 원점은 구성상 **바로** 페르마 점이다. 이 문제는 정삼각형 작도가 이 점을 찾아낸다는 것을 보이는 것이다.

## 차근차근 풀기

### 1단계 핵심 항등식

$\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$이므로 $\alpha$는 $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$의 근이다. $\alpha \neq -1$이므로 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, 즉 $1+\alpha^2 = \alpha$이다. ■

여기서 유용한 두 결과가 나온다. $1-\alpha = -\alpha^2$이고, $\alpha - \alpha^2 = 1$이다. 또한 $1-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\pi/3}$은 $\alpha$의 켤레복소수(complex conjugate)이다.

### 2단계 회전으로 본 정삼각형

**생각해 보기** 삼각형 $CAN$은 꼭짓점을 시계 방향으로 이름 붙인 정삼각형이다. $C$에 서 있다면 $A$에서 $N$으로 어떻게 갈 수 있는가? $N-C$를 $A-C$로 나타내어라.

$C$, $A$, $N$ 순으로 시계 방향으로 돌면, 점 $N$은 $A$를 $C$를 중심으로 시계 방향으로 $60^\circ$ 회전(rotation)시켜 얻는다. $e^{-i\pi/3} = 1-\alpha$를 곱하면 시계 방향으로 $60^\circ$ 회전하므로

$$\begin{aligned} N &= C + (1-\alpha)(A-C) = -r\alpha + (1-\alpha)(p+r\alpha) \\ &= (1-\alpha)p + r(\alpha - \alpha^2 - \alpha) = (1-\alpha)p - \alpha^2 r. \end{aligned}$$ ■

(반시계 방향이 아니라 시계 방향으로 회전시키므로 $N$은 $CA$에 대해 원점의 반대편, 즉 삼각형 바깥에 놓인다.)

**잠깐, 직접 해 보기** 같은 방법으로 $L$과 $M$을 구하고, 1단계의 항등식을 이용하여 간단히 하여라.

마찬가지로 $L = A + (1-\alpha)(B-A)$이고 $M = B + (1-\alpha)(C-B)$이다.

$$\begin{aligned} L &= p + (1-\alpha)(q\alpha^2 - p) = \alpha p + (\alpha^2 - \alpha^3)q = \alpha p + (\alpha^2+1)q = \alpha(p+q), \\ M &= q\alpha^2 + (1-\alpha)(-r\alpha - q\alpha^2) = q\alpha^3 + r(\alpha^2 - \alpha) = -q - r. \end{aligned}$$

그리고 $1-\alpha = -\alpha^2$을 이용하면 $N = -\alpha^2 p - \alpha^2 r = -\alpha^2(p+r)$이다.

### 3단계 원점을 지나는 세 직선

**생각해 보기** $L = \alpha(p+q)$와 $C = -r\alpha$를 비교해 보라. 무엇을 알 수 있는가? $M$과 $A$, $N$과 $B$에 대해서도 같은 방법으로 해 보라.

$L$은 $\alpha$의 양의 실수배이고 $C$는 $\alpha$의 음의 실수배이다. 따라서 $L$과 $C$는 $O$를 지나는 같은 직선

위에서 $O$의 양쪽에 놓이고, 선분 $LC$는 원점을 지나며 그 길이는 $|L-C| = |\alpha|(p+q+r) = p+q+r$이다.

마찬가지로 $M = -(q+r)$과 $A = p$는 실수축 위에서 $O$의 양쪽에 놓이므로, $MA$는 $O$를 지나고 길이는 $p+q+r$이다. 또 $N = -\alpha^2(p+r)$과 $B = q\alpha^2$은 $O$를 지나고 방향이 $\alpha^2$인 직선 위에서 서로 반대편에 놓이므로, $NB$는 $O$를 지나고 길이는 $p+q+r$이다. ■

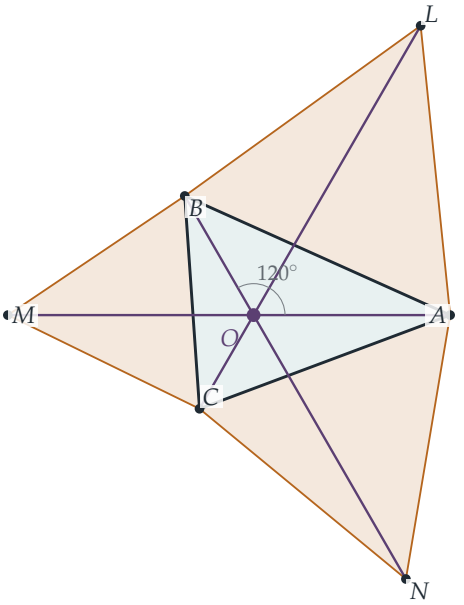



**그림 5.6.1** $p = 2, q = 1.4, r = 1.1$일 때의 페르마 점. $ABC$의 각 변 위에 바깥쪽으로 정삼각형(호박색)을 세운다. 직선 $LC$, $MA$, $NB$(자주색)는 모두 원점 $O$를 지나는데, $O$는 $ABC$의 각 변이 120°의 각으로 보이는 점이다. 세 선분의 길이는 모두 $p+q+r = 4.5$이다.

## 돌아보기

- **회전은 곱셈이다.** 정삼각형을 세운다는 것은 한 꼭짓점을 다른 꼭짓점을 중심으로 60° 회전시킨다는 뜻이고, 이는 $e^{\pm i\pi/3}$을 곱하는 것이다.
- **영리한 좌표 선택.** 페르마 점을 원점에 두고 꼭짓점들을 $1$, $\alpha^2$, $-\alpha$ 방향에 놓았더니 모든 식이 간단히 정리되었다.
- **하나의 항등식을 거듭 사용하기.** 모든 식의 간단히 하기는 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$과 $\alpha^3 = -1$에서 나왔다.

## 숨은 수학

### 페르마 점이 거리의 합을 최소로 하는 이유

왜 $PA + PB + PC$는 각 변이 120°의 각으로 보이는 점에서 가장 작아야 할까? 멋진 논증이 하나 있다. 전체 그림을 $B$를 중심으로 60° 회전시켜 $A$를 $L'$($AB$ 위에 세운 정삼각형의 꼭짓점)으로, $P$를 $P'$으로 보낸다. 삼각형 $BPP'$은 정삼각형이므로 $PB = PP'$이고, $PA = P'L'$이다. 그러면 $PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$이고, 이는 $L'$에서 $C$로 가는 경로의 길이이다. 이 값은 $|L'C|$ 이상이며, 등호는 경로가 직선일 때, 즉 $P$에서의 각이 120°일 때 정확히 성립한다. 따라서 총길이의 최솟값은 문제에서 구한 대로 $|LC| = p + q + r$이다. (이 논증은 삼각형의 모든 각이 120°보다 작을 때 성립한다. 그렇지 않으면 최솟값은 둔각인 꼭짓점에서 나온다.)

### 비누막과 슈타이너 트리

세 개의 말뚝($A$, $B$, $C$를 나타낸다)이 달린 틀을 비눗물에 담갔다 꺼내면, 비누막은 표면장력(surface tension) 에너지를 최소로 하면서 페르마 점에서 120°로 만나는 세 개의 벽을 이룬다. 점이 더 많을 때 이들을 잇는 가장 짧은 연결망은 **슈타이너 트리**(Steiner tree)로, 세 변이 120°로 만나는 교차점이 추가로 생긴다. 슈타이너 트리를 찾는 일은 일반적으로 계산상 어렵지만(NP-난해(NP-hard) 문제이다), 도로망, 송유관, 컴퓨터 칩의 배선을 설계할 때 실제로 중요하다.

### 나폴레옹 정리(Napoleon's theorem)

같은 그림 속에는 또 하나의 보석이 숨어 있다. 임의의 삼각형의 세 변 위에 세운 세 정삼각형의 **중심**은 정삼각형을 이룬다. 이 정리는 전통적으로 나폴레옹 보나파르트(Napoleon Bonaparte, 열성적인 아마추어 수학자였다)의 업적으로 알려져 있지만, 그가 이것을 발견했다는 증거는 없다. 이 정리 역시 $1 + \alpha^2 = \alpha$를 이용하면 복소수로 짧게 증명할 수 있다.

## 사고 기술

**문제에 맞는 좌표를 고르라**

가장 중요한 점을 원점에 두고, 문제의 대칭성에 맞추어 배치하라. 좋은 선택을 하면 대수 계산이 거의 자명해질 수 있다.

여기서 원점은 페르마 점이었고, 세 꼭짓점은 (부호를 제외하면) $-1$의 세제곱근(cube roots) 방향에 놓였다. 다른 좌표를 썼다면 같은 계산이 훨씬 복잡해졌을 것이다.

## 더 도전하기

1 **이름 붙인 순서 확인하기.** 정삼각형의 꼭짓점을 반시계 방향으로 이름 붙이면(즉 안쪽으로 세우면) 세 직선이 일반적으로 $O$를 지나지 않음을 보여라.

2 **나폴레옹 정리.** 정삼각형 $ABL$의 중심이 $\frac{1}{3}(A+B+L)$임을 보여라. 위에서 구한 식들을 이용하여 세 중심이 정삼각형을 이룸을 보여라.

3 **최솟값.** $p=2$, $q=1.4$, $r=1.1$일 때, $P$가 각 꼭짓점에 있을 때와 무게중심(centroid) $\frac{1}{3}(A+B+C)$에 있을 때 $PA+PB+PC$를 계산하고, 모두 4.5보다 큼을 확인하여라.

4 **정삼각형 판정법.** $z_1$, $z_2$, $z_3$이 (어느 방향으로든) 정삼각형을 이루기 위한 필요충분조건(if and only if)이 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$임을 보여라.

## 더 읽을거리

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***(수학이란 무엇인가) (Oxford University Press). 7장에서 페르마 점, 슈타이너 트리, 비누막을 다룬다.
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***(복소수와 기하학) (Mathematical Association of America). 복소수로 증명한 여러 기하학 정리를 정확히 이 수준에서 다룬다.
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***(시각적 복소해석학) (Oxford University Press). 1장에 나폴레옹 정리와 그 밖의 기하학적 결과가 실려 있다.

# 5.7 사상으로서의 복소 지수함수

**문제**

**STEP II 1997, 5번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/97-s2-q5`

## 도입

지수함수(exponential function)는 $y = e^x$라는 곡선으로 익숙할 것이다. 그러나 복소변수(complex variable) 함수는 곡선으로 그릴 수 없다. 입력이 평면 위의 점이고 출력도 평면 위의 점이기 때문이다. 이런 함수는 **사상**(map)으로 그려 보는 것이 좋다. 사상이란 한 평면의 모든 점을 다른 평면의 점으로 옮기는 변환(transformation)으로, 그 과정에서 평면을 늘이고 구부린다.

문제의 식은 $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v) = e^{u+\mathrm{i}v} = e^w$이다. 사상으로 보면 복소 지수함수는 놀라운 일을 한다. 평면의 가로 띠 하나를 말아서 (원점을 뺀) 평면 전체로 만들고, 세로 직선은 원으로 감고 가로 직선은 반직선으로 펼친다. 그리고 빙 둘러 감기 때문에 일대일(one-to-one)이 아니다. 각 점으로 무한히 많은 점이 옮겨 간다. 이것이 복소로그(complex logarithm)가 "다가(multi-valued)"인 이유이며, 복소해석학(complex analysis)에서 처음 만나는 놀라움 가운데 하나이다.

## 시작하기 전에

**생각해 보기** $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$의 절댓값(modulus)과 편각(argument)을 $u$와 $v$로 나타내면 무엇인가?

$|z| = e^u$이고 $\arg z = v$이다($2\pi$의 배수 차이는 무시한다). 따라서 $w$의 실수부 $u$는 원점으로부터의 거리를 지수적으로 조절하고, 허수부 $v$는 방향을 조절한다. 이 관찰 하나로 문제의 거의 모든 부분이 풀린다.

## 차근차근 풀기

### 1단계 $e^w = \mathrm{i}e$ 풀기

**생각해 보기** $\mathrm{i}e$의 절댓값과 편각은 무엇인가?

$|\mathrm{i}e| = e$이고 $\arg(\mathrm{i}e) = \frac{\pi}{2}$이다. 따라서 $e^u = e$이어야 하므로 $u = 1$이고, 임의의 정수 $k$에 대하여 $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$이다. 해는

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

이다. 해는 무한히 많고, 세로 방향으로 $2\pi$ 간격으로 놓여 있다.

### 2단계 격자선의 상

세로 직선 $u = c$ 위에서는 $v$가 변하는 동안 $|z| = e^c$가 고정된다. 따라서 상은 원점을 중심으로 하고 반지름이 $e^c$인 원이며, $v$가 모든 실수를 지나는 동안 이 원을 무한히 여러 번 돈다.

가로 직선 $v = d$ 위에서는 $\arg z = d$가 고정되고 $|z| = e^u$는 모든 양의 값을 가진다. 따라서 상은 원점에서 각 $d$ 방향으로 뻗은 열린 **반직선**(ray)이며, 원점 자체는 포함하지 않는다. 직선 $v = d$와 $v = d + 2\pi$는 같은 반직선을 준다.

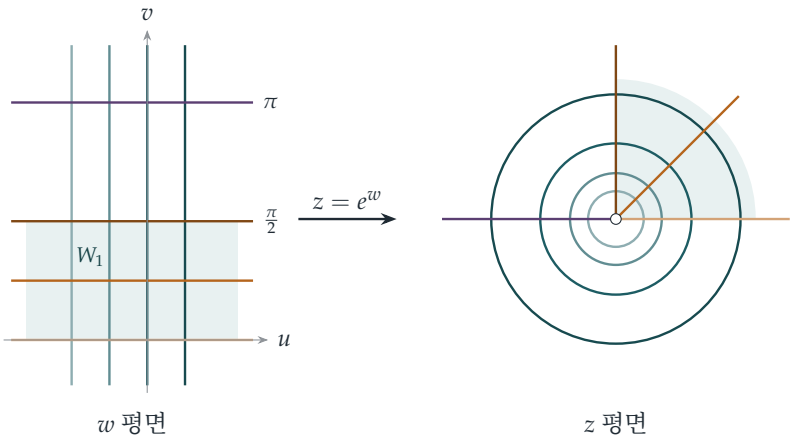



**그림 5.7.1** 사상으로서의 복소 지수함수. $w$ 평면의 세로 직선 $u = c$(청록색)는 반지름이 $e^c$인 원으로 가고, 가로 직선 $v = d$(호박색, 자주색)는 각 $d$ 방향의 반직선으로 간다. 색칠한 띠 $W_1 = \{0 < v < \frac{\pi}{2}\}$는 정확히 제1사분면 위로 간다. 두 그림 모두에서 격자선이 직각으로 만난다는 점에 주목하라. 이 사상은 각을 보존한다. 원점(빈 원)에는 결코 도달하지 않는다.

### 3단계 일대일 대응인 조각

**생각해 보기** 어떤 점 $w$가 제1사분면 $x > 0, y > 0$으로 옮겨 가는가? 그 집합이 사분면과 일대일 대응을 이루기에는 너무 큰 이유는 무엇인가?

$z$가 열린 제1사분면에 있을 필요충분조건은 절댓값과 상관없이 $\arg z$가 ($2\pi$를 법으로 하여) 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 엄격하게 있는 것이다. 따라서 $w$는 $0 < v < \frac{\pi}{2}$ 또는 $2\pi < v < \frac{5\pi}{2}$ 또는 ...를 만족해야 한다. 즉 무한히 많은 가로 띠이며, 각 띠는 사분면 전체 위로 옮겨 간다. 띠 하나 안에서는 $u$와 $v$가 $|z|$와 $\arg z$에 의해 유일하게 정해지므로, 어느 띠 하나든 사분면과 일대일 대응을 이룬다. 따라서 다음과 같이 잡을 수 있다.

$$W_1 = \{u + \mathrm{i}v : 0 < v < \tfrac{\pi}{2}\}, \qquad W_2 = \{u + \mathrm{i}v : 2\pi < v < \tfrac{5\pi}{2}\}.$$

**잠깐, 직접 해 보기** 이번에는 구멍 뚫린 원판(punctured disc) $0 < |z| < 1$과 일대일 대응을 이루는 $w$ 평면의 집합 두 개를 찾아라.

$|z| < 1$은 $e^u < 1$, 즉 $u < 0$을 뜻한다. 또 모든 편각이 정확히 한 번씩 덮여야 하므로, $v$는 길이가 정확히 $2\pi$이고 한쪽 끝은 포함하되 다른 쪽 끝은 포함하지 않는 구간 위를 움직여야 한다. 예를 들면 다음과 같다.

$$W_3 = \{u + \mathrm{i}v : u < 0,\ 0 \le v < 2\pi\}, \qquad W_4 = \{u + \mathrm{i}v : u < 0,\ -\pi < v \le \pi\}.$$

이들은 한쪽 경계는 포함하고 다른 쪽 경계는 제외한 반쪽 띠이다. (두 경계를 모두 포함하면 양의 실수축 위의 점이 두 번 대응되고, 둘 다 제외하면 빠지게 된다.) ■

## 돌아보기

- **절댓값과 편각이 변수를 분리한다.** $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$이고 $\arg e^w = \operatorname{Im} w$이므로, $w$의 실수부와 허수부가 거리와 방향을 각각 독립적으로 조절한다.
- **복소함수를 사상으로 그려 보라.** 격자선이 어디로 가는지 따라가면, 그래프로 그릴 수 없는 함수도 분명하게 그려 볼 수 있다.
- **주기성(periodicity)은 단사성(injectivity)을 깨뜨린다.** $e^{w+2\pi\mathrm{i}} = e^w$이므로 이 사상은 다대일이며, 역함수를 가지려면 높이가 $2\pi$인 띠로 제한해야 한다.

## 숨은 수학

### 복소로그

실수 직선에서 ln은 exp의 역함수이다. 복소평면에서는 $z \neq 0$인 각 $z$에 대하여 $e^w = z$의 해 $w$가 무한히 많고, 이 해들은 $2\pi i$의 배수만큼 차이 나므로 "$\log z$"는 하나의 수가 아니다. 진짜 함수를 얻으려면 **분지**(branch)를 골라야 하는데, 이는 $W_3$이나 $W_4$ 같은 띠를 고른다는 뜻이다. **주분지**(principal branch)는 $-\pi < \arg z \leq \pi$로 잡는다. 모든 분지는 원점에서 뻗은 어떤 반직선을 따라 값이 뛰는데, 이 반직선을 **분지 절단**(branch cut)이라 한다. 리만(Bernhard Riemann)은 1851년 학위 논문에서 로그가 평면 위에 산다는 고집을 버리는 것으로 이 문제를 해결했다. 로그는 무한한 나선 계단, 곧 **리만 곡면**(Riemann surface) 위에 살며, 그 위에서는 일가이고 매끄럽다. 오늘날 리만 곡면은 기하학, 정수론(number theory), 끈 이론(string theory)의 중심에 있다.

### 각이 보존된다

그림 5.7.1을 다시 보자. 세로 격자선과 가로 격자선은 직각으로 만나고, 이들이 옮겨 간 원과 반직선도 직각으로 만난다. 이는 우연이 아니다. 복소함수는 도함수가 0이 아닌 곳이면 어디서나 곡선 사이의 각을 보존한다. 이런 사상을 **등각**(conformal) 사상이라 한다. 국소적으로 등각 사상은 회전과 확대·축소일 뿐인데, 이는 바로 복소수 $f'(z)$를 곱하는 일이 하는 것이다. 등각 사상은 복잡한 영역을 답이 알려진 단순한 영역으로 변환함으로써 유체 흐름, 정전기학, 열전도 문제를 푸는 데 쓰인다.

### 메르카토르 지도

이 절과 Section 4.8을 잇는 놀라운 사실이 있다. 1569년 메르카토르(Gerardus Mercator)의 지도는 나침반 방위가 일정한 항로가 직선이 되도록 설계되었는데, 그러려면 각을 보존해야 한다. 지구를 먼저 (북극에서) 평면 위로 입체 사영(stereographic projection)한 다음 복소로그를 취하면, 그 결과가 정확히 메르카토르 도법이다. log 아래에서 반직선과 원이 가로 직선과 세로 직선이 되는 것과 똑같이, 경선은 세로 직선이 되고 위선은 가로 직선이 된다. 이 절의 지수 사상을 거꾸로 돌리면 바로 항해사가 쓰는 해도의 수학이 된다.

## 사고 기술

**함수를 변환으로 시각화하기**

함수를 그래프로 그릴 수 없을 때는 함수가 하는 일을 그려라. 단순한 곡선들의 격자를 따라가며 그 곡선들이 어디로 가는지 보라.

복소함수의 경우에는 가로 직선과 세로 직선, 또는 원과 반직선의 상이 보통 모든 것을 말해 준다. 사상이 도형에 무슨 일을 하는지 생각하는 이런 사고방식은 기하학과 해석학 전체에 걸쳐 흐른다.

## 더 도전하기

1 **방정식 풀기.** $e^w = -1$을 만족하는 모든 복소수 $w$와, $e^w = 1 + \mathrm{i}$를 만족하는 모든 $w$를 구하여라.

2 **정사각형의 상.** 꼭짓점이 $0, 1, 1+\mathrm{i}, \mathrm{i}$인 정사각형의 $z = e^w$에 의한 상을 구하고 그려라.

3 **직각.** 원 $|z| = e^c$와 반직선 $\arg z = d$가 직각으로 만남을 직접 보이고, 이것이 직선 $u = c$와 $v = d$가 수직이라는 사실과 어떻게 맞아떨어지는지 설명하여라.

4 **제곱.** $c$와 $d$를 0이 아닌 실수라 하자. 사상 $z \mapsto z^2$에 의한 직선 $x = c$와 $y = d$의 상을 구하여라. 그 상들이 포물선(parabola)이며, 만나는 곳에서는 언제나 직각으로 만남을 보여라. ($c = 0$ 또는 $d = 0$이면 어떻게 되는가?)

## 더 읽을거리

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 제 2장과 제 4장에서 지수함수, 로그, 등각 사상을 훌륭한 그림과 함께 다룬다.
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis*** (Oxford University Press). 명료한 대학 학부 첫 교재이다.
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis*** (Cambridge University Press). 기하학에 중점을 둔 또 하나의 훌륭한 학부 입문서이다.

# 5.8 원판에 숨은 거리

**문제**

**STEP III 2013, 6번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s3-q6`

## 도입

얼핏 보면 이 문제는 절댓값(modulus)과 켤레복소수(conjugate)를 다루는 연습 문제이고, 끝에는 묘하게 생긴 부등식이 나온다. 도대체 누가 $\frac{|z-w|}{|1-zw^*|}$ 같은 것에 관심을 가질까?

그것이 거리이기 때문이다. $z$와 $w$ 사이의 보통 거리가 아니라 전혀 다른 기하학에서의 거리이다. 그 기하학에서는 단위원판(unit disc)이 무한히 펼쳐진 하나의 우주 전체이고, 직선은 원호이며, 삼각형의 세 각의 합은 $180°$보다 작다. 이것이 바로 **쌍곡기하학**(*hyperbolic geometry*)이다. 쌍곡기하학은 유클리드(Euclid)의 평행선 공준(parallel postulate)을 증명하려던 이천 년에 걸친 시도 끝에 19세기에 발견되었고, 이 문제의 부등식은 알고 보면 모습을 감춘 쌍곡기하학의 삼각부등식(triangle inequality)이다. 더욱 놀랍게도 우변은 Section 3.8에서 만났던 특수상대성이론(special relativity)의 속도 합성 공식이다.

## 시작하기 전에

**생각해 보기** $|z-w| \le |z| + |w|$가 그림으로부터 어떻게 나오는가? ($z$와 $-w$를 벡터로 생각해 보라.)

$z - w = z + (-w)$이다. 원점에서 출발하는 화살표로 $z$를 그리고, $z$의 끝점에서 출발하는 화살표로 $-w$를 그린다. 원점에서 마지막 점까지의 화살표가 $z - w$이고, 세 화살표는 세 변의 길이가 $|z|$, $|w|$, $|z-w|$인 삼각형을 이룬다. 삼각형의 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 클 수 없다.

또한 임의의 복소수 $a$에 대하여 $|a|^2 = aa^*$임을 떠올리자. 이를 이용하면 문제에 나오는 모

든 절댓값을 대수식으로 바꿀 수 있다.

## 차근차근 풀기

### 1단계 절댓값 전개하기

**생각해 보기** $|z-w|^2 = (z-w)(z^*-w^*)$를 전개하라. 이것을 $(|z|+|w|)^2$와 비교하라.

$|z-w|^2 = zz^* - zw^* - z^*w + ww^* = |z|^2 + |w|^2 - zw^* - z^*w$이다. 한편 $(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 - zw^* - z^*w - 2|zw|$이고, $|z||w| = |zw|$이므로 이것은 앞의 식과 같다. ■

$E = (zw^*) + (zw^*)^* + 2|zw| = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw|$이므로 이것은 실수이다. 그리고 삼각부등식에 의하여 $E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2 \geq 0$이다. ■

### 2단계 두 번째 항등식

$|1-zw^*|^2 = (1-zw^*)(1-z^*w) = 1 - zw^* - z^*w + |z|^2|w|^2$이고, $(1+|zw|)^2 - E = 1 + 2|zw| + |zw|^2 - zw^* - z^*w - 2|zw|$이므로 둘은 같다. ■

### 3단계 부등식

**생각해 보기** $A = (|z|+|w|)^2$, $B = (1+|zw|)^2$이라 하자. 부등식을 제곱하면 $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$가 된다. 이것은 언제 성립하는가?

증명해야 할 부등식의 양변은 모두 음이 아니므로, 이 부등식은 양변을 제곱한 $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$와 동치이다. $B - E = |1-zw^*|^2 > 0$이라 가정하고 분모를 없애면 다음과 같다.

$$(A-E)B \leq A(B-E) \iff -EB \leq -EA \iff E(B-A) \geq 0.$$

$E \geq 0$이므로 이 부등식은 $B \geq A$, 즉 $1 + |zw| \geq |z| + |w|$일 때 항상 성립한다.

**잠깐, 직접 해 보기** $1 + |z||w| - |z| - |w|$가 인수분해(factorise)됨을 보여라. 이 식은 언제 음이 아닌가?

$1 + |z||w| - |z| - |w| = (1-|z|)(1-|w|)$이다. $|z| > 1$이고 $|w| > 1$이면 두 인수가 모두 음수이므로 곱은 양수이다. 따라서 $B \geq A$이고 부등식이 성립한다. ■

반대로 $|z| < 1$이고 $|w| < 1$이면 두 인수가 모두 양수이므로 곱은 이번에도 양수이고, 같은 논증이 그대로 통한다. 즉 **그렇다**, 이 경우에도 부등식은 성립한다. (두 경우 모두

$|zw^*| \neq 1$이므로 $1 - zw^* \neq 0$이고, 따라서 좌변이 정의된다.) 부등식이 성립하지 않을 수 있는 것은 하나는 단위원 안에, 다른 하나는 단위원 밖에 있는 쌍인 경우이다.

## 돌아보기

- $|a|^2 = aa^*$. 모든 항등식은 켤레복소수의 곱을 전개하여 얻었다. 이것은 절댓값을 대수적으로 다루는 표준적인 방법이다.
- **한 양의 부호 문제로 줄이기.** 제곱하고 분모를 없앤 뒤에는 부등식 전체가 $(1 - |z|)(1 - |w|)$의 부호에 달려 있었다.
- **다른 경우도 확인하기.** 마지막 질문은 $|z|, |w| < 1$인 경우를 물었는데, 같은 인수분해로 곧바로 답할 수 있었다.

## 숨은 수학

### 비유클리드 기하학(non-Euclidean geometry)

이천 년 동안 수학자들은 유클리드의 다섯 번째 공준(직선 위에 있지 않은 한 점을 지나 그 직선에 평행한 직선은 정확히 하나 있다)을 그의 다른 공리들로부터 증명하려고 애썼다. 1820년대와 1830년대에 로바첸스키(Nikolai Lobachevsky), 보여이 야노시(János Bolyai), 그리고 (공개하지는 않았지만) 가우스(Gauss)는 그것이 불가능하다는 것을 깨달았다. 평행선이 무한히 많은, 완벽하게 모순 없는 기하학이 존재하는 것이다. 1882년 푸앵카레(Henri Poincaré)는 단위원판 안에서 이 기하학의 아름다운 모형을 찾아냈다. 점은 열린 원판의 점이고, "직선"은 지름, 그리고 경계원과 직각으로 만나는 원호이며, $z$와 $w$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$d(z, w) = 2 \tanh^{-1} \rho(z, w), \qquad \text{여기서} \qquad \rho(z, w) = \frac{|z - w|}{|1 - zw^*|}.$$

점이 경계원에 가까워질수록 중심으로부터의 거리는 무한대로 커진다. 즉 이 원판은 왜곡 렌즈를 통해 바라본, 무한히 펼쳐진 평면 전체이다.

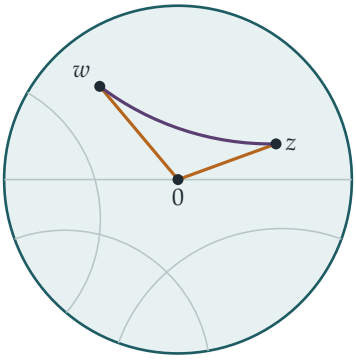



**그림 5.8.1** 푸앵카레 원판(Poincaré disc). 쌍곡기하학의 "직선"은 지름이거나 경계와 직각으로 만나는 원의 호이다(회색). 꼭짓점이 $0, z, w$인 쌍곡삼각형은 두 변이 지름 위에 있고(호박색) 한 변이 원호 위에 있다(자주색). 문제의 부등식은 쌍곡 거리로 잴 때 자주색 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 길지 않다는 뜻이다.

### 모습을 감춘 삼각부등식

$|z|, |w| < 1$일 때 이 문제가 증명한 것은 다음과 같다. $|z| = \tanh a$, $|w| = \tanh b$라 하면, 0에서 $z$와 $w$까지의 쌍곡 거리는 각각 $2a$와 $2b$이다. 그러면 Section 3.8에서 본 tanh의 덧셈 정리에 의하여

$$\frac{|z| + |w|}{1 + |zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} = \tanh(a + b).$$

따라서 부등식은 $\tanh\left(\frac{1}{2}d(z,w)\right) \leq \tanh(a+b)$, 즉

$$d(z,w) \leq 2a + 2b = d(z,0) + d(0,w).$$

라는 뜻이다. 이것이 쌍곡 거리에 대한 삼각부등식이다(그림 5.8.1). 상대론적 속도 합성 공식과 쌍곡기하학은 사실 같은 것이다. 특수상대성이론에서 가능한 속도 전체의 집합은 알맞은 거리 개념을 주면 그 자체로 쌍곡공간이다. 이 이야기는 Section 7.6에서 다시 다룬다.

### 원판의 대칭

왜 $\rho$가 올바른 양일까? $|a| < 1$일 때 사상 $z \mapsto \dfrac{z-a}{1-a^*z}$는 단위원판을 자기 자신으로 보내고, 쌍곡 거리를 보존하며, $a$를 중심으로 옮긴다. 이 사상들은 평행이동의 쌍곡기하학 버전이고, $\rho(z,w)$는 $w$를 중심으로 옮겼을 때의 $|$옮겨진$z|$와 정확히 같다. 이러한 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformations*)은 복소해석학(complex analysis)의 핵심 주제이다. 에셔(M. C. Escher)의 *Circle Limit*(원의 극한) 목판화 연작은 수학자 콕서터(H. S. M. Coxeter)의 그림에서 영감을 받은 작품으로, 합동인 물고기와 천사로 푸앵카레 원판을 쪽매맞춤한 모습을 보여 준다. 가장자리로 갈수록 무늬가 작아지는 것은 그곳에서 쌍곡 거리가 한없이 커지기 때문이다.

## 사고 기술

**식이 무엇을 뜻하는지 물어라**

어떤 대수식이 자꾸 나타나면, 그것에 거리, 각, 확률, 대칭 같은 의미가 있는지 물어보라.

여기서는 절댓값으로 이루어진 이상한 비가 다른 기하학에서의 거리였고, 이상한 부등식이 그 기하학의 삼각부등식이었다. 의미를 알아보면 결과가 왜 참인지, 그리고 그것이 어디로 이어지는지가 설명된다.

## 더 도전하기

1 **수치로 확인하기.** $z = \frac{1}{2}$, $w = -\frac{1}{2}$로 두고 부등식의 양변을 계산하라. 다음으로 쌍곡 거리 $d(z,0)$, $d(0,w)$, $d(z,w)$를 계산하고, 이 경우 삼각부등식에서 등호가 성립함을 확인하라. 왜 그런가?

2 **섞인 경우.** 부등식이 성립하지 않는, $|z| < 1 < |w|$인 $z$, $w$를 찾아라.

3 **등거리변환(isometry).** $|a| < 1$일 때 $f(z) = \dfrac{z - a}{1 - a^{*}z}$라 하자. $|z| = 1$이면 $|f(z)| = 1$이고, $f(a) = 0$임을 보여라. 또한 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z,w)$임을 보여라.

4 **무한은 가깝다.** 0에서 $r$까지$(0 < r < 1)$의 쌍곡 거리가 $\ln \frac{1+r}{1-r}$이고, $r \to 1$일 때 이 값이 무한대로 발산함을 보여라. 중심으로부터의 쌍곡 거리가 10이 되려면 점이 경계에 얼마나 가까워야 하는가?

## 더 읽을거리

- **Caroline Series, “Hyperbolic geometry” 강의 노트** (University of Warwick, 무료 공개). 푸앵카레 원판에서 출발하는 명쾌한 입문 강의이다.
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space*** (Oxford University Press). 유클리드에서 아인슈타인(Einstein)에 이르는 비유클리드 기하학의 역사를 다룬다.
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 6장에서 비유클리드 기하학과 뫼비우스 변환을 아름다운 그림과 함께 다룬다.

# 우리가 배운 것

우리는 실수인 답을 얻는 데에도 허수를 거치는 단계가 필요할 수 있다는 카르다노(Cardano)의 당혹스러운 발견에서 출발했고, 세 가지 질문을 던졌다. 복소수(complex number)는 실수 문제를 푸는 데 어떻게 도움이 되는가, 단위근(roots of unity)은 무엇이 특별한가, 그리고 복소함수는 어떻게 생겼는가. 이 장의 여덟 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

### 1. 복소수는 실수 문제를 푸는 데 어떻게 도움이 되는가?

실수에 관한 사실이 복소평면을 거치면 짧게 증명되는 경우를 거듭 보았다.

- **각은 곱이 된다.** $\pi$에 관한 마친(Machin)의 공식은 $(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$가 $239-\mathrm{i}$의 실수배라는 명제이며, 이는 정수 계산만으로 확인된다(Section 5.1).
- **세기는 평균 내기가 된다.** 이항계수(binomial coefficient)를 세 개마다 하나씩 더한 합은 $(1+x)^n$에 1의 세제곱근을 대입하여 얻었다(Section 5.2).
- **삼각함수의 곱은 다항식의 값이 된다.** 같은 간격의 각에서 코사인 값을 곱한 것은 $z^{2n}+1$을 인수분해하고 $z=\mathrm{i}$를 대입하여 얻었다(Section 5.3).
- **기하는 대수가 된다.** 거리는 절댓값(modulus)이 되므로, 정$n$각형의 한 꼭짓점에서 그은 현(chord)들의 길이의 곱은 $|1+1+\cdots+1|=n$이다(Section 5.4). 회전은 곱셈이 되므로, 페르마 점(Fermat point)의 작도는 항등식 $1+\alpha^2=\alpha$로 귀결되었다(Section 5.6).
- **드무아브르로부터 무리성을.** $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^k$를 전개하고 홀짝성(parity)을 따지는 논증으로, $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이 도 단위로 유리수가 아님을 보였다. 이는 힐베르트(Hilbert)의 세 번째 문제에 대한 덴(Dehn)의 풀이에서 핵심이 되는 사실이다(Section 5.5).

### 2. 단위근은 무엇이 특별한가?

$n$제곱근인 단위근은 정$n$각형의 꼭짓점이고, 가장 단순한 다항식 $z^n-1$의 근이며, 곱셈에 대하여 군(group)을 이룬다. 이 세 가지 사실을 합치면 단위근이 어디에나 등장하는 이유가 설명된다. 원 위에 고르게 퍼져 있으므로 그 합은 0이고, 이로부터 Section 5.2의 거르기 방법과, 더 일반적으로는 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)이 나온다. $z^n-1$의 근이므로 단위근 전체에 걸친 곱은 단순한 다항식의 값이 된다(Section 5.3, Section 5.4). 그리고 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로 단위근의 거듭제곱은 순환하는데, 바로 이 성질이 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$

같은 각에서는 성립하지 않는다(Section 5.5). 6장에서 단위근은 대수학의 중심이 되며, 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다.

### 3. 복소함수는 어떻게 생겼는가?

Section 5.7에서 우리는 $e^w$를 띠 모양의 영역을 말아서 평면으로 만드는 사상으로 그려 보았다. 이 사상은 세로선을 원으로, 가로선을 반직선으로 보내고, 무한히 여러 번 감기므로 로그는 다가함수가 된다. 또한 이 사상이 각을 보존한다는 것, 즉 **등각**(*conformal*) 사상의 첫 번째 예라는 것과 메르카토르(Mercator) 도법의 바탕이 된다는 것을 보았다. Section 5.8에서는 낯선 부등식 하나가 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 삼각부등식(triangle inequality)임이 밝혀졌다. 쌍곡기하학에서 단위원판은 무한한 평면이고, 직선은 원호이며, 거리는 상대론적 속도 덧셈 공식에 따라 합쳐진다.

### 4. 복소수 도구 상자

| 방법 | 사용한 곳 |
|---|---|
| 곱셈에서 편각(argument)이 더해짐 | 마친의 공식(5.1) |
| $2\pi$의 배수 확인하기 | 마친의 공식(5.1) |
| 단위근에 대한 평균 | 세 개마다 하나씩 고른 계수(5.2) |
| 근을 이용해 인수분해한 뒤 대입하기 | 코사인의 곱(5.3); 현(5.4) |
| 0이 되는 인수를 나누어 없애기 | 5.3; 5.4 |
| 드무아브르(De Moivre)의 정리 | 배각 공식(5.5) |
| 홀짝성과 최소 반례(minimal counterexample) | 무리수 각(5.5) |
| 곱셈으로서의 회전 | 정삼각형(5.6) |
| 격자의 사상 | 지수 사상(5.7) |
| $\lvert a\rvert^2 = aa^*$ | 푸앵카레(Poincaré) 원판 부등식(5.8) |

### 다음으로

- 단위근은 6장을 이끌어 가며, 여기에는 Section 6.1의 원분다항식(cyclotomic polynomial)과 Section 6.2의 가우스(Gauss)의 정17각형 작도가 포함된다.
- 쌍곡기하학, tanh, 상대성이론 사이의 관계는 Section 7.6에서 전개된다.
- 마친의 공식에 등장한 가우스 정수(Gaussian integers)는 Section 1.6의 주제였다.

**대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면**

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***(시각적 복소해석학): 지금까지 쓰인 복소수 책 가운데 가장 아름다운 책으로, 그림이 가득하다. 1장부터 시작하자.
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***(허수 이야기): 카르다노에서 현대 물리학까지 이어지는 $\sqrt{-1}$의 역사.
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***(복소수와 기하학): 복소수로 다루는 유클리드 기하학으로, 수준이 이 장과 꼭 맞는다.
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***(복소해석학 입문): 대학 과정을 처음 엿보기에 좋다.

카르다노는 자신의 허수량이 미묘한 만큼이나 쓸모없다고 생각했다. 다섯 세기가 지난 지금, 수학이나 물리학에서 허수가 등장하지 않는 분야를 찾기는 어렵다. 이 장의 교훈은 아다마르(Hadamard)의 말 그대로이다. 실수에 관한 문제가 어려우면 실수 직선 밖으로 나가 보라. 복소평면은 더 넓고, 그 안에서는 복잡해 보이던 많은 것이 단순해진다.

# 더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 스스로 푼 것을 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 제대로 풀어 보아라.

## 5.1 마친의 공식

1. $(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 34+14\mathrm{i}$이고, 이 수의 편각(argument)은 $\tan^{-1}\frac{7}{17}$이다. 또한 이 편각은 $-2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\frac{\pi}{4}$이기도 하다.
2. $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5+5\mathrm{i}$이고, 편각은 $\frac{\pi}{4}$이다.
3. $(3+\mathrm{i})^2(7+\mathrm{i}) = (8+6\mathrm{i})(7+\mathrm{i}) = 50+50\mathrm{i}$이다.
4. 두 급수는 교대급수(alternating series)이므로 오차(error)는 처음으로 생략한 항보다 작다. $16\tan^{-1}\frac{1}{5}$의 경우 생략한 항 $\frac{16}{(2N+1)5^{2N+1}}$이 $5\times10^{-21}$보다 작아야 하고, 이를 위해서는 $N=14$개의 항이 필요하다. $4\tan^{-1}\frac{1}{239}$의 경우에는 4개의 항이면 충분하다. 계산기를 쓰면 $16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}\right)-\frac{4}{239}\approx3.14162$이다.

## 5.2 단위근 필터

1. $(1+1)^n+(1-1)^n = 2\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots\right)$이므로, $n\ge1$일 때 합은 $2^{n-1}$이다.
2. 평균을 내기 전에 $\omega^{-1}$과 $\omega^{-2}$를 곱한다: $\frac{1}{3}\left(2^n+\omega^{-1}(1+\omega)^n+\omega^{-2}(1+\omega^2)^n\right)$. $1+\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이므로 이는 $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$이다. 세 번째 나머지(residue)에 대해서는 $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$를 얻으며, 세 코사인의 합 $\cos x+\cos(x-\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{2\pi}{3})$은 0이다.
3. $j=0,1,2,3$에 대해 $(1+\mathrm{i}^j)^n$의 평균을 낸다. 합은 $\frac{1}{4}\left(2^n+(1+\mathrm{i})^n+0+(1-\mathrm{i})^n\right)$이고, $(1\pm\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\pi/4}$이다.
4. 크기로 세면: $\frac{1}{3}(2^{12}+2\cos4\pi) = 1366$. 합으로 세면: $\prod(1+\omega^j)$는 $2, 1+\omega, 1+\omega^2$를 각각 네 개씩 인수로 가지고 $(1+\omega)(1+\omega^2)=1$이므로, 그 값은 16이다($\omega^2$에서의 곱도 마찬가지이다). 따라서 개수는 $\frac{1}{3}(4096+16+16) = 1376$이다.

### 5.3 $z^{2n}+1$의 인수분해

1. 소문항 (ii)에 $n=7$을 대입하면 $\cos^2\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{3\pi}{14}\cos^2\frac{5\pi}{14}=\frac{7}{64}$를 얻고, 세 코사인은 모두 양수이다. 두 번째 식에 대해서는 $c=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$이라 하자. 그러면 $8c\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$이므로 $c=-\frac{1}{8}$이다. 또한 $\cos\frac{4\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$이다.

2. $z=1$에서 $2=\prod\bigl(2-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\bigr)=\prod 4\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}$이므로, (모두 양수인) 사인들의 곱은 $\sqrt{2/4^n}=2^{\frac{1}{2}-n}$이다.

3. $z^6+1=(z^2-\sqrt{3}z+1)(z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)$이고, 바깥쪽 두 인수의 곱은 $z^4-z^2+1$이다.

4. $z^{2n}=1$의 근은 $\pm1$과, $1\le k\le n-1$에 대한 켤레(conjugate) 쌍 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\pi/n}$이므로 $\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\bigl(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\bigr)$이다. $z\to1$로 보내면 좌변은 $n$으로 수렴하고, 우변은 $\prod 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$이다.

### 5.4 정다각형 속의 거리

1. 정사각형: $\sqrt{2}\times2\times\sqrt{2}=4$. 정삼각형: $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$.

2. $X_k=\omega^k$로 두고, $P=r$을 양의 실수축 위에 둔다. 그러면 $\prod|r-\omega^k|=|r^n-1|$이다.

3. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 평균은 기하평균(geometric mean) $n^{1/(n-1)}$ 이상이다. $n=6$일 때 현(chord)의 길이는 $1,\sqrt{3},2,\sqrt{3},1$이고, 평균은 $\frac{4+2\sqrt{3}}{5}\approx1.493$이다. 이에 비해 $6^{1/5}\approx1.431$이다.

4. 소문항 (ii)에 의해 각 꼭짓점에서 나가는 $n-1$개 현의 곱은 $n$이다. 모든 $n$개의 꼭짓점에 대해 곱하면 $n^n$이 되는데, 이때 모든 현이 두 번씩 세어지므로 $\binom{n}{2}$개 현의 곱은 $n^{n/2}$이다.

### 5.5 유리수처럼 보이지만 아닌 각

1. 꼭짓점 $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$과 중심 $O$를 잡자. 두 결합 벡터(bond vector)의 내적(dot product)은 $-1$이고 길이는 $\sqrt{3}$이므로, 결합각(bond angle)은 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$이다. 한 면의 바깥쪽 법선(outward normal)은 맞은편 꼭짓점으로 향하는 벡터에 음의 부호를 붙인 것이므로, 바깥쪽 법선 사이의 각도 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$이고, 두 면 사이의 각은 그 보각(supplement)인 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이다.

2. $(4+3\mathrm{i})^k=a_k+\mathrm{i}b_k$라 하자. $4+3\mathrm{i}$와 그 켤레는 $t^2-8t+25$의 근이므로 $b_{k+1}=8b_k-25b_{k-1}\equiv3b_k\pmod 5$이고, $b_1=3$이므로 $b_k\equiv3^k\not\equiv0\pmod 5$이다. 따라서 어떤 거듭제곱도 실수가 아니다. 만약 이 각이 유리수 도(degree)라면 그 각의 어떤 배수는 $180^\circ$의 배수가 되고, 그에 해당하는 거듭제곱은 실수가 될 것이다.

3. $a = 2$이면 $a^2 - 1 = 3$이 홀수이므로 홀짝성(parity) 논증이 성립하지 않는다. 실제로 $\cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ$는 유리수이며, $k = 3$일 때 사인 쪽 괄호는 $3 - \binom{3}{3} \cdot 3 = 0$이다.

4. $0^\circ$, $60^\circ$, $90^\circ$이고, 코사인 값은 각각 1, $\frac{1}{2}$, 0이다. 니븐 정리(Niven's theorem)에 따르면, $180^\circ$의 유리수배에서 cos이 가질 수 있는 유리수 값은 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm 1$뿐이다.

### 5.6 페르마 점

1. 안쪽으로 세우면 꼭짓점은 $A + (1 - \bar{\alpha})(B - A)$ 등이 된다. $p = 2$, $q = 1.4$, $r = 1.1$인 예에서 $C$와 새로운 $L$을 지나는 직선은 $O$를 지나지 않으며(판정식 $\operatorname{Im}(\bar{C}L') = 0$이 성립하지 않는다), 나머지 두 직선도 마찬가지이다.

2. 정삼각형(equilateral triangle)의 중심은 무게중심(centroid)이다. $L = \alpha(p + q)$, $M = -(q + r)$, $N = -\alpha^2(p + r)$일 때, $ABL$, $BCM$, $CAN$의 중심 $G_1$, $G_2$, $G_3$는 $G_3 - G_1 = \alpha(G_2 - G_1)$을 만족하며($\alpha^2 = \alpha - 1$을 이용해 전개하라), 이는 $G_1G_2G_3$가 정삼각형임을 뜻한다. 예에서 그 한 변의 길이는 $\frac{p+q+r}{\sqrt{3}} \approx 2.598$이다.

3. $PA + PB + PC$의 값은 $A$에서 약 5.68, $B$에서 5.13, $C$에서 4.89, 무게중심에서 4.54이며, 모두 4.5보다 크다.

4. (어느 한 방향(orientation)으로) 정삼각형이라는 것은 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$일 때 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ 또는 $z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$이라는 뜻이다. $\omega + \omega^2 = -1$을 이용하면 두 좌변의 곱은 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1$이다.

### 5.7 사상으로서의 복소 지수함수

1. $w = (2k + 1)\pi\mathrm{i}$일 때 $\mathrm{e}^w = -1$이고, $w = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$일 때 $\mathrm{e}^w = 1 + \mathrm{i}$이다. 여기서 $k$는 정수이다.

2. 영역 $1 \le |z| \le \mathrm{e}$, $0 \le \arg z \le 1$(1라디안(radian))로, 고리 영역(annulus)의 일부이다. 아래쪽 변은 실수축 위의 $[1, \mathrm{e}]$로, 오른쪽 변은 반지름이 e인 호로, 위쪽 변은 각 1인 반지름 방향의 선분으로, 왼쪽 변은 단위원의 호로 옮겨진다.

3. 반직선(ray)은 반지름 방향이고, 원의 접선(tangent)은 반지름에 수직이다. 이것이 직선 $u = c$와 $v = d$의 관계와 맞아떨어지는 것은 $\mathrm{e}^w$가 각을 보존하기 때문이다(그 도함수는 결코 0이 되지 않는다).

4. $(x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$이다. 직선 $x = c$는 $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$으로, $y = d$는 $u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2$으로 옮겨진다. 이들은 각각 왼쪽과 오른쪽으로 열린 포물선(parabola)이며, 둘 다 초점(focus)이 0에 있다. 두 식을 같게 놓으면 $v^2 = 4c^2d^2$이므로, 두 포물선은 $u = c^2 - d^2$, $v = \pm 2cd$에서 두 번 만난다. $v = 2cd$(두 직선이 교차하는 점 $c + \mathrm{i}d$의 상(image))에서 기울기 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$는 $-\frac{d}{c}$와 $\frac{c}{d}$이고, $v = -2cd$에서는 $\frac{d}{c}$와 $-\frac{c}{d}$이다. 두 경우 모두 곱은 $-1$이다. (두 번째 교점은 첫 번째 직선 위의 점 $c - \mathrm{i}d$의 상이자 두 번째 직선

위의 점 $-c+\mathrm{i}d$의 상이다. 제곱하면 $z$와 $-z$가 같은 곳으로 가기 때문이다.) $c=0$이면 $x=0$의 상은 반직선 $u\le 0, v=0$이고, $d=0$이면 $y=0$의 상은 반직선 $u\ge 0, v=0$이다. 이들은 포물선이 아니다. 두 직선이 0이 아닌 곳에서 교차하면 반직선도 여전히 다른 쪽 상과 직각으로 만나지만, $c=d=0$이면 두 상이 모두 실수축 위에 놓인다. 0에서 이 사상은 각을 두 배로 만들기 때문에(그곳에서 도함수 $2z$가 0이다), 두 축 사이의 직각이 평각(straight angle)이 된다.

## 5.8 원판에 숨은 거리

1. 양변이 모두 $\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5}$이다. 그러면 $d(z,0)=d(0,w)=2\tanh^{-1}\frac{1}{2}=\ln 3$이고 $d(z,w)=2\tanh^{-1}\frac{4}{5}=\ln 9$이므로 등호가 성립한다. 즉 0은 $z$에서 $w$로 가는 쌍곡 선분(hyperbolic line segment) 위에 있다(이 선분은 지름이다).

2. 소문항 (i)과 (ii)에 의해, $E>0$일 때 부등식은 $|z|+|w|\le 1+|zw|$, 즉 $(1-|z|)(1-|w|)\ge 0$과 동치이다. 혼합된 경우에는 이것이 성립하지 않는다. 예를 들어 $z=\frac{1}{2}$, $w=3$이면 좌변은 $\frac{5/2}{1/2}=5$이고 우변은 $\frac{7/2}{5/2}=\frac{7}{5}$이다.

3. $|z|=1$이면 $|1-a^{*}z|=|\bar{z}-a^{*}|=|z-a|$이다. 직접 계산하면 $f(z)-f(w)=\frac{(1-|a|^2)(z-w)}{(1-a^{*}z)(1-a^{*}w)}$이고 $1-f(z)f(w)^{*}=\frac{(1-|a|^2)(1-zw^{*})}{(1-a^{*}z)(1-aw^{*})}$이다. 나눈 뒤 절댓값(modulus)을 취하면 $\rho(f(z),f(w))=\rho(z,w)$를 얻는다.

4. $d(0,r)=2\tanh^{-1}r=\ln\frac{1+r}{1-r}$이고, 이는 $r\to 1$일 때 $\infty$로 발산한다. 거리가 10이 되려면 $r=\tanh 5\approx 0.99991$이어야 한다. 즉 가장자리로부터 약 $9\times 10^{-5}$ 이내이다.

# Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

**전체 13개 장 가운데 제5장.** 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

**beyondstep.keithmcnulty.org**

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

