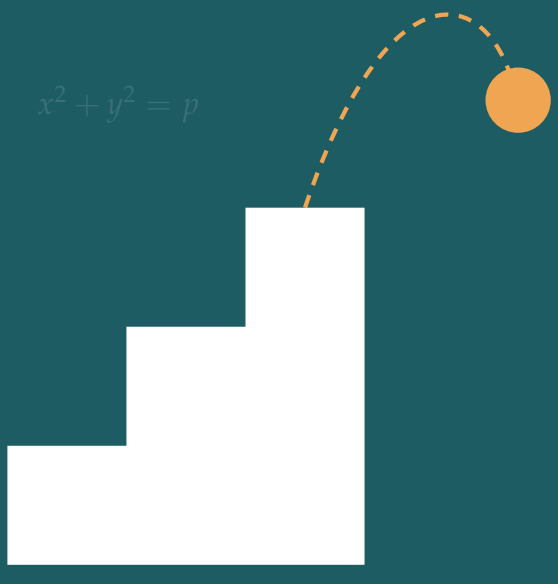
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

제4장

제대로 하는 미적분



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

제4장

제대로 하는 미적분

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

제4장: 제대로 하는 미적분

이 PDF는 *Beyond STEP*의 전체 13개 장 가운데 제4장이다. 책 전체, 각 장의 개별 PDF, 모든 절의 인쇄용 연습지, 모든 STEP 문제의 자세한 풀이를 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 남겨 주기 바란다.

장

4

제대로 하는 미적분

적분(*integration*)은 해석학(*analysis*), 기하학, 정수론(*number theory*)이 만나는 곳이며, 수학에서 가장 아름다운 공식들 가운데 몇몇이 자리한 곳이다.

이 장의 내용

4.1	적분이란 무엇인가?	STEP III 1989
4.2	적분으로 삼각함수 세우기	STEP III 2017
4.3	22/7은 π보다 크다	STEP I 1997
4.4	월리스, 베타 함수, 그리고 1/2의 계승	STEP II 1995
4.5	2학년생의 꿈	STEP III 2009
4.6	공식으로 나타낼 수 없는 적분	STEP III 2016
4.7	변분법	STEP III 2014
4.8	공 모양 빵 자르기	STEP I 2001
4.9	홀디치의 정리	STEP III 2011
A	연습문제 해답	65쪽

역도함수(antiderivative) 그 이상

> 도함수를 갖지 않는 함수라는 개탄스러운 해악 앞에서 나는 공포와 전율을 느끼며 고개를 돌린다.
>
> — 샤를 에르미트(Charles Hermite), 1893년의 편지에서

학생에게 적분이 무엇이냐고 물으면 아마 "미분(differentiation)의 반대"라는 답을 듣게 될 것이다. 이는 멋진 사실, 곧 **미적분학의 기본정리**(*fundamental theorem of calculus*)이며, 학교에서 만나는 적분 대부분을 판에 박힌 계산으로 만들어 준다. 그러나 이것은 적분에 관한 정리일 뿐 적분의 정의가 아니며, 적분을 흥미롭게 만드는 것의 대부분을 가려 버린다.

적분은 미분보다 약 2천 년이나 오래되었다. 아르키메데스(Archimedes)는 도함수라는 생각을 누구도 하기 훨씬 전에, 얇은 조각들을 더하여 포물선 활꼴(parabolic segment)의 넓이와 구의 겉넓이를 구했다. 또한 적분은 미분이 닿지 못하는 곳까지 닿는다. 웬만한 함수는 모두 기계적인 규칙으로 미분할 수 있지만, 대부분의 함수는 공식으로 적분할 수 **없다**. 그러면 자연스러운 질문이 떠오른다. 언제 적분할 수 있으며, 적분할 수 없을 때는 어떻게 해야 하는가? 적분은 새로운 함수를 정의하고, 수 사이의 부등식(inequality)을 증명하며, 달리 기술할 방법이 없는 넓이와 부피를 계산하고, 무한합과 무한곱(infinite product)의 정확한 값을 알려 준다. 이 장은 이 모든 것을 다룬다.

적분이란 실제로 무엇인가

이 장은 맨 처음, 곧 정의에서 출발한다(Section 4.1). 적분은 얇은 직사각형들의 합의 극한(limit)이다. 역도함수 없이 이 정의만으로 $\int_0^a x^5\,dx$ 하나를 계산하는 것조차 상당한 작업이며, 이를 해 보면 기본정리가 얼마나 고마운지 알게 된다. 정의가 정확해지면 질문도 정확해진다. 어떤 함수가 적분가능(integrable)한가? 이 질문의 답과 그 답이 불러일으킨 문제들은 20세기 초 르베그(Lebesgue)의 적분 이론으로 이어졌고, 이 이론은 현대 확률론(probability)의 토대가 되었다.

무언가를 증명하는 적분

이 장에서 가장 놀라운 결과 가운데 몇몇은 넓이와 전혀 관계없어 보이는 사실을 적분으로 증명한다. 양의 함수의 적분 하나가 $\frac{22}{7} - \pi$와 같다는 사실로부터 단 한 줄로 $\pi < \frac{22}{7}$가 증명된다(Section 4.3). $\sin t$의 거듭제곱은 π에 대한 월리스(Wallis)의 무한곱과 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$라는 값으로 이어진다(Section 4.4). x^x의 적분은 급수(series) $\sum(-1)^{n+1}n^{-n}$으

로 바뀐다(Section 4.5). 그리고 적분 하나, $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$만으로 삼각법(trigonometry)을 처음부터 쌓아 올릴 수 있다(Section 4.2).

대학에서 만나게 될 것

1학년 **해석학** 과목에서는 적분의 정의에서 출발하여 미적분학의 기본정리를 제대로 증명한다. 그 뒤의 과목들은 여러 방향으로 뻗어 나간다. **측도론**(*measure theory*)과 **르베그 적분**(*Lebesgue integral*)은 적분이 극한과 매끄럽게 어울리도록 해 주며 확률론의 바탕이 된다. **벡터 미적분학**(*vector calculus*)은 곡선, 곡면, 입체 위에서 적분하며, 그린(Green) 정리와 스토크스(Stokes) 정리가 이들을 서로 이어 준다(Section 4.9에서 그 맛을 볼 수 있다). **복소해석학**(*complex analysis*)은 복소평면을 돌아가는 우회로를 통해 실적분을 계산한다. **변분법**(*calculus of variations*)은 어떤 함수가 적분을 가장 작게 만드는지 묻고(Section 4.7), 물리학의 최소 작용의 원리(principle of least action)로 이어진다. 그리고 **미분대수**(*differential algebra*)는 어떤 적분이 애초에 공식을 갖는지를 설명한다(Section 4.6).

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **적분이란 무엇이며, 어떤 함수가 적분을 갖는가?** 합의 극한이라는 정의는 역도함수와 어떻게 연결되는가?
2. **적분으로 무엇을 증명할 수 있는가?** 넓이가 어떻게 π에 대해, 계승(factorial)에 대해, 무한합에 대해 알려 줄 수 있는가?
3. **공식이 없을 때는 무엇을 할 수 있는가?** 적분에 공식이 없다는 것을 어떻게 알며, 그럼에도 무엇을 계산할 수 있는가?

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
4.1	적분의 정의	하 합 과 상 합(lower and upper sums); 망 원 합(telescoping)
4.2	$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$에서 얻는 삼각법	적분을 보존하는 치환(substitution)
4.3	$\frac{22}{7} > \pi$	양수인 함수의 적분으로 나타낸 부등식
4.4	월리스와 $\left(\frac{1}{2}\right)!$	점화식(reduction formula), 불변량(invariant), 조이기(squeeze)
4.5	$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$	급수 전개와 항별 적분(term-by-term integration)
4.6	공식이 없는 적분	다항식 대수를 이용한 불가능성 증명
4.7	변분법	적분 속에서 완전제곱식 만들기(completing the square)
4.8	아르키메데스의 모자 상자 정리(hat-box theorem)	피적분함수(integrand)를 간단히 하면 기하가 드러난다
4.9	Holditch 정리	경계 적분으로 구하는 넓이; 소거(elimination)

이 장을 읽는 방법

여러 절에 무겁지만 판에 박힌 계산이 나온다. 다항식의 나눗셈, 부분적분(integration by parts), 곱의 전개 같은 것들이다. 본문을 읽기 전에 연필과 종이로 직접 해 보라. 그런 다음 그 계산을 가능하게 한 아이디어, 곧 불변량, 대칭, 상쇄를 찾아보라. 계산은 채점자가 확인하는 것이고, 아이디어는 여러분이 기억하여 다시 쓰게 될 것이다.

4.1 적분이란 무엇인가?

문제

STEP III 1989, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/89-s3-q10`

도입

여러분은 몇 년째 적분을 해 왔다. "적분은 미분의 역연산이다"라는 이유로 $\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^6$임을 알고 있다. 그러나 이것은 정리이지 정의가 아니다. 그렇다면 적분(integral)이란 무엇인가?

솔직한 답은 이렇다. 적분은 넓이이며, 얇은 직사각형들의 넓이의 합의 극한(limit)으로 정의된다. 이 문제는 오직 그 정의만으로 적분을 계산하라고 요구한다. 원시함수(antiderivative)도, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)도 쓰지 않고, 직사각형을 더하고 극한을 취하는 것 말고는 아무것도 쓰지 않는다. 생각보다 어렵다. 바로 그렇기 때문에 이 계산을 쉽게 만들어 주는 미적분학의 기본정리가 그토록 놀라운 결과인 것이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 소문항 (iii)의 두 합은 폭이 $\frac{a}{n}$인 직사각형들의 넓이의 합이다. 증가함수(increasing function) f에 대하여, 어느 합이 곡선 아래 넓이보다 작게 어림한 값이고 어느 합이 크게 어림한 값인가?

첫 번째 합은 각 띠의 **왼쪽** 끝, 즉 $r = 0, \ldots, n-1$에 대한 $x = \frac{ra}{n}$에서의 높이를 사용한다. 증가함수에서는 이 점이 띠에서 가장 낮은 점이므로 직사각형들이 곡선 아래에 들어간다. 이것이 **하합**(lower sum)이다. 두 번째 합은 오른쪽 끝 $r = 1, \ldots, n$을 사용하므로 직사각형이 곡선 위로 튀어나온다. 이것이 **상합**(upper sum)이다(그림 4.1.1). 정의에 따르면, 띠가 얇아질 때 두 합이 같은 극한에 가까워지면 적분이 존재한다.

$f(x) = x^5$일 때 두 합에는 모두 $\sum r^5$가 들어 있다. 소문항 (i)과 (ii)는 이 합을 위와 아래에서 각각 어림한다.

차근차근 풀기

1단계 연쇄적으로 소거되는 합(telescoping sum)

생각해 보기 연속하는 정수 여섯 개의 곱 $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$를 생각하자. $P(r) - P(r-1)$은 무엇인가?

$P(r)$와 $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$는 다섯 개의 인수 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$를 공유하므로

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)[(r+5) - (r-1)] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

$r = 1$부터 n까지 더하면, 우변의 합은 연쇄 소거에 의해 $P(n) - P(0) = P(n)$이 된다. 따라서

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = \tfrac{1}{6}P(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

■

모든 $r \geq 1$에 대하여 $r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$이므로 부등식(inequality)이 성립한다. ■

2단계 하계(lower bound)

잠깐, 직접 해 보기 1단계를 내려가는 연속 정수 다섯 개의 곱 $r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)$에 맞게 고쳐 보자. $r = 0$부터 $n-1$까지의 합을 구하고, 이를 r^5와 비교하라.

$Q(r) = (r-5)(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$라 하자. 그러면 $Q(r+1) - Q(r) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r[(r+1) - (r-5)] = 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$이다. $r = 0$부터 $n-1$까지 더하면 연쇄적으로 소거되어 $Q(n) - Q(0) = Q(n)$이 되므로

$$\sum_{r=0}^{n-1} (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r = \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

이제 항별로 비교하자. $r = 0$일 때 양변은 모두 0이다. $1 \leq r \leq 4$이면 곱에 0인 인수가 있지만 $r^5 > 0$이다. $r \geq 5$이면 모든 인수가 양수이고 r 이하이며, 그중 일부는 r보다 엄밀히 작

으므로 곱은 r^5보다 작다. $n > 1$이므로 합에는 부등식이 엄밀하게 성립하는 $r = 1$이 포함되고, 따라서

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n. \qquad \blacksquare$$

3단계 적분

생각해 보기 $\mathrm{f}(x) = x^5$에 대한 하합과 상합을 $\sum r^5$로 나타내라. 분모에는 n의 몇 제곱이 나타나는가?

$\mathrm{f}(x) = x^5$이면

$$L_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1} r^5, \qquad U_n = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n} r^5.$$

소문항 (i), (ii)와 $L_n < U_n$에 의하여

$$\frac{a^6}{6}\cdot\frac{(n-5)(n-4)\cdots n}{n^6} < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+5)}{n^6}.$$

두 분수는 각각 $\frac{n-3}{n} = 1 - \frac{3}{n}$이나 $\frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n}$과 같은 인수 여섯 개의 곱이고, 각 인수는 1로 수렴한다. 따라서 바깥쪽의 두 경계는 모두 $\frac{a^6}{6}$으로 수렴하고, 조임 정리(squeeze theorem)에 의하여 L_n과 U_n도 그렇다. 두 극한이 모두 존재하고 서로 같으므로, 정의에 의하여

$$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}a^6. \qquad \blacksquare$$

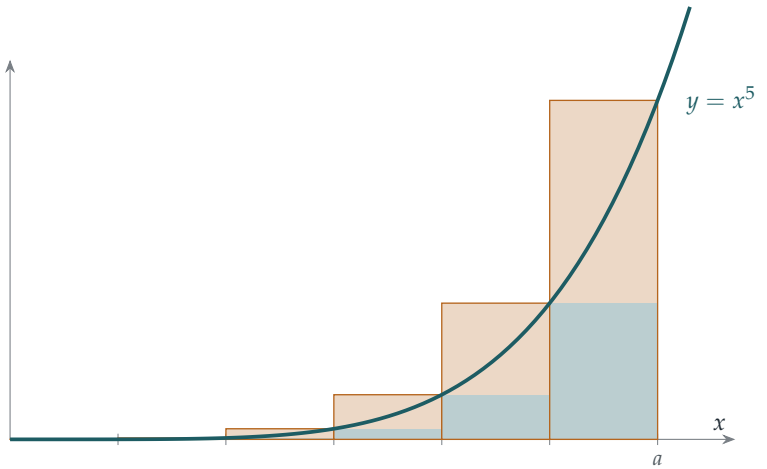


그림 4.1.1 $n = 6$개의 띠로 나눈 $[0, a]$ 위에서 x^5의 하합과 상합. 하합은 청록색 영역(곡선 아래의 직사각형들)이고, 상합은 여기에 호박색 조각들을 더한 것이다. 둘의 차이는 정확히 마지막의 가장 높은 직사각형의 넓이 $\frac{a}{n}\mathrm{f}(a)$이며, 이는 n이 커지면 0으로 수렴한다.

돌아보기

- **다시 연쇄 소거.** 연속하는 정수들의 곱의 합이 연쇄적으로 소거되었는데, 이는 2장의 합과 곱에서와 똑같다.
- **어림한 뒤 조이기.** 우리는 $\sum r^5$를 정확히 구하지 않았다(그 값은 $\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$이다). 양쪽에서의 어림만으로 충분했다.
- **정의가 일을 한다.** 원시함수는 어디에도 나오지 않았다. 모든 것이 적분을 합의 극한으로 보는 정의에서 나왔다.

숨은 수학

리만의 정의

얇은 띠의 넓이를 더해 넓이를 구한다는 생각은 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라간다. 그는 기원전 250년경 바로 이 논증의 한 형태로 포물선(parabola) 아래의 넓이를 구했다. 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)는 적분을 미분의 역연산으로 바꾸어 놓았고, 그 후 150년 동안 대부분의 사람들은 적분을 그렇게 생각했다. 1854년 베른하르트 리만(Bernhard Riemann)은 오늘날에도 대학 강의가 출발점으로 삼는 정의를 내놓았다. $[a,b]$를 작은 조각들로 나누고, (폭) $\times$ (조각 안 어딘가에서의 f의 높이)의 합을 만든 다음, 조각이 작아질 때 그러한 합들이 모두 하나의 극한에 가까워지면 f가 적분가능(integrable)하다고 한다. 이 문제에서 다룬, 폭이 같은 띠와 왼쪽·오른쪽 끝점을 쓰는 형태는 증가함수에서 통하는 특수한 경우이다. 장가스통 다르부(Jean-Gaston Darboux)의 "상합과 하합"을 쓰면 일반적인 경우도 깔끔하게 다룰 수 있다.

모든 함수가 적분을 갖는 것은 아니다

정확한 정의가 있으면 어떤 함수가 적분가능한지 물을 수 있다. 닫힌구간(closed interval)에서 연속인 함수(continuous function)는 모두 적분가능하고, 증가함수도 모두 그렇다. 그러나 디리클레(Dirichlet) 함수를 생각해 보자. x가 유리수(rational)이면 $f(x)=1$이고, 무리수(irrational)이면 0이다. 아무리 얇은 띠에도 유리수와 무리수가 모두 들어 있으므로, 모든 상합은 1이고 모든 하합은 0이다. 둘은 결코 일치하지 않으므로 $\int_0^1 f$는 리만의 의미로는 존재하지 않는다. 1902년 앙리 르베그(Henri Lebesgue)는 더 강력한 적분인 르베그 적분(Lebesgue integral)을 고안했다. 이 적분은 이 함수도 다룰 수 있고(이 함수의 르베그 적분은 0이다) 극한에 대해서도 훨씬 잘 작동한다. 르베그 적분은 현대 확률론(probability theory)의 기초이며, 여러분은 대학 2학년이나 3학년 때 이를 만나게 될 것이다.

이산 미적분학

1단계의 연쇄 소거는 모습을 바꾼 미적분학이다. "상승 계승(rising factorial)" $r(r+1)\cdots(r+k-1)$은 합에 대하여, x^k가 적분에 대하여 행동하는 것과 똑같이 행동한다. 이것을 더하면 인수의 개수가 하나 늘어나고 새로운 인수의 개수로 나누어지는데, 이는 $\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$과 꼭 같다. 합과 적분, 차분과 도함수 사이의 이러한 평행 관계를 **유한 차분법**(calculus of finite differences)이라 하며, 이는 합을 계산하는 강력한 도구이다.

사고 기술

정의에서 출발하라

"정의를 사용하여" 무언가를 증명하라는 요구를 받으면, 그 밖의 것은 아무것도 쓰지 마라. 증명하려는 것에 의존하는 정리도, 익숙한 지름길도 안 된다.

이는 의외로 어렵지만, 지름길이 얼마나 가치 있는지를 정확히 보여 준다. 대학에서는 모든 강의의 처음 몇 주가 이런 식으로 진행된다. 먼저 정의가 나오고, 그다음에 더 이상 정의에서 직접 출발하지 않아도 되게 해 주는 정리들이 나온다.

더 도전하기

1 **적분으로서의 극한.** STEP III 1999, 3번 문제 (`step.maths.org/questions/99-s3-q3`)에 도전해 보자. 이 문제는 합의 극한을 적분으로 바꾼다. 각 합에서 곡선 아래의 직사각형을 찾아보라.

2 **아르키메데스의 포물선.** $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$과 소문항 (iii)의 정의를 이용하여 $\int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$임을 증명하라.

3 **상승 계승.** 모든 양의 정수 k에 대하여 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$임을 보여라.

4 **정확한 합.** 항등식 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = r^5 + 10r^4 + 35r^3 + 50r^2 + 24r$와 $k \le 4$인 $\sum r^k$에 대한 알려진 공식들을 이용하여 $\sum_{r=1}^{n} r^5$를 정확히 구하라.

더 읽을거리

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*** (Cambridge

University Press). 리만 적분에서 르베그 적분에 이르는 이야기를, 각 단계를 불가피하게 만든 문제들을 통해 들려준다.

- **Michael Spivak, *Calculus*** (Cambridge University Press). 13장에서 이 절과 똑같이 상합과 하합으로 적분을 정의한다.
- **Graham, Knuth & Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley). 2장에서 상승계승과 하강 계승(falling factorial)을 사용하여 유한 차분법을 전개한다.

4.2 적분으로 삼각함수 세우기

문제

STEP III 2017, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/17-s3-q6`

도입

π란 무엇인가? 학교에서는 원의 둘레와 지름의 비로 배우고, sin과 cos는 삼각형으로 정의한다. 기하학에서는 이것으로 충분하지만, 곤란한 질문이 남는다. 곡선을 따라 잰 "길이"란 정확히 무엇인가? $\sin x$의 매클로린 급수(Maclaurin series)는 왜 그런 꼴인가? 덧셈정리(addition formula)가 그림으로 그릴 수 있는 각뿐 아니라 모든 각에서 성립한다는 것을 어떻게 아는가?

이 문제는 전혀 다른 길을 보여 준다. 삼각형과 원은 잊어버리자. Section 4.1에서 다룬 적분(integral)의 정의 말고는 아무것도 필요 없는 적분 하나, $\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$에서 출발한다. π를 $2\mathrm{T}_\infty$로 정의한다. 그런 다음 치환(substitution)만을 써서 $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$과 $\mathrm{T}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$을 증명한다. 이는 여러분이 $\arctan\sqrt{3} = 60°$, $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2}-1$로 알고 있는 사실이다. 아무것도 없는 데서 삼각법을 다시 세우는 것이다.

시작하기 전에

여러분은 사실 $\mathrm{T}(x) = \arctan x$이고 $\mathrm{T}_\infty = \frac{\pi}{2}$임을 알고 있다. 문제는 이 사실을 쓰지 못하게 하며, 바로 그것이 핵심이다. 모든 것은 적분에서 나와야 한다. 하지만 이 숨은 지식은 좋은 길잡이가 된다.

? **생각해 보기** 소문항 (i)과 (ii)는 각각 어떤 삼각함수 항등식에 대응하는가? ($\arctan x + \arctan\frac{1}{x}$, 그리고 $\tan(A+B)$의 공식을 떠올려 보라.)

소문항 (i)은 $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$이다. 소문항 (ii)는 덧셈정리 $\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$가 모습을 바꾼 것이다. 즉 $u = \tan A$, $a = \tan B$로 두면 $v = \tan(A+B)$이

다. 이 문제는 이 항등식들을 기하학 없이 적분으로부터 증명한다.

차근차근 풀기

1단계 **반사** $u \mapsto 1/u$

$\mathrm{T}(x)$에 $u = 1/w$를 치환한다. 그러면 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}w/w^2$이고 $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{w^2}{w^2+1}$이므로

$$\mathrm{T}(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{w^2}{w^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) \mathrm{d}w = \int_{1/x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \mathrm{T}_{\infty} - \mathrm{T}(x^{-1}). \qquad \blacksquare$$

다시 말해, $\frac{1}{1+u^2}$ 아래에서 0부터 x까지의 넓이는 $\frac{1}{x}$부터 ∞까지의 넓이와 같다(그림 4.2.1).

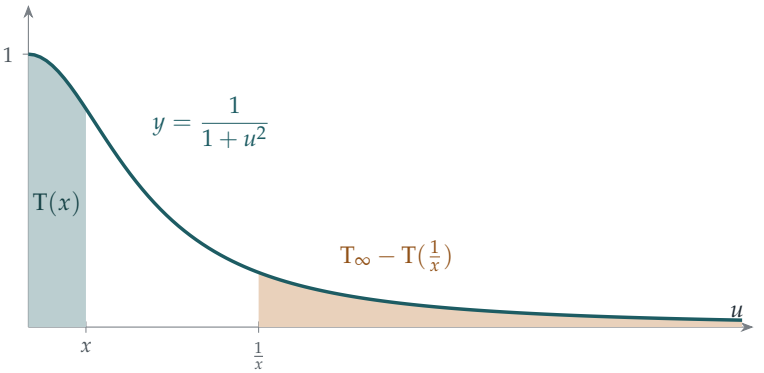


그림 4.2.1 치환 $u = 1/w$는 $\frac{1}{1+u^2}$ 아래의 색칠한 두 넓이, 즉 0부터 x까지의 넓이(청록색)와 $\frac{1}{x}$부터 끝없이 뻗은 넓이(호박색)가 같음을 보여 준다. 여기서 $x = \frac{1}{2}$이다.

2단계 **덧셈 치환**

> **생각해 보기** 몫의 미분법(quotient rule)으로 $v = \dfrac{u+a}{1-au}$를 미분하라. 그다음 $1+v^2$을 하나의 분수로 계산하여 비교해 보라.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2},$$
$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

나누면 $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$이다. $\blacksquare$

생각해 보기 이 식은 $\dfrac{du}{1+u^2} = \dfrac{dv}{1+v^2}$라는 뜻이다. 따라서 치환 $u \mapsto v$는 피적분 함수(integrand)를 전혀 바꾸지 않는다. 그렇다면 이 치환은 $\mathrm{T}(x)$의 적분 구간 끝값을 어떻게 바꾸는가?

u가 0부터 x까지 움직일 때($x < \frac{1}{a}$이므로 구간 전체에서 $1-au > 0$이고, v는 연속이며 증가한다), v는 a부터 $\frac{x+a}{1-ax}$까지 움직인다. 따라서

$$\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_a^{(x+a)/(1-ax)} \frac{dv}{1+v^2} = \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - \mathrm{T}(a). \qquad \blacksquare$$

3단계 두 가지 항등식 더

소문항 (i)과 두 번 결합하면

$$\mathrm{T}(x^{-1}) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}(x) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) + \mathrm{T}(a) = 2\mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - \mathrm{T}(a^{-1}). \qquad \blacksquare$$

이제 문자를 바꾼다. $y = 1/x$, $b = 1/a$로 두자. 조건 $x < 1/a$는 $1/y < b$, 즉 $y > 1/b$가 되고

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{1/y + 1/b}{1 - 1/(by)} = \frac{b+y}{by-1}.$$

따라서 $\mathrm{T}(y) = 2\mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\dfrac{y+b}{by-1}\right) - \mathrm{T}(b)$이다. $\blacksquare$

4단계 특수한 값

잠깐, 직접 해 보기 마지막 항등식에서 $\frac{y+b}{by-1}$이 y 자신과 같아지도록 y와 b를 골라 보라. 무엇을 얻는가?

$y = b = \sqrt{3}$으로 두자. 그러면 $y > \frac{1}{b}$이고 $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3}$이다. 항등식은 $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = 2\mathrm{T}_\infty - 2\mathrm{T}(\sqrt{3})$이 되므로

$$\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}\mathrm{T}_\infty. \qquad \blacksquare$$

생각해 보기 $\sqrt{2}-1$에 대해서는 덧셈 항등식에 $x = a = \sqrt{2}-1$을 넣어 보라. $\frac{2x}{1-x^2}$은 무엇인가? 그리고 $\mathrm{T}(1)$은 무엇인가?

$x = a = \sqrt{2}-1$로 두면($x^2 = 3-2\sqrt{2} < 1$이므로 $x < \frac{1}{a}$이다) 덧셈 항등식에서 $2\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$이다. 그런데 $1-x^2 = 2\sqrt{2}-2 = 2(\sqrt{2}-1) = 2x$이므로 $\frac{2x}{1-x^2} = 1$이고, $2\mathrm{T}(\sqrt{2}-1) = \mathrm{T}(1)$이다. 마지막으로 소문항 (i)에 $x = 1$을 넣으면 $\mathrm{T}(1) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}(1)$이

므로 $T(1) = \frac{1}{2}T_\infty$이다. 그러므로

$$T(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{4}T_\infty. \qquad \blacksquare$$

돌아보기

- **피적분함수를 보존하는 치환.** 두 핵심 단계 모두 $\frac{du}{1+u^2}$을 바꾸지 않는 치환을 썼고, 움직인 것은 적분 구간의 끝값뿐이었다. 적분의 이러한 "대칭"은 강력한 도구이다.
- **고정점(fixed point).** $T(\sqrt{3})$의 값은 어떤 식이 자기 자신과 같아지도록 수를 골라서 얻었다. 그렇게 하여 항등식이 방정식으로 바뀌었다.
- **정의는 해석학에서 올 수 있다.** 삼각형은 한 번도 쓰지 않았지만 $\frac{\pi}{3}$과 $\frac{\pi}{8}$을 되찾았다(π를 $2T_\infty$로 정의했을 때).

숨은 수학

초등함수 세우기

엄밀한 해석학 강의에서는 exp, sin, cos, ln 같은 함수를 그냥 주어진 것으로 가정할 수 없다. 이 함수들을 **구성**하고 그 성질을 증명해야 한다. 표준적인 방법은 세 가지이다. 거듭제곱급수(power series)로 정의할 수 있다($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$). 연습문제에 있는 1986년 예시 문제(specimen question)처럼 미분방정식(differential equation)의 해로 정의할 수도 있다($f' = f$, $f(0) = 1$이 exp를 정의한다). 또는 여기서처럼 역함수(inverse function)를 적분으로 정의할 수 있다. 즉 $\ln x = \int_1^x \frac{du}{u}$, $\arctan x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2}$로 정의하고, $\pi = 2\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$로 정의한다. 각 방법에는 저마다 장점이 있으며, 세 방법이 모두 같은 함수를 준다는 것을 증명하는 일은 보람 있는 연습이다. Section 3.8의 함수방정식(functional equation)을 이용한 방법과도 비교해 보라.

원 너머로: 타원적분

적분을 이용한 방법은 삼각형을 이용한 방법으로는 불가능한 방식으로 일반화된다. 1718년 Giulio Fagnano는 8자 모양의 곡선인 **렘니스케이트**(lemniscate)의 호의 길이(arc length)를 연구했는데, 이는 $\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$으로 이어진다. 그는 우리의 치환이 T를 두 배로 만든 것처럼 호를 두 배로 만드는 치환을 찾아냈다. 1751년 Fagnano의 연구를 읽은 오일러(Euler)는 완전한 덧셈정리를 찾았고, 이는 결국 아벨(Abel)과 야코비(Jacobi)를 거쳐 **타원함수**(elliptic function)의 이론으로 이어졌다. 타원함수란 이와 같은 적분의 역함수로, 원에 대한 sin과 cos의 역할을 렘니스케이트에 대해 하는 함수이다. 같은 적분을 산술기하평균(AGM)에 관한 가우스(Gauss)의 연구에서도 만난 바 있다(Section 2.6). 오늘날 타원함수는 정수

론(number theory)의 중심에 있으며, Section 1.9의 타원곡선(elliptic curve)은 그 기하학적 그림자이다.

π 계산하기

덧셈 항등식은 π를 계산하는 가장 유명한 공식들의 바탕이기도 하다. 예를 들어 이를 거듭 적용하면 $\mathrm{T}(1) = 4\mathrm{T}(\frac{1}{5}) - \mathrm{T}(\frac{1}{239})$임을 보일 수 있는데, 이것이 1706년의 마친(Machin)의 공식이다. 이 공식을 급수 $\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$와 결합하여 π의 100자리를 얻었고, 이 방법은 두 세기 반 동안 으뜸가는 방법으로 쓰였다. 이것이 Section 5.1의 주제이다.

사고 기술

적분의 대칭

피적분함수를 바꾸지 않는 치환을 찾아라. 그런 치환은 적분이 정의하는 함수의 항등식으로 바뀐다.

여기서는 $u \mapsto 1/u$와 $u \mapsto \frac{u+a}{1-au}$가 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$을 보존하며, 각각 반사 공식과 덧셈정리를 준다. 같은 아이디어를 다른 적분에 적용한 것이 특수함수 이론의 바탕을 이룬다.

더 도전하기

1 **지수함수와 코사인.** STEP II Specimen paper, 6번 문제 (`step.maths.org/questions/spec-s2-q6`)를 풀어 보라. 이 문제는 지수함수와 코사인의 덧셈정리를 오직 그 미분방정식만으로 이끌어 낸다. (**힌트:** 코사인의 경우, 0이 되어야 할 두 식을 찾고 그 제곱의 합이 상수임을 보여라.)

2 **역사인 함수.** STEP III 2007, 7번 문제 (`step.maths.org/questions/07-s3-q7`)을 풀어 보라. 이 문제는 역사인 함수를 이 절의 적분과 같은 방식으로 다루고, 치환으로 둘을 연결한다.

3 **초기의 마친형 공식.** 덧셈 항등식을 이용하여 $\mathrm{T}(\frac{1}{2}) + \mathrm{T}(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$임을 보여라.

4 **T_∞는 유한하다.** 모든 $x \geq 1$에 대해 $\mathrm{T}(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} < 2$임을 보이고, $0 < x < 1$에서도 $\mathrm{T}(x) < 2$인 이유를 설명한 다음, 단조수렴정리(monotone convergence theorem, Section 2.2)로부터 T_∞가 존재함을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press). 여러 방법을 논의하면서 초등함수를 엄밀하게 세운다.
- **Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*** (McGraw-Hill). 유명한 "베이비 루딘(baby Rudin)"이다. 8장의 머리말에서 몇 쪽 안 되는 우아한 서술로 거듭제곱급수에서 exp, sin, cos를 구성한다. 고급.
- **Victor Prasolov & Yuri Solovyev, *Elliptic Functions and Elliptic Integrals*** (American Mathematical Society). 렘니스케이트가 어디로 이어지는지 알고 싶은 독자를 위한 책이다. 고급.

4.3 22/7은 π보다 크다

문제

STEP I 1997, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/97-s1-q6`

도입

여러 세대의 학생들이 π는 "대략 $\frac{22}{7}$"이라고 배워 왔다. 이것은 매우 좋은 근삿값(approximation)이다. $\frac{22}{7} = 3.142857\ldots$이고 $\pi = 3.141592\ldots$이다. 그런데 $\frac{22}{7}$은 π보다 큰가, 작은가? 그리고 누군가가 대신 계산해 둔 π의 자릿수를 그냥 찾아보지 않고, 이것을 증명할 수 있는가?

이 문제는 수학 전체를 통틀어 가장 우아한 증명 가운데 하나를 보여 준다. 양의 함수의 적분 하나는 당연히 양수여야 하는데, 이 적분이 정확히 $\frac{22}{7} - \pi$와 같다는 것이 밝혀진다. 피적분함수(integrand)가 양수이므로 적분도 양수이고, 따라서 $\frac{22}{7} > \pi$이다. 증명 전체가 몇 줄에 들어가며, 너무나 깔끔해서 수학 티셔츠에 퍼즐로 실릴 정도이다.

시작하기 전에

생각해 보기 왜 $\int_0^1 \frac{\text{다항식}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$에서 π가 나오는가? 이런 꼴의 간단한 적분 가운데 그 자체로 π를 주는 것은 무엇인가?

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$이다. 다항식을 $1+x^2$으로 나누면, 다항식인 몫(quotient)(적분하면 유리수가 된다)과 $1+x^2$ 위에 놓인 상수 나머지(remainder)(적분하면 π의 유리수배가 된다)를 얻는다. 문제의 첫 부분은 바로 이 나눗셈을 하라고 요구한다.

차근차근 풀기

1단계 다항식의 나눗셈

먼저 전개한다. $(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$이므로

$$x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4.$$

> **생각해 보기** 다항식의 나눗셈(polynomial division)을 하든 계수를 비교하든, x^2+1로 나누어 보자. 나머지는 무엇인가?

$(a_6x^6 + \cdots + a_0)(x^2+1) + b$에서 최고차항부터 계수를 비교(comparing coefficients)하면 다음과 같다. $a_6 = 1$; $a_5 = -4$; $a_4 + a_6 = 6$이므로 $a_4 = 5$; $a_3 + a_5 = -4$이므로 $a_3 = 0$; $a_2 + a_4 = 1$이므로 $a_2 = -4$; $a_1 + a_3 = 0$이므로 $a_1 = 0$; $a_0 + a_2 = 0$이므로 $a_0 = 4$; 마지막으로 $a_1 = 0$(x의 계수)이고 $a_0 + b = 0$이므로 $b = -4$이다. 즉,

$$x^4(1-x)^4 = (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)(x^2+1) - 4.$$

2단계 적분

$1 + x^2$으로 나누면

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2},$$

이므로

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + \frac{5}{5} - \frac{4}{3} + 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi.$$

이제 $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$이므로 유리수 부분은 $\frac{1}{7} + 3 = \frac{22}{7}$이고, 적분값은 $\frac{22}{7} - \pi$이다. ■

3단계 적분값의 범위 정하기

> **생각해 보기** 피적분함수는 $(0,1)$에서 양수이므로 곧바로 $\frac{22}{7} > \pi$이다. π의 하계를 얻으려면 적분값의 상계가 필요하다. $[0,1]$에서 $\frac{1}{1+x^2}$은 얼마나 커질 수 있는가?

$[0,1]$에서 $1 \le 1 + x^2 \le 2$이므로

$$\tfrac{1}{2}x^4(1-x)^4 \le \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \le x^4(1-x)^4,$$

이고, 양 끝점을 제외하면 등호가 성립하지 않는다.

잠깐, 직접 해 보기 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$를 계산하고 증명을 마무리하라.

전개식을 항별로 적분하면

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx = \frac{1}{9} - \frac{4}{8} + \frac{6}{7} - \frac{4}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{630}.$$

(공통분모 2520으로 통분하면 $280 - 1260 + 2160 - 1680 + 504 = 4$이고, $\frac{4}{2520} = \frac{1}{630}$이다.) 따라서

$$0 < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630},$$

즉 $\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$이다. ■

수치로 보면 $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} = 3.14127\ldots$이므로 $3.1412 < \pi < 3.1429$를 증명한 셈이다. 왼쪽 부등식까지 이용하면 $\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi$이고, 이로써 상계를 $\pi < 3.14207$로 개선할 수 있다.

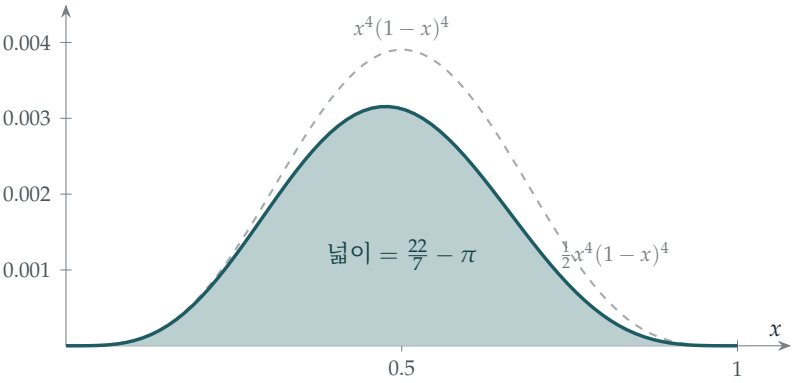


그림 4.3.1 피적분함수 $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$(청록색)는 양수이지만 매우 작다. 최댓값이 약 0.003이다. 색칠한 넓이는 정확히 $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.00126$이다. 피적분함수는 $\frac{1}{2}x^4(1-x)^4$(점선)과 $x^4(1-x)^4$(파선) 사이에 있으며, 이 두 함수 아래의 넓이는 각각 $\frac{1}{1260}$과 $\frac{1}{630}$이다.

돌아보기

- **양수성으로 부등식을 증명한다.** 양의 함수의 적분은 양수이다. 적분값이 $\frac{22}{7} - \pi$임을 알아내자마자 부등식이 곧바로 나왔다.
- **작은 피적분함수, 정밀한 범위.** 인수 $x^4(1-x)^4$는 $[0,1]$에서 매우 작으며(최대 $\frac{1}{256}$), 이 때문에 적분값이 작고 범위가 정밀해진다.
- **유리수와 π의 배수의 합.** Section 2.9에서와 마찬가지로, "유리수 + 어떤 상수의 유리수 배" 꼴의 적분이 작으면 그 상수의 좋은 유리수 근삿값을 얻는다.

숨은 수학

역사가 있는 증명

아르키메데스(Archimedes)는 기원전 250년 무렵, 원에 내접하고 외접하는 96각형의 둘레를 계산하여 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$을 증명하였다(Section 2.5의 다각형과 비교해 보라). 적분을 이용한 증명은 훨씬 최근의 것이다. 이 증명은 D. P. Dalzell이 1944년에 발표하였고, 1968년 미국 대학생들을 위한 퍼트넘 대회(Putnam competition)에 문제로 출제되면서 유명해졌다. 이 증명의 매력은 수치 계산이 전혀 필요 없다는 점이다. 부등식 $\frac{22}{7} > \pi$는 양의 함수의 적분은 양수라는 사실에서 저절로 나온다.

같은 아이디어로 얻는 더 나은 근삿값

이 방법은 일반화된다. $x^4(1-x)^4$ 대신 $x^8(1-x)^8$을 쓰면 같은 나눗셈으로

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{188684}{15015},$$

를 얻고, 이로써 $\pi > \frac{47171}{15015} = 3.1415917\ldots$가 증명되는데, 이는 유효숫자(significant figures) 여섯 자리까지 정확하다. 2009년에 Stephen Lucas는 피적분함수가 음이 아닌 이런 종류의 적분들의 족을 찾아내어, 유효숫자 일곱 자리까지 정확한 $\frac{355}{113}$을 비롯한 다른 유명한 근삿값들에 대한 부등식을 증명하였다.

근삿값과 무리성

왜 π는 $\frac{22}{7}$이나 $\frac{355}{113}$처럼 좋은 분수 근삿값을 가질까? 모든 무리수(irrational number)는 그 수와의 차가 $\frac{1}{q^2}$ 이내인 분수 $\frac{p}{q}$를 무한히 많이 가지는데, π는 연분수(continued fraction) $[3;7,15,1,292,\ldots]$에 큰 항 292가 들어 있어서 앞부분에 유난히 좋은 근삿값을 몇 개 가지게 된다(Section 2.2 참고). 이 문제에 나온 것과 같은 적분을 점점 더 작게 만드는 것은, 어떤 수가 분수로 너무 잘 근사될 수 **없으며** 따라서 무리수임을 보이는 증명의 출발점이 된다. π가 무리수라는 Ivan Niven의 유명한 한 쪽짜리 증명(1947)은 $\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\sin(\pi x)$의 적분을 이용하는데, 이는 Section 2.9에 나온 적분들의 삼각함수 사촌이다.

사고 기술

부등식을 양의 함수의 적분으로 바꾸어 표현하라

$A > B$를 증명하려면, 적분값이 $A - B$인 양의 함수를 찾아라.

이렇게 하면 부등식이 하나의 항등식과 자명한 사실로 바뀐다. 이것은 해석학에서 가장 유용한 요령 가운데 하나이며, 적분 대신 제곱의 합을 쓰는 같은 아이디어로 Section 3.2에서 AM–GM을 증명하였다.

더 도전하기

1 **수치를 확인하라.** $\frac{22}{7} - \pi$를 유효숫자 네 자리까지 계산하고, 그 값이 $\frac{1}{1260}$과 $\frac{1}{630}$ 사이에 있음을 확인하라.

2 **베타 적분.** 공식 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$(Section 4.4에서 증명함)을 이용하여 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}$임을 확인하라.

3 **아래쪽 근삿값.** 다음을 보여라.

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{그리고} \quad \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{47}{15},$$

이로부터 $\pi > 3$과 $\pi > \frac{47}{15}$을 이끌어 내라. 왜 이것들은 $\frac{22}{7}$보다 덜 정확한가?

4 **더 나아가기.** 심화위에 주어진 $\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$에 대한 항등식을 확인하라. (나눗셈은 컴퓨터 대수 시스템(computer algebra system)이 해 줄 것이다. 핵심은 나머지가 16이어서 4π가 나온다는 것을 확인하는 데 있다.)

더 읽을거리

- **Petr Beckmann, *A History of* π** (St Martin's Press). π의 역사. 아르키메데스의 다각형 방법을 자세히 다루며, 그 밖에도 많은 내용이 담겨 있다.
- **Stephen Lucas, "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands"**, *American Mathematical Monthly* 116 (2009). 음이 아닌 피적분함수를 가진 적분에서 얻은 π의 근삿값. 짧고 읽기 쉽다.
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). 무리수. π가 무리수라는 Niven의 증명이 실려 있다.

4.4 월리스, 베타 함수, 그리고 1/2의 계승

문제

STEP II 1995, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/95-s2-q4`

도입

$\left(\frac{1}{2}\right)!$은 무엇일까? 터무니없는 질문처럼 들린다. $n!$은 $1 \times 2 \times \cdots \times n$을 뜻하는데, 항을 "반 개"만 곱할 수는 없기 때문이다. 그런데도 자연스러운 답이 있으며, 그 답은 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

π는 어디에서 나올까? 바로 이 문제가 다루는 $\sin t$의 거듭제곱의 적분에서 나온다. 이 문제는 그 과정에서 π에 관한 가장 오래되고 가장 기이한 공식 가운데 하나인, 1655년 존 월리스(John Wallis)의 무한곱(infinite product)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots,$$

을 증명하고, 모든 확률론 연구자와 통계학자가 사용하는 $n!$에 대한 스털링 공식(Stirling's formula)에 숨어 있는 상수를 찾아낸다.

시작하기 전에

생각해 보기 u_0과 u_1은 얼마인가? 그리고 n이 클 때 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin^n t$의 그래프는 대략 어떤 모양인가?

$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$이고 $u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \mathrm{d}t = 1$이다. n이 크면 $\sin^n t$는 $\sin t$가 1에 가까운 $t = \frac{\pi}{2}$ 근처를 제외하면 매우 작다. 즉 그래프는 오른쪽 끝에 붙은 좁은 뾰족한 봉우리가 된다(그림 4.4.1). 따라서 n이 커지면 u_n은 줄어든다. 이 문제는 그 속도가 정확히 얼마인지, 곧 $\sqrt{\pi/(2n)}$과 같은 빠르기임을 밝혀낸다.

차근차근 풀기

1단계 축소 공식

> **생각해 보기** $\sin t$를 적분하고 $\sin^{n-1} t$를 미분하여 $\int \sin t \cdot \sin^{n-1} t \, dt$를 부분적분(integration by parts)하라. 새 피적분함수에는 $\cos^2 t$가 들어 있다. 어떻게 하면 다시 $\sin t$의 거듭제곱으로 돌아갈 수 있을까?

$dv = \sin t \, dt$(따라서 $v = -\cos t$), $w = \sin^{n-1} t$(따라서 $w' = (n-1)\sin^{n-2} t \cos t$)로 두면

$$u_n = \Big[-\cos t \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t \, dt.$$

$n \geq 2$이면 경계항은 0이다. $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$로 쓰면 적분은 $u_{n-2} - u_n$이 되므로 $u_n = (n-1)(u_{n-2} - u_n)$, 즉

$$nu_n = (n-1)u_{n-2}. \qquad \blacksquare$$

이것이 축소 공식(reduction formula)이다. 양변에 u_{n-1}을 곱하면 $nu_n u_{n-1} = (n-1)u_{n-1}u_{n-2}$를 얻는다. $\blacksquare$

2단계 불변량

> **생각해 보기** 이 관계식은 n이 하나 줄어들어도 양 $nu_n u_{n-1}$이 변하지 않는다는 뜻이다. $n = 1$일 때 이 값은 얼마인가?

이를 반복해서 적용하면 $nu_n u_{n-1} = (n-1)u_{n-1}u_{n-2} = \cdots = 1 \cdot u_1 u_0 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2}$이다. 따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여 $nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$이다. 이처럼 변하지 않는 양을 불변량(invariant)이라 한다. $\blacksquare$

3단계 조임

$0 < t < \frac{\pi}{2}$이면 $0 < \sin t < 1$이므로 $\sin^n t < \sin^{n-1} t$이다. 즉 끝점을 제외하면 $\sin^n t$의 그래프는 $\sin^{n-1} t$의 그래프 아래에 있다. 적분하면 $0 < u_n < u_{n-1}$이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** $u_n < u_{n-1}$과 $nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$를 이용하여 nu_n^2을 양쪽에서 가두어라.

u_{n-1}을 더 작은 u_n으로 바꾸면 $nu_n^2 < nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$이다. u_n을 더 큰 u_{n-1}로 바꾸면 $\frac{1}{2}\pi = nu_n u_{n-1} < nu_{n-1}^2$이다. 따라서 $nu_n^2 < \frac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2$이다. $\blacksquare$

오른쪽 부등식에서 n 대신 $n+1$을 넣으면 $\frac{1}{2}\pi < (n+1)u_n^2$이므로 $nu_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}\pi$이다. 둘

을 합치면

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\tfrac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi. \qquad \blacksquare$$

$\frac{n}{n+1} \to 1$이므로 조임 정리(squeeze theorem)에 의해 $nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$이다. $\blacksquare$

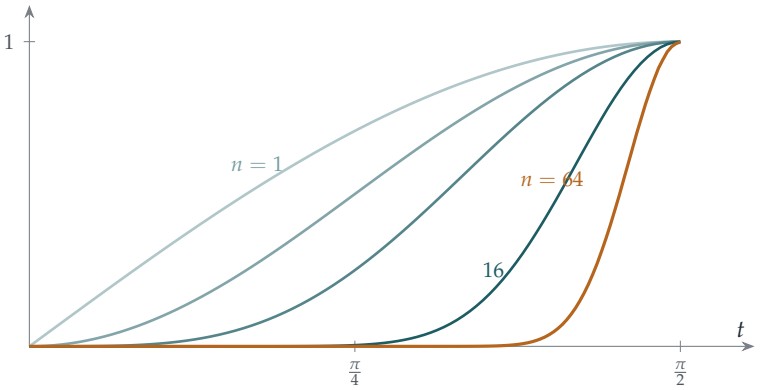


그림 4.4.1 $n = 1, 2, 4, 16, 64$일 때 $\sin^n t$의 그래프. n이 커질수록 곡선 아래의 넓이 u_n은 줄어들며 $t = \frac{\pi}{2}$ 근처에 몰린다. 이 문제는 $u_n \approx \sqrt{\pi/(2n)}$임을 보인다. $n = 64$이면 이 값은 약 0.157이다.

돌아보기

- **축소 공식.** 부분적분으로 u_n을 u_{n-2}로 바꾸었으므로, 모든 u_n은 u_0과 u_1에 의해 결정된다.
- **불변량을 찾아라.** 곱 nu_nu_{n-1}은 고정되어 있었다. 이는 Section 2.6에서 산술기하평균(AGM) 단계를 거쳐도 적분이 변하지 않았던 것과 같다.
- **단조성과 불변량이 합쳐지면 조임이 된다.** $u_n < u_{n-1}$이라는 사실과 nu_nu_{n-1}의 정확한 값을 알면, nu_n^2을 극한이 같은 두 양 사이에 가둘 수 있었다. 이런 성질을 단조성(monotonicity)이라 한다.

숨은 수학

월리스의 곱

축소 공식을 u_0 또는 u_1까지 내려가며 적용하면 명시적인 값을 얻는다.

$$u_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad u_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}.$$

조임을 이용하면 $u_{2m}/u_{2m+1} \to 1$임을 보일 수 있다. 이 비를 풀어 쓰고 정리하면 월리스의 곱

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

을 얻는다. 존 월리스는 1655년에 대담한 보간(interpolation) 과정을 통해 이 공식을 찾아냈다. 지수가 자연수인 적분들의 표에 $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$를 끼워 넣어, 그 값이 "마땅히" 무엇이어야 하는지 추측한 것이다. 이것은 비에트(Viète)의 곱(Section 2.5)에 이어 수학에 등장한 최초의 무한곱 가운데 하나였고, 유리수만을 사용한 것으로는 최초였다.

반의 계승

월리스의 보간 아이디어는 1729년 오일러(Euler)에 의해 엄밀해졌다. 오일러는 오늘날 **감마 함수**(*Gamma function*)라고 부르는 함수

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt,$$

를 찾아냈는데, 이 함수는 $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$(부분적분하면 된다)를 만족하고 자연수 n에 대하여 $\Gamma(n+1) = n!$이다. 감마 함수는 계승(factorial)을 모든 양의 실수로 매끄럽게 확장한다. 이와 밀접하게 관련된 **베타 함수**(*Beta function*)

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

는 Section 4.3와 Section 2.9의 적분들을 포함하며, $x = \sin^2 t$로 치환하면 우리의 u_n도 포함한다. 특히 $\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{8}$(연습문제 2)이므로 $\Gamma(\frac{3}{2})^2/\Gamma(3) = \frac{\pi}{8}$, 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다. 이는 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$와 같은 말이며, 유명한 가우스 적분(Gaussian integral) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$와 같은 사실이다. 정규분포(normal distribution)의 공식에 π가 나타나는 이유가 바로 이것이다.

스털링 공식

스털링 공식에 따르면 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$이다. $(n/e)^n$ 부분은 비교적 쉽게 얻을 수 있지만 상수 $\sqrt{2\pi}$는 더 어렵다. 이 상수를 구하는 표준적인 방법이 바로 이 문제이다. u_{2m}의 명시적인 값에는 $(2m)!/(m!)^2$이 들어 있고, 극한 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$가 상수를 정확히 결정한다. 확률을 통해 같은 상수에 이르는 전혀 다른 길은 Section 12.23에 있다.

사고 기술

적분에서 얻는 점화식

부분적분을 하면 매개변수가 n인 적분을 매개변수가 더 작은 같은 적분과 연결할 수 있는 경우가 많다. 그렇게 얻은 점화식(*recurrence*)은 풀 수도 있고, $n \to \infty$일 때의 거동을 분석할 수도 있다.

점화식이 바꾸지 않는 양과 n에 대한 단조성에 주목하라. 이 둘을 함께 쓰면 명시적인 공식 없이도 극한을 구할 수 있는 경우가 많다.

더 도전하기

1 **월리스의 곱.** u_{2m}과 u_{2m+1}의 명시적인 값과 $u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}$을 이용하여 월리스의 곱을 증명하라.

2 **베타 적분.** STEP II 2013, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/13-s2-q2`)에 도전해 보라. 이 문제는 축소 공식으로 $\int_0^1 x^n(1-x)^n \,\mathrm{d}x$를 계산한 뒤, $n = \frac{1}{2}$일 때 그 답이 무엇을 시사하는지 묻는다. 반의 계승을 처음 엿보는 셈이다.

3 **베타 함수.** STEP III 2025, 1번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`)에 도전해 보라. 이 문제는 일반적인 베타 적분 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \,\mathrm{d}x$와 그 대칭성 및 점화식을 전개하고, 이를 이용하여 $[0, \infty)$에서의 적분을 계산한다.

4 **중심 이항계수(central binomial coefficients).** 심화 $u_{2m} = \binom{2m}{m} \dfrac{\pi}{2^{2m+1}}$임을 보이고, $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$를 이용하여 m이 클 때 $\binom{2m}{m} \approx \dfrac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$임을 유도하라. $m = 10$일 때 이를 확인하라.

더 읽을거리

- **Julian Havil, *Gamma*** (Princeton University Press). 감마 함수와 그 역사를 다룬다.
- **Philip J. Davis, "Leonhard Euler's integral: a historical profile of the Gamma function"**, *American Mathematical Monthly* 66 (1959). 상을 받은 고전적인 논문으로, 이 절을 공부했다면 읽을 수 있다.
- **Emil Artin, *The Gamma Function*** (Dover). 해석학을 어느 정도 공부한 뒤에 읽기 좋은, 짧고 아름다운 단행본이다.

4.5 2학년생의 꿈

문제

STEP III 2009, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/09-s3-q8`

도입

모든 학생은 언젠가 $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$임을 배운다. 이 틀린 등식은 농담 삼아 "신입생의 꿈"(freshman's dream)이라고 불린다. 이 문제는 그만큼이나 초보자의 실수처럼 보이는 사실을 증명한다.

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots,$$

그리고 그 짝인 $\int_0^1 x^{-x} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$도 성립한다. x^x의 적분이 n^{-n}의 합으로 바뀐다니, 믿기 어려울 만큼 좋아 보인다. 그래서 이 등식을 **2학년생의 꿈**(sophomore's dream)이라고 부른다. 하지만 이것은 참이며, 요한 베르누이(Johann Bernoulli)가 1697년에 발견하였다.

증명에는 대학에서 끊임없이 만나게 될 세 가지 아이디어가 쓰인다. 지수함수와 거듭제곱을 비교하는 극한(limit), 점화식(reduction formula), 그리고 함수를 거듭제곱급수(power series)로 전개한 뒤 항별로 적분하는 것(term-by-term integration)이다.

시작하기 전에

생각해 보기 함수 x^x는 $x = 0$에서 여러분이 아는 어떤 식으로도 정의되지 않는다(0^0은 모호하다). x가 위쪽에서 0에 다가갈 때 이 함수는 어떻게 움직이는가? 계산기로 $x = 0.1, 0.01, 0.001$을 넣어 보아라.

$0.1^{0.1} \approx 0.794$, $0.01^{0.01} \approx 0.955$, $0.001^{0.001} \approx 0.993$이다. 1에 다가가는 것처럼 보인다. 소문항 (i)이 이를 증명하는데, 이로부터 피적분함수(integrand)가 0 근처에서 얌전하게 행동하

며 적분이 의미를 가짐을 알 수 있다. $(0,1]$에서 x^x의 그래프는 1 근처에서 시작하여 최솟값까지 내려갔다가 $x=1$에서 다시 1로 돌아온다(그림 4.5.1).

차근차근 풀기

1단계 거듭제곱은 로그를 이긴다

생각해 보기 $x\to 0^+$일 때 $\ln x\to -\infty$이다. 어떤 치환을 하면 $x\to 0^+$가 $t\to\infty$로 바뀌고, $x^m(\ln x)^n$이 $e^{-mt}t^n$과 비슷한 꼴로 바뀌는가?

$x=e^{-t}$로 놓자. $x\to 0^+$일 때 $t\to\infty$이고 $\ln x=-t$이므로

$$x^m(\ln x)^n = e^{-mt}(-t)^n = (-1)^n e^{-mt}t^n \to 0.$$

말로 하면, $x\to 0$일 때 x의 양의 거듭제곱은 $\ln x$의 어떤 거듭제곱이 발산하는 것보다도 빠르게 0으로 간다. ■

$m=n=1$이면 $x\ln x\to 0$이고, 지수함수는 연속이므로 $x^x=e^{x\ln x}\to e^0=1$이다. ■

2단계 점화식

생각해 보기 $I_{n+1}=\int_0^1 x^m(\ln x)^{n+1}\,dx$를 부분적분(integration by parts)하여라. 어느 인수를 적분해야 하는가? $x=0$에서 경계항은 어떻게 되는가?

x^m을 적분하고 $(\ln x)^{n+1}$을 미분하면

$$I_{n+1}=\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,dx.$$

$x=1$에서는 $\ln 1=0$이므로 경계항이 0이고, $x\to 0$일 때는 소문항 (i)에 의해($m+1$과 $n+1$을 대입하여) 0으로 수렴한다. 남은 적분은 $\frac{n+1}{m+1}I_n$이므로

$$I_{n+1}=-\frac{n+1}{m+1}I_n.$$ ■

$I_0=\int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1}$에서 출발하여 이 공식을 n번 적용하면

$$I_n=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}\cdot\frac{1}{m+1}=\frac{(-1)^n\,n!}{(m+1)^{n+1}}.$$ ■

3단계 급수

생각해 보기 e^y의 급수를 이용하여 $x^x = e^{x\ln x}$를 전개하여라. 각 항은 어떤 꼴인가? m을 어떤 값으로 두면 소문항 (ii)의 적분이 나타나는가?

모든 y에 대하여 $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$이므로

$$x^x = e^{x\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}.$$

잠깐, 직접 해 보기 소문항 (ii)에서 $m = n$으로 두고($n = 0$인 경우는 따로 다루어) 0부터 1까지 항별로 적분하여라. 무엇이 나오는가?

$n = 0$인 항은 1이고, 이를 적분하면 1이다. $n \geq 1$이면 소문항 (ii)에서 $m = n$으로 두어 $\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$를 얻으므로, n번째 항의 기여는 $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$이다. 모두 더하면

$$\int_0^1 x^x \, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots . \qquad \blacksquare$$

($n = 0$인 항도 같은 규칙 $\frac{1}{1^1}$에 들어맞는다.) 항들은 매우 빠르게 작아진다. 일곱 개의 항만으로 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확한 값 0.783430…을 얻는다.

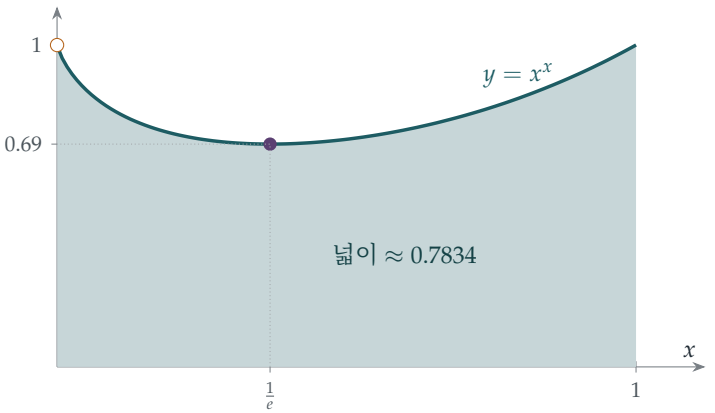


그림 4.5.1 $(0, 1]$에서 x^x의 그래프. $x \to 0$일 때 1로 수렴하고(빈 원), $x = \frac{1}{e}$에서 최솟값 $e^{-1/e} \approx 0.692$까지 내려갔다가 $x = 1$에서 다시 1로 돌아온다. 색칠한 부분의 넓이는 $\sum (-1)^{n+1} n^{-n} \approx 0.7834$이다.

돌아보기

- **증가 속도를 비교하려면 치환하라.** $x = e^{-t}$로 놓아 0에서의 극한을 익숙한 ∞에서의 극한으로 바꾸었다.

- **경계항은 반드시 확인해야 한다.** 점화식은 $x = 0$에서 경계항이 사라지는 데 의존했고, 바로 여기서 소문항 (i)이 쓰였다.
- **먼저 급수로, 그다음 적분.** 피적분함수를 거듭제곱급수로 전개하여 각 항을 적분함으로써, 초등함수인 원시함수(antiderivative)가 없는 적분을 빠르게 수렴하는 합으로 바꾸었다.

숨은 수학

합과 적분의 순서 바꾸기

3단계에서는 무한합과 적분의 순서를 슬그머니 바꾸었다. 즉 $\int \sum = \sum \int$로 두었다. 이것이 언제나 허용되는 것은 아니다. 대학에서는 이것이 성립하지 않는 예와, 언제 안전한지 알려 주는 정리들을 만나게 된다. 가장 간단한 정리에 따르면, 급수가 **균등수렴**(uniform convergence)할 때, 곧 급수의 꼬리를 모든 x에서 동시에 작게 만들 수 있을 때 순서를 바꾸어도 안전하다. 여기서는 $(0,1]$에서 $|x \ln x| \le \frac{1}{e}$이므로, x가 무엇이든 n번째 항의 크기는 많아야 $\frac{e^{-n}}{n!}$이다. 이 상계들의 합은 수렴하므로 꼬리는 균등하게 작고, 순서를 바꾸는 것이 정당화된다. 이 논증을 **바이어슈트라스 M-판정법**(Weierstrass M-test)이라고 하며, 해석학에서 가장 많이 쓰이는 도구 가운데 하나이다.

"꿈"이 이루어지는 이유

이 항등식은 특별하다. 이는 $\frac{(x\ln x)^n}{n!}$의 거듭제곱과 적분 $\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$이 정확히 맞아떨어져 $n!$이 완벽하게 약분되는 데 달려 있다. 그 밑바탕에서 이 적분은 감마 함수(Gamma function)가 모습을 바꾼 것이다. 치환 $x = e^{-t/(n+1)}$을 하면 이 적분은 $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t} \, dt = \frac{(-1)^n \, \Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$이 되어, Section 4.4와 연결된다.

이름

"2학년생의 꿈"이라는 이름은 Jonathan Borwein과 공저자들이 2004년 책 *Experimentation in Mathematics*에서 "신입생의 꿈" $(a+b)^n = a^n + b^n$의 짝으로 붙인 것이다(신기하게도 "신입생의 꿈"은 어떤 수 체계에서는 참이다. 소수(prime) p를 법으로 하는 산술에서는 가운데 이항계수(binomial coefficient)가 모두 p로 나누어떨어지므로 $(a+b)^p = a^p + b^p$이다). Borwein은 **실험수학**(experimental mathematics)의 선구자였다. 실험수학에서는 컴퓨터를 이용해 이와 같은 항등식을 발견하고, 그런 다음 손으로 증명한다.

사고 기술

전개하고 항별로 적분하기

피적분함수가 각 항을 적분할 수 있는 거듭제곱급수를 가진다면, 각 항을 적분하여 그 결과를 더하라.

이는 초등함수인 원시함수가 없는 적분의 값을 구하는 강력한 방법이다. 합과 적분의 순서를 바꾸는 것이 정당한지 항상 따져 보아라. 대개는 정당하지만, 왜 그런지 알고 있어야 한다.

더 도전하기

1 **짝이 되는 등식.** $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \approx 1.2913$임을 보여라.

2 **최솟값.** x^x가 $(0,\infty)$에서 $x = \frac{1}{e}$일 때 최솟값 $e^{-1/e}$를 가짐을 보여라.

3 **몇 개의 항이 필요한가?** 항이 감소하는 교대급수(alternating series)에서는 중간에 멈추었을 때의 오차가 처음으로 생략한 항보다 작다. 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확하게 구하려면 $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$의 급수에서 몇 개의 항이 필요한가?

4 **사촌 격인 문제.** 같은 방법으로 $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$이고 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$임을 보여라. (Section 2.4에 의해 이 값은 $-\frac{\pi^2}{6}$이다.)

더 읽을거리

- **Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics*** (A. K. Peters). 이 이름의 출처이며, 컴퓨터로 발견한 더 많은 항등식이 실려 있다.
- **William Dunham, *The Calculus Gallery*** (Princeton University Press). 뉴턴(Newton)부터 르베그(Lebesgue)까지 해석학의 걸작들을 다루며, 베르누이의 업적도 포함되어 있다.
- **Mary Hart, *Guide to Analysis*** (Palgrave). 균등수렴과, 합과 적분의 순서를 언제 바꿀 수 있는지를 명료하게 설명한다.

4.6 공식으로 나타낼 수 없는 적분

문제

STEP III 2016, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s3-q3`

도입

미분(differentiation)은 기계적이다. 규칙이 정해져 있고, 흔히 쓰는 재료로 만든 함수라면 그 규칙을 적용하기만 하면 미분할 수 있다. 적분(integration)은 그렇지 않다. 어떤 기법으로도 풀리지 않는 적분을 만나 보고, 자신이 그저 충분히 영리하지 못한 것인지 고민해 본 학생이 많을 것이다. 때로는 그 답이 이렇다. 누구도 그만큼 영리할 수는 없다. **공식이 존재하지 않기** 때문이다.

이 문제는 특수한 경우에 바로 그런 사실을 증명한다. 적분 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$는 넓이로서 분명히 존재한다. 그러나 이것을 (유리함수(rational function)) $\times e^x$ 꼴로 쓸 수는 없다. 이 꼴은 부분적분(integration by parts)으로 얻으리라 기대할 법한 형태이다. 무언가를 찾아내는 것이 아니라 무언가가 불가능함을 증명하는 것은 전혀 다르고, 매우 독특한 종류의 수학이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\int \mathrm{f}(x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x + C$이면 P와 Q는 어떤 등식을 만족해야 하는가? (우변을 미분해 보자.)

미분하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x\right) = \frac{\mathrm{P'Q} - \mathrm{PQ'} + \mathrm{PQ}}{\mathrm{Q}^2}e^x$이고, 이것이 $\mathrm{f}(x)e^x$와 같아야 한다. 따라서 문제 전체는 다음 다항식 항등식(polynomial identity)에 관한 것이다.

$$\mathrm{P'Q} - \mathrm{PQ'} + \mathrm{PQ} = \mathrm{f}\,\mathrm{Q}^2.$$

적분에 관한 질문이 다항식에 관한 질문, 즉 다항식의 인수와 차수(degree)에 관한 질문으

로 바뀌었다.

차근차근 풀기

1단계 **인수 $x+1$**

$\mathrm{f}(x)=\dfrac{x^3-2}{(x+1)^2}$일 때, 항등식의 양변에 $(x+1)^2$을 곱하면 다음을 얻는다.

$$(x+1)^2(\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q})=(x^3-2)\,\mathrm{Q}^2. \tag{†}$$

> **생각해 보기** (†)에 $x=-1$을 대입하자. 무엇이 성립해야 하는가?

$x=-1$에서 좌변은 0이다. 우변은 $(-1-2)\,\mathrm{Q}(-1)^2=-3\,\mathrm{Q}(-1)^2$이다. 따라서 $\mathrm{Q}(-1)=0$이고, 인수정리(factor theorem)에 의해 $x+1$은 Q의 인수이다. ■

2단계 **차수**

P의 차수를 p, Q의 차수를 q라 하자.

> **생각해 보기** $\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q}$에서 차수가 가장 높은 항은 무엇인가? 그 항이 다른 항들과 상쇄될 수 있는가?

PQ의 차수는 $p+q$이고, $\mathrm{P}'\mathrm{Q}$와 $\mathrm{P}\mathrm{Q}'$의 차수는 많아야 $p+q-1$이다. 따라서 (†)의 좌변의 차수는 정확히 $2+p+q$이고, 우변의 차수는 $3+2q$이다. 두 값을 같게 놓으면 $p=q+1$이다. ■

3단계 **P 구하기**

$\mathrm{Q}=x+1$이면 $\mathrm{Q}'=1$이고 P의 차수는 2이다. (†)를 $(x+1)^2$으로 나누면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}'(x+1)-\mathrm{P}+\mathrm{P}(x+1)=x^3-2, \qquad \text{즉,} \qquad (x+1)\mathrm{P}'+x\mathrm{P}=x^3-2.$$

$\mathrm{P}=\alpha x^2+\beta x+\gamma$로 놓아 보자. 좌변은

$$(x+1)(2\alpha x+\beta)+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x=\alpha x^3+(2\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+\beta+\gamma)x+\beta.$$

이를 x^3-2와 비교하면 $\alpha=1$, $2\alpha+\beta=0$이므로 $\beta=-2$, 그러면 $\gamma=0$이다. 상수항 $\beta=-2$도 모순 없이 맞는다. 따라서

$$\mathrm{P}(x)=x^2-2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,e^x\,dx=\frac{x^2-2x}{x+1}\,e^x+C. \qquad ■$$

(원한다면 미분하여 확인해 보자. 몫의 미분법(quotient rule)을 연습하기에 좋다.)

4단계 불가능성

이제 P와 Q가 공통인수(common factor)를 갖지 않으면서 $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx = \frac{P}{Q}e^x + C$라고 가정하자. 항등식은 다음과 같이 된다.

$$(x+1)\left(P'Q - PQ' + PQ\right) = Q^2.$$

1단계에서와 같이 $x = -1$을 대입하면 $Q(-1) = 0$임을 알 수 있다. $Q = (x+1)^k R$로 쓰자. 여기서 $k \geq 1$이고 $R(-1) \neq 0$이다($x+1$을 가능한 한 많이 인수로 뽑아낸다).

> **잠깐, 직접 해 보기** $Q = (x+1)^k R$을 대입하고, $(x+1)$을 가능한 한 많이 약분한 다음, $x = -1$을 대입하자. $P(-1)$에 대해 무엇을 알 수 있는가?

그러면 $Q' = k(x+1)^{k-1}R + (x+1)^k R'$이고,

$$P'Q - PQ' + PQ = (x+1)^{k-1}\Big[(x+1)\left(P'R - PR' + PR\right) - kPR\Big].$$

따라서 항등식은 $(x+1)^k\big[(x+1)(P'R - PR' + PR) - kPR\big] = (x+1)^{2k}R^2$이 된다. $(x+1)^k$으로 나누면

$$(x+1)\left(P'R - PR' + PR\right) - kPR = (x+1)^k R^2.$$

$k \geq 1$이므로 $x = -1$에서 이 식은 $-kP(-1)R(-1) = 0$을 준다. $k \neq 0$이고 $R(-1) \neq 0$이므로 $P(-1) = 0$이어야 한다. 그런데 그러면 $x+1$이 P와 Q를 모두 나누게 되어, 둘이 공통인수를 갖지 않는다는 가정에 모순이다. 따라서 그러한 P와 Q는 존재하지 않는다. ■

돌아보기

- **대수로 옮기기.** "이것을 이 꼴로 적분할 수 있는가?"라는 질문이 "이 다항식 항등식에 해가 있는가?"라는 질문이 되었다.
- **특별한 점에서 값 구하기.** $x = -1$을 대입하여 인수에 관한 정보를 세 번이나 끌어냈다.
- **기약분수를 이용한 귀류법.** Section 1.3의 $\sqrt{2}$에서와 마찬가지로, 분수가 기약분수(lowest terms)라고 가정한 뒤 공통인수를 찾아내어 모순을 얻었다. 이것이 귀류법(proof by contradiction)이다.

숨은 수학

극과 로그

소문항 (ii) 뒤에는 간단한 그림이 숨어 있다. 피적분함수(integrand) $\frac{e^x}{x+1}$은 $x=-1$에서 **단순극**(simple pole)을 가진다. 즉, 그 근처에서 $\frac{e^{-1}}{x+1}$처럼 행동한다. $\frac{1}{x+1}$을 적분하면 $\ln|x+1|$이 되므로, 원시함수(antiderivative)는 -1 근처에서 $e^{-1}\ln|x+1|$처럼 행동하여 로그적으로 $-\infty$로 발산해야 한다(그림 4.6.1). 그러나 유리함수와 e^x의 곱은 $(x+1)^{-k}$ 같은 거듭제곱처럼만 발산할 수 있고, 그러면 그 도함수는 $k+1 \geq 2$차의 극을 가지므로 결코 단순극이 될 수 없다. 로그적인 행동은 유리함수로 만들어 낼 수 없다. 4단계의 대수적 논증은 이 관찰을 엄밀하게 만든 것이다. 반면 소문항 (i)에서는 피적분함수가 **이중극**(double pole)을 가지는데, 이는 단순극을 가진 함수의 도함수가 정확히 보여 주는 모습이므로 유리함수 꼴의 답이 가능했다.

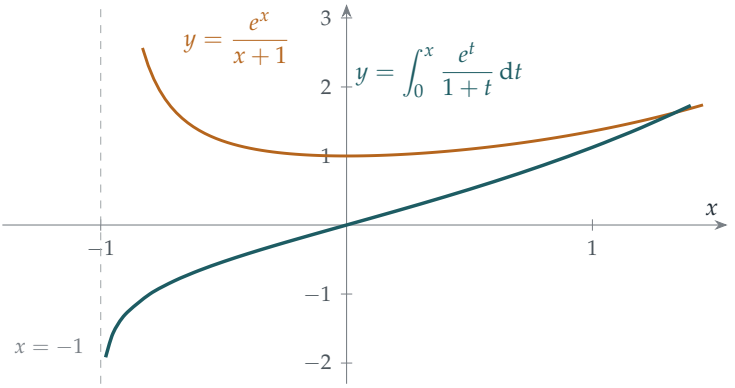


그림 4.6.1 피적분함수 $\frac{e^x}{x+1}$(호박색)은 $x=-1$에서 단순극을 가진다. 그 원시함수(청록색, 수치적으로 계산)는 문제없이 존재하지만, $x \to -1^+$일 때 $e^{-1}\ln(x+1)$처럼 **로그적으로** $-\infty$로 발산한다. 유리함수와 e^x의 곱은 결코 이렇게 행동할 수 없다.

리우빌과 리시 알고리즘

1830년대에 리우빌(Joseph Liouville)은 어떤 적분이 **초등함수**(elementary functions, 다항함수, 지수함수, 로그함수, 거듭제곱근, 삼각함수로부터 일반적인 연산을 통해 만든 함수)로 표현될 수 있는지에 관한 이론을 세웠다. 그의 결과 중 하나에 따르면, f와 g가 유리함수이고 g가 상수가 아닐 때 $\int \mathrm{f}(x)e^{\mathrm{g}(x)}\,dx$가 초등함수가 되는 것은 어떤 유리함수 R에 대해 이 적분이 $\mathrm{R}(x)e^{\mathrm{g}(x)}$(에 상수를 더한 것)와 같을 때뿐이다. (g에 대한 조건은 중요하다. $\mathrm{g}=0$이고 $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$이면 적분은 $\ln|x|$인데, 이는 초등함수이지만 유리함수는 아니다.) 따라서 유리함수 꼴을 배제하는 이 문제는 사실 $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$가 아예 초등함수가 아님을 증명한

다. 같은 정리의 여러 변형을 이용하면 $\int e^{-x^2}\,dx$와 $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$도 초등함수가 아님을 보일 수 있다. 1969년에 Robert Risch는 리우빌의 아이디어를 알고리즘으로 바꾸었는데, 이 알고리즘은 넓은 부류의 함수에 대해 초등함수인 적분이 존재하는지 판정하고, 존재한다면 그것을 찾아낸다. 이 알고리즘의 여러 변형이 컴퓨터 대수 시스템(computer algebra system) 안에서 작동하고 있다.

특수함수

어떤 적분이 초등함수 꼴을 갖지 않으면, 수학자들은 그 적분에 이름을 붙이고 새로운 함수로서 연구한다. Section 3.9에서 람베르트(Lambert) W 함수를 다룬 것과 마찬가지이다. 여기서 다룬 적분은 본질적으로 **지수적분**(exponential integral) $\mathrm{Ei}(x)$이다. 이 함수는 열의 흐름에 나타나며, **로그적분**(logarithmic integral) $\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$에도 나타난다. 로그적분은 x 이하의 소수(prime)의 개수에 대한 가장 좋은 간단한 근삿값이다(Section 1.2). $x < 0$이면 지수적분은 $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$이다. $x > 0$이면 이 적분은 $t = 0$에서의 무한히 치솟는 부분을 지나가므로, 그 주위의 작은 구간 $(-\varepsilon, \varepsilon)$을 잘라 내고 $\varepsilon \to 0$으로 보내어 $\mathrm{Ei}(x)$를 정의한다. 이것이 **코시 주요값**(Cauchy principal value)이다.

사고 기술

불가능성 증명하기

어떤 일이 불가능함을 보이려면, 그것이 가능하다고 가정하고, 그 가정을 정확한 대수로 옮긴 다음, 모순을 이끌어 낸다.

어려운 부분은 옮기는 과정이다. 즉, "할 수 있다"는 것이 무엇을 뜻하는지 정확한 명제로 나타내는 일이다. 여기서 그것은 "공통인수가 없으면서 이 항등식을 만족하는 다항식 P, Q가 존재한다"는 뜻이었다. 수학에서 가장 깊은 결과 가운데 상당수가 이런 종류의 불가능성 증명이다.

더 도전하기

1 **성공하는 두 경우.** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1} + C$이고 $\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{x-1}{x+1}e^x + C$임을 보여라.

2 **가우스 함수.** $\int e^{-x^2}\,dx = \mathrm{P}(x)e^{-x^2} + C$를 만족하는 다항식 P가 존재하지 않음을 보여라. (힌트: 미분한 다음 차수를 비교하라.)

3 **또 다른 극.** 소문항 (ii)의 논증을 변형하여 $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$가 $\frac{P(x)}{Q(x)}e^x + C$ 꼴이 아님을 보여라.

4 **언제 가능한가?** f가 다항식이고, 어떤 다항식 P에 대해 $\displaystyle\int \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,e^x\,dx = \frac{P(x)}{x+1}\,e^x + C$라고 하자. $(x+1)P' + xP = f$임을 보이고, 이 식과 그 도함수에 $x = -1$을 대입하여 $f(-1) + f'(-1) = 0$임을 보여라. 이 조건이 $f(x) = x^3 - 2$와 연습문제 1의 예들에서 성립하는지 확인하라. 심화이 조건이 충분조건이기도 함을 보일 수 있는가?

더 읽을거리

- **Brian Conrad, "Impossibility theorems for elementary integration"**. 리우빌의 정리를 예와 함께 설명하는, 무료로 볼 수 있는 강의 노트이다.
- **Elena Anne Marchisotto & Gholam-Ali Zakeri, "An invitation to integration in finite terms"**, *The College Mathematics Journal* 25 (1994). 리우빌 이론에 대한 친절한 입문이다.
- **Manuel Bronstein, *Symbolic Integration I*** (Springer). 컴퓨터 대수 시스템이 실제로 어떻게 적분하는지 다룬다. 고급 수준이다.

4.7 변분법

문제

STEP III 2014, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s3-q4`

도입

학교에서 다루는 최적화(optimisation) 문제는 대부분 가장 좋은 **수**를 묻는다. 예를 들어 넓이를 최대로 만드는 x의 값을 구하는 식이다. 반면 **변분법**(calculus of variations)은 가장 좋은 **함수**를 묻는다. 두 점 사이에서 구슬이 가장 빨리 미끄러져 내려가는 곡선은 무엇인가? 매달린 사슬은 어떤 모양이 되는가? 빛은 렌즈를 지날 때 어떤 경로를 따르는가? 어느 경우든 최적화할 양은 적분이고, 미지수는 함수 전체이다.

이 문제는 그중 가장 단순하면서도 흥미로운 예를 다룬다. 적분 $J = \int_0^1 ((y')^2 - a^2 y^2)\,\mathrm{d}x$에서는 서로 경쟁하는 두 항이 균형을 이룬다. 가파름은 값을 끌어올리고, 크기는 값을 끌어내린다. a가 작으면 언제나 가파름이 이겨서 모든 함수에 대해 $J \geq 0$이다. 그러나 균형이 뒤집히는 임계값 a가 존재하고, 이 문제는 그 값을 정확히 구한다. 바로 $a = \frac{\pi}{2}$이다. π가 어디에서 나오는지가 이 절의 이야기이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $I \geq 0$이 왜 자명하지 않은가? $y(1) = 0$을 만족하는 $y = 1 - x$를 넣어 보자.

I는 두 양수의 차이므로 부호가 어느 쪽이든 될 수 있다. $y = 1 - x$이면 $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$이고 $\int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$이므로 $I = \frac{2}{3} > 0$이다. 그러나 더 영리하게 고른 함수라면 $\int (y')^2$에 비해 $\int y^2$을 더 크게 만들 수도 있다. 이 문제의 요령은 I를 **제곱**의 적분으로 쓰는 것이며, 제곱의 적분은 당연히 음이 아니다. 이것은 적분에서의 "완전제곱식 만들기(completing the square)"이다.

차근차근 풀기

1단계 완전제곱식 만들기

I_1의 제곱을 전개하면

$$I_1 = \int_0^1 ((y')^2 + 2yy' \tan x + y^2 \tan^2 x)\,\mathrm{d}x,$$

이므로

$$I - I_1 = -\int_0^1 (y^2 + y^2 \tan^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x.$$

> **생각해 보기** 피적분함수(integrand) $y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x$는 어떤 함수의 도함수(exact derivative)이다. 무엇의 도함수인가?

곱의 미분법(product rule)에 따라 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 \tan x) = 2yy' \tan x + y^2 \sec^2 x$이다. 따라서

$$I - I_1 = -\Big[y^2 \tan x\Big]_0^1 = -(y(1)^2 \tan 1 - y(0)^2 \tan 0) = 0,$$

이다. $y(1) = 0$이고 $\tan 0 = 0$이기 때문이다. 그러므로 $I = I_1 \geq 0$이다. 제곱의 적분이기 때문이다. ■

2단계 $I = 0$은 언제인가?

> **생각해 보기** 음이 아닌 연속함수의 적분이 0이면 그 함수에 대해 무엇을 말할 수 있는가? 그렇다면 $I = 0$일 때 y는 어떤 방정식을 만족해야 하는가?

적분이 0인 음이 아닌 연속함수는 항등적으로 0이어야 한다(어느 한 점에서 양수라면 그 점 근처의 작은 구간에서도 양수가 되어 적분에 양의 값을 보태기 때문이다). 따라서 $I = 0$이면 $[0,1]$에서 $y' + y\tan x = 0$이어야 한다. 양변에 $\sec x$를 곱하면 이 식은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y'\cos x + y\sin x}{\cos^2 x} = 0$을 뜻하므로 $y = C\cos x$이다. 그러면 $y(1) = C\cos 1 = 0$이고, $\cos 1 \neq 0$이므로 $C = 0$이다. 따라서 $I = 0$인 것은 $y \equiv 0$일 때뿐이다. ■

3단계 일반적인 경우

> **생각해 보기** $\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$로 1단계를 되풀이해 보자. 남는 항들이 어떤 함수의 도함수가 되려면 b는 무엇이어야 하는가?

이 적분을 K라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} J - K &= -\int_0^1 \left(a^2y^2 + a^2y^2\tan^2 bx + 2ayy'\tan bx\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \left(a^2y^2\sec^2 bx + 2ayy'\tan bx\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

한편 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ay^2\tan bx) = 2ayy'\tan bx + aby^2\sec^2 bx$이다. 이 둘이 정확히 일치하는 것은 $ab = a^2$, 즉 $b = a$일 때이다. 그러면

$$J - K = -\Big[ay^2\tan ax\Big]_0^1 = -a\,y(1)^2\tan a = 0,$$

이므로 $J = K \geq 0$이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 이 논증은 어디에서 무너질 수 있는가? (구간 $0 \leq x \leq 1$에서 $\tan ax$를 살펴보라.)

이 논증이 성립하려면 $\tan ax$가 $[0,1]$의 모든 x에서 정의되고 연속이어야 한다. 그렇지 않으면 K가 존재하지 않을 수도 있고 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 적용할 수 없다. x가 $[0,1]$을 움직이면 ax는 $[0,a]$를 움직이고, tan가 그 구간에서 연속인 것은 정확히 $a < \frac{\pi}{2}$일 때이다. 따라서 이 증명은

$$a < k = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

일 때 유효하다.

4단계 임계 경우

> **생각해 보기** $a = \frac{\pi}{2}$이면 증명이 실패한다. 2단계에서 $I = 0$을 만드는 함수는 $y' + y\tan x = 0$을 만족해야 했다. 이제 이에 대응하는 방정식은 무엇이고, 그 해는 무엇인가?

대응하는 방정식은 $y' + ay\tan ax = 0$이고, 그 해는 $y = C\cos ax$이다. $a = \frac{\pi}{2}$이면 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$는 $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$을 만족한다. 직접 확인하면

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\frac{\pi x}{2} - \cos^2\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos\pi x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

따라서 임계값에서는 0이 아닌 함수가 J를 정확히 0으로 만든다.

돌아보기

- **적분에서 완전제곱식 만들기.** 어떤 함수의 도함수를 더하고 빼서 J를 제곱의 적분과 사라지는 경계항의 합으로 바꾸었다.
- **도구가 실패하는 곳을 확인하라.** 이 방법은 $\tan ax$가 구간에서 유한한 동안에만 통했다. 방법이 실패한 지점 $a = \frac{\pi}{2}$가 바로 임계값이었다.
- **극단적인 경우는 미분방정식을 푼다.** $J = 0$을 주는 함수는 1계 방정식 $y' + ay \tan ax = 0$에서 나왔고, 이 함수는 $y'' + a^2 y = 0$도 만족한다.

숨은 수학

최속강하선과 한 분야의 탄생

1696년 요한 베르누이(Johann Bernoulli)는 유럽의 수학자들에게 도전 과제를 냈다. 구슬이 한 점에서 다른 점으로 가장 짧은 시간에 미끄러져 내려가는 곡선을 찾으라는 것이었다. 뉴턴(Newton)(익명으로, 하룻밤 만에 풀었다. 베르누이는 "발톱을 보고 사자를 알아보았다"고 말했다), 라이프니츠(Leibniz), 로피탈(l'Hôpital), 야코프 베르누이(Jakob Bernoulli)가 해답을 보내왔다. 답은 사이클로이드(cycloid)이다. 1750년대에 오일러(Euler)와 젊은 조제프루이 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange)는 이러한 개별적인 요령을 일반적인 방법으로 바꾸어 놓았다. y가 $\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$를 정류(stationary)하게 만들면, y는 **오일러–라그랑주 방정식**(Euler–Lagrange equation)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

을 만족한다. 우리의 J에서는 $F = (y')^2 - a^2 y^2$이고, 오일러–라그랑주 방정식은 $y'' + a^2 y = 0$, 즉 단진동(simple harmonic motion)이다.

왜 $\pi/2$인가?

$a < \frac{\pi}{2}$이면 J의 최솟값은 0이고, 이 값은 $y \equiv 0$일 때만 얻어진다. $a = \frac{\pi}{2}$에서도 최솟값은 여전히 0이지만 이를 달성하는 두 번째 함수가 생긴다. $a > \frac{\pi}{2}$이면 같은 함수 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$가

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} < 0,$$

을 주고, y를 크게 확대하면 J를 원하는 만큼 작은 음수로 만들 수 있다. 즉 최솟값이 아예 없다(그림 4.7.1). 임계값은 $y'' + a^2 y = 0$이 경계 조건(boundary conditions)($y(1) = 0$, 그리고 자유로운 끝에서의 "자연" 조건 $y'(0) = 0$)을 만족하는 0이 아닌 해를 가지는 첫 번째

a이다. 이것은 **고유값 문제**(eigenvalue problem)이고, $a^2 = \frac{\pi^2}{4}$는 그 가장 작은 고유값이다. Section 3.7와 비교해 보자. 그곳에서는 길이 π인 구간의 양 끝에서 함수를 고정하여 임계값 1을 얻었다. 여기서는 구간의 길이가 1이고 한쪽 끝만 고정되어 있는데, 이는 길이 2인 구간의 절반과 같으므로 임계값 a는 $\frac{\pi}{2}$이다.

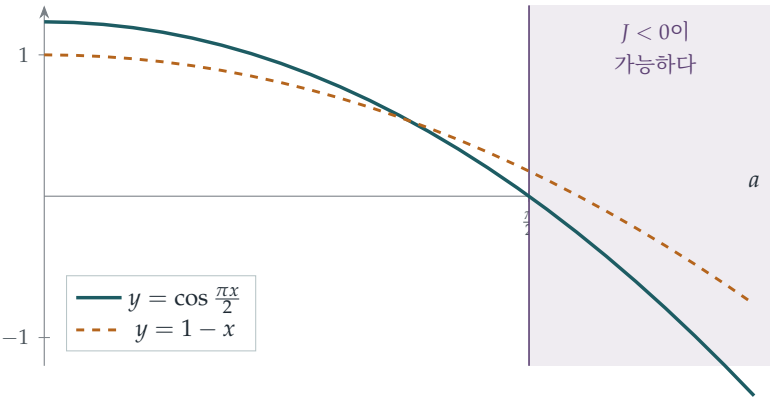


그림 4.7.1 $y(1) = 0$을 만족하는 두 시험 함수에 대하여 a에 따른 J의 값. $y = 1 - x$이면 $J = 1 - \frac{a^2}{3}$은 $a > \sqrt{3}$일 때에만 음수가 된다. $y = \cos\frac{\pi x}{2}$이면 $J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2}$는 $a > \frac{\pi}{2}$가 되자마자 음수가 되며, 이보다 나은 함수는 없다. $a < \frac{\pi}{2}$이면 모든 y에 대해 $J \geq 0$이다.

물리학과 최소 작용의 원리

변분법은 자연 그 자체를 기술한다는 것이 밝혀졌다. 18세기와 19세기에 걸쳐 운동 법칙을 다음과 같이 서술할 수 있다는 사실이 드러났다. 역학계는 **작용**(action)이라 불리는 적분을 정류하게 만드는 방식으로 움직인다. 마찬가지로 빛은 시간이 가장 적게 걸리는 경로를 따라 진행하며(페르마(Fermat)의 원리), 이것으로 굴절(refraction)이 설명된다. 20세기에는 리처드 파인만(Richard Feynman)의 "경로 합(sum over paths)"을 통해 같은 아이디어가 양자역학(quantum mechanics)의 토대가 되었다. 이 문제의 이차 적분은 그 가장 단순한 예이며, 이 적분이 이끄는 고유값 문제는 Section 8.6에서 양자 진동자의 에너지 준위로 다시 등장한다.

사고 기술

완전제곱식을 만들고, 경계에 주의하라

이차식이 음이 아님을 보이려면, 그것을 제곱과 다룰 수 있는 무언가의 합으로 써라. 적분에서는 그 "무언가"가 흔히 어떤 함수의 도함수이며, 이를 적분하면 경계항이 된다.

그리고 그 방법이 어디에서 통하지 않게 되는지 언제나 물어라. 여기서 실패한 지점은 우연이 아니었다. 그것은 이 문제에서 가장 중요한 수였다.

더 도전하기

1 **임계값 너머.** $a > \frac{\pi}{2}$이면 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$가 $J < 0$을 줌을 보여라.

2 **오일러–라그랑주 방정식.** 심화 $y(1) = 0$을 만족하는 함수들 가운데 y가 J를 최소로 만든다고 하자. $\eta(1) = 0$을 만족하는 임의의 함수 η와 임의의 수 ε에 대하여 $J(y + \varepsilon\eta) \geq J(y)$이다. $J(y + \varepsilon\eta)$를 ε의 거듭제곱으로 전개하여 $\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta)\,\mathrm{d}x = 0$임을 유도하여라. 부분적분(integration by parts)을 이용하여 $y'' + a^2 y = 0$이고 $y'(0) = 0$임을 보여라(y가 충분히 매끄럽다고 가정한다).

3 **더 긴 구간.** 치환(substitution)을 이용하여, $y(L) = 0$일 때 모든 y에 대해 $\int_0^L ((y')^2 - a^2 y^2)\,\mathrm{d}x \geq 0$인 것은 정확히 $a \leq \frac{\pi}{2L}$일 때이고, 0이 아닌 y가 등호를 주는 것은 $a = \frac{\pi}{2L}$일 때뿐임을 보여라.

4 **사이클로이드.** 최속강하선(brachistochrone) 문제를 찾아보고 사이클로이드의 매개변수 방정식을 구하여라. 거꾸로 뒤집힌 사이클로이드 위의 어느 곳에서든 정지 상태로 놓은 구슬이 같은 시간에 바닥에 도달함을 보여라(**등시곡선**(tautochrone) 성질로, 1659년 하위헌스(Huygens)가 발견하였다).

더 읽을거리

- **Paul Nahin, *When Least Is Best*** (Princeton University Press). 최속강하선을 포함한 최적화의 역사와 수학을 학생들을 위해 쓴 책이다.
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics,*** Volume II, Chapter 19 ("The principle of least action"). 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Bruce van Brunt, *The Calculus of Variations*** (Springer). 학부 교재로, 앞부분의 장들은 A 레벨(A level, 영국의 대학 입학 자격 시험) 수준의 미적분만 있으면 읽을 수 있다.

4.8 공 모양 빵 자르기

문제

STEP I 2001, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/01-s1-q6`

도입

공 모양의 빵을 같은 두께로 썬다고 하자. 가운데 근처의 조각은 둘레에 얇은 껍질 띠가 둘린 두툼한 원판이다. 양 끝 근처의 조각은 거의 껍질뿐인 듯한 작은 뚜껑 모양이다. 당연히 끝 조각에 껍질이 더 많지 않을까?

그렇지 않다. 가운데에 가깝게 자르든 끝에 가깝게 자르든, 모든 조각의 껍질 넓이는 정확히 같다. 가운데의 얇은 띠는 둘레는 길지만 거의 수직으로 서 있고, 끝의 뚜껑은 둘레는 짧지만 가파르게 기울어 있어서 껍질이 더 넓은 폭에 걸쳐 펼쳐진다. 이 두 효과가 정확히 상쇄된다. 이것은 아르키메데스(Archimedes)의 정리로, 그는 이 정리를 무척 아껴서 자신의 무덤에 원기둥 안에 든 구를 새겨 달라고 부탁했다. 문제의 둘째 부분은 조금 더 가벼운 규정이야기이지만, 같은 계산에 바탕을 두고 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 반지름이 a인 구는 어떤 곡선을 x축을 중심으로 회전시켜 얻는가? 그 곡선에 대해 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$는 무엇인가?

반원 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$를 회전시키면 구가 된다. 그러면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$이다. 이것을 기억해 두자. 기울기는 양 끝($x \to \pm a$) 근처에서 가파르고 가운데에서는 완만한데, 이것이 바로 도입에서 설명한 효과이다.

차근차근 풀기

1단계 껍질 공식이 간단해진다

생각해 보기 반원에 대해 $y\sqrt{1+(y')^2}$를 계산해 보아라. 놀라운 일이 일어난다.

$y' = -x/y$이므로

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2+x^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2},$$

따라서 $y\sqrt{1+(y')^2} = y \cdot \frac{a}{y} = a$로 상수이다! 그러므로 임의의 두 평면 $x = x_1$과 $x = x_2$ 사이의 껍질 넓이, 곧 겉넓이(surface area)는

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} a \, \mathrm{d}x = 2\pi a(x_2 - x_1).$$

이 값은 두 평면이 어디에 있는지와 상관없이 두 평면 사이의 거리에만 의존한다.

2단계 껍질은 조각 수에 비례한다

빵을 두께 h인 조각으로 자르면 각 조각의 껍질 넓이는 $2\pi ah$로 모두 같다. 한쪽 끝에서든, 양쪽 끝에서든, 어디에서든 몇 조각을 먹으면, 남은 껍질은 $2\pi ah$에 남은 조각의 수를 곱한 것이다. ■

3단계 바삭한 빵의 조건

문제의 힌트는 한쪽 끝에서부터 조각을 먹었을 때 남는 빵을 설명하므로, 그대로 따라가 보자. 조각을 끝 $x = a$에서부터 먹어서 남은 부분이 $x = -a$부터 $x = -a + t$까지라고 하자. "조각을 몇 개 먹든"에 대한 규정은 빵을 아무리 잘게 썰어도 성립해야 하므로, t가 0과 $2a$ 사이의 어떤 값이든 가질 수 있다고 본다. (4단계에서는 양쪽 끝에서 조각을 먹는 경우를 살펴본다.)

생각해 보기 주어진 공식을 써서 V를 계산하여라. 치환 $s = x + a$를 쓰면 계산이 더 깔끔해질 것이다.

$s = x + a$로 두면 $y^2 = a^2 - x^2 = a^2 - (s-a)^2 = 2as - s^2$이므로

$$V = \pi \int_0^t (2as - s^2)\, \mathrm{d}s = \pi\left(at^2 - \frac{t^3}{3}\right), \qquad A = 2\pi at,$$

이고

$$\frac{V}{A} = \frac{at^2 - t^3/3}{2at} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}.$$

> **잠깐, 직접 해 보기** 규정은 조각을 몇 개 먹은 뒤에도 $V/A < 1$이기를, 곧 $0 < t \le 2a$인 모든 t에 대해 이것이 성립하기를 요구한다. 이 범위에서 $\frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}$의 최댓값은 무엇인가?

t에 대해 미분하면 $t = \frac{3a}{2}$에서 $\frac{1}{2} - \frac{t}{3a} = 0$이고, 이 값은 범위 $(0, 2a]$ 안에 있으며 최댓값을 준다(이 식은 t에 대해 위로 볼록한 포물선이다). 최댓값은

$$\frac{3a}{4} - \frac{9a^2/4}{6a} = \frac{3a}{4} - \frac{3a}{8} = \frac{3a}{8}.$$

바삭한 빵이 되려면 모든 t에 대해, 특히 $t = \frac{3a}{2}$에서 $V/A < 1$이어야 하므로 $\frac{3a}{8} < 1$, 곧 $a < \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$미터이다. ■

4단계 문제를 넘어서: $2\frac{2}{3}$이면 충분한가?

> **생각해 보기** 문제는 반지름이 반드시 만족해야 하는 조건만 묻는다. $a < \frac{8}{3}$이면 충분하기도 한가? 양쪽 끝에서 조각을 먹으면 어떻게 될까?

충분하지 않다. 양쪽 끝에서 먹으면 가운데에 띠가 남는데, 가운데 띠는 끝의 뚜껑보다 껍질에 비해 더 많은 빵을 담고 있다. 띠 $-\frac{w}{2} \le x \le \frac{w}{2}$에 대해

$$V = \pi \int_{-w/2}^{w/2} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(a^2 w - \frac{w^3}{12}\right), \qquad A = 2\pi a w, \qquad \frac{V}{A} = \frac{a}{2} - \frac{w^2}{24a},$$

이고, 얇은 띠에서는 이 값이 $\frac{a}{2}$에 가깝다. 예를 들어 반지름이 $2\frac{2}{3}$보다 넉넉히 작은 2.4미터인 빵을 네 조각으로 썰어 양 끝 두 조각을 먹으면, $w = a$인 띠가 남고 $\frac{V}{A} = \frac{11a}{24} = 1.1$이다. 사실 어떤 조각들의 모임에 대해서도 $\frac{V}{A} < \frac{a}{2}$이므로, 조각을 어디에서든 먹을 수 있다면 빵이 바삭할 필요충분조건은 $a \le 2$미터이다. 문제의 $2\frac{2}{3}$은 올바른 필요조건이지만, 규정은 문제가 드러내는 것보다 더 엄격하다.

돌아보기

- **적분하기 전에 간단히 하라.** 껍질의 피적분함수는 복잡해 보였지만 알고 보니 상수였다. 피적분함수는 덤벼들기 전에 항상 먼저 간단히 하라.
- **"임의의"를 주의 깊게 읽어라.** 조건은 몇 개의 조각을 먹은 뒤에도 성립해야 했으므로, 빵 전체에 대한 값($\frac{a}{3}$)이 아니라 V/A의 최댓값이 필요했다.
- **간단한 계산에서 나온 놀라운 답.** 껍질이 같다는 성질은 믿기 어렵게 들리지만, 계산은 두 줄이면 끝난다.

숨은 수학

아르키메데스의 모자 상자 정리

아르키메데스는 *On the Sphere and Cylinder*(구와 원기둥에 대하여)에서, 평행한 두 평면 사이에 있는 구의 띠의 넓이가 그 두 평면이 구를 감싸는 원기둥에서 잘라 내는 띠의 넓이와 같음을 증명하였다(그림 4.8.1). 우리의 계산이 바로 이 정리이다. 반지름이 a인 원기둥은 단위 길이당 껍질 넓이가 $2\pi a$이고, 구도 마찬가지이다. 구 전체를 생각하면, 구의 겉넓이는 원기둥의 옆넓이 $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$과 같다. 아르키메데스는 이 결과를, 구의 부피가 원기둥 부피의 3분의 2라는 사실과 함께 자신의 가장 훌륭한 업적으로 여겼다. 기원전 75년에 시라쿠사를 방문한 키케로(Cicero)는 무덤에 새겨진 구와 원기둥을 찾아서, 수풀에 뒤덮인 그의 무덤을 발견하였다.

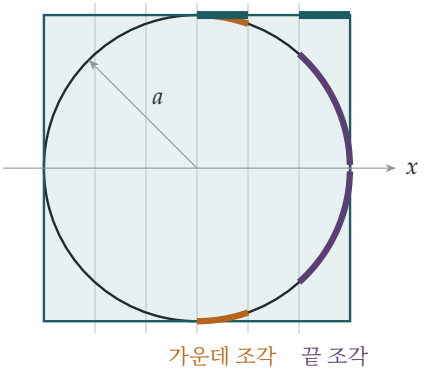


그림 4.8.1 감싸는 원기둥 안에 놓인 반지름 a인 공 모양 빵의 단면으로, 같은 두께의 조각으로 잘려 있다. 가운데 조각(호박색)은 축에서 멀리 떨어진 짧고 거의 수평인 껍질 호를 가지고, 끝 조각(자두색)은 축에 가까운 길고 가파른 호를 가진다. x축을 중심으로 회전시키면, 두 조각 모두 원기둥의 대응하는 띠(청록색)와 정확히 같은 껍질 넓이, 곧 두께에 $2\pi a$를 곱한 값을 준다.

지구의 지도

모자 상자 정리를 이용하면 넓이를 보존하는 지구 지도를 그릴 수 있다. 지구본의 각 점을 감싸는 원기둥 위로 수평 방향 바깥쪽으로 투영한 다음 원기둥을 펼치면 된다. 구의 띠는 넓이가 같은 원기둥의 띠로 옮겨지고, 어떤 영역에 대해서도 마찬가지이다. 이것이 **람베르트**(*Lambert*) **원통 정적 도법**(1772)이다. 이 도법은 극 근처에서 모양을 심하게 왜곡하지만 넓이는 정직하게 나타낸다. 이는 그린란드를 아프리카만큼 크게 보이게 하는(실제로는 약 14분의 1 크기이다) 익숙한 메르카토르(Mercator) 도법과 다른 점이다. 가우스(Gauss)의 유명한 정리인 **빼어난 정리**(*Theorema Egregium*)(1827)는 구의 어떤 지도도 넓이와 모양을

동시에 보존할 수 없음을 보여 준다. 지구의 모든 평면 지도는 무언가를 왜곡할 수밖에 없다.

구 위의 무작위 점

실용적인 결과도 하나 있다. 구 위에서 점을 균등하게 무작위로 고르려고 위도와 경도를 균등하게 고르면, 점들이 극 근처에 몰리게 된다. 모자 상자 정리는 올바른 방법을 알려 준다. 높이 x를 $-a$와 a 사이에서 균등하게, 경도를 0과 2π 사이에서 균등하게 고르면 된다. 넓이가 높이에 비례하므로 이것은 정확히 균등 분포이다. 물리학과 컴퓨터 그래픽스의 컴퓨터 시뮬레이션에서 이 방법을 쓴다. (놀랍게도 이 방법은 3차원에서만 통한다. 4차원 이상의 구에 대해서는 이에 대응하는 명제가 거짓이다.)

사고 기술

숨은 단순함을 찾아라

계산 결과가 상수처럼 뜻밖에 단순하게 나오면, 멈추고 왜 그런지 물어보아라. 대개 기하학적인 이유가 있으며, 그 이유를 찾는 데에 진짜 이해가 있다.

여기서 피적분함수 $y\sqrt{1+(y')^2}$가 상수였던 것은 구에서는 가파름과 축으로부터의 거리가 서로를 정확히 보상하기 때문이다. 그것이 바로 아르키메데스의 정리이다.

더 도전하기

1 **빵 전체.** 자르지 않은 빵 전체에 대해 $V/A = \frac{a}{3}$임을 보여라. 문제의 조건이 $\frac{a}{3} < 1$보다 만족하기 어려운 이유는 무엇인가?

2 **열대 지방.** 지구 표면 가운데 남위 23.4°와 북위 23.4° 사이에 있는 부분은 몇 분의 몇인가? (지구를 구로 생각하여라. 넓이가 높이에 비례하므로 $\sin 23.4°$만 있으면 된다.)

3 **다른 모양.** 포물면 모양의 빵($y = \sqrt{x}$를 x축을 중심으로 회전)에서는 조각당 껍질이 상수가 아님을 보여라. 어떤 곡선 $y(x)$에 대해 $y\sqrt{1+(y')^2}$가 상수인가? (미분방정식(differential equation)을 풀어라.)

4 **부피.** 부피 공식을 이용하여, 아르키메데스가 밝혔듯이 구의 부피가 감싸는 원기둥 부피의 3분의 2임을 보여라.

더 읽을거리

- **Sherman Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?*** (Mathematical Association of America). 아르키메데스의 수학을 현대 독자를 위해 설명한다.
- **Timothy Gowers, *Mathematics: A Very Short Introduction*** (Oxford University Press). 기하학을 다룬 장에서 곡면의 기하학을 소개한다.
- **John Snyder, *Flattening the Earth*** (University of Chicago Press). 2천 년에 걸친 지도 투영법의 역사.

4.9 홀디치의 정리

문제

STEP III 2011, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/11-s3-q5`

도입

아무 타원형(oval) 곡선이나 하나 잡자. 볼록(convex)하기만 하면 어떤 모양이라도 좋다. 길이가 일정한 막대를 두 끝이 모두 곡선 위에 놓이도록 하면서 곡선 안쪽을 따라 한 바퀴 미끄러뜨린다. 막대 위에 점을 하나 찍어 막대를 길이 a와 b인 두 부분으로 나눈다. 막대가 한 바퀴 도는 동안 이 점은 더 작은 타원형 곡선을 그린다. 두 곡선 사이에 있는 고리 모양 영역의 넓이는 얼마인가?

놀랍게도 답은 **원래 곡선의 모양과 관계없이** πab이다. 길고 가느다란 타원형이든, 달걀 모양이든, 모서리가 둥근 삼각형이든 고리의 넓이는 언제나 같고, 오직 점이 막대 위 어디에 있는지에만 달려 있다. 이 결과는 1858년 케임브리지 곤빌 앤드 키즈 칼리지(Gonville and Caius College, Cambridge)의 펠로였던 Hamnet Holditch 목사가 발견했으며, 초등 기하학에서 가장 놀라운 정리 가운데 하나이다. 이 문제는 넓이를 구하는 공식 하나만으로 이 정리를 증명한다.

시작하기 전에

생각해 보기 가장 간단한 경우에 정리를 확인해 보자. $\mathcal{C}$가 반지름이 R인 원이라면 P는 어떤 곡선을 그리며, 고리의 넓이는 얼마인가?

대칭성에 의해 P는 중심이 같고 반지름이 어떤 값 r인 원을 그린다. 막대 AB는 P를 지나는 큰 원의 현(chord)이고, **두 현의 정리**(intersecting chords theorem), 곧 "방멱 정리"(power of a point)에 따르면 P를 지나는 모든 현에 대해 $PA \times PB = R^2 - r^2$이다. 따라서 $ab = R^2 - r^2$이고, 고리의 넓이는 $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$이다. 이 정리는 원뿐 아니라 모든

볼록 곡선에 대해 이것이 성립한다고 말한다.

차근차근 풀기

1단계 좌표로 나타낸 넓이

생각해 보기 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이고 이들이 모두 t의 함수일 때 $x\dot{y} - y\dot{x}$를 계산하라. 여기서 점은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$를 나타낸다.

$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$이고 $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$이다. 그러면

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) = r^2\dot{\theta}.$$

따라서 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int r^2\dot{\theta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t$이다. ■

이 공식에는 극좌표(polar coordinates)가 필요 없고, 매개변수(parameter)의 함수로 나타낸 직교좌표(cartesian coordinates) 위치만 있으면 된다. 점이 O를 둘러싼 폐곡선(closed curve)을 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돌 때, 이 공식은 곡선 내부의 넓이를 준다.

2단계 막대의 양 끝

막대는 A에서 B로 향하는 방향 $(\cos t, \sin t)$를 가리키고, P는 A에서 거리 a, B에서 거리 b만큼 떨어져 있다. 따라서

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$

3단계 OA가 쓸고 지나가는 넓이

생각해 보기 A에 $(*)$를 적용하라. $x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A$를 전개하고 a의 거듭제곱에 따라 항을 정리하라.

$x_A = x - a\cos t$, $y_A = y - a\sin t$이면 $\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$이고 $\dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t$이다. 전개하면

$$\begin{aligned} x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A &= (x - a\cos t)(\dot{y} - a\cos t) - (y - a\sin t)(\dot{x} + a\sin t) \\ &= (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) - a[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t]. \end{aligned}$$

0부터 2π까지 적분하고 반으로 나누면, 첫째 항은 $[P]$, 둘째 항은 $\frac{1}{2}a^2 \cdot 2\pi = \pi a^2$, 셋째 항은 $-af$가 된다. 따라서

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af. \qquad ■$$

잠깐, 직접 해 보기 이제 $[B]$를 구하라. (**힌트:** A의 식에서 a를 무엇으로 바꾸면 B가 되는가?)

$B = (x + b\cos t, y + b\sin t)$는 A의 식에서 a를 $-b$로 바꾼 것이다. 따라서

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

4단계 f 소거하기

생각해 보기 A와 B는 모두 같은 곡선 $\mathcal{C}$를 한 바퀴 돈다. 이로부터 $[A]$와 $[B]$에 대해 무엇을 알 수 있는가?

t가 0부터 2π까지 변할 때 A와 B는 각각 $\mathcal{C}$를 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돌므로 $[A] = [B] =$ 넓이$(\mathcal{C})$이다. 두 식을 같다고 놓으면

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad \Longrightarrow \quad f(a+b) = \pi(a^2 - b^2) \quad \Longrightarrow \quad f = \pi(a-b).$$

P는 $\mathcal{D}$를 한 바퀴 돌므로 $[P] =$ 넓이$(\mathcal{D})$이고,

$$\text{넓이}(\mathcal{C}) - \text{넓이}(\mathcal{D}) = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab. \qquad \blacksquare$$

곡선의 모양에 따라 달라지는 수수께끼 같은 양 f는 끝내 계산하지 않았다. 소거되었을 뿐이다.

돌아보기

- **문제에 알맞은 공식.** 넓이 공식 $(*)$에는 매개변수의 함수로 나타낸 좌표만 필요했는데, 막대의 움직임이 바로 그렇게 기술된다.
- **식은 둘, 미지수는 하나.** f를 계산할 수는 없었지만 f가 들어 있는 식이 두 개 있었으므로, 연립방정식(simultaneous equations)을 풀 때처럼 f를 소거했다.
- **특수한 경우부터 확인하라.** 원의 경우가 시작하기 전에 이미 답 πab를 알려 주었고, 무엇을 목표로 해야 하는지 보여 주었다.

숨은 수학

그린 정리와 구적기

공식 $(*)$는 **그린 정리**(Green's theorem)의 특수한 경우이다. 그린 정리는 폐곡선을 따라 도는 적분을 그 곡선 내부 영역에서의 적분과 연결한다. 넓이에 관한 형태로 쓰면, 곡선이 둘러싼 넓이는 $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$이며, 이 적분은 경계를 따라 한 바퀴 도는 것만으로 계산할 수 있다. 공학자들은 이 사실을 **구적기**(planimeter)에 활용했다. 구적기는 19세기에 발명된 기계 장치로(그중 가장 성공한 것은 Jakob Amsler가 1854년에 설계한 것이다), 지도나 도면 위 도형의 경계를 바늘로 따라가면 바퀴가 둘러싸인 넓이를 기록한다. 구적기는 토지 면적을 재거나, 지압 선도(indicator diagram)로부터 증기 기관이 한 일을 계산하는 등 여러 용도로 쓰이다가 디지털 방식으로 대체되었다. Holditch의 정리는 이와 밀접한 관련이 있다. 막대는 구적기의 팔과 같다.

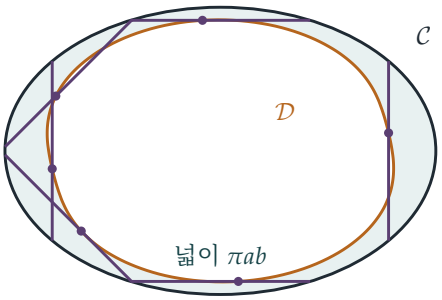


그림 4.9.1 반축(semi-axis)의 길이가 3과 2인 타원(ellipse)과, $a = 1, b = 1.5$인 길이 2.5의 막대에 대한 Holditch의 정리. 막대의 몇 가지 위치(자주색)와 점 P를 표시했다. P가 그리는 곡선 $\mathcal{D}$(주황색)는 수치적으로 계산한 것이며, 두 곡선 사이의 색칠한 고리의 넓이는 정리가 예측한 대로 정확히 $4.7124\ldots = 1.5\pi$이다.

숨은 조건

Holditch는 조건에 크게 신경 쓰지 않고 정리를 진술했지만, 이 정리에는 몇 가지 조건이 필요하다. 막대가 두 끝을 곡선 위에 둔 채로 끝까지 한 바퀴 돌 수 있어야 하고, 그려지는 곡선 $\mathcal{D}$는 한 번만 그려지는 단순 폐곡선(simple closed curve)이어야 한다. 막대가 $\mathcal{C}$의 폭에 비해 너무 길면 $\mathcal{D}$가 스스로 교차할 수 있고, 그러면 공식이 주는 "넓이"는 어떤 영역을 두 번 세거나 음의 부호로 센다. 이 문제는 $\mathcal{D}$가 O를 포함하는 볼록 곡선이라고 가정함으로써 이런 어려움을 피한다. 정리가 정확히 언제 성립하는지 밝히는 일은 아름다운 아이디어를 어떻게 엄밀하게 다듬어야 하는지 보여 주는 좋은 예이며, 이는 3장의 주제이기도 하다.

사고 기술

> **계산할 수 없는 것은 소거하라**
>
> 어떤 양이 너무 복잡해서 계산할 수 없다면, 그 양이 들어 있는 서로 다른 두 식을 찾아 그것을 소거하라.
>
> 여기서 f는 곡선의 세세한 모양에 모두 의존했지만, $[A]$와 $[B]$의 식에 모두 나타났고, $[A] = [B]$라는 사실이 그것을 없애 주었다. 답 πab가 곡선과 무관할 수 있었던 것은 오직 곡선에 의존하는 부분이 상쇄되었기 때문이다.

더 도전하기

1 **타원의 넓이.** $x = p\cos t, y = q\sin t$로 놓고 $(*)$를 이용하여 반축의 길이가 p와 q인 타원의 넓이가 πpq임을 보여라.

2 **원의 경우.** 두 현의 정리를 증명하라. 곧, 원의 두 현이 P에서 만나면 각 현의 두 선분의 길이의 곱이 서로 같음을 보여라. 이로부터 원에 대한 Holditch의 정리를 이끌어 내라.

3 **중점.** $f = \pi(a-b)$이므로 P가 막대의 중점일 때 $f = 0$임을 보여라. 이때 고리의 넓이를 막대의 길이 L로 나타내면 얼마인가?

4 **삼각형.** 심화 꼭짓점이 $(0,0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2)인 삼각형의 경계를 따라 돌면서 $(*)$를 이용하여 그 넓이를 구하고, 넓이가 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$임을 보여라. 이것이 임의의 다각형의 넓이를 구하는 "신발끈 공식"(shoelace formula)의 출발점이다.

더 읽을거리

- **Mark Levi, *The Mathematical Mechanic*** (Princeton University Press). 막대, 바퀴, 용수철을 이용한 물리적 추론으로 수학적 결과를 증명하는 책으로, 이 절과 같은 정신을 담고 있다.
- **H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That*** (Norton). 그린 정리를 포함하여 벡터 미적분학(vector calculus)을 편안하게 소개하는 입문서이다.
- **Hamnet Holditch, "Geometrical theorem"**, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858). 원래의 짧은 글로, 숨은 조건은 전혀 언급하지 않은 단 한 문단짜리이다.

우리가 배운 것

이 장은 적분(integral)이란 정확히 무엇인지, 적분으로 무엇을 증명할 수 있는지, 그리고 적분에 공식이 없을 때는 어떻게 해야 하는지를 묻는 데서 시작했다. 이 장의 아홉 문제가 이 질문들에 어떻게 답했는지 정리해 보자.

1. 적분이란 무엇이고, 어떤 함수가 적분을 가지는가?

Section 4.1에서는 적분을 얇은 직사각형들로 만든 하합(lower sum)과 상합(upper sum)의 공통 극한으로 정의하고, 이 정의만으로 $\int_0^a x^5\,dx$를 계산했다. 연속한 수의 곱에 대한 망원합(telescoping sum), 양쪽에서의 부등식 평가, 그리고 조임 정리(squeeze)까지 꽤 많은 작업이 필요했다. 이 수고가 바로 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)가 얼마나 많은 것을 거저 주는지를 보여 주는 척도이다.

정의는 또한 모든 함수가 적분가능(integrable)한 것은 아니라는 사실도 알려 주었다. 유리수에서 1, 무리수에서 0인 디리클레(Dirichlet) 함수는 상합이 모두 1이고 하합이 모두 0이다. 이와 같은 문제들이 르베그(Lebesgue)를 더 강력한 적분 이론으로 이끌었으며, 이 이론은 나중에 대학에서 만나게 될 것이다.

2. 적분으로 무엇을 증명할 수 있는가?

넓이보다 훨씬 많은 것을 증명할 수 있다.

- **수 사이의 부등식.** 양의 함수의 적분이 $\frac{22}{7}-\pi$와 같으므로 $\frac{22}{7}>\pi$이다(Section 4.3). "$A-B$를 양인 무언가의 적분으로 나타낸다"는 아이디어는 단순한 만큼 유용하다.
- **무한곱과 특수한 값.** $\int \sin^n t\,dt$에 대한 점화식(reduction formula), 불변량(invariant), 그리고 조임 정리로부터 월리스(Wallis) 곱, 스털링 공식(Stirling's formula)의 상수, 그리고 $\left(\frac{1}{2}\right)!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$를 얻었다(Section 4.4).
- **무한급수.** x^x를 거듭제곱급수(power series)로 전개하여 항별 적분(term-by-term integration)하면 "2학년생의 꿈(sophomore's dream)"을 얻는다(Section 4.5).
- **삼각함수의 기초.** $\mathrm{T}(x)=\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$와 $\pi=2\mathrm{T}(\infty)$로 정의하면, 치환만으로 덧셈정리(addition formula)와 $\mathrm{T}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$ 같은 특수한 값이 나온다(Section 4.2).
- **기하.** 상수로 간단해지는 피적분함수로부터 아르키메데스(Archimedes)의 모자 상자 정리(hat-box theorem)가 드러났고(Section 4.8), 경계를 따라 도는 적분으로 쓴 넓이

공식으로 Holditch의 놀라운 정리를 증명했다(Section 4.9).

- **최적의 함수.** 적분 안에서 완전제곱식을 만들어(completing the square) $\int((y')^2 - a^2y^2)$이 정확히 언제 음이 아니어야 하는지 밝혔고, 임계값 $\frac{\pi}{2}$는 고윳값(eigenvalue)으로 드러났다(Section 4.7).

3. 공식이 없을 때는 무엇을 할 수 있는가?

Section 4.6에서는 $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$를 유리함수(rational function)와 e^x의 곱으로 나타낼 수 없음을 증명했고, 리우빌(Liouville)의 이론은 이 적분에 초등(elementary) 공식이 전혀 없음을 보여 준다. 극(pole)의 관점에서 보면 그 이유는, 역도함수(antiderivative)가 $x = -1$ 근처에서 로그처럼 행동해야 하는데 유리함수는 그럴 수 없기 때문이다. 그럼에도 이 적분은 아무 문제 없이 존재하며, 우리는 이를 계산할 수 있다. 수치적으로 계산할 수도 있고, (Section 4.5의 $\int x^x$처럼) 급수로 계산할 수도 있으며, Section 3.9에서 W 함수에 대해 했듯이 이름을 붙여 새로운 함수로 연구할 수도 있다.

4. 적분의 도구 상자

방법	사용한 곳
정의로부터 직접 계산하기	직사각형으로 구한 $\int_0^a x^5$ (4.1)
망원합	연속한 수의 곱의 합 (4.1)
적분을 보존하는 치환	$\int \frac{du}{1+u^2}$로부터 얻은 삼각함수 (4.2)
다항식의 나눗셈	$\frac{22}{7} - \pi$ (4.3)
양수성과 피적분함수의 평가	$\pi < \frac{22}{7}$ (4.3)
점화식	$\int \sin^n t$ (4.4); $\int x^m(\ln x)^n$ (4.5)
불변량과 조임 정리	$nu_nu_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ (4.4)
항별 적분	2학년생의 꿈 (4.5)
인수와 차수에 대한 논증	유리함수인 역도함수가 없음 (4.6)
완전제곱식 만들기	변분법 (4.7)
적분하기 전에 간단히 하기	구형 빵 (4.8)
경계 적분으로 나타낸 넓이	Holditch의 정리 (4.9)

다음으로

- Section 4.4의 감마 함수(Gamma function)와 베타 함수(Beta function), 그리고 스털링 공식의 상수 $\sqrt{2\pi}$는 Section 12.23에서 확률(probability)과 관련하여 다시 등장한다.
- Section 4.7의 고윳값 문제는 Section 8.6에서 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)가 된다.
- Section 4.2의 덧셈 항등식으로 만들어지는 마친 공식(Machin's formula)은 Sec-

tion 5.1의 주제이다.

- 제5장에서는 복소수(complex number)를 다루는데, 복소수는 이 장의 그토록 많은 적분에 왜 π가 등장하는지를 설명해 준다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Paul Nahin, *Inside Interesting Integrals*** (Springer): 기발한 적분들과 그 뒤에 숨은 요령들의 향연이다.
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***: 뉴턴(Newton)부터 르베그까지 해석학의 걸작들을 담았다.
- **Michael Spivak, *Calculus***: 적분의 정의와 기본정리를 제대로 다룬다.
- **Sherman Stein, *Archimedes***: 적분의 고대 뿌리를 알고 싶다면.

에르미트(Hermite)는 도함수가 없는 함수 앞에서 몸서리쳤지만, 적분에는 그런 문제가 없었다. 적분은 너그러워서 미분이 다룰 수 없는 함수들도 받아들이며, 끊임없이 놀라움을 안겨 준다. 이 장을 관통하는 하나의 주제가 있다면, 그것은 적분이 단지 넓이를 구하는 기법이 아니라는 것이다. 적분은 수, 함수, 도형에 관한 사실을 표현하고 증명하는 하나의 언어이며, 여러분은 앞으로의 수학 인생 내내 이 언어를 쓰게 될 것이다.

더 도전하기 해답

다음은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계만 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 제대로 풀어 보아라.

4.1 적분이란 무엇인가?

1. 이 합은 $[1,2]$에서 $y=\mathrm{f}(x)$ 아래에 놓인 너비 $\frac{1}{n}$인 직사각형 n개의 넓이를 모두 더한 것이다. $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$로 두면 $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+m/n}=\sum\frac{1}{n+m}\to\ln 2$이다. 두 번째 합은 $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+(m/n)^2}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$이다.

2. 띠 n개로 만든 상합(upper sum)은 $\frac{a}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^2=\frac{a^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$이고, 하합(lower sum)은 첫 번째 인수에서 $n+1$ 대신 $n-1$을 넣은 것과 같다. 둘 다 $\frac{a^3}{3}$에 수렴한다.

3. 각 항이 연쇄적으로 소거된다(telescope): $r(r+1)\cdots(r+k)-(r-1)r\cdots(r+k-1)=(k+1)\,r(r+1)\cdots(r+k-1)$.

4. $\sum_{r=1}^{n}r^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

4.2 적분으로 삼각함수 세우기

1. 도함수(derivative)는 $-\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=0$이므로 $\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(a)$이다. 여기에 $a=x+y$를 대입한다. 코사인의 경우, y를 고정하고 $p(x)=\mathrm{c}(x+y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y)+\mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$, $q(x)=\mathrm{s}(x+y)-\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$로 두자. 그러면 $p'=-q$, $q'=p$이므로 p^2+q^2은 상수이고, $x=0$에서 그 값은 0이다.

2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=(1+u^2)^{-3/2}$이고 $\sqrt{1-y^2}=(1+u^2)^{-1/2}$이므로 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$이다. 그러면 $\mathrm{S}(\frac{1}{\sqrt{2}})=\mathrm{T}(1)$이고, 소문항 (i)에 $x=1$을 넣으면 $\mathrm{T}(1)=\frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$를 얻는다.

3. $a=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$으로 두면 $\frac{x+a}{1-ax}=1$이므로 $\mathrm{T}(\frac{1}{3})=\mathrm{T}(1)-\mathrm{T}(\frac{1}{2})$이다.

4. $[0,1]$에서 $\frac{1}{1+u^2}\le 1$이고 $[1,x]$에서 $\le\frac{1}{u^2}$이므로, $x\ge 1$이면 $\mathrm{T}(x)\le 1+(1-\frac{1}{x})<2$이고, $0<x<1$이면 $\mathrm{T}(x)<\mathrm{T}(1)\le 1$이다. (상계 $1+\int_1^x u^{-2}\,\mathrm{d}u$는 $x<1$일 때 성립하지 않는다. $x=\frac{1}{2}$에서 그 값은 0이다.) T는 증가(increasing)하고 유계(bounded)이므로 극한(limit)을 가진다.

4.3 22/7은 π보다 크다

1. $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.001264$로, $\frac{1}{1260} \approx 0.000794$와 $\frac{1}{630} \approx 0.001587$ 사이에 있다.
2. $\frac{(4!)^2}{9!} = \frac{576}{362\,880} = \frac{1}{630}$.
3. $\frac{x(1-x)^2}{1+x^2} = x - 2 + \frac{2}{1+x^2}$이고, 이를 적분하면 $\frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{2}$이다. 마찬가지로 $\frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2} = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4 + \frac{4}{1+x^2}$이고, 이를 적분하면 $\frac{1}{5} - 1 + \frac{5}{3} - 4 + \pi = \pi - \frac{47}{15}$이다. 두 적분 모두 양수이다. 이 피적분함수(integrand)들은 $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$(최댓값이 약 0.003)보다 훨씬 크므로, 오차 $\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \approx 0.07$과 $\pi - \frac{47}{15} \approx 0.008$도 더 크다.
4. 다항식 나눗셈(polynomial division)을 하면 나머지(remainder) $\frac{16}{1+x^2}$가 남고, 이를 적분하면 4π이다. 적분값은 $4\pi - \frac{188684}{15015} \approx 3.6 \times 10^{-6}$이므로 $\pi \approx 3.14159174$이다.

4.4 월리스, 베타 함수, 그리고 1/2의 계승

1. $u_{2m} = \frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots2m} \cdot \frac{\pi}{2}$이고 $u_{2m+1} = \frac{2\cdot4\cdots2m}{3\cdot5\cdots(2m+1)}$이다. 그러면 $1 < \frac{u_{2m}}{u_{2m+1}} < \frac{u_{2m-1}}{u_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}$이므로 이 비는 1에 수렴하고, 이를 정리하면 $\frac{\pi}{2} = \prod_{k\geq1} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$이 된다.
2. 부분적분(integration by parts)을 하면 $I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$를 얻고, $x^{n+1}(1-x)^{n-1} = x^n(1-x)^{n-1} - x^n(1-x)^n$으로 쓴 뒤 대칭성(symmetry)을 함께 이용하면 $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$에 이른다. 귀납법(induction)을 적용하면 $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$이라는 결과를 얻는다. $x = \sin^2\theta$로 치환하면 $I_{1/2} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$이다. 이 공식대로라면 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2/2! = \frac{\pi}{8}$일 것이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다(이는 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$이다).
3. 대칭성은 $x \mapsto 1-x$로부터, 점화식(recurrence)은 $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$로부터 얻는다. 또 $x = \frac{t}{1+t}$로 치환하면 $1 - x = \frac{1}{1+t}$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$이다. 주어진 적분은 $\mathrm{b}\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$이고, 점화식과 대칭성을 써서 $\mathrm{b}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$로 줄여 나가면 $\frac{3\pi}{256}$을 얻는다.
4. 소문항 (i)에서 구한 명시적인 값으로부터 $u_{2m} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \binom{2m}{m}\frac{\pi}{2^{2m+1}}$이다. 그러면 $2mu_{2m}^2 \to \frac{\pi}{2}$로부터 $\binom{2m}{m}^2 \approx \frac{4^{2m}}{\pi m}$을 얻는다. $m = 10$이면 $\binom{20}{10} = 184\,756$인데, $\frac{4^{10}}{\sqrt{10\pi}} \approx 187\,079$이다(약 1.3% 크다).

4.5 2학년생의 꿈

1. $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n\geq0} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$이고, $\int_0^1 \frac{x^n(-\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$이다($x = e^{-u}$로 치환한다). 따라서 적분값은 $\sum_{n\geq1} n^{-n} \approx 1.2913$이다.
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = x^x(\ln x + 1)$이고, 이는 $x = \frac{1}{e}$에서 0이다. 그때의 값은 $(e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1/e} \approx 0.692$이다.
3. 각 항은 $\frac{1}{n^n}$이다. 7개 항까지 더하고 멈추면 오차가 $\frac{1}{8^8} \approx 6 \times 10^{-8}$보다 작아 충분하지

만, 6개 항까지만 더하면 상계 $\frac{1}{7!} \approx 1.2 \times 10^{-6}$으로는 충분하지 않다. 따라서 7개 항이 필요하다.

4. 부분적분으로 계산하면 $\int_0^1 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$이다. 일반적으로 $\int_0^1 x^n \ln x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$이고, $\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n \ln x$이다.

4.6 공식으로 나타낼 수 없는 적분

1. 미분하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{e^x}{x+1} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$이고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{(x-1)e^x}{x+1} = e^x \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}$이다.

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{P}e^{-x^2}\right) = (\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P})e^{-x^2}$이고, $\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P}$의 차수(degree)는 $\deg \mathrm{P} + 1 \geq 1$이므로($\mathrm{P} \neq 0$일 때) 1이 될 수 없다.

3. $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$(기약 형태(lowest terms))가 0에서 위수(order)가 $k \geq 1$인 극(pole)을 가진다면, $\mathrm{R}' + \mathrm{R}$는 그곳에서 위수가 $k+1 \geq 2$인 극을 가진다. 그런데 $\frac{1}{x}$는 위수가 1인 극을 가진다. R가 0에서 극을 가지지 않으면 $\mathrm{R}' + \mathrm{R}$도 극을 가지지 않는다. 어느 경우든 $(\mathrm{R}e^x)' \neq \frac{e^x}{x}$이다.

4. $\frac{\mathrm{P}e^x}{x+1}$을 미분하면 $e^x \frac{(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}}{(x+1)^2}$이다. $x = -1$에서 $\mathrm{f}(-1) = -\mathrm{P}(-1)$이고, $\mathrm{f}' = (x+1)\mathrm{P}'' + (x+1)\mathrm{P}' + \mathrm{P}$로부터 $\mathrm{f}'(-1) = \mathrm{P}(-1)$이다. $x^3 - 2$의 경우 $-3 + 3 = 0$, x의 경우 $-1 + 1 = 0$, $x^2 + 1$의 경우 $2 - 2 = 0$이다. 이 조건은 충분조건이기도 하다. 차수가 d 미만인 다항식에서 차수가 d 이하인 다항식으로 가는 사상 $\mathrm{P} \mapsto (x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}$는 단사(injective)이므로 그 상(image)의 차원(dimension)은 d이고, 이 상은 $\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$을 만족하는 f들이 이루는 d차원 공간 안에 있다. 따라서 상은 그 공간 전체이다.

4.7 변분법

1. $y = \cos \frac{\pi x}{2}$로 두면 $J = \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 \sin^2 - a^2 \int_0^1 \cos^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right) < 0$이다.

2. $J(y + \varepsilon\eta) = J(y) + 2\varepsilon \int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta) + \varepsilon^2 J(\eta)$이다. $\varepsilon = 0$에서 최솟값을 가지려면 일차항이 0이어야 한다. 부분적분하면 $\eta(1) = 0$인 모든 η에 대해 $-y'(0)\eta(0) - \int_0^1 (y'' + a^2 y)\eta = 0$이고, 이로부터 $y'' + a^2 y = 0$, $y'(0) = 0$이어야 한다.

3. $x = Lu$로 두면 $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{L} \int_0^1 \left((Y')^2 - (aL)^2 Y^2\right) \mathrm{d}u$이므로 조건은 $aL \leq \frac{\pi}{2}$이다. ($aL = \frac{\pi}{2}$일 때에도 본문에서처럼 적분은 결코 음수가 되지 않지만, $y = \cos \frac{\pi x}{2L}$이면 0이 된다. $aL > \frac{\pi}{2}$이면 바로 그 함수에 대해 적분이 음수가 된다.)

4. 사이클로이드(cycloid)는 $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1 - \cos\theta)$이다. 등시곡선(tautochrone)에 대해서는 Section 11.4을 보라. 호의 길이(arc length)로 나타내면 그 운동은 정확히 단진동(simple harmonic motion)이다.

4.8 공 모양 빵 자르기

1. $V/A = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$이다. 그러나 높이가 t인 남은 조각은 $A = 2\pi at$, $V = \frac{1}{3}\pi t^2(3a - t)$이므로 $V/A = \frac{t(3a-t)}{6a}$이고, 이는 $t = \frac{3}{2}a$일 때 최댓값 $\frac{3a}{8}$을 가진다. 이 값은 $\frac{a}{3}$보다 크다.

2. 띠의 높이는 구 전체의 높이 $2R$ 가운데 $2R\sin 23.4°$이므로, 그 비율은 $\sin 23.4° \approx 0.40$이다.

3. $y = \sqrt{x}$이면 $y\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$로 상수가 아니다. $y\sqrt{1 + (y')^2} = c$로부터 $(y')^2 = \frac{c^2}{y^2} - 1$을 얻고, 그 해는 $y = c$(원기둥(cylinder))와 원 $(x - x_0)^2 + y^2 = c^2$(구)이다.

4. 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi a^3$, 원기둥의 부피는 $\pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$이므로 그 비는 $\frac{2}{3}$이다.

4.9 홀디치의 정리

1. $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p\cos t \cdot q\cos t + q\sin t \cdot p\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot 2\pi pq = \pi pq$.

2. 두 현(chord)의 끝점을 이어 만든 삼각형들은 닮음(similar)이므로(같은 호에 대한 원주각은 같다) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$이다. 반지름이 R인 원에서 P가 중심으로부터 거리 r에 있을 때, P를 지나는 지름을 택하면 $(R - r)(R + r)$이 되므로 $ab = R^2 - r^2$이고, 고리의 넓이는 $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$이다.

3. $a = b$이면 $f = \pi(a - b) = 0$이고, 고리의 넓이는 $\pi a^2 = \frac{\pi L^2}{4}$로, 막대를 지름으로 하는 원의 넓이와 같다.

4. O를 지나는 두 변을 따라서는 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$이다. 세 번째 변을 $0 \le s \le 1$에 대해 $(x_1, y_1) + s(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$로 매개화(parametrise)하면 그 값은 $(x_1y_2 - x_2y_1)\,\mathrm{d}s$이다. 따라서 넓이는 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$이다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

전체 13개 장 가운데 제4장. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

