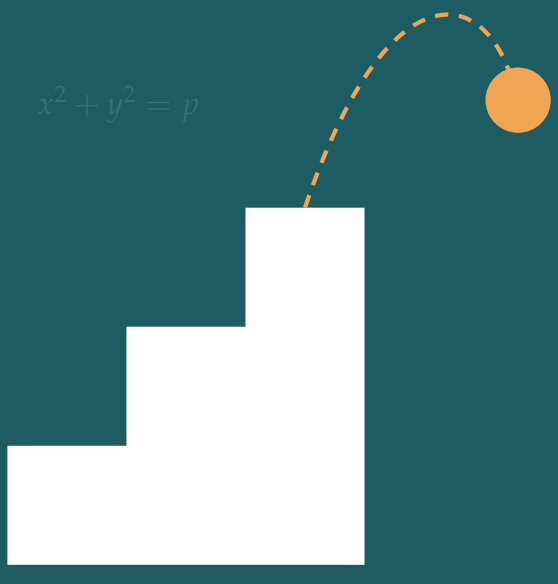
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

제3장

함수, 부등식, 그리고 엄밀성



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

제3장

함수, 부등식, 그리고 엄밀성

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

제3장: 함수, 부등식, 그리고 엄밀성

이 PDF는 *Beyond STEP*의 전체 13개 장 가운데 제3장이다. 책 전체, 각 장의 개별 PDF, 모든 절의 인쇄용 연습지, 모든 STEP 문제의 자세한 풀이를 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 남겨 주기 바란다.

장

3

함수, 부등식, 그리고 엄밀함

어떤 것이 참이라는 사실을 아는 것과 왜 참인지 아는 것은 같지 않으며, 바로 그 차이 속에 수학이 있다.

이 장의 내용

3.1 오류 찾기 STEP I 1991

3.2 AM–GM, 거꾸로 STEP II 1993

3.3 볼록성의 힘 STEP II 2007

3.4 부등식을 증명하는 넓이 STEP III 2011

3.5 π^e인가, e^π인가? STEP II 2013

3.6 기울기의 한계 STEP I 1988

3.7 $\pi^2 \leq 10$ STEP II 2014

3.8 덧셈 법칙으로 정해지는 함수 STEP III 2019

3.9 새로운 함수 만들기 STEP II 2021

A 연습문제 해답 67쪽

제대로 맞히기

> 수학에서는 무언가를 이해하는 것이 아니다. 그저 익숙해질 뿐이다.
>
> — 존 폰 노이만(John von Neumann)

여기 $1 = 2$라는 "증명(proof)"이 있다. $a = b$라 하자. 그러면 $a^2 = ab$이므로 $a^2 - b^2 = ab - b^2$이고, 이를 인수분해하면 $(a+b)(a-b) = b(a-b)$이다. 양변에서 $a-b$를 약분하면 $a+b = b$이고, $a = b$이므로 이는 $2b = b$, 곧 $2 = 1$이라는 뜻이다.

아마 문제를 알아챘을 것이다. $a = b$이므로 "$a-b$를 약분한다"는 것은 0으로 나누는 것이다. 그러나 모든 단계가 얼마나 그럴듯해 보였는지, 그리고 그 오류가 일상적인 조작 속에 얼마나 쉽게 숨어 있었는지 주목하자. 실제 수학에서 저지르는 실제 실수는 이렇게 뻔한 경우가 드물며, 역사상 가장 위대한 수학자들조차 그런 실수에 속아 넘어갔다. 이 장은 그런 실수를 잡아내는 사고 습관에 관한 것이다. 정확한 정의, 정리의 신중한 사용, 그리고 너무 쉬워 보이는 논증에 대한 건강한 의심이 그것이다.

엄밀함이 왜 중요한가

학교에서 수학은 대체로 답을 구하는 일이다. 대학에서 수학은 대체로 **자신의 답이 옳다는 것을 아는** 일이며, 다른 사람을 납득시킬 수 있는 일이다. 이러한 전환은 학교 수학과 대학 수학 사이의 가장 큰 변화이며, 당혹스러울 수 있다. "당연히" 성립하는 것을 증명하는 데 왜 한 쪽이나 써야 하는가?

그 답은 "당연함"을 믿을 수 없다는 것이다. 해석학(analysis)의 역사는 당연해 보였지만 거짓이었던 결과들로 가득하다. 연속함수(continuous function)는 몇몇 고립된 점을 제외하면 반드시 미분가능(differentiable)하다는 주장(앙드레마리 앙페르(André-Marie Ampère)가 1806년에 "증명"을 발표했으나, 1872년 바이어슈트라스(Weierstrass)가 어디에서도 미분가능하지 않은 연속함수를 찾아냈다), 연속함수들의 수렴하는 합은 연속이라는 주장(코시(Cauchy)는 이를 믿었으나 아벨(Abel)이 반례(counterexample)를 찾아냈다), 수렴하는 급수(convergent series)의 항의 순서를 바꾸어도 그 합은 변하지 않는다는 주장(일반적으로는 그렇지 않다)이 그 예이다. 엄밀함(rigour)은 현학이 아니다. 엄밀함은 참인 것과 그럴듯한 것을 구별하는 유일하게 믿을 만한 방법이다.

부등식: 해석학의 실무 도구

이 장의 두 번째 주제는 **부등식**(*inequality*)이다. 학교 수학에서 대부분의 결과는 등식, 곧 이것이 저것과 같다는 형태이다. 해석학에서 대부분의 결과는 부등식, 곧 이것이 많아야 저것이라는 형태이다. 수열이 수렴함을 증명하려면 오차가 어떤 허용치보다도 **작음**을 보이고, 적분이 존재함을 증명하려면 어떤 합이 **유계**(*bounded*)임을 보이며, 근삿값이 얼마나 좋은지 추정하려면 오차의 상한을 구한다. 전문 해석학자는 등식보다 부등식을 증명하는 데 훨씬 많은 시간을 쓰며, 여기서 만나게 될 고전적인 부등식들(산술-기하 평균 부등식(AM–GM), 옌센(Jensen) 부등식, 영(Young) 부등식, 횔더(Hölder) 부등식, 코시–슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식)은 이 분야의 필수 도구이다.

이 부등식들은 그 자체로도 놀랍다. 함수에 관한 부등식 하나에 잘 고른 예를 적용하면 $\pi^2 \leq 10$이 증명된다(Section 3.7). 로그함수의 모양에 관한 사실 하나로 π^e와 e^π 중 어느 쪽이 더 큰지 판가름 난다(Section 3.5). 측정 오차에 관한 한 화학자의 질문은 수학에서 가장 중요한 다항식들 가운데 일부로 이어진다(Section 3.6).

대학에서 만나게 될 것

엄밀함은 1학년 **해석학** 과목의 주제이며, 증명을 정확하게 쓰는 법을 배우는 **수와 집합**(*Numbers and Sets*) 또는 **수학의 기초**(*Foundations*)라고 흔히 불리는 과목의 주제이기도 하다. 여기서 연속성과 미분가능성의 형식적인 정의를 만나고, 가정이 정확하게 주어진 정리들(사잇값 정리(intermediate value theorem), 평균값 정리(mean value theorem), 최대·최소 정리(extreme value theorem))을 만나는데, 이 정리들의 가정은 정말로 중요하다. 이후의 과목들은 이 장의 부등식들을 하나의 분야로 발전시킨다. **함수해석학**(*functional analysis*)은 Section 3.4와 Section 3.7에 나오는 것과 같은 적분으로 크기를 재는 함수 공간을 연구한다. **볼록해석학**(*convex analysis*)과 **최적화**(*optimisation*)는 Section 3.3에서, **근사이론**(*approximation theory*)은 Section 3.6에서 자라 나온다. 그리고 Section 3.9에 나오는 것과 같은 **특수함수**(*special functions*)는 응용수학과 물리학 전반에 걸쳐 등장한다.

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **논증이 옳다는 것을 어떻게 아는가?** 그럴듯한 논증이 무너지는 흔한 방식은 무엇이며, 이를 어떻게 점검하는가?
2. **부등식은 어떻게 증명하는가?** 고전적인 부등식들은 어디에서 오며, 어느 것을 쓸지 어떻게 고르는가?
3. **함수란 정말로 무엇인가?** 함수를 공식이 아니라 그 함수가 가진 성질로 정의할

> 수 있는가? 그리고 기존의 함수로 충분하지 않을 때 새로운 함수를 만들어 낼 수 있는가?

이 장은 오류 찾기(Section 3.1)로 시작하여, 고전적인 부등식들을 각기 다른 각도에서 차례로 다룬다. 독특한 귀납법(induction), 볼록성(convexity), 넓이, 그래프의 모양, 다항식 보간(polynomial interpolation), 시험 함수(test function)가 그것이다. 마지막으로 성질로 정의되는 함수에 관한 두 절로 끝맺는다. 덧셈 법칙으로부터 얻는 e^x와 $\tanh x$, 그리고 역함수로 정의되는 완전히 새로운 함수이다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
3.1	그럴듯하지만 틀린 논증	계산, 논리, 숨은 가정 점검하기
3.2	산술-기하 평균 부등식	앞으로–뒤로 귀납법
3.3	옌센 부등식	오목한 곡선은 현보다 위에 있다
3.4	영 부등식	그림 속 넓이 비교하기
3.5	π^e인가 e^π인가?	하나의 함수로 귀착시켜 그 그래프 조사하기
3.6	이차함수의 기울기	모르는 것을 아는 것으로 나타내기
3.7	$\pi^2 \leq 10$	일반적인 부등식에 시험 함수 대입하기
3.8	e^x와 $\tanh x$	함수방정식으로 정의되는 함수
3.9	W 함수	역함수로 함수 만들어 내기

이 장을 읽는 방법

앞에서와 마찬가지로, 풀이를 읽기 전에 각 문제를 먼저 풀어 보자. 이 장에서는 한 가지를 더 해 보자. 각 풀이를 읽은 뒤에 되돌아가서, 부주의한 학생이 틀릴 만한 한두 단계를 찾아보는 것이다. 숨은 가정은 어디에 끼어들 수 있는가? 어느 정리의 어느 가정을 점검해야 하는가? 이렇게 비판적이고 능동적으로 읽는 것은 대학에 가기 전에 기를 수 있는 가장 유용한 습관이다.

3.1 오류 찾기

문제

STEP I 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/91-s1-q6`

도입

대부분의 시험 문제는 논증을 직접 만들어 내라고 요구한다. 이 문제는 두 개의 논증을 건네주고 그것을 분해해 보라고 한다. 이것은 전혀 다른 기술이며, 대학에서 가장 많이 쓰게 될 기술이기도 하다. 자기 풀이를 점검할 때, 책에 실린 증명(proof)을 읽고 그것을 믿을지 판단할 때, 친구의 풀이를 채점할 때, 논문을 심사할 때 모두 이 기술이 필요하다.

여기 실린 논증들은 배울 점이 많은 방식으로 틀렸다. 모든 단계가 백 번쯤 본 것처럼 **보인다**. 몇몇 단계에는 계산 실수가 있지만, 더 심각한 오류는 **논리**의 오류, 즉 계산이 맞더라도 결론이 따라 나오지 않는 오류이다. 이런 오류야말로 전문적인 수학에까지 살아남는 오류이며, 그것을 찾아내는 것이 이 장의 주제이다.

시작하기 전에

생각해 보기 "각 단계를 비판하라"는 요구를 받았을 때, 각 단계에서 무엇을 확인해야 할까? 시작하기 전에 목록을 만들어 보자.

좋은 점검 목록에는 적어도 세 가지 질문이 들어간다. **계산이 올바른가?** **이 단계가 앞 단계들로부터 따라 나오는가?** **숨은 가정(함수가 연속(*continuous*)이라는 가정, 극한이 존재한다는 가정, 정류점(*stationary point*)은 반드시 극대점이나 극소점이라는 가정)이 있는가?** 문제는 또한 결론이 어쨌든 참일 수도 있는지를 묻는다. 틀린 논증도 참인 결론을 가질 수 있으므로, 이것은 따로 확인해야 한다.

차근차근 풀기

1단계 도함수가 맞는가?

> **생각해 보기** 몫의 미분법(quotient rule)으로 g를 미분해 보자. $g'(x) = 0$이 되는 곳은 어디인가? $x = 1$과 $x = -1$을 직접 확인해 보자.

몫의 미분법에 의해

$$g'(x) = \frac{6x^2(x^4+4) - (2x^3+3)\cdot 4x^3}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^6 - 12x^3 + 24x^2}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^2(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

따라서 $g'(x) = 0$인 것은 $x = 0$이거나 $x^4 + 6x - 12 = 0$일 때이다. $x = 1$에서 $x^4 + 6x - 12 = -5$이고, $x = -1$에서는 -17이다. 어느 쪽도 정류점이 아니다. 첫 번째 주장은 **거짓**이다.

사차식 $x^4 + 6x - 12$는 $x = 0$에서 -12이고 양쪽 방향으로 $+\infty$로 발산하므로, 양의 근과 음의 근을 (적어도) 하나씩 가진다. 또한 이계도함수 $12x^2$이 음이 아니므로 이 사차식은 볼록(convex)하고, 따라서 o을 많아야 두 번 지나므로 실근은 정확히 두 개이다. 수치적으로 두 근은 $x \approx 1.386$과 $x \approx -2.247$이다.

2단계 함숫값이 맞는가?

$g(0) = \frac{3}{4}$는 맞고, $g(1) = \frac{5}{5} = 1$이다. 그러나 $g(-1) = \frac{-2+3}{1+4} = \frac{1}{5}$이며, 1이 아니다. 이 논증은 그 자체의 기준으로 보더라도 계산 오류를 담고 있다. g가 우함수(even function)라고 가정한 것으로 보인다.

3단계 값을 비교하면 어느 것이 극대인지 알 수 있는가?

> **생각해 보기** 어떤 함수가 정확히 두 개의 정류점을 가지고, 그 값이 $\frac{3}{4}$과 1이라고 하자. 그렇다면 첫 번째가 극소이고 두 번째가 극대라고 할 수 있는가?

그렇지 않다. 정류점의 **종류**는 국소적인 성질이다. 그것은 그 점 근처에서 함수가 어떻게 행동하는지에 달려 있을 뿐, 그 점에서의 값이 다른 곳의 값과 어떻게 비교되는지와는 관계가 없다. 함수는 극솟값보다 작은 극댓값(local maximum)을 가질 수도 있고($x + 2\sin x$를 생각해 보라), 극대도 극소도 아닌 정류점을 가질 수도 있다. 여기서는 $x = 0$ 근처에서 인수 $x^4 + 6x - 12$가 -12에 가까우므로

$$g'(x) = \frac{-2x^2(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2} > 0 \qquad \text{작은 값의} x \neq 0.$$

도함수가 0의 양쪽에서 모두 양수이다. $x = 0$은 극소점이 아니라 **변곡점**(point of inflection)인 정류점이다.

4단계 정류점에서의 값이 함수를 제한하는가?

> **잠깐, 직접 해 보기** 정류점이 올바르게 구해졌다 하더라도, g의 모든 값이 가장 작은 정류값과 가장 큰 정류값 사이에 있다고 결론지을 수 없는 이유는 무엇인가? $g(x) < \frac{3}{4}$인 x의 값을 하나 찾아보자.

정류점은 **국소적인** 행동만을 알려 준다. 전역적인 행동은 정의역의 끝에서, 여기서는 $x \to \pm\infty$일 때 무슨 일이 일어나는지에도 달려 있다. $x \to \pm\infty$일 때 $g(x) \to 0$이고, $2x^3 + 3 < 0$일 때, 즉 $x < -\sqrt[3]{3/2} \approx -1.14$일 때마다 $g(x) < 0$이므로, 이 함수는 음의 값을 가진다. 예를 들어 $g(-2) = \frac{-13}{20}$이다. 따라서 결론 $\frac{3}{4} \le g(x) \le 1$은 **거짓**이다(그림 3.1.1).

올바른 서술은 다음과 같다. g는 증가하여 $x \approx 1.386$에서 약 1.083인 최댓값(global maximum)에 이른 뒤 0을 향해 감소한다. 왼쪽으로는 0에서부터 감소하여 $x \approx -2.247$에서 약 -0.668인 최솟값에 이른 뒤, 증가하면서 $x = 0$(여기서 접선이 수평인 변곡점을 가진다)을 지나 최댓값까지 올라간다. 따라서 모든 x에 대해 $-0.668 \lesssim g(x) \lesssim 1.083$이다.

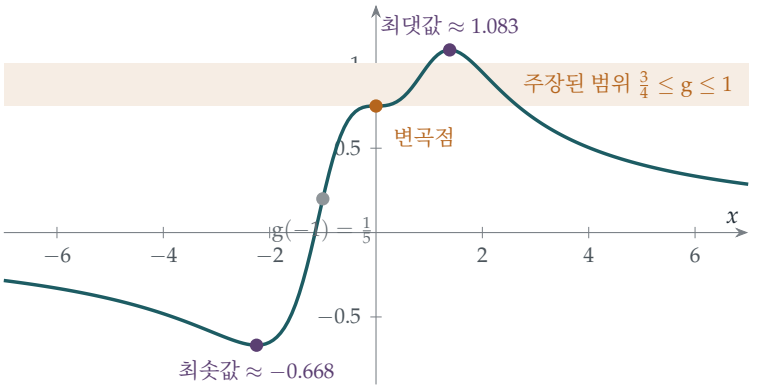


그림 3.1.1 $g(x) = \frac{2x^3+3}{x^4+4}$의 실제 그래프. 논증이 주장한 범위(호박색 띠)는 모든 단계에서 틀렸다. $x = -1$은 정류점이 아니며 $g(-1) = \frac{1}{5}$이다. $x = 0$은 극소점이 아니라 변곡점이다. 그리고 함수는 이 띠를 크게 벗어나, 1보다 큰 최댓값과 0보다 작은 최솟값을 가진다.

5단계 적분

> **생각해 보기** $-3(1-x)^{-4}$를 미분해 보자. $(1-x)^{-3}$이 나오는가?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-3(1-x)^{-4}\right] = -3 \cdot (-4)(1-x)^{-5} \cdot (-1) = -12(1-x)^{-5}$이다. 지수도 계수도 모두 틀렸다. 올바른 역도함수(antiderivative)는

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + C,$$

이며, 미분하여 확인할 수 있다.

> **생각해 보기** 올바른 역도함수를 쓰면 $\left[\frac{1}{2}(1-x)^{-2}\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0$이다. 그렇다면 결국 답은 맞았던 것일까? 정말 그럴까?

그렇지 않다. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus) $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$는 피적분함수가 구간 $[a,b]$ 전체에서 연속이어야 성립한다. 여기서 $(1-x)^{-3}$은 $[-1,3]$ 안에 있는 $x=1$에서 정의되지 않으며, $x=1$ 근처에서 값이 엄청나게 커진다. 이 적분은 **이상적분**(improper integral)으로 다루어야 하며, 문제가 되는 점에서 나누어야 한다.

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{-3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\tfrac{1}{2}(1-x)^{-2}\right]_{-1}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}-\frac{1}{8}\right) = +\infty.$$

-1부터 1까지의 적분은 무한대이고(1부터 3까지의 적분은 $-\infty$이다), 따라서 $\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,dx$는 **존재하지 않는다**. 결론 "$=0$"은 거짓인데, 그 이유는 참값이 다른 무엇이어서가 아니라 값 자체가 없기 때문이다. ■

돌아보기

- **세 종류의 오류.** 계산 오류(도함수, $g(-1)$, 역도함수), 논리적 오류(값을 비교하여 정류점의 종류를 판정한 것, 정류값을 전역적인 경계로 쓴 것), 그리고 숨은 가정(미적분학의 기본정리에서의 연속성).
- **맞는 답, 틀린 이유.** 소문항 (ii)에서 역도함수를 바로잡으면 답 0이 다시 나오지만, 논증은 여전히 타당하지 않다. 맞아 보이는 답은 추론이 건전하다는 증거가 되지 못한다.
- **국소 대 전역.** 도함수는 한 점 근처에서의 행동을 알려 준다. 전역적인 결론을 내리려면 더 많은 것이 필요하다. 정의역의 끝에서, 또는 함수가 제대로 행동하지 않는 점에서 무슨 일이 일어나는지를 알아야 한다.

숨은 수학

위대한 수학자들이 틀렸을 때

바로 이런 종류의 오류를 해석학의 창시자들도 저질렀다. 코시(Augustin-Louis Cauchy)는 1821년의 *Cours d'analyse*(해석학 강의)에서 연속함수들의 수렴하는 합은 언제나 연속이라고 "증명"했다. 1826년 아벨(Niels Henrik Abel)은 반례(counterexample)를 지적했다. 푸리에 급수(Fourier series)

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

는 모든 x에 대해 수렴(converge)하고 각 항은 연속이지만, 그 합은 $x = \pm\pi$에서 불연속적으로 뛴다($-\pi < x < \pi$에서 합은 $x/2$이다). 코시의 논증에서 정확히 무엇이 잘못되었는지 밝혀내는 데는 수십 년이 걸렸고, 그 결과 오늘날 해석학을 배우는 모든 학생이 익히는 **균등수렴**(uniform convergence)의 개념이 탄생했다. 숨은 가정, 특히 두 극한의 순서를 바꾸는 것에 관한 가정은 해석학 전체에서 가장 흔한 오류의 원천이다.

가정이 붙은 정리

이 문제의 오류 가운데 두 가지는 정리의 가정(hypothesis)을 무시한 데서 나온다.

- **최대최소 정리**(extreme value theorem)는 닫힌 유계 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수가 최댓값과 최솟값을 가진다고 말한다. 이것들을 찾으려면 양 끝점, 정류점, 그리고 함수가 미분가능하지 않은 점을 모두 확인해야 한다. 예를 들어 $[-1, 1]$에서 $|x|$의 최솟값은 0에서 나타나는데, 이 점은 끝점도 정류점도 아니다. f가 구간 내부의 모든 점에서 미분가능하다면, 내부에서의 최댓값이나 최솟값은 반드시 정류점에서 나타난다. 실수 전체에서는 확인할 끝점이 없으며, 함수가 최댓값을 아예 가지지 않을 수도 있다. 그 대신 $x \to \pm\infty$일 때의 행동을 살펴보아야 한다.
- **미적분학의 기본정리**는 피적분함수가 $[a, b]$에서 연속이어야 한다. 연속이 아니라면 적분이 여전히 존재할 수도 있고($\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$를 계산해 보라), 존재하지 않을 수도 있으며(이 문제처럼), 극한을 이용하여 확인해야 한다.

대학에서 만나는 모든 정리에는 정확한 가정의 목록이 따라온다. 정리를 쓰기 전에 매번 그 가정들을 확인하는 것도 훈련의 일부이다.

발산하는 적분에 값을 주기

소문항 (ii)에는 흥미로운 뒷이야기가 있다. 구간 $[-1, 3]$은 문제가 되는 점 $x = 1$에 대해 대칭이고, $(1 - x)^{-3}$은 그 점에 대해 "기함수"이다. 대칭인 틈 $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$을 잘라 내고 $\varepsilon \to 0$으로 보내면, 무한대인 두 조각이 상쇄되어 실제로 0을 얻는다. 이것을 **코시 주요값**(Cauchy principal value)이라고 하며, 물리학과 복소해석학에서 실제로 유용하게 쓰인다. 그러나 이것은 의도적으로 선택한 **다른 정의**이며, 우연히 그 값에 도달한 논증은 아무것도 증명하지 못한 것이다.

사고 기술

논증을 비판적으로 읽기

모든 단계에서 세 가지를 확인하라. 계산이 맞는가, 그 단계가 논리적으로 따라 나오는가, 그리고 말하지 않은 채 무엇을 가정했는가?

그다음 결론을 따로 확인하라. 틀린 논증도 참인 결론을 가질 수 있고, "맞는" 답이 타당하지 않은 논증에서 나올 수도 있다. 자기 풀이에도 똑같이 엄격한 잣대를 적용하라. 가장 믿기 쉬운 논증은 바로 자기 자신의 논증이다.

더 도전하기

1 **거짓말하는 치환.** STEP I 1987, 8번 문제 (`step.maths.org/questions/87-s1-q8`)을 풀어 보자. 치환(substitution)을 하면 양수인 적분이 음수인 적분과 같아지는 것처럼 보인다. 논증이 정확히 어디에서 무너지는지 찾은 뒤, 두 적분을 올바르게 계산해 보자.

2 **참일까, 거짓일까?** STEP I 1998, 3번 문제 (`step.maths.org/questions/98-s1-q3`)을 풀어 보자. 증명하거나 반증해야 할 네 개의 주장이 있다. 각각에 대해, 쓰기 시작하기 전에 어느 쪽일지 먼저 예상해 보자.

3 **모든 말은 같은 색이다.** 수학적 귀납법(induction)을 이용한 다음 "증명"의 결함을 찾아보자. 말 한 마리는 자기 자신과 같은 색이다. $n+1$마리의 말이 주어지면, 귀납 가정에 의해 처음 n마리는 같은 색이고, 마지막 n마리도 같은 색이다. 두 무리가 겹치므로 $n+1$마리 모두 같은 색이다.

4 **실제로 존재하는 적분.** 피적분함수가 0에서 정의되지 않음에도 $\int_{-1}^{1} |x|^{-1/2}\,\mathrm{d}x$가 존재함을 보이고, 그 값을 구해 보자.

더 읽을거리

- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics*** (Cambridge University Press). 그럴듯하지만 틀린 논증들을 주제별로 정리한 고전적인 모음집으로, 식스폼(sixth form, 영국의 대학 진학 준비 과정) 학생들을 위해 쓰였다.
- **Bernard Gelbaum & John Olmsted, *Counterexamples in Analysis*** (Dover). 정리의 가정이 왜 중요한지 보여 주는 수백 개의 예. 해석학 강의를 듣기 시작한 뒤에 조금씩 들춰 보자.

- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*** (Cambridge University Press). 수학자들이 증명의 오류를 어떻게 찾아내고 바로잡는지에 관한 탁월한 대화편.

3.2 AM–GM, 거꾸로

문제

STEP II 1993, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/93-s2-q8`

도입

산술평균–기하평균 부등식(arithmetic mean–geometric mean inequality, AM–GM)은 아마도 수학에서 가장 쓸모 있는 부등식일 것이다. 이 부등식에 따르면 양수들의 보통 평균은 언제나 "곱셈의 평균"보다 크거나 같고, 등호는 모든 수가 같을 때에만 성립한다. 이 부등식은 미적분 없이 최적화(optimisation) 문제를 풀고, 다른 부등식을 증명하며, 해석학(analysis)의 모든 분야에 등장한다.

이 문제는 1821년 오귀스탱루이 코시(Augustin-Louis Cauchy)가 고안한, 기묘하고도 아름다운 귀납법(induction)으로 이 부등식을 증명한다. n에서 $n+1$로 나아가는 대신 2에서 4로, 8로, 16으로 건너뛰며 2의 거듭제곱만을 다룬 다음, 다시 **아래로 내려와** 그 사이의 수들을 채운다. 이 증명은 "귀납법"이 교과서에 나오는 형태보다 훨씬 유연한 개념임을 일깨워 준다.

시작하기 전에

온라인 자료실에 있는 이 시험지에는 오타가 있다. "$b_1 = a_2$"라고 되어 있는데, 당연히 $b_1 = a_1$이어야 한다. 핵심은 b들이 a들에 그 평균의 복사본을 덧붙여 채운 것이라는 점이다.

생각해 보기 n개에서 $n+1$개로 가는 것보다 2^m개의 수에서 2^{m+1}개의 수로 가는 것이 왜 더 쉬울까?

2^{m+1}개의 수는 자연스럽게 2^m개씩 두 묶음으로 나뉘므로, 각 절반에 귀납 가정을 적용한 뒤 두 수의 경우를 이용해 두 절반을 합칠 수 있기 때문이다. n에서 $n+1$로 가는 경우에는 이처럼 대칭적으로 다룰 수 있는 구조가 없다.

차근차근 풀기

1단계 두 수의 경우

$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2-4a_1a_2}{4} = \frac{(a_1-a_2)^2}{4} \geq 0.$ ■

2단계 두 배로 늘리기

$m = 1$인 경우는 1단계이다. 2^m개의 수에 대하여 $(*)$이 성립한다고 가정하고, 2^{m+1}개의 양수를 택하자.

> **생각해 보기** 2^{m+1}개의 수를 앞쪽 절반과 뒤쪽 절반으로 나누고, 두 절반의 산술평균을 각각 P와 Q라 하자. 귀납 가정은 각 절반에 대하여 무엇을 말해 주는가?

각 절반에 $(*)$을 적용하면

$$a_1 \cdots a_{2^m} \leq P^{2^m} \qquad \text{그리고} \qquad a_{2^m+1} \cdots a_{2^{m+1}} \leq Q^{2^m}.$$

모든 수가 양수이므로 두 식을 곱하면, 2^{m+1}개의 수 전체의 곱은 $(PQ)^{2^m}$ 이하이다. 이제 두 수의 경우에 의해 $PQ \leq \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2$이고, $\frac{P+Q}{2}$는 정확히 2^{m+1}개의 수 전체의 평균이다. 따라서

$$a_1 \cdots a_{2^{m+1}} \leq (PQ)^{2^m} \leq \left(\frac{P+Q}{2}\right)^{2^{m+1}} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

이고, 이것이 바로 $m+1$에 대한 $(*)$이다. 수학적 귀납법에 의해, 항의 개수가 2의 거듭제곱일 때마다 AM–GM이 성립한다. ■

3단계 빈틈 채우기

이제 임의의 n을 택하고, $2^m > n$인 m을 고르자. 목록 $a_1, \ldots, a_n$에 그 자신의 평균 A의 복사본 $2^m - n$개를 덧붙여 채운다.

> **생각해 보기** 채워 넣은 목록 $b_1, \ldots, b_{2^m}$의 평균은 무엇인가?

합은 $(a_1 + \cdots + a_n) + (2^m - n)A = nA + (2^m - n)A = 2^m A$이므로 평균은 A 그 자체이다. 평균의 복사본을 덧붙여도 평균은 변하지 않는다. 따라서 b들에 $(*)$을 적용하면

$$a_1 \cdots a_n \cdot A^{2^m-n} \leq A^{2^m}.$$

> **잠깐, 직접 해 보기** 증명을 마무리하라.

양변을 A^{2^m-n}(양수이다)으로 나누면 $a_1 \cdots a_n \leq A^n$이다. 양변에 n제곱근을 취하면

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$ ■

돌아보기

- **다른 경로를 따르는 귀납법.** 2단계는 m에 대한 귀납법으로, $n = 2, 4, 8, \ldots$을 다룬다. 3단계는 2의 임의의 거듭제곱에서 그보다 작은 임의의 n으로 내려가는 방법이다(그림 3.2.1).
- **평균으로 채우기.** 평균을 바꾸지 않고 목록을 늘리는 이 기법은 기억해 둘 만하다. 임의의 n에 관한 문제를 다루기 편한 n에 관한 문제로 바꾸는 방법이다.
- **등호는 언제 성립하는가?** 증명을 거슬러 올라가 보면, 등호가 성립하려면 두 수의 경우를 사용한 모든 곳에서 등호가 성립해야 하고, 이는 모든 수가 같을 때에만 일어난다.

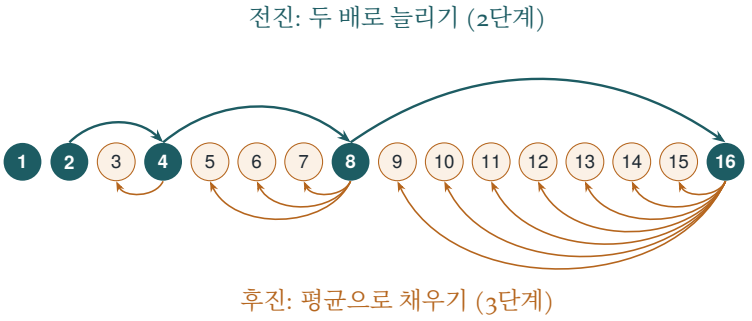


그림 3.2.1 코시의 전진–후진 귀납법. 청록색 화살표는 두 배로 늘리는 방법으로 $2, 4, 8, 16, \ldots$개의 수에 대한 AM–GM을 증명하고, 호박색 화살표는 목록을 다음 2의 거듭제곱까지 채워서 나머지 모든 n을 메운다.

숨은 수학

코시의 귀납법

코시는 이 증명을 *Cours d'analyse*(해석학 강의, 1821)에 발표했다. 이 책은 2장에서 다룬 엄밀한 해석학의 출발점이 된 책이다. 이 기법은 오늘날 **전진–후진 귀납법**(forward–backward induction)이라 불린다. 무한히 많은 경우의 수열(여기서는 2의 거듭제곱)에 대하여 명제를 증명한 다음, n인 경우가 $n-1$인 경우를 함의함을 보이는 것이다. 이 둘을 합치면 모든 n에 도달한다. 우리의 3단계는 2^m에서 n으로 곧바로 내려가지만, 한 단계씩 내려갈 수도 있다. $n-1$개의 수에 그 평균의 복사본 하나를 덧붙이면 n인 경우가 $n-1$인 경우를 함의함을 알 수 있다.

하나의 부등식, 여러 가지 증명

AM–GM에는 수십 가지 증명이 있으며, 이들을 비교해 보는 것은 수학의 다양한 스타일을 엿보는 좋은 방법이다.

- **볼록성을 이용한 증명.** 로그함수는 오목(concave)하므로, 로그값들의 평균은 평균의 로그값 이하이다. 양변에 지수함수를 취하면 바로 AM–GM이 되며, 이것이 Section 3.3의 주제인 볼록성(convexity)이다.
- **조지 폴리아(George Pólya)의 증명.** $e^{x-1} \geq x$를 이용한다($x = 1$에서 e^{x-1}에 그은 접선(tangent line)은 곡선 아래에 놓인다). 평균을 A라 하고, 각 a_i/A에 이 부등식을 적용하여 곱하면 $\prod \frac{a_i}{A} \leq e^{\sum(a_i/A - 1)} = e^0 = 1$이다. 폴리아는 이 증명이 꿈속에서 떠올랐다고 말했다.
- **고르게 만들기를 이용한 증명.** 두 수가 서로 다르면 둘 다 그 평균으로 바꾼다. 산술평균은 변하지 않고, 두 수의 경우에 의해 곱은 커진다. 이 과정을 반복하면 모든 수가 평균 쪽으로 밀려간다.

미적분 없는 최적화

AM–GM을 쓰면 많은 최적화 문제가 한 줄로 풀린다. 겉넓이가 주어진 상자 가운데 부피가 가장 큰 것은 무엇인가? 둘레가 주어진 직사각형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 무엇인가? (두 수의 경우에 의해 정사각형이다: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$이고, 등호는 $x = y$일 때 성립한다.) 등호 조건은 최적값이 어디에 있는지 알려 주고, 부등식은 그것이 단지 정상점(stationary point)이 아니라 정말로 최적값임을 알려 준다. Section 3.1의 경고와 비교해 보라.

사고 기술

유연한 귀납법

귀납법이 반드시 $1, 2, 3, \ldots$ 순서로 진행될 필요는 없다. 모든 경우에 도달하는 경로라면 어떤 경로를 따라도 귀납할 수 있다. 두 배로 늘려 가거나, 강한 귀납법(*strong induction*)을 쓰거나, 부분수열(*subsequence*)을 따라 전진한 뒤 후진하여 빈틈을 채울 수도 있다.

n에서 $n+1$로 가는 뻔한 단계가 어렵다면, 어떤 단계가 쉬울지, 그리고 그 단계를 이용해 모든 경우에 도달할 수 있는지 물어보라.

더 도전하기

1 **한 걸음 뒤로.** 평균의 복사본 하나를 덧붙이는 방법으로, n개의 수에 대하여 AM–GM이 성립하면 $n-1$개의 수에 대해서도 성립함을 직접 보여라.

2 **증가하는 수열.** $n+1$개의 수 $1+\frac{1}{n},\dots,1+\frac{1}{n},1$($1+\frac{1}{n}$이 n개)에 AM–GM을 적용하여 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$임을 보여라.

3 **최고의 상자.** 닫힌 직육면체 상자의 겉넓이가 S이다. 서로 다른 세 면의 넓이에 AM–GM을 적용하여 부피가 $(S/6)^{3/2}$ 이하이고, 등호는 정육면체일 때 성립함을 보여라.

4 **조화평균.** 수 $1/a_i$에 AM–GM을 적용하여, 조화평균(harmonic mean) $\dfrac{n}{1/a_1+\cdots+1/a_n}$이 기하평균 이하임을 보여라.

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 바로 이 수준에서 출발하는, 문제 중심으로 구성된 훌륭한 부등식 책이다. 2장이 AM–GM에 관한 내용이다.
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities*** (Cambridge University Press). 20세기의 위대한 해석학자 세 사람, 하디(Hardy), 리틀우드(Littlewood), 폴리아가 쓴 고전적인 참고서이다.
- **Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*** (Springer). 7장에는 올림피아드의 부등식 문제가 대량으로 모여 있다.

3.3 볼록성의 힘

문제

STEP II 2007, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/07-s2-q7`

도입

Section 3.2에서는 교묘한 귀납법(induction)으로 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 증명하였다. 여기서는 이 부등식이 훨씬 더 큰 원리의 특수한 경우로서 단 한 줄 만에 얻어진다. 그 큰 원리는 바로 **오목성**(concavity), 즉 언덕 꼭대기처럼 아래로 휘어지는 곡선의 모양이다. 이러한 곡선에 관한 기하학적 사실 하나, 곧 곡선이 자신의 현(chord)보다 위에 있다는 사실만으로 놀라울 만큼 다양한 부등식을 증명할 수 있다. 삼각형에 관한 사실에서 AM–GM, 그리고 확률론, 정보 이론, 경제학의 부등식에 이르기까지 말이다.

대학에서 이 아이디어는 **볼록성**(convexity)이 되며, 현대 수학 전체를 하나로 꿰는 위대한 주제 가운데 하나이다. 볼록 최적화(convex optimisation)와 같은 분야 전체가 이 개념 위에 세워져 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 $(0, \pi)$에서의 $y = \sin x$처럼 아래로 휘어지는 곡선을 그려 보자. 곡선 위에 두 점을 찍고 직선으로 이어 보자. 현은 곡선보다 위에 있는가, 아래에 있는가?

아래에 있다. 오목한 곡선에서는 모든 현이 두 끝점 사이에서 곡선보다 아래에 놓인다. 두 함숫값의 평균은 현의 중점의 높이이고, 평균에서의 함숫값은 그 중점 위에 있는 곡선의 높이이다. 따라서 "현이 곡선보다 아래에 있다"는 것은 정확히 $n = 2$일 때의 젠센 부등

식(Jensen's inequality)이다.

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

점이 n개일 때, 점 $(x_k, f(x_k))$들의 평균은 이들의 무게중심(centre of mass)이고, 이는 곡선 아래 영역의 내부에 있으므로 역시 곡선보다 아래에 있다(그림 3.3.1).

차근차근 풀기

1단계 오목성 확인하기

$0 < x < \pi$에서 $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x < 0$이고, $x > 0$에서 $\frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$이다. ■

2단계 삼각형

생각해 보기 어떤 함수와 어떤 점들을 택해야 하며, 그 점들의 평균은 무엇인가? 삼각형의 각들은 함수가 오목한 구간 안에 있는가?

$f(x) = \sin x$와 세 점 A, B, C를 택하자. 각각은 sin이 오목한 구간인 0과 π 사이에 엄격하게 놓여 있으며, 이들의 평균은 $\frac{A+B+C}{3} = \frac{\pi}{3}$이다. 젠센 부등식에 의해

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

이므로 $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$이고, 등호는 정확히 정삼각형일 때 성립한다. ■

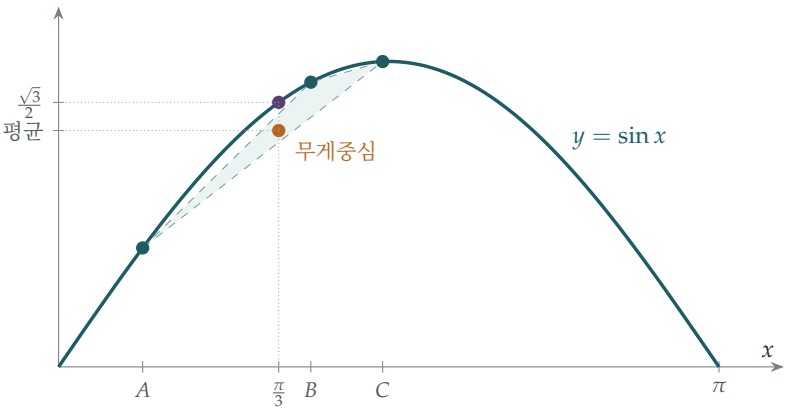


그림 3.3.1 삼각형의 세 각 $A = 0.4$, $B = 1.2$, $C = \pi - 1.6$에 대한 $\sin x$의 젠센 부등식. 곡선 위 세 점의 무게중심(주황색)은 색칠한 삼각형 내부에 있으므로 곡선보다 아래에 있다. 무게중심의 높이는 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$의 평균이고, 그 위에 있는 곡선의 높이는 $\sin\frac{\pi}{3}$이다.

3단계 한 줄로 끝내는 AM–GM

생각해 보기 AM–GM은 곱과 합을 비교한다. 곱을 합으로 바꾸어 주는 오목함수는 무엇인가?

바로 로그함수이다. $f = \ln$과 양수 $t_1, \dots, t_n$에 젠센 부등식을 적용하면

$$\frac{\ln t_1 + \cdots + \ln t_n}{n} \le \ln\left(\frac{t_1 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

좌변은 $\ln\left(\sqrt[n]{t_1 \cdots t_n}\right)$이다. $\ln$은 증가함수이므로 양변에서 $\ln$을 없앨 수 있고, 그것이 곧 AM–GM이다. 등호는 정확히 모든 t_k가 같을 때 성립한다. ∎

4단계 AM–GM 활용하기

생각해 보기 (a)에서 좌변은 네 항의 합이고 우변에는 세 변수의 곱이 들어 있다. 몇 개의 항에 AM–GM을 적용해야 하며, 16은 왜 도움이 되는가?

네 양수 $x^4, y^4, z^4, 16$에 AM–GM을 적용하면

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \ge \sqrt[4]{16\,x^4y^4z^4} = 2xyz.$$

양변에 4를 곱하면 $x^4 + y^4 + z^4 + 16 \ge 8xyz$를 얻는다. ∎

잠깐, 직접 해 보기 이제 $x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$의 최솟값을 구해 보자. (힌트: $x^5y^5z^5$의 다섯제곱근이 필요하므로 수가 다섯 개 있어야 한다. 나머지 두 수는 무엇이어야 할까?)

$x^5, y^5, z^5, 1, 1$에 AM–GM을 적용하면

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5 + 1 + 1}{5} \ge \sqrt[5]{x^5y^5z^5} = xyz,$$

이므로 $x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz \ge -2$이다. 등호는 $x^5 = y^5 = z^5 = 1$, 즉 $x = y = z = 1$일 때 성립하며, 이때 식의 값은 $3 - 5 = -2$이다. 따라서 최솟값은 -2이다. ∎

등호 조건(equality condition)이 두 가지 역할을 한다는 점에 주목하자. 등호 조건은 이 하한이 실제로 달성됨을 보여 주므로, -2는 단순한 하한이 아니라 최솟값이다.

돌아보기

- **하나의 아이디어, 많은 부등식.** 오목한 곡선에 관한 기하학적 사실 하나로 삼각형에 관한 결과와 AM–GM을 얻었으며, 이계도함수(second derivative)를 확인하는 것 말고는 계산이 전혀 필요하지 않았다.

- **함수와 점을 고르라.** 젠센 부등식을 쓴다는 것은 어떤 함수에, 어떤 점들에서 적용할지를 정하는 일이다. 곱을 합으로 바꾸어 주는 로그함수가 단골 선택이다.
- **채워서 맞추라.** (b)에서는 1 두 개를 더함으로써 AM–GM을 문제에 꼭 맞게 만들었다. Section 3.2에서 평균으로 채워 넣었던 것과 같은 방식이다.

숨은 수학

볼록함수

대학에서 쓰는 **볼록**(convex)함수(오목함수를 뒤집은 것)의 표준적인 정의에는 도함수가 전혀 등장하지 않는다. 함수 f가 볼록하다는 것은

$$\mathrm{f}\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \le t\,\mathrm{f}(x_1) + (1-t)\,\mathrm{f}(x_2) \qquad \text{모든} x_1, x_2 \text{ 와} 0 \le t \le 1,$$

에 대하여 이 부등식이 성립한다는 것이며, 이는 정확히 현이 곡선보다 위에 있다는 뜻이다. 이 정의는 $|x|$처럼 미분가능하지 않은 함수나 다변수함수에도 의미가 있다. 덴마크의 공학자이자 수학자인 Johan Jensen은 1906년에 자신의 이름이 붙은 부등식과 함께 볼록함수를 독립된 연구 주제로 만들었다.

어디에나 있는 볼록성

볼록성은 수학과 그 응용 곳곳에 등장한다.

- **확률.** 젠센 부등식에 따르면 오목함수 f와 임의의 확률변수(random variable) X에 대하여 $\mathrm{E}[\mathrm{f}(X)] \le \mathrm{f}(\mathrm{E}[X])$이다. 경제학에서 f를 오목한 "효용(utility)" 함수로 택하면, 이 부등식은 사람들이 £0 또는 £200을 반반의 확률로 받는 도박보다 확실한 £100을 더 선호하는 이유, 그리고 보험이 존재하는 이유를 설명해 준다.
- **정보 이론.** 엔트로피(entropy)가 균등분포(uniform distribution)에서 최대가 된다는 사실의 증명은 ln에 대한 젠센 부등식이며, 이 사실은 데이터 압축의 바탕이 된다.
- **최적화.** 볼록함수에는 전역 최솟값(global minimum) 외의 극솟값(local minimum)이 없으므로, "내리막으로 걸어가기"만 하면 언제나 최선의 답을 찾을 수 있다. 이것이 볼록 최적화 문제를 효율적으로 풀 수 있는 이유이며, 문제를 볼록한 형태로 바꾸어 쓰는 데 그토록 많은 노력이 들어가는 이유이다.

Section 3.4에서는 볼록성의 또 다른 면, 즉 함수와 그 역함수 사이의 기하학적 쌍대성(duality)을 살펴볼 것이다.

사고 기술

일반 원리를 찾으라

여러 결과의 증명이 서로 비슷할 때는 그 뒤에 숨은 하나의 원리를 찾으라. 그런 다음 그 원리를 한 번 증명하고 여러 번 적용하라.

AM–GM, 사인에 관한 삼각형 부등식을 비롯한 많은 부등식은 모두 "오목한 곡선은 자신의 현보다 위에 있다"는 원리의 예이다. 원리를 알아보는 순간, 잡다한 요령의 모음이 하나의 방법이 된다.

더 도전하기

1 **정의.** STEP II 2018, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/18-s2-q2`)의 소문항 (i)과 (ii)는 위 상자에 나온 오목성의 현 정의에서 출발하여 세 점에 대한 젠센 부등식까지 쌓아 올린다.

2 **사인의 곱.** STEP II 2018, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/18-s2-q2`)의 소문항 (iii)을 풀어 보자.

3 **예각삼각형.** $\tan x$가 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 볼록함을 보이고, 이로부터 예각삼각형에서 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$임을 이끌어 내라.

4 **거듭제곱 평균.** x^2이 볼록함을 보이고, 이로부터 $\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$임을 이끌어 내라. 이를 수들의 집합의 분산(variance)에 관한 명제로 해석해 보라.

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 6장 은 볼록성과 젠센 부등식을 다룬다.
- **Claudi Alsina & Roger Nelsen, *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities*** (Mathematical Association of America). 그림으로 증명하는 부등식들을 담았으며, 그중 상당수가 볼록성을 이용한다.
- **Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization*** (Cambridge University Press). 온라인에서 무료로 볼 수 있는 현대의 고전으로, 앞부분의 장들은 볼록성이 실제로 왜 중요한지 보여 준다.

3.4 부등식을 증명하는 넓이

문제

STEP III 2011, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/11-s3-q4`

도입

여기 우표 한 장에 들어갈 만큼 단순한 그림으로 증명되는 부등식이 있다. 원점을 지나는 증가하는 곡선을 하나 그려 보자. 곡선 아래의 넓이와 곡선 왼쪽의 넓이를 더하면 언제나 직사각형 하나를 덮는다. 이 관찰 하나에서 **영 부등식**(*Young's inequality*) $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$가 나오고, 이 부등식은 다시 해석학에서 가장 중요한 도구 가운데 두 가지인 횔더(Hölder) 부등식과 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식의 열쇠가 된다.

이 그림에는 더 깊은 아이디어도 담겨 있다. 그림은 함수와 그 역함수(inverse function)를 완벽하게 대칭적으로 짝짓는데, 이 짝짓기를 일반화한 것이 바로 **르장드르 변환**(*Legendre transform*)이다. 르장드르 변환은 고전역학의 두 가지 위대한 정식화를 이어 주고, 열역학의 두 가지 주요 기술 방식도 이어 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$는 곡선과 x축 사이의 넓이이다. 같은 그림에서 $\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$는 어떤 넓이를 나타내는가?

$x = \mathrm{f}^{-1}(y)$의 그래프는 $y = \mathrm{f}(x)$와 같은 곡선을 옆에서 본 것이다. 따라서 $\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$는 높이 0부터 높이 b까지 곡선과 y축 사이의 넓이이다. 이것만 알면 소문항 (i)은 그림을 그리는 문제일 뿐이다.

차근차근 풀기

1단계 그림

생각해 보기 꼭짓점이 $(0,0)$과 (a,b)인 직사각형을 그려 보자. 0부터 a까지 곡선 아래의 영역을 한 가지 색으로, 0부터 b까지 곡선 왼쪽의 영역을 다른 색으로 칠해 보자. 두 영역이 직사각형을 덮는가? 겹치는 부분도 남는 부분도 없는 것은 언제인가?

두 영역을 합치면 직사각형 $[0,a]\times[0,b]$ 전체를 덮고, 보통은 그 바깥의 넓이도 어느 정도 덮는다(그림 3.4.1). 직사각형의 모든 점 (x,y)는 곡선 아래에 있거나($x\le a$이므로 첫째 영역에 속한다) 곡선 왼쪽에 있다($y\le b$이므로 둘째 영역에 속한다). 따라서 칠해진 넓이의 합은 적어도 직사각형의 넓이 ab 이상이다. 이것이 $(*)$이다.

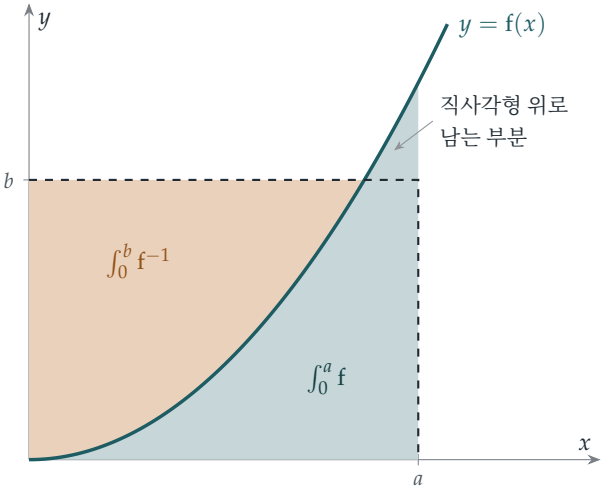


그림 3.4.1 그림으로 본 영 부등식. 0부터 a까지 곡선 아래의 넓이(청록색)와 0부터 b까지 곡선 왼쪽의 넓이(호박색)를 합치면 넓이가 ab인 점선 직사각형을 덮고, 넓이가 조금 남는다. 남는 부분이 없는 것은 꼭짓점 (a,b)가 곡선 위에 있을 때, 그리고 그때뿐이다.

남는 부분은 곡선과 직사각형의 꼭짓점 사이에 있는 작은 곡선 모양의 영역이다. 이 영역은 곡선이 꼭짓점 (a,b)를 지날 때, 그리고 그때에만 사라진다. 즉

$$b=\mathrm{f}(a).$$

일 때이다.

2단계 영 부등식

생각해 보기 $f(x) = x^{p-1}$이면 $f^{-1}(y)$는 무엇인가? 두 적분을 모두 계산하고, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$을 이용하여 둘째 적분을 깔끔하게 정리해 보자.

$p > 1$이므로 $f(x) = x^{p-1}$은 연속이고 증가하며 $f(0) = 0$이고, $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$이다. 그러면

$$\int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{1/(p-1)}\,dy = \frac{b^{1+1/(p-1)}}{1+1/(p-1)}.$$

이다. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$에서 $q = \frac{p}{p-1}$이므로 $1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$이고, 둘째 적분은 $\frac{b^q}{q}$이다. 따라서 $(*)$는

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \blacksquare$$

가 된다. 등호는 $b = f(a) = a^{p-1}$일 때 성립해야 한다. 확인해 보자. 이때 $ab = a^p$이고 $b^q = a^{(p-1)q} = a^p$이므로, 우변은 $a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p$이다. $\blacksquare$

$p = q = 2$이면 이 부등식은 $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$가 되는데, 이는 Section 3.2에서 다룬 두 수에 대한 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이 모습을 바꾼 것이다.

3단계 역사인 함수

이제 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $f(x) = \sin x$를 생각하자. 이 함수는 연속이고 증가하며 $f(0) = 0$이고, $[0,1]$에서 $f^{-1} = \arcsin$이다.

생각해 보기 $\int_0^a \sin x\,dx$는 쉽다. $\arcsin y$는 어떻게 적분할 것인가?

$\int_0^a \sin x\,dx = 1 - \cos a$이다. 역사인 함수는 $\arcsin y \times 1$로 보고 부분적분(integration by parts)한다.

$$\int_0^b \arcsin y\,dy = \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.$$

두 결과를 더하면 $(*)$에서 $ab \le b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a$를 얻는다. $\blacksquare$

잠깐, 직접 해 보기 이제 $\arcsin(t^{-1})$에 대한 부등식을 이끌어 내 보자. a의 값으로 무엇을 택해야 할까? (가장 단순한 값을 시도해 보자.)

$a = 0$으로 두면 $0 \le b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1$, 즉 $b\arcsin b \ge 1 - \sqrt{1-b^2}$이다. (이는 $\int_0^b \arcsin y\,dy \ge 0$이라는 사실을 말할 뿐이다.) $t \ge 1$에 대하여 $b = 1/t$로 두면 $0 < b \le 1$이고, 양변을 b로 나누면

$$\arcsin\left(\frac{1}{t}\right) \ge t\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}\right) = t - \sqrt{t^2-1}. \qquad \blacksquare$$

이다.

돌아보기

- **증명으로서의 그림.** 소문항 (i)은 알맞은 그림을 보기만 하면 그것으로 완전한 증명이 된다. 기하학적 사실을 적분 사이의 부등식으로 옮기는 것은 강력한 기법이다.
- **일반적인 결과를 특수화하기.** 하나의 일반적인 부등식에서 f를 달리 택하여 영 부등식과 arcsin에 대한 부등식을 얻었다.
- **가장 단순한 선택이 올바른 선택일 수 있다.** 마지막 유도에서는 부등식이 거의 자명해지는 $a = 0$을 사용했다. 언제나 쉬운 경우를 시도해 보자.

숨은 수학

영에서 횔더까지

William Henry Young은 1912년에 이 부등식을 발표했다. 이 부등식의 중요성은 그것이 이끌어 내는 결과에서 나온다. $\sum a_i^p = 1$이고 $\sum b_i^q = 1$이라고 하자. 각 쌍에 영 부등식을 적용하여 더하면

$$\sum a_i b_i \le \frac{\sum a_i^p}{p} + \frac{\sum b_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

이다. 합이 1이 되도록 a들과 b들의 크기를 조정하면 **횔더 부등식**을 얻는다. 양수들에 대하여

$$\sum a_i b_i \le \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum b_i^q\right)^{1/q}.$$

$p = q = 2$이면 이는 **코시-슈바르츠 부등식** $\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$이 되는데, 이 부등식은 두 벡터(vector) 사이의 각의 코사인이 1 이하라는 것을 말해 준다. 횔더 부등식은 L^p 공간 이론의 토대이다. L^p 공간은 "거리"를 $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}$로 재는 함수들의 공간으로, 함수해석학(functional analysis)과 확률론 강의에서 만나게 될 것이다.

르장드르 변환

그림 3.4.1의 그림은 f와 f^{-1}을 완전히 대칭적으로 다룬다. $F(a) = \int_0^a \mathrm{f}$, $G(b) = \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$이라고 쓰자. 부등식은 $F(a) + G(b) \ge ab$이고 곡선 위에서 등호가 성립한다는 것이므로

$$G(b) = \max_a \bigl(ab - F(a)\bigr).$$

이다. 볼록함수(convex function) F를 새로운 볼록함수 G로 바꾸는 이 연산이 **르장드르 변환**이며, 이를 두 번 적용하면 다시 F로 돌아온다. 역학에서 르장드르 변환은 위치와 속도의 함수인 **라그랑지안**(*Lagrangian*)을 위치와 운동량의 함수인 **해밀토니안**(*Hamiltonian*)으로 바꾼다. 이 둘은 뉴턴(Newton)의 법칙에 대한 동치인 두 정식화로, 대학 2학년 강의에

서 만나게 될 것이다. 열역학에서는 에너지, 엔탈피(enthalpy), 자유 에너지(free energy) 사이를 오가게 해 준다. $F(a) = a^p/p$의 변환은 $G(b) = b^q/q$이며, 영 부등식의 두 지수가 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$로 연결되어 있는 것은 이 때문이다.

사고 기술

그림에서 얻는 부등식

적분은 넓이이다. 잘 고른 그림에서 넓이를 비교하면, 대수적으로는 알아보기 어려운 부등식을 증명할 수 있다.

한 영역이 다른 영역을 분명히 포함하거나, 여러 영역이 또 다른 영역을 분명히 덮는 그림을 찾아보자. 그런 다음 각 넓이를 적분으로 옮긴다.

더 도전하기

1 **1987년 버전.** STEP I 1987, 6번 문제 (`step.maths.org/questions/87-s1-q6`)을 풀어 보자. 같은 종류의 그림을 이용하여 역함수를 적분하는 문제이다. 미분하여 답을 검산해 보자.

2 **코시-슈바르츠.** $p = q = 2$인 영 부등식을 이용하여 양수들에 대하여 $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$임을 증명하여라. (**힌트:** 먼저 두 제곱근이 모두 1인 경우를 다루어라.)

3 **지수함수 버전.** $(*)$에서 $f(x) = e^x - 1$로 두어, $a, b \ge 0$에 대하여

$$ab \le e^a - 1 - a + (1+b)\ln(1+b) - b.$$

임을 보여라. 등호는 언제 성립하는가?

4 **이 한계는 얼마나 좋은가?** 심화 계산기를 이용하여 $t = 1, 2, 10$에 대해 $\arcsin(1/t)$와 $t - \sqrt{t^2-1}$을 비교하여라. t가 클 때 $t - \sqrt{t^2-1} \approx \frac{1}{2t}$이고 $\arcsin(1/t) \approx \frac{1}{t}$임을 보여라. 왜 이 한계는 2배만큼 차이가 나는가? ($a = 0$일 때의 그림을 보자. 남는 부분 가운데 얼마만큼이 낭비되는가?)

더 읽을거리

▶ **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 제1장과 제9장에서 코시-슈바르츠 부등식과 횔더 부등식을 다루며, 그 과정에서 영

부등식도 소개한다.

- **Roger Nelsen, *Proofs Without Words*** (Mathematical Association of America). 말 없는 증명. 영 부등식을 비롯한 여러 그림 증명이 실려 있다.
- **V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*** (Springer). 고전역학의 수학적 방법. 아르놀트(Arnold)는 제14절에서 바로 이 그림으로 르장드르 변환을 설명한다. 수준이 높지만 해당 절은 짧다.

3.5 π^e인가, e^π인가?

문제

STEP II 2013, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s2-q1`

도입

π^e와 e^π 중 어느 쪽이 더 클까? 계산기는 1초 만에 알려 준다: $e^\pi \approx 23.14$이고 $\pi^e \approx 22.46$이다. 그러나 계산기는 **그렇다는 사실**만 알려 줄 뿐 **왜** 그런지는 알려 주지 않으며, 비슷한 질문 무한히 많은 것을 한꺼번에 해결하는 데에도 도움이 되지 않는다. 3^π는 π^3보다 클까? 당연한 $n = m$ 말고도 $n^m = m^n$을 만족하는 자연수가 있을까?

이 모든 질문은 결국 하나의 곡선 $y = \ln x$와 그것을 가로지르는 직선들에 관한 것이다. 이 문제는 그래프를 신중하게 사용하면 대수적으로는 가망 없어 보이는 비교를 해결할 수 있다는 것, 그리고 수 e가 자연스러운 경계점으로 등장한다는 것을 보여 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 로그(logarithm)를 취하면 $a^b = b^a$는 $b \ln a = a \ln b$와 같다. 이 식을 변형하여 a는 한쪽에만, b는 다른 쪽에만 나타나게 하라.

$b \ln a = a \ln b$는 다음과 같다.

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}.$$

따라서 a^b와 b^a의 비교는 모두 하나의 함수 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$의 a와 b에서의 값을 비교하는 것이다. 또 $\frac{\ln a}{a}$는 원점과 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(a, \ln a)$를 잇는 직선의 기울기(gradient)이다. 이 문제가 직선에 관한 것인 이유가 바로 이것이다.

차근차근 풀기

1단계 원점을 지나는 접선

생각해 보기 $y = mx$가 $x = x_0$에서 $y = \ln x$에 접한다면, 어떤 두 등식이 성립해야 하는가?

직선과 곡선이 만나야 하므로 $mx_0 = \ln x_0$이고, 기울기가 같아야 하므로 $m = 1/x_0$이다. 둘째 식을 첫째 식에 대입하면 $1 = \ln x_0$이므로 $x_0 = e$이고 $m = 1/e$이다. 원점에서 그은 접선(tangent)은 점 $(e, 1)$에서 곡선에 접한다.

반대로 $y = mx$가 $x = a$와 $x = b$에서 곡선과 만나면 $\ln a = ma$이고 $\ln b = mb$이므로 $\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b}$이다. 이로부터 $b \ln a = a \ln b$를 얻고, 따라서 $a^b = b^a$이다. ■

그래프에 대하여: 원점을 지나면서 접선보다 약간 덜 가파른 직선은 접점의 양쪽에서 한 번씩, 모두 두 번 곡선과 만나므로 $a < e < b$이다. 기울기가 $1/e$보다 큰 직선은 곡선과 전혀 만나지 않는데, $\ln x$가 위로 볼록(concave)하여 접선 $y = x/e$보다 완전히 아래에 있기 때문이다.

2단계 원점 위쪽에서 y축과 만나는 직선

생각해 보기 이제 직선은 $c > 0$인 $y = mx + c$이다. $\frac{\ln p}{p}$와 $\frac{\ln q}{q}$를 m과 c로 나타내면 무엇인가?

$\ln p = mp + c$와 $\ln q = mq + c$로부터

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

$c > 0$이고 $p < q$이므로 $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$이고, 따라서 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$이다. 양변에 $pq > 0$을 곱하면 $q \ln p > p \ln q$이므로 $p^q > q^p$이다. ■

기하학적으로 보면: 두 점을 지나는 직선이 원점 위쪽에서 y축과 만날 때, 원점에서 바라보면 점 $(p, \ln p)$가 $(q, \ln q)$보다 더 가파른 각도에 보인다.

3단계 e 오른쪽의 현

생각해 보기 $e \le p < q$일 때 $(p, \ln p)$에서 $(q, \ln q)$까지의 현(chord)은 p에서의 곡선의 기울기보다 작은 기울기를 가진다. 왜 그런가? 그리고 그 때문에 왜 현의 y절편(intercept)이 양수가 되는가?

$\ln x$는 위로 볼록하므로 그 기울기 $1/x$는 감소하고, 따라서 p에서 q까지의 현은 p에서의 접

선보다 덜 가파르다. 즉 현의 기울기 s는 $s < \frac{1}{p}$를 만족한다. 현의 y절편은

$$c = \ln p - sp > \ln p - \frac{1}{p} \cdot p = \ln p - 1 \geq 0$$

이다. 여기서 $p \geq e$를 이용하였다. 따라서 현은 원점 위쪽에서 y축과 만난다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** 이 결과와 2단계를 이용하여 π^e와 e^π 중 어느 쪽이 더 큰지 판단하라.

$p = e, q = \pi$로 두자. 두 점 사이의 현은 절편이 양수이므로, 2단계에 의해 $p^q > q^p$이다. 즉

$$e^\pi > \pi^e.$$

4단계 접선과 평행한 현

이제 p에서 q까지의 현의 기울기가 접선 $y = \frac{x}{e}$의 기울기와 같은 정확히 $\frac{1}{e}$라고 하자.

> **생각해 보기** 이 현은 $(e, 1)$에서의 접선과 평행하다. $\ln x$는 위로 볼록하므로 곡선은 그 접선 아래에 있다. 현은 원점 위쪽에서 y축과 만나는가, 아니면 아래쪽에서 만나는가?

현은 어떤 c에 대하여 직선 $y = \frac{x}{e} + c$이다. 현의 양 끝점은 곡선 위에 있는데, 곡선은 접선 $y = \frac{x}{e}$ 위에 있거나 그보다 아래에 있으며, $x = e$에서만 접선과 닿는다. 양 끝점이 모두 $x = e$에 있을 수는 없으므로 적어도 하나는 접선보다 엄밀히 아래에 있고, 따라서 평행한 현 전체가 접선 아래에 있다: $c < 0$. 이제 $c < 0$으로 2단계를 반복하면 부등식의 방향이 바뀌어 $\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$가 되고, 따라서 $q^p > p^q$이다. ■

돌아보기

- **하나의 함수로 환원하기.** a^b와 b^a의 비교는 $h(a)$와 $h(b)$의 비교가 되었다. 여기서 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$이다.
- **근거가 있는 그래프.** "그래프를 이용하여"라는 각 요구는 정확한 사실로 뒷받침되었다: ln의 볼록성(현은 곡선 아래, 접선은 곡선 위)과 절편의 부호이다.
- **e의 특별한 역할.** 원점에서 그은 접선은 $x = e$에서 접하며, 이 점이 이 모든 비교의 경계점이다.

숨은 수학

$\frac{\ln x}{x}$의 그래프

이 문제의 모든 내용은 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$의 그래프(그림 3.5.1)에서 볼 수 있다. 그 도함수(derivative)는 $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$이므로, h는 $(0, e)$에서 증가하고 $x = e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$에 도달한 뒤 0을 향해 감소한다. 0과 $\frac{1}{e}$ 사이의 높이 m에 그은 수평선은 그래프와 두 번, 즉 $h(a) = h(b)$인 두 점 $a < e < b$에서 만나는데, 이것이 바로 $a^b = b^a$이다. e의 오른쪽에서 h는 감소하므로 $e \le p < q$이면 $h(p) > h(q)$, 즉 $p^q > q^p$이다. 특히 $e^\pi > \pi^e$이고, 더 일반적으로 모든 $x \neq e$에 대하여 $e^x > x^e$이다. 이 게임에서 e를 이기는 수는 없다.

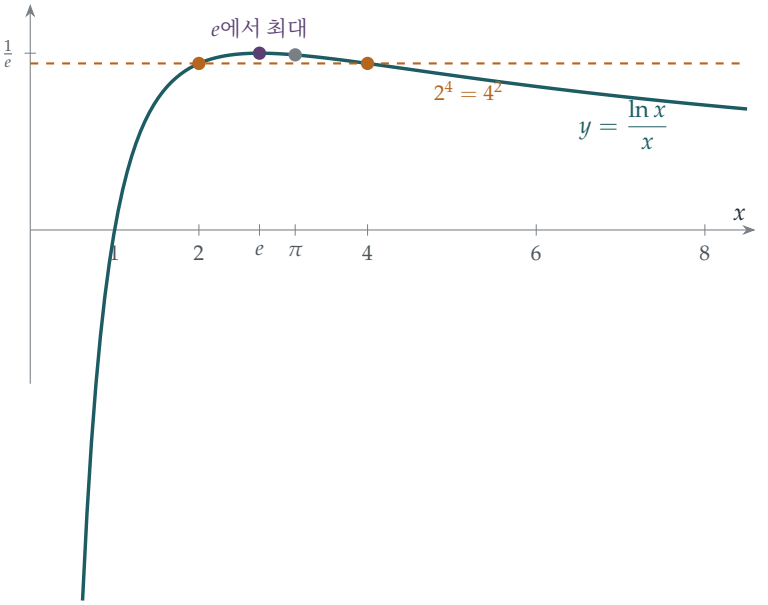


그림 3.5.1 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$의 그래프. 그래프는 $x = e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$까지 올라갔다가 내려간다. $h(e) > h(\pi)$이므로 $e^\pi > \pi^e$를 얻는다. 높이 $\frac{\ln 2}{2}$의 수평선(호박색)은 $x = 2$와 $x = 4$에서 그래프와 만난다. 이것이 $n^m = m^n$을 만족하는 서로 다른 자연수의 유일한 쌍이다.

$x^y = y^x$의 모든 해

$x^y = y^x$를 만족하는 서로 다른 양의 실수 쌍은 무엇일까? 깔끔한 요령으로 그것을 모두 찾을 수 있다. $t > 1$로 $y = tx$라 두면, $x^{tx} = (tx)^x$로부터 $x^t = tx$를 얻으므로 $x^{t-1} = t$이고

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

$t = 1 + \frac{1}{n}$으로 쓰면 $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$과 $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$을 얻는다. $n = 1$이면 $(2, 4)$이고, $n = 2$이면 $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$인데, 실제로 $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8} = \left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$이다. $n \to \infty$일 때 둘 다 두 갈래가 만나는 점인 e로 수렴한다. 이 문제는 1728년 다니엘 베르누이(Daniel Bernoulli)와 크리스티안 골드바흐(Christian Goldbach)가 주고받은 편지에서 논의되었고, 나중에 오일러(Euler)도 다루었다.

가장 경제적인 밑

함수 $x^{1/x} = e^{h(x)}$ 역시 $x = e$에서 최대가 된다. 이 사실은 흥미로운 질문 하나에 답해 준다: 기수법의 "비용"을 밑과 필요한 자릿수의 곱으로 정하면, 가장 경제적인 밑은 e이고, 자연수 중에서는 3이다(근소한 차이로 2를 앞선다). 1958년 소련의 세툰(Setun) 같은 몇몇 실험적인 컴퓨터는 3진법을 사용했다.

사고 기술

변수를 분리하도록 변형한 다음, 하나의 함수를 살펴보라

두 양이 얽혀 있는 부등식이나 등식은 하나의 함수를 두 점에서 계산한 값에 관한 명제가 되는 경우가 많다.

그 함수를 얻고 나면, 그 그래프(어디서 증가하고, 감소하고, 최대가 되는지)가 모든 질문에 한꺼번에 답해 준다. 여기서는 a^b 대 b^a가 $h(a)$ 대 $h(b)$가 되었다.

더 도전하기

1 **자연수.** STEP I 1988, 1번 문제 (`step.maths.org/questions/88-s1-q1`)를 풀어 보라.

2 **더 많은 비교.** STEP II 2025, 3번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`)를 풀어 보라. 이 절의 그래프를 이용하여 a^b와 b^a 사이의 비교를 더 해결하는 문제로, 그중 하나에서는 e에 대한 수치적 한계가 결정적인 역할을 한다.

3 **한 줄 증명.** $x \neq 0$일 때 성립하는 $e^x > 1 + x$에 $x = \frac{\pi}{e} - 1$을 대입하여 $e^\pi > \pi^e$를 직접 증명하라.

더 읽을거리

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number*** (Princeton University Press). 방정식 $x^y = y^x$를 포함하여 e의 역사를 다룬다.
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale*** (Princeton University Press). $\sqrt{-1}$에 관한 내용만 있는 것이 아니다. 바로 이런 종류의 흥미로운 계산으로 가득하다.
- **Michael Spivak, *Calculus*** (Cambridge University Press). 11장에서는 도함수를 이용하여 그래프의 모양을 이해하는 방법을 완전히 엄밀하게 다룬다.

3.6 기울기의 한계

문제

STEP I 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/88-s1-q7`

도입

어떤 구간에서 함수(function)의 값이 -1과 1 사이에 머문다는 것을 안다면, 그 함수가 얼마나 가파른지에 대해 무언가 말할 수 있을까? 일반적인 함수라면 그럴 수 없다. $\sin(1000x)$는 -1과 1 사이에 머물지만 기울기(slope)가 1000만큼 커지기도 한다. 하지만 이차함수(quadratic)는 그렇게 요동칠 수 없다. 이 문제는 상자 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ 안에 갇힌 이차함수의 기울기가 상자 안에서 결코 4보다 클 수 없으며, 4가 가능한 최선의 값임을 보여 준다.

이 문제의 기원은 놀랍다. 1887년, 주기율표(periodic table)로 유명한 화학자 드미트리 멘델레예프(Dmitri Mendeleev)는 용액의 밀도가 농도에 따라 어떻게 달라지는지 연구하면서 자료에 이차함수를 맞추고 있었다. 그는 자료의 오차가 곡선의 기울기에 얼마나 크게 영향을 줄 수 있는지 알아야 했고, 바로 이 문제의 결과를 증명(proof)했다. 2년 뒤 젊은 안드레이 마르코프(Andrei Markov)는 임의의 차수(degree)의 다항식(polynomial)에 대한 일반적인 문제를 해결했고, 그 답은 곧바로 수학에서 가장 중요한 다항식들 가운데 일부로 이어졌다.

시작하기 전에

생각해 보기 $f'(x)$에 대한 공식은 $-1, 0, 1$에서의 f의 값 세 개만 사용한다. 왜 세 개의 값만으로 이차함수의 도함수(derivative)가 결정되어야 할까?

이차함수는 계수(coefficient)가 세 개이므로 임의의 세 점에서의 값으로 결정된다. 따라서 계수들의 또 다른 함수인 도함수도 그 세 값으로 나타낼 수 있어야 한다. 공식은 그 방법을

알려 준다. 그리고 이것이 바로 필요한 것인데, 가정(hypothesis) $|f(x)| \le 1$은 f의 **값**에 대해 알려 주는 반면, 결론(conclusion)은 그 **도함수**에 관한 것이기 때문이다.

차근차근 풀기

1단계 공식

$f(1) = a+b+c, f(-1) = a-b+c, f(0) = c$이다. 따라서 우변은

$$(a+b+c)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + (a-b+c)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - 2cx$$

이다. x의 계수는 $(a+b+c)+(a-b+c)-2c = 2a$이고, 상수항(constant term)은 $\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{1}{2}(a-b+c) = b$이다. 따라서 우변은 $2ax+b = f'(x)$이다. ■

2단계 상계(bound)

생각해 보기 공식의 양변에 절댓값(absolute value)을 취하고, $|f(1)|, |f(-1)|, |f(0)| \le 1$과 함께 삼각부등식(triangle inequality)을 사용하라. x의 함수로서 $|f'(x)|$에 대해 어떤 상계를 얻는가?

삼각부등식 $|u+v+w| \le |u|+|v|+|w|$에 의해

$$|f'(x)| \le |f(1)|\,|x+\tfrac{1}{2}| + |f(-1)|\,|x-\tfrac{1}{2}| + 2|f(0)|\,|x| \le |x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| + 2|x|.$$

잠깐, 직접 해 보기 $|x| \le 1$일 때 $|x+\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}| + 2|x| \le 4$임을 보여라. (부호에 따라 경우를 나누어라.)

$|x| \le \frac{1}{2}$이면 $x+\frac{1}{2} \ge 0$이고 $x-\frac{1}{2} \le 0$이므로 $|x+\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}| = (x+\frac{1}{2}) - (x-\frac{1}{2}) = 1$이고, 전체는 $1+2|x| \le 2$이다.

$\frac{1}{2} \le |x| \le 1$이면 두 괄호 안의 식은 모두 x와 부호가 같으므로 $|x+\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}| = 2|x|$이고, 전체는 $4|x| \le 4$이다.

어느 경우든 $|f'(x)| \le 4$이다. ■

이 상계는 $x = \pm 1$에서만 도달한다. 구간의 가운데 절반에서는 기울기가 많아야 2이다.

3단계 극단적인 예

생각해 보기 $x = 1$에서 상계에 도달하려면 2단계의 모든 부등식에서 등호가 성립해야 한다. $f(1), f(-1), f(0)$은 어떤 값을, 어떤 부호로 가져야 할까?

$x = 1$에서 공식은 $f'(1) = \frac{3}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) - 2f(0)$이다. 이 값이 4가 되려면 $f(1) = 1$, $f(-1) = 1, f(0) = -1$이어야 한다. $(-1,1)$, $(0,-1)$, $(1,1)$을 지나는 이차함수는

$$f(x) = 2x^2 - 1,$$

이므로 $a = 2, b = 0, c = -1$이다. $|x| \le 1$에서 $x^2 \in [0,1]$이므로 $2x^2 - 1 \in [-1,1]$이고, $f'(1) = 4$이다. ■

돌아보기

- **알고 싶은 것을 아는 것으로 나타내라.** 공식은 도함수를 f의 값으로 다시 썼고, 바로 그 값에 대해 가정이 정보를 주었다.
- **삼각부등식.** 합을 절댓값들의 합으로 누르는 것은 해석학(analysis)에서 가장 흔한 수법 가운데 하나이다.
- **등호 조건(equality condition)에서 극단적인 경우를 찾아라.** 모든 부등식에서 언제 등호가 성립하는지 물으니 예 $2x^2 - 1$이 곧바로 나왔다.

숨은 수학

마르코프 부등식(Markov's inequality)과 체비쇼프 다항식

안드레이 마르코프는 1889년에 p가 $[-1,1]$에서 $|p(x)| \le 1$을 만족하는 n차 다항식이면

$$|p'(x)| \le n^2 \qquad \text{단, } |x| \le 1$$

임을 증명했다. $n = 2$일 때 이것은 우리의 상계 4이다. 극단적인 경우는 **체비쇼프 다항식**(*Chebyshev polynomials*) T_n으로, 다음과 같이 정의된다.

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

예를 들어 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$에서 우리의 극단적인 이차함수 $T_2(x) = 2x^2 - 1$을 얻고, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$에서 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$를 얻는다. $T_n(x) = \cos n\theta$이므로 이 다항식들은 n차 다항식이 할 수 있는 한 가장 자주 -1과 1 사이를 진동하며, 양 끝에서 가능한 한 가장 가파르다(그림 3.6.1). 마르코프의 동생 블라디미르(Vladimir)는 1892년에 이 결과를 고계도함수로 확장했다.

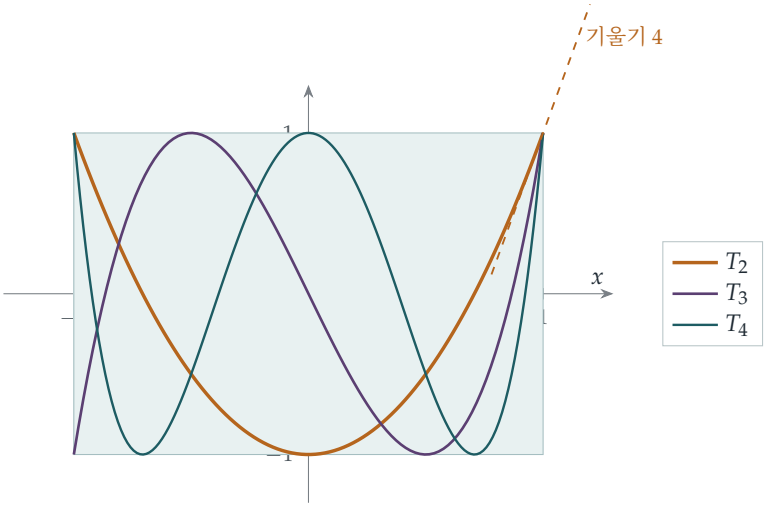


그림 3.6.1 체비쇼프 다항식 $T_2 = 2x^2 - 1$, $T_3 = 4x^3 - 3x$, $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$은 상자 $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ 안에 머물며, 가능한 한 자주 상자의 위와 아래에 닿는다. 이들은 양 끝에서 같은 차수의 다항식 가운데 가장 가파르다: $T_n'(1) = n^2$. 점선은 $x = 1$에서 T_2에 그은 접선(tangent)으로, 기울기는 4이다.

보간법(interpolation)

문제의 공식은 **라그랑주 보간법**(*Lagrange interpolation*)의 한 예이다. 몇 개의 점에서 함수의 값이 주어지면, 그 점들을 지나는 차수가 가장 낮은 유일한 다항식을 써 내고, 그것으로 함수나 그 도함수를 근사한다. 여기서 세 점은 $-1, 0, 1$이다. 이런 공식은 수치해석(numerical analysis)의 모든 곳에서 쓰이며, 예를 들어 측정 자료로부터 도함수를 추정하는 데 쓰인다. 마르코프 부등식은 이런 공식에 따라붙는 경고이다. 값의 작은 오차가 도함수에서는 최대 n^2배까지 커질 수 있는데, 이것이 바로 멘델레예프가 걱정했던 문제이다.

실제로 쓰이는 체비쇼프 다항식

체비쇼프 다항식은 근사 이론(approximation theory)의 일꾼이다. 함수를 등간격의 점이 아니라 T_n의 근에서 보간하면 오차를 제어할 수 있다. 등간격의 점을 쓰면 고차 보간이 구간의 양 끝 근처에서 크게 어긋날 수 있다(룽게 현상(Runge's phenomenon)). 함숫값을 기계 정밀도까지 계산하거나 미분방정식을 매우 정확하게 푸는 소프트웨어는 내부적으로 체비쇼프 전개를 사용하는 경우가 많다.

사고 기술

모르는 것을 아는 것으로 나타내기

가정이 한 종류의 양에 대해 알려 주고 결론이 다른 종류의 양에 관한 것이라면, 둘을 잇는 항등식을 찾은 뒤 항별로 상계를 구하라.

그리고 상계를 얻었다면 그것이 최선인지 물어라. 등호 조건을 거꾸로 따라가면 대개 극단적인 예에 이르고, 그 극단적인 예는 그 자체로 흥미로운 경우가 많다.

더 도전하기

1 **일반적인 아이디어.** f가 이차함수이면 $f(x) = f(-1)\dfrac{x(x-1)}{2} + f(0)(1-x^2) + f(1)\dfrac{x(x+1)}{2}$임을 보이고, 이를 미분하여 문제의 공식을 다시 얻어라.

2 **유일성(uniqueness).** 심화 $[-1,1]$에서 $|f(x)| \le 1$이고 $[-1,1]$의 어떤 점에서 $|f'(x)| = 4$인 이차함수는 $\pm(2x^2-1)$뿐임을 보여라.

3 **체비쇼프 다항식.** $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$를 이용하여 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$임을 확인하고, $T_3'(1) = 9$임을 확인하라. $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$임을 보이고, T_4를 구하라.

4 **T_n의 기울기.** $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$를 θ에 대해 미분하여 $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$임을 보이고, $\theta \to 0$으로 보내어 $T_n'(1) = n^2$임을 유도하라.

더 읽을거리

- **Lloyd N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*** (SIAM). 체비쇼프 다항식과 보간법에 관한 아름다운 현대적 책으로, 실력 있는 고등학생도 읽을 수 있으며 책 전체에 걸쳐 컴퓨터 실험이 실려 있다.
- **Peter Borwein & Tamás Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*** (Springer). 마르코프 부등식과 그 친척들에 대한 전체 이야기를 다룬다. 고급 수준이다.
- **George M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*** (Springer). 라그랑주 보간법, 체비쇼프 다항식, 마르코프형 부등식을 다루는 학부 교재이다.

3.7 $\pi^2 \leq 10$

문제

STEP II 2014, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s2-q2`

도입

학교에 다니는 학생이라면 누구나 π가 3보다 조금 크다는 것을 안다. 그렇다면 π의 상한(upper bound)을 어떻게 **증명**할 수 있을까? 아르키메데스(Archimedes)는 다각형을 이용했다. 이 문제는 전혀 예상하지 못한 방법을 쓴다. 함수에 관한 일반적인 부등식(inequality)에 간단한 포물선을 대입하면 곧바로 $\pi^2 \leq 10$을 읽어 낼 수 있다. 다른 함수를 고르면 유명한 근삿값 $\pi \leq \frac{22}{7}$을 얻는다.

부등식 $(*)$는 **비르팅거 부등식**(*Wirtinger's inequality*)이다. 이 부등식은 양 끝에서 0으로 고정된 함수가 "가파르지" 않으면서 "클" 수는 없다는 것을 말한다. 그 배경에는 수리물리학의 핵심 아이디어 가운데 하나가 있다. 바로 현의 진동, 양자 입자의 에너지 준위, 그리고 고윳값(eigenvalue) 이론이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $[0, \pi]$의 양 끝에서 0인 함수가 가운데에서 크다면 왜 가파를 수밖에 없을까? 조건 $f(0) = f(\pi) = 0$은 왜 중요할까?

함수가 거리 π 안에서 0에서 어떤 높이 H까지 올라갔다가 다시 0으로 내려오려면, 적어도 $H/(\pi/2)$의 평균 변화율로 올라가야 한다. 따라서 도함수(derivative)가 모든 곳에서 작을 수는 없다. 양 끝의 조건이 없으면 이런 제약도 없다. 상수함수는 도함수가 0이면서도 얼마든지 클 수 있다. 부등식 $(*)$는 이 생각을 엄밀하게 만든 것으로, "크기"와 "가파름"을 제곱의 적분(integral)으로 잰다.

차근차근 풀기

1단계 사인파

생각해 보기 $\int_0^\pi \sin^2 nx\,dx$의 값은 얼마인가? $\int_0^\pi \cos^2 nx\,dx$는? ($\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$를 이용하라.)

$\int_0^\pi \cos 2nx\,dx = 0$이므로 두 값은 모두 $\frac{\pi}{2}$이다. $f(x) = \sin nx$이면 $f'(x) = n\cos nx$이므로, $n \geq 1$에서

$$\int_0^\pi f^2 = \frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2} = \int_0^\pi (f')^2,$$

이다. ■$n = 1$이면 등호가 성립하므로, 이 부등식은 더 이상 개선할 수 없을 만큼 날카롭다는 점에 주목하자.

2단계 양 끝 조건이 중요하다

생각해 보기 $f(0) \neq 0$이면서 $(*)$가 성립하지 않는 간단한 함수를 찾아라. 그다음 $f(0) = 0$이지만 $f(\pi) \neq 0$인 함수를 찾아라.

상수함수 $f(x) = 1$은 $f(0) = 1 \neq 0$이고, $\int_0^\pi 1\,dx = \pi > 0 = \int_0^\pi 0\,dx$이다.

두 번째 경우로, $f(x) = x$는 $f(0) = 0$이지만 $f(\pi) = \pi$이고,

$$\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^3}{3} \approx 10.3 > \pi = \int_0^\pi 1^2\,dx.$$

이다. 따라서 두 경우 모두 $(*)$가 성립하지 않는다. ■

3단계 포물선

생각해 보기 $x = 0$과 $x = \pi$에서 0이 되는 이차식(quadratic)은 무엇인가? (상수배를 무시하면 하나뿐이다. 상수배가 왜 상관없을까?)

이차식은 $x(\pi - x)$의 상수배여야 하고, f에 상수 k를 곱하면 $(*)$의 양변에 모두 k^2이 곱해지므로 $f(x) = x(\pi - x)$, 즉 $a = -1, b = \pi, c = 0$으로 놓아도 된다. 그러면 $f'(x) = \pi - 2x$이고, 치환(substitution) $u = x - \frac{\pi}{2}$ (두 피적분함수를 모두 우함수(even function)로 만든다)를 쓰면

$$\int_0^\pi x^2(\pi - x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - u^2\right)^2 du = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^\pi (\pi - 2x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4u^2\,du = \frac{\pi^3}{3}.$$

이다. (첫 번째 적분은 $h = \frac{\pi}{2}$로 놓고 $\int_{-h}^{h}(h^2-u^2)^2\,du = 2(h^5 - \frac{2}{3}h^5 + \frac{1}{5}h^5) = \frac{16}{15}h^5$을 이용한다.) 따라서 $(*)$는 $\frac{\pi^5}{30} \le \frac{\pi^3}{3}$, 즉

$$\pi^2 \le 10. \qquad \blacksquare$$

을 뜻한다.

4단계 삼각함수 선택

> **생각해 보기** $f(x) = p\sin\frac{1}{2}x + q\cos\frac{1}{2}x + r$일 때, $f(0)=0$과 $f(\pi)=0$은 p, q, r에 어떤 조건을 주는가?

$f(0) = q + r = 0$이고 $f(\pi) = p + r = 0$이다. 따라서 $p = q = -r$이고, 상수배를 조정하여 $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1$로 놓는다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 이 함수에 대해 $\int_0^\pi f^2$와 $\int_0^\pi (f')^2$를 계산하라. π에 관해 어떤 부등식이 나오는가?

$s = \sin\frac{x}{2}$, $c = \cos\frac{x}{2}$로 놓자. 그러면 $(s+c)^2 = 1 + 2sc = 1 + \sin x$이므로

$$f^2 = (s+c)^2 - 2(s+c) + 1 = 2 + \sin x - 2\sin\tfrac{x}{2} - 2\cos\tfrac{x}{2}.$$

이다. $\int_0^\pi \sin x = 2$, $\int_0^\pi \sin\frac{x}{2} = 2$, $\int_0^\pi \cos\frac{x}{2} = 2$를 이용하면

$$\int_0^\pi f^2\,dx = 2\pi + 2 - 4 - 4 = 2\pi - 6.$$

이다. 또 $f' = \frac{1}{2}(c - s)$이므로 $(f')^2 = \frac{1}{4}(1 - \sin x)$이고 $\int_0^\pi (f')^2\,dx = \frac{1}{4}(\pi - 2)$이다. 이제 $(*)$에서

$$2\pi - 6 \le \frac{\pi - 2}{4} \quad\Longrightarrow\quad 8\pi - 24 \le \pi - 2 \quad\Longrightarrow\quad \pi \le \frac{22}{7}. \qquad \blacksquare$$

을 얻는다.

5단계 어느 쪽이 더 좋은가?

$\pi \le \frac{22}{7}$에서 $\pi^2 \le \frac{484}{49} \approx 9.878$을 얻으므로, 이것이 $\pi^2 \le 10$보다 더 좋다. (실제 값은 $\pi^2 \approx 9.870$이다.) 이로써 $\frac{22}{7}$이 π의 상한임이 증명된다는 점에 주목하자. 전혀 다른 적분을 다루는 Section 4.3에서는 이 값이 π와 같지 않음을 보인다.

돌아보기

- **일반적인 부등식, 구체적인 함수.** 시험 함수를 하나 고르자 모든 함수에 관한 명제가 하나의 수에 관한 명제로 바뀌었다.

- **상수배 조정.** $(*)$의 양변은 같은 비율로 바뀌므로, 각 함수족에서 자유로운 상수를 하나로 고정할 수 있었다.
- **더 좋은 시험 함수가 더 좋은 한계를 준다.** 시험 함수가 극단적인 경우인 $\sin x$에 가까울수록 부등식은 등호에 가까워지고, 추정도 더 좋아진다(그림 3.7.1).

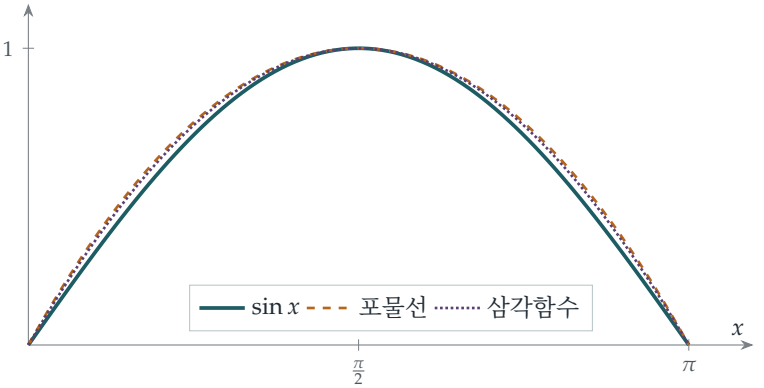


그림 3.7.1 이 절에 나온 세 함수를 최댓값이 1이 되도록 조정한 그래프: $(*)$에서 등호가 성립하는 극단적인 경우 $\sin x$(실선), $\pi^2 \le 10$을 주는 포물선 $x(\pi - x)$(파선), $\pi \le \frac{22}{7}$을 주는 $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1$(점선). 두 시험 함수 모두 $\sin x$에 매우 가깝기 때문에 한계가 이렇게 좋다.

숨은 수학

푸리에 급수를 이용한 증명

$(*)$는 왜 참일까? 대학에 가면 $[0, \pi]$에서 정의되고 양 끝에서 0이 되는 적당한 함수는 모두 **푸리에**(*Fourier*) **사인 급수**(*Fourier sine series*)

$$\mathrm{f}(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots .$$

로 쓸 수 있다는 것을 배운다. $m \neq n$이면 $\int_0^\pi \sin mx \sin nx \, dx = 0$이므로, 제곱하여 적분하면 교차항이 모두 사라져

$$\int_0^\pi \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots\right), \qquad \int_0^\pi (\mathrm{f}')^2 = \frac{\pi}{2}\left(1^2 b_1^2 + 2^2 b_2^2 + 3^2 b_3^2 + \cdots\right).$$

을 얻는다. 오른쪽 식의 각 항은 왼쪽 식의 대응하는 항보다 크거나 같으므로 $(*)$가 증명되고, 등호는 f가 $\sin x$의 상수배일 때만 성립한다는 것도 알 수 있다. 문제의 소문항 (i)은 항이 하나뿐인 경우이다.

진동하는 현과 양자 입자

비 $\int (f')^2 / \int f^2$를 **레일리 몫**(*Rayleigh quotient*)이라 하며, $(*)$는 0과 π에서 고정된 함수에 대해 이 비의 가능한 최솟값이 1이라는 것을 말한다. 이 수에는 물리적인 의미가 있다. 양 끝이 고정된 현에서 $\int (f')^2$는 늘어남에 따른 에너지를, $\int f^2$는 변위의 크기를 나타내며, 이 비의 최솟값이 현이 낼 수 있는 가장 낮은 음을 결정한다. 양자역학(quantum mechanics)에서는 같은 최솟값이 상자에 갇힌 입자의 가장 낮은 에너지이다. 양 끝이 고정된 파동은 휘어질 수밖에 없으므로 이 에너지는 0이 될 수 없다. 레일리 경(Lord Rayleigh)은 바로 이 방법, 즉 시험 함수를 추측하여 비를 계산하는 방법으로 진동계의 진동수를 추정했다. 극단적인 경우가 최솟값을 주므로 어떤 추측이든 실제 최저 진동수의 상한을 주며, 좋은 추측은 매우 정확한 상한을 준다.

변분법

적분의 비를 최소로 만드는 함수를 찾는 것은 **변분법**(*calculus of variations*)의 문제로, 여기서 미지의 대상은 수가 아니라 함수 전체이다. 이 경우의 최소화 함수 $\sin x$는 미분방정식(differential equation) $f'' + f = 0$을 만족하는데, 이것은 우연이 아니다. 적분을 최소화하면 언제나 최소화 함수에 대한 미분방정식이 나온다. 이 아이디어는 Section 4.7에서 다시 다룬다.

사고 기술

시험 함수

어떤 함수족의 모든 함수에 대해 성립하는 부등식을 교묘하게 고른 함수에 적용하면 특정한 수에 관한 정보를 얻을 수 있다.

핵심은 고르는 솜씨에 있다. 극단적인 경우에 가까운 시험 함수(test function)는 거의 날카로운 결과를 준다. 이 아이디어는 고윳값 추정에서 유한 요소법(finite element method)에 이르기까지 해석학, 물리학, 공학 전반에 걸쳐 쓰인다.

더 도전하기

1 **사차식.** $(*)$에 $f(x) = x^2(\pi - x)^2$을 대입하라. 이 함수로는 $\pi^2 \le 12$밖에 얻지 못함을 보여라. 이 시험 함수가 포물선보다 나쁜 이유는 무엇인가? (그 모양을 $\sin x$와 비교해 보라.)

2 **두 사인파.** $f(x) = \sin x + \sin 2x$에 대해 양변을 직접 계산하여 $(*)$를 확인하라.

3 **다른 구간.** 치환을 이용하여 $g(0) = g(L) = 0$이면 $\displaystyle\int_0^L g^2 \le \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L (g')^2$임을 보여라. 이것은 길이가 다른 현에 대해 무엇을 말해 주는가?

4 **레일리의 방법.** 심화 $f(x) = x(\pi - x) + \lambda x^2(\pi - x)^2$으로 놓고, π^2에 대한 한계가 가장 좋아지도록 λ를 정하라. (계산이 매우 복잡하므로 컴퓨터 대수 시스템을 쓰면 도움이 된다.)

더 읽을거리

- **T. W. Körner, *Fourier Analysis*** (Cambridge University Press). 케임브리지의 해석학자가 쓴, 푸리에 급수와 그 응용을 폭넓게 풀어낸 훌륭한 책이다.
- **하디(Hardy), 리틀우드(Littlewood), 포여(Pólya), *Inequalities*** (Cambridge University Press). 부등식에 관한 책으로, 7장에서 비르팅거 부등식과 그와 관련된 부등식들을 다룬다.
- **리처드 파인만(Richard Feynman), *The Feynman Lectures on Physics*,** 제II권 19장 ("The principle of least action", 최소 작용의 원리). 적분을 최소화하는 문제를 처음부터 끝까지 물리적 직관과 함께 다룬 파인만의 강의이다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.

3.8 덧셈 법칙으로 정해지는 함수

문제

STEP III 2019, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

도입

e^x가 무엇인지 어떻게 아는가? 학교에서는 복리 이자를 통해, 또는 자기 자신이 도함수(derivative)인 함수로, 또는 $\lim(1+x/n)^n$으로 소개한다. 이 문제는 또 다른 답을 제시한다. e^{kx}는 덧셈을 곱셈으로 바꾸는, 즉 $\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$를 만족하는 **유일한** 미분가능(differentiable) 함수이다. 이 규칙 하나와 수 $\mathrm{f}'(0)$ 하나만으로 함수가 완전히 결정된다.

두 번째 부분은 더 낯선 규칙 $g(x+y)=\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}$에 대해 같은 일을 한다. 이 식이 낯익어 보인다면 그럴 만하다. 이것은 빛의 속도를 1로 놓았을 때, 특수 상대성 이론(special relativity)에서 속도를 더하는 아인슈타인(Einstein)의 규칙이다. 이 규칙이 강제하는 함수는 tanh이며, 이것이 어떤 것도 빛의 속도 이상으로 가속될 수 없는 이유를 설명해 준다.

시작하기 전에

$\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$처럼 미지수가 함수인 방정식을 **함수방정식**(*functional equation*)이라고 한다.

생각해 보기 이 방정식은 **모든** x와 y에 대해 성립한다. 가장 먼저 시도해 볼 만한 유용한 것은 무엇인가?

특수한 값이다. $y=0$(또는 $x=y$, 또는 $y=-x$)으로 놓으면 적은 노력으로 많은 정보를 얻을 때가 많다. 두 부분 모두 이렇게 시작한다.

차근차근 풀기

1단계 0에서의 값

$x = y = 0$을 대입하면 $f(0) = f(0)^2$이므로 $f(0) = 0$ 또는 1이다.

> **생각해 보기** $f(0) = 0$이면 무엇이 잘못되는가?

$f(0) = 0$이면 $y = 0$을 대입하여 모든 x에 대해 $f(x) = f(x)f(0) = 0$을 얻는다. 그러면 f는 항등적으로 0이고 $f'(0) = 0$이 되어 $f'(0) = k \neq 0$에 모순이다. 따라서 $f(0) = 1$이다. ■

2단계 0에서의 미분계수로부터 모든 점에서의 도함수 구하기

> **생각해 보기** $(*)$에서 $f(x+h) = f(x)f(h)$로 써 보자. 극한 밖으로 무엇을 꺼낼 수 있는가?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \\ &= f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f(x)\, f'(0) = k\, f(x). \end{aligned}$$ ■

함수방정식 덕분에 0 근처에서의 성질을 다른 모든 점으로 옮길 수 있다.

3단계 $f' = kf$ 풀기

$u(x) = f(x)e^{-kx}$를 생각하자. 그러면 $u'(x) = \big(f'(x) - kf(x)\big)e^{-kx} = 0$이므로 u는 상수이고, $u(0) = f(0) = 1$이다. 따라서

$$f(x) = e^{kx}.$$ ■

(변수분리(separation of variables)로 $\int \frac{df}{f} = \int k\,dx$를 계산해도 같은 답을 얻지만, 이때는 $f(x) \neq 0$이 필요하다. u를 쓰는 요령은 이런 걱정을 피하게 해 준다.)

4단계 두 번째 규칙

> **생각해 보기** g에 대한 규칙에 $y = 0$을 대입해 보자. 이것으로 $g(0)$에 대해 무엇을 알 수 있는가? $|g(x)| < 1$은 어디에서 쓰이는가?

$y = 0$이면 $g(x)\big(1 + g(x)g(0)\big) = g(x) + g(0)$이고, 이를 정리하면 $g(0)\big(g(x)^2 - 1\big) = 0$이다. $|g(x)| < 1$이므로 괄호 안은 결코 0이 아니고, 따라서 $g(0) = 0$이다.

잠깐, 직접 해 보기 이제 규칙을 이용해 $g(x+h)-g(x)$를 계산하고 정리한 다음, h로 나누고 $h\to 0$으로 보내 보자.

$$g(x+h)-g(x)=\frac{g(x)+g(h)-g(x)-g(x)^2g(h)}{1+g(x)g(h)}=\frac{g(h)\bigl(1-g(x)^2\bigr)}{1+g(x)g(h)}.$$

h로 나눈다. $h\to 0$일 때 $\frac{g(h)}{h}=\frac{g(h)-g(0)}{h}\to g'(0)=k$이고, $g(h)\to g(0)=0$(미분가능한 함수는 연속이다)이므로 분모는 1로 수렴한다. 따라서

$$g'(x)=k\bigl(1-g(x)^2\bigr). \qquad \blacksquare$$

5단계 미분방정식 풀기

생각해 보기 변수를 분리하자. $|g|<1$에서 도함수가 $\frac{1}{1-g^2}$인 함수는 무엇인가?

$|g|<1$이므로 나눌 수 있다: $\dfrac{g'}{1-g^2}=k$. 함수 $\operatorname{artanh} g=\frac{1}{2}\ln\frac{1+g}{1-g}$의 도함수는 $\frac{1}{1-g^2}$이므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{artanh} g(x)=k$이고 $\operatorname{artanh} g(x)=kx+C$이다. $g(0)=0$에서 $C=0$이므로

$$g(x)=\tanh kx. \qquad \blacksquare$$

확인: 덧셈정리 $\tanh(A+B)=\dfrac{\tanh A+\tanh B}{1+\tanh A\tanh B}$는 주어진 규칙과 정확히 같다.

돌아보기

- **특수한 값부터.** $y=0$을 대입하여 $f(0)$과 $g(0)$을 구했다.
- **한 점에서 모든 점으로.** 덧셈 법칙이 0에서의 미분계수를 모든 x로 옮겨 주었고, 이로써 함수방정식이 미분방정식(differential equation)으로 바뀌었다.
- **유일성(uniqueness).** 이 논증은 e^{kx}와 $\tanh kx$가 조건을 만족함을 확인하는 데 그치지 않고, 이들이 유일한 가능성임을 보인다. 바로 이 점이 함수방정식을 하나의 정의로 만들어 준다.

숨은 수학

상대성 이론에서의 속도

일상생활에서 기차가 속도 u로 움직이고 그 안에서 앞쪽으로 속도 v로 걸어가면, 지면에 대한 속도는 $u+v$이다. 아인슈타인은 1905년에 이것이 근사일 뿐임을 보였다. c를 빛의 속도라 할 때, 올바른 규칙은

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv/c^2}.$$

이다. 속도를 c에 대한 비율로 나타내면, 이것은 정확히 g에 대한 규칙이다. 우리의 결과는 각 속도를 $v = \tanh\phi$로 쓰면, 속도의 합성이 ϕ 값들을 **더하는** 것이 된다는 뜻이다. 양 $\phi = \operatorname{artanh} v$를 **신속도**(*rapidity*)라고 한다. 로켓 엔진이 한 번 가속할 때마다 일정한 양의 신속도가 더해지지만, 모든 ϕ에 대해 $\tanh\phi < 1$이므로 속도는 빛의 속도에 점점 가까워질 뿐 결코 도달하지 못한다(그림 3.8.1). $0.9c$와 $0.9c$를 합성하면 $1.8c$가 아니라 $\frac{1.8}{1.81}c \approx 0.9945c$가 된다.

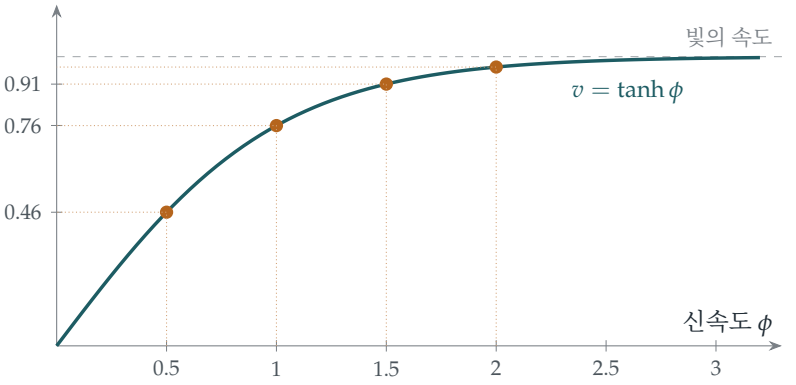


그림 3.8.1 신속도에 따른 속도(빛의 속도에 대한 비율). 엔진이 같은 가속을 할 때마다 주어지는 것처럼 신속도를 같은 간격으로 늘리면, 속도는 0.46, 0.76, 0.91, 0.96, ...으로 점점 적게 증가하며 결코 1에 도달하지 않는다.

코시의 함수방정식

가장 단순한 함수방정식은 $f(x+y) = f(x) + f(y)$로, 1821년에 코시(Cauchy)가 연구하였다. f가 미분가능하면 이 문제의 방법으로 $f(x) = kx$임을 보일 수 있다. 사실 연속성(continuity)만으로도 충분하다. 그러나 정칙성 가정이 전혀 없으면, 그래프가 평면 전체에 조밀하게 흩어져 있는 전혀 다른, 극도로 기괴한 해들이 존재한다. Georg Hamel이 1905년에 이러한 해를 구성하였는데, 그 구성에는 **선택공리**(*axiom of choice*)가 필요하며, 그 중 어느 것도 명시적으로 적어 낼 수 없다. 이 문제가 f가 미분가능하다고 굳이 못 박는 이유

중 하나가 이것이다. 이 가정은 형식적인 것이 아니다.

준동형사상

$f(x+y) = f(x)f(y)$는 f가 실수의 덧셈을 양의 실수의 곱셈으로 바꾸면서 두 구조를 모두 보존한다는 뜻이다. 대학 1학년 대수학의 언어로 말하면, f는 $(\mathbb{R}, +)$에서 $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$로 가는 **군 준동형사상**(*group homomorphism*)이고, 로그는 그 역함수이다. 수학에서 가장 중요한 함수들 중 상당수가 이런 식으로, 즉 그것이 보존하는 구조로 특징지어진다. Section 7.6에서는 tanh의 기하학적 의미를 만나게 된다. tanh는 "쌍곡각"을 재며, 그 덧셈 법칙은 쌍곡 회전의 합성에서 나온다.

사고 기술

성질로 함수를 정의하기

공식 대신 함수가 따르는 규칙으로 함수를 기술하고, 그 규칙을 따르는 함수가 하나뿐임을 증명한다.

수학자들은 exp, sin, cos를 비롯한 많은 함수를 흔히 이렇게 생각한다. 공식으로서가 아니라 함수방정식이나 미분방정식의 유일한 해로서 말이다. 이렇게 보면 이 함수들을 어떻게 계산하는지뿐 아니라 왜 중요한지도 알 수 있다.

더 도전하기

1 **탄젠트 규칙.** g가 미분가능하고 $g'(0) = k \neq 0$이며, 양변이 정의될 때마다 $g(x+y) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$라고 하자. $g'(x) = k(1+g(x)^2)$임을 보이고, $x = 0$ 근처에서 $g(x) = \tan kx$임을 이끌어 내어라.

2 **코시의 방정식.** f가 미분가능하고 모든 x, y에 대해 $f(x+y) = f(x) + f(y)$이면 $f(x) = kx$임을 보여라.

3 **도함수 없이.** 심화 $f(x+y) = f(x)f(y)$이고 $f(1) = a > 0$이라는 것만 가정하자. 양의 정수 n에 대해 $f(n) = a^n$임을 보이고, 다음으로 $f(1/n) = a^{1/n}$임을, 그다음 모든 양의 유리수 q에 대해 $f(q) = a^q$임을 보여라. (더 나아가려면 왜 연속성이 필요한가?)

4 **로켓 과학.** 어떤 로켓은 분사할 때마다 현재 기준틀에 대해 속도를 $0.5c$만큼 높일 수 있다. 정지 상태에서 출발할 때, 2번, 3번, 4번 분사한 후의 (출발점에 대한) 속도는 얼마인가? 신속도를 이용하여라.

더 읽을거리

- **Christopher Small, *Functional Equations and How to Solve Them*** (Springer). 함수방정식과 그 풀이법. 문제 풀이를 즐기는 사람을 위한 읽기 쉬운 입문서이다.
- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman). 시공간 물리학. 특수 상대성 이론의 고전적인 입문서로, 처음부터 끝까지 신속도를 사용한다.
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press). 야심 찬 이들을 위한 미적분. 지수함수와 삼각함수를 그 성질로부터 정의하며, 바로 이 절의 정신과 같다.

3.9 새로운 함수 만들기

문제

STEP II 2021, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

$e^{-x} = 5x$를 풀 수 있을까? 계산기에 있는 어떤 함수로도 풀 수 없다. 식을 이리저리 정리해 보아도 소용없다. x가 지수함수의 안과 밖에 동시에 갇혀 있기 때문이다. 시행착오(trial and improvement)로 수치적인 답을 찾을 수는 있지만, "공식"은 없다.

정말 그럴까? 이 문제는 대담한 한 걸음을 내딛는다. 어떤 방정식들의 모임이 알려진 함수로 나타낸 해를 갖지 않는다면, 그 방정식들을 푸는 **새로운 함수를 만들어 내는** 것이다. 수학자들이 $\sqrt{x}$(x^2의 역함수), $\ln x$(e^x의 역함수), $\arcsin x$를 가지고 한 일이 바로 이것이다. 여기서 새로 등장하는 함수는 xe^x의 역함수(inverse function)로, 오늘날 **람베르트 W 함수**(Lambert W function)라고 부른다. 이 함수만 있으면 $x^x = 10$에서부터 물리 법칙에 이르기까지 놀라울 만큼 다양한 방정식을 정확하게 풀 수 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 방정식을 "푼다"는 것은 정확히 무슨 뜻일까? $x = \sqrt{2}$는 $x^2 = 2$의 해일까, 아니면 단지 그 해에 붙인 이름일까?

둘 다이다. $\sqrt{2}$는 "제곱하면 2가 되는 양수"에 붙인 이름이다. 우리가 이것을 답으로 받아들이는 까닭은 함수 $\sqrt{\ }$를 잘 이해하고 있고, 값을 계산하기 쉬우며, 그 성질이 알려져 있기 때문이다. 어떤 답을 "공식"으로 볼지는 우리가 어떤 함수들에 이름을 붙이기로 합의했는지에 달려 있다. 이 문제는 그 목록에 함수를 하나 더 보탠다.

차근차근 풀기

1단계 **곡선** $y = xe^x$

$\frac{dy}{dx} = e^x + xe^x = (1+x)e^x$이고, 이는 $x = -1$에서만 0이 되며, 이때 $y = -e^{-1}$이다. 도함수(derivative)는 $x < -1$에서 음수이고 $x > -1$에서 양수이므로, 이 점은 극소(minimum)이다.

> ? **생각해 보기** $x \to +\infty$일 때와 $x \to -\infty$일 때 xe^x는 어떻게 될까? 곡선은 좌표축과 어디에서 만날까?

$x \to \infty$일 때 $xe^x \to \infty$이다. $x \to -\infty$일 때는 지수적 감소가 일차적 증가를 이기므로 $xe^x \to 0$이며, 아래쪽에서 0에 다가간다. 곡선은 원점을 지난다. 따라서 곡선은 x축의 음의 부분 바로 아래에서 들어와 최솟점 $(-1, -\frac{1}{e})$까지 내려간 다음, $(0,0)$을 지나 위로 가파르게 솟아오른다(그림 3.9.1).

2단계 **역함수**

역함수를 가지려면 f는 일대일(one-to-one)이어야 하므로, 순증가하거나 순감소하는 구간으로 정의역을 제한해야 한다. 오른쪽 부분을 포함하는 그런 구간 가운데 가장 큰 것은 $[-1, \infty)$이므로 $a = -1$이다. $[-1, \infty)$에서 f는 $-\frac{1}{e}$에서 ∞까지 증가하므로, 역함수 g는 $[-\frac{1}{e}, \infty)$에서 정의되고, $g(-\frac{1}{e}) = -1$에서 시작하여 증가하면서 $g(0) = 0$을 지나고, 천천히 커진다(큰 x에 대해서는 $\ln x$보다도 더 천천히 커진다). 그 그래프는 $y = xe^x$의 오른쪽 부분을 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 것이며, $(-\frac{1}{e}, -1)$에서 수직인 접선(tangent)을 가진다.

g를 정의하는 성질은 다음과 같다.

$$g(z)\, e^{g(z)} = z, \qquad g(z) \geq -1.$$

따라서 (iii)의 모든 소문항에 대한 전략은 같다. 방정식을 (어떤 것) $e^{(\text{같은 그것})}$ = (어떤 수)의 꼴로 정리하는 것이다.

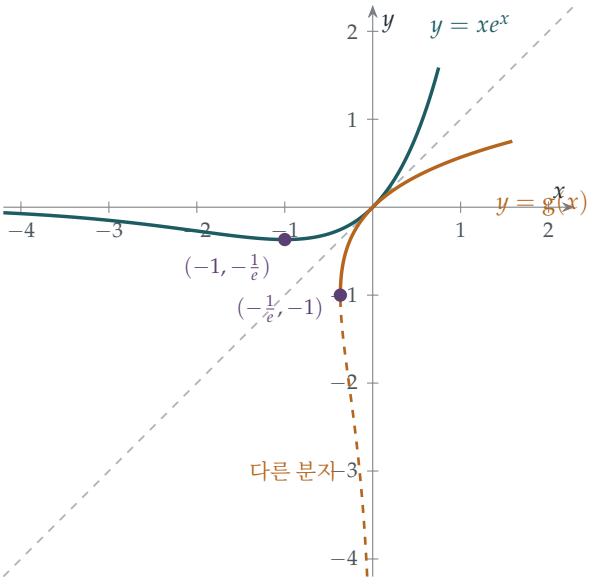


그림 3.9.1 곡선 $y = xe^x$(청록색)는 $(-1, -\frac{1}{e})$에서 최솟값을 가진다. $x \geq -1$로 제한하고 $y = x$에 대하여 대칭이동하면 역함수 g(호박색 실선), 곧 람베르트 W 함수를 얻는다. 호박색 점선 곡선은 $y = xe^x$의 왼쪽 부분을 대칭이동한 것으로, 소문항 (iii)의 두 번째 근을 구할 때 필요한 두 번째 분지(branch)이다.

3단계 네 개의 방정식

(a) $e^{-x} = 5x$. 양변에 e^x를 곱하고 5로 나누면 $xe^x = \frac{1}{5}$이다. 따라서 $x = g(\frac{1}{5}) \approx 0.169$이다. $x < 0$에서 xe^x는 음수이므로 근은 모두 양수이고, $x > 0$에서 xe^x는 증가하므로 이것이 유일한 근이다.

> **생각해 보기** (b)와 (c)에서 미지수는 $x \ln x$의 꼴로 나타난다. 어떤 치환(substitution)을 하면 $x \ln x$가 ue^u 꼴이 될까?

$x = e^u$로 놓으면 $\ln x = u$이고 $x \ln x = ue^u$이다.

(b) $2x \ln x + 1 = 0$은 $ue^u = -\frac{1}{2}$가 된다. 그런데 모든 실수 u에 대하여 $ue^u \geq -\frac{1}{e} \approx -0.368$이고, $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{e}$이다. 따라서 **실근은 없다**.

(c) $3x \ln x + 1 = 0$은 $ue^u = -\frac{1}{3}$이 되고, $-\frac{1}{e} < -\frac{1}{3} < 0$이다. 높이 $-\frac{1}{3}$인 수평선은 $y = ue^u$와 **두 번** 만나는데, $u = -1$에서의 최솟점 양쪽에서 한 번씩 만난다. 오른쪽 근은 $u = g(-\frac{1}{3})$이므로

$$x = e^{g(-1/3)} \approx 0.538$$

이다. 다른 근에서는 $u < -1 < g(-\frac{1}{3})$이고, $x = e^u$는 u에 대하여 증가하므로, 우리가 구한 근은 두 근 가운데 **더 큰** 근이다. (다른 근은 약 0.220이다.)

잠깐, 직접 해 보기 이제 (d) $x = 3\ln x$를 풀어 보자. (**힌트**: 양변을 지수로 올린 다음, (어떤 것) $e^{\text{어떤 것}}$의 꼴을 만들되 그 "어떤 것"이 x의 상수배가 되도록 하라.)

(d) $x = 3\ln x$는 $e^{x/3} = x$를 뜻하므로 $xe^{-x/3} = 1$이고, 양변에 $-\frac{1}{3}$을 곱하면

$$\left(-\frac{x}{3}\right) e^{-x/3} = -\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 $-\frac{x}{3}$은 (c)에서 찾은 $ue^u = -\frac{1}{3}$의 두 해 가운데 하나이다. g로 주어지는 해를 택하면 $x = -3\,\mathrm{g}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 1.857$이다. 다른 근은 다른 해 $u < \mathrm{g}(-\frac{1}{3})$에서 나오며, 이는 더 큰 $x = -3u$를 준다. 따라서 이번에는 우리가 구한 근이 두 근 가운데 **더 작은** 근이다. (다른 근은 약 4.536이다.) ■

4단계 $x^x = 10$

양변에 로그를 취하면 $x\ln x = \ln 10$이다. $x = e^u$로 놓으면 이는 $ue^u = \ln 10$이므로 $u = \mathrm{g}(\ln 10)$이고

$$x = e^{\mathrm{g}(\ln 10)} \approx 2.506$$

이다. $\mathrm{g}(z)e^{\mathrm{g}(z)} = z$이므로 이를 $x = \dfrac{\ln 10}{\mathrm{g}(\ln 10)}$로 쓸 수도 있다. ■

돌아보기

- **없는 함수에 이름을 붙여라.** 알려진 함수로 방정식을 풀 수 없을 때, 역함수로서 새로운 함수를 정의하는 것은 정당한 방법이며, 흔히 많은 것을 밝혀 주는 방법이다.
- **표준형으로 정리하라.** (iii)과 (iv)의 모든 소문항은 $x = e^u$나 $u = -\frac{x}{3}$ 같은 치환을 써서 결국 $ue^u =$ 상수로 귀결되었다.
- **그래프로 근의 개수를 세어라.** $ue^u = c$의 해가 0개, 1개, 2개 가운데 몇 개인지는 오로지 c가 최솟값 $-\frac{1}{e}$에 대하여 어디에 있는지에만 달려 있다.

숨은 수학

오랜 역사와 최근의 이름을 가진 함수

요한 하인리히 람베르트(Johann Heinrich Lambert)는 1758년에 이런 꼴의 방정식을 연구하였고, 오일러(Euler)는 1783년에 이를 더 발전시켰다. 그러나 이 함수는 1990년대까지 표준적인 이름이 없었는데, 그때 컴퓨터 대수 시스템 Maple의 개발자들에게 이름이 필요해졌다. 1996년에 Robert Corless, Gaston Gonnet, David Hare, David Jeffrey, 그리고

도널드 커누스(Donald Knuth)는 이 함수의 성질과 응용을 정리한 논문 "On the Lambert W function"을 발표하였다. 이 논문은 수천 번 인용되었고, 이제 W는 대부분의 수학 소프트웨어에 내장되어 있다. 문제의 함수 g는 **주분지**(principal branch) W_0이다. 그림 3.9.1의 점선 곡선은 (c)와 (d)에서 두 번째 근을 주었는데, 이것이 또 하나의 실수 분지 W_{-1}이다.

W가 나타나는 곳

- **빈의 변위 법칙(Wien's displacement law).** 뜨거운 물체가 가장 강하게 복사하는 파장은 그 물체의 온도에 반비례한다. 그 비례상수는 $5(1-e^{-x})=x$를 풀어서 얻는데, 이 방정식의 양의 해는 $x=5+W\left(-5e^{-5}\right)\approx 4.965$이다. 약 5800 K인 태양이 노르스름한 흰색으로 보이고, 더 차가운 적색 왜성이 붉게 보이는 까닭이 여기에 있다.
- **거듭제곱 탑.** 무한히 쌓은 탑 $x^{x^{x^{\cdots}}}$은 $e^{-e}\le x\le e^{1/e}$일 때 수렴(converge)하고, 그 값은 $\dfrac{W(-\ln x)}{-\ln x}$이다.
- **인구 모형과 전염병 모형.** 가장 단순한 모형에서 전염병의 최종 규모와, 몇몇 성장 모형에서 주어진 인구에 도달하는 데 걸리는 시간은 모두 W로 주어진다.

초등함수

W는 정말 새로운 함수일까, 아니면 exp, ln, 거듭제곱근, 삼각함수를 써서 나타낼 수 있을까? 이 함수는 진정으로 새로운 함수이다. 1830년대의 리우빌(Joseph Liouville)까지 거슬러 올라가는 정리에 따르면 W는 **초등함수**(elementary function)가 아니다. 같은 이론에 따르면 $\int e^{-x^2}\,dx$처럼 겉보기에 순진해 보이는 어떤 적분들은 초등함수로 계산할 수 없으며, 정규분포에 고유한 특수함수가 필요한 것도 이 때문이다.

사고 기술

해로서의 역함수

f를 일대일이 되도록 제한하기만 하면, 방정식 $f(x)=c$의 해는 $x=f^{-1}(c)$이다. 어떻게 제한하느냐에 따라 어떤 해를 얻는지가 정해진다.

겉보기에 달라 보이는 많은 방정식이 사실은 모습만 바꾼 같은 방정식이다. 공통된 꼴을 드러내 주는 치환을 찾는 것이 핵심 단계이다.

더 도전하기

1 **2, 4, 그리고 하나 더.** 방정식 $x^2 = 2^x$는 자명한 해 $x = 2$와 $x = 4$를 가진다(Section 3.5와 비교해 보라). 이 방정식이 음의 해도 가지며, 그 해가

$$x = -\frac{2}{\ln 2}\, g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx -0.767$$

임을 보여라.

2 **도함수.** $g(x)e^{g(x)} = x$를 음함수 미분(implicit differentiation)하여, $x \neq 0$일 때

$$g'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + g(x))}$$

임을 보여라. $x = -\frac{1}{e}$에서는 어떤 일이 일어나는가?

3 **적분.** 치환 $x = we^w$를 이용하여 $\int_0^e g(x)\,dx = e - 1$임을 보여라.

4 **탑.** 탑 $T = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$이 수렴한다고 가정하고, $T = \sqrt{2}^T$임을 보인 다음, $T = 2$ 또는 $T = 4$임을 이끌어 내어라. 어느 쪽일까? (수열 $t_1 = \sqrt{2}$, $t_{n+1} = \sqrt{2}^{t_n}$의 몇몇 항을 계산해 보고, Section 2.2의 거미줄 그림(cobweb diagram)을 생각해 보라.)

더 읽을거리

- **Robert Corless et al., "On the Lambert W function"**, *Advances in Computational Mathematics* 5 (1996). 이 함수에 이름을 붙인 논문이다. 이 절을 공부했다면 앞부분은 읽을 수 있다.
- **Brian Hayes, "Why W?"**, *American Scientist* 93 (2005). 이 함수의 역사와 쓰임새를 다룬 생동감 있는 에세이("왜 W인가?")이다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Brian Conrad, "Impossibility theorems for elementary integration"**. 리우빌의 이론을 설명하는 강의 노트(초등 적분의 불가능성 정리)로, 온라인에서 볼 수 있다. 고급 수준이다.

우리가 배운 것

우리는 $1 = 2$라는 "증명(proof)"과 세 가지 질문으로 이 장을 시작했다. 논증이 옳다는 것을 어떻게 알 수 있는가, 부등식(inequality)을 어떻게 증명하는가, 그리고 함수(function)란 진정 무엇인가. 이 장의 아홉 문제가 우리에게 가르쳐 준 것을 정리해 보자.

1. 논증이 옳다는 것을 어떻게 아는가?

Section 3.1에서는 점검 목록을 얻었다. 매 단계에서 세 가지를 묻는다. **계산이 맞는가? 그 단계가 논리적으로 따라 나오는가? 말하지 않은 채 가정한 것은 무엇인가?** 그곳에서 본 오류들은 전형적인 것이었다. 두 정류점(stationary point)에서의 값을 비교하는 것만으로는 어느 쪽이 최댓값인지 알 수 없다. 무한한 정의역(domain)에서는 정류값이 함수의 범위를 제한하지 않는다. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)는 피적분함수(integrand)가 연속이어야 성립한다. 그리고 논증은 우연히 "맞아 보이는" 답에 도달할 수도 있다.

같은 경계심은 이 장의 나머지 전체를 관통했다. Section 3.7에서는 가정(hypothesis) $f(0) = f(\pi) = 0$을 빼면 부등식이 깨진다는 것을 반례(counterexample)로 보였다. Section 3.8에서는 함수가 미분가능(differentiable)하다는 가정이 핵심이었다. 이 가정이 없으면 코시(Cauchy)의 함수방정식(functional equation)은 아무도 써 낼 수 없는 기괴한 해를 갖는다. 그리고 Section 3.6와 Section 3.3에서는 등호 조건(equality condition)을 통해 어떤 한계가 최선인지를 알 수 있었다. 이것이야말로 신중한 수학자라면 언제나 던지는 종류의 질문이다.

2. 부등식은 어떻게 증명하는가?

우리는 고전적인 부등식들을 여러 방향에서 만났고, 그것들이 서로 어떻게 연결되는지 보았다.

- **제곱은 음이 아니다.** 두 수에 대한 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)은 $(a-b)^2 \geq 0$에 지나지 않는다. 코시의 전진-후진 귀납법(forward–backward induction)은 이로부터 일반적인 경우를 세웠다(Section 3.2).
- **볼록성(convexity).** 오목(concave)한 곡선은 그 현(chord)보다 위에 있다. 이 한 가지 사실로부터 옌센(Jensen) 부등식이 나오고, 로그에 적용하면 산술-기하 평균 부등식이 한 줄로 나오며, $\sin x$에 적용하면 삼각형에 대한 날카로운 부등식이 나온다(Section 3.3).

- **넓이.** 곡선 아래의 넓이와 곡선 옆의 넓이를 합하면 직사각형을 덮는다. 여기서 영(Young) 부등식이 나오고, 이것은 횔더(Hölder) 부등식과 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식으로 이어진다(Section 3.4).
- **그래프의 모양.** a^b와 b^a의 비교를 두 점에서 $\frac{\ln x}{x}$의 값을 비교하는 문제로 바꾸어 써서 π^e와 e^π의 대소를 결정했다(Section 3.5).
- **보간(interpolation)과 삼각부등식(triangle inequality).** 도함수를 함숫값으로 나타낸 다음 항별로 한계를 잡아 이차식에 대한 마르코프(Markov) 부등식을 얻었다(Section 3.6).
- **시험함수(test function).** 일반적인 부등식을 교묘하게 고른 함수에 적용하여 $\pi^2 \leq 10$과 $\pi \leq \frac{22}{7}$를 얻었다(Section 3.7).

이 가운데 무엇을 쓸지 고르는 것은 연습을 통해 길러지는 기술이다. 대략적인 지침은 다음과 같다. 곱과 합이 보이면 산술-기하 평균 부등식을, 함숫값의 평균이 보이면 옌센 부등식을, 함수와 그 역함수(inverse function)가 보이면 영 부등식을 떠올린다. 같은 꼴의 두 식을 비교해야 한다면 그 뒤에 숨은 하나의 함수를 찾아본다.

3. 함수란 진정 무엇인가?

마지막 두 절은 이 질문에 두 가지 방식으로 답했다. Section 3.8에서 e^{kx}와 $\tanh kx$는 식으로 주어진 것이 전혀 아니었다. 이 함수들은 특정한 덧셈 법칙을 만족하는 **유일한** 미분가능한 함수였다. 이것은 식보다 더 깊은 종류의 이해이다. 이 함수들이 복리(compound interest)에서도, 아인슈타인(Einstein)의 속도 덧셈(velocity addition)에서도 거듭 나타나는 이유를 설명해 주기 때문이다. Section 3.9에서는 한 걸음 더 나아가 xe^x의 역함수라는 함수를 **발명**했다. 우리가 가진 함수들만으로는 자연스러운 방정식족 하나를 풀기에 충분하지 않았기 때문이다. 계산기에 있는 모든 함수도 한때는 같은 방식으로 새로운 함수였다.

4. 엄밀성과 부등식을 위한 도구 모음

방법	사용한 곳
모든 단계와 모든 가정 점검하기	그럴듯하지만 틀린 논증(3.1)
국소적 행동과 전역적 행동	정류점과 무한대에서의 극한(3.1)
전진-후진 귀납법	산술-기하 평균 부등식(3.2)
추가 항으로 채우기	산술-기하 평균 부등식(3.2, 3.3)
옌센 부등식	삼각형; 산술-기하 평균 부등식(3.3)
넓이 비교하기	영 부등식(3.4)
변수를 분리해 하나의 함수로 모으기	π^e와 e^π의 비교(3.5)
삼각부등식, 등호가 성립하는 경우	마르코프 부등식(3.6)
시험함수	$\pi^2 \leq 10$ (3.7)
함수방정식	e^x와 $\tanh x$ (3.8)
역함수와 치환	W 함수(3.9)

다음으로

- Section 3.7에서 살짝 엿본 변분법(calculus of variations)은 Section 4.7의 주제이다.
- tanh와 그 덧셈 법칙 뒤에 있는 기하는 Section 7.6에서 다룬다.
- 제4장에서는 이 장의 신중한 태도를 적분 자체에 적용하며, 적분이 실제로 무엇인지에서 출발한다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***: 부등식에 대한 최고의 입문서로, 전체가 문제들로 구성되어 있다.
- **Daniel Velleman, *How to Prove It***: 올바른 증명을 쓰는 법에 대한 체계적인 안내서이다.
- **Michael Spivak, *Calculus***: 기초부터 쌓아 올린 엄밀한 미적분학 책으로, 많은 케임브리지(Cambridge) 학생들이 입학 전 여름에 읽는다.
- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics***: 무엇이 잘못되었는지 찾아내는 연습을 위한 책이다.

폰 노이만(von Neumann)은 수학에서는 무언가를 이해하는 것이 아니라 그저 익숙해질 뿐이라고 농담한 적이 있다. 이 말에는 일리가 있다. 이 장의 정확한 정의와 신중한 논증은 처음에는 낯설게 느껴질 수 있다. 그러나 바로 그것에 익숙해지는 과정이 계산할 줄 아는 학생을 확신할 줄 아는 수학자로 바꾸어 놓는다. $1 = 2$라는 증명에 다시는 속지 않을 것이다. 수

학 학위 과정의 목표는 그보다 더 미묘한 모든 오류도 그만큼 쉽게 보이도록 만드는 것이다.

더 도전하기 해답

다음은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계만 제시하므로 이를 이용해 자신의 풀이를 확인할 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 제대로 풀어 보아라.

3.1 오류 찾기

1. x가 -1에서 1까지 움직이는 동안 0을 지나는데, 그곳에서 $t = 1/x$는 정의되지 않는다. 즉 치환(substitution)이 이 구간에서 연속(continuous)이 아니다. 올바르게 계산하면 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$이고($x = \tan\theta$를 이용한다), 반면 $\int_{-1}^{1} \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$이다.

2. (a) 참: 양변의 로그(logarithm)가 모두 $\ln a \ln b$이다. (b) 거짓: $\theta = 0$에서 $\cos 0 = 1 \neq \sin 1$이다. (실제로 $|\sin\theta \pm \cos\theta| \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 두 값은 결코 같지 않다.) (c) 거짓: 상수가 아닌 다항식(polynomial)은 유계(bounded)가 아니고, 상수는 1과 -1 모두에 10^{-6} 이내로 가까울 수 없다. (d) 참: 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $x^4 + x^{-4} \geq 2$이고, 등호는 $x = 1$일 때 성립한다.

3. $n = 1$에서 $n = 2$로 넘어가는 단계가 성립하지 않는다. 말 두 마리에서 "앞의 1마리"와 "뒤의 1마리"는 겹치지 않는다.

4. $\int_{\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2$이므로, 대칭성에 의해 이 적분은 (극한으로서) 존재하고 그 값은 4이다.

3.2 AM–GM, 거꾸로

1. $a_1, \ldots, a_{n-1}$의 평균(mean)이 A, 기하평균(geometric mean)이 G라 하고, n번째 수로 A를 추가한다. 평균은 여전히 A이므로 $(G^{n-1}A)^{1/n} \leq A$이고, 이로부터 $G \leq A$를 얻는다.

2. 이 $n+1$개의 수는 평균이 $1 + \frac{1}{n+1}$, 기하평균이 $(1+\frac{1}{n})^{n/(n+1)}$이고, 모두 같지는 않으므로 등호가 없는 엄격한 부등식(strict inequality)이 성립한다. 양변을 $n+1$제곱한다.

3. 각 면의 넓이는 ab, bc, ca이고 $S = 2(ab + bc + ca)$이다. 산술-기하 평균 부등식에 의해 $\frac{S}{6} \geq (abc)^{2/3} = V^{2/3}$이고, 등호는 $ab = bc = ca$, 즉 정육면체일 때 성립한다.

4. $1/a_i$에 산술-기하 평균 부등식을 적용하면 $\frac{1}{n}\sum \frac{1}{a_i} \geq \frac{1}{G}$이다. 양변의 역수를 취한다.

3.3 볼록성의 힘

1. $\mathrm{f}'' < 0$이면 기울기가 감소하므로 곡선은 각 현(chord)보다 위에 있다. $t = \frac{1}{3}$으로 두면 $\mathrm{f}\left(\frac{u+v+w}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\mathrm{f}(u) + \frac{2}{3}\mathrm{f}\left(\frac{v+w}{2}\right) \geq \frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(u) + \mathrm{f}(v) + \mathrm{f}(w)\big)$이다.

2. $(\ln\sin x)'' = -\mathrm{cosec}^2 x < 0$이므로 $\ln\sin$은 $(0, \pi)$에서 오목(concave)하다. 옌센(Jensen) 부등식에 의해 $\frac{1}{3}\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln\sin\frac{\pi}{3}$이므로, 곱은 최대 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$이다.

3. $(0, \frac{\pi}{2})$에서 $(\tan x)'' = 2\sec^2 x \tan x > 0$이므로, 옌센 부등식에 의해 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$이다.

4. $(x^2)'' = 2 > 0$이므로 옌센 부등식에 의해 주어진 부등식이 성립한다. 이 부등식은 분산(variance) $\frac{1}{n}\sum a_i^2 - \bar{a}^2$이 음이 아니라는 뜻이다.

3.4 부등식을 증명하는 넓이

1. $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\mathrm{f} = \sin$으로 두면 $b = \mathrm{f}(a)$일 때 등호가 성립한다. $a = \arcsin t$, $b = t$로 두면 $t\arcsin t = (1 - \cos(\arcsin t)) + \int_0^t \arcsin y \, \mathrm{d}y$이다. 결과의 우변을 미분하면 $\arcsin t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$이다.

2. $p = q = 2$인 영(Young) 부등식에 의해 $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$이다. $\sum a_i^2 = \sum b_i^2 = 1$이면 이를 모두 더하여 $\sum a_i b_i \leq 1$을 얻는다. 일반적인 경우에는 $a_i / \sqrt{\sum a_j^2}$와 $b_i / \sqrt{\sum b_j^2}$에 이를 적용한다.

3. $\int_0^a (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = e^a - 1 - a$이고 $\int_0^b \ln(1+y)\,\mathrm{d}y = (1+b)\ln(1+b) - b$이다. 등호는 $b = e^a - 1$일 때 성립한다.

4. $t = 1$: 1.571 대 1; $t = 2$: 0.524 대 0.268; $t = 10$: 0.1002 대 0.0501. t가 크면 $t - \sqrt{t^2-1} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}} \approx \frac{1}{2t}$이다. 이 한계(bound)는 $a = 0$에서 나오는데, 이때 $(*)$는 단지 $0 \leq \int_0^b \arcsin y \, \mathrm{d}y$라는 것만 말해 준다. b가 작으면 이 넓이는 약 $\frac{b^2}{2}$로 $b\arcsin b \approx b^2$의 절반이며, 이를 버리면 인수 2를 잃게 된다.

3.5 π^e인가, e^π인가?

1. $n^m = m^n$은 $h(n) = h(m)$을 뜻한다. h는 $(1, e)$에서 증가하고 그 이후로는 감소하므로 두 수 중 하나는 e보다 작다. ($h(1) = 0$이라는 값은 다시 나타나지 않으므로) 그 수는 2여야 하고, 그러면 다른 하나는 4이다. 가능한 쌍은 $\{2, 4\}$뿐이다.

2. $e < 3 < \pi$이고 그 범위에서 h는 감소하므로 $h(3) > h(\pi)$, 즉 $3^\pi > \pi^3$이다. $\frac{9}{4}$와 $\sqrt{5}$는 모두 e보다 작고 $\frac{9}{4} > \sqrt{5}$이므로 $h(\frac{9}{4}) > h(\sqrt{5})$이며, 이로부터 두 번째 부등식을 얻는다. $1 < x < 2$일 때는 $3 < x + 2 < 4$이므로 $h(x) < h(2) = h(4) < h(x+2)$이고, 따라서 $x^{x+2} < (x+2)^x$이다. 마지막으로 $9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$이고 $\sqrt{2}^{\,9} = 16\sqrt{2} = (2\sqrt{2})^3$이

다. $e^2 < 8$이므로 $e < 2\sqrt{2} < 3$이고, 이 범위에서 h는 감소하므로 $h(2\sqrt{2}) > h(3)$이다. 이로부터 $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$를 얻으므로 $\sqrt{2}^9$이 더 크다.

3. $e^{\pi/e-1} > \frac{\pi}{e}$이므로 $e^{\pi/e} > \pi$이다. 양변을 e제곱한다.

3.6 기울기의 한계

1. 양변은 모두 이차식(quadratic)이고 $x = -1, 0, 1$에서 값이 같으므로 서로 같다(라그랑주 보간법, Lagrange interpolation). 미분하면 $f(-1)(x - \frac{1}{2}) - 2f(0)x + f(1)(x + \frac{1}{2})$를 얻는다.

2. $[-1, 1]$에서 $|f'(x)| \le |x - \frac{1}{2}| + 2|x| + |x + \frac{1}{2}| \le 4$이고, 등호는 $x = \pm 1$에서만, 그리고 $f(1), f(-1), -f(0)$이 모두 1이거나 모두 -1일 때만 성립한다. 이차식은 이 세 값으로 결정되므로 $\pm(2x^2 - 1)$을 얻는다.

3. $T_3(\cos\theta) = \cos 3\theta$로부터 $4x^3 - 3x$를 얻고, $T_3'(1) = 12 - 3 = 9$이다. $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$로부터 $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$이고, $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$이다.

4. $-\sin\theta\, T_n'(\cos\theta) = -n\sin n\theta$이다. $\theta \to 0$일 때 $\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta} \to n^2$이다.

3.7 $\pi^2 \le 10$

1. $\int_0^\pi f^2 = \frac{\pi^9}{630}$이고 $\int_0^\pi (f')^2 = \frac{2\pi^7}{105}$이므로, $(*)$로부터 $\pi^2 \le 12$를 얻는다. 이 사차식(quartic)은 $\sin x$에 비해 양 끝 근처에서는 너무 평평하고 가운데에서는 너무 뾰족하므로, 크기에 대한 기울기의 비가 최적값에서 더 멀리 떨어져 있다.

2. $\int_0^\pi (\sin x + \sin 2x)^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$이고(교차항(cross term)의 적분은 0이다), $\int_0^\pi (\cos x + 2\cos 2x)^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$이다.

3. $g(x) = f(\pi x/L)$로 둔다. 좌변은 $\frac{L}{\pi}$배가 되고 $\int (g')^2$은 $\frac{\pi}{L}$배가 된다. 현의 경우 가장 낮은 진동수(frequency)는 $\frac{1}{L}$에 비례한다. 즉 길이를 절반으로 줄이면 음높이(진동수)가 두 배가 된다.

4. 한계 $\pi^2 \le \int (f')^2 / \int f^2$(적당한 단위에서)는 $\lambda \approx 1.133/\pi^2$에서 최소가 되며, 이때 $\pi^2 \le 9.86975$를 얻는다. 참값은 9.86960이다.

3.8 덧셈 법칙으로 정해지는 함수

1. $x = y = 0$을 대입하면 $g(0) = 0$이다. y에 대해 미분하고 $y = 0$을 대입하면 $g'(x) = k(1 + g(x)^2)$이므로 $\frac{d}{dx}\arctan g(x) = k$이고 $g(x) = \tan kx$이다.

2. y에 대해 미분하면 $f'(x + y) = f'(y)$이므로 f'은 상수 k이다. 또한 ($x = y = 0$을 대입하면) $f(0) = 0$이다.

3. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x/2)^2 \geq 0$이고, f는 결코 0이 되지 않는다(그렇지 않으면 모든 곳에서 0이 된다). 수학적 귀납법(induction)으로 $\mathrm{f}(n) = a^n$을 얻는다. $\mathrm{f}(1/n) > 0$이고 $\mathrm{f}(1/n)^n = \mathrm{f}(1) = a$이므로 $a^{1/n}$을 얻고, 그러면 $\mathrm{f}(m/n) = \mathrm{f}(1/n)^m$이다. 연속성이 없으면 무리수(irrational)에서의 값은 아무런 제약을 받지 않는다. "하멜 기저(Hamel basis)"를 이용해 만든, a^x가 아닌 이상한 해들이 존재한다.

4. 한 번 발사할 때마다 래피디티(rapidity) $\phi = \operatorname{artanh}\frac{1}{2}$가 더해지므로, k번 발사한 후의 속력은 $\tanh k\phi = \frac{3^k-1}{3^k+1}$이다. 즉 $0.8c$, $\frac{13}{14}c \approx 0.929c$, $\frac{40}{41}c \approx 0.976c$이다.

3.9 새로운 함수 만들기

1. $x = -1$에서 $x^2 - 2^x = \frac{1}{2} > 0$이고 $x = 0$에서는 -1이므로 음의 근이 존재한다. $x = -2u/\ln 2$로 두면 ($x < 0$이므로 $x = -2^{x/2}$로 택하여) $x^2 = 2^x$는 $ue^u = \frac{\ln 2}{2}$가 되므로, $u = \mathrm{g}\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$이고 $x \approx -0.7667$이다.

2. $\mathrm{g}'e^{\mathrm{g}}(1+\mathrm{g}) = 1$이고 $e^{\mathrm{g}} = x/\mathrm{g}$이다. $x = -\frac{1}{e}$에서 $\mathrm{g} = -1$이고 기울기는 무한대이다(그래프가 그 점에서 수직이다).

3. $x = we^w$로 두면 $\mathrm{d}x = (1+w)e^w\,\mathrm{d}w$이고 w는 0에서 1까지 변한다. 따라서 $\int_0^1 w(1+w)e^w\,\mathrm{d}w = \left[(w^2-w+1)e^w\right]_0^1 = e-1$이다.

4. $T = \sqrt{2}^{\,T}$는 $\frac{\ln T}{T} = \frac{\ln 2}{2}$를 뜻하므로 $T = 2$ 또는 4이다. 항 $1.414, 1.633, 1.761, \ldots$은 증가하면서 2보다 작게 유지되므로($t_n < 2$이면 $t_{n+1} < \sqrt{2}^{\,2} = 2$이다) $T = 2$이다. 고정점(fixed point) 4는 밀어내는(repelling) 고정점이다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

전체 13개 장 가운데 제3장. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

