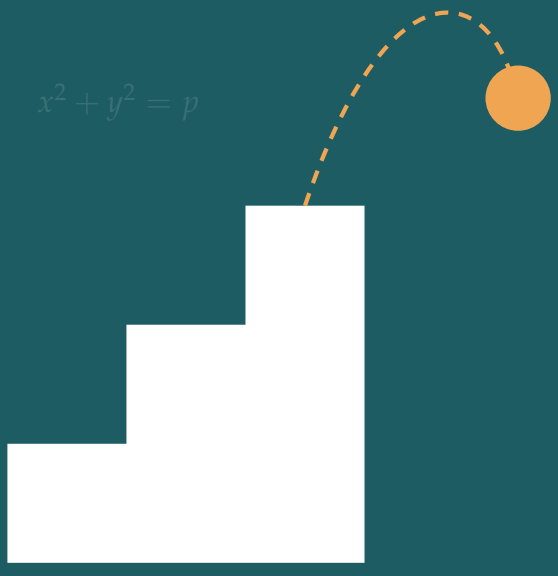
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

제2장

수 열(sequence), 급 수(series)와 수렴(convergence)



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

제2장

수열(sequence), 급수(series)와 수렴(convergence)

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

제2장: 수열(sequence), 급수(series)와 수렴(convergence)

이 PDF는 *Beyond STEP*의 전체 13개 장 가운데 제2장이다. 책 전체, 각 장의 개별 PDF, 모든 절의 인쇄용 연습지, 모든 STEP 문제의 자세한 풀이를 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 남겨 주기 바란다.

장

2

수열, 급수, 수렴

무한은 수학이 흥미로워지는 곳이며, 동시에 가장 틀리기 쉬운 곳이다.

이 장의 내용

2.1 "결국"이란 무슨 뜻인가 STEP III 2015

2.2 극한으로서의 황금비 STEP II 2013

2.3 발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌 STEP III 2014

2.4 $\pi^2/6$ STEP III 2018

2.5 비에트의 곱 STEP III 2022

2.6 산술–기하 평균 STEP II 2024

2.7 여섯 자리인가, 육백 자리인가 STEP II 2023

2.8 제곱하고 2 빼기 STEP III 2021

2.9 e에 다가가는 분수들 STEP II 2021

A 연습문제 해답 69쪽

무한 길들이기

> 무한이여! 이보다 더 깊이 인간의 정신을 뒤흔든 질문은 없었다.
>
> — 다비트 힐베르트(David Hilbert)

2500년 전, 엘레아의 제논(Zeno of Elea)은 운동이 불가능하다고 주장했다. 방을 가로질러 걸어가려면 먼저 절반을 걸어야 하고, 그다음 남은 거리의 절반을, 또 그 남은 거리의 절반을 걸어야 하며, 이것이 끝없이 이어진다. 무한히 많은 일을 해야 하는데, 이를 유한한 시간 안에 끝낼 수는 없을 것이다. 사람들은 실제로 방을 가로지르므로 제논이 틀렸다는 것은 누구나 알았지만, 아주 오랫동안 그가 정확히 **왜** 틀렸는지는 아무도 말하지 못했다. 답은 무한합 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$이 유한한 값 1을 가진다는 것이다. 그런데 무한히 많은 수를 더해서 어떤 값이 된다는 것은 도대체 무슨 **뜻**일까?

이 질문은 2000년 동안 수학의 한가운데에 놓여 있었다. 17세기에 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)는 이 질문에 끝내 제대로 답하지 않은 채 그 위에 미적분학을 세웠고, 그 후계자들은 놀라운 결과들과 함께 엄청난 헛소리도 만들어 냈다. 역사상 가장 위대한 계산가인 오일러(Euler)는 거리낌 없이 $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$이라고 썼다. 다른 이들은 같은 무한급수(infinite series)에 대해 서로 모순되는 것들을 "증명"했다. 19세기에 이르러 코시(Cauchy), 바이어슈트라스(Weierstrass) 등의 연구를 거친 뒤에야 수학자들은 참인 결과와 거짓인 결과를 가려낼 만큼 정밀한 정의를 갖게 되었다. 그 정의들이 이 장의 주제이다.

왜 중요한가

여러분이 계산에 쓰게 될 거의 모든 수는 무언가의 극한(limit)이다. 계산기는 $\sqrt{2}$나 π나 e를 알지 못한다. 계산기가 아는 것은 그 수들에 점점 더 가까워지는 방법이며, 충분히 가까워지면 계산을 멈춘다. 어떤 방법이 **얼마나 빨리** 가까워지는지 이해하느냐에 따라 1밀리초 만에 끝나는 알고리즘과 영원히 끝나지 않는 알고리즘이 갈린다. 날씨를 예보하고, 항공기를 설계하고, 금융 상품의 가격을 매기는 데 쓰이는 컴퓨터 시뮬레이션의 바탕에도 같은 아이디어가 있다. 그리고 가장 순수한 쪽에서는, 극한에 대한 연구가 수학에서 가장 아름다운 공식들로 이어진다. 이 장에서 여러분은

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

임을 증명하게 된다. 이것은 오일러를 유명하게 만든 결과이며, 지금도 거의 마법처럼 보인다.

대학에서 만나게 될 것

거의 모든 대학에서 **해석학**(*Analysis*)은 가장 먼저 듣는 과목 가운데 하나이며, 많은 학생에게 가장 큰 충격을 주는 과목이다. 학교 수학에서는 극한을 계산하는 법을 배우지만, 해석학에서는 정밀한 정의에서 출발하여 극한에 대한 사실을 **증명**하는 법을 배운다. 여러분은 Section 2.1에 나오는 "모든 $\varepsilon > 0$에 대하여"와 "N이 존재한다"라는 표현을 써서 수열(sequence)이 수렴(converge)한다는 것이 무슨 뜻인지 정의하게 된다. 유계(bounded)인 증가수열(increasing sequence)은 모두 수렴한다는 것을 증명하고, 이것이 유리수에는 없는 실수의 성질인 **완비성**(*completeness*)에 달려 있다는 것을 알게 된다. 급수(series)의 수렴 판정법을 공부하고, 같은 아이디어를 써서 연속성, 미분, 적분에 엄밀한 의미를 부여하게 된다.

이후의 과목들은 이 기초 위에서 여러 방향으로 뻗어 나간다. **수치해석**(*numerical analysis*)은 근삿값이 얼마나 빨리 수렴하는지, 그리고 어떻게 하면 더 빠르게 만들 수 있는지를 묻는다(Section 2.7, Section 2.6). **동역학계**(*dynamical systems*)는 어떤 규칙을 거듭 적용할 때 무슨 일이 일어나는지를 연구하는데, 때로는 극한에 도달하고 때로는 혼돈이 생겨난다(Section 2.2, Section 2.8). **복소해석**(*complex analysis*)은 왜 그토록 많은 무한합과 무한곱에 π가 나타나는지를 설명한다(Section 2.4, Section 2.5). 그리고 **해석적 정수론**(*analytic number theory*)은 Section 2.9에서처럼 극한을 이용하여 정수에 관한 질문에 답한다.

이 장을 관통하는 질문들

> **세 가지 큰 질문**
>
> 1. **무한한 과정이 답을 가진다는 것은 무슨 뜻인가?** 수열이 극한에 "가까워진다"거나 무한합이 어떤 수로 "더해진다"는 것을 어떻게 정확하게 말할 수 있는가?
> 2. **무엇으로 수렴하는지 모르는 채로 어떤 것이 수렴한다는 것을 어떻게 증명할 수 있는가?** 그리고 극한이 존재한다는 것을 알고 나면, 그 극한을 어떻게 구하는가?
> 3. **얼마나 빠른가?** 두 과정이 같은 극한을 가지면서도 전혀 다른 속도로 그 극한에 다가갈 수 있다. 왜 그런가, 그리고 그 속도를 어떻게 측정하는가?

첫 번째 절(Section 2.1)은 언어에 관한 것으로, 수학자들이 "결국에는"을 말하는 정밀한 방식을 다룬다. 그다음 다섯 절은 유명한 극한들을 다룬다. 연분수(continued fraction)로서의 황금비(golden ratio), 수렴하는 사촌을 가진 발산(divergent) 급수, $\pi^2/6$, $2/\pi$에 대한 비에트(Viète)의 곱, 그리고 가우스(Gauss)의 산술–기하 평균(arithmetic–geometric mean)이다. 마지막 세 절은 속도와 구조를 다룬다. 선형 수렴(linear convergence)과 이차 수렴(quadratic convergence)의 비교, 폭발하거나 혼돈스럽게 떠도는 반복, 그리고 e로 좁혀 들어가는 적분들의 족이다.

수렴을 다루는 도구들

여러분은 몇 안 되는 도구를 서로 다른 상황에서 거듭 만나게 될 것이다.

§	주제	도구
2.1	"결국에는 더 작다"	한정기호(quantifier): m 찾아내기, 명제의 부정
2.2	황금비	단조(monotone)이고 유계인 부분수열(subsequence)
2.3	조화급수(harmonic series)와 켐프너(Kempner) 급수	묶음별 비교
2.4	$\pi^2/6$	다항식의 근, 그리고 조임(squeeze)
2.5	비에트의 곱	망원(telescoping) 소거, 그리고 간단한 극한 하나
2.6	산술–기하 평균	서로 조여 드는 두 수열; 불변량(invariant)
2.7	$\sqrt{2}$의 근사	오차 점화식(recurrence): 선형과 이차
2.8	$x \mapsto x^2 - 2$	사상을 단순하게 만드는 치환(substitution)
2.9	e에 대한 분수	작지만 0은 아닌 적분

이 장을 읽는 방법

1장 에서와 마찬가지로, 각 절은 출제된 그대로의 STEP 문제로 시작한다. 계속 읽기 전에 먼저 풀어 보라. 이 장의 문제들은 어떤 도구를 써야 하는지 알려 주는 경우가 많다("...을 고려하여", "...정리를 이용해도 좋다"). 문제를 풀어 나가면서 같은 몇 가지 도구가 얼마나 자주 다시 등장하는지 눈여겨보라. 대학에서는 그 도구들을 스스로 골라야 하기 때문이다.

몇몇 문제는 극한이 존재한다거나 무한합과 무한곱이 수렴한다고 가정하라고 한다. 그런 경우에는 그것을 증명하려면 무엇이 필요한지 해당 절에서 설명한다. "당연히 성립한다"와 "성립한다는 것을 증명할 수 있다" 사이의 간극을 의식하는 것이 해석학자처럼 생각하는 첫 걸음이다.

2.1 "결국"이란 무슨 뜻인가

문제

STEP III 2015, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/15-s3-q2`

도입

대학에서 처음 듣는 해석학(analysis) 강의에 나오는 명제는 거의 모두 같은 모양을 하고 있다. 어떤 조건이 성립하도록 하는 무언가가 **존재하여**, **모든** 무언가에 대하여 그 조건이 성립한다는 모양이다. "수열(sequence)이 L로 다가간다"는 말은 모든 허용 오차 $\varepsilon > 0$에 대하여 어떤 지점 N이 **존재하여**, $n \geq N$인 **모든** 경우에 $|a_n - L| < \varepsilon$이라는 뜻이다. 이런 모양의 명제에 익숙한 학생은 해석학을 흥미진진하게 느끼고, 그렇지 않은 학생은 해석학 앞에서 어리둥절해한다.

이 문제는 그런 말하기 방식을 부드럽게 소개하도록 아름답게 설계된 문제이다. 이 문제는 "결국에는 더 작다"라는 새로운 개념 하나를 정의하고, 그 개념에 관한 참·거짓 질문 네 개를 던진다. 넷 중 하나는 거짓인데, 그것이 거짓인 이유가 바로 대학 1학년 학생 대부분이 양화사(quantifier)가 들어 있는 명제를 처음으로 **부정**(negate)하려 할 때 빠지는 함정이다.

시작하기 전에

정의를 천천히 읽어 보자. $(s_n) \leq (t_n)$은 모든 n에 대하여 $s_n \leq t_n$이라는 뜻이 아니다. **어느 지점부터는** 그것이 참이라는 뜻이다. 처음 몇 개의 항은 전혀 상관이 없다. 두 수열 가운데 어느 쪽이든 앞부분의 항을 백만 개 바꾸어도 $(s_n) \leq (t_n)$인지 아닌지는 달라지지 않는다.

? **생각해 보기** 정의에는 "양의 정수 m이 존재한다"라는 구절이 들어 있다. $(s_n) \leq (t_n)$임을 증명하려면 정확히 무엇을 제시해야 하는가? 그것이 **거짓**임을 증명하려면 무엇을 보여야 하는가?

증명하려면 적당한 m을 **제시하고**, $n \geq m$인 **모든** 경우에 성립함을 보여야 한다. 반증하려면

어떤 m도 통하지 않음을 보여야 한다. 즉 누가 어떤 m을 내놓든 $s_n > t_n$인 $n \geq m$이 존재함을 보여야 한다. 소문항 (ii)를 위해 이 두 번째 형태를 기억해 두자.

차근차근 풀기

1단계 일차함수 대 이차함수

소문항 (i)은 결국에는 $1000n \leq n^2$인지를 묻는다. $n > 0$이므로 이는 $1000 \leq n$과 같다. 따라서 $m = 1000$이 통한다. $n \geq 1000$인 모든 경우에 $n^2 = n \cdot n \geq 1000n$이기 때문이다. 이 명제는 **참**이다. ■

처음 999개의 항에서 $1000n$이 n^2보다 훨씬 크다는 사실은 상관이 없다. "결국에는"은 유한개의 항을 모두 무시한다.

2단계 "결국에는 더 작다"는 보통의 "더 작다"와 같을까?

보통의 수에서는 $a \leq b$가 아니면 $b < a$이므로 당연히 $b \leq a$이다. 소문항 (ii)는 새로운 관계에서도 같은 일이 성립하는지를 묻는다.

> **생각해 보기** "$(s_n) \leq (t_n)$이 아니다"는 실제로 무슨 뜻인가? 앞에 "아니다"를 붙이지 말고 완전히 풀어서 써 보자.

"m이 존재하여 $n \geq m$인 모든 경우에 $s_n \leq t_n$이다"라는 명제가 거짓이 되는 것은 정확히 다음과 같을 때이다.

$$\text{모든 } m\text{에 대하여 } s_n > t_n\text{인 } n \geq m\text{이 존재한다.}$$

다시 말해 $s_n > t_n$인 일이 **무한히 자주** 일어난다. 이는 "어느 지점부터는 $s_n > t_n$"보다 훨씬 약한 조건이다. 두 수열은 계속해서 자리를 바꿀 수 있다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 끝없이 자리를 바꾸어서 어느 쪽도 결국에는 다른 쪽보다 작다고 할 수 없는, 양수로 이루어진 두 수열을 찾아보자.

$s_n = 2 + (-1)^n$으로 두면 $s_n = 1, 3, 1, 3, \ldots$이고, 모든 n에 대하여 $t_n = 2$로 두자. 모든 m에 대하여 $s_n = 3 > 2 = t_n$인 짝수 $n \geq m$이 존재하므로 $(s_n) \leq (t_n)$이 아니다. 그런데 마찬가지로 모든 m에 대하여 $t_n = 2 > 1 = s_n$인 홀수 $n \geq m$이 존재하므로 $(t_n) \leq (s_n)$도 아니다. 이 명제는 **거짓**이다. ■

3단계 이어 붙이기

생각해 보기 소문항 (iii)에서는 가정마다 하나씩, 두 개의 m 값이 주어진다. 두 값은 다를 수 있다. 결론에는 어느 쪽을 써야 할까?

$n \geq m_1$인 모든 경우에 $s_n \leq t_n$이고, $n \geq m_2$인 모든 경우에 $t_n \leq u_n$이라고 하자. $n \geq \max(m_1, m_2)$이면 두 부등식이 모두 성립하므로 $s_n \leq t_n \leq u_n$이다. 따라서 $m = \max(m_1, m_2)$가 통하고, 이 명제는 **참**이다. ■

두 기준값 가운데 큰 쪽을 택하는 것은 해석학에서 수백 번은 하게 될 수법이다. 예를 들어 수렴(convergent)하는 두 수열의 합이 수렴함을 증명할 때도 이렇게 한다.

4단계 이차함수 대 지수함수

먼저 몇 가지 값을 넣어 보자.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256

따라서 $n^2 \leq 2^n$은 $n = 1, 2$에서 성립하고, $n = 3$에서 성립하지 않으며, $n = 4$부터는 계속 성립하는 것처럼 보인다(그림 2.1.1). 자연스러운 추측은 $m = 4$이다.

생각해 보기 $n \geq 4$인 모든 경우에 $n^2 \leq 2^n$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명하려면 $n^2 \leq 2^n$에서 $(n+1)^2 \leq 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$으로 넘어가야 한다. $(n+1)^2$과 n^2 사이에 어떤 부등식이 있으면 이 단계가 성립할까?

$(n+1)^2 \leq 2n^2$임을 알면 충분하다. 그러면 $(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2 \cdot 2^n$이기 때문이다. 그런데 $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$이고, 이는 $n \geq 3$일 때 양수이다. 따라서 다음과 같다.

- 기저 단계(*base case*): $4^2 = 16 = 2^4$.
- 귀납 단계(*inductive step*): $n \geq 4$이고 $n^2 \leq 2^n$이면 $(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2^{n+1}$이다.

그러므로 $n \geq 4$인 모든 경우에 $n^2 \leq 2^n$이고, 이 명제는 $m = 4$로 **참**이다. ■

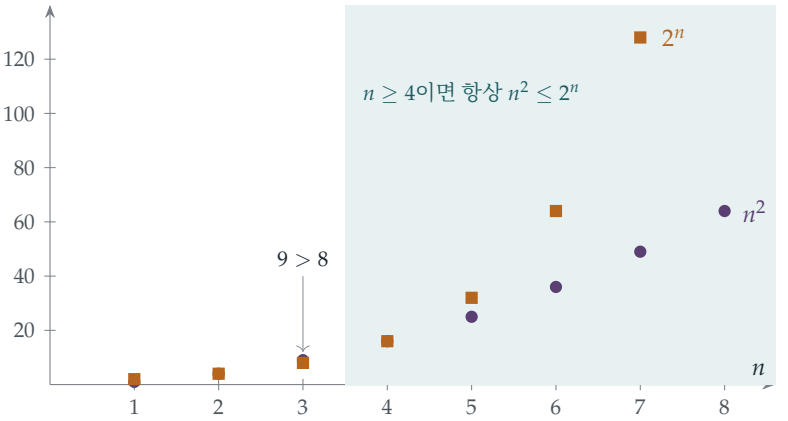


그림 2.1.1 n^2(자주색 원)과 2^n(호박색 사각형)의 비교. 두 수열은 처음 몇 항에서 두 번 교차하지만, $n = 4$부터는 2^n이 영원히 앞선다. 이것이 바로 $m = 4$로 $(n^2) \leq (2^n)$이라는 뜻이다.

돌아보기

- **"존재한다"를 증명한다는 것은 제시한다는 뜻이다.** 소문항 (i), (iii), (iv)에서 증명은 m을 지목하고 그것을 확인하는 것으로 이루어졌다.
- **부정하면 양화사가 뒤바뀐다.** "(m이 존재하여 $n \geq m$인 모든 경우에 P)가 아니다"는 "모든 m에 대하여 $n \geq m$이 존재하여 P가 아니다"가 된다. 이것을 제대로 하는지가 소문항 (ii)가 시험하는 내용이다.
- **새로운 관계가 옛 관계처럼 행동할 필요는 없다.** "결국에는 더 작다"는 $\leq$처럼 추이적(transitive)이지만, $\leq$와 달리 모든 수열 쌍을 비교하지는 못한다.

숨은 수학

해석학의 언어

뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz) 이후 약 150년 동안 수학자들은 극한(limit)과 무한소(infinitesimal)를 훌륭하게 사용했지만, 그것이 정확히 무엇을 뜻하는지는 말하지 못했다. 버클리(Berkeley) 주교는 1734년에 무한소를 "죽은 양의 유령"이라고 조롱했는데, 그의 말에는 일리가 있었다. 이 문제는 19세기에 해결되었다. 오귀스탱루이 코시(Augustin-Louis Cauchy)와 이어서 카를 바이어슈트라스(Karl Weierstrass)가 "무한히 가까워진다"는 모호한 말을 "모든"과 "존재한다"로 이루어진 명제로 바꾸어 놓은 것이

다. 현대적인 정의

$a_n \to L \iff$ 임의의$\varepsilon > 0$에 대하여 어떤N이 존재하여$|a_n - L| < \varepsilon$이 다음 모든 경우에 성립: $n \geq N$

는 이 문제의 정의와 정확히 같은 모양이고, 맨 앞에 양화사가 하나 더 붙어 있을 뿐이다. 이것이 대학 해석학 강의에서 가장 먼저 만나게 될 내용이다.

증가의 차수

소문항 (iv)는 유명한 사다리의 작은 한 칸이다. 고정된 임의의 $k > 0$과 $c > 1$에 대하여

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

이고, 사실 각 수열은 다음 수열보다 결국에는 작을 뿐 아니라 다음 수열의 어떤 상수배보다도 결국에는 작다. G. H. 하디(G. H. Hardy)는 이런 종류의 비교에 관해 *Orders of Infinity*(1910, 무한의 차수)라는 책 한 권을 통째로 썼다. 오늘날 이것은 컴퓨터 과학의 일상 언어가 되었다. 컴퓨터 과학에서 "이 알고리즘은 $O(n^2)$ 단계가 걸린다"라는 말은 단계의 수가 결국에는 n^2의 상수배 이하라는 뜻이다. n^2과 2^n의 차이는 끝나는 프로그램과 태양이 다 타 버리기 전까지 끝나지 않을 프로그램의 차이이다.

전순서가 아닌 순서

소문항 (ii)는 "결국에는 더 작다"가 **전순서**(total order)가 아님을 보여 준다. 즉 아예 비교할 수 없는 수열 쌍이 있다. 이처럼 추이적이지만 모든 것을 비교하지는 못하는 관계를 **원순서**(preorder) 또는 **부분순서**(partial order)라고 하며, 이런 관계는 어디에서나 나타난다. 정수의 나누어떨어짐, 집합의 포함 관계, "부분군이다"가 모두 그 예이다. 어떤 관계가 어떤 성질을 가지고 어떤 성질을 가지지 않는지 알아보는 것은 수학자가 받는 훈련의 일부이다.

사고 기술

> **양화사 다루기**
>
> "m이 존재하여 $n \geq m$인 모든 경우에…"를 증명하려면 m을 지목한 다음 모든 n을 확인한다. 이를 반증하려면 모든 m에 대하여 성립하지 않는 $n \geq m$이 있음을 보인다.
>
> 명제에 양화사가 여러 개 있으면, 증명이나 반증을 시도하기 전에 명제를 완전히 풀어서 쓰고, 왼쪽부터 차례로 부정한다. "모든"은 "존재한다"로, "존재한다"는 "모든"으로 바뀌고, 끝에 있는 조건은 부정된다.

더 도전하기

1 **견본 문제로 몸풀기.** 1987년 첫 STEP 이전에 발표된 시험지의 STEP III Specimen paper, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/spec-s3-q2`)를 풀어 보자. (**마지막 부분에 대한 힌트:** 이항전개(binomial expansion)의 다음 항을 이용한다.)

2 **양쪽 방향.** $(s_n) \leq (t_n)$이고 $(t_n) \leq (s_n)$이면 충분히 큰 모든 n에 대하여 $s_n = t_n$임을 증명하여라.

3 **무한대를 향한 경주.** 둘 다 무한대로 발산하고 어느 쪽도 결국에는 다른 쪽보다 작다고 할 수 없는, 양수로 이루어진 두 증가 수열을 찾아라.

4 **사다리 오르기.** 명시적인 m을 제시하여 $(2^n) \leq (n!)$임을 보여라. 그다음 $(n^{10}) \leq (2^n)$임을 보이고, 통하는 가장 작은 m을 찾아라. (두 번째 부분에는 스프레드시트가 도움이 된다. 답은 놀라울 만큼 크다.)

더 읽을거리

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree*** (Oxford University Press). 수학과 공부하는 법. 3장이 바로 이런 종류의 논리적 언어와, 대학 신입생들이 그것을 어려워하는 이유를 다룬다.
- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis*** (Oxford University Press). 해석학을 생각하는 법. 대학 1학년 해석학의 정의들을 친절하게 안내한다.
- **Daniel Velleman, *How to Prove It*** (Cambridge University Press). 증명하는 법. 논리, 양화사, 증명을 체계적으로 소개한다.

2.2 극한으로서의 황금비

문제

STEP II 2013, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s2-q6`

도입

다음 식을 적어 보자.

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

그리고 이 값이 무엇인지 물어보자. 빠른 답은 이렇다. 이 값을 x라 하면 첫 번째 분수선 아래 부분이 다시 x이므로 $x = 1 + 1/x$이고, 따라서 $x^2 = x + 1$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 즉 황금비(golden ratio) φ이다.

하지만 이 논증은 타당할까? 이 논증은 무한히 이어지는 식이 무언가를 **뜻한다**는 것, 즉 식을 쌓아 가는 과정이 하나의 수로 안정된다는 것을 가정한다. 같은 요령을 $1-1+1-1+\cdots$에 적용하면("이것을 S라 하면 $S = 1 - S$이므로 $S = \frac{1}{2}$") 엉터리 결과가 나온다. 이 문제는 이 작업을 제대로 하는 방법을 보여 준다. 이때 쓰는 도구는 극한을 미리 알지 못한 채 수렴(convergence)을 증명하기 위해 STEP 응시생이 가진 유일한 도구, 곧 **단조수열**(*monotone sequence*)이다.

시작하기 전에

몇 개의 항을 계산해 보자. $u_1 = 1$이면 다음과 같다.

$$1,\quad 2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{8}{5},\quad \frac{13}{8},\quad \frac{21}{13},\quad \frac{34}{21},\quad \ldots$$

생각해 보기 분자와 분모가 눈에 익은가? 소수로도 살펴보자. $1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$. 이 수열은 증가하는가? 감소하는가?

이 수들은 연속한 피보나치(Fibonacci) 수의 비이다. 이 수열은 증가하지도 감소하지도 않는다. 넘쳤다가 모자랐다가 하며 지그재그로 움직인다. 그러므로 주어진 정리는 증가수열에 관한 것이어서 수열 전체에 적용할 수 없다. 하지만 홀수 번째 항 $1, 1.5, 1.6, 1.615, \ldots$은 올라가는 것처럼 보이고, 짝수 번째 항 $2, 1.667, 1.625, \ldots$은 내려가는 것처럼 보인다. 이것이 이 문제의 풀이 계획이다.

차근차근 풀기

1단계 두 칸 떨어진 항 비교하기

소문항 (i)은 두 단계 떨어진 u_{n+2}와 u_n을 비교한다. 자연스러운 첫 수는 $(*)$를 이용해 각각을 바로 앞의 항으로 나타내는 것이다.

생각해 보기 $(*)$를 두 번 써서 $u_{n+2} - u_n$을 $u_{n+1} - u_{n-1}$로 나타내고, 다시 $u_{n+1} - u_{n-1}$을 $u_n - u_{n-2}$로 나타내어 보자.

$(*)$에서

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = -\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{u_{n+1}u_{n-1}},$$

이고, 같은 방법으로 $u_{n+1} - u_{n-1} = -\dfrac{u_n - u_{n-2}}{u_n u_{n-2}}$이다. 이 둘을 합치면 두 음의 부호가 상쇄된다.

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{u_{n+1}u_n \cdot u_{n-1}u_{n-2}}.$$

마지막으로 $(*)$에 의해 $u_{n+1}u_n = u_n + 1$이고 $u_{n-1}u_{n-2} = u_{n-2} + 1$이므로 원하는 공식을 얻는다. ($u_{n-2}$가 존재하려면 $n \geq 3$이어야 한다.) ■

2단계 함정

잠깐, 직접 해 보기 모든 n에 대해 $1 \leq u_n \leq 2$임을 증명하여라.

$u_1 = 1$일 때는 참이다. $1 \leq u_n \leq 2$이면 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$이므로 $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$이고, 이는 분명히 1과 2 사이에 있다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대해 $1 \leq u_n \leq 2$이다. ■

특히 모든 u_n이 양수이므로 소문항 (i)의 분모 $(1 + u_n)(1 + u_{n-2})$는 양수이다.

3단계 두 개의 단조 부분수열

생각해 보기 소문항 (i)의 공식은 $u_{n+2} - u_n$이 $u_n - u_{n-2}$의 양수배라는 것을 말해 준다. 이로부터 $u_3 - u_1, u_5 - u_3, u_7 - u_5, \ldots$의 부호에 대해 무엇을 알 수 있는가?

모두 부호가 같다! $u_3 - u_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$이므로 소문항 (i)과 귀납법에 의해 $u_5 > u_3$, $u_7 > u_5$ 등이 성립한다. 즉 홀수 번째 항들은 증가한다. 이 항들은 위로 2에 의해 유계(bounded)이므로 정리에 의해 어떤 극한(limit)으로 수렴한다. 그 극한을 L이라 하자.

마찬가지로 $u_4 - u_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$이므로 짝수 번째 항들은 감소한다. 이 항들은 아래로 1에 의해 유계이다. 정리는 증가수열에 대해 주어져 있지만, $-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$은 증가하고 위로 -1에 의해 유계이므로 수렴한다. 따라서 짝수 번째 항들도 수렴한다. 그 극한을 M이라 하자.

4단계 극한 구하기

생각해 보기 L을 구하려면 u_{n+2}와 u_n을 직접 연결하는 방정식이 필요하다. $(*)$에서 그런 식을 얻을 수 있는가?

$(*)$를 두 번 적용하면

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + 1/u_n} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

n을 홀수 값으로 따라가며 $n \to \infty$로 보내면 u_n과 u_{n+2}가 모두 L로 수렴하므로

$$L = \frac{2L + 1}{L + 1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0.$$

근은 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$이고, $L \geq 1$이므로 $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$여야 한다. 짝수 값을 따라가며 똑같이 논증하면 $M = \varphi$를 얻는다.

생각해 보기 홀수 번째 항은 φ로, 짝수 번째 항도 φ로 수렴한다. 왜 이것이 수열 전체가 φ로 수렴한다는 뜻이 되는가?

직관적으로 말하면, 모든 항은 홀수 번째 항이거나 짝수 번째 항이고, 두 종류 모두 φ에 가까워진다. 정확히 말하면 이렇다. 임의의 허용 오차 $\varepsilon > 0$이 주어지면, 홀수 번째 항들은 어떤 지점 N_1 이후로 φ와의 차이가 ε 이내이고, 짝수 번째 항들은 어떤 지점 N_2 이후로 그러하다. 따라서 $\max(N_1, N_2)$ 이후로는 모든 항이 φ와의 차이가 ε 이내이며, 이것이 바로 수렴의 뜻이다. (이것은 Section 2.1에서 본 "더 큰 기준점을 택하기" 수법이다.)

5단계 다른 곳에서 시작하기

$u_1 = 3$이면 수열은 다음과 같다.

$$3,\quad \frac{4}{3},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{11}{7},\quad \frac{18}{11},\quad \frac{29}{18},\quad \dots$$

이제 $u_1 = 3$은 $[1,2]$ 밖에 있으므로 소문항 (ii)의 귀납법은 시작되지 않는다. 하지만 $u_2 = \frac{4}{3}$은 안에 있으므로 거기서부터 귀납법이 작동한다. 즉 모든 $n \geq 2$에 대해 $1 \leq u_n \leq 2$이다. 소문항 (i)은 u_{n-2} 이후의 항만 사용하며 그 항들이 양수이기만 하면 되는데, 실제로 모두 양수이다. 이번에는 $u_3 - u_1 = \frac{7}{4} - 3 < 0$이고 $u_4 - u_2 = \frac{11}{7} - \frac{4}{3} > 0$이므로 홀수 번째 항은 감소하고 짝수 번째 항은 증가한다. 역할은 뒤바뀌었지만 각 부분수열(subsequence)은 여전히 단조이고 유계이다. 극한들은 같은 방정식을 만족하고 둘 다 양수이므로 둘 다 φ이다. 결론은 바뀌지 **않는다**. ■

돌아보기

- **수열이 단조가 아니면 단조인 조각을 찾아라.** 홀수 번째 항과 짝수 번째 항으로 나누자 지그재그 수열이 잘 행동하는 두 수열로 바뀌었다.
- **수렴을 먼저 증명하고, 극한은 그다음에 구하라.** 방정식 $L = (2L+1)/(L+1)$은 L이 존재한다는 것을 안 뒤에야 정당하다. 도입의 빠른 논증이 건너뛴 것이 바로 이 단계이다.
- **어느 근인지 확인하라.** 극한 방정식은 해가 두 개였고, 소문항 (ii)의 범위가 어느 쪽이 맞는지 알려 주었다.

숨은 수학

거미줄 그림과 고정점

$u_{n+1} = f(u_n)$으로 정의된 수열은 모두 **거미줄 그림**(*cobweb diagram*)으로 나타낼 수 있다(그림 2.2.1). $y = f(x)$와 $y = x$의 그래프를 그린다. x축 위의 u_1에서 출발하여 곡선까지 수직으로 올라가고(높이 $u_2 = f(u_1)$), 직선 $y = x$까지 수평으로 이동한 뒤(이로써 $x = u_2$로 옮겨 간다), 다시 곡선까지 수직으로 이동하는 과정을 되풀이한다. 여기서 $f(x) = 1 + 1/x$는 감소함수이므로, 경로는 넘쳤다가 모자랐다가를 번갈아 하며 곡선과 직선이 만나는 점, 즉 $f(\varphi) = \varphi$인 **고정점**(*fixed point*) φ를 향해 나선 모양으로 안쪽으로 감겨 들어간다.

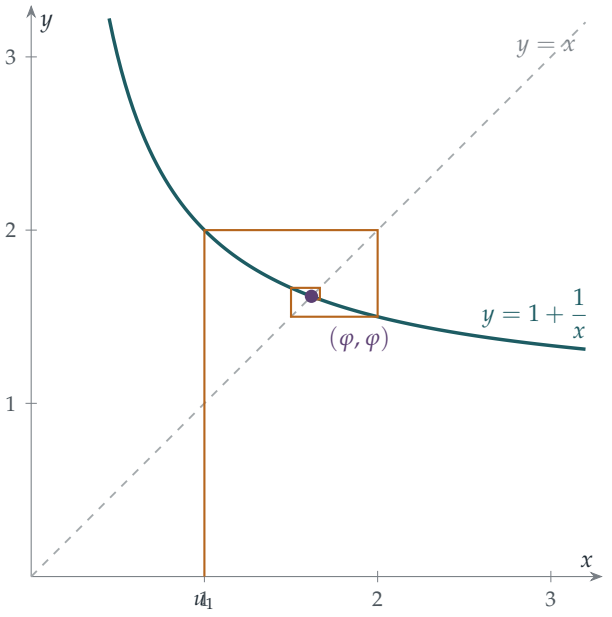


그림 2.2.1 $u_1 = 1$에서 시작하는 $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$의 거미줄 그림. 경로는 곡선까지 올라갔다가 직선 $y = x$까지 가로질러 가는 과정을 되풀이한다. 곡선이 아래로 기울어 있으므로 경로는 양쪽을 번갈아 오가며 고정점 $\varphi \approx 1.618$을 향해 나선 모양으로 감겨 들어간다. 이것이 홀수 번째 항과 짝수 번째 항의 지그재그이다.

얼마나 빠르게, 그리고 왜

소문항 (i)의 인수 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$는 어디에서 왔을까? 고정점 근처에서 $u_{n+1} - \varphi = f(u_n) - f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n - \varphi)$이고, $f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$이다. 따라서 한 단계마다 오차에 약 -0.38이 곱해진다. 부호가 뒤집히고(지그재그) 크기는 줄어든다(수렴). 두 단계를 거치면 $1/\varphi^4 \approx 0.146$이 곱해지는데, 이것이 바로 $1/\big((1+u_n)(1+u_{n-2})\big)$이 수렴하는 값이다. 대학에서는 이것이 **축소 사상 정리**(*contraction mapping theorem*)가 된다. 고정점 근처에서 $|f'| \le k < 1$이면 반복은 그 고정점으로 수렴하며, 오차는 적어도 기하급수적으로 줄어든다. 이 정리는 수학에서 가장 유용한 정리 중 하나이며, 미분방정식이 해를 가짐을 증명하는 방법이기도 하다(제8장). Section 2.8에서는 고정점이 끌어당기지 **않는** 사상을 만나게 되는데, 그 결과는 사뭇 다르다.

가장 무리수다운 수

항 $u_n = F_{n+1}/F_n$은 크기에 비해 φ에 대한 가장 좋은 분수 근삿값이지만, 그 "가장 좋다"는 것이 그리 좋지는 않다. φ는 다른 어떤 수보다도 분수로 근사하기 어렵다. 그 이유는 연분수(continued fraction) 표현 $[1;1,1,1,\ldots]$에서 볼 수 있다. 연분수에 큰 항이 있으면 매우 좋은 근삿값이 생기는데($\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$와 훌륭한 근삿값 $\frac{355}{113}$을 떠올려 보라), φ는

끝까지 가능한 가장 작은 항만 가진다. 아돌프 후르비츠(Adolf Hurwitz)는 1891년에 모든 무리수(irrational number) x에 대해 $|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$을 만족하는 분수가 무한히 많으며, 바로 φ 때문에 $\sqrt{5}$를 더 개선할 수 없음을 증명했다. 이 "최대 무리성"이 해바라기 씨의 나선 무늬에 황금각(golden angle)이 나타나는 이유이다.

사고 기술

단조이고 유계이면 수렴한다

극한을 모르는 채로 수열이 수렴함을 보이려면, 단조이고 유계인 수열을 찾거나 수열을 단조이고 유계인 조각들로 나누어라.

극한이 존재한다는 것을 안 뒤에야 점화식(recurrence relation)에서 "$n \to \infty$로 보내어" 그 극한을 구할 수 있다. 대학에서 이 정리는 실수의 **완비성**(*completeness*), 즉 $\mathbb{R}$을 $\mathbb{Q}$와 구별 짓는 성질의 결과이며, 공리(axiom)로부터 이를 증명하는 것을 보게 될 것이다.

더 도전하기

1 **속에 숨은 피보나치.** $F_1 = F_2 = 1$이고 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$일 때 $u_n = F_{n+1}/F_n$임을 증명하여라.

2 **줄어드는 오차.** $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$임을 보이고, 이로부터 모든 n에 대해 $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$임을 유도하여라. ($\varphi^2 = \varphi + 1$과 $u_n \ge 1$을 이용하여라.)

3 **수열 망가뜨리기.** $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$이면 수열이 상수임을 보여라. 어떤 $u_n = 0$이 되어 수열을 더 이어 갈 수 없게 되는 시작값 u_1을 모두 구하여라. (**힌트:** $u_n = 0$에서 거꾸로 거슬러 올라가 보아라.)

4 **$\sqrt{2}$의 사촌.** $v_1 = 1$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + v_n}$이라 하자. 이 문제의 방법을 응용하여 $v_n \to \sqrt{2}$임을 보이고, $\sqrt{2}$를 연분수로 나타내어라.

더 읽을거리

- **Mario Livio, *The Golden Ratio*** (Broadway). φ의 역사를 다루며, 진짜 수학과 수많은 신화를 구별한다.
- **C. D. Olds, *Continued Fractions*** (Mathematical Association of America). 실력 있는 고

등학생을 대상으로 한, 짧고 매우 읽기 쉬운 연분수 입문서.

- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis*** (Cambridge University Press). 단조수열과 완비성을 엄밀하게 다루며, 연습문제가 많다.

2.3 발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌

문제

STEP III 2014, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s3-q8`

도입

조화급수(harmonic series) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$는 항이 영으로 줄어드는데도 합은 한없이 커지는 급수의 가장 유명한 예이다. 이 급수는 터무니없이 느리게 커진다. 10을 넘으려면 12,000개가 넘는 항이 필요하고, 100을 넘으려면 약 1.5×10^{43}개의 항이 필요하다. 그래도 결국에는 어떤 수든 넘어선다.

이제 분모에 숫자 2가 들어 있는 항을 모두 버려 보자. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$부터 $\frac{1}{29}$까지, $\frac{1}{32}$ 등이 빠진다. 어차피 무한대인 합에서 항의 10분의 1 정도를 없애 봐야 별 차이가 없으리라 예상할 수도 있다. 그런데 실제로는 남은 항의 합이 80보다 작다. 이 놀라운 사실은 1914년에 A. J. Kempner가 증명하였으며, 이 문제는 아름다울 만큼 단순한 한 가지 아이디어, 즉 합을 블록으로 잘라 내는 방법을 통해 이 결과로 이끌어 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 첫 번째 부등식은 $r=k^n$부터 $r=k^{n+1}-1$까지의 항으로 이루어진 블록에 관한 것이다. $k=2$, $n=3$일 때 이 블록에는 어떤 항들이 있고, 모두 몇 개인가?

$f(8), f(9), \ldots, f(15)$의 여덟 개 항이다. 일반적으로 블록은 k^n부터 $k^{n+1}-1$까지이므로 항의 개수는 $k^{n+1}-k^n=k^n(k-1)$이다. 부등식은 블록의 합이 (항의 개수) × (가능한 가장 작은 항)과 (항의 개수) × (가장 큰 항) 사이에 있다는 뜻이다.

차근차근 풀기

1단계 블록의 합 어림하기

f가 감소(decreasing)함수이므로 블록의 모든 항은 다음을 만족한다.

$$f(k^{n+1}) < f(k^{n+1}-1) \le f(r) \le f(k^n) \qquad (k^n \le r \le k^{n+1}-1).$$

$k^n(k-1)$개의 항을 모두 더하면 주어진 부등식을 얻는다. ■

2단계 조화급수

> **생각해 보기** $k=2$, $f(r)=1/r$일 때, 2^n부터 $2^{n+1}-1$까지의 블록에 대한 두 경계는 무엇인가?

하계는 $2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$이고 상계는 $2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$이다. 따라서 **모든** 블록은, 아무리 멀리 있더라도, $\frac{1}{2}$과 1 사이의 값을 기여한다(그림 2.3.1). $n = 0, 1, \ldots, N$에 대한 블록들을 이어 붙이면 정확히 $r=1$부터 $r = 2^{N+1}-1$까지의 합이 되므로, $N+1$개의 블록을 더하면

$$\frac{N+1}{2} \le \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \le N+1.$$

$N \to \infty$일 때 좌변은 한없이 커지므로 부분합(partial sum)은 유계가 아니고, 따라서 급수는 발산(diverge)한다. ■

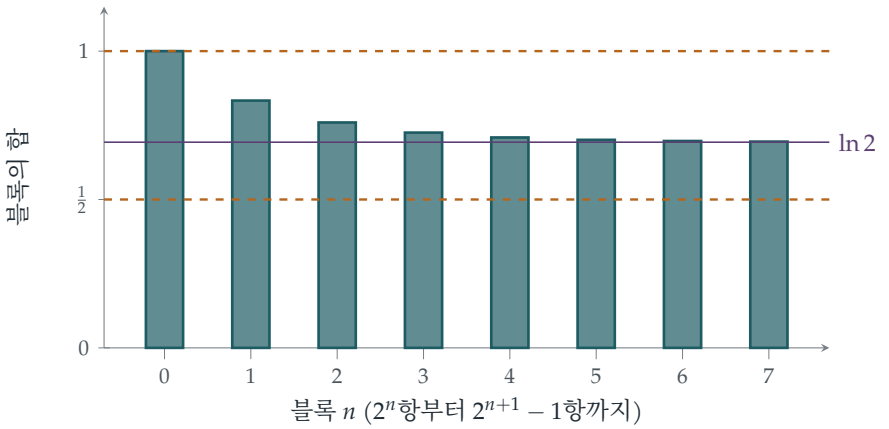


그림 2.3.1 조화급수를 $1, 2, 4, 8, \ldots$개 항의 블록으로 자른 모습. 모든 블록의 합은 $\frac{1}{2}$과 1 사이에 있으며(호박색 점선), 실제로 블록의 합은 $\ln 2 \approx 0.693$(자주색)에 가까워진다. 각각 적어도 $\frac{1}{2}$인 블록이 무한히 많으면 그 합은 유한할 수 없다.

3단계 세제곱의 역수의 합

이제 $k = 2$는 그대로 두고 $f(r) = 1/r^3$으로 놓자. 블록 n의 상계는

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^3} = \frac{1}{4^n}.$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$에 대한 블록들은 모든 양의 정수를 정확히 한 번씩 포함하므로

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

(엄밀히 말하면 이것은 모든 부분합이 $\frac{4}{3}$ 이하임을 보인 것이다. 위로 유계인 증가수열은 수렴(converge)하므로 무한합이 존재하고 그 값은 $\frac{4}{3}$ 이하이다. 참값은 $1.2020\ldots$이다.)

4단계 2가 없는 수 세기

> **생각해 보기** 앞자리에 0을 채우는 것을 허용할 때(그래서 7을 007로 쓴다), 0부터 999까지의 정수 중 숫자 $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$만으로 쓸 수 있는 것은 몇 개인가?

세 자리 각각에 9가지 선택이 있으므로 이러한 문자열은 9^3개이다. 이들은 0부터 999까지의 수 중 2가 없는 수와 정확히 대응하며, 양수가 아닌 0을 빼면 $S(1000)$에는 $9^3 - 1 = 728$개의 수가 남는다. $\blacksquare$

5단계 Kempner 급수

이제 블록 아이디어를 **자릿수**로 정의한 블록에 적용한다. 이는 $k = 10$을 쓰는 것과 같다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 2가 들어 있지 않은 d자리 수는 몇 개인가? 그리고 d자리 수가 가질 수 있는 가장 작은 값은 무엇인가?

첫째 자리는 $1, 3, 4, \ldots, 9$ 중 하나(여덟 가지: 0도 2도 아님)이고, 나머지 $d - 1$개의 자리는 각각 아홉 가지 선택이 있다. 따라서 이러한 수는 $8 \times 9^{d-1}$개이고, 각각은 적어도 10^{d-1}이다. 그러므로 $S(n)$에 속하는 d자리 수들이 $\sigma(n)$에 기여하는 양은 많아야

$$8 \times 9^{d-1} \times \frac{1}{10^{d-1}} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1}$$

이다. 모든 자릿수 $d = 1, 2, 3, \ldots$에 대해 더하면

$$\sigma(n) \le \sum_{d=1}^{\infty} 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1} = \frac{8}{1 - \frac{9}{10}} = 80.$$

엄격한 부등식을 얻으려면, 대부분의 경계가 전혀 날카롭지 않다는 점에 주목하면 된다(예를 들어 $\frac{1}{3} < 1$인데, 우리는 한 자리 수의 모든 항을 1로 어림하였다). 따라서 모든 n에 대해 $\sigma(n) < 80$이다. $\blacksquare$

돌아보기

- **항을 묶어라.** 두 합 모두 항별로 다루기는 쉽지 않다. 알맞은 크기의 블록으로 묶자 각각을 등비급수(geometric series)와 비교할 수 있었다.
- **알맞은 블록은 문제에 따라 다르다.** $1/r$과 $1/r^3$에는 2의 거듭제곱이 알맞았고, 십진법의 숫자에 관한 문제에는 10의 거듭제곱이 알맞았다.
- **유계이고 증가한다.** 두 수렴 증명 모두 Section 2.2에서와 같은 원리에 기대었다. 양수 항의 부분합은 증가하므로 경계 하나만 있으면 충분하다.

숨은 수학

응집 판정법

문제의 첫 번째 부등식은 **코시**(*Cauchy*)**의 응집 판정법**(*condensation test*)의 핵심이다. f가 양수이고 감소하면

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r)\text{가 수렴한다} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n)\text{가 수렴한다.}$$

이 판정법은 어려운 급수를 쉬운 급수로 바꾸어 준다. $f(r) = 1/r^p$에 적용하면 $\sum 2^n \cdot 2^{-np} = \sum (2^{1-p})^n$을 얻는데, 이는 정확히 $p > 1$일 때 수렴하는 등비급수이다. $1/(r \ln r)$에 적용하면 이 급수조차 발산함을 알 수 있고, $1/(r(\ln r)^2)$에 적용하면 이 급수는 수렴함을 알 수 있다. 이 논증은 1350년경에 그림 2.3.1의 블록과 똑같은 방법으로 조화급수의 발산을 증명한 니콜 오렘(Nicole Oresme)까지 거슬러 올라간다.

조화급수는 얼마나 느리게 발산하는가

그림 2.3.1을 보면 각 블록이 약 $\ln 2$씩 기여하므로, 처음 N개 항의 합은 대략 $\log_2 N \times \ln 2 = \ln N$이어야 할 것 같다. 실제로

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + (0\text{으로 가는 어떤 양}),$$

이며, 여기서 $\gamma = 0.5772\ldots$는 오일러-마스케로니 상수(Euler–Mascheroni constant)이다. γ가 유리수(rational number)인지는 아무도 모른다. 이 공식은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 적분을 이용해 증명하게 되며, 조화수는 Section 9.11와 Section 11.12에서 다시 등장한다.

대부분의 수에는 2가 들어 있다

Kempner 급수는 왜 수렴할까? 큰 수들 사이에서 "2가 없는 수"는 매우 드물기 때문이다. 10^d보다 작은 수 중 2가 없는 수의 비율은 많아야 $(0.9)^d$이고, 이는 0으로 간다. 100자리 수 중 숫자 2를 피하는 수는 0.003%도 되지 않는다. 그러니 우리는 항의 10분의 1을 없앤 것이 아니라 거의 전부를 없앤 것이다. 우리가 얻은 경계 80은 넉넉한 값이다. 1979년에 Robert Baillie가 가속된 방법을 써서 이 합을 소수점 아래 여러 자리까지 계산하였는데, 그 값은 약 19.257이다.

거듭제곱의 역수의 합

소문항 (ii)의 합은 $\zeta(3)$으로, Section 1.2에서 만난 리만 제타 함수(Riemann zeta function)의 값이다. Section 2.4에서는 $\zeta(2) = \pi^2/6$을 정확히 구할 것이며, 오일러(Euler)는 $\zeta(4), \zeta(6), \ldots$에 대한 공식을 찾았다. 그러나 $\zeta(3)$에 대한 공식은 아무도 찾지 못하였다. 1978년 Roger Apéry는 Section 2.9에 나오는 것과 비슷한 적분을 이용하여 $\zeta(3)$이 무리수(irrational number)임을 증명해 수학계를 놀라게 하였다. $\zeta(5)$가 무리수인지는 아직도 알려져 있지 않다.

사고 기술

블록 단위로 비교하기

양수 항으로 이루어진 급수가 수렴하는지 판단하려면, 항들이 대략 일정한 블록으로 묶고 각 블록을 간단한 급수와 비교하라.

비교 판정법(comparison test)은 대학 1학년 해석학의 기본 중의 기본이다. 핵심 기술은 무엇과 비교할지 고르는 것이다. 여기서는 항이 기껏해야 일정한 배수만큼만 변하는 크기 2^n 또는 10^d의 블록을 골랐다.

더 도전하기

1 **느림을 느껴 보기.** $\sum_{r \le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$를 이용하여, 조화급수가 10을 넘으려면 몇 개의 항이 필요한지, 그리고 100을 넘으려면 몇 개가 필요한지 어림하여라.

2 **판정법의 실제.** $f(r) = 1/r^2$에 소문항 (i)의 방법을 적용하여 $\sum 1/r^2 \le 2$임을 보여라. 그다음 첫째 항을 따로 다루어 경계를 개선하여라.

3 **수렴과 발산 사이.** $k = 2$인 블록 부등식을 이용하여 $\sum_{r\ge 2} \frac{1}{r \ln r}$은 발산하고 $\sum_{r\ge 2} \frac{1}{r(\ln r)^2}$은 수렴함을 보여라.

4 **더 많이 빼기.** 심화 십진법 표기에 2도 7도 없는 양의 정수들의 역수의 합이 35보다 작음을 보여라. (35가 어디서 나오는지 알 수 있는가?)

더 읽을거리

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*** (Princeton University Press). 조화급수와 γ를 비롯한 많은 내용을 실력 있는 고등학생을 위해 쓴 책이다.
- **Mary Hart, *Guide to Analysis*** (Palgrave). 급수와 비교 판정법에 관한 장이 명료한, 간결한 대학 1학년 교재이다.
- **Robert Baillie, "Sums of reciprocals of integers missing a given digit"**, *American Mathematical Monthly* 86 (1979). 이 절을 공부하고 나면 읽을 수 있는 짧은 논문이다.

2.4 $\pi^2/6$

문제

STEP III 2018, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/18-s3-q7`

도입

1650년에 피에트로 멩골리(Pietro Mengoli)는 간단한 질문 하나를 던졌다. 다음 값은 무엇인가?

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots?$$

항이 충분히 빠르게 작아지므로 이 합은 수렴(converge)한다(Section 2.3에서 그 값이 많아야 2임을 보였다). 하지만 아무도 그 값을 구하지 못했다. 베르누이(Bernoulli) 형제가 도전했다가 실패했고, 야코프 베르누이(Jacob Bernoulli)는 공개적으로 도움을 간청하기까지 했다. 이 문제는 베르누이 가문의 고향 도시 이름을 따서 **바젤 문제**(Basel problem)라고 불리게 되었다.

1734년, 젊은 오일러(Leonhard Euler)가 이 문제를 풀었고, 그 답으로 그는 유명해졌다. 합은 $\pi^2/6$이다. 도대체 원에 관한 수인 π가 왜 제곱의 역수의 합에 나타나는 것일까? 이 문제는 A레벨(A level, 영국의 대학 입시 과정)을 넘어서지 않는 도구만으로 완전하고 엄밀한 증명(proof)을 제시한다. 드무아브르 정리(De Moivre's theorem), 다항식(polynomial)의 근의 합, 그리고 조임(squeeze)이 그 도구이다.

시작하기 전에

세부 사항에 들어가기 전에 전체 계획을 살펴볼 만하다.

- 소문항 (i)에서는 근이 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$인 다항식을 만든다.
- 소문항 (ii)에서는 그 근들을 하나하나 알지 못한 채, 계수(coefficient)를 이용해 모두 더한다.

▶ 소문항 (iii)에서는 작은 θ에 대해 $\cot\theta \approx 1/\theta$라는 사실을 이용하여 $\cot^2$ 값들의 합을 $1/m^2$ 값들의 합으로 바꾸고, 조인다.

> **생각해 보기** 다항식 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$의 근이 $r_1, \ldots, r_n$이라면, $r_1 + \cdots + r_n$을 계수로 나타내면 무엇인가?

답은 $-a_{n-1}/a_n$이다. 이 사실이 소문항 (ii)의 원동력이다.

차근차근 풀기

1단계 드무아브르

> **생각해 보기** $\cot\theta + \mathrm{i}$를 하나의 분수로 나타내어 보자. 분자에 대해 무엇을 알 수 있는가?

$\cot\theta + \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$이고, 마찬가지로 $\cot\theta - \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$이다. 드무아브르 정리에 의해

$$(\cot\theta \pm \mathrm{i})^{2n+1} = \frac{\cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}.$$

두 식을 빼면 코사인은 소거되고 사인은 두 배가 되며, 2i로 나누면 다음을 얻는다.

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}. \qquad \blacksquare$$

2단계 다항식

이번에는 좌변을 이항정리(binomial theorem)로 전개한다. $c = \cot\theta$, $N = 2n+1$이라 하자.

> **생각해 보기** $(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N$에서 두 이항 전개의 어떤 항이 소거되고, 어떤 항이 두 배가 되는가?

i^j를 포함하는 항은 첫 번째 전개에서는 $+$ 부호로, 두 번째 전개에서는 $(-1)^j$와 함께 나타난다. 따라서 j가 짝수인 항은 소거되고 j가 홀수인 항은 두 배가 된다.

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = 2\sum_{j\ \text{홀수}} \binom{N}{j} c^{N-j}\,\mathrm{i}^j.$$

$j = 2k+1$이라 하면 $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}\,(-1)^k$이고 $c^{N-j} = c^{2n-2k} = (c^2)^{n-k}$이다. 2i로 나누면

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n$$

이다. 여기서 $x = \cot^2\theta$이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 어떤 θ에서 좌변이 영이 되는가? 이를 이용하여 다항식의 서로 다른 근 n개를 구하여라.

좌변은 $\sin(2n+1)\theta = 0$이지만 $\sin\theta \neq 0$일 때 영이 된다. 예를 들어 $m = 1, 2, \ldots, n$에 대해 $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$일 때가 그렇다. 이 각들은 모두 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 엄격히 놓여 있고, 이 구간에서 cot은 양수이며 순감소하므로, n개의 값 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$은 모두 서로 다르다. n차 다항식은 근을 많아야 n개 가지므로, 이것들이 근의 **전부**이다. ■

3단계 근 더하기

근의 합은 다음과 같다. $-(\text{계수} x^{n-1})/(\text{계수} x^n)$:

$$\sum_{m=1}^{n} \cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}. \qquad \blacksquare$$

$n = 1$로 확인해 보자. $\cot^2(\pi/3) = \frac{1}{3}$이고, $\frac{1\times 1}{3} = \frac{1}{3}$이다.

4단계 조임

$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$에서 역수를 취하고(부등식의 방향이 바뀐다) 제곱하면

$$\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta.$$

> **생각해 보기** $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$을 대입하고 $m = 1, \ldots, n$에 대해 모두 더해 보자. 바깥쪽 두 합은 무엇이 되는가? 가운데 합은 $\sum 1/m^2$과 어떤 관계가 있는가?

가운데 합은 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{m^2\pi^2}$이다. 소문항 (ii)에 의해 왼쪽 합은 $\frac{n(2n-1)}{3}$이고, 오른쪽 합은 $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$이다. 전체에 $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$을 곱하면

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

$n \to \infty$일 때 $\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}$과 $\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$은 모두 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$로 수렴한다(분자와 분모를 n^2으로 나누면 된다). 따라서 두 경계는 모두 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴하고, 그 사이에 갇힌 부분합(partial sum)도 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴해야 한다(그림 2.4.1). ■

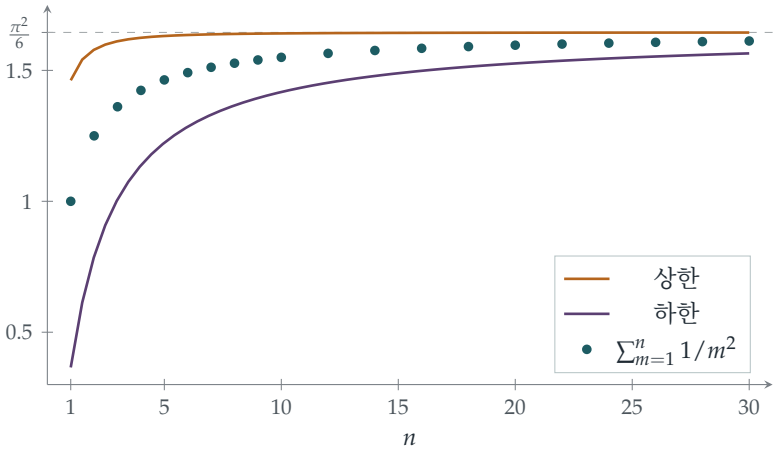


그림 2.4.1 소문항 (iii)의 조임. $\sum 1/m^2$의 부분합(청록색 점)은 하한(자주색)과 상한(주황색) 사이에 갇혀 있고, 두 경계는 모두 $\pi^2/6 \approx 1.645$로 수렴한다.

돌아보기

- **계수에서 얻는 정보.** 근 $\cot^2(m\pi/(2n+1))$을 더 간단한 꼴로 구한 적은 한 번도 없지만, 그 합은 정확히 구했다.
- **근사한 다음 조이기.** $\cot\theta$는 $1/\theta$와 근사적으로만 같지만, 그 오차는 양방향의 정확한 부등식으로 통제되었다.
- **유한에서 무한으로.** 마지막 단계 전까지 모든 단계는 유한한 합을 다루었다. 무한합은 부등식에서 $n \to \infty$로 보냈을 때 비로소 등장했는데, 이것이 무한을 안전하게 다루는 방법이다.

숨은 수학

오일러의 대담한 논증

1734년 오일러 자신의 논증은 현대의 기준으로 엄밀하지는 않았지만, 눈부셨다. 근이 $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots$이고 0에서의 값이 1인 다항식은 $(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$로 인수분해된다. 함수 $\frac{\sin x}{x}$는 0에서의 값이 1이고 근이 $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$이므로, 오일러는 이를 "무한 다항식"으로 취급하여 다음과 같이 썼다.

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots .$$

우변에서 x^2의 계수는 $-\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$이고, 매클로린 급수(Maclaurin series)

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$에서는 그 계수가 $-\frac{1}{6}$이다. 둘을 비교하면 $\pi^2/6$을 얻는다. 우리의 STEP 증명은 같은 아이디어의 유한하고 엄밀한 판이다. 근이 π의 배수와 연결된 다항식, 그리고 그 두 번째 계수가 핵심이다.

제곱의 역수를 넘어서

오일러는 이어서 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$, $\sum 1/m^6 = \pi^6/945$를 구했고, 일반적으로 $\sum 1/m^{2k}$는 π^{2k}의 유리수 배이며 여기에는 **베르누이 수**(Bernoulli numbers)가 관여한다. 홀수 거듭제곱은 전혀 다른 이야기이다. Section 2.3에서 보았듯이, $\sum 1/m^3$에 대한 공식은 아무도 알지 못한다. 이 합들은 리만 제타 함수(Riemann zeta function)의 값 $\zeta(2), \zeta(4), \ldots$이며, 이 함수가 복소수 인수에서 보이는 성질은 소수(prime)의 분포를 지배한다(Section 1.2).

다시 만나게 될 곳

대학에서는 $\zeta(2) = \pi^2/6$의 증명을 적어도 세 가지 더 만나게 된다. 하나는 **푸리에 급수**(Fourier series, 함수를 사인과 코사인의 합으로 나타내는 것)를 이용한 증명이고, 하나는 이중적분(double integral)을 이용한 증명이며, 또 하나는 복소해석학(complex analysis)을 이용한 증명이다. 그리고 이 수는 확률(probability)에서도 나타난다. 무작위로 고른 두 자연수가 공약수를 갖지 않을 확률은 $6/\pi^2 \approx 0.61$이다. (소수 p가 두 수를 모두 나눌 확률은 $1/p^2$이므로, 어떤 소수도 두 수를 모두 나누지 않을 확률은 $\prod_p (1 - 1/p^2)$이며, 오일러는 이 곱이 $1/\zeta(2)$와 같음을 보였다.) 확률의 극한에 π가 나타나는 또 다른 예는 Section 12.23의 주제이다.

사고 기술

조임, 그리고 근의 대칭함수

극한을 구하려면, 그 양을 극한이 같은 더 간단한 두 식 사이에 가두어라.

그리고 다루기 까다로운 수들의 합(또는 곱)이 필요할 때는, 그 수들을 근으로 갖는 다항식을 찾아보아라. 계수가 그 수들의 대칭적인 조합, 즉 대칭함수(symmetric functions)의 값을 거저 알려 줄 것이다.

더 도전하기

1 **1992년 판.** STEP III 1992, 8번 문제 (`step.maths.org/questions/92-s3-q8`)에 도전해 보아라. 이 절의 다항식과 비슷한 다항식을 이용하여 탄젠트의 제곱과 코시컨트의 제곱의 합을 정확히 구한다. (**힌트:** 근이 r_i인 다항식을 알고 있다면, 근이 $1/r_i$인 다항식은 무엇인가?)

2 **홀수의 제곱.** $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$으로부터 $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$임을 이끌어 내어라.

3 **네제곱.** 심화 $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$와 다항식의 계수를 이용하여 $\sum_{m=1}^{n} \cot^4\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$을 구하고, 조임을 변형하여 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$임을 증명하여라.

4 **얼마나 빠른가?** 소문항 (iii)의 하한을 이용하여 $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{4n}$임을 보여라. 부분합이 $\pi^2/6$과의 차이가 0.001 이내가 되려면 n이 얼마나 크면 충분하다고 이 부등식이 보장하는가? 실제 오차가 $1/n$에 가깝다는 사실과 비교해 보아라.

더 읽을거리

- **William Dunham, *Euler: The Master of Us All*** (Mathematical Association of America). 『오일러: 우리 모두의 스승』. 3장에서 바젤 문제의 이야기를 수학과 함께 온전히 들려준다.
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK*,** Chapter 9, "Three times $\pi^2/6$". 『하늘책의 증명』 9장 "$\pi^2/6$의 세 가지 증명". 이 절의 증명이 실려 있다.
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula*** (Princeton University Press). 『오일러 박사의 놀라운 공식』. 복소수, 푸리에 급수, 그리고 이와 같은 합들을 다룬다.

2.5 비에트의 곱

문제

STEP III 2022, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

도입

이 문제의 마지막 줄은 수학에서 가장 아름다운 공식 가운데 하나이며, 이런 종류의 공식으로는 가장 오래된 것 가운데 하나이다. 이 공식은 1593년 프랑스의 법률가이자 수학자인 비에트(François Viète)가 발표하였는데, 누군가가 π를 무한 과정의 결과로 **정확하게** 나타낸 것은 이것이 처음이었다. 비에트 이전에는 π를 근삿값으로만 다룰 수 있었지만, 그 이후로는 끝없이 계속하면 모든 자릿수를 알려 주는 공식으로 π를 정의할 수 있게 되었다.

이 공식은 신비롭게 보인다. 2의 제곱근이 겹겹이 중첩된 꼴은 도대체 어디에서 나오는 것일까? 이 문제는 그것이 배각 공식(double-angle formula)을 되풀이하여 사용한 결과임을 보여 주며, 그 과정에서 같은 방법으로 덜 알려진 또 하나의 공식, 곧 $\ln 2$에 대한 공식도 얻는다.

시작하기 전에

생각해 보기 sinh의 배각 공식은 무엇인가? (확실하지 않다면 $\sinh 2y$와 $\sinh y \cosh y$를 지수함수로 나타내어 비교해 보아라.)

$\sin 2y = 2\sin y \cos y$와 똑같이 $\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$이다. 이 항등식 하나를 거듭 사용하는 것이 문제 전체를 이끌어 간다. 문제는 마지막 부분 직전까지 쌍곡선함수(hyperbolic functions)를 다루며, 마지막 부분에서 보통의 삼각함수로 넘어간다.

차근차근 풀기

1단계 거듭 반으로 나누기

$n = 1$인 경우는 $y = x/2$로 둔 배각 공식 그 자체이다.

$$\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right).$$

> **생각해 보기** n일 때 공식이 성립한다고 하자. 마지막 인수는 $\sinh(x/2^n)$이다. 이것을 어떻게 바꾸어 쓰면 $n+1$일 때의 공식을 얻을 수 있는가?

이 인수에 배각 공식을 적용하면 $\sinh(x/2^n) = 2\cosh(x/2^{n+1})\sinh(x/2^{n+1})$이다. 이를 대입하면

$$\sinh x = 2^{n+1}\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cosh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

이고, 이것이 $n+1$일 때의 공식이다. 따라서 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 n에 대하여 공식이 성립한다. ■

결론을 이끌어 내려면 양변을 x로 나눈 다음, 양변에 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$을 곱한다. 우변에서는 $2^n\sinh(x/2^n)\cdot\dfrac{x/2^n}{x\,\sinh(x/2^n)} = 1$이므로 cosh 항들의 곱만 남는다. ■

2단계 극한

급수 전개로부터 $y \neq 0$일 때

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots,$$

이고, 이것은 $y \to 0$일 때 1로 수렴하므로 그 역수 $y/\sinh y$도 1로 수렴한다. (더 엄밀하게 하고 싶다면 다음과 같이 하면 된다. 나머지 부분 $\frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots$에 나오는 계승은 모두 6 이상이므로, $0 < |y| < 1$일 때 나머지 부분은 많아야 $\frac{1}{6}(y^2 + y^4 + \cdots) = \frac{y^2}{6(1-y^2)}$이고, 이것은 0으로 수렴한다.)

이제 x를 고정하고 소문항 (i)에서 $n \to \infty$로 보내자. 그러면 $y = x/2^n \to 0$이므로 좌변은 $\dfrac{\sinh x}{x} \times 1$로 수렴한다. 우변은 부분곱(partial product)이므로, 부분곱은 $\dfrac{\sinh x}{x}$로 수렴한다. 이것이 바로 무한곱(infinite product)의 뜻이다. ■

3단계 $\ln 2$에 대한 공식

$x = \ln 2$이면 $e^{x/2} = \sqrt{2}$이므로

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2^{1/2} + 2^{-1/2}}{2} = \frac{2+1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

마찬가지로 $e^{x/4} = 2^{1/4}$이므로 $\cosh(x/4) = \dfrac{2^{1/4} + 2^{-1/4}}{2}$이고, 분자와 분모에 $2^{1/4}$을 곱하면 $\dfrac{2^{1/2}+1}{2\times 2^{1/4}}$을 얻는다. ■

> **생각해 보기** $\cosh(x/2^k)$의 일반적인 규칙은 무엇인가? 분모 $2\times 2^{1/2^k}$을 모두 곱하면 어떻게 되는가?

같은 계산을 하면 모든 $k \geq 1$에 대하여

$$\cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1+2^{1/2^{k-1}}}{2} \times 2^{-1/2^k}.$$

이다. ($k=1$이면 앞에서와 같이 $\frac{1+2}{2}\times 2^{-1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$이다.) $k = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여 곱하면 2의 거듭제곱들은 합쳐져서 $2^{-(1/2+1/4+1/8+\cdots)} = 2^{-1}$이 되고, 첫 번째 분수는 $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$이다. 따라서 무한곱은

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1+2^{1/2}}{2} \times \frac{1+2^{1/4}}{2} \times \frac{1+2^{1/8}}{2} \cdots .$$

이다. 한편 $\sinh(\ln 2) = \frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$이므로 $\dfrac{\sinh x}{x} = \dfrac{3}{4\ln 2}$이다. 양변에서 인수 $\frac{3}{4}$가 약분되어

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1+2^{1/2}}{2} \times \frac{1+2^{1/4}}{2} \times \frac{1+2^{1/8}}{2} \cdots . \quad ■$$

가 남는다.

4단계 비에트의 공식

> **생각해 보기** 소문항 (iv)에는 π가 들어 있으므로, 쌍곡선함수가 아니라 보통의 삼각함수에서 나와야 한다. sinh와 cosh 대신 sin과 cos을 넣어도 소문항 (i)과 (ii)의 모든 내용이 여전히 성립하는가?

성립한다. 귀납법에서는 배각 공식만 사용하였고, $\sin 2y = 2\sin y \cos y$이다. 극한에서는 $y \to 0$일 때 $\frac{\sin y}{y} \to 1$이라는 사실만 사용하였는데, 이는 같은 방법으로 $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \cdots$에서 따라 나온다. 따라서 $x \neq 0$이고 (x가 π의 배수가 아니어서 도중에 0이 되는 인수가 없을 때)

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots .$$

이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 좌변이 $2/\pi$가 되도록 x를 정하고, 처음 몇 개의 인수를 계산해 보아라. 반각 공식(half-angle formula) $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$일 때)이 유용할 것이다.

$x = \frac{\pi}{2}$로 두자. 그러면 $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$이고, 인수들은 $\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{16}, \ldots$이다. 첫 번째 인수는 $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 어떤 인수가 $\cos\theta = \frac{c}{2}$이면, 반각 공식에 의하여 다음 인수는

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+c/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+c}}{2}.$$

이다. 따라서 분자는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ...와 같이 이어지며, 각 항은 앞의 항에 2를 더한 뒤 제곱근을 취하여 얻는다. 이것이 비에트의 공식이다. ■

돌아보기

- **곱의 망원(telescoping).** 소문항 (i)의 항등식은 어떤 합들이 연쇄적으로 소거되는 것과 마찬가지로, 연쇄적으로 소거되는 곱이다.
- **유한 항등식이 먼저, 극한은 나중에.** Section 2.4에서와 같이, 모든 단계는 유한한 n에 대하여 정확하였고, 필요한 극한은 매우 간단한 $\frac{\sin y}{y} \to 1$뿐이었다.
- **쌍곡선함수와 원함수는 쌍둥이이다.** 두 함수 모두 같은 배각 공식과 같은 작은 각의 극한을 만족하므로, 같은 증명이 두 경우 모두에 통하였다. 이것은 우연이 아니다. Section 5.7에서 보겠지만 $\cosh(ix) = \cos x$이다.

숨은 수학

아르키메데스의 다각형

비에트의 공식에는 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라가는 기하학적 의미가 있다. 반지름이 1인 원에 내접하는 변이 2^n개인 정다각형(regular polygon)의 넓이는 $A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$이다. 변의 개수를 두 배로 늘리면 넓이에

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

이 곱해진다. 정사각형($A_2 = 2$)에서 시작하여 끝없이 두 배로 늘려 가면 넓이는 원의 넓이 π로 수렴한다. 따라서 $\pi = 2 \div \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\right)$이고, 이것이 비에트의 공식이다. 곱의 각 인수는 그림 2.5.1에서 이웃한 두 다각형의 넓이의 비이다.

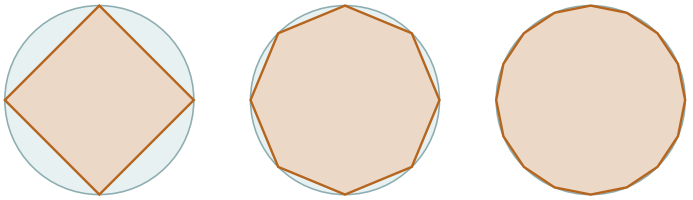


그림 2.5.1 반지름이 1인 원에 내접하는 변이 4개, 8개, 16개인 정다각형. 변의 개수를 두 배로 늘릴 때마다 넓이는 비에트의 곱의 인수 하나만큼씩 더 나누어지며, 넓이는 π를 향해 증가한다.

무한곱

비에트의 곱은 수학에서 최초의 무한곱이었다. 그 뒤로 다른 무한곱들이 이어졌다. 존 월리스(John Wallis)는 1655년에 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$을 발견하였고, $\frac{\sin x}{x}$에 대한 오일러(Euler)의 곱은 Section 2.4에서 나왔다. 대학에서는 무한곱이 언제 수렴(converge)하는지를 배우게 된다. 대략적으로 말하면, 작은 양수 a_n에 대하여 $\prod(1+a_n)$은 $\sum a_n$과 비슷하게 행동하는데, 이는 $\ln(1+a_n) \approx a_n$이기 때문이다. 여기서는 $1-\cos(\pi/2^n) \approx \frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$이고, 이 값은 매번 4분의 1로 줄어들므로 곱은 빠르게 수렴한다.

얼마나 빠른가?

인수 n개를 곱한 부분곱은 정확히 $\dfrac{1}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})}$과 같고, 그 오차는 약 $\frac{\pi^2}{6\cdot 4^{n+1}}$에 $\frac{2}{\pi}$를 곱한 값이다. 인수가 하나 늘어날 때마다 답은 약 4배 정확해지며, 이는 소수점 아래 자릿수로 약 0.6자리를 얻는 셈이다. 인수 열 개를 곱하면 $2/\pi$를 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확하게 얻는다. 좋은 결과이지만, 단계마다 정확한 자릿수를 두 배로 늘리는 Section 2.6의 방법에 비하면 어림도 없이 느리다.

사고 기술

항등식 반복 적용하기

$f(x)$와 $f(x/2)$를 잇는 항등식은 거듭하여 적용할 수 있다. 그 결과에 극한을 취하면 무한급수나 무한곱이 되는 경우가 많다.

n단계 뒤에 남는 "나머지" 항(여기서는 $2^n \sinh(x/2^n)$)을 찾아서 그 극한을 따로 구하라. 이 방식은 무한곱에서 프랙털의 구성에 이르기까지 해석학 곳곳에 나타난다.

더 도전하기

1 **1990년 판.** STEP I 1990, 8번 문제 (`step.maths.org/questions/90-s1-q8`)를 풀어 보아라. 이 문제는 sin의 배각 공식 외에는 아무것도 사용하지 않고, 이 절과는 다른 경로로 비에트의 곱에 도달한다. 어느 접근이 더 자연스럽게 느껴지는가?

2 **다른 각.** $\frac{\sin x}{x}$에 대한 곱에 $x = \frac{\pi}{3}$을 대입하여 $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$를 무한곱으로 나타내고, 처음 두 인수를 간단히 하여라.

3 **인수가 몇 개 필요한가?** 계산기를 사용하여 π를 소수점 아래 4자리까지 정확하게 얻으려면 비에트의 곱의 인수가 몇 개 필요한지 구하여라. 인수가 하나 늘어날 때마다 왜 약 0.6자리를 얻는지 설명하여라.

4 **$\ln 3$에 대한 공식.** $x = \ln 3$으로 두고 소문항 (iii)을 반복하여 $\frac{1}{\ln 3}$을 무한곱으로 나타내어라. $\frac{1}{\ln 3}$을 소수점 아래 두 자리까지 얻으려면 인수가 몇 개 필요한가? 이 곱은 왜 비에트의 곱보다 느리게 수렴하는가?

더 읽을거리

- **Petr Beckmann, *A History of* π** (St Martin's Press). 아르키메데스, 비에트, 월리스 등의 이야기를 열정적으로 들려준다.
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). Section 2.6의 방법을 포함하여 π 계산의 본격적인 수학을 다룬다. 이 장을 공부하고 나면 제1장은 읽을 수 있다.
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights*** (Princeton University Press). 비에트와 그의 곱에 관한 장이 있다.

2.6 산술–기하 평균

문제

STEP II 2024, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

도입

두 양수, 예를 들어 $\sqrt{2}$와 1을 생각하자. 이 두 수를 각각 두 수의 산술평균(arithmetic mean)과 기하평균(geometric mean)으로 바꾼다. 이 과정을 다시, 또다시 반복한다. 그러면 다음과 같은 일이 일어난다.

n	x_n (산술)	y_n (기하)
0	1.4142135623730950488	1
1	1.2071067811865475244	1.1892071150027210667
2	1.1981569480946342956	1.1981235214931201226
3	1.1981402347938772091	1.1981402346773072058
4	1.1981402347355922074	1.1981402347355922074

네 단계 만에 두 수는 소수점 아래 스무 자리까지 일치한다. 이 공통의 극한을 **산술기하평균**(arithmetic–geometric mean) $M(\sqrt{2},1) = 1.19814\ldots$이라고 한다.

1799년 5월 30일, 스물한 살의 카를 프리드리히 가우스(Carl Friedrich Gauss)는 일기에 $1/M(\sqrt{2},1)$이 전혀 다른 문제, 즉 렘니스케이트(lemniscate)라는 곡선의 호의 길이(arc length)에서 나타난 상수와 소수점 아래 열한 자리까지 일치한다는 것을 알아차렸다고 적었다. "이것은 분명 해석학의 완전히 새로운 분야를 열어 줄 것이다."라고 그는 썼다. 실제로 그렇게 되었다. 이 문제는 가우스의 발견 뒤에 있는 핵심 사실, 즉 산술기하평균(AGM)이 통상적인 어떤 방법으로도 계산할 수 없는 적분의 값을 구해 준다는 사실을 증명한다.

시작하기 전에

생각해 보기 서로 다른 두 양수의 산술평균이 기하평균보다 항상 큰 이유는 무엇인가? 한 줄로 증명할 수 있는가?

이것이 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이며, 소문항 (i)의 힌트가 한 줄 증명을 알려 준다. $x \neq y$일 때 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 > 0$이고, 이를 전개하면 $x+y > 2\sqrt{xy}$가 된다. 소문항 (i)의 모든 내용은 이 사실과, 각 평균이 그것을 만든 두 수 사이에 놓인다는 사실로부터 따라 나온다.

차근차근 풀기

1단계 두 수열이 서로 조여든다

$y_n < x_n$이면 $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$이므로 $x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n > 0$이고, 이는 $x_{n+1} > y_{n+1}$을 뜻한다. $y_0 < x_0$이므로 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대하여 $y_n < x_n$이다.

생각해 보기 x_n과 y_n의 산술평균이 x_n보다 작고, 기하평균이 y_n보다 큰 이유는 무엇인가?

$y_n < x_n$이기 때문이다. $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} < \frac{x_n+x_n}{2} = x_n$이고 $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n$이다. 따라서

$$y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < x_2 < x_1 < x_0.$$

y_n은 증가하고 위로 x_0에 의해 유계이므로, 정리에 의해 어떤 극한 M으로 수렴한다.

두 수의 차에 대해서는

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \frac{x_n + y_n}{2} - y_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n),$$

이고, 앞부분에 의해 이 차는 양수이다. 따라서 차는 매 단계마다 적어도 절반으로 줄어든다. 즉 $0 < x_n - y_n < (x_0 - y_0)/2^n$이며, 이는 0으로 수렴한다.

마지막으로 $x_n = y_n + (x_n - y_n)$은 M으로 수렴하는 수열과 0으로 수렴하는 수열의 합이므로 $x_n \to M$도 성립한다. ∎

2단계 치환

이 치환(substitution)은 뜬금없어 보이지만, 제곱근 안의 두 괄호가 모두 완전제곱식(또는 그에 가까운 꼴)이 되도록 설계된 것이다.

생각해 보기 $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$일 때 $t^2 + pq$를 계산하라. 그다음 $t^2 + \frac{1}{4}(p+q)^2$을 계산하라. 둘 중 어느 것이 깔끔하게 인수분해되는가?

먼저

$$t^2 + pq = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) + pq = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2.$$

다음으로

$$\begin{aligned} t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2 &= \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2} + p^2 + 2pq + q^2\right) \\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}. \end{aligned}$$

또한 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{pq}{x^2}\right) = \dfrac{x^2+pq}{2x^2}$이다.

잠깐, 직접 해 보기 이것들을 종합하라. x가 0부터 ∞까지 움직일 때 t는 어떻게 되는가? t에 대한 적분은 무엇이 되는가?

x가 0부터 ∞까지 증가할 때, t는 (도함수가 양수이므로) $-\infty$부터 ∞까지 증가한다. $x > 0$에 대하여

$$\sqrt{\left(t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2\right)\left(t^2+pq\right)} = \frac{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}{2x} \cdot \frac{x^2+pq}{2x},$$

이므로

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cdots}} = \frac{x^2+pq}{2x^2} \cdot \frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}.$$

따라서 t에 대한 적분은 $2\mathrm{I}(p,q)$와 같다.

한편 t에 대한 적분은 I에서 p와 q를 각각 $\frac{1}{2}(p+q) = \mathrm{a}(p,q)$와 $\sqrt{pq} = \mathrm{g}(p,q)$로 바꾼 것과 정확히 같은 꼴인데, 다만 실수 전체에 걸쳐 적분한다는 점만 다르다. 피적분함수(integrand)는 t에 대한 우함수(even function)이므로, t에 대한 적분은 $2\mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big)$이다. 두 결과를 비교하면

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big). \qquad \blacksquare$$

3단계 적분의 값 구하기

생각해 보기 (x_0, y_0)에서 시작하여 이 항등식을 반복해서 적용하라. n단계 후 $\mathrm{I}(x_0, y_0)$는 무엇과 같은가? $n \to \infty$일 때 어떻게 되는가?

모든 n에 대하여 $\mathrm{I}(x_0,y_0)=\mathrm{I}(x_1,y_1)=\mathrm{I}(x_2,y_2)=\cdots=\mathrm{I}(x_n,y_n)$이다. $n\to\infty$일 때 두 인수는 모두 M으로 수렴하고,

$$\mathrm{I}(M,M)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{M^2+x^2}=\left[\frac{1}{M}\arctan\frac{x}{M}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2M}.$$

따라서

$$\mathrm{I}(x_0,y_0)=\frac{\pi}{2M}. \qquad \blacksquare$$

문제에서는 "$\mathrm{I}(x_n,y_n)\to\mathrm{I}(M,M)$"이라는 단계를 그대로 받아들이도록 허용하지만, 이것은 깔끔하게 정당화할 수 있다. p나 q를 크게 하면 피적분함수가 작아지고, $y_n<x_n$이므로

$$\frac{\pi}{2x_n}=\mathrm{I}(x_n,x_n)<\mathrm{I}(x_n,y_n)<\mathrm{I}(y_n,y_n)=\frac{\pi}{2y_n}.$$

양쪽 경계가 모두 $\frac{\pi}{2M}$으로 수렴하고, $\mathrm{I}(x_n,y_n)$은 모든 n에 대하여 같은 수 $\mathrm{I}(x_0,y_0)$이므로, 이 값은 $\frac{\pi}{2M}$이어야 한다. Section 2.4에서처럼 여기서도 조임 정리(squeeze theorem)가 쓰인 것이다.

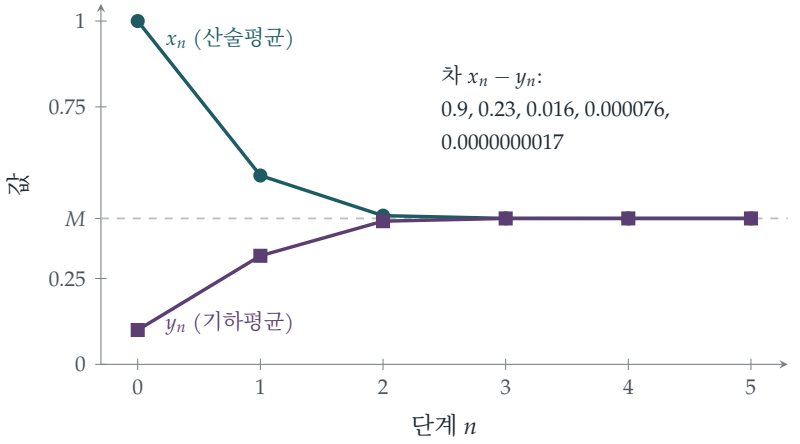


그림 2.6.1 $x_0=1$과 $y_0=0.1$의 산술기하평균. 산술평균 x_n(청록색)은 감소하고 기하평균 y_n(자주색)은 증가하며, 두 수열은 공통의 극한 $M=0.425040709\ldots$에 놀라울 만큼 빠르게 다가간다. 일단 두 값이 가까워지면, 정확한 자릿수가 매 단계마다 대략 두 배가 된다.

돌아보기

- **서로 조여드는 두 단조수열.** 하나는 증가하고 하나는 감소하며, 그 차가 0으로 줄어든다. 이것은 두 수열이 공통의 극한을 가짐을 증명하는 가장 깔끔한 방법이다.
- **불변량.** $\mathrm{I}(x_n,y_n)$이라는 양은 단계가 바뀌어도 결코 변하지 않는다. 다른 모든 것이 움직이는 동안 고정된 채로 남는 것을 찾는 것은 수학에서 가장 강력한 아이디어 가운데 하나이다.

▶ **영리한 치환은 추측이 아니라 설계의 결과이다.** 이 치환은 제곱근 안의 식이 인수분해되도록 선택된 것이다.

숨은 수학

문제가 말해 주는 것보다 더 빠르다

소문항 (i)은 차가 매 단계마다 적어도 절반으로 줄어든다는 것을 보여 주는데, 이는 단계마다 이진 자릿수가 대략 하나씩 늘어난다는 뜻이다. 그런데 도입의 표는 훨씬 더 극적인 것을 보여 준다. 정확한 자릿수가 매 단계마다 대략 **두 배**가 된다$(2, 4, 10, 21, 43, \ldots)$. 실제로

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\bigr)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\bigl(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\bigr)^2},$$

이므로 각 차는 대략 이전 차의 **제곱**에 상수를 곱한 것이다. 이를 **이차 수렴**(quadratic convergence)이라 하며, Section 2.7에서 제대로 공부할 것이다.

타원적분

우리의 적분 $\mathrm{I}(p, q)$는 모습을 바꾼 **완전 타원적분**(complete elliptic integral)이다. 이것은 타원의 호의 길이를 계산할 때 나타나는 적분으로, 여러분이 아는 함수들로는 나타낼 수 없다. 가장 유명한 응용은 진자(pendulum)이다. 주기에 대한 A 레벨(A level, 영국의 대학 입시 과정) 공식 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$는 작은 진폭에 대해서만 성립하는 근삿값이다. 각 θ_0에서 놓은 진자의 정확한 주기는

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\bigl(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\bigr)},$$

로, 산술기하평균으로 값을 구하는 타원적분이다. $\theta_0 = 90^\circ$일 때 실제 주기는 단순한 공식이 예측하는 것보다 약 18% 더 길다. 가우스의 일기 내용은 8자 모양의 곡선인 렘니스케이트에 관한 것이었는데, 그 전체 호의 길이에는 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$가 들어 있다. 이 적분은 모습만 바꾼 $\mathrm{I}(\sqrt{2}, 1)$과 같으므로, 산술기하평균으로 그 값을 구할 수 있다.

π 계산하기

1976년에 Richard Brent와 Eugene Salamin은 각자 독립적으로 가우스의 아이디어를 매 단계마다 정확한 자릿수를 두 배로 늘리는 π 계산 알고리즘으로 바꾸어 놓았다. 스물다섯 단계면 수천만 자리를 얻는다. 이런 종류의 알고리즘은 1980년대와 1990년대에 π 계산의 기록을 경신하는 데 쓰였으며, 이와 같은 이차 수렴 알고리즘은 오늘날 높은 정밀도가 필요한 곳이면 어디서나 표준으로 쓰인다. 단계마다 약 0.6자리씩 늘어나는 Section 2.5의 비에트(Viète)의 곱과 비교해 보라.

사고 기술

불변량을 찾아라

어떤 과정이 여러 가지를 한꺼번에 바꿀 때는, 변하지 않는 양을 찾아라. 그리고 모든 것이 단순해지는 과정의 끝에서 그 값을 구하라.

여기서 과정은 산술기하평균 단계였고, 불변량(invariant)은 적분 I였다. 과정의 끝에서 두 인수는 같아졌고 적분은 초등적으로 계산할 수 있었다. 불변량은 역학의 에너지 보존(10장)에서부터 어떤 퍼즐이 불가능하다는 증명에 이르기까지 수학 곳곳에 나타난다.

더 도전하기

1 **이차 수렴.** 항등식 $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{(x_n - y_n)^2}{2(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n})^2}$을 증명하고, 이로부터 $x_{n+1} - y_{n+1} \le \dfrac{(x_n - y_n)^2}{8y_0}$임을 보여라.

2 **손으로 계산하기.** 계산기를 사용하여 $M(2,1)$을 소수점 아래 여섯 자리까지 구하라. 몇 단계가 필요했는가?

3 **스케일링.** $\lambda > 0$에 대하여 $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$이고 $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$임을 보여라. 이 두 사실이 $\mathrm{I}(x_0, y_0) = \pi/(2M)$과 모순되지 않음을 확인하라.

4 **진자.** 위의 공식을 이용하여, 60°에서 놓은 진자의 주기가 작은 각 근사의 예측보다 얼마나 더 긴지 유효숫자 세 자리까지 구하라.

더 읽을거리

- **David Cox, "The arithmetic–geometric mean of Gauss"**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984). 역사와 수학을 다룬 고전적인 해설로, 앞부분은 미적분만 알면 읽을 수 있다.
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). 산술기하평균과 π의 고속 계산에 관한 결정판이라 할 만한 책이다.
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters). 실험 수학을 다룬 책으로, 가우스의 발견처럼 수치적 우연의 일치를 포착하여 이루어진 발견들을 담고 있다.

2.7 여섯 자리인가, 육백 자리인가

문제

STEP II 2023, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

도입

$\sqrt{2}$를 근사하는 간단한 방법이 두 가지 있다. 둘 다 1에서 시작하고, 덧셈, 곱셈, 나눗셈만 사용한다. 열 단계를 거친 뒤 첫 번째 방법은 소수점 아래 약 8자리까지 정확하다. 두 번째 방법은 700자리 넘게 정확하다.

두 번째 방법이 $\sqrt{2}$에 대해 더 영리해서 이런 차이가 생기는 것은 아니다. 차이는 오차의 **모양**에 있다. 첫 번째 방법에서는 각 단계가 오차에 일정한 비율을 곱하고, 두 번째 방법에서는 각 단계가 오차를 **제곱**한다. 이 문제는 이 사실을 엄밀하게 다루며, 그 과정에서 수치해석(numerical analysis)의 핵심 아이디어 하나를 소개한다. 수치해석은 모든 계산기, 모든 일기예보, 모든 공학 시뮬레이션의 바탕이 되는 분야이다.

시작하기 전에

각 수열의 처음 몇 항을 분수로 계산해 보자.

$$x_n: \quad 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots \qquad y_n: \quad 1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \dots$$

생각해 보기 두 목록에서 눈에 띄는 점이 있는가? (두 목록에 모두 나타나는 분수를 살펴보라.)

모든 y_n은 x 목록에 나타나지만, 점점 더 뒤쪽에 나타난다. $y_2 = x_3$, $y_3 = x_7$이고, 일반적으로 $y_n = x_{2^n-1}$이다. 두 번째 방법은 같은 근삿값의 수열을 지수적으로 빠르게 건너뛰며 나아가는 것이다. 이 점을 기억해 두자. 그 이유는 끝에서 설명한다.

차근차근 풀기

1단계 첫 번째 방법은 항상 1 이상이다

$x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n + 1}$로 쓸 수 있다. $x_n \geq 1$이면 $x_n + 1 > 0$이므로 $x_{n+1} > 1$이다. $x_0 = 1$이므로, 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대해 $x_n \geq 1$이다. ■

2단계 첫 번째 방법의 오차

> **생각해 보기** 문제는 오차를 $x_n - \sqrt{2}$가 아니라 $x_n^2 - 2$로 측정한다. $x_{n+1}^2 - 2$를 x_n에 관한 하나의 분수로 나타내어라. 분자에서 무엇을 알 수 있는가?

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n + 2)^2 - 2(x_n + 1)^2}{(x_n + 1)^2} = \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n + 1)^2} = \frac{2 - x_n^2}{(x_n + 1)^2}.$$

분자는 정확히 $-(x_n^2 - 2)$이다. 따라서 $x_{n+1}^2 - 2$와 $x_n^2 - 2$는 부호가 반대이고(근삿값이 $\sqrt{2}$의 양쪽을 번갈아 오간다), $x_n \geq 1$이면 $(x_n + 1)^2 \geq 4$이므로

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n + 1)^2} \leq \frac{1}{4}|x_n^2 - 2|. \qquad \blacksquare$$

3단계 열 단계

이를 열 번 적용하면 $|x_{10}^2 - 2| \leq 4^{-10}|x_0^2 - 2| = 4^{-10} = \frac{1}{1048576} < 10^{-6}$이다. 부호를 보면, $x_0^2 - 2 = -1 < 0$이고 부호가 번갈아 바뀌므로 모든 짝수 n에 대해 $x_n^2 - 2 < 0$이다. 따라서 $x_{10}^2 < 2$이고, 이 둘을 합치면 $2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2$를 얻는다. ■

x_n^2의 오차는 각 단계에서 많아야 $\frac{1}{4}$배가 된다. 이를 **선형 수렴**(*linear convergence*)이라 한다. 단계마다 정확한 자릿수가 일정한 개수만큼 늘어난다(여기서는 적어도 $\log_{10} 4 \approx 0.6$자리이고, 실제로는 0.77에 더 가깝다).

4단계 두 번째 방법의 오차

> **생각해 보기** $y_{n+1} - \sqrt{2}$를 하나의 분수로 나타내어라. 분자를 보면 완전제곱식이 떠오를 것이다.

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{(y_n - \sqrt{2})^2}{2y_n}. \qquad \blacksquare$$

$y_n > 0$이면 우변은 음이 아니므로 $y_{n+1} \geq \sqrt{2} > 1$이다. $y_0 = 1$이므로, 귀납법에 의해 모든 n에 대해 $y_n \geq 1$이다. ■(실제로 모든 $n \geq 1$에 대해 $y_n \geq \sqrt{2}$이다. 즉 첫 단계 이후 두 번째 방법은 항상 위쪽에서 $\sqrt{2}$에 다가간다.)

5단계 **오차의 제곱**

$e_n = y_n - \sqrt{2}$라 하자. 그러면 $n \geq 1$일 때 $e_n \geq 0$이고, $y_n \geq 1$이므로 $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2y_n} \leq \dfrac{e_n^2}{2}$이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$일 때, $n \geq 1$에 대해 $e_n \leq 2r^{2^n}$임을 귀납법으로 증명하여라. 기저 단계를 주의 깊게 확인하라.

기저 단계(*base case*): $e_1 = \dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2 \cdot 1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$이고, $2r^2 = 2 \cdot \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$이다. 두 값이 같으므로 기저 단계가 (등호로 정확히) 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*): $e_n \leq 2r^{2^n}$이면

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}}. \qquad \blacksquare$$

6단계 **600자리**

$\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$이므로 $r < \frac{1}{4}$이고, 따라서

$$0 \leq y_{10} - \sqrt{2} \leq 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{10}} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

그런데 $2^{10} = 1024 > 10^3$이므로 $2^{-2047} < 2^{-2040} = (2^{10})^{-204} < 10^{-612}$이고, 이는 분명히 10^{-600}보다 작다. $\blacksquare$

돌아보기

- **오차 점화식을 찾아라.** 두 부분 모두 새 오차를 이전 오차의 정확한 함수로 나타내어 풀었다. 나머지는 모두 여기서 따라 나왔다. 이러한 식을 오차 점화식(error recurrence)이라 한다.
- **선형 대 이차.** "새 오차 $\leq$ 상수 $\times$ 이전 오차"이면 단계마다 자릿수가 일정한 개수만큼 늘어난다. "새 오차 $\leq$ 상수 $\times$ (이전 오차)^2"이면 단계마다 정확한 자릿수의 개수가 두 배가 된다(그림 2.7.1).
- **제곱된 양이 부호를 결정한다.** (ii)에서 한 단계 후의 오차는 제곱을 양수로 나눈 것이므로 결코 음수가 될 수 없다. 즉 반복은 위쪽에서 다가간다.

숨은 수학

뉴턴 방법

두 번째 방법은 $f(y) = y^2 - 2$에 **뉴턴 방법**(Newton's method)을 적용한 것이다. 뉴턴 방법은 추측값 y를 y에서의 접선(tangent)이 축과 만나는 점으로 바꾸는 과정을 반복하여 f의 근을 찾는다.

$$y_{\text{새}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2 - 2}{2y} = \frac{y^2 + 2}{2y}.$$

단순근(simple root) α 근처에서 테일러 전개(Taylor expansion)를 하면 새 오차가 대략 $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{이전 오차})^2$임을 알 수 있다. 이것이 뉴턴 방법이 이차 수렴(quadratic convergence)하는 이유이다. "y와 $2/y$의 평균을 취한다"는 이 특별한 경우는 바빌로니아인들도 알고 있었다. 오늘날 YBC 7289라고 불리는 기원전 1700년경의 점토판에는 $\sqrt{2}$가 60진법으로, 백만분의 일보다 작은 오차로 적혀 있다.

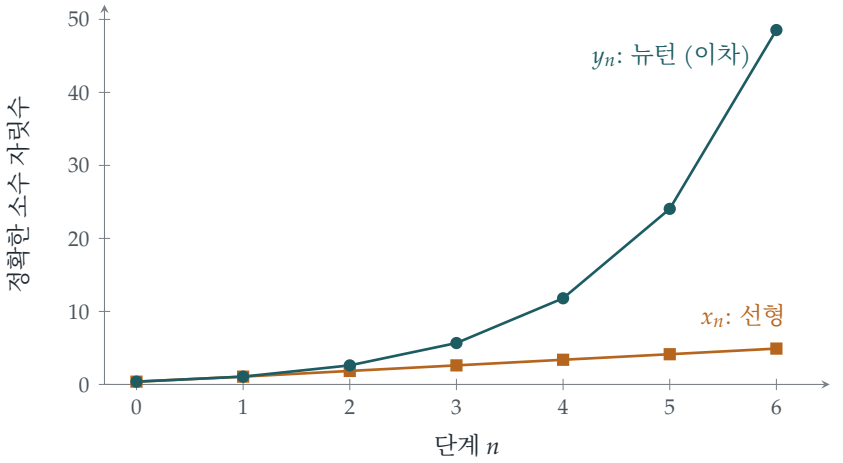


그림 2.7.1 각 방법을 n단계 적용한 뒤 얻은 $\sqrt{2}$의 정확한 소수 자릿수. 선형 방법은 단계마다 약 0.77자리씩 늘어나고, 뉴턴 방법은 단계마다 정확한 자릿수가 대략 두 배가 되어 $n = 10$에서는 약 780자리에 이른다.

고정점과 수렴 속도

두 방법 모두 $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$인 $u_{n+1} = g(u_n)$ 꼴이므로, Section 2.2의 거미줄 그림(cobweb diagram)에서처럼 $\sqrt{2}$는 **고정점**(fixed point)이다. 고정점 α 근처에서 오차는 각 단계마다 약 $g'(\alpha)$배가 된다. 첫 번째 방법에서는 $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$이고 $g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3 - 2\sqrt{2}) \approx -0.17$이다. 음의 부호는 부호가 번갈아 바뀌는 현상을 설명하고, 0.17은 단계마다 0.77자리씩 늘어나는 것을 설명한다($\log_{10}(1/0.17) \approx 0.77$). 뉴턴 방법에서는

$g'(\alpha) = 0$이므로 일차항이 사라지고, 오차는 그다음 항, 곧 제곱항이 결정한다. $g'(\alpha) = 0$인 반복을 설계하는 것이 빠른 수치 계산법의 기술이다.

같은 분수가 나타나는 이유

분수 $x_n = p_n/q_n$은 $p_{n+1} = p_n + 2q_n$과 $q_{n+1} = p_n + q_n$을 만족하고, $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$이며 부호가 번갈아 나타난다. 이들은 **펠 방정식**(Pell's equation) $p^2 - 2q^2 = \pm 1$의 해이며, 연분수(continued fraction) $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$의 근사분수(convergent)이다. 이들은 $1 + \sqrt{2}$의 거듭제곱에서 나온다. 즉 $p_n + q_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1}$이다. 뉴턴 방법의 한 단계는 $p + q\sqrt{2}$를 제곱한다(직접 확인해 보라. $(p+q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$이고, $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$는 정확히 p/q에 뉴턴 공식을 적용한 것이다). 제곱하면 지수가 두 배가 되므로 $y_n = x_{2^n-1}$이다. 같은 "제곱" 패턴이 Section 2.8의 반복을 이끈다.

사고 기술

답이 아니라 오차를 분석하라

근삿값이 어떻게 움직이는지 이해하려면, 한 단계의 오차가 바로 앞 단계의 오차에 어떻게 의존하는지 적어 보라.

이것이 수치해석의 출발점이다. 답 자체($\sqrt{2}$)는 두 방법에서 같다. 다른 것, 그리고 실제로 중요한 것은 오차가 어떻게 변해 가는가이다.

더 도전하기

1 **펠 방정식.** $y_n = p/q$가 기약분수이고 $p^2 - 2q^2 = 1$이면, $y_{n+1} = \dfrac{p^2+2q^2}{2pq}$도 이 방정식을 만족함을 보여라. $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$임을 확인하라.

2 **세 제곱근.** $f(y) = y^3 - 2$에 대한 뉴턴 방법을 적고, $\alpha = \sqrt[3]{2}$일 때 새 오차가 $\dfrac{(y_n-\alpha)^2(2y_n+\alpha)}{3y_n^2}$임을 보여라. 이로부터 $y_n > \alpha$이면 새 오차가 이전 오차의 제곱의 많아야 $\frac{1}{\alpha}$배임을 이끌어 내라. (**힌트:** $\alpha^3 = 2$를 이용하라.)

3 **나누지 않고 나누기.** $f(y) = \frac{1}{y} - a$에 대한 뉴턴 방법이 나눗셈이 필요 없는 $y_{n+1} = y_n(2 - ay_n)$을 줌을 보여라. $e_n = 1 - ay_n$이라 하면 $e_{n+1} = e_n^2$임을 보여라. (컴퓨터 프로세서는 이와 같은 반복을 이용해 나눗셈을 한다.)

4 **뉴턴 방법이 실패할 때.** 유일한 근이 0인 $f(y) = y^{1/3}$에 뉴턴 방법을 적용하라. 어떤 값에서 시작하든 각 단계가 근으로부터의 거리를 두 배로 만듦을 보여라. 오차 공식의 어떤 가정이 성립하지 않는가?

더 읽을거리

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*** (Cambridge University Press). 수치해석 입문. 학부의 표준 교재로, 제1장에서 고정점 반복과 뉴턴 방법을 다룬다.
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics*** (Princeton University Press). 프린스턴 응용수학 안내서. 뉴턴 방법과 수치해석에 관한 짧은 글들이 실려 있으며, 전문가들이 폭넓은 독자를 위해 썼다.
- **David Fowler & Eleanor Robson, "Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context"**, *Historia Mathematica* 25 (1998). 고대 바빌로니아 수학의 제곱근 근삿값을 YBC 7289를 중심으로 살펴본 논문.

2.8 제곱하고 2 빼기

문제

STEP III 2021, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

"제곱하고 2를 뺀다"는 수열(sequence)을 만들어 내는 규칙 가운데 거의 가장 단순한 것이다. 그런데도 이 규칙은 실수직선을 두 세계로 나눈다. $[-2, 2]$ 바깥에서 시작하면 수들은 지수적인 속도보다도 빠르게 무한대로 폭발한다. 안쪽에서 시작하면 수들은 영원히 그 안에 갇혀 있으면서, 정확한 의미에서 완전히 예측할 수 없는 방식으로 떠돈다. 이것은 혼돈(*chaos*)의 가장 단순한 예 가운데 하나이다.

같은 규칙을 아주 큰 정수로 수행하면, 메르센 수(Mersenne number) $2^p - 1$이 소수(prime)인지 효율적으로 판정하는 뤼카–레머 판정법(Lucas–Lehmer test)의 엔진이 된다. 이 판정법으로 현재의 최대 소수 기록과, 알려진 가장 큰 소수들 대부분이 발견되었다. 이 문제는 이야기의 탈출하는 쪽을 탐구하고, 수열을 완전히 풀 수 있게 해 주는 숨은 공식을 찾아낸다.

시작하기 전에

몇 가지 시작값을 넣어 보자. $a = 3$이면 $3, 7, 47, 2207, \ldots$이다. $a = 1$이면 $1, -1, -1, -1, \ldots$이다. $a = 0$이면 $0, -2, 2, 2, 2, \ldots$이다. $a = 0.3$이면 $0.3, -1.91, 1.648, 0.716, -1.487, 0.211, \ldots$이다.

> ? **생각해 보기** $[-2, 2]$ 안의 수는 왜 결코 탈출하지 못할까? $-2 \le x \le 2$일 때 $x^2 - 2$의 최댓값과 최솟값은 무엇인가?

$-2 \le x \le 2$이면 $0 \le x^2 \le 4$이므로 $-2 \le x^2 - 2 \le 2$이다. 구간 $[-2, 2]$는 자기 자신 안으로 보내진다. 이것이 소문항 (ii)의 절반이 될 것이다.

차근차근 풀기

1단계 탈출

생각해 보기 소문항 (i)에는 4^{n-1}이 들어 있는데, 이는 2 위로 떨어진 거리가 매 단계 적어도 네 배가 된다는 것을 암시한다. $x_n = 2 + d$라 하자. x_{n+1}을 d로 나타내면 무엇인가?

$x_{n+1} = (2+d)^2 - 2 = 2 + 4d + d^2$이다. 따라서 $d \geq 0$이면 2 위로 떨어진 새 거리는 $4d + d^2 \geq 4d$이다.

이제 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. $n = 1$일 때 $x_1 = a = 2 + 4^0(a-2)$이다. $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$이면 $d = x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2) \geq 0$이므로

$$x_{n+1} - 2 \geq 4d \geq 4^n(a-2). \qquad \blacksquare$$

2단계 $|a| > 2$일 때, 그리고 그때에만 탈출한다

생각해 보기 "필요충분조건(if and only if)"은 두 개의 별도 증명을 뜻한다. 소문항 (i)이 거의 주는 것은 어느 방향이며, 무엇이 빠져 있는가?

$|a| > 2$이면: $a > 2$일 때는 소문항 (i)에 의해 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2) \to \infty$이다. $a < -2$일 때는 첫 단계에서 부호가 정해진다. $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$이고, x_2부터의 수열은 $x_2 > 2$에서 시작한 같은 수열이므로 무한대로 발산한다.

역으로: $|a| \leq 2$이면 $a \in [-2, 2]$이고, 앞의 관찰에 의해 모든 항이 $[-2, 2]$ 안에 머문다. 유계(bounded)인 수열은 무한대로 발산할 수 없다. $\blacksquare$

3단계 숨은 공식

소문항 (iii)은 만만치 않아 보인다. 이 문항에 도전하기 전에 x_n에 대한 공식을 찾아 두는 것이 좋다.

생각해 보기 $a > 2$이면 $a = t + \dfrac{1}{t}$인 수 $t > 1$이 존재한다. (왜 그런가?) x_2와 x_3를 t로 나타내면 무엇인가?

함수 $t + 1/t$는 t가 1에서 ∞로 갈 때 2에서 ∞까지 증가하므로, 모든 $a > 2$를 이런 꼴로 쓸 수 있다. 그러면

$$x_2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad x_3 = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 - 2 = t^4 + \frac{1}{t^4},$$

이고, 귀납법에 의해

$$x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}.$$

제곱하고 2를 빼는 것은 단지 지수를 두 배로 만드는 일이다. 이제 문제를 다룰 수 있게 되었다.

4단계 곱이 연쇄적으로 소거된다

생각해 보기 $\left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)$는 무엇인가? 그 결과에 $t^2 + \frac{1}{t^2}$을 곱하면 어떻게 되는가?

$\left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^2 - \frac{1}{t^2}$이고, 다음으로 $\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = t^4 - \frac{1}{t^4}$이며, 이런 식으로 계속된다. 각 인수 x_k는 두 거듭제곱의 차에서 지수를 두 배로 만든다. 따라서

$$\left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 x_2 \cdots x_n = t^{2^n} - t^{-2^n}.$$

잠깐, 직접 해 보기 $x_{n+1}^2 - 4$를 t로 계산하고, 위의 곱과 비교해 보라.

$$x_{n+1}^2 - 4 = \left(t^{2^n} + t^{-2^n}\right)^2 - 4 = \left(t^{2^n} - t^{-2^n}\right)^2.$$

$t > 1$이므로 $t^{2^n} - t^{-2^n} > 0$이고, 따라서 $\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = t^{2^n} - t^{-2^n} = \left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 x_2 \cdots x_n$이다. 그러므로

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

이고, 이것이 모든 n에 대하여 y_n과 같을 필요충분조건은 $A = t - \frac{1}{t}$이다. 마지막으로 $\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 4 = a^2 - 4$이므로 조건은 $A = \sqrt{a^2 - 4}$, 즉

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

($A > 0$이므로 이 값은 요구대로 2보다 크다.) ■

5단계 y_n은 수렴하는가?

이 a의 값에 대하여

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

소문항 (ii)에 의해 $x_{n+1} \to \infty$이므로 $\frac{4}{x_{n+1}^2} \to 0$이고 $y_n \to 1$이다. 이 수열은 1로 수렴(converge)한다. ■

따라서 무한곱(infinite product) $x_1 x_2 x_3 \cdots$는 정확히 x_{n+1}/A와 같은 속도로 커진다. 빠르게 커지는 항들의 곱이 얼마나 빨리 커지는지를 정확히 알아낸 것이다.

돌아보기

- **불변 영역(invariant region).** $[-2,2]$는 자기 자신 안으로 보내지며, 이 한 가지 사실이 소문항 (ii)의 절반을 해결한다.
- **선형화하는(linearise) 치환.** $a = t + 1/t$로 놓으니 "제곱하고 2를 빼기"가 "지수를 두 배로 만들기"로 바뀌었다. 복잡한 비선형 거동이 단순해졌다.
- **다시 연쇄 소거(telescoping).** Section 2.5의 곱에서처럼, 각 인수가 다음 인수와 맞물리기 때문에 많은 인수의 곱이 간단히 줄어들었다.

숨은 수학

질서와 혼돈

$[-2,2]$ 안에서는 무슨 일이 일어날까? 거기서는 $a = t + 1/t$가 통하지 않지만($|a| \geq 2$가 필요하다), 삼각함수 버전이 통한다. $a = 2\cos\theta$라 하자. 그러면 $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$이고, 일반적으로

$$x_n = 2\cos\bigl(2^{n-1}\theta\bigr).$$

따라서 구간 안에서 이 사상은 단지 **각을 두 배로 만든다**. 해롭지 않게 들리지만, 각을 두 배로 만드는 것은 혼돈적이다. θ/π를 이진법(binary)으로 써 보자. 두 배로 만들면 소수점이 오른쪽으로 한 자리 이동하면서 맨 앞자리 숫자가 버려진다. 50단계 뒤에 x_n은 θ/π의 이진 전개에서 51번째 자리 숫자에 의존하므로, 시작값에 10^{-15}(보통 컴퓨터의 정밀도)만큼의 오차가 있으면 50단계 뒤의 답은 전혀 믿을 수 없게 된다. 이러한 초기 조건에 대한 민감한 의존성(sensitive dependence on initial conditions)이 혼돈의 특징이며, 그림 2.8.1에 나타나 있다. 사상 $x \mapsto x^2 - 2$는 변수를 바꾸면 유명한 로지스틱 사상(logistic map) $x \mapsto 4x(1-x)$와 동등하며, 이 사상은 Section 8.7에서 다시 만난다.

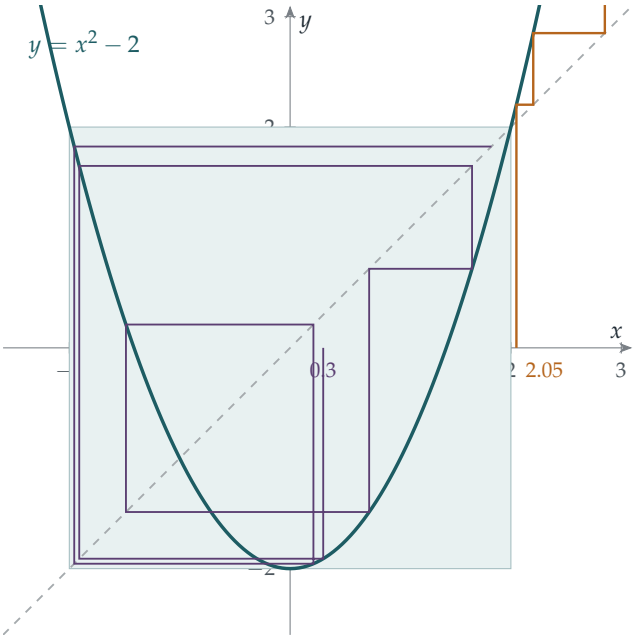


그림 2.8.1 $x_{n+1} = x_n^2 - 2$의 거미줄 그림(cobweb diagram). 0.3(자주색)에서 시작하면 궤도(orbit)는 음영 처리된 정사각형 $[-2,2]^2$ 안에 영원히 머물며 혼돈적으로 떠돈다. 바로 바깥인 2.05(호박색)에서 시작하면 궤도는 탈출한다: $2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

가장 큰 소수 찾기

메르센 수는 $M_p = 2^p - 1$이다. 1876년에 에두아르 뤼카(Édouard Lucas)가 발견하고 1930년에 데릭 레머(Derrick Lehmer)가 완성한, M_p가 소수인지(p가 홀수인 소수일 때) 판정하는 놀라운 방법이 있다. $s_0 = 4$에서 시작하여 제곱하고 2를 빼는 일을 되풀이하되, 매번 M_p를 법으로 하여 줄인다. 그러면

$$M_p\text{는 소수} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

$M_7 = 127$의 경우 $s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$이므로 127은 소수이다. 이 문제와의 연결 고리는 치환이다. $t = 2 + \sqrt{3}$으로 두면 $4 = t + 1/t$이므로 $s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$이고, 판정법의 증명에는 Section 1.6의 가우스 정수(Gaussian integers)와 비슷한 $a + b\sqrt{3}$ 꼴의 수의 산술이 쓰인다. 각 단계에 제곱 한 번만 필요하므로 이 판정법은 매우 빠르며, 그래서 현재의 기록 보유자를 포함하여 알려진 가장 큰 소수들 대부분이 메르센 소수이다(모두가 그런 것은 아니다. $a^{2^n} + 1$과 같은 다른 특수한 꼴에도 그 나름의 빠른 판정법이 있다). 이 글을 쓰는 시점의 기록은 2024년에 발견된 $2^{136279841} - 1$로, 41백만 자리가 넘는 수이다.

망델브로 집합

-2를 임의의 상수 c로 바꾸고 복소수를 허용하자: $z \mapsto z^2 + c$. 0의 궤도가 유계로 남는 c들의 집합이 **망델브로 집합**(*Mandelbrot set*)이다. 우리의 사상은 $c = -2$로, 망델브로 집합의 가장 왼쪽 점이며, 궤도가 유계로 남는 시작값들의 집합(이 사상의 **쥘리아 집합**(*Julia set*))은 바로 소문항 (ii)에서 찾은 구간 $[-2, 2]$이다. 거의 모든 다른 c에 대해서는 이 집합이 프랙털(fractal)이 된다.

사고 기술

> **변수를 바꾸어 사상을 단순하게 만들기**
>
> 반복 과정이 복잡해 보이면, 그것을 두 배로 만들기나 상수 더하기처럼 단순한 것으로 바꾸어 주는 치환을 찾아보라.
>
> 여기서는 $x = t + 1/t$와 $x = 2\cos\theta$가 $x \mapsto x^2 - 2$를 두 배로 만들기로 바꾸었다. 동역학계(dynamical systems) 이론에서는 이것을 **켤레**(*conjugacy*)라 부르며, 이를 찾는 것이 계를 완전히 이해하는 열쇠가 되는 경우가 많다.

더 도전하기

1 **구간 안에서.** $a = 2\cos\theta$이면 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$임을 증명하라. $x_3 = a$이지만 $x_2 \neq a$인 a의 값을 모두 구하라. (**힌트:** 2π를 법으로 하여 $4\theta \equiv \pm\theta$가 되기를 원한다.)

2 **손으로 하는 뤼카–레머 판정.** 판정법을 이용하여 $M_5 = 31$은 소수이고 $M_{11} = 2047$은 소수가 아님을 보여라. (M_{11}에는 아홉 단계가 필요하며, 계산기가 도움이 된다. 2047을 인수분해하여 결론을 확인하라.)

3 **구체적인 예.** $A = \frac{3}{2}$로 두자. a와 t를 구하고, 공식 $y_1 = \sqrt{x_2^2 - 4}/x_2$를 수치로 확인하라.

4 **연쇄 소거되는 합.** 심화 $a = t + 1/t$이고 $t > 1$일 때

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{t - t^{-1}}{t^{2^n} - t^{-2^n}}.$$

임을 보여라. 항등식 $\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{z}{z^2-1}$에 $z = t^{2^n}$을 넣어 다음을 유도하라.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \cdots = \frac{1}{t}.$$

$a = 3$일 때 이를 수치로 확인하라.

더 읽을거리

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?*** (Penguin). 로지스틱 사상을 포함하여 혼돈을 다룬 고전적인 대중서이다.
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 표준적인 학부 입문서이며, 10장은 이와 같은 1차원 사상을 다룬다.
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes*** (Fourth Estate). 메르센 소수를 찾는 이야기가 담겨 있다.

2.9 e에 다가가는 분수들

문제

STEP II 2021, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

e를 잘 근사하는 분수는 어떻게 찾을 수 있을까? 급수(series) $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots$를 중간에서 끊을 수도 있지만, 그렇게 얻은 분수는 분모(denominator)의 크기에 비해 그리 좋은 근사가 아니다. 이 문제는 훨씬 더 영리한 방법을 쓴다. 적분(integral)들의 모임을 만드는데, 각 적분은 "정수 + 정수 × e" 꼴의 작은 수이다. $a+be$가 아주 작으면 e는 $-a/b$에 매우 가깝고, 따라서 이 적분들은 $\frac{19}{7}$, $\frac{193}{71}$, $\frac{2721}{1001}$, ...와 같은 훌륭한 분수들의 수열을 건네준다.

동시에 작으면서 "관심 있는 수의 정수 결합" 꼴인 적분이라는 이 같은 기법은 수학에서 가장 깊은 무리성 증명(irrationality proof)들의 바탕에 있다. 여기에는 e가 초월수임을 보인 에르미트(Hermite)의 증명과 $\zeta(3)$이 무리수임을 보인 아페리(Apéry)의 증명이 포함된다.

시작하기 전에

$[0,1]$에서 피적분함수(integrand) $\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$를 살펴보자.

생각해 보기 $[0,1]$에서 $t(1-t)$의 최댓값은 얼마인가? 이것은 n이 커질 때 T_n의 크기에 대해 무엇을 알려 주는가?

$t(1-t)$의 최댓값은 $t=\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{4}$이다. 따라서 피적분함수는 많아야 $\frac{e}{4^n n!}$이고, 이 값은 놀라울 만큼 빠르게 줄어든다(그림 2.9.1). 이 작음이 이야기의 절반이다. 나머지 절반, 곧 T_n이 a_n+b_ne라는 특별한 꼴을 갖는다는 사실은 부분적분(integration by parts)에서 나온다.

차근차근 풀기

1단계 두 번 미분하기

$p(t) = t^n(1-t)^n$이라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$p'(t) = nt^{n-1}(1-t)^n - nt^n(1-t)^{n-1} = nt^{n-1}(1-t)^{n-1}(1-2t).$$

생각해 보기 한 번 더 미분해 보자. 두 항이 나오는데, 공통인수 $nt^{n-2}(1-t)^{n-2}$를 묶어 낸다. 요구된 꼴에 맞추려면 $(1-2t)^2$을 $t(1-t)$로 나타내야 한다. 어떻게 하면 될까?

$n\,[t(1-t)]^{n-1}(1-2t)$를 곱의 미분법으로 미분하면($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)] = 1-2t$임에 주의한다)

$$\begin{aligned} p''(t) &= n(n-1)[t(1-t)]^{n-2}(1-2t)^2 - 2n[t(1-t)]^{n-1} \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\Big[(n-1)(1-2t)^2 - 2t(1-t)\Big]. \end{aligned}$$

이제 $(1-2t)^2 = 1-4t+4t^2 = 1-4t(1-t)$이므로 괄호 안은 $(n-1) - 4(n-1)t(1-t) - 2t(1-t) = (n-1) - 2(2n-1)t(1-t)$이다. ■

2단계 두 번 부분적분하기

생각해 보기 $p(t)$는 $t=0$과 $t=1$에서 모두 0이다. $n \geq 2$일 때 $p'(t)$는 어떠한가? $p(t)e^t$를 부분적분할 때 이것이 왜 중요한가?

$n \geq 2$이면 $p'(t)$는 인수 $t^{n-1}(1-t)^{n-1}$을 가지므로 역시 양 끝에서 0이 된다. 두 번 부분적분하면 모든 경계항이 0이다.

$$\int_0^1 p\,e^t\,\mathrm{d}t = \Big[p\,e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 p'\,e^t\,\mathrm{d}t = -\Big[p'\,e^t\Big]_0^1 + \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t.$$

1단계에서 $p''(t) = n(n-1)\,t^{n-2}(1-t)^{n-2} - 2n(2n-1)\,t^{n-1}(1-t)^{n-1}$이다. $n!$으로 나누면

$$\frac{p''(t)}{n!} = \frac{t^{n-2}(1-t)^{n-2}}{(n-2)!} - 2(2n-1)\frac{t^{n-1}(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

e^t를 곱하고 적분하면 $T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1}$을 얻는다. ■

3단계 정수 구조

$T_0 = \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e-1$이다. $T_1 = \int_0^1 (t-t^2)e^t\,\mathrm{d}t$에 대해서는 부분적분으로 $\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = 1$과 $\int_0^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t = e-2$를 얻으므로 $T_1 = 1-(e-2) = 3-e$이다.

생각해 보기 $T_0 = -1 + 1 \cdot e$이고 $T_1 = 3 + (-1) \cdot e$이다. 왜 모든 T_n이 정수 a_n, b_n에 대해 $a_n + b_n e$ 꼴이어야 하는가?

강한 귀납법(strong induction)을 쓴다. 정수 계수로 $T_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-2}e$이고 $T_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}e$이면

$$T_n = (a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}) + (b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1})e,$$

이고 새 계수들도 정수이다. ■

4단계 작으므로 정보를 준다

$0 < t < 1$에서 피적분함수는 양수이고, $t^n(1-t)^n \le 1$이며 $e^t < e$이다. 따라서

$$0 < T_n < \int_0^1 \frac{e}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{e}{n!}.$$

잠깐, 직접 해 보기 $0 < a_n + b_n e < \dfrac{e}{n!}$를 $|b_n|$으로 나누어 보자. 이것은 e와 $-a_n/b_n$ 사이의 거리에 대해 무엇을 말해 주는가?

$|b_n|$은 양의 정수이므로 1 이상이고, 이것으로 나누면

$$\left| e - \left(\frac{-a_n}{b_n} \right) \right| = \frac{|a_n + b_n e|}{|b_n|} < \frac{e}{n!\,|b_n|} \le \frac{e}{n!}.$$

우변은 0으로 수렴(converge)하므로 $-a_n/b_n \to e$이다. ■

점화식(recurrence)으로 계산한 처음 몇 개는 다음과 같다.

n	2	3	4	5	6
$-a_n/b_n$	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$	$\frac{49171}{18089}$	$\frac{1084483}{398959}$
오차	4×10^{-3}	3×10^{-5}	1×10^{-7}	3×10^{-10}	5×10^{-13}

분수 $\frac{2721}{1001}$은 분모가 네 자리에 불과한데도 소수점 아래 6자리까지 정확하다.

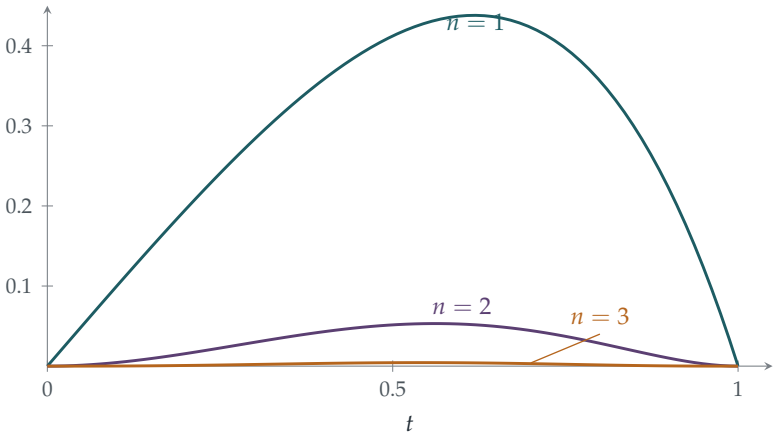


그림 2.9.1 $n = 1, 2, 3$일 때의 피적분함수 $\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$. 각각은 $(0,1)$에서 양수이므로 각 T_n은 양수이다. 또한 매우 빠르게 줄어들어 $n = 3$에서는 곡선이 거의 보이지 않는다. 양수이지만 아주 작다는 것, 이것이 바로 논증에 필요한 것이다.

돌아보기

- **점화식을 만들어 내는 부분적분.** 다항식과 그 도함수가 양 끝에서 0이 되었기 때문에, 부분적분으로 경계항 없는 깔끔한 점화식을 얻었다.
- **구조와 크기를 함께.** 점화식은 T_n이 $a_n + b_n e$ 꼴임을 보여 주었고, 부등식은 그것이 작다는 것을 보여 주었다. 어느 하나만으로는 e의 근사에 대해 아무것도 말할 수 없다.
- **필요 없는 것은 계산하지 마라.** 문제는 a_n과 b_n을 구하지 말라고 했고, 논증에서도 그 값은 전혀 필요하지 않았다. 필요한 것은 그것들이 정수라는 사실뿐이었다.

숨은 수학

e가 무리수라는 또 하나의 증명

이 문제는 유명한 정리의 바로 앞에서 멈춘다. 양의 정수 p, q에 대해 $e = p/q$라고 가정하자. 그러면

$$q\,T_n = qa_n + b_n p$$

는 정수이다. 그런데 $0 < q\,T_n < \frac{qe}{n!}$이고, n이 충분히 크면 우변은 1보다 작다. 따라서 qT_n은 0과 1 사이에 엄격히 놓인 정수가 되어야 하는데, 이는 불가능하다. 그러므로 e는 무리수(irrational number)이다. 이것은 Section 1.4의 "0과 1 사이에 정수를 가두기" 아이디어를 급수 대신 적분으로 구현한 것이다. 바로 이런 종류의 적분, 곧 $t^n(1-t)^n$ 같은

다항식을 포함한 적분을 샤를 에르미트(Charles Hermite)는 1873년에 사용하여 e가 **초월수**(*transcendental number*)임을, 즉 정수 계수 다항식의 근이 될 수 없음을 증명했다.

연분수

표에 나온 분수들은 단지 좋은 정도가 아니라 **가장 좋은 것**에 속한다. 오일러(Euler)가 찾은 e의 연분수(continued fraction)는 아름다운 규칙을 가진다.

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

그리고 그 수렴분수(convergent)는 $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$이다. 우리가 얻은 $-a_n/b_n$은 정확히 세 번째마다의 수렴분수이다. 이보다 작은 분모를 가진 어떤 분수도 e에 더 가까이 가지 못한다. 유리수만이 유한 연분수를 가지므로, 오일러가 찾은 이 규칙 자체가 e가 무리수라는 최초의 증명이었다.

아페리의 기적

1978년 로제 아페리(Roger Apéry)는 $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$이 무리수라는 증명을 발표했다. 이는 오일러 이래로 풀리지 않았던 문제였다(Section 2.3 참고). 그의 증명은 너무나 뜻밖이어서 청중은 처음에 그것을 믿지 않았다. 1년 뒤 Frits Beukers는 다음 꼴의 적분을 이용한 짧은 증명을 찾았다.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1 - xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

여기서 P_n은 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n(1-x)^n\right)$로부터 만들어진다. 이 적분들은 작고, 양수이며, 통제된 분모로 나눈 "정수 + 정수 $\times\, \zeta(3)$" 꼴이다. 바로 이 문제의 전략 그대로이다. $\zeta(5)$나 $e + \pi$가 무리수인지는 아직도 알려져 있지 않다.

사고 기술

작지만 0은 아닌

어떤 양이 몇몇 수의 정수 결합이라는 것이 알려져 있고, 동시에 작지만 0은 아니라는 것도 알려져 있다면, 그 양은 정보를 담고 있다. 근사에 관한 정보, 그리고 때로는 무리성에 관한 정보이다.

이 패턴은 "구조는 대수에서, 크기는 해석학(analysis)에서"이다. 이것은 정수론(number theory) 전반에 걸쳐 되풀이되며, 해석학과 대수가 가장 생산적으로 만나는 지점 가운데 하나이다.

더 도전하기

1 **점화식 돌려 보기.** 점화식으로 $n = 2, 3, 4$일 때의 a_n과 b_n을 계산하고 표의 분수를 확인하라. b_n의 부호가 번갈아 바뀜을 보여라.

2 **더 날카로운 부등식.** $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$임을 보여라. 이것은 $-a_n/b_n$의 오차 추정을 얼마나 개선하는가?

3 **무리성 증명.** 위 상자에 있는 논증을 꼼꼼히 써 보라. $T_n > 0$이라는 사실은 정확히 어디에서 쓰이는가?

4 **다른 가중치.** 심화 e^t를 e^{2t}로 바꾸어 문제를 다시 풀어라(즉 $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\,dt$). U_n에 대한 점화식을 구하고, U_n이 유리수 계수를 갖는 1과 e^2의 결합임을 보인 다음, 이 논증으로 여전히 e^2이 무리수임을 증명할 수 있는지 탐구하라. (Section 1.4과 비교하라.)

더 읽을거리

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). 에르미트의 방법을 포함하여 무리성 증명을 다룬 고전적인 짧은 책이다.
- **Alfred van der Poorten, "A proof that Euler missed"**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979). 아페리의 증명과 그것이 받아들여진 과정을 생생하게 전하는 글이다.
- **Julian Havil, *The Irrationals*** (Princeton University Press). 일반적인 수학 독자를 위해 쓴 무리수의 역사이다.

우리가 배운 것

우리는 제논(Zeno)에서 출발했고, 무한 과정(infinite process)에 관한 세 가지 질문을 던졌다. 무한 과정에 답이 있다는 것은 무슨 뜻인가, 답이 있다는 것을 어떻게 증명하는가, 그리고 얼마나 빨리 답에 다가가는가. 아홉 개의 STEP 문제를 거친 지금, 우리가 어디까지 왔는지 정리해 보자.

1. 무한 과정에 답이 있다는 것은 무슨 뜻인가?

Section 2.1에서 우리는 그 언어를 배웠다. 수열(sequence)의 장기적 행동에 관한 명제는 "어떤 점 m이 존재하여 모든 $n \geq m$에 대하여..."라는 꼴을 띤다. 이를 증명한다는 것은 m을 실제로 제시한다는 뜻이고, 반증한다는 것은 제시된 어떤 m도 실패함을 보인다는 뜻이다. 극한(limit)의 정의는 맨 앞에 "모든 허용 오차 $\varepsilon > 0$에 대하여"라는 양화사(quantifier)를 하나 더 붙인다. 이것으로 제논의 역설은 해소된다. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$은 어느 지점부터는 원하는 어떤 허용 오차 안으로도 1에 가까워지며, "합이 1이다"라는 말의 뜻은 그것이 전부이다.

이 언어는 엉터리 논증을 막아 주기도 한다. "x를 그 무한 표현식이라 두자"라는 간단한 논증은 Section 2.2에서 황금비(golden ratio)에 대해 올바른 답을 주었지만, 그것은 극한이 존재한다는 것을 따로 증명할 수 있었기 때문이다. 같은 논증을 $1 - 1 + 1 - \cdots$에 적용하면 아무 의미도 없는 답이 나온다.

2. 극한을 모르면서 어떻게 수렴을 증명할 수 있는가?

이 장의 대부분의 절은 몇 가지 도구 가운데 하나를 사용했다.

- **단조(monotone)이고 유계(bounded).** 위로 유계인 증가수열은 반드시 수렴한다(Section 2.2, Section 2.6). 양수 항들의 부분합(partial sum)에도 같은 사실이 성립한다(Section 2.3). 대학에 가면 이것이 사실은 실수 자체에 관한 명제, 즉 **완비성**(*completeness*)이라는 성질임을 보게 된다.
- **비교(comparison).** 양수 항으로 이루어진 급수는 수렴하는 급수보다 작으면 수렴하고, 발산하는 급수보다 크면 발산한다. 항들을 묶음으로 나누면 비교가 쉬워졌고, 이를 통해 조화급수(harmonic series)는 발산하지만 Kempner의 솎아 낸 급수는 수렴함을 보였다(Section 2.3).

- **조임(squeeze).** 구하려는 양을 극한이 같은 더 단순한 두 양 사이에 가둔다. 이렇게 하여 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$을 증명했고(Section 2.4), AGM 적분을 엄밀하게 계산했다(Section 2.6).
- **유한 단계에 대한 정확한 공식.** Section 2.5와 Section 2.8에서는 망원 소거(telescoping)를 이용해 n단계 후의 정확한 식을 구했고, 맨 마지막에 가서야 $n \to \infty$로 보냈다.

극한이 존재한다는 것을 알고 나면, 황금비에 대한 $L = (2L+1)/(L+1)$처럼 점화식(recurrence)에서 "$n \to \infty$로 보내어" 그 값을 구할 수 있는 경우가 많다. 그러나 순서가 중요하다. 존재가 먼저이고, 값은 그다음이다.

3. 얼마나 빨리?

여기서 이 장은 몇 가지 놀라움을 안겨 주었다. 비에트(Viète)의 곱(Section 2.5)은 인수 하나마다 십진 자릿수를 약 0.6자리씩 얻는다. Section 2.7의 $\sqrt{2}$를 구하는 간단한 방법은 한 단계마다 약 0.8자리를 얻는다. 뉴턴(Newton)의 방법과 산술기하평균(AGM, arithmetic-geometric mean)(Section 2.6)은 단계마다 맞는 자릿수를 **두 배로** 늘린다. 뉴턴의 방법을 열 번만 적용해도 $\sqrt{2}$의 자릿수를 700자리 넘게 얻는다. 차이는 오차 점화식의 꼴에 있다. "새 오차 $\approx$ 상수 $\times$ 이전 오차"(선형(linear))와 "새 오차 $\approx$ 상수 $\times$ (이전 오차)^2"(이차(quadratic))의 차이이다. 그리고 Section 2.8에서는 반대쪽 극단을 보았다. 2보다 조금 큰 곳에서 시작하면 사상 $x \mapsto x^2 - 2$는 수를 지수적인 속도보다 더 빨리 밀어내고, $[-2, 2]$ 안에서는 아주 작은 오차를 증폭시켜 결국 예측 가능성을 모두 잃게 만든다.

속도는 이론에서도 중요하다. Section 2.9의 적분들은 e에 매우 빠르게 다가가는 분수들을 만들어 내며, 이를 통해 e가 무리수(irrational)임이 증명된다. 어떤 분수 p/q도 다른 분수들에 의해 그렇게 빨리 근사될 수는 없기 때문이다.

4. 해석학을 위한 도구 상자

방법	사용한 곳
양화사 제시하기와 부정하기	"결국"(2.1)
단조 유계 수열	황금비(2.2); AGM(2.6)
비교와 응축(condensation)	조화급수와 Kempner 급수(2.3)
조이기	$\pi^2/6$(2.4); AGM 적분(2.6)
근의 대칭함수(symmetric function)	$\cot^2$ 값들의 합(2.4)
망원 소거되는 합과 곱	비에트(2.5); $x^2 - 2$(2.8)
불변량(invariant)	AGM 적분(2.6)
오차 점화식	선형 수렴과 이차 수렴(2.7)
사상을 단순하게 만드는 변수 변환	$a = t + 1/t$, $a = 2\cos\theta$(2.8)
작지만 0이 아닌 정수 결합	e의 근사(2.9)

이 도구들 중 얼마나 많은 것이 "사용해도 되는 정리"를 곁들여 주어졌는지 눈여겨보자. STEP은 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem)를 그냥 건네주거나, 극한이 존재한다고 가정하라고 말해 주는 경우가 많다. 대학에서는 그런 정리들을 실수의 공리(axiom)로부터 직접 증명하게 되며, 어떤 논증이 극한의 존재를 슬그머니 가정하고 있을 때 그것을 스스로 알아차릴 것을 요구받는다. 풀이를 읽을 때 다음과 같이 묻는 것은 매우 좋은 습관이다. **정확히 어디에서 극한을 취했으며, 그것은 정당했는가?**

다음은 어디로

이 장의 아이디어들은 책의 나머지 부분 전체에 걸쳐 이어진다.

- 고정점(fixed point)과 거미줄 그림(cobweb diagram)은 Section 8.7에서 다시 등장하는데, 그곳에서는 혼돈(chaos)을 보이는 사상이 정확한 해를 가진다는 것이 밝혀진다.
- 조화수(harmonic number) $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$은 Section 9.11에서는 확률에, Section 11.12에서는 역학에 나타난다.
- 확률에서 비롯되어 극한 속에 π가 나타나는 또 다른 예는 Section 12.23에 있다.
- 극한을 신중하게 다루는 태도는 제3장의 주제이며, 제3장은 Section 3.1, 즉 옳아 보이지만 실제로는 틀린 논증들로 시작한다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***: 대학 1학년 해석학이 어떤 것인지, 그리고 그것에 어떻게 대처할지를 다룬다.
- **David Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis***: 수학자들이 신중해질 수밖에 없게 만든 수수께끼들에서 출발하여, 역사를 통해 해석학을 가르친다.
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press): 케임브리지의 해석학자가 바로 이 책의 독자 같은 사람들을 위해 쓴 책이다.
- **Julian Havil, *Gamma*와 William Dunham, *Euler: The Master of Us All***: 이 장에 나온 많은 급수 뒤에 숨은 이야기를 들려준다.

제논은 무한이 운동을 불가능하게 만든다고 생각했다. 수학자들이 그에게 답하기까지는 이천 년이 걸렸고, 그 답은 지금까지 발견된 가장 강력한 아이디어 가운데 하나로 밝혀졌다. 바로 끝나지 않는 과정에 대해 정확한 명제를 세우는 방법이다. 여러분은 이제 그 언어의 첫 몇 단어를 알게 되었다. 그 언어를 유창하게 말하는 법은 해석학(analysis)에서 배우게 될 것이다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 먼저 제대로 풀어 보라.

2.1 "결국"이란 무슨 뜻인가

1. $(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$의 모든 항은 음이 아니므로 $(1+x)^n \geq 1 + nx > nx$이다. $y = 1 + x$로 두면, $n > K/(y-1)$이기만 하면 $y^n > n(y-1) > K$이다. 그다음 항을 이용하면 $y^n > \binom{n}{2}(y-1)^2$이므로, $n > 1 + 2K/(y-1)^2$이기만 하면 $y^n/n > \frac{1}{2}(n-1)(y-1)^2 > K$이다.

2. $n \geq m_1$에서 $s_n \leq t_n$이고 $n \geq m_2$에서 $t_n \leq s_n$이면, $n \geq \max(m_1, m_2)$에서 $s_n = t_n$이다.

3. 예를 들어 n이 짝수일 때 $s_n = n + 0.6$, n이 홀수일 때 $s_n = n$으로 두고, n이 홀수일 때 $t_n = n + 0.6$, n이 짝수일 때 $t_n = n$으로 둔다. 두 수열은 모두 증가하고, 각 수열이 다른 수열보다 큰 경우가 무한히 많다.

4. $n \geq 4$이면 $2^n \leq n!$이다(귀납법(induction)으로: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq (n+1)\,n!$). $n^{10} \leq 2^n$의 경우, 이 부등식은 2부터 58까지의 모든 n에서 성립하지 않고 모든 $n \geq 59$에서 성립하므로, 가장 작은 m은 59이다.

2.2 극한으로서의 황금비

1. 귀납법: $u_1 = 1 = F_2/F_1$이고, $u_n = F_{n+1}/F_n$이면 $u_{n+1} = 1 + F_n/F_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1}$이다.

2. $\varphi - 1 = 1/\varphi$이므로 $u_{n+1} - \varphi = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi} = -\frac{u_n - \varphi}{\varphi u_n}$이다. $u_n \geq 1$이므로 $|u_{n+1} - \varphi| \leq |u_n - \varphi|/\varphi$이고, $|u_1 - \varphi| < 1$이므로 $|u_n - \varphi| \leq \varphi^{-(n-1)}$이다.

3. $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$는 $\psi^2 = \psi + 1$을 만족하므로 $1 + 1/\psi = \psi$이다. 거꾸로 거슬러 올라가면 $u_{n-1} = \frac{1}{u_n - 1}$이다. 0에서 시작하면 $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{8}, \ldots$을 얻는다. 즉 어떤 $k \geq 1$에 대해 $u_1 = -F_{k-1}/F_k$이다. 이 값들은 ψ에 가까워진다.

4. 고정점(fixed point)은 $v = 1 + \frac{1}{1+v}$, 즉 $v^2 = 2$를 만족한다. 오차(error)에는 매번 $-\frac{1}{(1+v_n)(1+\sqrt{2})}$가 곱해지고 그 크기는 많아야 $\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$이므로 $v_n \to \sqrt{2}$이다. 또한

$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$이다.

2.3 발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌

1. $\ln N + 0.5772 = 10$에서 $N \approx 12\,400$을 얻는다. 100을 넘으려면 약 $e^{99.4} \approx 1.5 \times 10^{43}$개의 항이 필요하다.

2. $k = 2$일 때 블록 n은 많아야 $2^n \cdot 4^{-n} = 2^{-n}$이므로, 합은 많아야 $\sum_{n\ge 0} 2^{-n} = 2$이다. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$를 정확히 더하고 $r = 4$부터의 블록들을 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}$로 위에서 어림하면 약 1.86을 얻는다. (참값은 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$이다.)

3. $1/(r \ln r)$의 경우 2^n부터 $2^{n+1} - 1$까지의 블록은 적어도 $\frac{2^n}{2^{n+1}(n+1)\ln 2} = \frac{1}{2(n+1)\ln 2}$이고, 이 값들은 조화급수(harmonic series)처럼 더해지므로 발산(divergence)한다. $1/(r(\ln r)^2)$의 경우 블록은 많아야 $\frac{1}{n^2(\ln 2)^2}$이고, $\sum \frac{1}{n^2}$은 수렴(convergence)한다.

4. 허용되는 숫자: 맨 앞자리에는 7가지, 나머지 각 자리에는 8가지 선택이 있으므로, 허용되는 d자리 수는 많아야 $7 \cdot 8^{d-1}$개이고 각각은 적어도 10^{d-1}이다. 따라서 합은 많아야 $\sum_{d\ge 1} 7(0.8)^{d-1} = \frac{7}{1-0.8} = 35$이다.

2.4 $\pi^2/6$

1. 수 $\tan^2 = 1/\cot^2$들은 계수를 거꾸로 배열한 다항식(reversed polynomial) $\sum_j (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} y^j$의 근(roots)이고, 이 근들의 합은 $\binom{2n+1}{2n-1} = n(2n+1)$이다. 그러면 $\operatorname{cosec}^2 = 1 + \cot^2$에서 $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$을 얻는다.

2. 짝수 번째 항들의 합은 $\frac{1}{4}\sum \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{24}$이므로, 홀수 번째 항들의 합은 $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$이다.

3. 근들에 대해 $e_1 = \frac{n(2n-1)}{3}$이고 $e_2 = \binom{2n+1}{5}/\binom{2n+1}{1}$이므로 $\sum \cot^4 = e_1^2 - 2e_2 = \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}$이다. $\cot^4\theta < \theta^{-4} < (1+\cot^2\theta)^2$로 조이고(squeezing) $n \to \infty$로 보내면 $\frac{\pi^4}{90}$을 얻는다.

4. 하한(lower bound)에서 $\sum_{m\le n} \frac{1}{m^2} > \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$이므로, 오차는 $\frac{\pi^2(6n+1)}{6(2n+1)^2} < \frac{\pi^2}{4n}$보다 작다. 이로써 $n \ge 2468$이면 정확도 0.001이 보장된다. 실제로는 $n \approx 1000$이면 충분하다.

2.5 비에트의 곱

1. $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 반복해서 쓰면 곱이 연쇄적으로 소거된다(telescopes). $n \to \infty$로 보내고(그러면 $2^n \sin(\alpha/2^n) \to \alpha$이다) $\alpha = \frac{\pi}{2}$로 둔 뒤, $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$와 $\cos\frac{\theta}{2} =$

$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta}$를 이용한다.

2. $\frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{24}\cdots$이고, 여기서 $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이다.

3. 인수 8개로 3.14157을 얻고, 이를 반올림하면 3.1416이다. 인수 n개를 곱한 뒤의 오차는 약 $\frac{\pi^3}{6\cdot 4^{n+1}}$인데, 생략된 인수들이 $\cos\frac{\pi}{2^{j+1}} \approx 1-\frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$이기 때문이다. 즉 인수 하나가 오차를 약 4로 나누며, $\log_{10} 4 \approx 0.6$이다.

4. $x = \ln a$로 두면 같은 논증으로

$$\frac{a-1}{\ln a} = \prod_{j\geq 1}\frac{1+a^{1/2^j}}{2},$$

를 얻으므로 $\frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2}\prod_{j\geq 1}\frac{1+3^{1/2^j}}{2}$이다. 인수 일곱 개로 0.906을 얻고, 이를 반올림하면 0.91이다(참값은 0.9102이다). 여기서는 인수들이 $1+\frac{\ln 3}{2^{j+1}}$처럼 1에 다가가므로 새 인수 하나는 오차를 절반으로 줄일 뿐이다(약 0.3자리). 반면 비에트(Viète)의 인수들은 $1-\frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$처럼 1에 다가가며 오차를 4분의 1로 줄인다.

2.6 산술–기하 평균

1. $x_{n+1}-y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n}-\sqrt{y_n})^2 = \frac{(x_n-y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$이고, $(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2 \geq 4y_n \geq 4y_0$이다.

2. $M(2,1) = 1.456791$이다. 세 단계만 지나도 x_3과 y_3은 이미 소수점 아래 일곱째 자리까지 일치한다.

3. 반복의 모든 단계가 λ배로 바뀌므로 $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$이다. 적분에 $x = \lambda u$를 대입하면 $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$를 얻는다. $\mathrm{I} = \frac{\pi}{2M}$의 양변은 모두 λ^{-1}배가 된다.

4. $M(1,\cos 30^\circ) \approx 0.9318$이므로 주기(period)는 1.073배, 즉 약 7.32% 길어진다.

2.7 여섯 자리인가, 육백 자리인가

1. $(p^2+2q^2)^2 - 2(2pq)^2 = (p^2-2q^2)^2 = 1$이고, $577^2 - 2\times 408^2 = 332\,929 - 332\,928 = 1$이다.

2. $y_{n+1} = \frac{2y_n^3+2}{3y_n^2}$이고 $y_{n+1}-\alpha = \frac{2y^3-3\alpha y^2+\alpha^3}{3y^2} = \frac{(y-\alpha)^2(2y+\alpha)}{3y^2}$이다. $y > \alpha$이면 $\frac{2y+\alpha}{3y^2} < \frac{3y}{3y^2} = \frac{1}{y} < \frac{1}{\alpha}$이다.

3. $y - \frac{1/y-a}{-1/y^2} = y + y - ay^2 = y(2-ay)$이고, $1-ay(2-ay) = (1-ay)^2$이다.

4. $y - \frac{y^{1/3}}{\frac{1}{3}y^{-2/3}} = y - 3y = -2y$이다. 오차 공식이 성립하려면 근 근처에서 f'이 0이 아니고 f''이 유계(bounded)여야 한다. 여기서는 f'이 0에서 무한대이다.

2.8 제곱하고 2 빼기

1. $(2\cos u)^2 - 2 = 2\cos 2u$이므로 귀납법으로 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$를 얻는다. $x_3 = a$이려면 $4\theta \equiv \pm\theta$, 즉 3θ 또는 $5\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$이어야 한다. $x_2 = a$인 경우(고정점 $a = 2$와 $a = -1$)를 제외하면 $\theta = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$가 남는다. 즉 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 또는 $a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$이고, 이 둘은 2-주기(2-cycle)의 두 점이다.

2. M_5의 경우 수열은 $4, 14, 194 \equiv 8, 62 \equiv 0$이므로 소수(prime)이다. M_{11}의 경우 수열은 $4, 14, 194, 788, 701, 119, 1877, 240, 282, 1736 \neq 0$이므로 합성수(composite)이고, 실제로 $2047 = 23 \times 89$이다.

3. $A = t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$에서 $t = 2$, $a = \frac{5}{2}$를 얻는다. 그러면 $x_2 = \frac{17}{4}$, $y_1 = \frac{Ax_1}{x_2} = \frac{15}{17}$이고, $\frac{\sqrt{x_2^2-4}}{x_2} = \frac{15/4}{17/4} = \frac{15}{17}$이다.

4. $x_k = t^{2^{k-1}} + t^{-2^{k-1}}$이고, $x_1 \cdots x_n$에 $t - t^{-1}$을 곱하면 연쇄적으로 소거되어 $t^{2^n} - t^{-2^n}$이 된다. 합은 $(t - t^{-1}) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{t^{2^n}-1} - \frac{1}{t^{2^{n+1}}-1}\right) = \frac{t-t^{-1}}{t^2-1} = \frac{1}{t}$가 된다. $a = 3$일 때 $t = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$이고 $\frac{1}{t} \approx 0.3820$이며, 급수 $\frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} + \cdots$도 이와 일치한다.

2.9 e에 다가가는 분수들

1. $T_0 = e - 1$, $T_1 = 3 - e$, $T_2 = 7e - 19$, $T_3 = 193 - 71e$, $T_4 = 1001e - 2721$이므로 $\frac{19}{7}$, $\frac{193}{71}$, $\frac{2721}{1001}$을 얻는다. $b_n = b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}$이고 (귀납적으로) b_{n-1}의 부호가 b_{n-2}와 반대이므로, b_n의 부호는 b_{n-2}와 같다.

2. $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$이므로 $T_n < \frac{e}{4^n n!}$이다. $-a_n/b_n$의 오차는 $T_n/|b_n|$이고, 이제 4^n배만큼 개선된다.

3. $e = \frac{p}{q}$라면 $qT_n = qa_n + pb_n$은 정수(integer)이다. $T_n > 0$이므로 이는 양의 정수이고, 따라서 적어도 1이다. 그러나 n이 크면 $qT_n < \frac{qe}{n!} < 1$이다.

4. 부분적분(integration by parts)을 두 번 하면(경계항(boundary terms)은 사라진다) $U_n = \frac{1}{4}\left(U_{n-2} - 2(2n-1)U_{n-1}\right)$이고, $U_0 = \frac{e^2-1}{2}$, $U_1 = \frac{1}{2}$이다. 따라서 어떤 정수 A_n, B_n에 대해 $2^{2n+1}U_n = A_n + B_n e^2$이고, 한편 $0 < U_n < \frac{e^2}{4^n n!}$이다. $e^2 = \frac{p}{q}$라면 $q2^{2n+1}U_n$은 $\frac{2qe^2}{n!}$보다 작은 양의 정수인데, n이 크면 이는 불가능하다. 따라서 이 논증은 실제로 e^2이 무리수(irrational)임을 증명한다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

전체 13개 장 가운데 제2장. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.