# 들어가며

> 이 책으로 여러분에게 수학을 가르칠 수는 없다. 그러나 여러분이 문제를 하나하나 깎아 나가며 꾸준히 애쓴다면, 마침내 여러분 안에 있는 수학자가 모습을 드러내리라고 나는 믿는다.
>
> — Stephen Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*

이 책은 어려운 문제들, 그리고 그 문제들 뒤에 놓인 것들에 관한 책이다. 136개의 절은 모두 지난 STEP 시험 문제 하나로 시작한다. 그러나 문제는 들어가는 입구일 뿐이다. 좋은 STEP 문제 거의 모두의 뒤에는 대학에서 본격적으로 만나게 될 수학이 숨어 있으며, 이 책의 목표는 여러분을 그 문 너머로 데려가 반대편에 무엇이 있는지 보여 주는 것이다.

### STEP은 무엇이며, 왜 있는가

STEP, 즉 Sixth Term Examination Paper(식스폼(sixth form, 영국의 대학 진학 준비 과정) 마지막 학기 시험)는 고등학교 마지막 해 여름에 치르는 수학 시험이다. 케임브리지 대학교가 1987년에 도입했으며, 그 역할은 누가 그곳에서 수학을 공부할지 결정하는 일을 돕는 것이다. 케임브리지 수학과의 입학 허가는 거의 모두 STEP 성적을 조건으로 하는 조건부 입학 허가(conditional offer)이며, 그동안 다른 대학들, 특히 워릭(Warwick) 대학교도 이 시험을 활용해 왔다. 처음에는 여러 과목에 STEP 시험이 있었지만 2001년에는 수학만 남았다. 역사의 대부분 동안 시험지는 I, II, III의 세 가지였다. STEP I은 2019년에 마지막으로 출제되었고, 오늘날 응시자들은 STEP II와 STEP III를 치른다. 이 시험은 오랫동안 Cambridge Assessment가 운영했으며, 2024년부터는 OCR이 관리하고 있다.

STEP 시험지는 학교 시험과 전혀 닮지 않았다. 짧은 필수 문제 열 개 대신 긴 문제가 열두어 개 있고, 응시자는 그중 여섯 문제를 푼다. 네 문제에서 제대로 진전을 이룬 뛰어난 응시자는 아주 좋은 성적을 받는다. 문제에는 각 소문항의 배점이 적혀 있지 않으며, 연습해 본 것을 그대로 하라고 요구하는 일도 드물다. 문제가 요구하는 것은 이미 알고 있는 수학을 새로운 곳에 써 보는 일이다.

누구보다 STEP을 잘 알았던 Stephen Siklos는 이 시험의 목적을 이렇게 설명했다. 첫째, STEP은 관문이다. STEP에서의 성공은 대학 수학 학위 과정에서의 성공을 놀라울 만큼 잘 예측한다(그는 STEP 순위와 케임브리지 1학년 시험 순위 사이의 상관계수(correlation)가 0.63이라고 보고했는데, 이런 종류의 지표로서는 매우 높은 값이다). 둘째, STEP은 준비 과정이다. STEP이 높이 평가하는 사고방식은 바로 학부 수학의 사고방식이다. 셋째, STEP은

동기를 시험한다. STEP을 준비하려면 상당한 노력이 필요하며, 그런 노력을 기울일 마음이 없는 학생은 힘든 수학 학위 과정을 즐기기 어렵다.

#### Stephen Siklos

STEP에 관해 쓰면서 Stephen Siklos에 관해 쓰지 않을 수는 없다. 그는 케임브리지의 수학자였다. 스티븐 호킹(Stephen Hawking)의 연구 학생으로서 초기 우주와 중력파의 수학을 연구했고, 응용수학 및 이론물리학과(Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics)의 강사를 지냈으며, 이후 지저스 칼리지(Jesus College)의 시니어 튜터(Senior Tutor)를 거쳐 학장(President)이 되었다. 그는 1987년 STEP 수학이 시작될 때 수석 출제위원(Senior Examiner)이 되어, 2019년 8월 세상을 떠날 때까지 32년 동안 그 자리를 지켰다. 그동안 그는 문제를 만들고, "다른 사람들의 문제를 다듬어 모양을 갖추었으며"(그 자신의 표현으로, 그는 이 일이 오랫동안 흥미와 즐거움의 원천이었다고 말했다), 모든 시험지를 꼼꼼히 검토하고 채점을 감독했다. 그는 또한 STEP 부활절 학교(STEP Easter School)와 STEP 지원 프로그램(STEP Support Programme)을 이끈 원동력이기도 했는데, 이 둘은 학교에서 도움을 받을 수 없는 학생들에게 무료로 도움을 준다. 한 부고 기사는 그가 학생들이 어떤 학교 출신이든 케임브리지 수학 입학시험에 다가갈 수 있도록 누구보다 많은 일을 했다고 적었다.

그가 쓴 책 *Advanced Problems in Mathematics: Preparing for University*는 Open Book Publishers에서 온라인으로 무료 공개되어 있으며, 지금도 STEP에 대한 가장 좋은 입문서이다. 나는 이 책을 강력히 추천한다. 그가 이 책에 쓴 두 가지가 지금 이 책의 모양을 만들었다. 첫째는 좋은 STEP 문제가 무엇인가에 대한 그의 견해이다. 좋은 문제란 첫 부분에서 낯선 아이디어를 보여 주고, 이후 부분에서 그것을 더 어려운 상황에 다시 써 봄으로써 이해했음을 보이게 하는 문제이다. 또는 답이 어떤 매개변수에 달려 있어서 그 매개변수를 스스로 찾아내야 하는 문제이다. 또는 특수한 경우에서 출발해 일반적인 결과로 끝나는 문제이다. 이런 문제들이야말로 어딘가로 이어지는 문제이며, 이 책에 실린 문제의 대부분이 이런 종류이다. 둘째는 풀이가 "푹신한 깃털 침대가 아니라 도약대"여야 한다는 그의 고집이다. 먼저 스스로 씨름해 보지 않은 풀이를 읽어서는 아무것도 배울 수 없다.

### 내가 STEP을 만난 이야기

내가 STEP을 처음 접한 것은 1990년대 초, 수학 선생님이 추가 도전 과제로 시험지 몇 장을 주셨을 때였다. 나는 입학 허가를 받기 위해서가 아니라 재미로 그 문제들을 풀었고 실제 시험을 치른 적은 없지만, 그 시험지들이 엄청나게 어려웠던 것을 기억한다. 내가 배운 어떤 것과도 관련이 없어 보이는 문제들, 한 쪽을 가득 채우는 문제들, 시작은 할 수 있어도 끝까지 풀어내는 일은 드문 문제들이었다. 그리고 마침내 무언가가 풀렸을 때, 학교 수학이 보여 주지 않았던 무언가를 보았다는 느낌도 기억한다.

여러 해가 지나 나는 반대편에서 STEP으로 돌아왔다. 학생들의 STEP 준비를 돕게 된 것이

다. 그들과 함께 수백 개의 문제를 풀면서 나는 시험지를 다르게 보게 되었다. 모든 문제가 보석은 아니다. 솔직히 말해 어떤 문제는 그저 긴 지구력 시험이다. 한 쪽에 걸친 꼼꼼한 대수 계산, 힘들지만 판에 박힌 계산이 이어지고, 끝에 가서 얻는 통찰이나 즐거움은 별로 없다. 지구력은 중요하고 대학 수학에도 필요하지만, STEP을 특별하게 만드는 것은 그런 문제들이 아니다.

STEP을 특별하게 만드는 것은 1987년 이래 출제된 1,500개가 넘는 문제들 사이사이에 참으로 아름다운 문제가 수백 개 흩어져 있다는 사실이다. 내가 무슨 뜻으로 이렇게 말하는지 설명하는 가장 좋은 방법은 그중 몇 개를 보여 주는 것이다.

### 몇 가지 보석

여기 이 책의 뒷부분에서 만나게 될 문제 일곱 개가 있다. 이 책이 다루는 범위를 두루 보여 주도록 골랐는데, 조합론(combinatorics)에서 두 문제, 동역학계(dynamical systems)에서 두 문제, 역학(mechanics)에서 두 문제, 확률(probability)에서 한 문제이다. 각 문제는 머릿속에 그려 볼 수 있는 것에서 출발해 믿기 어려울 만한 것으로 끝나며, 대학에서 진지하게 공부하는 수학으로 이어진다.

**혼돈 속에 숨은 질서.** 종이에 점 여섯 개를 찍고 모든 두 점을 선으로 이어 보자. 선은 모두 열다섯 개이다. 각 선을 원하는 대로 금색이나 은색으로 칠한다. 이제 세 변이 모두 같은 색인 삼각형이 생기지 않도록 해 보자. 몇 번을 해도 실패할 것이다. 점이 다섯 개라면 가능하지만(오각형의 변은 금색으로, 대각선 다섯 개는 은색으로 칠하면 된다), 여섯 개라면 아무리 교묘하게 칠해도 불가능하다. 1989년 STEP I의 한 문제는 이것을 증명하라고 하면서 단 하나의 힌트를 준다. 한 점에서 뻗어 나가는 선 다섯 개를 보라는 것이다. 그중 세 개는 같은 색일 수밖에 없고, 거기서부터 증명은 몇 줄이면 끝난다. 선을 칠하는 방법은 $2^{15} = 32\,768$가지인데, 이 논증은 경우를 하나도 확인하지 않고 이 모두를 한꺼번에 처리한다.

이 결과는 1928년 프랭크 램지(Frank Ramsey)가 증명한 램지 정리(Ramsey's theorem)의 가장 작은 경우이다. 램지 정리는 완전한 무질서란 불가능하다는 것, 즉 충분히 큰 구조라면 아무리 되는대로 짜 맞추었더라도 그 안에 완벽한 질서를 이루는 부분이 있다는 것을 말해 준다. 그렇다면 "충분히 크다"는 것은 얼마나 큰 것일까? 모두 한 가지 색으로 이어진 점 네 개를 보장하려면 점이 18개 필요하며, 이 사실은 1955년에 증명되었다. 점 다섯 개의 경우는 아무도 모른다. 답은 43과 46 사이 어딘가에 있으며, 그 상계조차 2024년에야 증명되었다. 에르되시(Paul Erdős)는 이런 농담을 했다. 외계인이 이 수를 알려 주지 않으면 지구를 파괴하겠다고 위협한다면 모든 컴퓨터와 수학자를 동원해 답을 구해야 하지만, 여섯 개의 경우를 묻는다면 차라리 외계인을 파괴하려고 시도해야 한다는 것이다. 램지 이론은 대학의 조합론이나 그래프 이론(graph theory) 강의에서 만나게 되며, STEP 증명의 원동력인 비둘기집 원리(pigeonhole principle)는 거의 모든 강의에서 만나게 된다(Section 9.2).

**이상한 주사위.** 보통 주사위 두 개를 던지면 합이 7일 확률이 가장 높고 합이 2와 12일 확률

이 가장 낮으며, 경우의 수는 익숙한 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$의 모양을 이룬다. 주사위 한 쌍에 양의 정수를 다르게 적으면서도 모든 합이 나올 확률이 정확히 같도록 하는 방법이 또 있을까? 없을 것 같지만 정확히 하나가 있다. 한 주사위에는 $1, 2, 2, 3, 3, 4$를, 다른 주사위에는 $1, 3, 4, 5, 6, 8$을 적는 것이다. 이것이 *Sicherman* **주사위**(Sicherman dice)로, 이를 발견한 George Sicherman의 이름을 땄으며 1978년 마틴 가드너(Martin Gardner)가 널리 알렸다. 던진 눈의 합에만 좌우되는 게임이라면 보통 주사위를 이것으로 바꿔도 아무도 눈치채지 못할 것이다.

1993년의 한 문제는 이 아이디어에 반대쪽에서 다가간다. 이상하게 번호가 적힌 주사위 두 개로 각 합이 나오는 경우의 수를 보여 주는 표를 주고, 주사위에 적힌 번호를 알아내라고 한다. 마치 탐정이 흔적으로부터 범죄를 재구성하는 것과 같다. 이어서 이 절은 이 주제 전체를 단순하게 만드는 아이디어를 보여 준다. 각 주사위를 다항식(polynomial)으로 바꾸는 것인데, $k$가 적힌 면마다 항 $x^k$를 하나씩 두면 된다. 주사위 두 개를 던지는 것은 두 다항식을 곱하는 것에 대응하는데, $x^i \times x^j = x^{i+j}$가 두 면의 수를 더해 주기 때문이다. 합의 분포가 같은 새 주사위를 찾는 일은 다항식을 다른 방식으로 인수분해(factorisation)하는 일이 된다. 36을 $6 \times 6$ 대신 $4 \times 9$로 나누는 것과 비슷하다. 그리고 다항식은 정수와 마찬가지로 더 이상 쪼갤 수 없는 조각들로 단 한 가지 방식으로만 인수분해되므로, 이 인수분해는 Sicherman 주사위가 유일한 대안이라는 것까지 증명해 준다. 세는 문제를 다항식에 담아내는 이 기법, 즉 **생성함수**(generating function)는 조합론에서 가장 강력한 도구 가운데 하나이며, 그 바탕에 있는 유일 인수분해(unique factorisation)는 대학 첫 대수학(algebra) 강의의 중심 주제이다(Section 9.6).

**공식이 있는 카오스.** 0과 1 사이의 수 하나로 시작해서, 그 수에 4를 곱하고 다시 1에서 그 수를 뺀 값을 곱하는 일을 되풀이하자. 즉 $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$이다. 이것이 **로지스틱 사상**(logistic map)으로, 개체 수가 늘어나지만 먹이 공급에 의해 제한되는 상황을 대략적으로 나타낸 모형이다. 규칙은 더할 나위 없이 단순하지만, 이 규칙이 만들어 내는 수들은 눈에 보이는 패턴 없이 이리저리 뛰어다니며, 소수점 아래 열 자리까지 일치하는 두 시작값도 대개 몇십 단계 안에 완전히 다른 수열을 만들어 낸다. 생물학자 로버트 메이(Robert May)는 1976년 "Simple mathematical models with very complicated dynamics(아주 복잡한 동역학을 지닌 단순한 수학적 모형)"라는 제목의 유명한 논문에서 이 사상에 주목했고, 이후 로지스틱 사상은 카오스(chaos)의 표준적인 예가 되었다. 보통은 컴퓨터로 탐구한다.

2014년의 한 문제는 뜻밖의 사실을 드러낸다. 이 수열에는 정확한 공식이 있다는 것이다. 시작값이 $\sin^2\theta$이면 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$이며, 이는 배각 공식(double angle formulae)과 수학적 귀납법(induction)만으로 증명할 수 있다(이 공식은 1940년대에 울람(Stanisław Ulam)과 폰 노이만(John von Neumann)이 이미 알고 있었다). 정확한 공식이 있으면 카오스가 길들여지리라고 기대할지도 모른다. 그런데 오히려 공식은 카오스를 완벽하게 설명해 준다. 단계마다 각이 두 배가 되므로 각에 있는 아주 작은 불확실성도 단계마다 두 배가 되고, 시작값의 오차도 평균적으로 그만큼 빠르게 커진다. 오십 단계가 지나면 오차는 약 천조 배로

불어난다. 각을 $\pi$에 대한 분수로 나타내어 이진법으로 쓰면 이 사실이 생생하게 보인다. 사상을 한 번 적용할 때마다 이진 숫자들이 왼쪽으로 한 자리씩 밀리고 맨 앞 숫자는 버려진다. 따라서 수열은 시작값의 숫자를 하나씩 읽어 내는 셈이며, 백 단계 뒤를 예측하려면 시작값을 이진법으로 백 자리까지 알아야 한다. 같은 공식으로 이 사상의 모든 주기(cycle)를 찾을 수 있으며, 모든 길이의 주기가 $[0,1]$ 안에 조밀하게 들어차 있고 그 모두가 불안정하다는 것도 알 수 있다. 이것이 동역학계라는 분야로, 대학의 미분방정식(differential equations) 강의에서, 그리고 나중에는 카오스 자체를 다루는 강의에서 만나게 된다(Section 8.7).

**주기 3은 카오스를 뜻한다.** 함수 $f(x) = 7 - 2|x|$를 잡고, 어떤 수에서 시작해 나온 값을 계속 다시 넣어 보자. 1에서 시작하면 $1, 5, -3, 1, 5, -3, \ldots$이 나온다. 길이가 3인 주기이다. 2025년의 한 문제는 $f$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$의 그래프를 그리고 그것들이 직선 $y = x$와 만나는 곳을 찾아서 이런 주기를 찾아내라고 한다. $f$를 한 번 더 적용할 때마다 그래프의 지그재그 수가 두 배가 되는데, 이 절은 이 관찰을 바탕으로 이 함수에 **모든** 길이의 주기, 즉 길이 2, 3, 4, 100, 백만인 주기가 있다는 것을 증명한다.

이것은 이 함수만의 특별한 성질이 아니다. 1975년 Tien-Yien Li와 James Yorke는 길이가 3인 주기를 가진 연속함수라면 **어떤 것이든** 다른 모든 길이의 주기를 가져야 한다는 것을 증명했다. 논문의 제목은 거부하기 어려운 "Period three implies chaos(주기 3은 카오스를 뜻한다)"였다. 증명에는 중간값 정리(intermediate value theorem)만 있으면 되는데, 이는 부호가 바뀌는 연속함수가 반드시 0을 지난다고 논증할 때마다 이미 쓰고 있는 정리이다. 여기에 함수가 어느 구간을 어느 구간 위로 늘여 놓는지 보여 주는 영리한 그림 하나가 더해진다. 나중에 알고 보니 우크라이나의 수학자 샤르코프스키(Oleksandr Sharkovsky)가 이미 1964년에 더 강한 결과를 증명해 놓았다. 그는 $3, 5, 7, 9, \ldots$로 시작하는 자연수의 기묘한 순서를 찾아냈는데, 어떤 길이의 주기가 있으면 이 순서에서 그 뒤에 오는 모든 길이의 주기가 반드시 존재한다. 중간값 정리는 대학 해석학(analysis) 강의에서 가장 먼저 엄밀하게 증명하는 결과 가운데 하나이다. 이 문제는 그 정리가 얼마나 많은 일을 해낼 수 있는지 보여 준다(Section 8.8).

**자전거 펌프가 따뜻해지는 이유.** 자전거 타이어에 바람을 넣은 뒤 펌프를 만져 보면 따뜻하다. 기체를 압축하면 뜨거워지는데, 디젤 엔진이 점화 플러그 없이 연료에 불을 붙이는 원리도 이것이다. 그런데 왜 그럴까? 2002년의 한 문제는 펌프 끝과 밀려 들어오는 피스톤 사이를 오가며 튀는 공기 분자 하나를 따라가면서 이 물음에 답한다. 분자는 다가오는 피스톤에 부딪혀 튈 때마다 조금씩 속력을 얻는데, 움직이는 라켓에 맞은 테니스공과 같다. 문제는 한 번의 튕김을 정확히 기술하고, 이를 각 충돌 때의 실린더 길이에 대한 점화식(recurrence)으로 바꾼 다음, 그 점화식을 풀라고 한다.

풀이는 숨은 법칙 하나를 드러낸다. 분자의 속력과 실린더 길이의 곱이 거의 변하지 않는다는 것이다. 길이를 절반으로 줄이면 속력은 두 배가 되며, 온도는 분자들의 에너지를 재는 양이므로 기체가 뜨거워진다. 계를 천천히 바꿀 때 거의 일정하게 유지되는 이런 양을 **단열 불변량**(adiabatic invariant)이라 하며, 조금만 더 노력하면 같은 논증으로 대학 열역

학(thermodynamics)에서 만나게 될 기체의 단열 압축 법칙을 얻을 수 있다. 이 아이디어는 멀리까지 뻗어 나간다. 페르미(Enrico Fermi)는 1949년, 우주선(cosmic ray)이 바로 이런 방식으로, 즉 우주 공간에서 움직이는 자기장 사이를 거듭 튕기면서 엄청난 에너지를 얻는다고 제안했다. 또 에렌페스트(Paul Ehrenfest)는 1916년, 양자역학이 양자화해야 하는 양이 바로 단열 불변량이라고 주장했다. 자전거 펌프에 관한 문제가 알고 보니 통계물리학, 천체물리학, 그리고 양자론의 출발점에까지 닿아 있는 것이다(Section 10.4).

**되돌아오는 공.** 공을 앞으로 살살 던지면 공은 땅에 떨어질 때까지 꾸준히 멀어진다. 상식적으로는 늘 그럴 것 같다. 공은 계속 앞으로 움직이는데 어떻게 가까워질 수 있겠는가? 그런데 공을 충분히 가파르게, 수평면과 약 70.5°보다 큰 각으로 던지면 이상한 일이 일어난다. 공이 내려오는 동안 비행의 일부 구간에서, 수평으로는 여전히 멀어지고 있는데도 공이 여러분에게 **가까워진다**. 높이가 줄어드는 속도가 수평 거리가 늘어나는 속도보다 빠르기 때문이다.

2019년의 한 문제는 이를 증명하고 임계각을 정확히 구하라고 한다. 그 방법은 앞으로 거듭 쓰게 될 방법이다. 거리 자체 대신 거리의 제곱을 미분하면 제곱근을 피할 수 있다. 그 도함수는 시간에 대한 이차식이 되고, 거리가 줄어드는 때가 있는지의 문제는 그 이차식이 실근을 갖는지의 문제가 된다. 판별식(discriminant)이 답을 주며, 임계각은 사인값이 정확히 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$인 각임이 드러난다. 이 교훈은 포물체 운동을 훨씬 넘어선다. "당연히" 증가할 것 같은 양들 가운데 많은 것이 실제로는 그렇지 않으며, 대학에서는 도함수의 부호를 구해 어떤 양이 단조(monotonic)임을 보이는 일이 부등식을 증명할 때, 수열이 수렴(converge)함을 증명할 때, 미분방정식의 해가 안정되어 감을 보일 때 핵심 단계가 된다(Section 11.10).

**마지막 승객.** 기차 좌석이 모두 예약되어 있다. 처음 탄 승객은 자기 표를 무시하고 무작위로 고른 좌석에 앉는다. 그 뒤로 타는 사람은 모두 자기 좌석이 비어 있으면 거기에 앉고, 비어 있지 않으면 빈 좌석 가운데 무작위로 하나를 골라 앉는다. 마지막으로 탄 승객이 자기 좌석이 비어 있는 것을 볼 확률은 얼마일까? 좌석이 백 개라면 가능성은 어지러울 만큼 갈라진다. 자리를 빼앗긴 승객 한 명이 다른 승객의 자리를 빼앗고, 그 승객이 또 다른 승객의 자리를 빼앗는 식으로 사슬이 얼마든지 길어질 수 있다. 직접 계산하는 것은 가망이 없어 보인다. 그런데도 답은 좌석 수와 상관없이 정확히 $\frac{1}{2}$이다.

2021년의 한 문제는 이 답에 한 걸음씩 다가간다. 좌석이 두 개와 세 개일 때의 답을 구하고, 첫 승객이 어디에 앉는지를 조건으로 하여(conditioning) 점화식을 세운 다음, 답이 언제나 $\frac{1}{2}$임을 수학적 귀납법으로 증명하라고 한다. 이는 완벽하게 훌륭한 증명이지만, 답이 **왜** 그렇게 단순한지에 대한 궁금증은 남긴다. 그래서 이 절은 이어서 그 이유를 설명하는 한 줄짜리 논증을 제시한다. 어떤 승객이 무작위로 골라야 할 때마다 첫 승객의 좌석과 마지막 승객의 좌석은 정확히 똑같이 취급된다. 둘 중 하나가 차기 전까지 이 과정은 둘을 구별하지 못한다. 따라서 마지막으로 남은 빈 좌석은 둘 중 어느 쪽일 가능성도 같으며, 그 좌석은 반드시 둘 중 하나여야 한다. 마지막 승객이 타기 전에 나머지 모든 좌석은 주인이나 자리를 빼앗긴 누군가가 차지하기 때문이다. 이처럼 여러 쪽의 계산을 단 하나의 관찰로 대신하는 대칭성

논증(argument from symmetry)은 대학 확률론 전반에 걸쳐 등장한다(Section 12.5).

이런 문제들을 모아 보면, 수학 학위 과정 1학년의 주요 분야를 빠짐없이 건드린다. 정수론(number theory), 해석학, 미적분학(calculus), 복소수(complex numbers), 대수학, 선형대수학(linear algebra), 미분방정식, 조합론, 역학, 확률과 통계(statistics)가 그것이다.

### 이 책의 목적

바로 이 관찰이 이 책을 쓴 이유이다. 대부분의 STEP 준비는, 충분히 그럴 만하게도, 시험 통과를 목표로 한다. 기법을 익히고, 기출 시험지를 연습하고, 속도와 지구력을 기르는 것이다. 이 책도 그것을 목표로 하며, 이 책을 공부하면 STEP 실력이 늘 것이다. 그러나 이 책의 진짜 목적은 다른 데 있다. 여러분이 **대학 수학을 염두에 두고** STEP을 준비하도록 돕는 것이다. 즉 각 문제를 넘어야 할 장애물이 아니라 초대장으로 보고, 그 초대가 이끄는 곳까지 따라가 보도록 하는 것이다.

STEP에서 가장 좋은 성적을 거두고 이후 대학에서도 두각을 나타내는 학생들은 거의 언제나 수학 그 자체를 사랑하는 학생들이다. 그들은 어려운 문제가 마침내 풀리는 순간을 즐긴다. 어떤 기법이 통한다는 사실뿐 아니라 왜 통하는지를 알고 싶어 한다. $\frac{1}{2}$나 $\frac{1}{e}$나 $\pi^2/6$처럼 답이 수상할 만큼 단순하게 나오면, 더 깊은 무언가가 있으리라 의심하고 그것을 찾아 나선다. 이 책이 길러 주려는 것이 바로 이런 습관이다. 각 문제는 발견으로 이어지기 때문에 골랐다. 문제 자체보다 더 큰 아이디어, 정리, 사고방식으로 말이다.

사고방식은 정리만큼이나 중요하다. 대학 수학은 학교 수학에서 좀처럼 요구하지 않는 방식으로 생각하기를 요구한다. 계산하기보다는 증명하기, 귀류법(proof by contradiction)이나 무한강하법(infinite descent)으로 논증하기, 같은 것을 두 가지 방법으로 세기, 결코 변하지 않는 양 찾기, 반례(counterexample) 만들기, 어떤 것을 직접 찾지 않고도 그것이 존재함을 보이기 등이다. STEP 문제는 대개 드러내 놓고 말하지는 않지만 바로 이런 습관을 훈련시킨다. 이 책에서는 모든 절마다 그 중심에 있는 사고 기술의 이름을 밝혀 두어, 나중에 다시 만났을 때 알아볼 수 있게 했다.

### 이 책의 구성

이 책은 열세 개의 장으로 이루어져 있으며, 문제가 출제된 STEP 시험지가 아니라 문제가 이어지는 대학 수학의 분야에 따라 구성되어 있다.

- **순수수학**(1장 9장): 정수론과 증명, 수열·급수와 수렴(convergence), 함수·부등식과 엄밀성(rigour), 제대로 하는 미적분학, 복소수, 대수학과 구조, 선형대수학과 기하학, 미분방정식과 동역학계, 그리고 세기와 우연. 마지막 장에서는 확률 시험지에 나온 조합론 문제들도 다룬다.

- **역학**(10장, 11장): 보존 법칙(conservation laws), 충돌, 중력, 그리고 진동(oscillations), 회전, 움직이는 좌표계(moving frames). 11장은 놀라운 궤적들을 모은 묶음으로 끝난다.
- **확률과 통계**(12장, 13장): 조건부 확률에 대한 명료한 사고에서 중심극한정리(central limit theorem)에 이르는 확률, 그리고 통계와 세상 속의 무작위성.

각 장은 한 편의 글로 시작한다. 그 분야가 왜 중요한지, 대학에서 그 분야의 무엇을 만나게 될지, 그리고 장 전체를 관통하는 세 가지 큰 질문을 소개한다. 각 장의 끝에는 정리하는 글이 있어 그 질문들로 되돌아가고, 사용한 방법들을 모은 도구 상자, 다른 장으로 이어지는 안내, 대학에 가기 전에 읽어 볼 만한 책들을 제시한다. 각 장의 맨 끝에는 연습문제의 간단한 답이 있다. 1장 앞에는 이 책에 나오는 용어 가운데 학교에서 익숙하지 않을 법한 것들을 모은 용어집과, 이 책에서 쓰는 수학 기호의 표가 있다. 어떤 단어나 기호에서 막히면 그곳을 찾아보라.

모든 절은 같은 구성을 따른다. 절은 **문제**로 시작한다. 공식 출처에 출제된 그대로 실린 STEP 문제로 가는 링크이다. **도입**은 그 문제가 겉보기보다 왜 더 흥미로운지 설명한다. **시작하기 전에**는 처음 디딜 발판을 준다. **차근차근 풀기**는 단계별로 안내하는 풀이로, 중간중간 **스스로 물어보기**와 **잠깐 멈추고 풀어 보기**라는 제목의 상자가 끼어든다. 이 상자들은 좋은 선생님이라면 그 시점에 던질 질문들이며, 건너뛰라고 있는 것이 아니라 답하라고 있는 것이다. **돌아보기**는 핵심적인 수들을 짚어 준다. **숨은 수학**은 절의 핵심으로, 문제 뒤에 있는 대학 수학과 그 역사, 그리고 그 속의 놀라운 점들을 다룬다. **사고 기술**은 그 문제가 단련시키는 사고 습관의 이름을 밝힌다. **더 도전하기**는 후속 문제들을 제시하는데, 관련된 STEP 문제가 포함되는 경우가 많다. **더 읽을거리**는 뛰어난 고등학생이나 대학 1학년생이 소화할 수 있는 수준의 책과 글을 추천한다.

이 책은 136개의 문제를 자세히 다루지만, STEP에서 출제된 문제는 1,500개가 넘는다. 웹사이트에는 예시 시험지부터 2025년 시험지까지 그 모든 문제의 풀이가 있다. 이 풀이들은 이 책과 같은 정신으로 쓰였지만 훨씬 짧다. 각 풀이는 문제를 푸는 핵심 아이디어, 소문항별 완전한 풀이, 답을 확인해 볼 수 있는 몇 가지 검산, 저지르기 쉬운 실수, 그리고 문제가 맞닿아 있는 대학 수학에 대한 안내를 담고 있다. 이 책에서 자세히 다룬 문제라면 풀이에 그 사실을 밝히고 해당 절로 연결해 두었다.

몇몇 절은 군(group), 관성 모멘트(moment of inertia), 적률생성함수(moment generating function)처럼 현재 STEP 출제 범위에 들어 있지 않은 주제를 사용한다. 그 문제들이 빼놓기에는 너무 좋기 때문에 넣었으며, 각 절에서 필요한 사실들을 제시해 두었다.

### 학생을 위한 이 책 사용법

- **먼저 문제를 풀어라.** 절 첫머리의 링크로 문제를 열고, 읽는 동안 곁에 두어라. 풀이는 처음부터 끝까지 문제의 소문항과 문구를 언급한다. 더 읽어 나가기 전에 각 문제에 적어

도 30분은 정직하게 노력을 쏟아라. 막히는 것은 실패의 신호가 아니다. 배움은 바로 거기서 일어난다. 완전히 막혔다면 **시작하기 전에**를 읽고 다시 시도하라.

- **상자에 답하라.** 본문이 질문을 던지면 멈추고 종이에 답을 적어라. 안내 풀이는 손에 연필을 쥐고 읽도록 쓰였다.
- **"숨은 수학" 부분을 건너뛰지 마라.** 시험에 나오지는 않지만, 이 부분이야말로 이 책이 존재하는 이유이며 여러분의 기억에 남을 부분이다.
- **절은 어떤 순서로 읽어도 좋다.** 각 절은 독립적이며, 상호 참조가 다른 곳의 관련 아이디어로 안내한다. 호기심을 따라가라.
- **연습문제를 풀고 나서 답을 확인하라.** 각 장 끝의 답은 간단하다. 결과와 핵심 단계만 주며, 완전한 풀이를 적어 두지는 않았다.
- **풀이를 도약대로 삼아라.** 기출 시험지로 연습할 때는 웹사이트에서 풀이를 열기 전에 각 문제를 제대로 시도해 보고, 다시 나아갈 수 있을 만큼만 풀이를 읽어라. 핵심 아이디어만으로 충분하다면 풀이를 닫고 나머지는 스스로 끝내라.
- **활동지를 활용하라.** 웹사이트에는 모든 절마다 인쇄용 활동지가 있으며, 문제로 가는 링크, 순서대로 정리한 힌트, **숨은 수학** 부분, 연습문제가 실려 있어 화면에서 벗어나 공부할 수 있다.
- **이 책 너머까지 읽어라.** Siklos의 책, STEP 지원 프로그램, 그리고 기출 시험지 자체가 모두 무료로 공개되어 있다. 각 절의 더 읽을거리는 대학 입학 전에도 읽을 수 있는 것들로 골랐다.

### 교사를 위한 이 책 사용법

- **심화 학습 자료로.** 각 절은 그 자체로 완결된 수업 한 차시이다. 문제, 문제를 따라가는 안내된 경로, 그리고 그 뒤에 가 볼 만한 흥미로운 곳이 있다. 사고 기술은 연속 수업의 주제로 삼기에 좋다.
- **토론 길잡이로.** **스스로 물어보기**와 **잠깐 멈추고 풀어 보기** 상자는 학급이나 소모임에서 자연스러운 발문이 된다. 다음 단계를 보여 주기 전에 먼저 던져 보라.
- **활동지와 함께.** 각 활동지에는 문제로 가는 링크, 순서대로 정리한 힌트, **숨은 수학** 부분, 후속 연습문제가 실려 있다. 학생들은 힌트를 몇 개까지 볼지 스스로 정할 수 있다.
- **STEP 준비용으로.** 예시 시험지부터 2025년까지 세 시험지 모두의 문제가 실려 있으며, 많은 문제에는 연습문제에 관련 문제가 딸려 있다. 각 장의 정리 글과 도구 상자는 학생들이 주제 사이의 연결을 보도록 돕는다.
- **STEP 지원을 받지 못하는 학생을 위해.** 이 책은 의지가 굳은 학생이라면 혼자서도 공부해 나갈 수 있도록 쓰였다. 학교에서 STEP 준비를 지원하지 않는다면, 이 책이 그 역할의 상

당 부분을 해낼 수 있다.

### 저작권과 오류 정정

본문, 안내 풀이, 그림, 연습문제, 답을 비롯하여 이 책에서 내가 직접 작업한 모든 것은 Creative Commons CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인에 기증되었다. 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 수정하고, 공유해도 좋다. STEP 문제 자체의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있으며, 위 라이선스의 적용을 받지 않는다. 그런 이유로 문제들은 이 책에 싣지 않았다. 대신 각 절은 공식 출처에 있는 문제로 연결된다. 예시 시험지와 1987년부터 2018년까지의 시험지는 STEP 지원 프로그램의 문제 데이터베이스로, 2019년 이후의 시험지는 OCR이 제공하는 연도별 시험지 내려받기 페이지로 연결된다. 다른 STEP 문제를 사용하는 연습문제도 같은 방식으로 연결해 두었다.

수학적 내용이 정확하도록 애썼지만, 이 정도 분량의 책이라면 틀림없이 오류가 있을 것이다. 아무리 사소한 것이라도 오류를 발견하면 이 책의 GitHub 저장소 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 알려 주기 바란다. 정정 사항은 들어오는 대로 이 책의 웹사이트에 반영될 것이다.

### 시작하기 전에 마지막으로

Siklos는 자신의 책 서문을 미켈란젤로(Michelangelo)의 **다비드** 이야기로 끝맺었다. 수십 년 동안 아무도 손대지 않은 채 놓여 있던 대리석 덩어리를 깎아 만든 조각상 말이다. 그리고 그는 자신이 여러분에게 수학을 가르칠 수는 없지만, 문제를 하나하나 깎아 나가는 고된 노력이 여러분 안의 수학자를 드러내 줄 것이라고 말했다. 나는 그보다 더 잘 말할 수 없다. 이 책은 여러분에게 대리석과 몇 가지 도구, 그리고 다른 사람들이 그 안에서 찾아낸 것들의 그림 몇 장을 건넨다. 깎아 내는 일은 여러분의 몫이다. 내가 이 책을 엮으며 즐거웠던 만큼 여러분도 그 일을 즐기기를 바란다.

*Keith McNulty*
2026년 11월