# 용어 해설

대학 수학에는 그 나름의 어휘가 있고, 그중 상당수는 처음 보는 말일 것이다. 이 용어 해설은 이 책에 나오는 말 가운데 학교에서 접했을 가능성이 낮은 것들을 모아, 각각을 짧게 설명하고, 도움이 되는 경우에는 그 개념이 쓰이거나 제대로 설명되는 절을 함께 가리킨다. 이 설명들은 출발점을 마련하려는 것이지 정밀한 정의가 아니다. 어떤 말에 엄밀한 정의가 있다면, 가리키는 절에서 그 정의를 제시한다.

**집합**(set), **함수**(function), **증명**(proof)처럼 익숙한 말도 몇 개 있지만, 대학에서는 학교에서보다 더 신중하게 쓰이므로 그런 이유로 포함하였다. 항목 안에서 **기울임꼴**로 쓴 말은 그 자체로 별도의 항목이 있다.

### A

**단열 불변량(adiabatic invariant)** 계를 천천히 변화시킬 때 거의 일정하게 유지되는 양. 천천히 압축되는 실린더 안에서 튀어 다니는 분자는 자신의 속력에 실린더의 길이를 곱한 값을 거의 일정하게 유지한다(Section 10.4).

**대수적 수(algebraic number)** 계수가 정수(양수, 음수 또는 0)이고 모두 0은 아닌 다항방정식의 근이 되는 수. $\sqrt{2}$, $\mathrm{i}$, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$는 대수적 수이다. 대수적이지 않은 수는 **초월수**(transcendental number)이다(Section 6.3).

**해석학(analysis)** 미적분학을 엄밀한 토대 위에 세우는 수학 분야. 극한, 연속, 미분, 적분, 무한급수를 모두 정밀하게 정의하고 기본 원리로부터 증명한다. 2장부터 4장까지가 해석학 입문이다.

**각운동량(angular momentum)** 운동량의 회전 버전. 축을 중심으로 회전하는 물체에서는 **관성 모멘트**(moment of inertia)에 각속도를 곱한 것이며, 외부에서 돌림 효과가 작용하지 않으면 보존된다(Section 11.6).

**산술–기하 평균(arithmetic–geometric mean)** 두 수의 쌍을 그 산술평균과 기하평균으로 바꾸는 과정을 되풀이하여 만든 두 수열의 공통 극한. 놀라울 만큼 빠르게 수렴한다(Section 2.6).

**결합적(associative)** 모든 $a$, $b$, $c$에 대하여 $(a*b)*c = a*(b*c)$이면 연산 $*$는 결합적이라 하며, 이때는 괄호를 생략할 수 있다. 수의 덧셈과 곱셈은 결합적이지만, 뺄셈은 그렇지 않다.

**점근적(asymptotic)** $n \to \infty$일 때 두 식의 비가 1로 가면 두 식은 점근적이라 하고 $f(n) \sim g(n)$으로 쓴다. 스털링(Stirling) 공식은 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$임을 말해 주는데, 양변의 차는 한없이 커진다(Section 12.23).

**공리(axiom)** 증명 없이 출발점으로 받아들이고, 나머지 모든 것을 그로부터 연역하는 명제. 대학 대수학의 상당 부분은 짧은 공리 목록에서 출발하여 그로부터 무엇이 따라 나오는지를 묻는다(Section 7.3, Section 6.5).

## B

**기저 단계(base case)** **귀납법**(induction)에 의한 증명의 첫 단계로, 가장 작은 값(보통 $n = 0$ 또는 $n = 1$)에 대하여 명제가 참임을 확인하는 것이다. 그다음 **귀납 단계**(inductive step)에서 어떤 값에 대하여 참이면 다음 값에 대해서도 참임을 보인다.

**기저율 오류(base-rate fallacy)** 어떤 일이 애초에 얼마나 흔한지는 무시하고 증거만으로 그 확률을 판단하는 실수. 어떤 질병이 충분히 드물다면, 정확한 검사에서 양성이 나오더라도 그것이 오경보일 가능성이 그렇지 않을 가능성보다 클 수 있다. 실제로 그런지는 질병이 얼마나 드문지, 검사가 얼마나 정확한지에 달려 있다(Section 12.2).

**기저(basis)** 공간의 모든 벡터를 그 벡터들의 결합으로 정확히 한 가지 방식으로 나타낼 수 있게 하는 벡터들의 집합. 평면에서 $\mathbf{i}$와 $\mathbf{j}$는 기저를 이루며, 평행하지 않은 두 벡터의 쌍도 모두 기저를 이룬다. 기저를 이루는 벡터의 개수가 그 공간의 **차원**(dimension)이다(Section 6.3).

**베이즈 정리(Bayes' theorem)** 조건부확률을 뒤집는 규칙: $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(A)/\mathrm{P}(B)$. 증거에 비추어 믿음을 어떻게 갱신해야 하는지 알려 준다(Section 12.2).

**편향(bias)** 많은 표본에 대하여 평균을 냈을 때 너무 높거나 너무 낮게 나오면 **추정량**(estimator)은 편향되었다고 한다. 기댓값이 추정하려는 양과 정확히 같으면 **불편**(unbiased) 추정량이다(Section 13.3).

**전단사(bijection)** 일대일 대응. 한 집합의 모든 원소를 다른 집합의 정확히 한 원소와 짝지어, 어느 쪽에도 남는 것이 없게 하는 규칙이다. 두 유한집합은 그 사이에 전단사가 있을 때 그리고 그때에만 크기가 같으며, 무한집합의 크기도 이런 방식으로 정의한다(Section 1.8, Section 9.10).

**이항연산(binary operation)** 두 대상을 결합하여 세 번째 대상을 주는 규칙. 수의 덧셈, 행렬의 곱셈, 함수의 합성 등이 그 예이다.

**상계와 하계(bound)** 수의 집합이나 수열의 상계(upper bound)는 그 어느 것도 넘지 않는 수이고, 하계(lower bound)는 그 어느 것도 그보다 작아지지 않는 수이다. 수열이 둘 다 가지면 **유계**(bounded)라 한다(Section 2.2).

**분기 과정(branching process)** 각 개체가 독립적으로 무작위 개수의 자손을 남기는 개체군 모형. 핵심 질문은 그 가계가 끊기는지 여부이며, 그 답은 **확률생성함수**(probability generating function)에서 나온다(Section 12.15).

## C

**변분법(calculus of variations)** 미지의 대상이 함수나 곡선 전체이고, 어떤 양을 가능한 한 작게 또는 크게 만들도록 그것을 고르는 문제들을 연구하는 분야. 가장 짧은 경로, 가장 빠르게 미끄러져 내려가는 경로, 가장 넓은 넓이를 둘러싸는 곡선 등이 그 예이다(Section 4.7).

**현수선(catenary)** 매달린 사슬의 모양으로, $y = a\cosh(x/a)$의 그래프이다. 포물선처럼 보이지만 포물선은 아니다(Section 11.14).

**코시 분포(Cauchy distribution)** 그래프가 종 모양인 연속분포이지만, 꼬리가 매우 두꺼워 평균이 존재하지 않는다. 이 분포에서 뽑은 표본의 평균은 관측값 하나보다 더 믿을 만하지 않다(Section 12.22).

**중심극한정리(central limit theorem)** 같은 분포를 따르고 분산이 유한한 독립인 확률적 양을 많이 더한 합을 적절히 평행이동하고 크기를 조정하면, 그 공통 분포가 무엇이든 근사적으로 정규분포를 따른다는 정리. 서로 다른 분포를 따르는 양에 대해서도, 그중 소수가 합을 지배하지만 않는다면 성립하는 판본들이 있다. 종 모양 곡선이 어디에나 나타나는 이유를 설명해 준다(Section 12.24).

**카오스(chaos)** 결정론적인 계가 출발점에 너무 민감하여 장기 예측이 실제로는 불가능한 행동. 서로 아주 가까운 두 출발점이 완전히 다른 미래로 이어진다(Section 8.7, Section 8.8).

**닫혀 있음(closed)** 집합의 두 원소를 결합한 결과가 항상 그 집합의 원소이면, 집합은 그 연산에 대하여 닫혀 있다고 한다. 짝수는 덧셈에 대하여 닫혀 있지만, 홀수는 그렇지 않다.

**교환적(commutative)** 항상 $a * b = b * a$이면 연산 $*$는 교환적이라 한다. 수의 곱셈은 교환적이지만, 행렬의 곱셈과 **사원수**(quaternions)의 곱셈은 그렇지 않다(Section 7.1, Section 6.7).

**완비성(completeness)** 실수에 틈이 없다는 성질. 위로 유계인 모든 증가수열은 어떤 실수로 수렴한다. 분수로 이루어진 수열이 $\sqrt{2}$에 한없이 다가갈 수 있으므로 유리수에는 이 성질이 없다. **해석학**의 상당 부분이 이 성질에 기대고 있다(Section 2.2).

**합동(congruence)** $a \equiv b \pmod{n}$은 "$a$는 법 $n$에 대하여 $b$와 합동이다"라고 읽으며, $a$와 $b$를 $n$으로 나눈 나머지가 같다는 뜻이다. 동치로, $n$이 $a - b$를 나눈다는 뜻이다. 합동식을 이용한 산술을 **모듈러 산술**(modular arithmetic)이라 한다(Section 1.5).

**추측(conjecture)** 참이라고 믿어지지만 아직 증명되지 않은 명제.

**보존 법칙(conservation law)** 에너지, 운동량, 각운동량 같은 어떤 양이 계가 변해 가는 동안 바뀌지 않는다는 명제. 보존 법칙을 이용하면 세부 과정을 따라가지 않고도 문제를 풀 수 있는 경우가 많다(Section 10.1).

**연속(continuous)** 입력이 조금 바뀌면 출력도 조금만 바뀌는 함수를 연속이라 한다. 비형식적으로 말하면, 펜을 떼지 않고 그래프를 그릴 수 있다. 정확히는, $x \to a$일 때 $\mathrm{f}(x) \to \mathrm{f}(a)$이면 f는 $a$에서 연속이다(Section 3.1, Section 8.8).

**귀류법(proof by contradiction)** 명제가 거짓이라고 가정하고 불가능한 결론을 이끌어 내는 증명. 고전적인 예는 $\sqrt{2}$가 무리수라는 증명이다(Section 1.3).

**대우(contrapositive)** "$P$이면 $Q$이다"의 대우는 "$Q$가 아니면 $P$가 아니다"이다. 두 명제는 논리적으로 동치이며, 대우를 증명하는 편이 더 쉬운 경우가 많다. 대우는 **역**(converse)인 "$Q$이면 $P$이다"와 같지 않으며, 역은 거짓일 수도 있다.

**수렴(converge)** 수열의 항들이 고정된 어떤 수, 곧 그 수열의 **극한**(limit)에 원하는 만큼 가까워지고 계속 그 가까이에 머무르면 수열이 수렴한다고 한다. 급수는 그 **부분합**(partial sum)이 수렴하면 수렴한다. 수렴하지 않는 수열이나 급수는 **발산**(diverge)한다(Section 2.1, Section 2.3).

**볼록(convex)** $x^2$이나 $\mathrm{e}^x$처럼, 그래프 위의 임의의 두 점을 잇는 현이 그래프 위에 있거나 그래프보다 위에 있으면 함수는 볼록하다고 한다. AM–GM 부등식을 비롯한 많은 부등식이 볼록성의 결과이다(Section 3.3).

**따름정리(corollary)** 방금 증명한 **정리**(theorem)로부터 곧바로 따라 나오는 결과.

**상관계수(correlation)** 두 확률적 양이 직선 관계에 얼마나 가까운지를 재는 $-1$과 1 사이의 수. **공분산**(covariance)을 두 표준편차로 나누어 조정한 것이다(Section 13.7).

**가산(countable)** 원소들을 첫째, 둘째, 셋째, …와 같이, 경우에 따라서는 끝없이 나열할 수 있으면 집합은 가산이라 한다. 자연수와, 놀랍게도 분수는 가산이지만, 실수는 그렇지 않다(Section 1.8).

**반례(counterexample)** 일반적인 명제가 거짓임을 보여 주는 하나의 예. 주장을 뒷받침하는 예가 아무리 많아도, 반례 하나면 그 주장을 반증하기에 충분하다.

**공분산** $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$로, 두 확률적 양이 함께 변하는 정도를 재는 척도이다. 독립인 양에 대해서는 0이지만, 공분산이 0이라고 해서 독립인 것은 아니다(Section 12.4, Section 13.7).

**순환(cycle)** 함수를 반복 적용할 때 차례로 방문하는 점들의 집합: $x_1 \mapsto x_2 \mapsto \cdots \mapsto$

$x_n \mapsto x_1$. 수 $n$을 그 **주기**(period)라 하고, 이 점들을 **주기점**(periodic point)이라 한다(Section 8.8).

**사이클로이드(cycloid)** 굴러가는 바퀴의 테두리 위 한 점이 그리는 곡선. 위아래를 뒤집으면 가장 빠르게 내려가는 곡선이면서, 어디서 출발하든 미끄러져 내려가는 데 같은 시간이 걸리는 곡선이기도 하다(Section 11.4).

**원분다항식(cyclotomic polynomial)** 근이 정확히 1의 원시 $n$제곱근(primitive root of unity)들인 다항식 $\Phi_n(x)$. 계수가 정수이고 **기약**(irreducible)이며, $x^n - 1$은 $n$의 모든 약수 $d$에 대한 $\Phi_d(x)$의 곱이다. 예를 들어 $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$이다(Section 6.1).

### D

**교란순열(derangement)** 어떤 것도 원래 자리에 남지 않도록 목록을 재배열한 것(Section 9.8).

**도분(derivation)** 함수(또는 다른 대상)에 작용하는 연산 $D$로서 $D(f+g) = Df + Dg$와 곱의 법칙 $D(fg) = f\,Dg + g\,Df$를 만족하는 것. 미분이 대표적인 예이며, 미분의 성질 가운데 상당수가 이 두 규칙만으로부터 따라 나온다(Section 6.5).

**행렬식(determinant)** 정사각행렬로부터 계산하는 수로, 대응하는 변환이 넓이나 부피를 몇 배로 바꾸는지를 잰다. 행렬식이 0인 것은 행렬이 역행렬을 갖지 않는 것과 정확히 같다(Section 7.3).

**미분가능(differentiable)** 함수의 그래프가 어떤 점에서 잘 정의된 접선을 가져서, 도함수를 정의하는 극한이 존재하면 함수는 그 점에서 미분가능하다고 한다. 미분가능한 함수는 모두 **연속**이지만, 그 역은 성립하지 않는다. $|x|$는 연속이지만 0에서 미분가능하지 않다.

**차원** 기저를 이루는 벡터의 개수. 곧 **벡터 공간**(vector space)에서 독립적인 방향의 개수이다.

**발산** **수렴** 항목을 보라.

**동역학계(dynamical system)** 계의 상태가 시간에 따라 어떻게 변하는지를 기술하는 규칙. 한 단계씩 변하는 경우($x_{n+1} = f(x_n)$으로 정의되는 수열)도 있고 연속적으로 변하는 경우(미분방정식)도 있다. 8장이 이를 다룬다.

### E

**고윳값, 고유벡터(eigenvalue, eigenvector)** 어떤 수 $\lambda$에 대하여 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$이면 영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{v}$를 행렬 $\mathbf{M}$의 고유벡터라 하고, 그 수를 고윳값이라 한다. 곧 이 변환은 $\mathbf{v}$를 돌

리지 않고 늘이기만 한다(Section 7.2).

**포락선(envelope)** 곡선족의 모든 곡선에 접하는 곡선. 일정한 속력으로 던진 공의 모든 궤적의 포락선은 **안전 포물선**(safety parabola)으로, 공이 도달할 수 있는 영역의 경계이다(Section 11.9).

**평형(equilibrium)** 변하지 않는 계의 상태. 작은 교란이 계속 작게 유지되면 **안정**(stable)하다고 하고, 마찰이 있는 진자처럼 교란이 점차 사라지기까지 하면 **점근적으로 안정**(asymptotically stable)하다고 한다. 마찰 없는 진자가 똑바로 아래로 매달려 있는 상태는 안정하지만, 살짝 밀면 영원히 흔들린다. 어떤 작은 교란이 커지면 **불안정**(unstable)하다고 한다(Section 8.3, Section 11.8).

**추정량** 개체군의 크기나 분포의 평균처럼 알지 못하는 양에 대한 추측값을 데이터로부터 계산하는 규칙(Section 13.3).

**오일러 지표(Euler characteristic)** 꼭짓점이 $V$개, 모서리가 $E$개, 면이 $F$개인 다면체에 대하여 수 $V - E + F$를 말하며, 구멍이 없는 다면체에서는 항상 2이다(Section 7.9).

**존재 증명(existence proof)** 어떤 것이 존재함을 보이되, 그것을 어떻게 찾는지는 반드시 말해 주지 않는 증명. **비둘기집 원리**(pigeonhole principle)와 **중간값 정리**(intermediate value theorem)는 모두 존재 증명을 준다.

**기댓값(expectation)** 확률적 양 $X$의 평균값으로, $\mathrm{E}(X)$로 쓴다. 독립적으로 여러 번 되풀이했을 때의 장기적 평균이다. 기댓값은 가법적이어서, $X$와 $Y$가 독립이든 아니든 $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$이다(Section 9.11).

**극단 원리(extremal principle)** 어떤 종류의 대상 가운데 가장 작은 것, 가장 큰 것, 처음 것 또는 마지막 것을 살펴보고, 그것이 결론이나 모순으로 이어지는 성질을 가짐을 보이는 전략(Section 1.3).

## F

**체(field)** 덧셈, 뺄셈, 곱셈, (0으로 나누는 것을 제외한) 나눗셈을 할 수 있고, 익숙한 규칙이 모두 성립하는 수 체계. 유리수, 실수, 복소수는 체이며, 소수를 법으로 하는 정수도 체이다. 정수는 항상 나눌 수 있는 것은 아니므로 체가 아니다(Section 6.3).

**체의 확대(field extension)** 더 작은 체를 포함하는 더 큰 체. 예를 들어 $a$, $b$가 유리수일 때 $a + b\sqrt{2}$ 꼴의 수들은 유리수를 포함한다. 확대의 **차수**(degree)는 그것을 더 작은 체 위의 **벡터 공간**으로 보았을 때의 **차원**이다(Section 6.3).

**고정점(fixed point)** $\mathrm{f}(x) = x$를 만족하는 점 $x$로, 함수가 제자리에 그대로 두는 점이다. 그래프에서 고정점은 $y = \mathrm{f}(x)$가 $y = x$와 만나는 곳이다(Section 2.2, Section 8.8).

**기준계(frame of reference)** 위치와 운동을 재는 관점. **관성**(inertial) 기준계는 뉴턴(Newton)의 제1법칙이 성립하는 기준계이다. 속력을 높이는 기차처럼 가속하는 기준계에서는 추가적인 힘이 있는 것처럼 보인다(Section 11.5).

**함수** 한 집합, 곧 **정의역**(domain)의 각 원소에 다른 집합, 곧 **공역**(codomain)의 원소를 정확히 하나씩 대응시키는 규칙. 대학에서 함수는 공식과 같은 것이 아니다. 중요한 함수 가운데 공식이 없는 것이 많고, 어떤 공식은 함수를 정의하지 못한다.

**함수방정식(functional equation)** $f(x+y) = f(x)f(y)$처럼 미지의 대상이 함수인 방정식(Section 3.8).

**대수학의 기본정리(fundamental theorem of algebra)** 복소수 계수를 가진 차수가 1 이상인 모든 다항식은 복소수 근을 가지며, 따라서 복소수 범위에서 일차식들의 곱으로 완전히 인수분해된다.

### G

**감마 함수(gamma function)** 계승을 정수가 아닌 수로 확장한 함수 $\Gamma$. 자연수 $n$에 대하여 $\Gamma(n+1) = n!$이며, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$인데, 이는 어떤 의미에서 $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$라는 뜻이다(Section 4.4).

**가우스 정수(Gaussian integer)** $a$와 $b$가 정수인 복소수 $a+bi$. 보통의 정수와 매우 비슷하게 행동하여, 그 나름의 소수와 **유일 인수분해**(unique factorisation)를 가진다(Section 1.6).

**생성함수(generating function)** 계수가 수열의 항들인 멱급수 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$. 곱셈 같은 급수에 대한 연산이 수열에 대한 유용한 연산에 대응한다(Section 9.4). **확률생성함수**는 무작위 자연수의 확률들에 대하여 이 일을 하고(Section 9.6, Section 12.15), **적률생성함수**(moment generating function)는 이와 가까운 친척이다(Section 12.24).

**군(group)** **결합적**이고 **항등원**(identity)을 가지며 모든 원소에 **역원**(inverse)을 주는 **이항연산**이 있는 집합. 도형의 대칭들은 군을 이루며, 영이 아닌 복소수도 곱셈에 대하여 군을 이룬다. 군은 대칭의 언어이다(Section 6.6, Section 6.7).

### H

**쌍곡기하학(hyperbolic geometry)** 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나면서 그 직선과 결코 만나지 않는 직선이 무수히 많고, 삼각형의 세 각의 합이 $\pi$보다 작은 기하학. 거리를 재는 적절한 방식을 갖춘 원판이 그 모형이 된다(Section 5.8).

## I

**항등원, 항등식** 연산 $*$의 항등원은 모든 $a$에 대하여 $e * a = a * e = a$를 만족하는 원소 $e$이다. 덧셈에서는 0, 곱셈에서는 1, 행렬의 곱셈에서는 단위행렬 $\mathbf{I}$이다. 이와 별개로, 항등식은 $\cos^2\theta + \sin^2\theta \equiv 1$처럼 변수의 모든 값에 대하여 성립하는 등식이다.

**필요충분조건(if and only if)** "$P$일 때 그리고 그때에만 $Q$"는 흔히 "$P$ iff $Q$" 또는 $P \iff Q$로 쓰며, $P$와 $Q$가 둘 다 참이거나 둘 다 거짓이라는 뜻이다. 이를 증명하려면 양쪽 방향으로 하나씩, 두 개의 논증이 필요하다.

**독립(independent)** 한 사건이 일어났다는 것을 알아도 다른 사건의 확률이 바뀌지 않으면 두 사건은 독립이다: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$. 세 개 이상의 사건은 둘씩은 독립이면서 전체로는 독립이 아닐 수 있다(Section 12.4).

**귀납법** 모든 자연수 $n$에 대하여 명제를 증명하는 방법. 첫 번째 값에 대하여 증명하고(**기저 단계**), 어떤 값에 대하여 참이면 언제나 다음 값에 대해서도 참임을 증명한다(**귀납 단계**). 강한 **귀납법**(strong induction)에서는 귀납 단계에서 바로 앞의 값뿐 아니라 그보다 작은 모든 값에 대한 명제를 사용할 수 있다(Section 1.2).

**무한 강하법(infinite descent)** 귀류법의 한 형태. 어떤 문제의 자연수 해가 있다면 그보다 작은 해가 생기고, 따라서 끝없이 감소하는 양의 정수의 수열이 생기는데 이는 불가능함을 보인다(Section 1.5).

**중간값 정리** **연속**함수가 값 $a$와 $b$를 가지면, 그 사이의 모든 값을 가진다. 따라서 부호가 바뀌는 연속함수는 반드시 근을 가진다(Section 8.8).

**불변량(invariant)** 어떤 과정이 진행되는 동안, 또는 어떤 변환 아래에서 변하지 않는 양. 불변량을 찾는 것은 어떤 일이 불가능함을 증명하거나, 모든 단계를 따라가지 않고 문제를 푸는 가장 강력한 방법 가운데 하나이다(Section 7.7, Section 10.4).

**역원** 항등원이 $e$인 연산에 대하여 원소 $a$의 역원은 $a * b = b * a = e$를 만족하는 원소 $b$이다. 역함수(inverse function)는 함수를 되돌린다: $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$.

**무리수(irrational number)** $\sqrt{2}$, $\pi$, e처럼 $p$와 $q$가 정수($q \neq 0$)인 분수 $\frac{p}{q}$로 나타낼 수 없는 실수(Section 1.4).

**기약** 계수가 같은 종류인 더 낮은 차수의 두 다항식의 곱으로 나타낼 수 없는 다항식을 기약이라 한다. $x^2 - 2$는 유리수 범위에서 기약이지만, 실수 범위에서는 $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$로 인수분해된다(Section 6.1).

**동형(isomorphic)** 두 **군**과 같은 두 구조 사이에 연산을 정확히 맞추어 주는 **전단사**가 있으면 두 구조는 동형이라 한다. 곧 이름표만 다를 뿐 같은 구조이다(Section 6.7, Section 6.8).

**반복(iteration)** 같은 함수를 되풀이하여 적용하여 $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $\cdots$을 얻는 것. 수열 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 를 $x_0$의 **궤도**(orbit)라 한다(Section 8.7).

**L**

**큰 수의 법칙(law of large numbers)** 확률적 양을 독립적으로 여러 번 되풀이한 평균이, 기댓값이 존재한다면 그 **기댓값**으로 간다는 정리(Section 12.22).

**보조정리(lemma)** 주로 더 큰 **정리**를 향한 한 단계로서 증명하는 결과.

**극한** 수열이나 함수가 임의로 가까이 다가가고 계속 그 가까이에 머무르는 값. 이 개념을 정밀하게 만든 것은 19세기 수학의 위대한 업적 가운데 하나이며, **해석학**의 출발점이다(Section 2.1).

**극한 순환(limit cycle)** 계의 운동에서 근처의 운동들이 소용돌이치며 다가가는(또는 멀어지는) 닫힌 고리. 심장 박동이나 시계의 일정한 리듬이 그 예이다(Section 8.4).

**선형사상(linear map)** $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$와 $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$를 만족하는 벡터 공간 사이의 함수 $T$. 모든 선형사상은 행렬로 나타낼 수 있으며, 선형대수학은 선형사상을 연구하는 분야이다(Section 7.2).

**로지스틱 사상(logistic map)** 규칙 $u_{n+1} = ru_n(1-u_n)$으로, 먹이 공급에 의해 제한되는 개체군의 간단한 모형이자 **카오스**의 대표적인 예이다(Section 8.7).

**M**

**마르코프 연쇄(Markov chain)** 상태 사이를 단계별로 옮겨 다니는 확률 과정으로, 다음 단계의 확률이 과정이 어떻게 현재 상태에 이르렀는지와는 무관하게 현재 상태에만 의존하는 것(Section 12.16).

**최대가능도(maximum likelihood)** 알지 못하는 양을 추정하는 한 방법. 관측된 데이터가 나올 확률을 가장 크게 만드는 값을 고른다(Section 13.2).

**무기억성(memoryless)** 무작위 대기 시간이 무기억성을 가진다는 것은, 이미 얼마나 오래 기다렸든 남은 대기 시간의 분포가 처음과 같다는 뜻이다. 지수분포는 무기억성을 가진 유일한 연속분포이다(Section 12.18).

**최소다항식(minimal polynomial)** 주어진 대수적 수를 근으로 가지고, 계수가 유리수이며 최고차항의 계수가 1인 다항식 가운데 차수가 가장 낮은 것. $\sqrt{2}$의 최소다항식은 $x^2 - 2$이다(Section 6.3).

**모듈러 산술** **합동** 항목을 보라.

**관성 모멘트** 질량의 회전 버전으로, 물체가 축을 중심으로 회전하는 빠르기를 바꾸기가 얼마나 어려운지를 재는 척도이다. 질량이 얼마나 많은지뿐 아니라 질량이 축에서 얼마나 멀리 있는지에도 의존한다(Section 11.7).

**단조(monotonic)** 수열이나 함수가 결코 내려가지 않거나(증가) 결코 올라가지 않으면(감소) 단조라 한다. 유계인 단조수열은 반드시 수렴한다(Section 2.2, Section 11.10).

**N**

**필요조건과 충분조건(necessary and sufficient)** $P$ 없이 $Q$가 일어날 수 없으면($Q \Rightarrow P$) $P$는 $Q$의 필요조건이다. $P$가 $Q$를 보장하면($P \Rightarrow Q$) 충분조건이다. 둘 다인 조건은 $Q$와 동치이다.

**정규 모드(normal modes)** 계의 모든 부분이 같은 진동수로 보조를 맞추어 움직이는 특별한 진동 패턴. 계의 모든 진동은 정규 모드들의 결합이다(Section 11.2).

**O**

**위수(order)** 군의 원소 $g$의 위수는 $g^n$이 **항등원**이 되는 가장 작은 양의 정수 $n$이다. 곧 처음으로 되돌아오기 위해 그 원소를 적용해야 하는 횟수이다(Section 7.4). 덧셈에 대한 정수에서 수 1처럼 그런 $n$이 없으면, $g$는 **무한 위수**(infinite order)를 가진다. 유한군의 위수는 그 군이 가진 원소의 개수이다.

**직교(orthogonal)** 수직이라는 뜻. 대학에서는 이 말을 벡터 너머로 확장하여, 적절한 범위에서 $\int f(x)g(x)\,dx = 0$이면 두 함수 f와 g를 직교한다고 부를 수 있다(Section 8.6).

**P**

**매개변수(parameter)** **로지스틱 사상**의 $r$처럼, 특정한 문제 안에서는 고정되어 있지만 문제마다 달라질 수 있는 양. 많은 STEP 문제가 답이 매개변수에 어떻게 의존하는지를 묻는다.

**부분합** 급수의 처음 $n$개 항의 합 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 부분합이 수렴하면 급수가 **수렴**한다(Section 2.3).

**비둘기집 원리** $n$개보다 많은 물건을 $n$개의 상자에 넣으면, 어떤 상자에는 적어도 두 개가 들어 있다. 단순하지만, 몇몇 놀라운 **존재** 결과를 증명해 준다(Section 9.2).

**푸아송 과정(Poisson process)** 시간이나 공간에서 일정한 평균 비율로 무작위로, 독립적으로 일어나는 사건들의 모형. 방사성 붕괴, 전화 통화, 하늘의 별 등이 그 예이다(Section 12.19, Section 12.18).

**1의 원시근** 1의 $n$제곱근 가운데, 그 거듭제곱들이 $n$개의 1의 $n$제곱근을 모두 만들어 내는

것. 동치로, 이보다 작은 어떤 $m$에 대해서도 1의 $m$제곱근이 아닌 것이다(Section 6.1).

**확률밀도함수(probability density function)** 연속인 확률적 양에 대하여, 어떤 구간에서의 적분이 그 구간에 떨어질 확률을 주는 함수 f.

**증명** 정의, 공리, 이미 증명된 결과로부터 출발하여 명제가 참임을 보이는 완전한 논리적 논증. 대학에서는 맞는 답을 주는 계산이라도 각 단계가 정당화되지 않으면 증명이 아니다.

### Q

**사원수** 윌리엄 로언 해밀턴(William Rowan Hamilton)이 1843년에 발견한 수 체계로, 복소수를 확장하여 $-1$의 세 제곱근 i, j, k를 가지며, 이들은 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$을 만족한다. 사원수의 곱셈은 **교환적**이지 않다. 3차원 회전을 기술하는 데 쓰인다(Section 6.7, Section 7.5).

### R

**확률변수(random variable)** 동전을 열 번 던질 때 앞면이 나온 횟수처럼, 값이 무작위 실험의 결과에 따라 정해지는 양.

**무작위 행보(random walk)** 동전을 던진 결과에 따라 왼쪽이나 오른쪽으로 한 칸씩 움직이는 말처럼, 무작위 걸음을 잇달아 내디뎌 만들어지는 경로(Section 9.10, Section 12.17).

**래피디티(rapidity)** 특수상대성이론에서 쓰는 빠르기의 척도로, 속도와 달리 같은 방향의 두 운동을 결합할 때 단순히 더해진다. $c$가 빛의 속력이면, 속도 $v$의 래피디티는 $\operatorname{artanh}(v/c)$이다(Section 7.6).

**점화식(recurrence relation)** 피보나치(Fibonacci) 수에 대한 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$처럼, 수열의 각 항을 그 앞의 항들로 나타내는 등식.

**공명(resonance)** 그네 탄 아이를 그네의 박자에 맞추어 밀어 줄 때처럼, 계를 그 고유진동수에서 또는 그 근처에서 주기적으로 밀어 줄 때 나타나는 큰 반응(Section 11.1).

**리만 적분(Riemann integral)** 적분을 가느다란 직사각형들의 넓이의 합의 극한으로, 그 극한이 존재할 때 정밀하게 정의한 것(Section 4.1).

**엄밀성(rigour)** 모든 단계를 정당화하고, 뻔해 보인다거나 시도해 본 예에서 참이라는 이유로 어떤 것도 당연하게 받아들이지 않는 논증의 기준(3장).

**1의 거듭제곱근(root of unity)** 어떤 양의 정수 $n$에 대하여 $z^n = 1$을 만족하는 복소수 $z$. 1의 $n$제곱근은 $k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $e^{2\pi ik/n}$이며, 이들은 단위원 위에서 정$n$각형을 이룬다(Section 5.2).

### S

**표본공간(sample space)** 무작위 실험에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합. 사건은 그 부분집합이다(Section 12.1).

**집합** 대상들, 곧 그 **원소**(element)들을 하나로 모아 생각한 것. 원소의 순서는 중요하지 않으며, 반복도 마찬가지이다. $\{1,2,3\}$과 $\{3,1,2,2\}$는 같은 집합이다.

**단진동(simple harmonic motion)** 가속도가 고정된 점으로부터의 변위에 비례하고 그 점을 향하는 운동, $\ddot{x} = -\omega^2 x$. 해는 $x = A\cos(\omega t + \varepsilon)$이며, 주기 $2\pi/\omega$는 흔들림의 크기와 무관하다(Section 11.4).

**안정, 불안정** **평형** 항목을 보라.

**스털링 공식** 근사식 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$으로, $n$이 커질수록 백분율 오차가 0으로 간다(Section 12.23).

**부분군(subgroup)** 군의 부분집합으로서 같은 연산에 대하여 그 자체로 군이 되는 것(Section 6.6).

**대칭성 논증(symmetry argument)** 문제 안의 어떤 것도 두 양을 구별하지 않으므로 두 양이 같아야 한다는 논증. 좋은 대칭성 논증은 여러 쪽에 걸친 계산을 대신할 수 있다(Section 12.5).

### T

**정리** 증명된 중요한 명제. 그보다 덜 중요한 결과는 흔히 **명제**(proposition), 정리로 가는 도중에 증명하는 결과는 **보조정리**, 곧바로 따라 나오는 결과는 **따름정리**라 부른다.

**대각합(trace)** 정사각행렬의 주대각선 위 성분들의 합. **행렬식**과 마찬가지로 행렬을 다른 **기저**로 나타내도 변하지 않으며, **고윳값**들의 합과 같다(Section 7.4, Section 7.7).

**초월수** **대수적**이지 않은 수. 곧 계수가 정수이고 모두 0은 아닌 어떤 다항방정식의 근도 되지 않는 수이다. e와 $\pi$는 초월수이지만, 이를 증명하기는 어렵다(Section 1.4).

**삼각부등식(triangle inequality)** 실수, 복소수 또는 벡터에 대하여 $|a+b| \le |a| + |b|$. 삼각형의 한 변은 결코 나머지 두 변의 합보다 길지 않다.

### U

**유일 인수분해** 1보다 큰 모든 자연수를 인수의 순서를 무시하면 오직 한 가지 방식으로 소수들의 곱으로 나타낼 수 있다는 성질. 보기만큼 당연하지 않아서, 이 성질이 성립하지 않는 수 체계도 있다(Section 1.7).

**유일성 정리(uniqueness theorem)** 문제의 해가 오직 하나뿐임을 말해 주는 정리. 미분방정식에서는 방정식이 충분히 좋은 성질을 갖지 않으면 유일성이 깨져서, 하나의 출발점이 여러 다른 미래로 이어질 수 있다(Section 8.1).

**V**

**벡터 공간** 벡터라고 부르는 대상들의 모임으로, 평면 위의 화살표에 대한 익숙한 규칙을 따라 서로 더하고 수를 곱할 수 있는 것. 다항식, 함수, 그리고 많은 미분방정식의 해는 모두 벡터 공간을 이루므로, 선형대수학의 방법을 이들에게 적용할 수 있다(Section 6.3).

**W**

**잘 정의됨(well-defined)** 대상이나 규칙의 정의가 정말로 모호하지 않은 단 하나의 것을 지정하면 잘 정의되었다고 한다. 예를 들어, 도중에 임의로 한 선택에 의존하지 않아야 한다.

**정렬 원리(well-ordering principle)** 공집합이 아닌 양의 정수의 집합은 모두 가장 작은 원소를 가진다. 이는 **귀납법**의 원리와 동치이며, "가장 작은 반례를 택하자"로 시작하는 모든 논증의 바탕에 있다(Section 1.3).

**일반성을 잃지 않고(without loss of generality)** 흔히 WLOG로 줄여 쓰는 표현으로, 나머지 경우들은 이름만 바꾸면 똑같으므로 논증에서 한 경우만 다룬다는 뜻이다. "일반성을 잃지 않고 $a \leq b$라 하자"는 $a > b$이면 두 이름을 맞바꾸면 된다는 뜻이다.