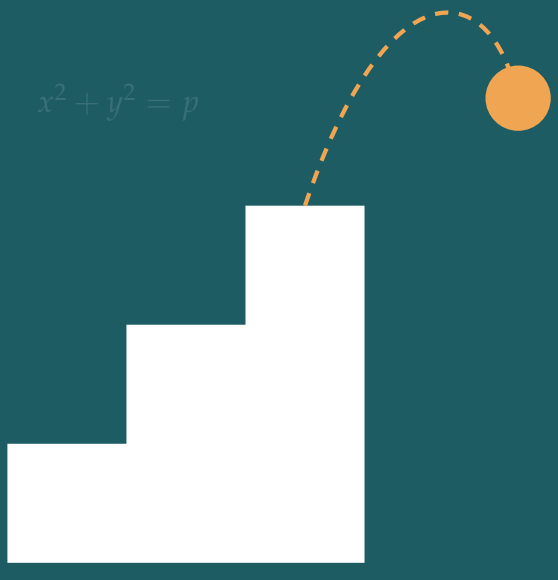
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

지난 STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 문



KEITH McNULTY

Beyond STEP

Past STEP questions as a doorway
to university mathematics

Keith McNulty

Beyond STEP: Past STEP questions as a doorway to university mathematics

First published online November 2026. This version: 2026년 11월 18일.

Everything in this book that is the author's own work, including the text, guided solutions, figures, exercises and answers, is dedicated to the public domain under the Creative Commons CC0 1.0 Universal licence: you may copy, adapt and share it for any purpose, without asking permission. See `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`.

The STEP questions discussed in this book are the copyright of Cambridge University Press & Assessment. They are not reproduced here: each section links to its question at an official source, the STEP Support Programme's question database or OCR's past papers.

The book is also available free online, with printable worksheets for every section, at `beyondstep.keithmcnulty.org`. Corrections are welcome as issues at `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`.

이 판은 영어 원문을 기계로 번역한 것으로, 아직 한국어를 모국어로 하는 수학 교사의 검토를 거치지 않았다. 내용이 분명하지 않은 곳에서는 영어 원문을 기준으로 한다.

차례

들어가며 1

용어 해설 11

수학 기호 25

1 정수론과 증명 **35**

1.1 소수 공장 41

1.2 소수는 얼마나 드문드문 흩어져 있는가? 49

1.3 가장 작은 반례 57

1.4 e는 무리수이고, e^2도 그렇다 63

1.5 무한 강하법 71

1.6 두 제곱수의 합 77

1.7 인수분해가 무너질 때 83

1.8 유리수 세기 89

1.9 삼차곡선의 접선 95

돌아보기 101

연습문제 해답 105

2 수열, 급수, 수렴 **109**

2.1 "결국"이란 무슨 뜻인가 115

2.2 극한으로서의 황금비 121

2.3 발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌 129

2.4 $\pi^2/6$ 135

2.5 비에트의 곱 141

2.6 산술–기하 평균 147

2.7 여섯 자리인가, 육백 자리인가 153

2.8 제곱하고 2 빼기 159

2.9 e에 다가가는 분수들 . . . 167
돌아보기 . . . 173
연습문제 해답 . . . 177

3 함수, 부등식, 그리고 엄밀함 181

3.1 오류 찾기 . . . 187
3.2 AM–GM, 거꾸로 . . . 195
3.3 볼록성의 힘 . . . 201
3.4 부등식을 증명하는 넓이 . . . 207
3.5 π^e인가, e^π인가? . . . 213
3.6 기울기의 한계 . . . 219
3.7 $\pi^2 \leq 10$ . . . 225
3.8 덧셈 법칙으로 정해지는 함수 . . . 231
3.9 새로운 함수 만들기 . . . 237
돌아보기 . . . 243
연습문제 해답 . . . 247

4 제대로 하는 미적분 251

4.1 적분이란 무엇인가? . . . 257
4.2 적분으로 삼각함수 세우기 . . . 263
4.3 22/7은 π보다 크다 . . . 269
4.4 월리스, 베타 함수, 그리고 1/2의 계승 . . . 275
4.5 2학년생의 꿈 . . . 281
4.6 공식으로 나타낼 수 없는 적분 . . . 287
4.7 변분법 . . . 293
4.8 공 모양 빵 자르기 . . . 299
4.9 홀디치의 정리 . . . 305
돌아보기 . . . 311
연습문제 해답 . . . 315

5 복소수 319

5.1 마친의 공식 325

5.2 단위근 필터 331

5.3 $z^{2n}+1$의 인수분해 337

5.4 정다각형 속의 거리 343

5.5 유리수처럼 보이지만 아닌 각 349

5.6 페르마 점 355

5.7 사상으로서의 복소 지수함수 361

5.8 원판에 숨은 거리 367

돌아보기 373

연습문제 해답 377

6 대수와 구조 381

6.1 근이 모두 단위근인 다항식 387

6.2 가우스의 정17각형 393

6.3 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$를 근으로 갖는 다항식 399

6.4 사차방정식 풀기 405

6.5 공리에서 출발하는 미분 411

6.6 부분군의 합집합 417

6.7 사원수군 423

6.8 특이행렬로 이루어진 군 429

돌아보기 435

연습문제 해답 439

7 선형대수학과 기하학 443

7.1 행렬에서는 성립하지 않는 법칙 449

7.2 돌지 않고 늘어나기 455

7.3 행렬식을 행렬식이게 하는 것 461

7.4 제자리로 돌아오는 행렬 467

7.5 3차원에서의 회전 473
7.6 쌍곡 회전과 상대성 이론 479
7.7 결코 변하지 않는 양 485
7.8 네 제곱수 491
7.9 정다면체는 다섯 개뿐이다 497
돌아보기 503
연습문제 해답 507

8 미분방정식과 동역학계 511

8.1 해가 유일하지 않을 때 517
8.2 풀지 않고 범위 구하기 523
8.3 개체군 수확하기 529
8.4 원으로 감겨드는 나선 535
8.5 그레이하운드를 쫓는 그레이하운드 541
8.6 양자 진동자 547
8.7 풀 수 있는 혼돈 553
8.8 주기 3이면 혼돈이다 561
돌아보기 569
연습문제 해답 573

9 세기와 확률 577

9.1 평면을 자르는 직선 583
9.2 축소판 램지 정리 589
9.3 울타리 기둥 색칠하기 595
9.4 함수로서의 수열 601
9.5 거스름돈 만들기 607
9.6 이상한 주사위 613
9.7 같은 거듭제곱의 합 619
9.8 아무도 자기 셔츠를 받지 못한다 625

9.9 생일 문제 631
9.10 언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록 637
9.11 한 세트 모두 모으기 643
9.12 무작위 부분집합 649
9.13 조작된 주사위 655
돌아보기 661
연습문제 해답 665

10 보존 법칙, 충돌, 그리고 중력 671

10.1 뉴턴의 요람 677
10.2 포갠 공 효과 683
10.3 로켓과 대포 689
10.4 분자 하나와 피스톤 695
10.5 유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기 701
10.6 두 물체가 하나가 되다 707
10.7 구 껍질 안의 중력 713
10.8 삼각형을 이룬 세 별 721
돌아보기 727
연습문제 해답 731

11 진동, 회전, 움직이는 기준틀 737

11.1 공명 743
11.2 기준 진동 749
11.3 실제 진자 755
11.4 등시 곡선 761
11.5 가속하는 기차 안의 중력 767
11.6 백스핀 773
11.7 막대 속의 심프슨 공식 779
11.8 기울어진 평형 785

11.9 안전 포물선 791
11.10 나에게로 되돌아오는 공 797
11.11 야수는 어떻게 공을 잡는가 803
11.12 고무줄 위의 개미 809
11.13 제설차 문제 815
11.14 현수선이 아니라 포물선 821
돌아보기 827
연습문제 해답 831

12 확률 839

12.1 조건을 정확하게 걸기 845
12.2 기저율 오류 851
12.3 "무작위"란 무슨 뜻인가? 857
12.4 둘씩은 독립이지만 한꺼번에는 독립이 아닌 863
12.5 마지막 승객의 좌석 869
12.6 동전 하나 더 875
12.7 토너먼트에서 누가 누구와 만나는가 881
12.8 페니의 게임 885
12.9 치우친 동전으로 공정하게 정하기 891
12.10 느슨한 끈 끝 묶기 897
12.11 우표, 컵, 그리고 e 903
12.12 언제 그만 찾아야 하는가 907
12.13 삼자 결투 913
12.14 혼합 전략 919
12.15 멸종인가 폭발인가 925
12.16 앞으로 보고 거꾸로 보는 마르코프 연쇄 931
12.17 바나흐의 성냥갑 937
12.18 무기억성 943
12.19 평면 위의 무작위 점 949

12.20 뷔퐁의 바늘 955
12.21 막대 부러뜨리기 961
12.22 평균이 없는 분포 967
12.23 확률로 얻는 스털링 공식 973
12.24 중심극한정리 979
12.25 여럿 가운데 가장 큰 값 985
돌아보기 991
연습문제 해답 995

13 세상 속의 통계와 무작위성 1005

13.1 신문 머리기사 읽기 1011
13.2 들쥐 세기 1017
13.3 독일 전차 문제 1023
13.4 평균인가, 중앙값인가? 1029
13.5 곤란한 질문 던지기 1035
13.6 쌓이는 오차 1041
13.7 상관관계 만들어 내기 1047
돌아보기 1053
연습문제 해답 1057

들어가며

> 이 책으로 여러분에게 수학을 가르칠 수는 없다. 그러나 여러분이 문제를 하나하나 깎아 나가며 꾸준히 애쓴다면, 마침내 여러분 안에 있는 수학자가 모습을 드러내리라고 나는 믿는다.
>
> — Stephen Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*

이 책은 어려운 문제들, 그리고 그 문제들 뒤에 놓인 것들에 관한 책이다. 136개의 절은 모두 지난 STEP 시험 문제 하나로 시작한다. 그러나 문제는 들어가는 입구일 뿐이다. 좋은 STEP 문제 거의 모두의 뒤에는 대학에서 본격적으로 만나게 될 수학이 숨어 있으며, 이 책의 목표는 여러분을 그 문 너머로 데려가 반대편에 무엇이 있는지 보여 주는 것이다.

STEP은 무엇이며, 왜 있는가

STEP, 즉 Sixth Term Examination Paper(식스폼(sixth form, 영국의 대학 진학 준비 과정) 마지막 학기 시험)는 고등학교 마지막 해 여름에 치르는 수학 시험이다. 케임브리지 대학교가 1987년에 도입했으며, 그 역할은 누가 그곳에서 수학을 공부할지 결정하는 일을 돕는 것이다. 케임브리지 수학과의 입학 허가는 거의 모두 STEP 성적을 조건으로 하는 조건부 입학 허가(conditional offer)이며, 그동안 다른 대학들, 특히 워릭(Warwick) 대학교도 이 시험을 활용해 왔다. 처음에는 여러 과목에 STEP 시험이 있었지만 2001년에는 수학만 남았다. 역사의 대부분 동안 시험지는 I, II, III의 세 가지였다. STEP I은 2019년에 마지막으로 출제되었고, 오늘날 응시자들은 STEP II와 STEP III를 치른다. 이 시험은 오랫동안 Cambridge Assessment가 운영했으며, 2024년부터는 OCR이 관리하고 있다.

STEP 시험지는 학교 시험과 전혀 닮지 않았다. 짧은 필수 문제 열 개 대신 긴 문제가 열두어 개 있고, 응시자는 그중 여섯 문제를 푼다. 네 문제에서 제대로 진전을 이룬 뛰어난 응시자는 아주 좋은 성적을 받는다. 문제에는 각 소문항의 배점이 적혀 있지 않으며, 연습해 본 것을 그대로 하라고 요구하는 일도 드물다. 문제가 요구하는 것은 이미 알고 있는 수학을 새로운 곳에 써 보는 일이다.

누구보다 STEP을 잘 알았던 Stephen Siklos는 이 시험의 목적을 이렇게 설명했다. 첫째, STEP은 관문이다. STEP에서의 성공은 대학 수학 학위 과정에서의 성공을 놀라울 만큼 잘 예측한다(그는 STEP 순위와 케임브리지 1학년 시험 순위 사이의 상관계수(correlation)가 0.63이라고 보고했는데, 이런 종류의 지표로서는 매우 높은 값이다). 둘째, STEP은 준비 과정이다. STEP이 높이 평가하는 사고방식은 바로 학부 수학의 사고방식이다. 셋째, STEP은

동기를 시험한다. STEP을 준비하려면 상당한 노력이 필요하며, 그런 노력을 기울일 마음이 없는 학생은 힘든 수학 학위 과정을 즐기기 어렵다.

Stephen Siklos

STEP에 관해 쓰면서 Stephen Siklos에 관해 쓰지 않을 수는 없다. 그는 케임브리지의 수학자였다. 스티븐 호킹(Stephen Hawking)의 연구 학생으로서 초기 우주와 중력파의 수학을 연구했고, 응용수학 및 이론물리학과(Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics)의 강사를 지냈으며, 이후 지저스 칼리지(Jesus College)의 시니어 튜터(Senior Tutor)를 거쳐 학장(President)이 되었다. 그는 1987년 STEP 수학이 시작될 때 수석 출제위원(Senior Examiner)이 되어, 2019년 8월 세상을 떠날 때까지 32년 동안 그 자리를 지켰다. 그동안 그는 문제를 만들고, "다른 사람들의 문제를 다듬어 모양을 갖추었으며"(그 자신의 표현으로, 그는 이 일이 오랫동안 흥미와 즐거움의 원천이었다고 말했다), 모든 시험지를 꼼꼼히 검토하고 채점을 감독했다. 그는 또한 STEP 부활절 학교(STEP Easter School)와 STEP 지원 프로그램(STEP Support Programme)을 이끈 원동력이기도 했는데, 이 둘은 학교에서 도움을 받을 수 없는 학생들에게 무료로 도움을 준다. 한 부고 기사는 그가 학생들이 어떤 학교 출신이든 케임브리지 수학 입학시험에 다가갈 수 있도록 누구보다 많은 일을 했다고 적었다.

그가 쓴 책 *Advanced Problems in Mathematics: Preparing for University*는 Open Book Publishers에서 온라인으로 무료 공개되어 있으며, 지금도 STEP에 대한 가장 좋은 입문서이다. 나는 이 책을 강력히 추천한다. 그가 이 책에 쓴 두 가지가 지금 이 책의 모양을 만들었다. 첫째는 좋은 STEP 문제가 무엇인가에 대한 그의 견해이다. 좋은 문제란 첫 부분에서 낯선 아이디어를 보여 주고, 이후 부분에서 그것을 더 어려운 상황에 다시 써 봄으로써 이해했음을 보이게 하는 문제이다. 또는 답이 어떤 매개변수에 달려 있어서 그 매개변수를 스스로 찾아내야 하는 문제이다. 또는 특수한 경우에서 출발해 일반적인 결과로 끝나는 문제이다. 이런 문제들이야말로 어딘가로 이어지는 문제이며, 이 책에 실린 문제의 대부분이 이런 종류이다. 둘째는 풀이가 "푹신한 깃털 침대가 아니라 도약대"여야 한다는 그의 고집이다. 먼저 스스로 씨름해 보지 않은 풀이를 읽어서는 아무것도 배울 수 없다.

내가 STEP을 만난 이야기

내가 STEP을 처음 접한 것은 1990년대 초, 수학 선생님이 추가 도전 과제로 시험지 몇 장을 주셨을 때였다. 나는 입학 허가를 받기 위해서가 아니라 재미로 그 문제들을 풀었고 실제 시험을 치른 적은 없지만, 그 시험지들이 엄청나게 어려웠던 것을 기억한다. 내가 배운 어떤 것과도 관련이 없어 보이는 문제들, 한 쪽을 가득 채우는 문제들, 시작은 할 수 있어도 끝까지 풀어내는 일은 드문 문제들이었다. 그리고 마침내 무언가가 풀렸을 때, 학교 수학이 보여 주지 않았던 무언가를 보았다는 느낌도 기억한다.

여러 해가 지나 나는 반대편에서 STEP으로 돌아왔다. 학생들의 STEP 준비를 돕게 된 것이

다. 그들과 함께 수백 개의 문제를 풀면서 나는 시험지를 다르게 보게 되었다. 모든 문제가 보석은 아니다. 솔직히 말해 어떤 문제는 그저 긴 지구력 시험이다. 한 쪽에 걸친 꼼꼼한 대수 계산, 힘들지만 판에 박힌 계산이 이어지고, 끝에 가서 얻는 통찰이나 즐거움은 별로 없다. 지구력은 중요하고 대학 수학에도 필요하지만, STEP을 특별하게 만드는 것은 그런 문제들이 아니다.

STEP을 특별하게 만드는 것은 1987년 이래 출제된 1,500개가 넘는 문제들 사이사이에 참으로 아름다운 문제가 수백 개 흩어져 있다는 사실이다. 내가 무슨 뜻으로 이렇게 말하는지 설명하는 가장 좋은 방법은 그중 몇 개를 보여 주는 것이다.

몇 가지 보석

여기 이 책의 뒷부분에서 만나게 될 문제 일곱 개가 있다. 이 책이 다루는 범위를 두루 보여 주도록 골랐는데, 조합론(combinatorics)에서 두 문제, 동역학계(dynamical systems)에서 두 문제, 역학(mechanics)에서 두 문제, 확률(probability)에서 한 문제이다. 각 문제는 머릿속에 그려 볼 수 있는 것에서 출발해 믿기 어려울 만한 것으로 끝나며, 대학에서 진지하게 공부하는 수학으로 이어진다.

혼돈 속에 숨은 질서. 종이에 점 여섯 개를 찍고 모든 두 점을 선으로 이어 보자. 선은 모두 열다섯 개이다. 각 선을 원하는 대로 금색이나 은색으로 칠한다. 이제 세 변이 모두 같은 색인 삼각형이 생기지 않도록 해 보자. 몇 번을 해도 실패할 것이다. 점이 다섯 개라면 가능하지만(오각형의 변은 금색으로, 대각선 다섯 개는 은색으로 칠하면 된다), 여섯 개라면 아무리 교묘하게 칠해도 불가능하다. 1989년 STEP I의 한 문제는 이것을 증명하라고 하면서 단 하나의 힌트를 준다. 한 점에서 뻗어 나가는 선 다섯 개를 보라는 것이다. 그중 세 개는 같은 색일 수밖에 없고, 거기서부터 증명은 몇 줄이면 끝난다. 선을 칠하는 방법은 $2^{15} = 32\,768$가지인데, 이 논증은 경우를 하나도 확인하지 않고 이 모두를 한꺼번에 처리한다.

이 결과는 1928년 프랭크 램지(Frank Ramsey)가 증명한 램지 정리(Ramsey's theorem)의 가장 작은 경우이다. 램지 정리는 완전한 무질서란 불가능하다는 것, 즉 충분히 큰 구조라면 아무리 되는대로 짜 맞추었더라도 그 안에 완벽한 질서를 이루는 부분이 있다는 것을 말해 준다. 그렇다면 "충분히 크다"는 것은 얼마나 큰 것일까? 모두 한 가지 색으로 이어진 점 네 개를 보장하려면 점이 18개 필요하며, 이 사실은 1955년에 증명되었다. 점 다섯 개의 경우는 아무도 모른다. 답은 43과 46 사이 어딘가에 있으며, 그 상계조차 2024년에야 증명되었다. 에르되시(Paul Erdős)는 이런 농담을 했다. 외계인이 이 수를 알려 주지 않으면 지구를 파괴하겠다고 위협한다면 모든 컴퓨터와 수학자를 동원해 답을 구해야 하지만, 여섯 개의 경우를 묻는다면 차라리 외계인을 파괴하려고 시도해야 한다는 것이다. 램지 이론은 대학의 조합론이나 그래프 이론(graph theory) 강의에서 만나게 되며, STEP 증명의 원동력인 비둘기집 원리(pigeonhole principle)는 거의 모든 강의에서 만나게 된다(Section 9.2).

이상한 주사위. 보통 주사위 두 개를 던지면 합이 7일 확률이 가장 높고 합이 2와 12일 확률

이 가장 낮으며, 경우의 수는 익숙한 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$의 모양을 이룬다. 주사위 한 쌍에 양의 정수를 다르게 적으면서도 모든 합이 나올 확률이 정확히 같도록 하는 방법이 또 있을까? 없을 것 같지만 정확히 하나가 있다. 한 주사위에는 $1, 2, 2, 3, 3, 4$를, 다른 주사위에는 $1, 3, 4, 5, 6, 8$을 적는 것이다. 이것이 *Sicherman* **주사위**(Sicherman dice)로, 이를 발견한 George Sicherman의 이름을 땄으며 1978년 마틴 가드너(Martin Gardner)가 널리 알렸다. 던진 눈의 합에만 좌우되는 게임이라면 보통 주사위를 이것으로 바꿔도 아무도 눈치채지 못할 것이다.

1993년의 한 문제는 이 아이디어에 반대쪽에서 다가간다. 이상하게 번호가 적힌 주사위 두 개로 각 합이 나오는 경우의 수를 보여 주는 표를 주고, 주사위에 적힌 번호를 알아내라고 한다. 마치 탐정이 흔적으로부터 범죄를 재구성하는 것과 같다. 이어서 이 절은 이 주제 전체를 단순하게 만드는 아이디어를 보여 준다. 각 주사위를 다항식(polynomial)으로 바꾸는 것인데, k가 적힌 면마다 항 x^k를 하나씩 두면 된다. 주사위 두 개를 던지는 것은 두 다항식을 곱하는 것에 대응하는데, $x^i \times x^j = x^{i+j}$가 두 면의 수를 더해 주기 때문이다. 합의 분포가 같은 새 주사위를 찾는 일은 다항식을 다른 방식으로 인수분해(factorisation)하는 일이 된다. 36을 6×6 대신 4×9로 나누는 것과 비슷하다. 그리고 다항식은 정수와 마찬가지로 더 이상 쪼갤 수 없는 조각들로 단 한 가지 방식으로만 인수분해되므로, 이 인수분해는 Sicherman 주사위가 유일한 대안이라는 것까지 증명해 준다. 세는 문제를 다항식에 담아내는 이 기법, 즉 **생성함수**(generating function)는 조합론에서 가장 강력한 도구 가운데 하나이며, 그 바탕에 있는 유일 인수분해(unique factorisation)는 대학 첫 대수학(algebra) 강의의 중심 주제이다(Section 9.6).

공식이 있는 카오스. 0과 1 사이의 수 하나로 시작해서, 그 수에 4를 곱하고 다시 1에서 그 수를 뺀 값을 곱하는 일을 되풀이하자. 즉 $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$이다. 이것이 **로지스틱 사상**(logistic map)으로, 개체 수가 늘어나지만 먹이 공급에 의해 제한되는 상황을 대략적으로 나타낸 모형이다. 규칙은 더할 나위 없이 단순하지만, 이 규칙이 만들어 내는 수들은 눈에 보이는 패턴 없이 이리저리 뛰어다니며, 소수점 아래 열 자리까지 일치하는 두 시작값도 대개 몇십 단계 안에 완전히 다른 수열을 만들어 낸다. 생물학자 로버트 메이(Robert May)는 1976년 "Simple mathematical models with very complicated dynamics(아주 복잡한 동역학을 지닌 단순한 수학적 모형)"라는 제목의 유명한 논문에서 이 사상에 주목했고, 이후 로지스틱 사상은 카오스(chaos)의 표준적인 예가 되었다. 보통은 컴퓨터로 탐구한다.

2014년의 한 문제는 뜻밖의 사실을 드러낸다. 이 수열에는 정확한 공식이 있다는 것이다. 시작값이 $\sin^2\theta$이면 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$이며, 이는 배각 공식(double angle formulae)과 수학적 귀납법(induction)만으로 증명할 수 있다(이 공식은 1940년대에 울람(Stanisław Ulam)과 폰 노이만(John von Neumann)이 이미 알고 있었다). 정확한 공식이 있으면 카오스가 길들여지리라고 기대할지도 모른다. 그런데 오히려 공식은 카오스를 완벽하게 설명해 준다. 단계마다 각이 두 배가 되므로 각에 있는 아주 작은 불확실성도 단계마다 두 배가 되고, 시작값의 오차도 평균적으로 그만큼 빠르게 커진다. 오십 단계가 지나면 오차는 약 천조 배로

불어난다. 각을 π에 대한 분수로 나타내어 이진법으로 쓰면 이 사실이 생생하게 보인다. 사상을 한 번 적용할 때마다 이진 숫자들이 왼쪽으로 한 자리씩 밀리고 맨 앞 숫자는 버려진다. 따라서 수열은 시작값의 숫자를 하나씩 읽어 내는 셈이며, 백 단계 뒤를 예측하려면 시작값을 이진법으로 백 자리까지 알아야 한다. 같은 공식으로 이 사상의 모든 주기(cycle)를 찾을 수 있으며, 모든 길이의 주기가 $[0,1]$ 안에 조밀하게 들어차 있고 그 모두가 불안정하다는 것도 알 수 있다. 이것이 동역학계라는 분야로, 대학의 미분방정식(differential equations) 강의에서, 그리고 나중에는 카오스 자체를 다루는 강의에서 만나게 된다(Section 8.7).

주기 3은 카오스를 뜻한다. 함수 $f(x) = 7 - 2|x|$를 잡고, 어떤 수에서 시작해 나온 값을 계속 다시 넣어 보자. 1에서 시작하면 $1, 5, -3, 1, 5, -3, \ldots$이 나온다. 길이가 3인 주기이다. 2025년의 한 문제는 f, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$의 그래프를 그리고 그것들이 직선 $y = x$와 만나는 곳을 찾아서 이런 주기를 찾아내라고 한다. f를 한 번 더 적용할 때마다 그래프의 지그재그 수가 두 배가 되는데, 이 절은 이 관찰을 바탕으로 이 함수에 **모든** 길이의 주기, 즉 길이 2, 3, 4, 100, 백만인 주기가 있다는 것을 증명한다.

이것은 이 함수만의 특별한 성질이 아니다. 1975년 Tien-Yien Li와 James Yorke는 길이가 3인 주기를 가진 연속함수라면 **어떤 것이든** 다른 모든 길이의 주기를 가져야 한다는 것을 증명했다. 논문의 제목은 거부하기 어려운 "Period three implies chaos(주기 3은 카오스를 뜻한다)"였다. 증명에는 중간값 정리(intermediate value theorem)만 있으면 되는데, 이는 부호가 바뀌는 연속함수가 반드시 0을 지난다고 논증할 때마다 이미 쓰고 있는 정리이다. 여기에 함수가 어느 구간을 어느 구간 위로 늘여 놓는지 보여 주는 영리한 그림 하나가 더해진다. 나중에 알고 보니 우크라이나의 수학자 샤르코프스키(Oleksandr Sharkovsky)가 이미 1964년에 더 강한 결과를 증명해 놓았다. 그는 $3, 5, 7, 9, \ldots$로 시작하는 자연수의 기묘한 순서를 찾아냈는데, 어떤 길이의 주기가 있으면 이 순서에서 그 뒤에 오는 모든 길이의 주기가 반드시 존재한다. 중간값 정리는 대학 해석학(analysis) 강의에서 가장 먼저 엄밀하게 증명하는 결과 가운데 하나이다. 이 문제는 그 정리가 얼마나 많은 일을 해낼 수 있는지 보여 준다(Section 8.8).

자전거 펌프가 따뜻해지는 이유. 자전거 타이어에 바람을 넣은 뒤 펌프를 만져 보면 따뜻하다. 기체를 압축하면 뜨거워지는데, 디젤 엔진이 점화 플러그 없이 연료에 불을 붙이는 원리도 이것이다. 그런데 왜 그럴까? 2002년의 한 문제는 펌프 끝과 밀려 들어오는 피스톤 사이를 오가며 튀는 공기 분자 하나를 따라가면서 이 물음에 답한다. 분자는 다가오는 피스톤에 부딪혀 튈 때마다 조금씩 속력을 얻는데, 움직이는 라켓에 맞은 테니스공과 같다. 문제는 한 번의 튕김을 정확히 기술하고, 이를 각 충돌 때의 실린더 길이에 대한 점화식(recurrence)으로 바꾼 다음, 그 점화식을 풀라고 한다.

풀이는 숨은 법칙 하나를 드러낸다. 분자의 속력과 실린더 길이의 곱이 거의 변하지 않는다는 것이다. 길이를 절반으로 줄이면 속력은 두 배가 되며, 온도는 분자들의 에너지를 재는 양이므로 기체가 뜨거워진다. 계를 천천히 바꿀 때 거의 일정하게 유지되는 이런 양을 **단열 불변량**(adiabatic invariant)이라 하며, 조금만 더 노력하면 같은 논증으로 대학 열역

학(thermodynamics)에서 만나게 될 기체의 단열 압축 법칙을 얻을 수 있다. 이 아이디어는 멀리까지 뻗어 나간다. 페르미(Enrico Fermi)는 1949년, 우주선(cosmic ray)이 바로 이런 방식으로, 즉 우주 공간에서 움직이는 자기장 사이를 거듭 튕기면서 엄청난 에너지를 얻는다고 제안했다. 또 에렌페스트(Paul Ehrenfest)는 1916년, 양자역학이 양자화해야 하는 양이 바로 단열 불변량이라고 주장했다. 자전거 펌프에 관한 문제가 알고 보니 통계물리학, 천체물리학, 그리고 양자론의 출발점에까지 닿아 있는 것이다(Section 10.4).

되돌아오는 공. 공을 앞으로 살살 던지면 공은 땅에 떨어질 때까지 꾸준히 멀어진다. 상식적으로는 늘 그럴 것 같다. 공은 계속 앞으로 움직이는데 어떻게 가까워질 수 있겠는가? 그런데 공을 충분히 가파르게, 수평면과 약 70.5°보다 큰 각으로 던지면 이상한 일이 일어난다. 공이 내려오는 동안 비행의 일부 구간에서, 수평으로는 여전히 멀어지고 있는데도 공이 여러분에게 **가까워진다**. 높이가 줄어드는 속도가 수평 거리가 늘어나는 속도보다 빠르기 때문이다.

2019년의 한 문제는 이를 증명하고 임계각을 정확히 구하라고 한다. 그 방법은 앞으로 거듭 쓰게 될 방법이다. 거리 자체 대신 거리의 제곱을 미분하면 제곱근을 피할 수 있다. 그 도함수는 시간에 대한 이차식이 되고, 거리가 줄어드는 때가 있는지의 문제는 그 이차식이 실근을 갖는지의 문제가 된다. 판별식(discriminant)이 답을 주며, 임계각은 사인값이 정확히 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$인 각임이 드러난다. 이 교훈은 포물체 운동을 훨씬 넘어선다. "당연히" 증가할 것 같은 양들 가운데 많은 것이 실제로는 그렇지 않으며, 대학에서는 도함수의 부호를 구해 어떤 양이 단조(monotonic)임을 보이는 일이 부등식을 증명할 때, 수열이 수렴(converge)함을 증명할 때, 미분방정식의 해가 안정되어 감을 보일 때 핵심 단계가 된다(Section 11.10).

마지막 승객. 기차 좌석이 모두 예약되어 있다. 처음 탄 승객은 자기 표를 무시하고 무작위로 고른 좌석에 앉는다. 그 뒤로 타는 사람은 모두 자기 좌석이 비어 있으면 거기에 앉고, 비어 있지 않으면 빈 좌석 가운데 무작위로 하나를 골라 앉는다. 마지막으로 탄 승객이 자기 좌석이 비어 있는 것을 볼 확률은 얼마일까? 좌석이 백 개라면 가능성은 어지러울 만큼 갈라진다. 자리를 빼앗긴 승객 한 명이 다른 승객의 자리를 빼앗고, 그 승객이 또 다른 승객의 자리를 빼앗는 식으로 사슬이 얼마든지 길어질 수 있다. 직접 계산하는 것은 가망이 없어 보인다. 그런데도 답은 좌석 수와 상관없이 정확히 $\frac{1}{2}$이다.

2021년의 한 문제는 이 답에 한 걸음씩 다가간다. 좌석이 두 개와 세 개일 때의 답을 구하고, 첫 승객이 어디에 앉는지를 조건으로 하여(conditioning) 점화식을 세운 다음, 답이 언제나 $\frac{1}{2}$임을 수학적 귀납법으로 증명하라고 한다. 이는 완벽하게 훌륭한 증명이지만, 답이 **왜** 그렇게 단순한지에 대한 궁금증은 남긴다. 그래서 이 절은 이어서 그 이유를 설명하는 한 줄짜리 논증을 제시한다. 어떤 승객이 무작위로 골라야 할 때마다 첫 승객의 좌석과 마지막 승객의 좌석은 정확히 똑같이 취급된다. 둘 중 하나가 차기 전까지 이 과정은 둘을 구별하지 못한다. 따라서 마지막으로 남은 빈 좌석은 둘 중 어느 쪽일 가능성도 같으며, 그 좌석은 반드시 둘 중 하나여야 한다. 마지막 승객이 타기 전에 나머지 모든 좌석은 주인이나 자리를 빼앗긴 누군가가 차지하기 때문이다. 이처럼 여러 쪽의 계산을 단 하나의 관찰로 대신하는 대칭성

논증(argument from symmetry)은 대학 확률론 전반에 걸쳐 등장한다(Section 12.5).

이런 문제들을 모아 보면, 수학 학위 과정 1학년의 주요 분야를 빠짐없이 건드린다. 정수론(number theory), 해석학, 미적분학(calculus), 복소수(complex numbers), 대수학, 선형대수학(linear algebra), 미분방정식, 조합론, 역학, 확률과 통계(statistics)가 그것이다.

이 책의 목적

바로 이 관찰이 이 책을 쓴 이유이다. 대부분의 STEP 준비는, 충분히 그럴 만하게도, 시험 통과를 목표로 한다. 기법을 익히고, 기출 시험지를 연습하고, 속도와 지구력을 기르는 것이다. 이 책도 그것을 목표로 하며, 이 책을 공부하면 STEP 실력이 늘 것이다. 그러나 이 책의 진짜 목적은 다른 데 있다. 여러분이 **대학 수학을 염두에 두고** STEP을 준비하도록 돕는 것이다. 즉 각 문제를 넘어야 할 장애물이 아니라 초대장으로 보고, 그 초대가 이끄는 곳까지 따라가 보도록 하는 것이다.

STEP에서 가장 좋은 성적을 거두고 이후 대학에서도 두각을 나타내는 학생들은 거의 언제나 수학 그 자체를 사랑하는 학생들이다. 그들은 어려운 문제가 마침내 풀리는 순간을 즐긴다. 어떤 기법이 통한다는 사실뿐 아니라 왜 통하는지를 알고 싶어 한다. $\frac{1}{2}$나 $\frac{1}{e}$나 $\pi^2/6$처럼 답이 수상할 만큼 단순하게 나오면, 더 깊은 무언가가 있으리라 의심하고 그것을 찾아 나선다. 이 책이 길러 주려는 것이 바로 이런 습관이다. 각 문제는 발견으로 이어지기 때문에 골랐다. 문제 자체보다 더 큰 아이디어, 정리, 사고방식으로 말이다.

사고방식은 정리만큼이나 중요하다. 대학 수학은 학교 수학에서 좀처럼 요구하지 않는 방식으로 생각하기를 요구한다. 계산하기보다는 증명하기, 귀류법(proof by contradiction)이나 무한강하법(infinite descent)으로 논증하기, 같은 것을 두 가지 방법으로 세기, 결코 변하지 않는 양 찾기, 반례(counterexample) 만들기, 어떤 것을 직접 찾지 않고도 그것이 존재함을 보이기 등이다. STEP 문제는 대개 드러내 놓고 말하지는 않지만 바로 이런 습관을 훈련시킨다. 이 책에서는 모든 절마다 그 중심에 있는 사고 기술의 이름을 밝혀 두어, 나중에 다시 만났을 때 알아볼 수 있게 했다.

이 책의 구성

이 책은 열세 개의 장으로 이루어져 있으며, 문제가 출제된 STEP 시험지가 아니라 문제가 이어지는 대학 수학의 분야에 따라 구성되어 있다.

- **순수수학**(1장 9장): 정수론과 증명, 수열·급수와 수렴(convergence), 함수·부등식과 엄밀성(rigour), 제대로 하는 미적분학, 복소수, 대수학과 구조, 선형대수학과 기하학, 미분방정식과 동역학계, 그리고 세기와 우연. 마지막 장에서는 확률 시험지에 나온 조합론 문제들도 다룬다.

- **역학**(10장, 11장): 보존 법칙(conservation laws), 충돌, 중력, 그리고 진동(oscillations), 회전, 움직이는 좌표계(moving frames). 11장은 놀라운 궤적들을 모은 묶음으로 끝난다.
- **확률과 통계**(12장, 13장): 조건부 확률에 대한 명료한 사고에서 중심극한정리(central limit theorem)에 이르는 확률, 그리고 통계와 세상 속의 무작위성.

각 장은 한 편의 글로 시작한다. 그 분야가 왜 중요한지, 대학에서 그 분야의 무엇을 만나게 될지, 그리고 장 전체를 관통하는 세 가지 큰 질문을 소개한다. 각 장의 끝에는 정리하는 글이 있어 그 질문들로 되돌아가고, 사용한 방법들을 모은 도구 상자, 다른 장으로 이어지는 안내, 대학에 가기 전에 읽어 볼 만한 책들을 제시한다. 각 장의 맨 끝에는 연습문제의 간단한 답이 있다. 1장 앞에는 이 책에 나오는 용어 가운데 학교에서 익숙하지 않을 법한 것들을 모은 용어집과, 이 책에서 쓰는 수학 기호의 표가 있다. 어떤 단어나 기호에서 막히면 그곳을 찾아보라.

모든 절은 같은 구성을 따른다. 절은 **문제**로 시작한다. 공식 출처에 출제된 그대로 실린 STEP 문제로 가는 링크이다. **도입**은 그 문제가 겉보기보다 왜 더 흥미로운지 설명한다. **시작하기 전에**는 처음 디딜 발판을 준다. **차근차근 풀기**는 단계별로 안내하는 풀이로, 중간중간 **스스로 물어보기**와 **잠깐 멈추고 풀어 보기**라는 제목의 상자가 끼어든다. 이 상자들은 좋은 선생님이라면 그 시점에 던질 질문들이며, 건너뛰라고 있는 것이 아니라 답하라고 있는 것이다. **돌아보기**는 핵심적인 수들을 짚어 준다. **숨은 수학**은 절의 핵심으로, 문제 뒤에 있는 대학 수학과 그 역사, 그리고 그 속의 놀라운 점들을 다룬다. **사고 기술**은 그 문제가 단련시키는 사고 습관의 이름을 밝힌다. **더 도전하기**는 후속 문제들을 제시하는데, 관련된 STEP 문제가 포함되는 경우가 많다. **더 읽을거리**는 뛰어난 고등학생이나 대학 1학년생이 소화할 수 있는 수준의 책과 글을 추천한다.

이 책은 136개의 문제를 자세히 다루지만, STEP에서 출제된 문제는 1,500개가 넘는다. 웹사이트에는 예시 시험지부터 2025년 시험지까지 그 모든 문제의 풀이가 있다. 이 풀이들은 이 책과 같은 정신으로 쓰였지만 훨씬 짧다. 각 풀이는 문제를 푸는 핵심 아이디어, 소문항별 완전한 풀이, 답을 확인해 볼 수 있는 몇 가지 검산, 저지르기 쉬운 실수, 그리고 문제가 맞닿아 있는 대학 수학에 대한 안내를 담고 있다. 이 책에서 자세히 다룬 문제라면 풀이에 그 사실을 밝히고 해당 절로 연결해 두었다.

몇몇 절은 군(group), 관성 모멘트(moment of inertia), 적률생성함수(moment generating function)처럼 현재 STEP 출제 범위에 들어 있지 않은 주제를 사용한다. 그 문제들이 빼놓기에는 너무 좋기 때문에 넣었으며, 각 절에서 필요한 사실들을 제시해 두었다.

학생을 위한 이 책 사용법

- **먼저 문제를 풀어라.** 절 첫머리의 링크로 문제를 열고, 읽는 동안 곁에 두어라. 풀이는 처음부터 끝까지 문제의 소문항과 문구를 언급한다. 더 읽어 나가기 전에 각 문제에 적어

도 30분은 정직하게 노력을 쏟아라. 막히는 것은 실패의 신호가 아니다. 배움은 바로 거기서 일어난다. 완전히 막혔다면 **시작하기 전에**를 읽고 다시 시도하라.

- **상자에 답하라.** 본문이 질문을 던지면 멈추고 종이에 답을 적어라. 안내 풀이는 손에 연필을 쥐고 읽도록 쓰였다.
- **"숨은 수학" 부분을 건너뛰지 마라.** 시험에 나오지는 않지만, 이 부분이야말로 이 책이 존재하는 이유이며 여러분의 기억에 남을 부분이다.
- **절은 어떤 순서로 읽어도 좋다.** 각 절은 독립적이며, 상호 참조가 다른 곳의 관련 아이디어로 안내한다. 호기심을 따라가라.
- **연습문제를 풀고 나서 답을 확인하라.** 각 장 끝의 답은 간단하다. 결과와 핵심 단계만 주며, 완전한 풀이를 적어 두지는 않았다.
- **풀이를 도약대로 삼아라.** 기출 시험지로 연습할 때는 웹사이트에서 풀이를 열기 전에 각 문제를 제대로 시도해 보고, 다시 나아갈 수 있을 만큼만 풀이를 읽어라. 핵심 아이디어만으로 충분하다면 풀이를 닫고 나머지는 스스로 끝내라.
- **활동지를 활용하라.** 웹사이트에는 모든 절마다 인쇄용 활동지가 있으며, 문제로 가는 링크, 순서대로 정리한 힌트, **숨은 수학** 부분, 연습문제가 실려 있어 화면에서 벗어나 공부할 수 있다.
- **이 책 너머까지 읽어라.** Siklos의 책, STEP 지원 프로그램, 그리고 기출 시험지 자체가 모두 무료로 공개되어 있다. 각 절의 더 읽을거리는 대학 입학 전에도 읽을 수 있는 것들로 골랐다.

교사를 위한 이 책 사용법

- **심화 학습 자료로.** 각 절은 그 자체로 완결된 수업 한 차시이다. 문제, 문제를 따라가는 안내된 경로, 그리고 그 뒤에 가 볼 만한 흥미로운 곳이 있다. 사고 기술은 연속 수업의 주제로 삼기에 좋다.
- **토론 길잡이로.** **스스로 물어보기**와 **잠깐 멈추고 풀어 보기** 상자는 학급이나 소모임에서 자연스러운 발문이 된다. 다음 단계를 보여 주기 전에 먼저 던져 보라.
- **활동지와 함께.** 각 활동지에는 문제로 가는 링크, 순서대로 정리한 힌트, **숨은 수학** 부분, 후속 연습문제가 실려 있다. 학생들은 힌트를 몇 개까지 볼지 스스로 정할 수 있다.
- **STEP 준비용으로.** 예시 시험지부터 2025년까지 세 시험지 모두의 문제가 실려 있으며, 많은 문제에는 연습문제에 관련 문제가 딸려 있다. 각 장의 정리 글과 도구 상자는 학생들이 주제 사이의 연결을 보도록 돕는다.
- **STEP 지원을 받지 못하는 학생을 위해.** 이 책은 의지가 굳은 학생이라면 혼자서도 공부해 나갈 수 있도록 쓰였다. 학교에서 STEP 준비를 지원하지 않는다면, 이 책이 그 역할의 상

당 부분을 해낼 수 있다.

저작권과 오류 정정

본문, 안내 풀이, 그림, 연습문제, 답을 비롯하여 이 책에서 내가 직접 작업한 모든 것은 Creative Commons CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인에 기증되었다. 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 수정하고, 공유해도 좋다. STEP 문제 자체의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있으며, 위 라이선스의 적용을 받지 않는다. 그런 이유로 문제들은 이 책에 싣지 않았다. 대신 각 절은 공식 출처에 있는 문제로 연결된다. 예시 시험지와 1987년부터 2018년까지의 시험지는 STEP 지원 프로그램의 문제 데이터베이스로, 2019년 이후의 시험지는 OCR이 제공하는 연도별 시험지 내려받기 페이지로 연결된다. 다른 STEP 문제를 사용하는 연습문제도 같은 방식으로 연결해 두었다.

수학적 내용이 정확하도록 애썼지만, 이 정도 분량의 책이라면 틀림없이 오류가 있을 것이다. 아무리 사소한 것이라도 오류를 발견하면 이 책의 GitHub 저장소 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`에 이슈로 알려 주기 바란다. 정정 사항은 들어오는 대로 이 책의 웹사이트에 반영될 것이다.

시작하기 전에 마지막으로

Siklos는 자신의 책 서문을 미켈란젤로(Michelangelo)의 **다비드** 이야기로 끝맺었다. 수십 년 동안 아무도 손대지 않은 채 놓여 있던 대리석 덩어리를 깎아 만든 조각상 말이다. 그리고 그는 자신이 여러분에게 수학을 가르칠 수는 없지만, 문제를 하나하나 깎아 나가는 고된 노력이 여러분 안의 수학자를 드러내 줄 것이라고 말했다. 나는 그보다 더 잘 말할 수 없다. 이 책은 여러분에게 대리석과 몇 가지 도구, 그리고 다른 사람들이 그 안에서 찾아낸 것들의 그림 몇 장을 건넨다. 깎아 내는 일은 여러분의 몫이다. 내가 이 책을 엮으며 즐거웠던 만큼 여러분도 그 일을 즐기기를 바란다.

Keith McNulty
2026년 11월

용어 해설

대학 수학에는 그 나름의 어휘가 있고, 그중 상당수는 처음 보는 말일 것이다. 이 용어 해설은 이 책에 나오는 말 가운데 학교에서 접했을 가능성이 낮은 것들을 모아, 각각을 짧게 설명하고, 도움이 되는 경우에는 그 개념이 쓰이거나 제대로 설명되는 절을 함께 가리킨다. 이 설명들은 출발점을 마련하려는 것이지 정밀한 정의가 아니다. 어떤 말에 엄밀한 정의가 있다면, 가리키는 절에서 그 정의를 제시한다.

집합(set), **함수**(function), **증명**(proof)처럼 익숙한 말도 몇 개 있지만, 대학에서는 학교에서보다 더 신중하게 쓰이므로 그런 이유로 포함하였다. 항목 안에서 **기울임꼴**로 쓴 말은 그 자체로 별도의 항목이 있다.

A

단열 불변량(adiabatic invariant) 계를 천천히 변화시킬 때 거의 일정하게 유지되는 양. 천천히 압축되는 실린더 안에서 튀어 다니는 분자는 자신의 속력에 실린더의 길이를 곱한 값을 거의 일정하게 유지한다(Section 10.4).

대수적 수(algebraic number) 계수가 정수(양수, 음수 또는 0)이고 모두 0은 아닌 다항방정식의 근이 되는 수. $\sqrt{2}$, i, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$는 대수적 수이다. 대수적이지 않은 수는 **초월수**(transcendental number)이다(Section 6.3).

해석학(analysis) 미적분학을 엄밀한 토대 위에 세우는 수학 분야. 극한, 연속, 미분, 적분, 무한급수를 모두 정밀하게 정의하고 기본 원리로부터 증명한다. 2장부터 4장까지가 해석학 입문이다.

각운동량(angular momentum) 운동량의 회전 버전. 축을 중심으로 회전하는 물체에서는 **관성 모멘트**(moment of inertia)에 각속도를 곱한 것이며, 외부에서 돌림 효과가 작용하지 않으면 보존된다(Section 11.6).

산술–기하 평균(arithmetic–geometric mean) 두 수의 쌍을 그 산술평균과 기하평균으로 바꾸는 과정을 되풀이하여 만든 두 수열의 공통 극한. 놀라울 만큼 빠르게 수렴한다(Section 2.6).

결합적(associative) 모든 a, b, c에 대하여 $(a * b) * c = a * (b * c)$이면 연산 $*$는 결합적이라 하며, 이때는 괄호를 생략할 수 있다. 수의 덧셈과 곱셈은 결합적이지만, 뺄셈은 그렇지 않다.

점근적(asymptotic) $n \to \infty$일 때 두 식의 비가 1로 가면 두 식은 점근적이라 하고 $f(n) \sim g(n)$으로 쓴다. 스털링(Stirling) 공식은 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$임을 말해 주는데, 양변의 차는 한없이 커진다(Section 12.23).

공리(axiom) 증명 없이 출발점으로 받아들이고, 나머지 모든 것을 그로부터 연역하는 명제. 대학 대수학의 상당 부분은 짧은 공리 목록에서 출발하여 그로부터 무엇이 따라 나오는지를 묻는다(Section 7.3, Section 6.5).

B

기저 단계(base case) **귀납법**(induction)에 의한 증명의 첫 단계로, 가장 작은 값(보통 $n = 0$ 또는 $n = 1$)에 대하여 명제가 참임을 확인하는 것이다. 그다음 **귀납 단계**(inductive step)에서 어떤 값에 대하여 참이면 다음 값에 대해서도 참임을 보인다.

기저율 오류(base-rate fallacy) 어떤 일이 애초에 얼마나 흔한지는 무시하고 증거만으로 그 확률을 판단하는 실수. 어떤 질병이 충분히 드물다면, 정확한 검사에서 양성이 나오더라도 그것이 오경보일 가능성이 그렇지 않을 가능성보다 클 수 있다. 실제로 그런지는 질병이 얼마나 드문지, 검사가 얼마나 정확한지에 달려 있다(Section 12.2).

기저(basis) 공간의 모든 벡터를 그 벡터들의 결합으로 정확히 한 가지 방식으로 나타낼 수 있게 하는 벡터들의 집합. 평면에서 $\mathbf{i}$와 $\mathbf{j}$는 기저를 이루며, 평행하지 않은 두 벡터의 쌍도 모두 기저를 이룬다. 기저를 이루는 벡터의 개수가 그 공간의 **차원**(dimension)이다(Section 6.3).

베이즈 정리(Bayes' theorem) 조건부확률을 뒤집는 규칙: $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(A)/\mathrm{P}(B)$. 증거에 비추어 믿음을 어떻게 갱신해야 하는지 알려 준다(Section 12.2).

편향(bias) 많은 표본에 대하여 평균을 냈을 때 너무 높거나 너무 낮게 나오면 **추정량**(estimator)은 편향되었다고 한다. 기댓값이 추정하려는 양과 정확히 같으면 **불편**(unbiased) 추정량이다(Section 13.3).

전단사(bijection) 일대일 대응. 한 집합의 모든 원소를 다른 집합의 정확히 한 원소와 짝지어, 어느 쪽에도 남는 것이 없게 하는 규칙이다. 두 유한집합은 그 사이에 전단사가 있을 때 그리고 그때에만 크기가 같으며, 무한집합의 크기도 이런 방식으로 정의한다(Section 1.8, Section 9.10).

이항연산(binary operation) 두 대상을 결합하여 세 번째 대상을 주는 규칙. 수의 덧셈, 행렬의 곱셈, 함수의 합성 등이 그 예이다.

상계와 하계(bound) 수의 집합이나 수열의 상계(upper bound)는 그 어느 것도 넘지 않는 수이고, 하계(lower bound)는 그 어느 것도 그보다 작아지지 않는 수이다. 수열이 둘 다 가지면 **유계**(bounded)라 한다(Section 2.2).

분기 과정(branching process) 각 개체가 독립적으로 무작위 개수의 자손을 남기는 개체군 모형. 핵심 질문은 그 가계가 끊기는지 여부이며, 그 답은 **확률생성함수**(probability generating function)에서 나온다(Section 12.15).

C

변분법(calculus of variations) 미지의 대상이 함수나 곡선 전체이고, 어떤 양을 가능한 한 작게 또는 크게 만들도록 그것을 고르는 문제들을 연구하는 분야. 가장 짧은 경로, 가장 빠르게 미끄러져 내려가는 경로, 가장 넓은 넓이를 둘러싸는 곡선 등이 그 예이다(Section 4.7).

현수선(catenary) 매달린 사슬의 모양으로, $y = a\cosh(x/a)$의 그래프이다. 포물선처럼 보이지만 포물선은 아니다(Section 11.14).

코시 분포(Cauchy distribution) 그래프가 종 모양인 연속분포이지만, 꼬리가 매우 두꺼워 평균이 존재하지 않는다. 이 분포에서 뽑은 표본의 평균은 관측값 하나보다 더 믿을 만하지 않다(Section 12.22).

중심극한정리(central limit theorem) 같은 분포를 따르고 분산이 유한한 독립인 확률적 양을 많이 더한 합을 적절히 평행이동하고 크기를 조정하면, 그 공통 분포가 무엇이든 근사적으로 정규분포를 따른다는 정리. 서로 다른 분포를 따르는 양에 대해서도, 그중 소수가 합을 지배하지만 않는다면 성립하는 판본들이 있다. 종 모양 곡선이 어디에나 나타나는 이유를 설명해 준다(Section 12.24).

카오스(chaos) 결정론적인 계가 출발점에 너무 민감하여 장기 예측이 실제로는 불가능한 행동. 서로 아주 가까운 두 출발점이 완전히 다른 미래로 이어진다(Section 8.7, Section 8.8).

닫혀 있음(closed) 집합의 두 원소를 결합한 결과가 항상 그 집합의 원소이면, 집합은 그 연산에 대하여 닫혀 있다고 한다. 짝수는 덧셈에 대하여 닫혀 있지만, 홀수는 그렇지 않다.

교환적(commutative) 항상 $a * b = b * a$이면 연산 $*$는 교환적이라 한다. 수의 곱셈은 교환적이지만, 행렬의 곱셈과 **사원수**(quaternions)의 곱셈은 그렇지 않다(Section 7.1, Section 6.7).

완비성(completeness) 실수에 틈이 없다는 성질. 위로 유계인 모든 증가수열은 어떤 실수로 수렴한다. 분수로 이루어진 수열이 $\sqrt{2}$에 한없이 다가갈 수 있으므로 유리수에는 이 성질이 없다. **해석학**의 상당 부분이 이 성질에 기대고 있다(Section 2.2).

합동(congruence) $a \equiv b \pmod{n}$은 "a는 법 n에 대하여 b와 합동이다"라고 읽으며, a와 b를 n으로 나눈 나머지가 같다는 뜻이다. 동치로, n이 $a - b$를 나눈다는 뜻이다. 합동식을 이용한 산술을 **모듈러 산술**(modular arithmetic)이라 한다(Section 1.5).

추측(conjecture) 참이라고 믿어지지만 아직 증명되지 않은 명제.

보존 법칙(conservation law) 에너지, 운동량, 각운동량 같은 어떤 양이 계가 변해 가는 동안 바뀌지 않는다는 명제. 보존 법칙을 이용하면 세부 과정을 따라가지 않고도 문제를 풀 수 있는 경우가 많다(Section 10.1).

연속(continuous) 입력이 조금 바뀌면 출력도 조금만 바뀌는 함수를 연속이라 한다. 비형식적으로 말하면, 펜을 떼지 않고 그래프를 그릴 수 있다. 정확히는, $x \to a$일 때 $\mathrm{f}(x) \to \mathrm{f}(a)$이면 f는 a에서 연속이다(Section 3.1, Section 8.8).

귀류법(proof by contradiction) 명제가 거짓이라고 가정하고 불가능한 결론을 이끌어 내는 증명. 고전적인 예는 $\sqrt{2}$가 무리수라는 증명이다(Section 1.3).

대우(contrapositive) "P이면 Q이다"의 대우는 "Q가 아니면 P가 아니다"이다. 두 명제는 논리적으로 동치이며, 대우를 증명하는 편이 더 쉬운 경우가 많다. 대우는 **역**(converse)인 "Q이면 P이다"와 같지 않으며, 역은 거짓일 수도 있다.

수렴(converge) 수열의 항들이 고정된 어떤 수, 곧 그 수열의 **극한**(limit)에 원하는 만큼 가까워지고 계속 그 가까이에 머무르면 수열이 수렴한다고 한다. 급수는 그 **부분합**(partial sum)이 수렴하면 수렴한다. 수렴하지 않는 수열이나 급수는 **발산**(diverge)한다(Section 2.1, Section 2.3).

볼록(convex) x^2이나 e^x처럼, 그래프 위의 임의의 두 점을 잇는 현이 그래프 위에 있거나 그래프보다 위에 있으면 함수는 볼록하다고 한다. AM–GM 부등식을 비롯한 많은 부등식이 볼록성의 결과이다(Section 3.3).

따름정리(corollary) 방금 증명한 **정리**(theorem)로부터 곧바로 따라 나오는 결과.

상관계수(correlation) 두 확률적 양이 직선 관계에 얼마나 가까운지를 재는 -1과 1 사이의 수. **공분산**(covariance)을 두 표준편차로 나누어 조정한 것이다(Section 13.7).

가산(countable) 원소들을 첫째, 둘째, 셋째, …와 같이, 경우에 따라서는 끝없이 나열할 수 있으면 집합은 가산이라 한다. 자연수와, 놀랍게도 분수는 가산이지만, 실수는 그렇지 않다(Section 1.8).

반례(counterexample) 일반적인 명제가 거짓임을 보여 주는 하나의 예. 주장을 뒷받침하는 예가 아무리 많아도, 반례 하나면 그 주장을 반증하기에 충분하다.

공분산 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$로, 두 확률적 양이 함께 변하는 정도를 재는 척도이다. 독립인 양에 대해서는 0이지만, 공분산이 0이라고 해서 독립인 것은 아니다(Section 12.4, Section 13.7).

순환(cycle) 함수를 반복 적용할 때 차례로 방문하는 점들의 집합: $x_1 \mapsto x_2 \mapsto \cdots \mapsto$

$x_n \mapsto x_1$. 수 n을 그 **주기**(period)라 하고, 이 점들을 **주기점**(periodic point)이라 한다(Section 8.8).

사이클로이드(cycloid) 굴러가는 바퀴의 테두리 위 한 점이 그리는 곡선. 위아래를 뒤집으면 가장 빠르게 내려가는 곡선이면서, 어디서 출발하든 미끄러져 내려가는 데 같은 시간이 걸리는 곡선이기도 하다(Section 11.4).

원분다항식(cyclotomic polynomial) 근이 정확히 1의 원시 n제곱근(primitive root of unity)들인 다항식 $\Phi_n(x)$. 계수가 정수이고 **기약**(irreducible)이며, $x^n - 1$은 n의 모든 약수 d에 대한 $\Phi_d(x)$의 곱이다. 예를 들어 $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$이다(Section 6.1).

D

교란순열(derangement) 어떤 것도 원래 자리에 남지 않도록 목록을 재배열한 것(Section 9.8).

도분(derivation) 함수(또는 다른 대상)에 작용하는 연산 D로서 $D(f+g) = Df + Dg$와 곱의 법칙 $D(fg) = f\,Dg + g\,Df$를 만족하는 것. 미분이 대표적인 예이며, 미분의 성질 가운데 상당수가 이 두 규칙만으로부터 따라 나온다(Section 6.5).

행렬식(determinant) 정사각행렬로부터 계산하는 수로, 대응하는 변환이 넓이나 부피를 몇 배로 바꾸는지를 잰다. 행렬식이 0인 것은 행렬이 역행렬을 갖지 않는 것과 정확히 같다(Section 7.3).

미분가능(differentiable) 함수의 그래프가 어떤 점에서 잘 정의된 접선을 가져서, 도함수를 정의하는 극한이 존재하면 함수는 그 점에서 미분가능하다고 한다. 미분가능한 함수는 모두 **연속**이지만, 그 역은 성립하지 않는다. $|x|$는 연속이지만 0에서 미분가능하지 않다.

차원 기저를 이루는 벡터의 개수. 곧 **벡터 공간**(vector space)에서 독립적인 방향의 개수이다.

발산 수렴 항목을 보라.

동역학계(dynamical system) 계의 상태가 시간에 따라 어떻게 변하는지를 기술하는 규칙. 한 단계씩 변하는 경우($x_{n+1} = f(x_n)$으로 정의되는 수열)도 있고 연속적으로 변하는 경우(미분방정식)도 있다. 8장이 이를 다룬다.

E

고윳값, 고유벡터(eigenvalue, eigenvector) 어떤 수 λ에 대하여 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$이면 영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{v}$를 행렬 $\mathbf{M}$의 고유벡터라 하고, 그 수를 고윳값이라 한다. 곧 이 변환은 $\mathbf{v}$를 돌

리지 않고 늘이기만 한다(Section 7.2).

포락선(envelope) 곡선족의 모든 곡선에 접하는 곡선. 일정한 속력으로 던진 공의 모든 궤적의 포락선은 **안전 포물선**(safety parabola)으로, 공이 도달할 수 있는 영역의 경계이다(Section 11.9).

평형(equilibrium) 변하지 않는 계의 상태. 작은 교란이 계속 작게 유지되면 **안정**(stable)하다고 하고, 마찰이 있는 진자처럼 교란이 점차 사라지기까지 하면 **점근적으로 안정**(asymptotically stable)하다고 한다. 마찰 없는 진자가 똑바로 아래로 매달려 있는 상태는 안정하지만, 살짝 밀면 영원히 흔들린다. 어떤 작은 교란이 커지면 **불안정**(unstable)하다고 한다(Section 8.3, Section 11.8).

추정량 개체군의 크기나 분포의 평균처럼 알지 못하는 양에 대한 추측값을 데이터로부터 계산하는 규칙(Section 13.3).

오일러 지표(Euler characteristic) 꼭짓점이 V개, 모서리가 E개, 면이 F개인 다면체에 대하여 수 $V - E + F$를 말하며, 구멍이 없는 다면체에서는 항상 2이다(Section 7.9).

존재 증명(existence proof) 어떤 것이 존재함을 보이되, 그것을 어떻게 찾는지는 반드시 말해 주지 않는 증명. **비둘기집 원리**(pigeonhole principle)와 **중간값 정리**(intermediate value theorem)는 모두 존재 증명을 준다.

기댓값(expectation) 확률적 양 X의 평균값으로, $\mathrm{E}(X)$로 쓴다. 독립적으로 여러 번 되풀이했을 때의 장기적 평균이다. 기댓값은 가법적이어서, X와 Y가 독립이든 아니든 $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$이다(Section 9.11).

극단 원리(extremal principle) 어떤 종류의 대상 가운데 가장 작은 것, 가장 큰 것, 처음 것 또는 마지막 것을 살펴보고, 그것이 결론이나 모순으로 이어지는 성질을 가짐을 보이는 전략(Section 1.3).

F

체(field) 덧셈, 뺄셈, 곱셈, (0으로 나누는 것을 제외한) 나눗셈을 할 수 있고, 익숙한 규칙이 모두 성립하는 수 체계. 유리수, 실수, 복소수는 체이며, 소수를 법으로 하는 정수도 체이다. 정수는 항상 나눌 수 있는 것은 아니므로 체가 아니다(Section 6.3).

체의 확대(field extension) 더 작은 체를 포함하는 더 큰 체. 예를 들어 a, b가 유리수일 때 $a + b\sqrt{2}$ 꼴의 수들은 유리수를 포함한다. 확대의 **차수**(degree)는 그것을 더 작은 체 위의 **벡터 공간**으로 보았을 때의 **차원**이다(Section 6.3).

고정점(fixed point) $\mathrm{f}(x) = x$를 만족하는 점 x로, 함수가 제자리에 그대로 두는 점이다. 그래프에서 고정점은 $y = \mathrm{f}(x)$가 $y = x$와 만나는 곳이다(Section 2.2, Section 8.8).

기준계(frame of reference) 위치와 운동을 재는 관점. **관성**(inertial) 기준계는 뉴턴(Newton)의 제1법칙이 성립하는 기준계이다. 속력을 높이는 기차처럼 가속하는 기준계에서는 추가적인 힘이 있는 것처럼 보인다(Section 11.5).

함수 한 집합, 곧 **정의역**(domain)의 각 원소에 다른 집합, 곧 **공역**(codomain)의 원소를 정확히 하나씩 대응시키는 규칙. 대학에서 함수는 공식과 같은 것이 아니다. 중요한 함수 가운데 공식이 없는 것이 많고, 어떤 공식은 함수를 정의하지 못한다.

함수방정식(functional equation) $f(x+y) = f(x)f(y)$처럼 미지의 대상이 함수인 방정식(Section 3.8).

대수학의 기본정리(fundamental theorem of algebra) 복소수 계수를 가진 차수가 1 이상인 모든 다항식은 복소수 근을 가지며, 따라서 복소수 범위에서 일차식들의 곱으로 완전히 인수분해된다.

G

감마 함수(gamma function) 계승을 정수가 아닌 수로 확장한 함수 Γ. 자연수 n에 대하여 $\Gamma(n+1) = n!$이며, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$인데, 이는 어떤 의미에서 $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$라는 뜻이다(Section 4.4).

가우스 정수(Gaussian integer) a와 b가 정수인 복소수 $a+bi$. 보통의 정수와 매우 비슷하게 행동하여, 그 나름의 소수와 **유일 인수분해**(unique factorisation)를 가진다(Section 1.6).

생성함수(generating function) 계수가 수열의 항들인 멱급수 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$. 곱셈 같은 급수에 대한 연산이 수열에 대한 유용한 연산에 대응한다(Section 9.4). **확률생성함수**는 무작위 자연수의 확률들에 대하여 이 일을 하고(Section 9.6, Section 12.15), **적률생성함수**(moment generating function)는 이와 가까운 친척이다(Section 12.24).

군(group) **결합적**이고 **항등원**(identity)을 가지며 모든 원소에 **역원**(inverse)을 주는 **이항연산**이 있는 집합. 도형의 대칭들은 군을 이루며, 영이 아닌 복소수도 곱셈에 대하여 군을 이룬다. 군은 대칭의 언어이다(Section 6.6, Section 6.7).

H

쌍곡기하학(hyperbolic geometry) 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나면서 그 직선과 결코 만나지 않는 직선이 무수히 많고, 삼각형의 세 각의 합이 π보다 작은 기하학. 거리를 재는 적절한 방식을 갖춘 원판이 그 모형이 된다(Section 5.8).

I

항등원, 항등식 연산 $*$의 항등원은 모든 a에 대하여 $e * a = a * e = a$를 만족하는 원소 e이다. 덧셈에서는 0, 곱셈에서는 1, 행렬의 곱셈에서는 단위행렬 $\mathbf{I}$이다. 이와 별개로, 항등식은 $\cos^2\theta + \sin^2\theta \equiv 1$처럼 변수의 모든 값에 대하여 성립하는 등식이다.

필요충분조건(if and only if) "P일 때 그리고 그때에만 Q"는 흔히 "P iff Q" 또는 $P \iff Q$로 쓰며, P와 Q가 둘 다 참이거나 둘 다 거짓이라는 뜻이다. 이를 증명하려면 양쪽 방향으로 하나씩, 두 개의 논증이 필요하다.

독립(independent) 한 사건이 일어났다는 것을 알아도 다른 사건의 확률이 바뀌지 않으면 두 사건은 독립이다: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$. 세 개 이상의 사건은 둘씩은 독립이면서 전체로는 독립이 아닐 수 있다(Section 12.4).

귀납법 모든 자연수 n에 대하여 명제를 증명하는 방법. 첫 번째 값에 대하여 증명하고(**기저 단계**), 어떤 값에 대하여 참이면 언제나 다음 값에 대해서도 참임을 증명한다(**귀납 단계**). 강한 **귀납법**(strong induction)에서는 귀납 단계에서 바로 앞의 값뿐 아니라 그보다 작은 모든 값에 대한 명제를 사용할 수 있다(Section 1.2).

무한 강하법(infinite descent) 귀류법의 한 형태. 어떤 문제의 자연수 해가 있다면 그보다 작은 해가 생기고, 따라서 끝없이 감소하는 양의 정수의 수열이 생기는데 이는 불가능함을 보인다(Section 1.5).

중간값 정리 **연속**함수가 값 a와 b를 가지면, 그 사이의 모든 값을 가진다. 따라서 부호가 바뀌는 연속함수는 반드시 근을 가진다(Section 8.8).

불변량(invariant) 어떤 과정이 진행되는 동안, 또는 어떤 변환 아래에서 변하지 않는 양. 불변량을 찾는 것은 어떤 일이 불가능함을 증명하거나, 모든 단계를 따라가지 않고 문제를 푸는 가장 강력한 방법 가운데 하나이다(Section 7.7, Section 10.4).

역원 항등원이 e인 연산에 대하여 원소 a의 역원은 $a * b = b * a = e$를 만족하는 원소 b이다. 역함수(inverse function)는 함수를 되돌린다: $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$.

무리수(irrational number) $\sqrt{2}$, π, e처럼 p와 q가 정수($q \neq 0$)인 분수 $\frac{p}{q}$로 나타낼 수 없는 실수(Section 1.4).

기약 계수가 같은 종류인 더 낮은 차수의 두 다항식의 곱으로 나타낼 수 없는 다항식을 기약이라 한다. $x^2 - 2$는 유리수 범위에서 기약이지만, 실수 범위에서는 $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$로 인수분해된다(Section 6.1).

동형(isomorphic) 두 **군**과 같은 두 구조 사이에 연산을 정확히 맞추어 주는 **전단사**가 있으면 두 구조는 동형이라 한다. 곧 이름표만 다를 뿐 같은 구조이다(Section 6.7, Section 6.8).

반복(iteration) 같은 함수를 되풀이하여 적용하여 $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ⋯을 얻는 것. 수열 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 를 x_0의 **궤도**(orbit)라 한다(Section 8.7).

L

큰 수의 법칙(law of large numbers) 확률적 양을 독립적으로 여러 번 되풀이한 평균이, 기댓값이 존재한다면 그 **기댓값**으로 간다는 정리(Section 12.22).

보조정리(lemma) 주로 더 큰 **정리**를 향한 한 단계로서 증명하는 결과.

극한 수열이나 함수가 임의로 가까이 다가가고 계속 그 가까이에 머무르는 값. 이 개념을 정밀하게 만든 것은 19세기 수학의 위대한 업적 가운데 하나이며, **해석학**의 출발점이다(Section 2.1).

극한 순환(limit cycle) 계의 운동에서 근처의 운동들이 소용돌이치며 다가가는(또는 멀어지는) 닫힌 고리. 심장 박동이나 시계의 일정한 리듬이 그 예이다(Section 8.4).

선형사상(linear map) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$와 $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$를 만족하는 벡터 공간 사이의 함수 T. 모든 선형사상은 행렬로 나타낼 수 있으며, 선형대수학은 선형사상을 연구하는 분야이다(Section 7.2).

로지스틱 사상(logistic map) 규칙 $u_{n+1} = ru_n(1-u_n)$으로, 먹이 공급에 의해 제한되는 개체군의 간단한 모형이자 **카오스**의 대표적인 예이다(Section 8.7).

M

마르코프 연쇄(Markov chain) 상태 사이를 단계별로 옮겨 다니는 확률 과정으로, 다음 단계의 확률이 과정이 어떻게 현재 상태에 이르렀는지와는 무관하게 현재 상태에만 의존하는 것(Section 12.16).

최대가능도(maximum likelihood) 알지 못하는 양을 추정하는 한 방법. 관측된 데이터가 나올 확률을 가장 크게 만드는 값을 고른다(Section 13.2).

무기억성(memoryless) 무작위 대기 시간이 무기억성을 가진다는 것은, 이미 얼마나 오래 기다렸든 남은 대기 시간의 분포가 처음과 같다는 뜻이다. 지수분포는 무기억성을 가진 유일한 연속분포이다(Section 12.18).

최소다항식(minimal polynomial) 주어진 대수적 수를 근으로 가지고, 계수가 유리수이며 최고차항의 계수가 1인 다항식 가운데 차수가 가장 낮은 것. $\sqrt{2}$의 최소다항식은 $x^2 - 2$이다(Section 6.3).

모듈러 산술 **합동** 항목을 보라.

관성 모멘트 질량의 회전 버전으로, 물체가 축을 중심으로 회전하는 빠르기를 바꾸기가 얼마나 어려운지를 재는 척도이다. 질량이 얼마나 많은지뿐 아니라 질량이 축에서 얼마나 멀리 있는지에도 의존한다(Section 11.7).

단조(monotonic) 수열이나 함수가 결코 내려가지 않거나(증가) 결코 올라가지 않으면(감소) 단조라 한다. 유계인 단조수열은 반드시 수렴한다(Section 2.2, Section 11.10).

N

필요조건과 충분조건(necessary and sufficient) P 없이 Q가 일어날 수 없으면($Q \Rightarrow P$) P는 Q의 필요조건이다. P가 Q를 보장하면($P \Rightarrow Q$) 충분조건이다. 둘 다인 조건은 Q와 동치이다.

정규 모드(normal modes) 계의 모든 부분이 같은 진동수로 보조를 맞추어 움직이는 특별한 진동 패턴. 계의 모든 진동은 정규 모드들의 결합이다(Section 11.2).

O

위수(order) 군의 원소 g의 위수는 g^n이 **항등원**이 되는 가장 작은 양의 정수 n이다. 곧 처음으로 되돌아오기 위해 그 원소를 적용해야 하는 횟수이다(Section 7.4). 덧셈에 대한 정수에서 수 1처럼 그런 n이 없으면, g는 **무한 위수**(infinite order)를 가진다. 유한군의 위수는 그 군이 가진 원소의 개수이다.

직교(orthogonal) 수직이라는 뜻. 대학에서는 이 말을 벡터 너머로 확장하여, 적절한 범위에서 $\int f(x)g(x)\,dx = 0$이면 두 함수 f와 g를 직교한다고 부를 수 있다(Section 8.6).

P

매개변수(parameter) **로지스틱 사상**의 r처럼, 특정한 문제 안에서는 고정되어 있지만 문제마다 달라질 수 있는 양. 많은 STEP 문제가 답이 매개변수에 어떻게 의존하는지를 묻는다.

부분합 급수의 처음 n개 항의 합 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 부분합이 수렴하면 급수가 **수렴**한다(Section 2.3).

비둘기집 원리 n개보다 많은 물건을 n개의 상자에 넣으면, 어떤 상자에는 적어도 두 개가 들어 있다. 단순하지만, 몇몇 놀라운 **존재** 결과를 증명해 준다(Section 9.2).

푸아송 과정(Poisson process) 시간이나 공간에서 일정한 평균 비율로 무작위로, 독립적으로 일어나는 사건들의 모형. 방사성 붕괴, 전화 통화, 하늘의 별 등이 그 예이다(Section 12.19, Section 12.18).

1의 원시근 1의 n제곱근 가운데, 그 거듭제곱들이 n개의 1의 n제곱근을 모두 만들어 내는

것. 동치로, 이보다 작은 어떤 m에 대해서도 1의 m제곱근이 아닌 것이다(Section 6.1).

확률밀도함수(probability density function) 연속인 확률적 양에 대하여, 어떤 구간에서의 적분이 그 구간에 떨어질 확률을 주는 함수 f.

증명 정의, 공리, 이미 증명된 결과로부터 출발하여 명제가 참임을 보이는 완전한 논리적 논증. 대학에서는 맞는 답을 주는 계산이라도 각 단계가 정당화되지 않으면 증명이 아니다.

Q

사원수 윌리엄 로언 해밀턴(William Rowan Hamilton)이 1843년에 발견한 수 체계로, 복소수를 확장하여 -1의 세 제곱근 i, j, k를 가지며, 이들은 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$을 만족한다. 사원수의 곱셈은 **교환적**이지 않다. 3차원 회전을 기술하는 데 쓰인다(Section 6.7, Section 7.5).

R

확률변수(random variable) 동전을 열 번 던질 때 앞면이 나온 횟수처럼, 값이 무작위 실험의 결과에 따라 정해지는 양.

무작위 행보(random walk) 동전을 던진 결과에 따라 왼쪽이나 오른쪽으로 한 칸씩 움직이는 말처럼, 무작위 걸음을 잇달아 내디뎌 만들어지는 경로(Section 9.10, Section 12.17).

래피디티(rapidity) 특수상대성이론에서 쓰는 빠르기의 척도로, 속도와 달리 같은 방향의 두 운동을 결합할 때 단순히 더해진다. c가 빛의 속력이면, 속도 v의 래피디티는 $\operatorname{artanh}(v/c)$이다(Section 7.6).

점화식(recurrence relation) 피보나치(Fibonacci) 수에 대한 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$처럼, 수열의 각 항을 그 앞의 항들로 나타내는 등식.

공명(resonance) 그네 탄 아이를 그네의 박자에 맞추어 밀어 줄 때처럼, 계를 그 고유진동수에서 또는 그 근처에서 주기적으로 밀어 줄 때 나타나는 큰 반응(Section 11.1).

리만 적분(Riemann integral) 적분을 가느다란 직사각형들의 넓이의 합의 극한으로, 그 극한이 존재할 때 정밀하게 정의한 것(Section 4.1).

엄밀성(rigour) 모든 단계를 정당화하고, 뻔해 보인다거나 시도해 본 예에서 참이라는 이유로 어떤 것도 당연하게 받아들이지 않는 논증의 기준(3장).

1의 거듭제곱근(root of unity) 어떤 양의 정수 n에 대하여 $z^n = 1$을 만족하는 복소수 z. 1의 n제곱근은 $k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $e^{2\pi ik/n}$이며, 이들은 단위원 위에서 정n각형을 이룬다(Section 5.2).

S

표본공간(sample space) 무작위 실험에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합. 사건은 그 부분집합이다(Section 12.1).

집합 대상들, 곧 그 **원소**(element)들을 하나로 모아 생각한 것. 원소의 순서는 중요하지 않으며, 반복도 마찬가지이다. $\{1,2,3\}$과 $\{3,1,2,2\}$는 같은 집합이다.

단진동(simple harmonic motion) 가속도가 고정된 점으로부터의 변위에 비례하고 그 점을 향하는 운동, $\ddot{x} = -\omega^2 x$. 해는 $x = A\cos(\omega t + \varepsilon)$이며, 주기 $2\pi/\omega$는 흔들림의 크기와 무관하다(Section 11.4).

안정, 불안정 **평형** 항목을 보라.

스털링 공식 근사식 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$으로, n이 커질수록 백분율 오차가 0으로 간다(Section 12.23).

부분군(subgroup) 군의 부분집합으로서 같은 연산에 대하여 그 자체로 군이 되는 것(Section 6.6).

대칭성 논증(symmetry argument) 문제 안의 어떤 것도 두 양을 구별하지 않으므로 두 양이 같아야 한다는 논증. 좋은 대칭성 논증은 여러 쪽에 걸친 계산을 대신할 수 있다(Section 12.5).

T

정리 증명된 중요한 명제. 그보다 덜 중요한 결과는 흔히 **명제**(proposition), 정리로 가는 도중에 증명하는 결과는 **보조정리**, 곧바로 따라 나오는 결과는 **따름정리**라 부른다.

대각합(trace) 정사각행렬의 주대각선 위 성분들의 합. **행렬식**과 마찬가지로 행렬을 다른 **기저**로 나타내도 변하지 않으며, **고윳값**들의 합과 같다(Section 7.4, Section 7.7).

초월수 **대수적**이지 않은 수. 곧 계수가 정수이고 모두 0은 아닌 어떤 다항방정식의 근도 되지 않는 수이다. e와 π는 초월수이지만, 이를 증명하기는 어렵다(Section 1.4).

삼각부등식(triangle inequality) 실수, 복소수 또는 벡터에 대하여 $|a+b| \le |a| + |b|$. 삼각형의 한 변은 결코 나머지 두 변의 합보다 길지 않다.

U

유일 인수분해 1보다 큰 모든 자연수를 인수의 순서를 무시하면 오직 한 가지 방식으로 소수들의 곱으로 나타낼 수 있다는 성질. 보기만큼 당연하지 않아서, 이 성질이 성립하지 않는 수 체계도 있다(Section 1.7).

유일성 정리(uniqueness theorem) 문제의 해가 오직 하나뿐임을 말해 주는 정리. 미분방정식에서는 방정식이 충분히 좋은 성질을 갖지 않으면 유일성이 깨져서, 하나의 출발점이 여러 다른 미래로 이어질 수 있다(Section 8.1).

V

벡터 공간 벡터라고 부르는 대상들의 모임으로, 평면 위의 화살표에 대한 익숙한 규칙을 따라 서로 더하고 수를 곱할 수 있는 것. 다항식, 함수, 그리고 많은 미분방정식의 해는 모두 벡터 공간을 이루므로, 선형대수학의 방법을 이들에게 적용할 수 있다(Section 6.3).

W

잘 정의됨(well-defined) 대상이나 규칙의 정의가 정말로 모호하지 않은 단 하나의 것을 지정하면 잘 정의되었다고 한다. 예를 들어, 도중에 임의로 한 선택에 의존하지 않아야 한다.

정렬 원리(well-ordering principle) 공집합이 아닌 양의 정수의 집합은 모두 가장 작은 원소를 가진다. 이는 **귀납법**의 원리와 동치이며, "가장 작은 반례를 택하자"로 시작하는 모든 논증의 바탕에 있다(Section 1.3).

일반성을 잃지 않고(without loss of generality) 흔히 WLOG로 줄여 쓰는 표현으로, 나머지 경우들은 이름만 바꾸면 똑같으므로 논증에서 한 경우만 다룬다는 뜻이다. "일반성을 잃지 않고 $a \leq b$라 하자"는 $a > b$이면 두 이름을 맞바꾸면 된다는 뜻이다.

수학 기호

수학의 글쓰기는 몇 개의 기호에 많은 뜻을 담으며, 대학 강의에서는 학교 교과서에서 좀처럼 보기 힘든 기호를 많이 쓴다. 아래 표들은 이 책에서 쓰는 기호를 주제별로 묶어, 각 기호의 뜻과 소리 내어 읽는 방법을 정리한 것이다. 대부분의 기호는 대학 과정을 시작하고 몇 주만 지나면 자연스럽게 몸에 밴다. 그때까지는 이 표에서 찾아보면 된다.

처음부터 알아 두면 좋은 약속이 두 가지 있다. 첫째, 이 책은 STEP을 따라 정해진 뜻을 가진 일부 문자를 기울임꼴이 아닌 바로 선 글꼴로 쓴다. 자연로그의 밑인 e, $\sqrt{-1}$을 뜻하는 i, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$의 d, 그리고 $\mathrm{f}(x)$나 $\mathrm{P}(A)$처럼 함수의 이름이 그렇다. 기울임꼴 문자는 변수이다. 둘째, 같은 기호가 맥락에 따라 다른 뜻을 가질 때가 있다. 주로 $=$와 $\sim$이 그러하며, 표에서 그런 경우를 짚어 둔다.

논리와 증명

기호	뜻	예 또는 읽는 법
$P \Rightarrow Q$	P이면 Q이다(implies): P가 참이면 Q도 참이다	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$; "$P$이면 Q"
$P \Leftarrow Q$	Q이면 P이다	"Q일 때 P"
$P \iff Q$	P일 필요충분조건(if and only if)은 Q이다: 서로가 서로를 함의한다	$x^2 = 4 \iff x = \pm 2$; "iff"로도 쓴다
$\forall$	모든	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
$\exists$	존재한다	$\exists n \in \mathbb{Z}$이고 $n^2 = 9$
$\neg P$	P가 아니다, P의 부정(negation)	"$\forall x,\ P(x)$"의 부정은 "$\neg P(x)$인 $\exists x$"이다
$:=$	좌변을 우변으로 정의한다	$\mathrm{f}(x) := x^2 + 1$
■	증명의 끝; QED라고도 쓴다	라틴어 *quod erat demonstrandum*, 곧 "이것이 보여야 할 것이었다"에서 왔다

집합과 수 체계

기호	뜻	예 또는 읽는 법
$\{\dots\}$	나열된 것들을 원소로 하는 집합	$\{1, 2, 3\}$
$\{x : \dots\}$	...을 만족하는 모든 x의 집합; $\{x \mid \dots\}$로도 쓴다	$\{x : x^2 < 2\}$; "$x^2 < 2$인 x의 집합"
$x \in A$	x는 A의 원소(element)이다	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; "$\sqrt{2}$는 $\mathbb{R}$에 속한다"
$x \notin A$	x는 A의 원소가 아니다	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$A \subseteq B$	A는 B의 부분집합(subset)이다: A의 모든 원소가 B에 속한다	$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
$A \cup B$	합집합(union): A 또는 B(또는 둘 다)에 속하는 원소	$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
$A \cap B$	교집합(intersection): A와 B 모두에 속하는 원소	$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$
$A \setminus B$	A의 원소 중 B에 속하지 않는 것	$\{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\}$
A'	여집합(complement): A에 속하지 않는 모든 것	A^c나 $\bar{A}$로도 쓴다
$\varnothing$	원소가 없는 공집합(empty set)	$\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \varnothing$
$\lvert A \rvert$	유한집합 A의 원소의 개수	$\lvert\{a, b, c\}\rvert = 3$
$A \times B$	$a \in A$, $b \in B$인 모든 순서쌍 (a, b)의 집합	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$은 평면이며, $\mathbb{R}^2$로도 쓴다
$\mathbb{N}$	자연수(natural numbers) $1, 2, 3, \dots$	0을 포함하는 저자도 있다
$\mathbb{Z}$	정수(integers) $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$	독일어 *Zahlen*, 곧 "수"에서 왔다
$\mathbb{Q}$	유리수(rational numbers, 분수)	*quotient*(몫)에서 왔다
$\mathbb{R}$	실수(real numbers)	
$\mathbb{C}$	복소수(complex numbers)	
$\mathbb{H}$	사원수(quaternions)	해밀턴(Hamilton)의 이름을 땄다 (Section 6.7)
$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$	$a, b \in \mathbb{Z}$인 수 $a + b\mathrm{i}$	가우스 정수(Gaussian integers) (Section 1.6)
$[a, b]$	닫힌구간(closed interval): $a \le x \le b$	양 끝점을 포함한다
(a, b)	열린구간(open interval): $a < x < b$	양 끝점을 포함하지 않는다; 순서쌍이나 점을 뜻하기도 한다

수, 나누어떨어짐, 근삿값

기호	뜻	예 또는 읽는 법
$a \mid b$	a는 b를 나눈다(divides): b는 a의 정수배이다	$3 \mid 12$; "3은 12를 나눈다"
$a \nmid b$	a는 b를 나누지 않는다	$5 \nmid 12$
$a \equiv b \pmod{n}$	a와 b를 n으로 나눈 나머지가 같다	$17 \equiv 2 \pmod{5}$; "17은 법 5에 대하여 2와 합동(congruent)이다"
$\equiv$	(법이 없을 때) 항등적으로 같다: 모든 값에 대하여 성립한다	$(x+1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$
$\lfloor x \rfloor$	바닥 함수(floor): x 이하인 가장 큰 정수	$\lfloor 3.7 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.7 \rfloor = -4$
$\lceil x \rceil$	천장 함수(ceiling): x 이상인 가장 작은 정수	$\lceil 3.2 \rceil = 4$
$n!$	n 팩토리얼(factorial), $1 \times 2 \times \cdots \times n$	약속에 따라 $0! = 1$
$\binom{n}{r}$	이항계수(binomial coefficient) $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$	"n개에서 r개를 고르는 경우의 수"; ${}^{n}\mathrm{C}_{r}$로도 쓴다
$\approx$	근사적으로 같다	$\pi \approx 3.1416$
$\sim$	점근적으로 같다(asymptotic): 비가 1로 수렴한다	$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ (확률과 통계 표도 참고)
$\propto$	비례한다	$v \propto 1/d$
$\pm, \mp$	플러스 또는 마이너스; 마이너스 또는 플러스	$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
$0.\overline{01}$	순환하는 숫자(순환소수)	$0.\overline{01} = 0.010101\ldots$

함수

기호	뜻	예 또는 읽는 법
$\mathrm{f} : A \to B$	f는 집합 A에서 집합 B로의 함수(function)이다	$\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dots$	x가 ...로 보내진다	$x \mapsto x^2 - 2$; "x는 $x^2 - 2$로 대응된다"
$\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$	합성(composition): g를 먼저, 다음에 f를 적용한다	$(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(x) = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$
f^{-1}	f의 역함수(inverse function)	$1/\mathrm{f}$가 아니다
f^n	이 책에서는 보통 f를 n번 적용한 것	$\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$; 그러나 $\sin^2 x$는 $(\sin x)^2$을 뜻한다
$\lvert x \rvert$	절댓값(modulus, absolute value)	$\lvert -3 \rvert = 3$
$\exp x$	지수함수(exponential function) e^x	
$\ln x$	밑이 e인 자연로그(natural logarithm)	대학에서는 흔히 $\log x$로 쓴다
sec, cosec, cot	$1/\cos$, $1/\sin$, $1/\tan$	
arcsin, arccos, arctan	역삼각함수(inverse trigonometric functions)	$\sin^{-1}$ 등으로도 쓴다
sinh, cosh, tanh	쌍곡선함수(hyperbolic functions): $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $\tanh = \sinh / \cosh$	영어로는 "shine"(또는 "sinch"), "cosh", "than"(또는 "tanch")으로 읽는다
artanh	tanh의 역함수	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
max, min	가장 큰 것, 가장 작은 것	$\max(3, 7) = 7$
$\Gamma(x)$	감마 함수(gamma function)	$\Gamma(n+1) = n!$ (Section 4.4)

합, 극한, 미적분

기호	뜻	예 또는 읽는 법
$\sum$	합	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$
$\prod$	곱	$\prod_{k=1}^{n} k = n!$
∞	무한대(infinity): 수가 아니라 "한없이"를 줄여 나타낸 것	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$x \to a$	x가 a에 한없이 가까워진다	$n \to \infty$일 때 $\frac{1}{n} \to 0$
$\lim$	극한(limit)	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$f'(x)$, $f''(x)$	일계 도함수(derivative)와 이계 도함수	"에프 프라임"; 영어로는 "f dash" 또는 "f prime"
$\dot{x}$, $\ddot{x}$	시간에 대한 도함수	$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; "x 닷", "x 더블 닷"
$\frac{\partial f}{\partial x}$	편도함수(partial derivative): 다른 변수를 고정하고 x에 대하여 미분한다	"라운드 f 라운드 x"; 영어로는 "partial f by partial x"
$\int_a^b$	a에서 b까지의 정적분(definite integral)	
$\oint$	닫힌 곡선을 따라 한 바퀴 도는 적분	$\oint p\,dq$ (Section 10.4)
δx, Δx	x의 작은 변화량; x의 변화량	
ε, δ	해석학에서 작은 양수를 나타낼 때 관례적으로 쓰는 이름	"모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 ...을 만족하는 $\delta > 0$이 존재한다"

복소수

기호	뜻	예 또는 읽는 법
i	-1의 제곱근 가운데 하나	공학자들은 j로 쓴다
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	실수부(real part)와 허수부(imaginary part)	$z = 3 + 4i$이면 $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = 4$
z^*, $\bar{z}$	켤레복소수(complex conjugate)	$(3+4i)^* = 3 - 4i$; 두 표기 모두 쓰인다
$\lvert z \rvert$	절댓값: 0으로부터의 거리	$\lvert 3 + 4i \rvert = 5$
$\arg z$	편각(argument): 양의 실수축으로부터 잰 각	$\arg i = \frac{\pi}{2}$
$e^{i\theta}$	$\cos\theta + i\sin\theta$	$e^{i\pi} = -1$
ω	관례적으로 1의 허수 세제곱근(cube root of unity)	$\omega = e^{2\pi i/3}$, $1 + \omega + \omega^2 = 0$

벡터와 행렬

기호	뜻	예 또는 읽는 법
$\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}$	벡터(vector); A에서 B로 가는 벡터	손으로 쓸 때는 $\underline{a}$
$\hat{\mathbf{n}}$	길이가 1인 단위벡터(unit vector)	"n 햇"
$\lvert\mathbf{a}\rvert$	$\mathbf{a}$의 길이(크기)	
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	스칼라곱(scalar product, 내적)	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta$
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	벡터곱(vector product, 외적)	$\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$에 수직이다
$\mathbf{M}$	행렬(matrix)	
$\mathbf{I}$	단위행렬(identity matrix)	모든 $\mathbf{v}$에 대하여 $\mathbf{Iv} = \mathbf{v}$
$\mathbf{M}^{-1}$	역행렬(inverse matrix)	$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$
$\det\mathbf{M}$	$\mathbf{M}$의 행렬식(determinant)	$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
$\operatorname{tr}\mathbf{M}$	대각합(trace): 대각성분의 합	$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$
λ	관례적으로 고윳값(eigenvalue)	$\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$

확률과 통계

기호	뜻	예 또는 읽는 법
$\mathrm{P}(A)$	사건 A의 확률(probability)	
$\mathrm{P}(A \mid B)$	B가 주어졌을 때 A의 확률	$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$; "$B$가 주어졌을 때 A"
$\mathrm{E}(X)$	X의 기댓값(expectation, 평균)	μ로도 쓴다
$\mathrm{Var}(X)$	X의 분산(variance)	$\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$; σ^2으로도 쓴다
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	공분산(covariance)	$\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$
$\mathrm{Corr}(X, Y)$	상관계수(correlation)	$\mathrm{Cov}(X, Y)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$; ρ로 도 쓴다
$X \sim \ldots$	X는 분포 ...을 따른다	$X \sim \mathrm{B}(16, \frac{1}{2})$; "$X$는 ...을 따른다"
$\mathrm{B}(n, p)$	이항분포(binomial distribution)	n번의 시행에서 성공한 횟수
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포(normal distribution)	
$\mathrm{f}(x), \mathrm{F}(x)$	확률밀도함수(probability density function); 누적분포함수(cumulative distribution function)	$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$
$\mathrm{G}(t)$	확률생성함수(probability generating function)	$\mathrm{G}(t) = \mathrm{E}(t^X)$
$\mathrm{M}_X(\theta)$	적률생성함수(moment generating function)	$\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$
$\bar{x}$	표본평균(sample mean)	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$
$\hat{\theta}$	미지의 양 θ의 추정값(estimate)	"세타 햇"

그리스 문자

그리스 문자는 수학 전반에 걸쳐 쓰이며, 관례적인 뜻을 갖는 경우가 많다. 아래 표는 소문자와 대문자(알파의 대문자 A처럼 로마자와 모양이 같은 대문자는 별도의 기호로 쓰이지 않으므로 뺐다), 이름, 그리고 대표적인 쓰임을 정리한 것이다.

문자	이름	대표적인 쓰임
α	알파(alpha)	각; 방정식의 근
β	베타(beta)	각; 방정식의 근; 베타 함수
γ, Γ	감마(gamma)	오일러(Euler) 상수 $\gamma \approx 0.5772$; 감마 함수 Γ; 상대성이론에서 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$
δ, Δ	델타(delta)	작은 양; 변화량, 또는 삼각형이나 판별식(discriminant)을 나타내는 Δ
ε, ϵ	엡실론(epsilon)	작은 양수; 역학에서는 위상각
ζ	제타(zeta)	리만(Riemann) 제타 함수, $s > 1$일 때 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ (더 고급 방법으로 $s = 1$을 제외한 다른 값으로 확장된다)
η	에타(eta)	효율; 작은 양
θ, Θ	세타(theta)	각; 통계에서 미지의 모수
ι	요타(iota)	거의 쓰이지 않는다
κ	카파(kappa)	곡률(curvature); 상수
λ, Λ	람다(lambda)	고윳값; 푸아송(Poisson) 비율 같은 모수; 파장
μ	뮤(mu)	평균; 마찰계수
ν	뉴(nu)	진동수
ξ, Ξ	크시(xi)	변수 또는 확률적인 양
π, Π	파이(pi)	$\pi \approx 3.14159$; 곱을 나타내는 Π
ρ	로(rho)	밀도; 상관계수; 원점으로부터의 거리
σ, Σ	시그마(sigma)	표준편차(standard deviation); 합을 나타내는 Σ
τ	타우(tau)	시간; 돌림힘(torque)
υ, Υ	입실론(upsilon)	거의 쓰이지 않는다
ϕ, φ, Φ	파이(phi)	각; 황금비(golden ratio) $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$; 신속도(rapidity); 표준정규분포함수를 나타내는 Φ
χ	카이(chi)	χ^2(카이제곱) 분포
ψ, Ψ	프사이(psi)	양자역학의 파동함수
ω, Ω	오메가(omega)	각속도 또는 각진동수; 1의 세제곱근; 표본공간(sample space)을 나타내는 Ω

역학

기호	뜻	예 또는 읽는 법
g	중력가속도(acceleration due to gravity)	지표면에서 약 $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
G	중력상수(gravitational constant)	두 질량 사이의 힘 Gm_1m_2/r^2
e	반발계수(coefficient of restitution) (기울임꼴이며, e와 혼동하지 말 것)	충돌선 방향으로 멀어지는 속력 $= e\times$ 가까워지는 속력
ω	각속도; 각진동수	단순조화운동(simple harmonic motion)에서 $\ddot{x} = -\omega^2 x$
I	관성모멘트(moment of inertia)	회전에너지 $\frac{1}{2}I\omega^2$ (Section 11.7)
c	빛의 속력	약 $3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
$\hbar$	플랑크(Planck) 상수를 2π로 나눈 값	"에이치 바" (Section 8.6)

장

1

정수론과 증명

정수는 수학에서 가장 오래된 대상이며, 지금도 수학의 가장 깊은 비밀 가운데 일부를 품고 있다.

이 장의 내용

1.1	소수 공장	STEP II 2002
1.2	소수는 얼마나 드문드문 흩어져 있는가?	STEP III 2016
1.3	가장 작은 반례	STEP III 2015
1.4	e는 무리수이고, e^2도 그렇다	STEP III 2024
1.5	무한 강하법	STEP III 2022
1.6	두 제곱수의 합	STEP II 2023
1.7	인수분해가 무너질 때	STEP I 2016
1.8	유리수 세기	STEP III 2020
1.9	삼차곡선의 접선	STEP I 2009
A	연습문제 해답	105쪽

왜 정수인가?

> 수학은 과학의 여왕이고, 정수론은 수학의 여왕이다.
>
> — 카를 프리드리히 가우스(Carl Friedrich Gauss)

정수(whole numbers)는 누구나 처음 만나는 수학적 대상이다. 우리는 글을 읽기도 전에 수 세는 법을 배웠다. 그런데도 정수에 관한 가장 단순한 질문이 지독하게 어려울 수 있다. 2보다 큰 모든 짝수는 두 소수(prime)의 합일까? 아무도 모른다. 골드바흐(Christian Goldbach)가 1742년에 이 질문을 던졌고, 컴퓨터로 4×10^{18} 너머까지 확인했지만, 여전히 증명된 적은 없다. 11과 13, 또는 101과 103처럼 차가 2인 소수의 쌍은 무한히 많을까? 이 역시 아무도 모른다. 다만 2013년에 거의 알려지지 않았던 수학자 장이탕(Yitang Zhang)이 차가 많아야 70백만인 소수의 쌍이 무한히 많음을 증명하여 세상을 놀라게 했고, 그 수는 이후 246까지 줄어들었다. 페르마(Pierre de Fermat)는 1637년에 책의 여백에 $n \geq 3$일 때 $x^n + y^n = z^n$은 양의 정수 해를 갖지 않는다고 적어 두었다. 와일스(Andrew Wiles)가 1994년에 페르마가 옳았음을 증명하기까지는 350년이 넘는 시간과, 지금까지 만들어진 것 가운데 가장 정교한 수학 일부가 필요했다.

어린아이도 이해할 수 있는 질문과 수백 년이 걸릴 수도 있는 답이 이렇게 섞여 있다는 점이 정수론(number theory)을 중독성 있게 만든다. 정수론이 언제나 **증명**(proof)의 훈련장이었던 이유도 여기에 있다. 정수는 무한히 많으므로 모든 경우를 확인할 수 없을 때에는, 모든 경우를 한꺼번에 다루는 논증을 찾아야 한다. 여러분이 앞으로 수학을 하면서 평생 쓰게 될 증명 기법 대부분은 처음에 정수에 관한 질문을 통해 다듬어졌다.

순수하고, 쓸모없고, 인터넷을 움직이는

1940년에 케임브리지의 수학자 하디(G. H. Hardy)는 다소 자랑스럽게, 정수론은 모든 수학 가운데 가장 순수하여 일상생활과 너무 동떨어져 있으므로 실용적으로 쓰일 수 없고, 따라서 **해로운** 용도로 쓰일 수도 없다고 썼다. 이보다 더 틀릴 수는 없었을 것이다. 온라인에서 물건을 사거나, 보안 메시지를 보내거나, 휴대전화의 잠금을 풀 때마다 여러분은 정수론에 기대고 있다. RSA 암호 체계(1977)는 두 큰 소수를 곱하기는 쉽지만 그 곱으로부터 두 소수를 되찾기는 불가능할 만큼 어려워 보인다는 사실에 바탕을 둔다. 현대의 암호 체계는 이 장의 끝에서 만나게 될 바로 그 곡선들의 산술을 이용한다. 18세기와 19세기의 "쓸모없는" 수학이 21세기의 보안이 된 것이다.

대학에서 만나게 될 것

대학에서 수학을 공부한다면, 정수론은 가장 먼저 만나는 분야이자 가장 마지막에 이르는 분야 가운데 하나가 될 것이다.

- **첫 학기에는** 거의 틀림없이 **수와 집합**(Numbers and Sets)이나 **기초**(Foundations) 같은 이름의 강좌를 듣게 된다. 이 강좌는 증명을 제대로 쓰는 법을 가르치며, 그 재료의 상당 부분이 정수론이다. 귀납법(induction), 유클리드 호제법(Euclidean algorithm), 모듈러 산술(modular arithmetic), 페르마의 소정리(Fermat's Little Theorem), 중국인의 나머지 정리(Chinese Remainder Theorem), 그리고 어떤 무한집합은 다른 무한집합보다 크다는 놀라운 사실이 그것이다.
- **군론(group theory)에서는**, 보통 1학년에, 정수론의 많은 사실이 대칭에 관한 하나의 정리, 곧 라그랑주(Lagrange) 정리의 그림자임을 발견하게 된다.
- **2학년에는** 정수론 강좌에서 보통 이차 상호 법칙(quadratic reciprocity, 가우스의 "황금 정리"), 연분수(continued fractions), 펠 방정식(Pell's equation)을 다룬다.
- **그 뒤에는** 더 나아갈 수 있다. 가우스 정수(Gaussian integers) 같은 새로운 수 체계가 소인수분해의 유일성(unique factorisation)을 되살려 내는 **대수적 정수론**(algebraic number theory), 미적분과 복소해석(complex analysis)을 써서 소수를 세는 **해석적 정수론**(analytic number theory), 그리고 페르마의 마지막 정리(Fermat's Last Theorem)의 증명과 상금 백만 달러가 걸린 일곱 개의 밀레니엄 문제(Millennium Prize Problems) 가운데 하나의 바탕에 있는 **타원곡선**(elliptic curves) 이론이 그것이다.

이 장을 관통하는 질문들

이 장의 STEP 문제 아홉 개는 세 가지 큰 질문을 중심으로 돈다. 문제를 푸는 동안 이 질문들을 마음에 담아 두자. 장의 끝에서 다시 돌아올 것이다.

1. **소수는 얼마나 많으며, 어떻게 분포해 있을까?** 소수가 무한히 많다는 것은 누구나 안다. 그렇다면 소수는 얼마나 드물어지며, 어떤 종류의 논증이 그것을 알려 줄 수 있을까?
2. **어떤 수가 분수가 아님을 어떻게 증명할까?** 어떤 수가 유리수(rational)임을 보이려면 예 하나면 충분하다. 무리수(irrational)임을 보이려면 무한히 많은 가능성을 배제해야 한다. 대체 그것을 어떻게 해낼까?
3. **어떤 방정식이 정수 해를 가지며, 수 체계를 바꾸면 무슨 일이 일어날까?** 때로는 방정식이 해를 전혀 갖지 않음을 보일 수 있다. 때로는 정수를 이해하는 가장 좋은 방법이 정수 바깥으로, 복소수나 곡선 위로 나가는 것이다.

증명에 관한 장

이 세 질문의 밑바탕에는 네 번째 주제가 흐른다. 바로 **증명하는 방법**이다. 각 절은 서로 다른 증명 방법이 실제로 쓰이는 모습을 보여 준다는 이유도 있어서 골랐으며, 이들을 모으면 대학 1학년생에게 꽤 쓸 만한 도구 상자가 된다.

§	주제	사고 방식
1.1	페르마 수	무한히 많은 소수를 **필요로 하는** 무한한 수의 모임
1.2	소수의 곱	강한 귀납법(strong induction); 이항계수(binomial coefficients)에 숨은 정보
1.3	다시 $\sqrt{2}$	"가장 작은 것을 잡아라": 정렬 원리(well-ordering principle)
1.4	e와 e^2	정수를 0과 1 사이에 가두기
1.5	불가능한 방정식	무한 강하법(infinite descent); 법 n으로 계산하기
1.6	두 제곱수의 합	무대 바꾸기: 복소수
1.7	이상한 수 체계	당연하게 여기던 것을 의심하기
1.8	분수를 나열하기	전단사(bijection) 만들기; 거꾸로 하는 강하법
1.9	세제곱수와 곡선	산술 문제를 푸는 기하

이 장을 읽는 방법

각 절은 출제된 그대로의 STEP 문제로 가는 링크로 시작한다. 계속 읽기 전에 먼저 적어도 30분 동안 직접 풀어 보자. 읽기만 한 문제보다 씨름해 본 문제에서 훨씬 많은 것을 배우게 된다. 계속 읽을 때, **스스로 물어보기** 상자는 답이 나오기 전에 멈추고 생각해 보라는 권유이고, **잠깐 풀어 보기** 상자는 핵심 아이디어가 손에 닿을 만한 곳에 있는 순간을 표시한다. 그리고 각 절의 **숨은 수학** 부분은 시험 너머, 대학에서 만나게 될 수학을 내다본다.

절들은 대체로 뒤로 갈수록 수준이 높아지지만, 대부분 서로 독립적이다. 어떤 절이 마음을 끌지 않으면 다음으로 넘어갔다가 나중에 다시 돌아와도 된다.

1.1 소수 공장

문제

STEP II 2002, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/02-s2-q3`

도입

소수(prime)가 무한히 많다는 사실은 아마 이미 알고 있을 것이다. 유클리드(Euclid)가 기원전 300년 무렵에 이를 증명했고, 이것은 누구나 가장 먼저 접하는 증명 가운데 하나이다. 그렇다면 STEP 문제는 왜 이것을 다시 증명하라고 하는 것일까?

이 증명은 완전히 다른 방식으로 작동하기 때문이다. 유클리드의 논증은 이렇게 말한다. **소수를 유한 개 나열한 목록을 아무것이나 주면, 그 목록이 불완전하다는 것을 보여 주겠다.** 반면 이 증명은 이렇게 말한다. **여기 미리 구체적으로 적어 둔 하나의 수열이 있는데, 그 각 항은 다른 어떤 항에도 들어 있지 않은 소수를 하나씩 품고 있다.** 이것은 새로운 소수를 만들어 내는 기계이며, 이 기계가 작동하는 이유는 문제가 차근차근 이끌어 주는 아름답고 단순한 항등식 하나에 있다.

그 과정에서 페르마 자신마저 속아 넘어간 수들을 만나게 될 것이다.

시작하기 전에

문제를 한 번 끝까지 읽고 그 구조를 살펴보자. 문제는 네 단계로 이루어져 있다.

1. 몇 가지 예를 계산한다.
2. 규칙을 찾아내고(사실은 문제가 알려 준다), 그것을 앞의 예로 확인한다.
3. 그 규칙을 일반적으로 증명한다.
4. 그 규칙을 두 번 활용한다. 먼저 공약수(common factor)에 관한 사실을, 다음으로 소수에 관한 사실을 이끌어 낸다.

이러한 "예시 → 추측 → 증명 → 결론"의 구조는 실제로 수많은 수학이 이루어지는 방식이며, STEP 문제도 이를 따르는 경우가 많다. 이런 구조를 보면, 앞부분은 대개 단순한 준비 운동이 아니다. 나중에 필요할 직관을 쌓는 곳이다.

> **생각해 보기** 마지막 줄은 **무한히 많은 소수**에 대해 묻는다. 가운데 부분은 **공약수**에 대해 묻는다. "두 페르마 수(Fermat number)는 공약수를 갖지 않는다"는 사실과 "소수는 무한히 많다"는 사실은 도대체 어떻게 연결될 수 있을까?

이 질문을 기억해 두자. 나중에 다시 돌아올 것이다.

차근차근 풀기

1단계 수에 대한 감 잡기

표기에 주의하자. 2^{2^n}은 $(2^2)^n$이 아니라 $2^{(2^n)}$을 뜻한다. 지수 자체가 2의 거듭제곱이므로 이 수들은 매우 빠르게 커진다.

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3, \qquad F_2 = 2^4 + 1 = 17,$$
$$F_1 = 2^2 + 1 = 5, \qquad F_3 = 2^8 + 1 = 257.$$

> **생각해 보기** 이 네 수에서 무엇을 알아챌 수 있는가?

모두 소수이다. (257을 확인해 보자. 이 수는 $2, 3, 5, 7, 11$이나 13으로 나누어떨어지지 않고, $17^2 = 289 > 257$이므로 여기서 멈춰도 된다.) 그다음 수인 $F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$도 소수이다. 피에르 드 페르마(Pierre de Fermat)는 1640년에 바로 이 점을 알아채고, 이런 꼴의 수는 **모두** 소수라고 추측(conjecture)했다. 이 점을 기억해 두자. 그가 옳았는지는 나중에 살펴볼 것이다.

2단계 항등식 확인하기

이제 작은 k에 대해 $(*)$를 확인해 보자.

- $k = 1$: 좌변은 그냥 $F_0 = 3$이고, $F_1 - 2 = 3$이다. ✓
- $k = 2$: $F_0 F_1 = 3 \times 5 = 15$이고, $F_2 - 2 = 15$이다. ✓
- $k = 3$: $F_0 F_1 F_2 = 15 \times 17 = 255$이고, $F_3 - 2 = 255$이다. ✓

> **생각해 보기** $k = 2$에서 $k = 3$으로 넘어가는 단계를 보자. 15에 17을 곱해서 255를 얻었다. 페르마 수로 말하면 $(F_2 - 2) \times F_2$를 계산해서 $F_3 - 2$를 얻은 것이다. 이것은 우연일까?

이 관찰이 바로 증명 전체의 축소판이다. 왜 이것이 성립해야 하는지 살펴보자.

3단계 항등식 증명하기

> **잠깐, 직접 해 보기** 계속 읽기 전에 다음을 직접 보여 보자.
>
> $$(F_k - 2)\,F_k = F_{k+1} - 2.$$
>
> 힌트: 모든 것을 2의 거듭제곱으로 나타내 보자. $F_k - 2$는 어떤 모양인가?

$F_k - 2 = 2^{2^k} - 1$이고 $F_k = 2^{2^k} + 1$이므로

$$(F_k - 2)\,F_k = \left(2^{2^k} - 1\right)\left(2^{2^k} + 1\right).$$

> **생각해 보기** 이것은 $(a-1)(a+1)$ 꼴의 곱이다. 이것은 무엇과 같은가?

이것은 제곱의 차(difference of two squares) $a^2 - 1$이다. $a = 2^{2^k}$로 두면

$$a^2 = \left(2^{2^k}\right)^2 = 2^{2\cdot 2^k} = 2^{2^{k+1}},$$

이므로

$$(F_k - 2)\,F_k = 2^{2^{k+1}} - 1 = F_{k+1} - 2. \tag{†}$$

이것이 원동력이다. 제곱이 하는 일에 주목하자. 제곱하면 지수가 두 배가 되고, 2^k를 두 배 하면 2^{k+1}이 된다. 페르마 수의 정의는 제곱의 차 인수분해에 꼭 맞게 맞춰져 있다.

이제 귀납법은 거의 자동으로 따라온다.

> **생각해 보기** 귀납 단계에서 정확히 무엇을 보여야 하는가?

어떤 $k \geq 1$에 대해 $(*)$가 성립한다고 가정하자.

$$F_0 F_1 \cdots F_{k-1} = F_k - 2,$$

그리고 이것이 $k+1$에 대해서도 성립함을 보이고자 한다.

$$F_0 F_1 \cdots F_{k-1} F_k = F_{k+1} - 2.$$

가정의 양변에 F_k를 곱하고 (†)를 이용하면

$$F_0 F_1 \cdots F_{k-1} F_k = (F_k - 2)\,F_k = F_{k+1} - 2.$$

$k = 1$인 경우는 이미 확인했으므로, 수학적 귀납법(induction)에 의해 $(*)$는 모든 $k \geq 1$에 대해 성립한다. ■

생각해 보기 귀납법을 아예 쓰지 않을 수도 있었을까?

그렇다. 그 방법도 살펴볼 만하다. $F_0 - 2 = 1$에서 시작하여 $(\dagger)$를 거듭 적용하면

$$F_k - 2 = (F_{k-1} - 2)F_{k-1} = (F_{k-2} - 2)F_{k-2}F_{k-1} = \cdots = (F_0 - 2)\,F_0F_1 \cdots F_{k-1}.$$

$F_0 - 2 = 1$이므로 증명이 끝난다. 이렇게 "풀어 쓰는" 것은 사실 같은 귀납법을 전부 펼쳐 적은 것에 지나지 않지만, 어떤 사람들에게는 이쪽이 더 잘 보인다.

4단계 공약수가 없다

$m \neq n$이면 F_m과 F_n이 1보다 큰 공약수를 갖지 않음을 보이고자 한다.

생각해 보기 $m < n$이고 어떤 수 d가 F_m과 F_n을 모두 나눈다고 하자. $(*)$에서 F_m은 어디에 나타나는가?

$(*)$에서 $k = n$으로 두면

$$F_0F_1 \cdots F_m \cdots F_{n-1} = F_n - 2.$$

$m < n$이므로 F_m은 좌변의 인수 가운데 하나이다. 따라서 d가 F_m을 나누면 d는 좌변 전체를 나눈다. 즉 d는 $F_n - 2$를 나눈다.

생각해 보기 이제 d는 F_n 과 $F_n - 2$를 모두 나눈다. 그렇다면 d는 또 무엇을 나누어야 하는가?

두 수의 차를 나눈다. 즉 d는 $F_n - (F_n - 2) = 2$를 나눈다. 따라서 $d = 1$ 또는 $d = 2$이다.

생각해 보기 d가 2일 수 있는가?

그럴 수 없다. 모든 페르마 수는 2의 거듭제곱에 1을 더한 수이므로 홀수이다. 따라서 $d = 1$이고, 서로 다른 두 페르마 수는 1보다 큰 공약수를 갖지 않는다. ∎

수학자들은 이를 페르마 수들이 **쌍마다 서로소**(*pairwise coprime*)라고 말한다.

5단계 무한히 많은 소수

이제 처음에 던졌던 질문으로 돌아가 보자.

생각해 보기 1보다 큰 모든 자연수는 적어도 하나의 소인수(prime factor)를 갖는다. 각 페르마 수에서 소인수를 하나씩 고르자. 고른 소수들에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

p_n을 F_n을 나누는 임의의 소수라 하자. 만약 이 가운데 두 개가 같다면, 즉 $m \neq n$인데 $p_m = p_n$이라면, 그 소수는 F_m과 F_n의 1보다 큰 공약수가 된다. 이는 방금 불가능하다고 보

인 일이다. 따라서 소수들

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots$$

은 모두 **서로 다르다**. 페르마 수는 무한히 많으므로, 서로 다른 소수도 무한히 많다. ■

각 페르마 수를 **어떤** 소수가 나누는지, 심지어 페르마 수 자체가 소수인지조차 알 필요가 전혀 없었다는 점에 주목하자. 필요한 것은 페르마 수들이 결코 공약수를 갖지 않는다는 사실뿐이었다. 각 페르마 수는 다른 어떤 페르마 수도 쓸 수 없는 소수를 적어도 하나씩 "차지할" 수밖에 없다.

n	$F_n = 2^{2^n} + 1$	소인수분해
0	3	소수
1	5	소수
2	17	소수
3	257	소수
4	65 537	소수
5	4 294 967 297	$641 \times 6\,700\,417$
6	18 446 744 073 709 551 617	$274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721$

그림 1.1.1 처음 몇 개의 페르마 수. 페르마는 이 수들이 모두 소수라고 추측했지만, 1732년에 오일러가 F_5의 인수 641을 찾아냈으며, F_4보다 뒤의 페르마 수 가운데 소수로 알려진 것은 하나도 없다. 그렇더라도 항등식 $(*)$는 서로 다른 페르마 수의 인수가 결코 겹치지 않음을 보여 준다. 각 행은 새로운 소수를 가져온다.

돌아보기

무엇이 이 풀이를 가능하게 했는지 잠시 멈춰서 살펴볼 만하다. 같은 아이디어가 이 책에서 여러 번 다시 등장하기 때문이다.

- **예시는 장식이 아니었다.** $15 \times 17 = 255$가 "$(F_2 - 2) \times F_2 = F_3 - 2$"임을 알아챈 것이 바로 핵심 아이디어였다. 문제가 작은 경우들을 제시하면, 수가 맞는지만 보지 말고 각 단계가 무엇을 하고 있는지 물어보자.
- **항등식 하나가 모든 일을 해냈다.** 모든 것이 $(a-1)(a+1) = a^2 - 1$에서 흘러나왔다. 어려워 보이는 STEP 문제도 단순한 대수 하나로 움직이는 경우가 많다.
- **마지막 논증은 크기가 아니라 구조에 관한 것이다.** 새로운 소수를 하나도 찾지 않고 소수가 무한히 많음을 증명했다. 그 대신 무한히 많은 수의 모임을 만들어 내려면 무한히 많은 소수가 **필요하다**는 것을 보였다.

숨은 수학

페르마는 옳았을까?

아니다. 1732년에 레온하르트 오일러(Leonhard Euler)는 다음을 보였다.

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

오일러가 641을 운 좋게 찾아낸 것은 아니다. 그는 F_n의 소인수가 반드시 매우 특별한 꼴이어야 함을 증명했고($n = 5$인 경우에는 64의 배수보다 1만큼 커야 한다), 이로써 후보를 크게 줄였다. 이 사실은 연습문제 4에서 직접 증명해 볼 수 있다.

그 뒤로 지금까지 누군가 판정에 성공한 페르마 수는 F_5부터 F_{32}까지 모두 합성수(composite)로 밝혀졌다. 알려진 바로는 F_0부터 F_4까지가 **유일한** 페르마 소수일지도 모르지만, 아무도 이를 증명하지 못했다. 이것은 진정한 미해결 문제이다.

유쾌한 반전은 우리의 증명이 이런 것에 전혀 개의치 않는다는 점이다. 소수이든 합성수이든, 페르마 수들은 여전히 무한히 많은 소수를 만들어 낸다.

페르마 소수와 다각형의 작도

페르마 소수는 꽤 뜻밖의 곳에서 등장한다. 고대 그리스인들은 자와 컴퍼스로 정삼각형과 정오각형을 작도하는 방법을 알고 있었는데, $3 = F_0$이고 $5 = F_1$임에 주목하자. 이천 년 동안 아무도 변의 개수가 소수인 다른 정다각형을 작도하지 못했다. 그러다 1796년, 열아홉 살이던 카를 프리드리히 가우스(Carl Friedrich Gauss)가 **정십칠각형**을 작도하는 방법을 보였는데, $17 = F_2$이다.

가우스는 더 나아갔다. 정N각형을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는 것은 정확히 N이 2의 거듭제곱에 **서로 다른 페르마 소수**들을 곱한 수일 때이다. (Pierre Wantzel이 1837년에 이 증명을 완성했다.) 따라서 어떤 다각형을 작도할 수 있는지는 페르마 소수가 몇 개인지에 달려 있다. 가우스의 정십칠각형 뒤에 숨은 핵심 계산은 Section 6.2(STEP II 1991, 문제 4)에서 만나게 되며, 전체 이야기는 학부 과정의 백미 가운데 하나인 **갈루아 이론**(*Galois theory*)에 속한다.

하나의 정리, 여러 가지 증명

수학자들은 왜 같은 정리를 굳이 여러 번 증명할까? 증명이 다르면 드러나는 것도 다르기 때문이다. 흔히 크리스티안 골드바흐(Christian Goldbach)가 1730년에 오일러에게 보낸 편지에서 나온 것으로 알려진 이 증명은, 1보다 큰 자연수들로 이루어진 쌍마다 서로소인 수열이라면 **어떤** 것이든 무한히 많은 소수를 강제한다는 것을 보여 준다. 페르마 수는 편리한 예 가운데 하나일 뿐이다. (연습문제 3에서 또 다른 예를 볼 수 있다.)

이 증명은 유클리드의 증명보다 더 많은 것을 알려 주기도 한다. 소수 $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$은 n개의 서로 다른 소수이고, 각각은 F_{n-1} 이하이다. 따라서 $2^{2^{n-1}}+1$보다 크지 않은 소수가 적어도 n개 있다. 이것은 소수가 어떻게 분포하는지에 대한 **정량적**(*quantitative*) 명제이다. 매우 약한 결과이지만(실제로는 훨씬 더 좋다), 소수가 얼마나 드물어지는지를 정확히 기술하는 19세기 수학의 위대한 결과 가운데 하나인 **소수 정리**(*Prime Number Theorem*)를 향한 첫걸음이다. Section 1.2에서 그다음 걸음을 내디딘다.

사고 기술

구조적 성질로부터 논증 세우기

A 유형의 대상이 무한히 많이 존재함을 보이려면, 각각이 자기만의 *A* 유형 대상을 필요로 하는 *B* 유형의 대상을 무한히 많이 찾으면 된다.

여기서 A는 소수, B는 페르마 수이고, "자기만의 것을 필요로 한다"는 것은 "다른 어떤 것과도 공유하지 않는 소인수를 갖는다"는 뜻이다. 같은 패턴이 세기 논증, 선형대수학(linear algebra)(일차독립인 벡터가 무한히 많으면 차원이 무한이 된다), 해석학(analysis)에서도 나타난다.

또한 **귀납법**을 연습했고, 특히 "k에서 $k+1$로 넘어가는 단계는 실제로 무슨 일을 하는가?"라고 묻는 습관을 길렀다. 이 질문은 형식적인 틀보다 더 유용할 때가 많다.

더 도전하기

1 **유클리드의 증명.** 소수가 무한히 많다는 유클리드의 증명을 적어 보자. 그 증명은 어떤 의미에서 "귀류법(by contradiction)"이고, 페르마 수를 이용한 증명은 어떤 의미에서 "구성적(constructive)"인가?

2 **일의 자리 숫자.** $n \geq 2$일 때 페르마 수 F_n의 일의 자리 숫자가 7임을 보여라.

3 **실베스터 수열(Sylvester's sequence).** $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$로 정의하면, 수열은 $2, 3, 7, 43, 1807, \ldots$로 시작한다.

   (a) $a_{n+1} - 1 = a_1 a_2 \cdots a_n$임을 보여라.

   (b) 이 수열의 항들이 쌍마다 서로소임을 이끌어 내고, 이를 이용하여 소수가 무한히 많다는 또 다른 증명을 제시하여라.

   (c) 심화 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$임을 보여라.

4 **오일러의 기법.** 이 문제에는 페르마의 소정리(*Fermat's Little Theorem*)가 필요하다: p가 소수이고 $p \nmid a$이면 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$이다. 소수 p가 F_n을 나눈다고 하자.

(a) $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$임을 보이고, 이로부터 $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$임을 보여라.

(b) d를 $2^d \equiv 1 \pmod{p}$를 만족하는 가장 작은 양의 정수라 하자. d가 2^{n+1}은 나누지만 2^n은 나누지 않음을 보이고, $d = 2^{n+1}$이라고 결론지어라.

(c) 페르마의 소정리를 이용하여 d가 $p-1$을 나눔을 보여라. 이로부터 $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$임을 이끌어 내어라.

(d) $n = 5$일 때, 이 결과는 F_5의 모든 소인수가 $64k+1$ 꼴임을 말해 준다. 641이 이 꼴임을 확인하여라. 641보다 작은 이 꼴의 소수는 몇 개인가?

5 **소수의 상계.** 하나의 정리, 여러 가지 증명의 논증을 이용하여 n번째 소수가 $2^{2^{n-1}}+1$ 이하임을 보여라. $n = 5$일 때 이 상계는 얼마나 좋은가?

더 읽을거리

- **Martin Aigner & Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*** (Springer), 제1장 "Six proofs of the infinity of primes"(소수가 무한함에 대한 여섯 가지 증명). 이 증명을 유클리드의 증명 및 다른 네 가지 증명과 함께 싣고 있으며, 그 가운데 하나는 위상수학(topology)을 이용한다. 대학 입학 전에 읽을 수 있는 최고의 책 가운데 하나이다.
- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic*** (Cambridge University Press), 제1–2장. 소수와 소인수분해에 대한 아름답게 쓰인 입문서로, 대학 입학 전 여름에 읽기에 이상적이다.
- **Michal Křížek, Florian Luca & Lawrence Somer, *17 Lectures on Fermat Numbers*** (Springer, 2001). 오일러의 인수분해부터 가우스의 다각형까지, 페르마 수에 관한 모든 것을 담고 있다. 앞쪽 장들을 골라 읽어 보자.
- **Ian Stewart, *Why Beauty Is Truth*** (Basic Books), 가우스에 관한 장. 일반 독자를 위해 풀어 쓴 정십칠각형 이야기이다.

1.2 소수는 얼마나 드문드문 흩어져 있는가?

문제

STEP III 2016, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s3-q5`

도입

Section 1.1에서 소수(prime)가 무한히 많다는 것을 보았다. 그러나 "무한히 많다"는 것은 투박한 말이다. 소수는 분명히 점점 드물어진다. 100 미만의 소수는 25개이지만, 900과 1000 사이의 소수는 14개뿐이다. 그렇다면 소수는 **얼마나** 드물어지는가?

이 문제는 꽤 소박해 보이는 사실을 증명한다. n 이하의 모든 소수를 곱하면 그 값이 4^n보다 작다는 것이다. 그러나 이 순진해 보이는 부등식(inequality)은 "얼마나 드문가?"라는 물음에 답하는 첫 번째 진정한 발걸음이며, 1932년 젊은 에르되시(Paul Erdős)가 내놓은, 수학에서 가장 유명한 짧은 증명 가운데 하나의 핵심 보조정리(lemma)이다.

시작하기 전에

기호 $P_{r,s}$는 까다로워 보이지만 생각은 단순하다. 어떤 범위에 있는 소수들을 모두 곱하는 것이다. 예시를 꼭 이해하고 넘어가자. $P_{3,7}$은 3보다 크고 7 이하인 소수, 곧 5와 7을 사용하므로 그 값은 35이다.

? **생각해 보기** 문항 (iv)는 **모든** $n \geq 2$에 대하여 어떤 명제를 증명하라고 한다. 문항 (iii)은 $2m$ 이하의 모든 k에 대하여 그 명제가 성립한다고 가정한다. 이것은 어떤 종류의 귀납법(induction)인가?

이것은 **강한** 귀납법(strong induction)이다. n인 경우를 증명할 때, 바로 앞의 경우만이 아니라 그 이전의 **모든** 경우를 가정해도 된다. 이 점을 기억해 두자. 문제가 이런 식으로 구성된 까닭이 바로 이것이다.

차근차근 풀기

1단계 이항계수는 너무 크지 않다

생각해 보기 $(1+x)^{2m+1}$의 이항전개(binomial expansion)에 $x=1$을 대입하면 무엇을 얻는가?

다음을 얻는다.

$$2^{2m+1} = \binom{2m+1}{0} + \binom{2m+1}{1} + \cdots + \binom{2m+1}{2m+1}.$$

모든 항이 양수이므로 각 항은 2^{2m+1}보다 작다. 하지만 이것으로는 충분하지 않다. 우리가 원하는 것은 그 절반인 2^{2m}이다.

생각해 보기 파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)은 대칭이다. 합에서 $\binom{2m+1}{m}$과 같은 다른 항은 무엇인가?

대칭성에 의해 $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$이고, 이 둘은 합에서 서로 다른 두 항이다($m \neq m+1$이므로). 따라서

$$2\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} < 2^{2m+1},$$

이며, 합에는 $\binom{2m+1}{0} = 1$과 같은 다른 양수 항도 들어 있으므로 등호 없는 부등식이 성립한다. 양변을 2로 나누면 $\binom{2m+1}{m} < 2^{2m}$을 얻는다. ■

2단계 그 이항계수를 나누는 소수는 무엇인가?

이항계수(binomial coefficient)를 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!} = \frac{(m+2)(m+3)\cdots(2m+1)}{m!}.$$

생각해 보기 p를 $m+1 < p \leq 2m+1$인 소수라 하자. p는 분자를 나누는가? 분모를 나눌 수 있는가?

분자 $(m+2)(m+3)\cdots(2m+1)$은 p 자신을 인수로 포함하므로 p는 분자를 나눈다. 분모 $m!$은 모두 p보다 작은 수들의 곱이다. p는 소수이므로, 어느 인수도 나누지 못하는 수들의 곱을 나눌 수 없다. 따라서 p는 분자는 나누지만 분모는 나누지 않으며, 그러므로 p는 이항계수 전체를 나눈다(이항계수가 정수라는 점을 기억하자).

잠깐, 직접 해 보기 이제 범위 안의 각 소수가 $\binom{2m+1}{m}$을 나눈다는 것을 알았다. 그렇다면 왜 그들의 곱 $P_{m+1,2m+1}$도 이 수를 나누는가? (주의: 4와 6이 모두 어떤 수를 나눈다고 해서 24가 그 수를 나누는 것은 아니다.)

차이는 우리의 소수들이 **서로 다른 소수**(distinct primes)라는 데 있다. 서로 다른 소수 $p_1, p_2, \ldots$가 각각 N을 나누면 그들의 곱도 N을 나눈다. $N = p_1 N_1$이라 쓰자. 그러면 p_2는 $p_1 N_1$을 나누지만 p_1은 나누지 않으므로 N_1을 나눈다. 이와 같이 계속하면 된다. (여기서는 소수가 곱을 나누면 그 인수 가운데 하나를 나눈다는 사실을 사용했다. 이 사실은 잠시 경의를 표할 만하다. Section 1.7에서는 이와 비슷한 성질이 무너지는 세계를 보여 준다.)

따라서 $P_{m+1,2m+1}$은 $\binom{2m+1}{m}$을 나누고, 양수의 약수(divisor)는 그 수보다 크지 않으므로

$$P_{m+1,\,2m+1} \le \binom{2m+1}{m} < 2^{2m}. \qquad \blacksquare$$

3단계 곱을 나누기

생각해 보기 $2m+1$ 이하의 모든 소수의 곱인 $P_{1,2m+1}$을 이미 알고 있는 곱들로 어떻게 만들 수 있는가?

$2m+1$ 이하의 소수를 $m+1$ 이하인 것과 $m+1$보다 큰 것으로 나누자.

$$P_{1,2m+1} = P_{1,m+1} \times P_{m+1,2m+1}.$$

2단계에 의해 두 번째 인수는 $2^{2m} = 4^m$보다 작다. 첫 번째 인수에 대해서는, 2부터 $2m$까지의 모든 k에 대하여 $P_{1,k} < 4^k$라고 가정해도 되며, $k = m+1$은 이 범위 안에 있다($m \ge 1$이면 $2 \le m+1 \le 2m$이므로). 따라서

$$P_{1,2m+1} < 4^{m+1} \times 4^m = 4^{2m+1}. \qquad \blacksquare$$

바로 여기서 강한 귀납법이 제 몫을 한다. $2m+1$을 다루기 위해 필요했던 것은 바로 앞의 경우가 아니라, 대략 그 절반 크기인 $m+1$인 경우였다.

4단계 모든 n

생각해 보기 문항 (iii)은 홀수를 다룬다. 짝수 $n = 2m+2$이면 어떻게 되는가? 이 수는 소수인가?

처음 경우를 확인하자. $P_{1,2} = 2 < 16$이고 $P_{1,3} = 6 < 64$이다. 이제 $n \ge 4$일 때, 2부터 $n-1$까지의 모든 k에 대하여 $P_{1,k} < 4^k$라고 가정하자.

- n이 짝수이면, n은 소수가 아니다(2보다 크므로). 따라서 n 이하의 소수는 $n-1$ 이하의 소수와 같다. 그러므로 $P_{1,n} = P_{1,n-1} < 4^{n-1} < 4^n$이다.

- n이 홀수이면, $m \geq 2$인 m에 대하여 $n = 2m + 1$로 쓰자. 그러면 문항 (iii)에 의해 곧바로 $P_{1,n} < 4^n$이다.

강한 귀납법에 의해, 모든 $n \geq 2$에 대하여 $P_{1,n} < 4^n$이다. ■

돌아보기

- **이항계수는 수론적 정보를 담고 있다.** $\binom{2m+1}{m}$은 작으면서(4^m보다 작다) 많은 소수로 나누어떨어질 수밖에 없는 하나의 수이다. 많은 소수를 작은 수 안에 밀어 넣으면, 그런 소수가 너무 많을 수는 없다는 것을 알 수 있다.
- **문제가 스스로를 절반으로 줄일 때는 강한 귀납법이 자연스러운 도구이다.** $2m + 1$인 경우는 $m + 1$인 경우에 의존했다.
- **작은 경우는 따로 확인해야 한다.** 귀납법은 $n \geq 4$가 되어서야 작동하므로, $n = 2$와 3은 직접 처리해야 했다.

숨은 수학

4^n에서 소수 정리까지

결과에 로그(logarithm)를 취하면 $\ln P_{1,n} < n \ln 4$, 곧

$$\sum_{p \leq n} \ln p < (\ln 4)\, n \approx 1.39\, n.$$

1850년대에 체비쇼프(Pafnuty Chebyshev)는 바로 이런 종류의 상계와 하계를 증명하여, $\sum_{p \leq n} \ln p$가 n에 비례하여 증가함을 보였다. 가우스(Gauss)는 약 15세 무렵 이미 표를 보고 n 이하의 소수의 개수가 대략 $n / \ln n$이라고 추측했다. 이것이 **소수 정리**(Prime Number Theorem)가 되었으며, 1896년 아다마르(Jacques Hadamard)와 드 라 발레 푸생(Charles de la Vallée Poussin)이 복소해석학(complex analysis)을 이용하여 마침내 증명하였다. 로그 형태로 쓰면 소수 정리는

$$\sum_{p \leq n} \ln p \sim n,$$

을 말하며, 따라서 n 이하의 소수의 곱은 대략 e^n이다. 우리가 얻은 상계 4^n은 전혀 동떨어진 값이 아니다. 그림 1.2.1에 세 가지를 모두 나타내었다.

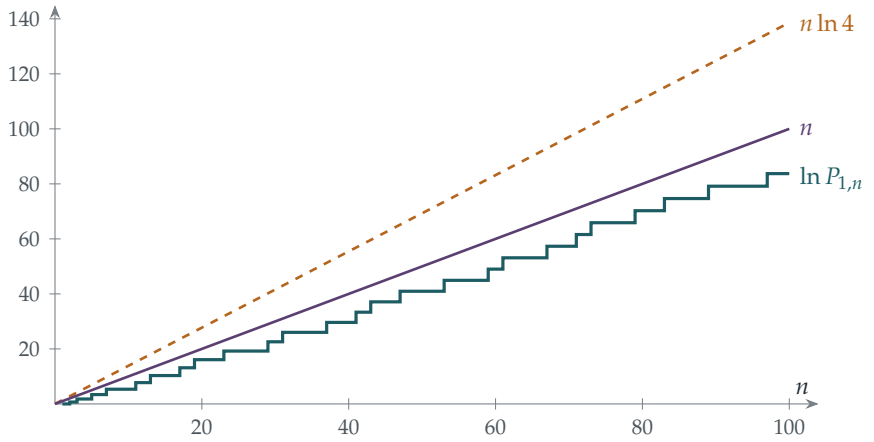


그림 1.2.1 n 이하의 모든 소수의 곱의 로그(청록색). 각 소수 p에서 $\ln p$만큼 뛰어오른다. 이 절에서는 이 값이 $n \ln 4$(호박색, 점선) 아래에 머문다는 것을 증명한다. 소수 정리에 따르면 이 값은 n(자주색)처럼 증가한다.

베르트랑 공준

1845년 베르트랑(Joseph Bertrand)은 모든 $n \geq 1$에 대하여 n과 $2n$ 사이에 항상 소수가 존재한다고 추측했다. 체비쇼프는 1852년에 이를 증명했다. 80년 뒤, 약관 19세의 에르되시가 아름다운 초등적 증명을 찾아냈다. 그 핵심 재료는 이 문제의 보조정리와, **가운데** 이항계수 $\binom{2n}{n}$을 나누는 소수가 무엇인지에 대한 세심한 분석이다. Martin Aigner와 Günter Ziegler는 수학에서 가장 우아한 증명들을 모은 책 *Proofs from THE BOOK*의 제2장으로 이 증명을 골랐다.

이 다음은

소수의 정확한 분포는 리만 제타 함수(Riemann zeta function)

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,$$

의 영점에 의해 결정된다. 이 함수는 Section 2.4에서 훨씬 소박한 모습으로 만나게 되는데, 거기서 $\zeta(2) = \pi^2/6$이다. 그 영점들이 정확히 어디에 있는지 예측하는 **리만 가설**(Riemann Hypothesis)이 참이라면, 소수 정리의 오차를 가능한 한 가장 정밀하게 잡아낼 수 있다. 리만 가설은 아마도 수학에서 가장 유명한 미해결 문제이며, 밀레니엄 문제(Millennium Prize Problems) 가운데 하나이다.

사고 기술

강한 귀납법, 그리고 영리한 대상에서 정보 끌어내기

n인 경우가 $n-1$보다 훨씬 작은 경우에 의존한다면, 이전의 모든 경우를 한꺼번에 가정하라.

여기에 담긴 또 하나의 아이디어는 더 미묘하며 정수론(number theory)의 특징을 잘 보여 준다. 어떤 범위의 모든 소수에 대해 무언가를 보이려면, 그 소수들이 모두 나누어야만 하면서 동시에 너무 크지 않다는 것도 보일 수 있는 하나의 대상(여기서는 이항계수)을 찾아라.

더 도전하기

1 **수를 느껴 보기.** $n = 10, 20, 30$에 대하여 $P_{1,n}$을 계산하고, 4^n 및 e^n과 비교하여라. (여기서는 계산기를 써도 좋다.)

2 **가운데 이항계수.** $\binom{2m}{m}$이 $(1+1)^{2m}$의 전개에 나오는 $2m+1$개의 항 가운데 가장 큼을 보이고, 이로부터 $\binom{2m}{m} \geq \dfrac{4^m}{2m+1}$임을 유도하여라.

3 **소수는 너무 많지 않다.** $\pi(n)$을 n 이하의 소수의 개수라 하자. $\sqrt{n}$과 n 사이의 모든 소수는 $\sqrt{n}$보다 크고, 그들의 곱은 많아야 $P_{1,n} < 4^n$이다. 이로부터

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) < \frac{2\ln 4}{\ln n}\, n,$$

임을 유도하고, 따라서 $\pi(n) < 2.8\, n/\ln n + \sqrt{n}$임을 보여라. 이를 소수 정리의 $\pi(n) \approx n/\ln n$과 비교하여라.

4 **베르트랑 확인하기.** $n = 1, 2, \ldots, 50$ 각각에 대하여 n과 $2n$ 사이의 소수를 찾아 베르트랑 공준(Bertrand's postulate)을 확인하여라. 각 소수가 바로 앞 소수의 두 배보다 작은 짧은 소수 목록을 이용하여 효율적으로 할 수 있는가?

더 읽을거리

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***, 제2장, "Bertrand's postulate"(베르트랑 공준).
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes*** (Fourth Estate). 소수 정리와 리만 가설의 역사를 다룬 대중서이다.

- **G. J. O. Jameson, *The Prime Number Theorem*** (Cambridge University Press). 엄밀하면서도 친절하며 학부생을 위해 쓰였다. 앞쪽 장들은 A 레벨(A level, 영국의 대학 입학 자격 시험) 수준의 미적분만 있으면 읽을 수 있다.

1.3 가장 작은 반례

문제

STEP III 2015, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/15-s3-q5`

도입

$\sqrt{2}$가 무리수(irrational)라는 증명은 아마 본 적이 있을 것이다. $\sqrt{2} = a/b$를 기약분수(lowest terms)로 놓고 양변을 제곱한 다음, a가 짝수이고 이어서 b도 짝수임을 이끌어 내어 모순을 얻는다. 훌륭한 증명이다. 그러나 이 증명은 **짝수**에 관한 요령에 기대고 있어서 다른 경우로 쉽게 일반화되지 않는다. $\sqrt[3]{2}$는 어떨까? $\sqrt{7}$은?

이 문제는 다른 증명을 제시하는데, 그 핵심 아이디어는 놀라울 만큼 단순하다. 바로 **가장 작은 것을 보라**는 것이다. 같은 아이디어가 이 장에서 모습을 바꾸어 여러 번 다시 등장한다.

시작하기 전에

이 문제는 STEP 문제로서는 특이하다. 증명의 뼈대를 주고 빠진 근거를 채우라고 요구하기 때문이다. 이것이 바로 대학생이 수학을 읽는 법을 배우는 방식이다. 교과서의 증명은 흔히 "명백히" 또는 "따라서 ∎"라고 말하는데, 그것이 정말로 그런지 확인하는 것도 읽는 사람의 일이다.

? **생각해 보기** 4단계에서는 "k를 S에 속하는 가장 작은 양의 정수로 정의한다"고 한다. 왜 그렇게 할 수 있을까? S가 양의 **실수**의 집합이라도 이렇게 할 수 있을까?

공집합이 아닌 양의 정수의 집합에는 언제나 가장 작은 원소가 있다. 이를 **정렬성 원리**(well-ordering principle)라 하며, 이는 수학적 귀납법(mathematical induction)의 원리와 동치이다. 양의 실수의 집합에 대해서는 이것이 **거짓**이다. 집합 $\{x : x > 0\}$에는 가장 작은 원소가 없다. 따라서 4단계는 3단계(S가 공집합이 아니어야 한다는 것)와 S가 정수로 이루어져 있다는 사실에 의존한다.

차근차근 풀기

1단계 **3단계: S는 공집합이 아니다**

생각해 보기 양의 정수 a, b에 대해 $\sqrt{2} = a/b$라면, S의 원소 하나를 적을 수 있는가?

$\sqrt{2} = a/b$이면 $b\sqrt{2} = a$이고, 이는 정수이다. 따라서 b는 S에 속하고, S는 공집합이 아니다.

2단계 **5단계: 더 작은 원소**

이제 k가 S의 가장 작은 원소이므로 $k\sqrt{2}$는 정수이다. 이것을 j라 하자.

잠깐, 직접 해 보기 $(\sqrt{2}-1)k$가 S에 속함을 보이려면 세 가지를 확인해야 한다. 그것은 무엇인가?

$(\sqrt{2}-1)k$가 (a) 정수이고, (b) 양수이며, (c) 여기에 $\sqrt{2}$를 곱하면 정수가 됨을 보여야 한다.

- (a) $(\sqrt{2}-1)k = k\sqrt{2} - k = j - k$이므로 정수의 차이다.
- (b) $\sqrt{2} > 1$이므로 $\sqrt{2} - 1 > 0$이고, 따라서 $(\sqrt{2}-1)k > 0$이다.
- (c) $(\sqrt{2}-1)k \cdot \sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} = 2k - j$이므로 정수이다.

따라서 $(\sqrt{2}-1)k \in S$이다.

3단계 **6단계: 모순**

생각해 보기 $\sqrt{2}-1$은 얼마나 큰가?

$1 < \sqrt{2} < 2$이므로 $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$이고, 따라서 $(\sqrt{2}-1)k < k$이다. S의 가장 작은 원소인 k보다 더 작은 S의 원소를 찾은 것이다. 이는 불가능하므로 1단계의 가정이 거짓이었다. 즉 $\sqrt{2}$는 무리수이다. ∎

"기약분수"나 짝수와 홀수에 관한 어떤 사실도 필요하지 않았다는 점에 주목하라. 증명 전체는 세 가지 사실에 기대고 있다. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$가 정수라는 것, $\sqrt{2}$가 연속한 두 정수 사이에 엄격하게 놓여 있다는 것, 그리고 정수가 정렬성을 가진다는 것이다.

4단계 **세제곱근: 두 수를 연결하기**

$c = 2^{1/3}$이라 하면 $c^2 = 2^{2/3}$이고 $c^3 = 2$이다.

생각해 보기 c가 유리수(rational)이면 c^2도 유리수인가? 또 c^2이 유리수이면 곱셈과 나눗셈만으로 c로 되돌아갈 수 있는가?

c가 유리수이면 $c^2 = c \times c$도 유리수이다. 거꾸로 c^2이 유리수이면 $2/c^2 = c^3/c^2 = c$도 유리수이다. 따라서 $2^{1/3}$이 유리수일 필요충분조건은 $2^{2/3}$이 유리수인 것이다. ■

5단계 논증을 변형하기

생각해 보기 소문항 (i)에서 핵심은 $(\sqrt{2})^2 = 2$가 정수라는 것이었고, 그래서 S의 원소에 $\sqrt{2}$를 두 번 곱하면 다시 정수로 돌아온다. $c = 2^{1/3}$의 경우에는 세 번 곱해야 한다. 집합 S를 어떻게 바꾸어야 할까?

c가 유리수라고 가정하자. 그러면 c^2도 유리수이다. 다음과 같이 정의한다.

$$S = \{n \text{ 은 양의 정수} : nc \text{ 와} nc^2 \text{ 이 모두 정수}\}.$$

- **S는 공집합이 아니다.** $c = a/b$이고 $c^2 = a'/b'$이면 bb'는 S에 속한다.
- **S의 가장 작은 원소를 k라 하고** $(c-1)k$를 생각하자. $1^3 < 2 < 2^3$이므로 $1 < c < 2$이고, 따라서 $0 < (c-1)k < k$이다.
- **이것은 정수이다:** $(c-1)k = kc - k$.
- **c를 곱하면:** $(c-1)k \cdot c = kc^2 - kc$이므로 정수이다.
- **c^2을 곱하면:** $(c-1)k \cdot c^2 = kc^3 - kc^2 = 2k - kc^2$이므로 정수이다.

따라서 $(c-1)k \in S$이고 이것은 k보다 작으므로 모순이다. 그러므로 $2^{1/3}$은 무리수이고, 4단계에 의해 $2^{2/3}$도 무리수이다. ■

돌아보기

- **"가장 작은 것을 잡아라"는 하나의 증명 기법이다.** 반례가 존재한다고 가정하고, 그중 가장 작은 것을 잡은 다음, 그보다 더 작은 반례를 만들어 낸다. 이를 **극단 원리**(extremal principle) 또는 **최소 반례**(minimal counterexample) 논법이라 한다.
- **집합 S가 장부 정리를 맡았다.** 분자와 분모를 이리저리 다루는 대신 "좋은" 곱수를 모두 하나의 집합에 모았다.
- **일반화한다는 것은 증명이 실제로 무엇 때문에 성립했는지 묻는 것이었다.** $\sqrt{2}$의 경우에는 $\sqrt{2}$를 한 번 곱하는 것으로 충분했고, $\sqrt[3]{2}$의 경우에는 두 번이 필요했다. 이 점을 알아차리자 S를 어떻게 다시 정의해야 할지 정확히 알 수 있었다.

숨은 수학

그림으로 그릴 수 있는 증명

소문항 (i) 뒤에는 Stanley Tennenbaum이 고안한 아름다운 그림이 있다. $\sqrt{2} = a/b$이면 $a^2 = 2b^2$이다. 즉 한 변이 a인 정사각형의 넓이는 한 변이 b인 정사각형 두 개의 넓이와 같다. 그림 1.3.1처럼 두 개의 b-정사각형을 a-정사각형의 서로 마주 보는 모서리에 놓자. 둘은 작은 정사각형 하나에서 겹치고, 작은 정사각형 두 개를 덮지 못한 채 남긴다. 넓이가 같으므로 겹친 부분은 덮이지 않은 두 정사각형을 합한 것과 넓이가 같아야 하고, 따라서 같은 성질을 가진 **더 작은** 정수 쌍이 생긴다. 점점 더 작은 쌍이 끝없이 이어질 수는 없으므로 그런 정사각형은 존재하지 않는다. 더 작은 쌍은 정확히 $(2b - a,\ a - b)$이며, 이것은 바로 우리의 $(\sqrt{2} - 1)k$ 단계가 모습을 바꾼 것이다.

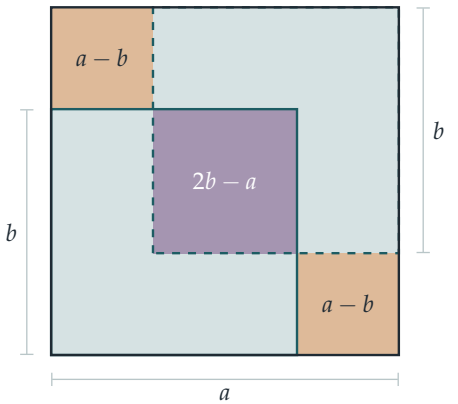


그림 1.3.1 Tennenbaum의 증명. 한 변이 b인 정사각형 두 개(청록색)가 한 변이 a인 정사각형의 마주 보는 모서리에 놓여 있다. $a^2 = 2b^2$이면 두 번 센 넓이(자주색으로 겹친 부분)는 빠진 넓이(호박색의 두 모서리)와 같아야 하므로 $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$이다. 즉 더 작은 해가 생긴다.

정렬성, 귀납법, 그리고 강하법

정렬성 원리와 귀납법의 원리는 논리적으로 동치이다. 즉 어느 하나로부터 다른 하나를 증명할 수 있다. 대학에서는 두 원리가 모두 자연수의 기초로 쓰이는 것을 보게 될 것이다. Section 1.5에서는 같은 원리를 다른 형태, 곧 페르마(Fermat)의 **무한 강하법**(method of infinite descent)으로 사용할 것이다. 양의 정수로 이루어진 무한한 순감소수열은 존재하지 않는다는 것이다.

어디까지 갈 수 있을까?

이 논증으로 N이 완전제곱수(perfect square)가 아닐 때마다 $\sqrt{N}$이 무리수임을 증명할 수 있으며(연습문제 참고), 더 일반적으로 자연수의 n제곱근은 자연수이거나 무리수임을 증명할 수 있다. 대학에서는 이것이 **대수적 정수**(algebraic integers)에 관한 명제가 된다. $x^3 - 2 = 0$처럼 정수 계수를 가지고 최고차항의 계수가 1인 다항식(monic polynomial) 방정식을 만족하는 유리수는 반드시 정수여야 한다. 이 아이디어는 Section 6.3에서 다시 만나게 된다.

피타고라스학파(Pythagoreans)가 $\sqrt{2}$의 무리성을 폭로했다는 이유로 히파소스(Hippasus)를 물에 빠뜨려 죽였다는 전설은 아마 사실이 아닐 것이다. 사실인 것은 이 발견 때문에 그리스 수학자들이 수에 대한 연구와 길이에 대한 연구를 분리할 수밖에 없었다는 점이며, 이 분열은 19세기에 이르러 데데킨트(Dedekind)가 실수를 구성하고 나서야 비로소 메워졌다.

사고 기술

극단 원리

어떤 일이 결코 일어나지 않음을 보이고 싶다면, 그 일이 일어난다고 가정하고, 가장 작은(또는 가장 큰, 또는 가장 단순한) 경우를 골라, 그것으로 그보다 더 작은 경우를 만들어라.

"가장 작은"이 무엇을 뜻하는지 정하는 것이 창의적인 단계이다. 여기서는 $n\sqrt{2}$를 정수로 만드는 가장 작은 n이었다.

더 도전하기

1 **다른 제곱근.** 이 논증을 변형하여 $\sqrt{3}$이 무리수임을 보여라. 어떤 수가 $\sqrt{2}-1$의 역할을 하는가?

2 **완전제곱수가 아닌 모든 수.** N을 완전제곱수가 아닌 양의 정수라 하고, m을 $m < \sqrt{N} < m+1$을 만족하는 정수라 하자. $(\sqrt{N} - m)k$를 생각하여 $\sqrt{N}$이 무리수임을 증명하여라.

3 **결함을 찾아라.** 이 논증을 $\sqrt{4}$에 적용해 보아라. 정확히 어느 단계가 실패하는가?

4 **Tennenbaum의 그림.** 그림 1.3.1을 이용하여 $a^2 = 2b^2$이면 $(2b-a)^2 = 2(a-b)^2$임을 보여라. 이 항등식을 대수적으로도 확인하여라.

더 읽을거리

- **Daniel Velleman, *How to Prove It*** (Cambridge University Press). 귀납법과 정렬성을 포함하여 증명을 꼼꼼하게 소개하는 입문서이다.
- **R. P. Burn, *A Pathway into Number Theory*** (Cambridge University Press). 세심하게 순서를 정한 질문들로만 이루어진 책으로, 대학 1학년 강의를 준비하기에 이상적이다.
- **John Conway & Joseph Shipman, "Extreme proofs I: the irrationality of $\sqrt{2}$"** (*Mathematical Intelligencer*, 2013). 하나의 사실에 대한 여러 증명을 재치 있게 비교한다.

1.4 e는 무리수이고, e^2도 그렇다

이 절에서는 두 문제를 다룬다. 1997년의 첫 번째 문제는 e가 무리수(irrational number)임을 증명(proof)한다. 2024년의 두 번째 문제는 같은 아이디어를 더 교묘하게 변형하여 e^2이 무리수임을 증명하는데, 이것은 실제로 훨씬 어렵다.

준비 문제

STEP III 1997, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/97-s3-q7`

본 문제

STEP III 2024, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

도입

Section 1.3에서는 $\sqrt{2}$가 간단한 방정식 $x^2 = 2$를 만족한다는 사실을 이용하여 $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하였다. 그러나 e는 우리가 아는 한 그런 방정식을 전혀 만족하지 않는다. 우리가 가진 것은 그 급수(series)뿐이다.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

급수가 어떻게 어떤 수가 분수가 아니라는 것을 알려 줄 수 있을까?

그 답은 수론(number theory)에서 가장 유용한 아이디어 가운데 하나이다. **정수**(*integer*)는 **0과 1 사이에 엄격하게 놓일 수 없다.** 어떤 양이 정수임을 보이고, 동시에 그 양이 0과 1 사이에 엄격하게 놓임을 보일 수 있다면 모순(contradiction)이 생긴다. 이 절의 모든 내용은 이 주제의 변주이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $e = p/q$라고 가정하자. e에 q를 곱하면 정수가 된다. e의 급수의 각 항에 $q!$을 곱하면 어떻게 되는가?

$k \le q$이면 $\dfrac{1}{k!}$에 $q!$을 곱한 값은 정수이다. 따라서 $q!\,e$는 정수 부분(처음 $q+1$개의 항)과 "꼬리(tail)"(그 뒤의 모든 항)로 나뉜다. $e = p/q$이면 $q!\,e$ 자체가 정수이므로 꼬리도 정수여야 한다. 계획은 꼬리가 0과 1 사이에 엄격하게 놓임을 보이는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 준비 문제: e는 무리수이다

급수 b_n은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{1}{n+1}$인 등비급수(geometric series)이므로

$$b_n = \frac{1/(n+1)}{1 - 1/(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

생각해 보기 a_n과 b_n을 항별로 비교하라. 어느 쪽이 더 큰가?

첫째항은 서로 같다. 그 뒤로는 $(n+1)(n+2) > (n+1)^2$이고, 일반적으로 $k \ge 2$일 때 $(n+1)(n+2)\cdots(n+k) > (n+1)^k$이므로, a_n의 이후 각 항은 b_n의 대응하는 항보다 작다. 따라서 $0 < a_n < b_n = 1/n$이다.

이제 a_n이 실제로 무엇인지 살펴보자. e의 급수에 $n!$을 곱하면

$$n!\,e = \underbrace{\frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \cdots + \frac{n!}{n!}}_{\text{정수}} + \underbrace{\frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \cdots}_{=a_n}.$$

$0 < a_n < 1$이므로 $n!\,e$의 정수 부분(integer part)은 첫 번째 묶음이고 a_n은 소수 부분(fractional part)이다. 즉 $a_n = n!\,e - [n!\,e]$이다.

잠깐, 직접 해 보기 이제 증명을 마무리하라. $e = p/q$라고 가정하자. n의 값을 무엇으로 택해야 하는가?

$n = q$로 택한다. 그러면 $q!\,e = (q-1)!\,p$는 정수이므로 그 소수 부분 a_q는 0이다. 그런데 $a_q > 0$이다. 모순이다. 따라서 e는 무리수이다. ∎

이 증명은 1815년 무렵 푸리에(Joseph Fourier)가 제시한 것이다.

2단계 e^2이 더 어려운 이유

> **생각해 보기** 같은 아이디어를 e^2에 적용해 보라. 그 급수는 $\sum 2^k/k!$이다. $n!$을 곱하고 꼬리를 살펴보면 무엇이 잘못되는가?

이제 꼬리는 $\dfrac{2^{n+1}}{n+1} + \dfrac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$이고, 2의 거듭제곱이 모든 것을 망쳐 버린다. 꼬리가 더 이상 작지 않은 것이다. $n!$을 곱해도 분자의 2^k에는 도움이 되지 않는다.

2024년 문제의 비결은 e^2을 아예 피하는 것이다. $e^2 = p/q$이면

$$qe = \frac{p}{e}.$$

이제 두 수 e와 $1/e$가 생기는데, 각각은 계승(factorial)으로 된 급수를 가지며 골치 아픈 2의 거듭제곱이 없다.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \qquad \frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3단계 두 꼬리

소문항 (i)은 준비 문제와 정확히 같다. 즉 $0 < f(n) < 1/n$이다.

소문항 (ii)에서 $g(n)$은 항의 크기가 감소하는 **교대급수**(*alternating series*)이다.

> **생각해 보기** $t_1 > t_2 > t_3 > \cdots > 0$인 교대급수 $t_1 - t_2 + t_3 - \cdots$의 합이 왜 0과 t_1 사이에 있는가?

항을 둘씩 묶으면 $(t_1 - t_2) + (t_3 - t_4) + \cdots$는 양수인 괄호들의 합이므로 양수이다. 다른 방식으로 묶으면 $t_1 - (t_2 - t_3) - (t_4 - t_5) - \cdots$는 t_1에서 양수인 괄호들을 뺀 것이므로 t_1보다 작다. 여기서 $t_1 = \frac{1}{n+1}$이고, 각 항은 앞의 항을 1보다 큰 수로 나눈 것이므로 항들은 감소한다. 따라서 $0 < g(n) < \frac{1}{n+1}$이다.

4단계 다시 정수

준비 문제에서와 똑같이 e에 $(2n)!$을 곱하고 꼬리를 떼어 내면

$$(2n)!\, e = (\text{정수}) + f(2n).$$

따라서 $(2n)!\, e - f(2n)$은 정수이다. 이제 $1/e$에 대해서도 같은 일을 하면

$$\frac{(2n)!}{e} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!}.$$

생각해 보기 꼬리의 첫째항, 즉 $k = 2n+1$인 항의 부호는 무엇인가? 꼬리는 $g(2n)$과 어떤 관계인가?

꼬리의 첫째항에서 $k = 2n+1$은 홀수이므로 그 항은 음수이다. 꼬리는

$$-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \cdots = -g(2n).$$

따라서 $\dfrac{(2n)!}{e} + g(2n)$은 정수이다. ■

문제에서 n 대신 $2n$을 쓰는 이유가 바로 이것이다. 곱하는 수가 짝수이면 $1/e$의 꼬리는 정확히 $-g$가 되어 부호를 예측할 수 있다.

5단계 모순

$qe = p/e$라고 가정하자. 양변에 $(2n)!$을 곱하고 단계 4를 이용하면

$$q\big(\text{정수} + f(2n)\big) = p\big(\text{정수} - g(2n)\big).$$

정리하면 $qf(2n) + pg(2n)$은 정수들의 조합과 같으므로 정수이다. 이것이 소문항 (iv)이다.

잠깐, 직접 해 보기 이제 단계 3에서 구한 범위를 이용하라. n이 매우 클 때 $qf(2n) + pg(2n)$은 어떻게 되는가?

$f(2n)$과 $g(2n)$은 모두 양수이므로 $qf(2n) + pg(2n) > 0$이다. 또한

$$qf(2n) + pg(2n) < \frac{q}{2n} + \frac{p}{2n+1} < \frac{p+q}{2n}.$$

$n > (p+q)/2$로 택하자. 그러면 $qf(2n) + pg(2n)$은 0과 1 사이에 엄격하게 놓인 정수이다. 이는 불가능하므로 e^2은 무리수이다. ■

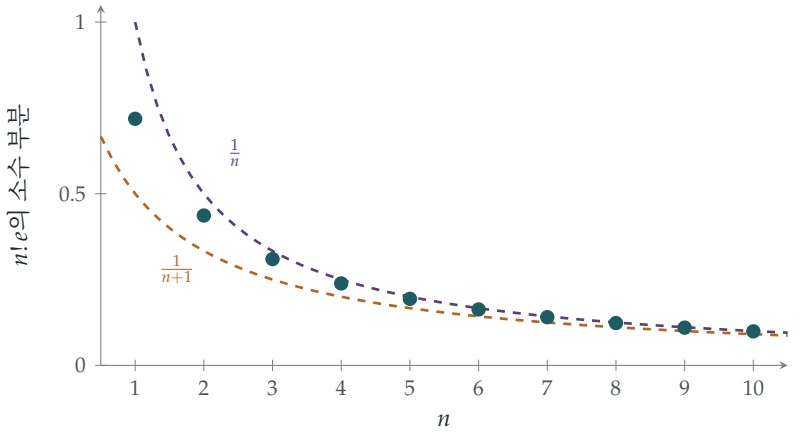


그림 1.4.1 꼬리 $a_n = n!\,e - [n!\,e]$(청록색)는 $n!\,e$의 소수 부분이다. 이 값은 언제나 $\frac{1}{n+1}$과 $\frac{1}{n}$ 사이에 엄격하게 놓인다. 결코 0이 아니지만 1보다는 작다. 만약 e가 분수 $\frac{p}{q}$라면 $n \geq q$인 모든 n에 대하여 $n!\,e$는 정수가 되고, 청록색 점들은 0이 될 것이다.

돌아보기

- **핵심 동력은 "0과 1 사이에 엄격하게 놓인 정수는 없다"는 사실이다.** 두 증명 모두 반드시 정수여야 하는 양을 만들고 그 양을 가두어 버린다.
- **계승은 꼬리를 작게 만든다.** $n!$을 곱하면 급수의 앞부분은 정수가 되고, $1/n$처럼 줄어드는 꼬리가 남는다.
- **정면 공격이 실패하면 식을 바꾸어 써라.** $e^2 = p/q$를 정면으로 공략하는 대신 $qe = p/e$로 바꾸어 써서, 어려움을 더 쉬운 두 수에 나누어 실었다.
- **세부 사항이 중요하다.** n 대신 $2n$을 택함으로써 꼬리의 부호가 정해졌다. 많은 증명이 이런 작은 세부 사항에 달려 있다.

숨은 수학

e는 얼마나 무리수인가?

리우빌(Joseph Liouville)은 1840년에 e^2이 무리수임을, 더 나아가 정수 계수(coefficient)를 갖는 어떤 이차방정식(quadratic equation)도 만족하지 않음을 증명하였다. 1873년 에르미트(Charles Hermite)는 훨씬 더 나아가 e가 **초월수**(*transcendental number*)임을, 즉 정수 계수를 갖는 **어떤** 다항식(polynomial)의 근도 아님을 증명하였다. 그의 증명은 바로

위의 논증, 즉 정수를 만들고 그것이 0과 1 사이에 엄격하게 놓임을 보이는 논증을 정교하게 발전시킨 것이다. 9년 뒤 린데만(Ferdinand von Lindemann)은 에르미트의 방법을 응용하여 π가 초월수임을 보였고, 이로써 자와 컴퍼스로 "원을 정사각형으로 만드는" 고대의 문제가 불가능하다는 것이 마침내 증명되었다.

아직 모르는 것

이 방법들이 이토록 강력한데도, 민망할 정도로 간단한 질문들이 여전히 풀리지 않은 채 남아 있다. $e+\pi$는 무리수인가? $e\pi$는? 둘 중 적어도 하나는 초월수여야 하지만(연습문제 4), 아무도 모른다. $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$은 무리수인가? 그렇다. 아페리(Roger Apéry)가 1978년에 이를 증명하여 수학계를 놀라게 하였다. $\zeta(5)$는? 아무도 모른다.

근사

이 증명들의 바탕에는 더 깊은 아이디어가 있다. 어떤 수가 분수로 **지나치게 잘** 근사된다면 그 수는 무리수라는 것이다. e의 급수의 부분합(partial sum)은 매우 빠르게 e에 아주 가까워지는 분수들이다. 분수는 다른 분수들로 그만큼 잘 근사될 수 없다. 이것이 **디오판토스 근사**(*Diophantine approximation*)의 출발점이다. 이 수론의 분야는 Section 2.9에서 더 탐구할 수 있는데, 그곳에서는 다른 적분들의 모임이 e에 더욱 가깝게 다가가는 분수들을 만들어 낸다.

사고 기술

정수 가두기

어떤 수가 무리수임을 증명하려면, 그 수가 분수라고 가정하고, 그로부터 반드시 정수여야 하는 양을 만든 다음, 그 양이 0과 1 사이에 엄격하게 놓임을 보인다.

기술의 핵심은 그 양을 고르는 데 있다. 여기서는 계승을 곱하여 급수의 대부분을 정수로 만들고, 작지만 양수인 꼬리를 남겼다.

더 도전하기

1 **$1/e$만 이용하기.** $1/e = p/q$라고 가정하고 $1/e$의 교대급수만을 이용하여 e가 무리수임을 증명하라.

2 $\sin 1$**은 무리수이다.** $\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots$을 이용하여 $\sin 1$이 무리수임을 증명하라. (적당한 홀수의 계승을 곱하라.)

3 π**는 왜 안 되는가?** 이 방법이 π에 직접 적용되지 않는 이유를 설명하라. 그런 다음 급수 대신 적분을 이용하여 π가 무리수임을 보인 Ivan Niven의 한 쪽짜리 증명(1947)을 찾아보라. 실력 있는 A 레벨(A level, 영국의 대학 입학 자격 시험) 학생이라면 충분히 이해할 수 있다.

4 **둘 중 하나는 초월수이다.** 심화 e와 π가 $x^2 - (e+\pi)x + e\pi = 0$의 근임을 보여라. 계수가 대수적 수(algebraic number)인 다항식의 근은 그 자체로 대수적 수이며, π는 대수적 수가 아니라는 사실(린데만)을 가정해도 좋다. 이로부터 $e+\pi$와 $e\pi$ 중 적어도 하나는 초월수임을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Aigner & Ziegler,** ***Proofs from THE BOOK***, 제8장 "Some irrational numbers"(몇 가지 무리수). 바로 이 아이디어들을 이용하여 e, e^2, e^4, π^2이 무리수임을 증명한다.
- **Ivan Niven,** ***Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). $\sqrt{2}$부터 초월성까지 모든 것을 다루는 짧은 고전이다.
- **Julian Havil,** ***The Irrationals*** (Princeton University Press). 무리수의 역사를 읽기 쉽게 풀어 쓴 책이다.

1.5 무한 강하법

문제

STEP III 2022, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

도입

방정식에 정수해가 **없음**을 어떻게 증명할 수 있을까? 모든 경우를 다 확인해 볼 수는 없다. 경우가 무한히 많기 때문이다. 1630년대에 페르마(Pierre de Fermat)가 한 가지 방법을 찾아냈다. 어떤 해가 있다면 그로부터 **더 작은** 수로 이루어진 또 다른 해가 만들어지고, 다시 그보다 더 작은 해가 만들어지며, 이것이 끝없이 계속된다는 것을 보이는 것이다. 그런데 양의 정수는 영원히 계속 작아질 수 없다. 따라서 애초에 해는 존재하지 않았던 것이다.

페르마는 이것을 **무한 강하법**(method of infinite descent)이라 불렀고, 이 방법을 무척 자랑스러워했다. 이는 Section 1.3에서 본 정렬 원리(well-ordering principle)의 뒷면이며, 지금도 방정식에 해가 없음을 증명하는 주요 도구 가운데 하나이다.

시작하기 전에

네 소문항은 모두 구조가 같다. 해가 있다고 가정하고, 그 해를 줄이고, 모순을 이끌어 낸다. 문제는 **어떻게** 줄이느냐이다.

생각해 보기 소문항 (i)에서 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$을 보자. 세 항 가운데 두 항은 분명히 짝수이다. 이것은 나머지 한 항에 대해 무엇을 알려 주는가?

모든 강하는 바로 이런 관찰에서 시작한다. 어떤 나누어떨어짐(divisibility)이 저절로 강제되는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 첫 번째 강하

$a^3 = -2b^3 - 4c^3$이므로 a^3은 짝수이고, 따라서 a도 짝수이다(홀수의 세제곱은 홀수이다). $a = 2p$로 놓자. 그러면 $|p| = |a|/2 < |a|$이고, 대입하면

$$8p^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

> **생각해 보기** 새 방정식은 $4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0$이다. 계수는 같고 순서만 돌아갔다. 같은 방법을 다시 쓸 수 있을까?

이제 $b^3 = -4p^3 - 2c^3$이 짝수이므로 $b = 2q$이고 $|q| < |b|$이며, 2로 나누면 $2p^3 + 4q^3 + c^3 = 0$을 얻는다. 한 번 더, c는 짝수여야 한다. $c = 2r$이고 $|r| < |c|$이며, 2로 나누면

$$p^3 + 2q^3 + 4r^3 = 0.$$

이것은 a, b, c 자리에 p, q, r가 들어간 **원래** 방정식이다. 각각은 크기가 절반이고, 어느 것도 0이 아니다. 0이 아닌 수를 반으로 나누어 0이 될 수는 없기 때문이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 이것을 0이 아닌 해가 존재하지 않는다는 증명으로 바꾸어 보라. 정확히 무엇을 "가장 작다"고 가정해야 할까?

0이 아닌 정수로 이루어진 모든 해 가운데 $|a|$가 가장 작은 해를 하나 고른다. (해가 하나라도 있다면 정렬 원리에 의해 이렇게 할 수 있다.) 위의 논증은 $|p| < |a|$인 또 다른 0이 아닌 해를 만들어 내므로 최소성에 모순이다. 따라서 0이 아닌 해는 없다. ■

같은 내용을 이렇게 말할 수도 있다. 해가 하나 있으면 $|a| > |p| > \cdots$인 해들의 무한수열, 곧 양의 정수로 이루어진 무한한 순감소수열을 만들 수 있는데, 이는 불가능하다.

2단계 다른 소수

> **생각해 보기** $9a^3 + 10b^3 + 6c^3 = 0$에서는 홀짝성(parity)이 바로 도움이 되지는 않는다. 계수 9, 10, 6을 보자. 이 가운데 두 개를 나누는 소수는 무엇인가?

소수 3은 9와 6을 나누므로 3은 $10b^3$을 나누고, 따라서 3은 b를 나눈다. $b = 3q$로 놓고 3으로 나누면

$$3a^3 + 90q^3 + 2c^3 = 0.$$

이제 3이 $2c^3$을 나누므로 $c = 3r$이다. 다시 3으로 나누면 $a^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0$이다. 따라서 3은 a를 나눈다. $a = 3p$로 놓고 한 번 더 3으로 나누면

$$9p^3 + 10q^3 + 6r^3 = 0.$$

정확히 원래 방정식이고, 수는 더 작은 0이 아닌 수이다. 같은 강하 논증에 의해 0이 아닌 해는 없다. ■

3단계 3을 법(modulo)으로 한 제곱수

> **생각해 보기** 모든 정수는 $3n, 3n+1, 3n-1$ 가운데 하나의 꼴이다. 이들의 제곱을 3으로 나눈 나머지는 무엇인가?

$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3(3n^2 \pm 2n) + 1$로, 3의 배수보다 1 크다. 그리고 $(3n)^2$은 3의 배수이다. 따라서 제곱수를 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이고, 결코 2가 아니다.

이제 $a^2 + b^2$이 3의 배수라면, 가능한 나머지의 합은 $0+0, 0+1, 1+0, 1+1$이고, 이는 각각 0, 1, 1, 2가 된다. 이 가운데 3의 배수는 첫 번째뿐이므로 a와 b는 모두 3의 배수여야 한다.

> **생각해 보기** $a^2 + b^2 = 3c^2$이고 $a = 3p$, $b = 3q$이면 c에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

$9p^2 + 9q^2 = 3c^2$이므로 $c^2 = 3(p^2 + q^2)$은 3의 배수이고, 따라서 $c = 3r$이다. 그러면 $9p^2 + 9q^2 = 27r^2$이므로 $p^2 + q^2 = 3r^2$이다. 같은 방정식에 더 작은 수이다. 다시 강하이다. ■

4단계 변형: 방정식이 바뀐다

> **생각해 보기** $a^2 + b^2 + c^2 = 4abc$에서 우변은 4의 배수이다. 제곱수를 4로 나눈 나머지는 어떠한가?

짝수의 제곱은 4의 배수이고 홀수의 제곱은 4의 배수보다 1 크다($(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$). 따라서 $a^2 + b^2 + c^2$을 4로 나눈 나머지는 a, b, c 가운데 홀수가 몇 개인지에 따라 0, 1, 2, 3 중 하나이다. 우변이 4의 배수이므로 이들 가운데 어느 것도 홀수일 수 없다. $a = 2p$, $b = 2q$, $c = 2r$로 놓으면

$$4(p^2 + q^2 + r^2) = 32\,pqr \quad \Longrightarrow \quad p^2 + q^2 + r^2 = 8\,pqr.$$

> **생각해 보기** 이것은 같은 방정식이 아니다. 4가 8로 바뀌었다. 그래도 강하가 통할까?

여기서 쓰는 요령은 **더 강한 명제를 증명하는 것**이다. 다음 꼴의 모든 방정식을 생각하자.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^m\,xyz \qquad \text{단, } m \geq 2.$$

이러한 m 각각에 대해 우변은 4의 배수이므로, 완전히 같은 논증으로 x, y, z가 모두 짝수임을 보일 수 있다. 이들을 반으로 나누면 2^{m+1}이 들어간 방정식의 해가 되고, 이 방정식 역시

같은 꼴이다. 따라서 m 방정식의 0이 아닌 해로부터 $m+1$ 방정식의 더 작은 0이 아닌 해를 얻는다. 이 족의 어느 방정식이든 상관없이, 그 해들 가운데 $|x|$가 가장 작은 해를 택하면 모순이 생긴다. 특히 $a^2+b^2+c^2=4abc$는 0이 아닌 해를 갖지 않는다. ■

때로는 증명하려는 명제가 너무 약해서 스스로의 귀납법(induction)을 떠받치지 못한다. 이때의 처방은 스스로를 떠받칠 수 **있는** 더 일반적인 명제를 증명하는 것이다. 이는 대학에서 놀라울 만큼 자주 쓰이는 요령이다.

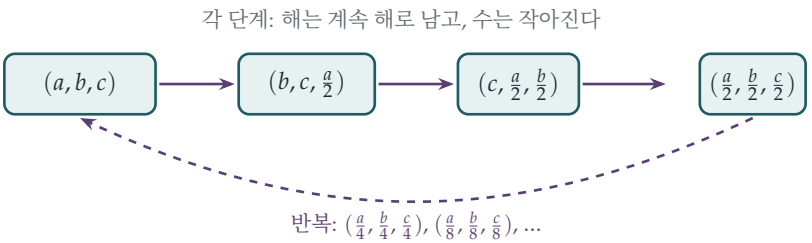


그림 1.5.1 소문항 (i)의 강하. $a^3+2b^3+4c^3=0$의 해로부터 세 단계를 거치면 모든 성분이 절반이 된 또 다른 해가 나온다. 이를 끝없이 반복하면 양의 정수로 이루어진 끝없는 감소수열 $|a|>|\frac{a}{2}|>|\frac{a}{4}|>\cdots$을 얻게 되는데, 이는 불가능하다. 따라서 처음부터 해는 없었다.

돌아보기

- **강하에는 나누어떨어짐의 원천이 필요하다.** 매번 모든 변수를 나누도록 강제되는 소수 p(여기서는 2 또는 3)를 찾아서 그것으로 나누어 없앴다.
- **그것을 찾는 방법은 n을 법으로 생각하는 것이다.** mod 2, 3 또는 4로 나머지를 살펴보니 "무엇이든 될 수 있을까?"라는 물음이 짧은 유한 검사로 바뀌었다.
- **방정식이 바뀌면 일반화하라.** 소문항 (iv)에서는 강하 단계에 대해 닫혀 있는 방정식의 족 전체가 필요했다.

숨은 수학

페르마, 강하법, 그리고 마지막 정리

페르마는 무한 강하법을 이용하여 $x^4+y^4=z^2$이 양의 정수해를 갖지 않음을 증명하였다. 이것은 그 유명한 "마지막 정리"(Last Theorem) 가운데 그가 증명을 남긴 유일한 경우이며, $x^n+y^n=z^n$의 $n=4$인 경우를 해결한다. 이후 오일러(Euler)가 강하법을 써서 $n=3$인 경우를 증명했는데, 그 증명에 있던 빈틈은 나중에 메워졌다. 강하법은 지

금도 현대 이론의 출발점이다. Section 1.9에 나온 것과 같은 곡선에 관한 모델-베유 정리(Mordell–Weil theorem)의 증명은 정교한 강하법이다.

국소적 장애

이 절의 모든 증명은 어떤 수를 법으로 한 나머지를 살펴보는 방식이었다. 어떤 방정식이 어떤 n에 대해 n을 법으로 해를 갖지 않거나 실수해를 갖지 않는다면, 당연히 정수해도 갖지 않는다. 이러한 이유를 **국소적 장애**(local obstructions)라 하며, 대학에 가면 $p, p^2, p^3, \ldots$를 법으로 한 모든 나머지를 한꺼번에 연구하는 방법인 p-**진수**(p-adic numbers)를 만나게 된다.

하세(Hasse)와 민코프스키(Minkowski)의 멋진 정리에 따르면, $a^2 + b^2 = 3c^2$과 같은 이차 방정식에서는 국소적 장애가 유일한 장애이다. 즉 실패할 "국소적" 이유가 없다면 실제로 유리수해가 존재한다. 삼차 방정식에서는 이것이 극적으로 무너진다. 1951년 Ernst Selmer는

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

이 모든 정수를 법으로 해를 갖고 실수해도 갖지만, 0이 아닌 정수해는 갖지 않음을 보였다. "국소-대역" 원리(local-to-global principle)가 언제, 왜 실패하는지 설명하는 것은 현대 정수론의 주요 주제이다.

해를 갖는 방정식

소문항 (iv)에는 유명한 사촌이 있다. 바로 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, 곧 **마르코프 방정식**(Markov equation)이다. 이 방정식은 $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,5)$, $(1,5,13)$, $(2,5,29)$로 시작하는 양의 정수해를 무한히 많이 가지며, 이 해들은 무리수가 분수로 얼마나 잘 근사될 수 있는지와 관련되어 있다. 연습문제 4를 보라.

사고 기술

무한 강하법

방정식에 해가 없음을 보이려면, 어떤 해든 그보다 엄격하게 더 작은 해를 만들어 냄을 보여라. 그러면 가장 작은 해는 존재할 수 없다.

이를 n을 법으로 생각하는 방법과 짝지어 강하를 이끄는 나누어떨어짐을 찾고, 명제가 강하 단계에서 보존되지 않으면 명제를 일반화할 준비를 하라.

더 도전하기

1 **STEP I 준비 운동.** (*STEP I 2010 8*번 문항.) $a^3 + 3b^3 = 9c^3$의 유일한 정수해가 $a = b = c = 0$임을 보여라. 그다음, 일의 자리 숫자를 생각하여 $p^4 + 2q^4 = 5r^4$에 대해서도 같은 사실을 보여라.

2 **강하가 필요 없는 법.** 4를 법으로 생각하는 것만으로 $x^2 + y^2 = 4z + 3$이 정수해를 전혀 갖지 않음을 보여라.

3 **유리점.** 소문항 (iii)을 이용하여 원 $x^2 + y^2 = 3$ 위에 **유리수** 좌표를 갖는 점이 없음을 보여라. ($(1,1)$을 지나는 $x^2 + y^2 = 2$와 비교해 보라.)

4 **마르코프 세쌍.** (x,y,z)가 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$를 만족하면 $(x,y,3xy - z)$도 이를 만족함을 보여라. $(1,1,1)$에서 시작하여 위에 나열한 세쌍들을 만들어 보라. (이 "도약" 요령은 강하와 반대 방향이다.)

더 읽을거리

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic,*** 2장과 5장.
- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory*** (Pearson). 매우 읽기 쉽다. $x^4 + y^4 = z^2$에 대한 페르마의 강하법 증명이 실려 있다.
- **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem*** (Fourth Estate). 페르마가 여백에 남긴 메모부터 와일스(Wiles)의 증명까지의 이야기를 일반 독자를 위해 풀어낸 책이다.

1.6 두 제곱수의 합

문제

STEP II 2023, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

도입

어떤 자연수를 두 제곱수의 합(sum of two squares)으로 나타낼 수 있을까? $5 = 1^2 + 2^2$와 $13 = 2^2 + 3^2$는 그렇게 나타낼 수 있지만, 3, 7, 21은 그렇지 않다. 그런데 이상한 사실이 하나 있다. $65 = 5 \times 13$은 $1^2 + 8^2$와 $4^2 + 7^2$의 **두** 가지 서로 다른 방법으로 두 제곱수의 합으로 나타낼 수 있다. 이런 수 두 개를 곱하면 왜 또 이런 수가 되며, 왜 그 방법이 두 가지일까?

답은 뜻밖의 방향에서 나온다. 이 문제는 자연수를 떠나 **복소수**(*complex number*)를 다루도록 요구한다. 복소수에서는 두 제곱수의 합이 단순해지고, 언뜻 당혹스러워 보이는 계산이 거의 기계적인 작업이 된다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** a와 b가 정수이고 $z = a + \mathrm{i}b$일 때, $|z|^2$은 무엇인가?

그 값은 $a^2 + b^2$, 곧 두 제곱수의 합이다. 따라서 "N이 두 제곱수의 합이다"는 정확히 "실수부와 허수부가 정수인 어떤 복소수 z에 대하여 $N = |z|^2$이다"라는 뜻이다. 이와 같은 복소수를 **가우스 정수**(*Gaussian integers*)라고 한다. 이 바꿔 읽기를 꼭 기억해 두자. 문제 전체가 여기에 달려 있다.

차근차근 풀기

1단계 **절댓값은 곱해진다**

생각해 보기 zw를 a, b, c, d로 나타내어 보자. $|zw|^2$에 대하여 무엇을 보여야 하는가?

$zw = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$이므로

$$|zw|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2,$$

이다. 교차항 $-2abcd$와 $+2abcd$가 서로 지워지기 때문이다. 그리고 이 식은 다음과 같이 인수분해된다.

$$a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2|w|^2.$$

양변의 제곱근을 취하면 $|zw| = |z||w|$이다. ∎

이제 이것을 자연수에 대한 명제로 읽어 보자.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2. \tag{$\star$}$$

두 제곱수의 합 두 개를 곱하면 다시 두 제곱수의 합이 된다. 그리고 복소수는 그 두 제곱수가 정확히 무엇인지 알려 준다.

2단계 활용하기

소문항 (ii): $5 = |2+\mathrm{i}|^2$이고 $221 = 10^2 + 11^2 = |10+11\mathrm{i}|^2$이다. 그러므로 곱하면

$$(2+\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20 + 22\mathrm{i} + 10\mathrm{i} - 11 = 9 + 32\mathrm{i},$$

이고, 따라서 $5 \times 221 = 9^2 + 32^2$이다. (검산: $81 + 1024 = 1105$.)

생각해 보기 대신 $10+11\mathrm{i}$에 $2-\mathrm{i}$를 곱하면 어떻게 될까? 이 수는 $2+\mathrm{i}$와 절댓값(modulus)이 같다.

$(2-\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20 + 22\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 11 = 31 + 12\mathrm{i}$이므로 $1105 = 31^2 + 12^2$이기도 하다. $2+\mathrm{i}$를 고르느냐 그 켤레복소수(conjugate)를 고르느냐에 따라 서로 다른 표현이 나온다. 도입에서 본 65의 두 가지 표현도 이것으로 설명된다(그림 1.6.1). $65 = |(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})|^2 = |4+7\mathrm{i}|^2$이고 $65 = |(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})|^2 = |8+\mathrm{i}|^2$이다.

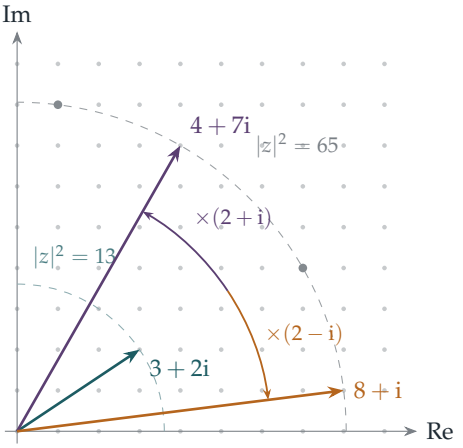


그림 1.6.1 $2 \pm \mathrm{i}$를 곱하면 길이가 $\sqrt{5}$배가 되고 약 26.6°만큼 회전한다. $2+\mathrm{i}$는 시계 반대 방향, $2-\mathrm{i}$는 시계 방향으로 회전시킨다. 원 $|z|^2 = 13$ 위의 $3+2\mathrm{i}$에서 출발하면, 두 선택은 원 $|z|^2 = 65$ 위의 서로 다른 격자점(lattice point)에 도달한다. 회색 점은 이 두 점을 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점이다.

3단계 먼저 인수분해하기

? **생각해 보기** 8045는 일의 자리 숫자가 5이다. 이것은 무엇을 시사하는가?

$8045 = 5 \times 1609$이다. 1609를 두 제곱수의 합으로 나타내야 하는데, 1609보다 조금 작은 제곱수들을 시험해 보면 곧 $1609 = 40^2 + 3^2$을 찾을 수 있다. 그러면

$$(2+\mathrm{i})(40+3\mathrm{i}) = 77 + 46\mathrm{i}, \qquad \text{이므로} \qquad 8045 = 77^2 + 46^2,$$

이고, 켤레복소수를 쓰면 $8045 = 83^2 + 34^2$도 얻는다.

소문항 (iv)는 더 빠르다. $36 = 6^2 + 0^2$이고, 6을 곱하는 것은 단지 크기를 늘리는 것이므로 $36 \times 50805 = 612^2 + 1206^2$이다.

4단계 세 가지 방법

? **생각해 보기** 25는 두 제곱수의 합으로 나타내는 방법이 둘 이상이다. 부호와 순서 바꾸기를 같은 것으로 볼 때, 절댓값이 5인 가우스 정수는 몇 개인가?

$25 = 5^2 + 0^2 = 3^2 + 4^2$이고, 이는 5, $3+4\mathrm{i}$, $3-4\mathrm{i}$에 대응한다. 다음으로 1002082를 보자. $1001^2 = 1002001$이므로 $1002082 = 1001^2 + 9^2$이다. $1001 + 9\mathrm{i}$에 세 수를 각각 곱하면 다음

을 얻는다.

$$5\,(1001+9\mathrm{i}) = 5005+45\mathrm{i},$$
$$(3+4\mathrm{i})(1001+9\mathrm{i}) = 2967+4031\mathrm{i},$$
$$(3-4\mathrm{i})(1001+9\mathrm{i}) = 3039-3977\mathrm{i}.$$

따라서 세 순서쌍 (r,s)는 $(45,5005)$, $(2967,4031)$, $(3039,3977)$이다.

5단계 나누기

> **잠깐, 직접 해 보기** 소문항 (vi)은 이 장치를 거꾸로 돌린다. $109 = 10^2+3^2$이고 $1002037 = 1001^2+6^2$임을 알고 있다. 일일이 찾아보지 않고 9193을 두 제곱수의 합으로 나타내려면 어떻게 해야 할까?

가우스 정수를 곱하면 절댓값이 곱해지므로, **나누면** 절댓값도 나누어질 것이다. 다음을 계산해 보자.

$$\frac{1001+6\mathrm{i}}{10+3\mathrm{i}} = \frac{(1001+6\mathrm{i})(10-3\mathrm{i})}{109} = \frac{10028-2943\mathrm{i}}{109} = 92-27\mathrm{i}.$$

나누어떨어지므로 $9193 = 92^2+27^2$이다. (검산: $8464+729=9193$.)

> **생각해 보기** 대신 $10-3\mathrm{i}$로 나누면 어떻게 될까?

그러면 $(1001+6\mathrm{i})(10+3\mathrm{i})/109 = (9992+3063\mathrm{i})/109$를 얻는데, $9992/109$가 정수가 아니므로 이것은 가우스 정수가 **아니다**. 주어진 자연수를 나누는 소수(prime)가 일부뿐인 것처럼, 두 "109의 인수" 가운데 하나만이 $1001+6\mathrm{i}$를 나눈다. 가우스 정수에는 그 나름의 소수와 그 나름의 인수분해가 있다.

돌아보기

- **바꿔 읽고, 풀고, 다시 바꿔 읽기.** "두 제곱수의 합"은 "가우스 정수의 절댓값의 제곱"이 되었다. 그 언어로 보면 문제는 쉬웠다.
- **먼저 인수분해하기.** 모든 소문항은 큰 수를, 표현을 쉽게 찾을 수 있는 작은 수들로 쪼개는 것에서 시작했다.
- **켤레복소수는 새로운 답을 준다.** 표현의 개수는 각 인수와 그 켤레복소수 가운데 하나를 고르는 방법이 몇 가지인지에 따라 정해진다.

숨은 수학

페르마의 두 제곱수 정리

어떤 소수가 두 제곱수의 합일까? $2 = 1^2 + 1^2$, 5, 13, 17, 29, 37, 41은 그렇고, 3, 7, 11, 19, 23, 31은 그렇지 않다. 규칙은 이렇다. 2를 제외하면, 소수가 두 제곱수의 합인 것은 그 소수를 4로 나눈 나머지가 1일 때이고, 그때뿐이다. 페르마(Fermat)가 1640년에 이를 진술했고, 오일러(Euler)가 1749년에 증명했다. 가우스 정수의 언어로 말하면 다음과 같다. 소수 $p \equiv 1 \pmod 4$는 $p = (a + bi)(a - bi)$로 **분해되고**(*splits*), 소수 $p \equiv 3 \pmod 4$는 계속 소수로 남는다. 예를 들어 $5 = (2 + i)(2 - i)$이지만, 3은 전혀 인수분해되지 않는다.

1990년에 돈 자기어(Don Zagier)는 단 한 문장으로 이루어진 것으로 유명한 두 제곱수 정리의 증명을 발표했다. 이 증명은 *Proofs from THE BOOK*에 설명과 함께 실려 있다.

고유한 소수를 가진 새로운 수 체계

가우스(Gauss)는 가우스 정수가 보통의 정수와 놀랄 만큼 비슷하게 행동한다는 것을 깨달았다. 나눗셈 알고리즘(division algorithm)과 유클리드 호제법(Euclidean algorithm)이 있고, 모든 가우스 정수는 (± 1 또는 $\pm i$를 곱하는 차이를 무시하면) 가우스 소수(Gaussian prime)들의 곱으로 **유일하게** 인수분해된다. 이것을 ($\star$)와 결합하면, 어떤 수의 소인수분해(prime factorisation)만으로 그 수를 두 제곱수의 합으로 나타내는 방법이 정확히 몇 가지인지 셀 수 있다.

대학에서 이것은 **대수적 정수론**(*algebraic number theory*)으로 들어가는 관문이 된다. 대수적 정수론은 보통의 자연수를 이해하기 위해 $\mathbb{Z}[i]$나 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$와 같은 수 체계를 연구한다. Section 1.7에서는 이 분야가 왜 만들어져야 했는지 보여 준다. 이런 수 체계가 모두 가우스 정수처럼 얌전하게 행동하지는 않기 때문이다.

네 제곱수와 그 너머

모든 양의 정수는 **네** 제곱수의 합이다(라그랑주(Lagrange), 1770년). 이 증명은 ($\star$)의 네 제곱수 버전에 기대는데, ($\star$)가 복소수에서 나오는 것과 같은 방식으로 이 식은 해밀턴(Hamilton)의 **사원수**(*quaternions*)에서 나온다. 이것은 Section 7.8에서 보게 될 것이다.

사고 기술

> **무대 바꾸기**
>
> 한 수 체계에서 다루기 어색한 문제가 더 큰 수 체계에서는 자연스러울 수 있다.
>
> 두 제곱수의 합은 정수에서는 다루기 어색하지만, 복소수에서는 그저 절댓값일 뿐이다. 수학자들은 끊임없이 이런 식으로 수 체계를 확장한다. 정수에서 유리수로, 유리수에서 실수로, 실수에서 복소수로. 확장할 때마다 오래된 문제 몇 가지가 쉬워진다.

더 도전하기

1 **걸림돌.** $4k+3$ 꼴의 수는 두 제곱수의 합이 될 수 없음을 보여라. (제곱수를 4로 나눈 나머지는 무엇인가?)

2 **두 가지 방법.** 65와 85를 각각 두 가지 서로 다른 방법으로 두 제곱수의 합으로 나타내고, 그 답을 가우스 정수를 이용하여 설명하여라.

3 **네 가지 방법.** $1105 = 5 \times 13 \times 17$이다. 1105를 두 양의 제곱수의 합으로 나타내는 서로 다른 방법 네 가지를 찾아라. 왜 네 가지일까?

4 **가우스 소수.** 심화 a, b, c, d가 정수이고 $3 = (a+bi)(c+di)$이면, 두 인수 중 하나의 절댓값이 1임을 보여라. (절댓값의 제곱을 취해 보아라.) 이로써 3이 가우스 소수임을 알 수 있다.

더 읽을거리

- **John Stillwell, *Elements of Number Theory*** (Springer). 역사와 함께 가우스 정수와 그 너머까지 차근차근 쌓아 올린다.
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***, 제 4장, "Representing numbers as sums of two squares"(수를 두 제곱수의 합으로 나타내기).
- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***, 제곱수의 합과 가우스 정수를 다루는 장들.

1.7 인수분해가 무너질 때

문제

STEP I 2016, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s1-q7`

도입

1보다 큰 모든 자연수는 소수(prime)의 곱으로 나타내는 방법이 정확히 한 가지뿐이다. 예를 들어 $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$이며, 다른 방법은 없다. 아마 이 사실을 너무 자주 써 왔기 때문에 증명할 필요조차 없을 만큼 당연하게 느껴질 것이다.

이 문제는 겉보기에는 아주 그럴듯하지만 그 "당연한" 사실이 성립하지 않는 작은 수의 세계를 만든다. STEP I 문제이므로 수학 자체는 어렵지 않지만, 여기서 얻는 교훈은 깊다. 바로 이 교훈이 1847년에 시도된 페르마의 마지막 정리(Fermat's Last Theorem)의 유명한 증명을 무너뜨렸고, 대수학의 새로운 분야 하나를 탄생시켰다.

시작하기 전에

생각해 보기 S와 T의 처음 몇 원소를 나열해 보자. 소문항 (iv)의 정의에 따르면 S의 원소 중 어느 것이 S-소수인가?

$S = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, \ldots\}$이고 $T = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, \ldots\}$이다. S에 속하는 수가 (1이 아닌) S의 더 작은 원소들의 곱으로 나타내어지지 않으면, 그 수를 S-소수라 한다. 보통의 정수에서는 $9 = 3 \times 3$이지만, 3이 S에 속하지 않으므로 9는 S-소수라는 점에 주목하자. 어떤 수가 "소수"인지는 어떤 수들을 쓸 수 있느냐에 달려 있다.

차근차근 풀기

1단계 합집합, 교집합, 곱

모든 홀수는 4로 나눈 나머지가 1 또는 3이므로, $S \cup T$는 모든 양의 홀수의 집합이다. 어떤 수도 서로 다른 두 나머지를 가질 수는 없으므로 $S \cap T$는 공집합이다.

> **생각해 보기** S의 일반적인 원소는 어떻게 나타낼까? 그런 원소 두 개의 곱은 무엇인가?

S의 원소는 $a \geq 0$에 대하여 $4a+1$ 꼴이고,

$$(4a+1)(4b+1) = 16ab + 4a + 4b + 1 = 4(4ab + a + b) + 1 \in S.$$

따라서 S는 곱셈에 대하여 닫혀 있다(closed under multiplication). T에 대해서는

$$(4a+3)(4b+3) = 16ab + 12a + 12b + 9 = 4(4ab + 3a + 3b + 2) + 1,$$

이므로 이 값은 T가 아니라 S에 속한다. 예를 들어 $3 \times 7 = 21 \in S$이다. 따라서 T는 곱셈에 대하여 닫혀 있지 않다.

2단계 T에 속하는 소인수

> **생각해 보기** T에 속하면서 소수가 아닌 수를 하나 잡자. 그 수의 소인수는 모두 홀수이다. 소인수가 모두 S에 속한다면 어떻게 될까?

이 수는 홀수이므로 그 소인수(prime factor)도 모두 홀수이고, 각각 S 또는 T에 속한다. 소인수가 **모두** S에 속한다면, S는 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로 그 곱도 S에 속한다. 그런데 그 곱은 바로 처음의 수이고, 이 수는 T에 속한다. 따라서 적어도 하나의 소인수는 T에 속한다. ■

3단계 홀수 개의 인수

> **생각해 보기** T의 원소를 짝수 개 곱하면 그 곱은 어디에 속할까? 홀수 개라면 어떨까?

T의 수 두 개를 곱하면 S의 수가 되고, S의 수끼리 곱하면 S의 수가 되므로, T의 인수가 짝수 개이면 곱은 S에 속한다. 홀수 개이면 곱은 (S에 속하는 수) $\times$ (T의 원소 하나)가 되고, 같은 종류의 계산에 의해 이는 T에 속한다.

이제 $t \in T$를 잡자. t가 T-소수이면 더 할 일이 없다. 그렇지 않으면 t를 T의 원소들의 곱으로 나타내는데, 각 원소는 1보다 크므로 t보다 작다. 이 중 T-소수가 아닌 것은 다시 더 분해

할 수 있고, 이를 계속 반복한다. 인수는 매번 더 작아지므로 이 과정은 언젠가 끝나고(이번에도 정렬성 원리(well-ordering)이다), 결국 t는 T-소수들의 곱으로 나타내어진다. 그 곱이 T에 속하므로 인수의 개수는 홀수여야 한다. ■

4단계 두 가지 인수분해

> **잠깐, 직접 해 보기** S-소수로의 인수분해가 본질적으로 서로 다른 두 가지인 S의 수를 찾아라. 힌트: 9처럼, 보통의 소인수가 S에 없기 때문에 비로소 S-소수가 되는 수를 이용하라.

S-소수는 $5, 9, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41, 49, \ldots$로 시작한다. 이제 $21 = 3 \times 7$, $9 = 3 \times 3$, $49 = 7 \times 7$은 모두 S-소수인데, 3과 7이 S에 속하지 않기 때문이다. 그리고

$$441 = 21 \times 21 = 9 \times 49.$$

이처럼 441은 S-소수로의 인수분해(factorisation)를 서로 다른 두 가지로 가진다(그림 1.7.1). S에서는 유일 인수분해(unique factorisation)가 성립하지 않는다. ■

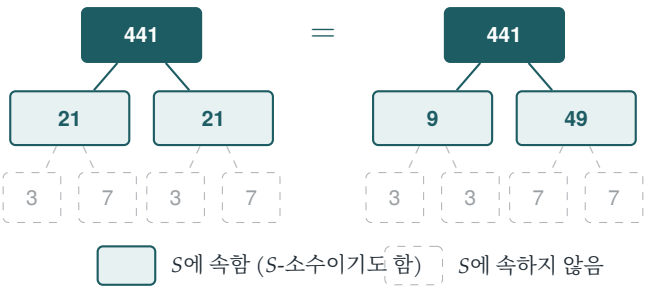


그림 1.7.1 441을 S-소수로 인수분해하는 두 가지 방법. 보통의 정수에서는 두 나무 모두 $3 \times 3 \times 7 \times 7$까지 내려가지만, 3과 7은 S에 속하지 않으므로 S 안에서는 인수분해가 둘째 줄에서 멈추고, 그 결과는 서로 다르다.

돌아보기

- **"소수"인지는 체계에 따라 달라진다.** 9와 21은 정수에서는 합성수(composite)이지만 S에서는 소수이다. 이들을 인수분해하는 데 필요한 수가 없기 때문이다.
- **닫혀 있는지가 중요하다.** S는 곱셈에 대하여 닫혀 있지만 T는 그렇지 않다. 이 하나의 차이가 소문항 (iii)과 (iv)를 이끌었다.
- **당연한 사실도 정리일 수 있다.** 정수에서 유일 인수분해가 성립한다는 것에는 증명이 필요하다. 이 문제가 그 이유를 보여 준다. 매우 비슷해 보이는 체계에서는 그것이 거짓이다.

숨은 수학

정수는 무엇이 특별한가

보통의 정수에서는 왜 인수분해가 잘 되는 것일까? 핵심이 되는 사실은 **유클리드의 보조정리**(Euclid's lemma)이다. 소수 p가 곱 ab를 나누면, p는 a를 나누거나 p는 b를 나눈다. 이 보조정리는 유클리드 호제법(Euclidean algorithm)을 이용하여 증명하며, 바로 이것이 S에서 성립하지 않는다. 거기서는 S-소수 9가 $21 \times 21 = 441$을 나누지만($441 = 9 \times 49$이므로), 9는 21을 S 안에서 나누지 않는다. 대학 1학년 때 유클리드의 보조정리를 엄밀하게 증명하고, 유일 인수분해가 그로부터 따라 나온다는 것을 보게 될 것이다.

페르마의 마지막 정리의 실패한 증명

1847년 3월 1일, 가브리엘 라메(Gabriel Lamé)는 파리 과학 아카데미(Paris Academy)에서 페르마의 마지막 정리를 증명했다고 발표했다. 그의 아이디어는 복소수 단위근(roots of unity)을 이용하여 $x^n + y^n$을

$$x^n + y^n = (x+y)(x+\zeta y)(x+\zeta^2 y)\cdots(x+\zeta^{n-1}y), \qquad \zeta = e^{2\pi \mathrm{i}/n}$$

(단, n은 홀수)과 같이 인수분해한 다음, 각 괄호의 소인수에 대해 논증하는 것이었다. 조제프 리우빌(Joseph Liouville)은 곧바로 이의를 제기했다. ζ로 만들어진 수들이 왜 유일하게 인수분해되어야 하는가? 몇 주 뒤, 에른스트 쿠머(Ernst Kummer)가 그런 수들이 유일하게 인수분해되지 않는 경우가 많다는 것을 이미 보였다는 사실이 밝혀졌다. 처음으로 실패하는 경우는 $n = 23$이다.

쿠머는 유일 인수분해를 회복시켜 주는 새로운 대상인 "아이디얼 수(ideal numbers)"를 고안하여 살릴 수 있는 것을 살려 냈고, 매우 많은 지수에 대해 페르마의 마지막 정리를 증명했다. 리하르트 데데킨트(Richard Dedekind)는 쿠머의 아이디얼 수를 현대 대수학의 핵심 개념 중 하나인 **아이디얼**(ideal)로 발전시켰다.

기억해 둘 만한 더 작은 예

수 체계 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$에서는

$$6 = 2 \times 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}),$$

이고, 네 인수는 모두 그 체계에서 "소수"이다(연습문제 3). 이를 인수분해가 **실제로** 유일한 Section 1.6의 가우스 정수(Gaussian integers)와 비교해 보자. 이런 종류의 체계 중 어떤 것에서 유일 인수분해가 성립하는지는 깊은 문제이다. 가우스(Gauss)는 $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ 꼴의 체계와 그와 가까운 체계들 가운데 이 성질을 가지는 것은 아홉 개뿐이라고 추측했다. 이 추측은 1952년부터 1967년 사이에 Heegner, Baker, Stark에 의해 마침내 증명되었다.

사고 기술

당연하게 여기는 것을 의심하기

어떤 사실이 너무 당연해서 증명할 필요가 없어 보일 때, 그것이 무엇에 의존하는지 묻고, 그것이 성립하지 않는 상황을 찾아보라.

반례(counterexample), 즉 "당연한" 사실이 거짓이 되는 세계를 만들어 보는 것은 증명에 정말로 필요한 것이 무엇인지 알아내는 가장 좋은 방법 중 하나이다. 학부 대수학의 상당 부분은 정수의 익숙한 성질 중 어떤 것이 더 일반적인 체계에서도 살아남는지를 묻는 일이다.

더 도전하기

1 **또 다른 예.** 693이 S-소수로의 인수분해를 서로 다른 두 가지로 가짐을 보여라. 이런 예를 만들어 내는 일반적인 방법을 찾을 수 있는가?

2 **짝수.** $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$라 하자. 어떤 수가 E-소수인가? 60이 E-소수로의 인수분해를 두 가지 이상 가짐을 보여라.

3 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. 노름(norm)을 $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$으로 정의하자. $N(zw) = N(z)N(w)$임을 보여라. 노름이 2 또는 3인 원소가 없음을 보여서, 2, 3, $1 \pm \sqrt{-5}$가 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$에서 더 이상 인수분해되지 않음을 유도하라.

4 **유클리드의 보조정리 활용.** 심화 유클리드의 보조정리(소수가 ab를 나누면 그 소수는 a 또는 b를 나눈다)를 가정하고, 1보다 큰 모든 정수는 인수의 순서를 무시하면 소수로의 인수분해를 단 하나만 가짐을 증명하라.

더 읽을거리

- **Ian Stewart & David Tall, *Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem*** (CRC Press). 앞부분의 장들에서 라메, 쿠머, 아이디얼의 이야기를 의욕 있는 대학 1학년 학생이 따라갈 수 있는 수준으로 들려준다.
- **John Stillwell, *Elements of Number Theory***. 정수와 가우스 정수에서의 유일 인수분해를 나란히 비교한다.
- **Harold Edwards, *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction*** (Springer). 야심 있는 독자를 위한 책으로, 쿠머의 업적을 그 역사를 통해 설명한다.

1.8 유리수 세기

문제

STEP III 2020, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip`

도입

양의 분수(fraction)를 모두 하나씩 차례로 나열하되, 모든 분수가 정확히 한 번씩 나타나게 할 수 있을까? 불가능해 보인다. 어떤 두 분수 사이에도 무수히 많은 분수가 있으므로, 받아 적을 "다음" 분수라는 것이 없기 때문이다. 그런데도 칸토어(Georg Cantor)는 1870년대에 이것이 가능하다는 것을 보였다. 이는 엄밀한 의미에서 분수가 자연수보다 많지 않다는 뜻이다.

칸토어의 목록은 깔끔하지 않았다. $\frac{1}{2}$뿐 아니라 $\frac{2}{4}$도 들어 있어서, 중복된 것은 지워야 했다. 이 문제는 터무니없이 간단한 규칙을 가진 수열로부터 중복이 전혀 없는 목록을 만든다. 이 목록은 2000년에 Neil Calkin과 Herbert Wilf가 발표했지만, 수열 자체는 1858년에 이미 Moritz Stern이 연구한 것이다.

시작하기 전에

생각해 보기 무엇이든 증명하기 전에 처음 열다섯 항 정도를 계산해 보자. 비 u_n/u_{n+1}에 대해 무엇을 알 수 있는가?

수열은 다음과 같이 시작하고

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1,\ 5,\ \ldots$$

비 u_n/u_{n+1}는 다음과 같다.

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{1},\ \ldots$$

모든 분수가 기약분수(lowest terms)로 나타나고, 어느 것도 중복되지 않는다. 문제는 이 현상이 끝없이 계속되며, 모든 양의 분수가 언젠가는 나타난다는 것을 증명하라고 요구한다.

차근차근 풀기

1단계 홀수 번째가 짝수 번째보다 크다

연속한 두 항은 (u_{2k}, u_{2k+1}) 꼴이거나 (u_{2k+1}, u_{2k+2}) 꼴이다.

> **생각해 보기** 이 두 쌍을 각각 u_k와 u_{k+1}로 나타내어 보자. 어느 항이 더 큰가?

$(u_{2k}, u_{2k+1}) = (u_k,\ u_k + u_{k+1})$이고 $(u_{2k+1}, u_{2k+2}) = (u_k + u_{k+1},\ u_{k+1})$이다. 모든 항이 양의 정수이므로(간단한 수학적 귀납법(induction)으로 보일 수 있다), $u_k + u_{k+1}$은 u_k와 u_{k+1}보다 모두 크다. 유일한 예외는 첫 번째 쌍 $(u_1, u_2) = (1, 1)$인데, u_1이 직접 정의되므로 이 쌍은 어느 꼴에도 맞지 않는다. ■

2단계 연속한 두 항은 서로소이다

> **생각해 보기** $d > 1$이 u_{2k}와 u_{2k+1}을 모두 나눈다고, 즉 u_k와 $u_k + u_{k+1}$을 모두 나눈다고 하자. d는 또 무엇을 나누는가?

d는 $(u_k + u_{k+1}) - u_k = u_{k+1}$을 나누므로, d는 수열에서 더 앞에 있는 연속한 쌍 u_k, u_{k+1}을 나눈다. 다른 경우도 똑같다. d가 $u_k + u_{k+1}$과 u_{k+1}을 나누면 u_k도 나눈다.

따라서 연속한 쌍의 공약수는 더 앞의 쌍으로 넘어가고, 다시 그보다 앞의 쌍으로 넘어가는 식으로 계속된다. 위치는 끝없이 줄어들 수 없으므로(이번에도 정렬 원리(well-ordering)이다), 결국 d는 첫 번째 쌍 $u_1 = u_2 = 1$을 나누어야 한다. 이는 $d > 1$일 때 불가능하다. 그러므로 연속한 모든 쌍은 서로소(coprime)이다. ■

3단계 같은 쌍은 두 번 나타나지 않는다

> **잠깐, 직접 해 보기** 1단계에서 유용한 사실을 알 수 있다. 연속한 쌍 (a, b)를 보면, a가 홀수 번째 위치에 있는지 짝수 번째 위치에 있는지 알 수 있다. 어떻게 알 수 있을까? 그렇다면 2단계의 의미에서 그 앞의 쌍을 되찾을 수 있을까?

$a < b$이면 (1단계에 의해) b가 홀수 번째 위치에 있으므로, 어떤 k에 대하여 이 쌍은 $(u_{2k}, u_{2k+1}) = (u_k, u_k + u_{k+1})$이고, "부모" 쌍 (u_k, u_{k+1})은 $(a,\ b - a)$이다. $a > b$이면 이 쌍은 (u_{2k+1}, u_{2k+2})이고 그 부모는 $(a - b,\ b)$이다. $a = b$이면 1단계에 의해 이 쌍은 맨 첫 번째 쌍 $(1, 1)$이어야 한다.

따라서 첫 번째 쌍을 제외한 연속한 각 쌍은 자신의 부모 쌍과 **부모의 위치**를 결정한다(이 구조를 그림 1.8.1에서 트리(tree)로 볼 수 있다). 자식이 $2k$나 $2k+1$번째에 있으면 부모는 k번째에 있다. 이제 (a,b)가 서로 다른 두 위치에 나타났다고 하자. 그러면 그 부모들은 두 위치에 있는 같은 쌍이 되고, 그들의 부모도 마찬가지이며, 이런 식으로 계속된다. 이를 거슬러 올라가면 결국 1이 아닌 위치에서 $(1,1)$을 찾게 되는데, 이는 1단계에 의해 불가능하다. ■

4단계 서로소인 모든 쌍이 나타난다

> ? **생각해 보기** 서로소인 어떤 쌍 (a,b)가 연속한 두 항으로 결코 나타나지 않는다고 하자. 그러한 쌍 중 어느 것을 살펴보아야 할까?

$a+b$의 값이 가장 작은 "빠진" 서로소 쌍, 즉 최소 반례(minimal counterexample)를 택하자. 이 쌍은 실제로 나타나는 $(1,1)$일 수 없으므로 $a \neq b$이다(서로소이면서 같으면 $a=b=1$이어야 한다).

- $a > b$인 경우: 쌍 $(a-b,b)$는 서로소이고($a-b$와 b의 공약수는 a를 나눈다), 그 합 a는 $a+b$보다 작다. 최소성에 의해 이 쌍은 나타나며, 그 위치를 $k, k+1$이라 하자. 그러면 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1} = a$이고 $u_{2k+2} = u_{k+1} = b$이므로, 결국 (a,b)가 나타난다.
- $a < b$인 경우: 마찬가지로 $(a,b-a)$가 어떤 $k, k+1$에 나타나고, 그러면 $(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,b)$이다.

어느 경우든 모순이다. 따라서 서로소인 양의 정수의 모든 쌍은 연속한 두 항으로 나타난다. ■

(문제에서는 (iv)를 무한강하법(descent)으로 표현한다. 빠진 쌍이 있으면 그보다 작은 빠진 쌍이 생긴다는 것이다. 이는 같은 논증을 반대 방향으로 읽은 것이다.)

5단계 모든 분수의 목록

모든 양의 유리수(rational number)는 a, b가 서로소인 기약분수 a/b로 유일하게 나타낼 수 있다. 4단계에 의해 (a,b)는 연속한 어떤 쌍 (u_n, u_{n+1})으로 나타나므로 $f(n) = a/b$이다. 즉 f의 치역(range)은 모든 양의 유리수이다. 3단계에 의해 이 쌍은 한 번만 나타나고, 2단계에 의해 모든 값 $f(n)$은 이미 기약분수이므로, 서로 다른 두 n이 같은 분수를 줄 수 없다. 그러므로 f는 양의 정수에서 양의 유리수로의 전단사 함수(bijection)이고, 역함수(inverse)를 가진다. ■

돌아보기

- **무한강하법과 그 역.** 공약수와 중복된 쌍은 수열의 처음으로 거슬러 추적했다. 빠진 쌍은 최소 반례를 이용해 앞으로 쌓아 나가며 다루었다.

- **전단사 함수에는 두 부분이 필요하다.** "모든 분수가 나타난다"(전사(onto))와 "어떤 분수도 두 번 나타나지 않는다"(단사(one-to-one))는 별개의 주장이며, 따로 증명했다.
- **먼저 계산하라.** 열다섯 항을 적어 보니 주장을 믿을 수 있게 되었고, 증명을 이끈 부모–자식 구조도 떠올릴 수 있었다.

숨은 수학

Calkin–Wilf 트리

양의 분수를 트리 모양으로 배열하자. 맨 위에 $\frac{1}{1}$을 놓고, 각 분수 $\frac{a}{b}$에 두 자식, 즉 왼쪽에 $\frac{a}{a+b}$, 오른쪽에 $\frac{a+b}{b}$를 준다. 트리를 한 줄씩 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으면 정확히 이 문제의 목록 $f(1), f(2), f(3), \ldots$이 된다(그림 1.8.1). 3단계는 모든 분수가 유일한 부모를 가진다는 것이고, 4단계는 모든 분수가 트리 안에 있다는 것이다. 2003년에 Moshe Newman은 트리조차 필요 없다는 것을 발견했다. 목록의 각 분수는 바로 앞의 분수로부터 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor - x_n + 1}.$$

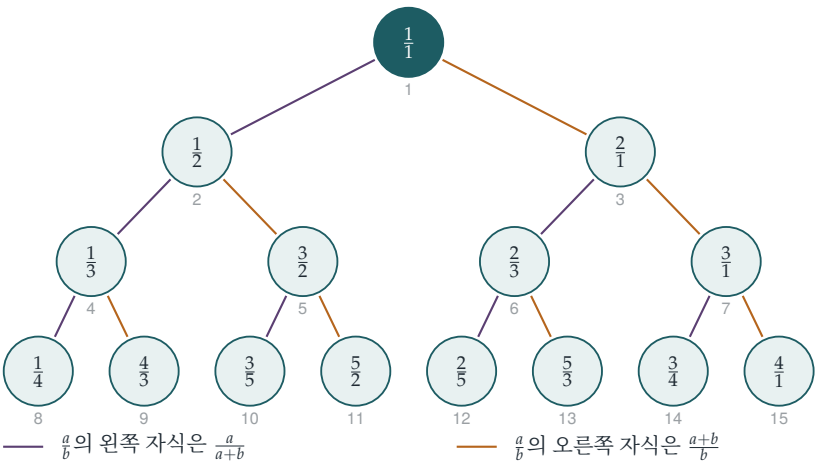


그림 1.8.1 Calkin–Wilf 트리의 처음 네 줄. 한 줄씩 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으면 $f(1), f(2), f(3), \ldots$이 된다. 작은 회색 숫자는 위치 n이다. 모든 양의 분수가 기약분수로 정확히 한 번씩 나타난다.

무한의 서로 다른 크기

이처럼 나열할 수 있는 집합을 **가산**(countable) 집합이라 한다. 분수는 가산인데, 분수가 자연수보다 훨씬 많아 보이므로 이는 놀라운 일이다. 대학 첫 학기에는 칸토어의 **대각선 논**

법(diagonal argument)도 배우게 되는데, 이 논법은 **실수**(real number)가 가산이 아님을 보여 준다. 즉 실수의 어떤 목록이든 반드시 빠뜨리는 실수가 있다. 따라서 무한에는 정말로 서로 다른 크기가 있으며, 실수는 유리수보다 진짜로 더 큰 무한을 이룬다. 이것은 대학 1학년 과정에서 만나게 될 가장 놀라운 결과 중 하나이다.

Stern 수열

수열 u_n은 *Stern*의 **이원자 수열**(Stern's diatomic sequence)이며, 다른 곳에서도 여러 모습으로 등장한다. 예를 들어 u_{n+1}은 각 거듭제곱을 많아야 두 번 사용하여 n을 2의 거듭제곱의 합으로 나타내는 방법의 수이다. 이 수열은 *Stern–Brocot* **트리**(Stern–Brocot tree), 그리고 무리수에 대한 최良의 유리수 근삿값을 주는 연분수(continued fraction)와도 밀접하게 관련되어 있다.

사고 기술

전단사 함수 만들기

두 집합의 크기가 같음을 보이려면 두 집합을 정확히 짝지어라. 즉 목표 집합의 모든 원소가 대응됨(전사)과 어떤 원소도 두 번 대응되지 않음(단사)을 증명하라.

전단사 함수는 유한이든 무한이든 셈의 기초이며, 대학에서 끊임없이 사용하게 된다. 여기서는 두 부분 모두 구조를 출발점까지 거슬러 추적하여 증명했다.

더 도전하기

1 **분수 찾기.** 어떤 n에 대하여 $f(n) = \frac{3}{5}$인가? 또 $f(n) = \frac{5}{3}$인 n은? 부모 규칙을 이용해 $\frac{1}{1}$까지 거슬러 올라가 보라.

2 **Newman의 공식.** $x_1 = 1$에서 시작하여 Newman의 공식이 목록의 처음 열 개의 분수를 만들어 냄을 확인하라.

3 **칸토어의 대각선 논법.** 0과 1 사이의 모든 실수를 소수로 적은 목록이 있다고 하자. 목록의 n번째 수와 n번째 자리가 다른 소수를 만들어라. 이것이 왜 목록이 불완전함을 보여 주는가? ($0.0999\ldots = 0.1$과 같은 소수에는 어떤 주의가 필요한가?)

4 **가산 합집합.** 심화 양의 정수의 모든 쌍 (m, n)의 집합이 가산임을, 양의 정수와의 전단사 함수를 명시적으로 제시하여 보여라. ($2^{m-1}(2n-1)$을 시도해 보라.)

더 읽을거리

- **Neil Calkin & Herbert Wilf, "Recounting the rationals"** (*American Mathematical Monthly*, 2000). 유리수 다시 세기. 네 쪽 분량이며, 전부 읽을 만하다.
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***, 제 17장 "Sets, functions, and the continuum hypothesis"(집합, 함수, 연속체 가설). Calkin–Wilf 트리를 다룬다.
- **Ian Stewart & David Tall, *The Foundations of Mathematics*** (Oxford University Press). 대학 1학년 과정에서처럼 가산성, 칸토어, 실수를 다룬다.

1.9 삼차곡선의 접선

문제

STEP I 2009, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/09-s1-q2`

도입

얼핏 보면 평범한 좌표기하 문제이다. 미분하고, 접선(tangent)을 구하고, 삼차방정식을 푼다. 그런데 마지막 줄에서 세 세제곱수의 합이 되는 세제곱수를 찾으라고 하고, 기하가 마치 마법처럼 그런 수를 만들어 낸다.

곡선 위의 이미 아는 점을 지나는 직선을 그어 새로운 점을 찾는 이 기법은 3세기 알렉산드리아의 디오판토스(Diophantus)까지 거슬러 올라간다. 현대에 와서 이 기법은 **타원곡선**(*elliptic curves*) 이론으로 발전했다. 타원곡선은 오늘날 정수론의 한가운데에 있고, 페르마의 마지막 정리(Fermat's Last Theorem)의 증명을 떠받치며, 전 세계 인터넷 통신의 상당 부분을 안전하게 지킨다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 점 $(-a, b)$는 곡선 위에 있다. 왜 그런가? 그리고 이것이 세제곱수의 합과 무슨 관계가 있는가?

대입하면 $(-a)^3 + a^3 + b^3 = b^3$이므로 그렇다. $y^3 = x^3 + a^3 + b^3$ 위에서 좌표가 **유리수**(*rational*)인 점이 바로 우리가 원하는 것이다. $x = q/s', y = p/s'$이면 분모를 없앴을 때 세제곱수들 사이의 관계식이 나오기 때문이다. 계획은 쉬운 점 하나에서 출발하여 기하를 이용해 덜 뻔한 점을 찾는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 접선

$y^3 = x^3 + a^3 + b^3$을 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $3y^2 \dfrac{dy}{dx} = 3x^2$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$이다. $(-a, b)$에서 기울기는 a^2/b^2이므로 접선은

$$y - b = \frac{a^2}{b^2}(x + a) \quad \Longrightarrow \quad b^2 y - b^3 = a^2 x + a^3 \quad \Longrightarrow \quad b^2 y - a^2 x = a^3 + b^3. \qquad \blacksquare$$

2단계 접선이 곡선과 다시 만나는 곳

$a = 1$, $b = 2$일 때 곡선은 $y^3 = x^3 + 9$이고, $(-1, 2)$에서의 접선은 $4y - x = 9$, 즉 $y = \dfrac{x+9}{4}$이다. 이를 곡선의 식에 대입하면

$$\frac{(x+9)^3}{64} = x^3 + 9 \quad \Longrightarrow \quad x^3 + 27x^2 + 243x + 729 = 64x^3 + 576,$$

이고, 정리하면 $63x^3 - 27x^2 - 243x - 153 = 0$이다. 양변을 9로 나누면 $7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = 0$을 얻는다. $\blacksquare$

3단계 삼차방정식 풀기

> **생각해 보기** 이 삼차방정식의 근 하나는 계산하지 않아도 이미 알고 있다. 그 근은 무엇이며, 왜 두 번 나타나야 하는가?

접선은 $x = -1$에서 곡선에 접하고(그림 1.9.1), "접한다"는 것은 중근(repeated root)을 뜻한다. 포물선의 접선이 포물선과 이차방정식의 중근에서 만나는 것과 같다. 따라서 $(x+1)^2$이 인수여야 한다. 확인해 보면 $7(-1)^3 - 3(1) - 27(-1) - 17 = -7 - 3 + 27 - 17 = 0$이고, 도함수 $21x^2 - 6x - 27$도 $x = -1$에서 0이 된다. 나누어 보면

$$7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = (x+1)^2(7x - 17).$$

> **잠깐, 직접 해 보기** 따라서 접선은 $x = \frac{17}{7}$에서 곡선과 다시 만난다. y를 구하고, 이 점을 세제곱수들 사이의 관계식으로 바꾸어 보아라.

$y = \dfrac{17/7 + 9}{4} = \dfrac{80/7}{4} = \dfrac{20}{7}$이다. 점 $\left(\frac{17}{7}, \frac{20}{7}\right)$은 $y^3 = x^3 + 9$ 위에 있으므로

$$\frac{20^3}{7^3} = \frac{17^3}{7^3} + 9 \quad \Longrightarrow \quad 20^3 = 17^3 + 9 \times 7^3.$$

생각해 보기 9×7^3을 두 세제곱수의 합으로 나타내고 싶다. 9가 어디에서 왔는지 떠올려 보아라.

$9 = a^3 + b^3 = 1^3 + 2^3$이므로 $9 \times 7^3 = 7^3 + 14^3$이다. 따라서

$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3.$$

검산: $8000 = 4913 + 2744 + 343$. ■

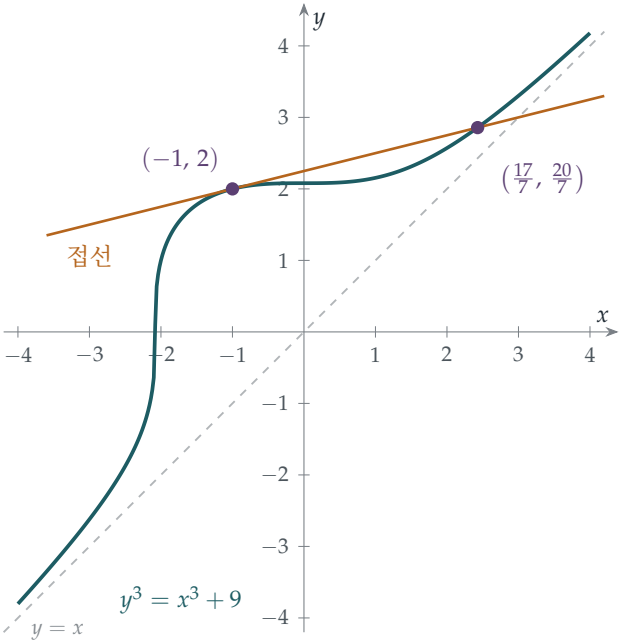


그림 1.9.1 곡선 $y^3 = x^3 + 9$(청록색)는 원점에서 멀어질수록 직선 $y = x$에 가까워진다. 유리점 $(-1, 2)$에서의 접선(호박색)은 그 점에서 곡선에 접하는데, 이는 두 번 만나는 것으로 센다. 그리고 접선은 또 다른 유리점 $\left(\frac{17}{7}, \frac{20}{7}\right)$에서 곡선과 한 번 더 만난다.

돌아보기

- **접한다는 것은 중근을 뜻한다.** 덕분에 뻔한 근이 없어 보이던 삼차방정식을 곧바로 인수분해할 수 있었다.
- **새 근은 저절로 유리수가 된다.** 세 근 중 두 근이 유리수이면(여기서는 둘 다 -1), 근의 합 $\frac{3}{7}$이 유리수이므로 나머지 한 근도 유리수여야 한다. 이것이 이 방법의 핵심이다.
- **기하가 산술을 만들어 냈다.** 우리는 세제곱수를 찾아 헤맨 적이 없다. 접선 하나가 그것을 찾아 주었다.

숨은 수학

할선–접선 방법

$y^3 = x^3 + 9$나 더 표준적인 꼴인 $y^2 = x^3 + Ax + B$ 같은 삼차곡선을 생각하자. 그 위에서 좌표가 유리수인 두 점을 알면, 두 점을 지나는 직선은 곡선과 정확히 한 점에서 더 만나고, 그 점의 좌표도 유리수이다(**돌아보기**의 논증에 의해). 한 점만 알 때에는 그 점에서의 접선을 대신 쓴다. 어느 쪽이든 기존의 유리점에서 새로운 유리점이 만들어진다.

놀랍게도 이 "할선–접선(chord–tangent)" 작도는 곡선 위의 점들을 **더하는** 방법으로 바꿀 수 있고, 그러면 유리점들은 **군**(*group*)을 이룬다. 군은 대학 1학년 때 배우게 될 대수적 구조이다. 1922년 Louis Mordell은 이 군이 유한개의 점으로 생성된다는 것을 증명했다. 즉 유리점이 아무리 많더라도 모두 유한집합에서 출발하여 할선과 접선으로 만들어 낼 수 있다. 그의 증명은 Section 1.5에서 다룬 페르마의 강하법(descent)의 한 형태이다.

오늘날의 타원곡선

이런 곡선을 **타원곡선**이라고 부른다(타원이어서가 아니라, 타원의 호의 길이와 역사적으로 연관되어 있기 때문이다). 타원곡선은 현대 수학 곳곳에 등장한다.

- **페르마의 마지막 정리.** 1980년대에 Gerhard Frey는 $x^n + y^n = z^n$의 해가 있다면 매우 이상한 타원곡선이 만들어진다는 것을 알아차렸다. 1994년 앤드루 와일스(Andrew Wiles)는 그런 이상한 곡선이 존재할 수 없음을 증명했고, 그리하여 페르마의 마지막 정리를 증명했다.
- **버치–스위너턴다이어 추측.** 유리점들의 군에는 생성원(generator)이 몇 개 필요할까? 1960년대에 케임브리지에서 수학 역사상 가장 이른 컴퓨터 실험 중 일부를 이용하여 세워진 추측(conjecture)은, 소수(prime)를 법으로 하여 점의 개수를 세어 만든 함수를 통해 그 답을 예측한다. 이 버치–스위너턴다이어 추측(Birch and Swinnerton-Dyer conjecture)은 7대 밀레니엄 문제(Millennium Prize Problems) 가운데 하나이다.
- **암호학.** 유한한 수 체계 위의 타원곡선에서는 점 P를 자기 자신에 n번 더하는 계산이 빠르다. n이 수백 자리 수라도 그렇다(거듭제곱을 반복 제곱으로 계산하듯 P를 거듭 두 배 하면 된다). 그러나 P와 결과 nP가 주어졌을 때 n을 찾는 것은 극도로 어려운 것으로 보인다. 이것이 **타원곡선 이산 로그 문제**(*elliptic-curve discrete logarithm problem*)이다. 이 비대칭성이 오늘날 온라인 통신의 상당 부분을 보호한다.

같은 차수의 거듭제곱의 합

세 양의 세제곱수의 합이 되는 가장 작은 세제곱수는 $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$이다. 접선 방법으로 찾은 $20^3 = 7^3 + 14^3 + 17^3$은 이것의 배수가 아니며, 이 방법을 되풀이하면 새로운 항등식이 계속 나온다(다만 음수가 섞인 것도 있다). 어떤 k제곱수를 만들려면 k제곱수가 몇 개 필요할까? 오일러(Euler)는 1769년에 다른 k제곱수를 만들려면 적어도 k개의 k제곱수가 필요하다고 추측했다. 네제곱과 다섯제곱에 대해서는 이 추측이 틀렸다. 1966년 Leon Lander와 Thomas Parkin은 컴퓨터 탐색으로

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

를 찾았고, 1988년 Noam Elkies는 타원곡선을 이용해 네제곱에 대한 반례를 찾았다.

사고 기술

> **산술을 푸는 기하**
>
> 방정식의 정수해나 유리수해를 찾으려면, 방정식을 곡선으로 보고 이미 아는 점을 지나는 직선을 찾아보아라.
>
> 그 뒤에 있는 대수는 간단하다. 유리수 계수 다항식의 근이 하나를 빼고 모두 유리수이면, 마지막 근도 유리수이다. 이처럼 그림과 방정식 사이를 오가는 것은 수학자가 지닐 수 있는 가장 강력한 습관 가운데 하나이다.

더 도전하기

1 **원 위의 유리점.** $(-1, 0)$을 지나고 기울기가 t인 직선은 원 $x^2 + y^2 = 1$과 다시 만난다. 다른 교점이 $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$임을 보이고, 이를 이용하여 피타고라스 세 쌍(Pythagorean triples)을 무수히 많이 만들어라.

2 **빗나가는 할선.** 점 $(1, 2)$와 $(2, 1)$은 $x^3 + y^3 = 9$ 위에 있다. 두 점을 지나는 직선이 곡선과 다른 점에서 만나지 않음을 보여라. "세 번째 점"은 어디로 갔을까? (**무한원점**(*point at infinity*)을 찾아보아라.)

3 **기법을 되풀이하기.** $\left(\frac{17}{7}, \frac{20}{7}\right)$에서 $y^3 = x^3 + 9$의 접선을 구하고, 그 접선이 곡선과 만나는 세 번째 점을 구하여라. (컴퓨터 대수 시스템이 도움이 된다. 수가 얼마나 빨리 커지는지 살펴보아라.)

4 **택시 수.** $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$이다. $(1, 12)$와 $(9, 10)$을 지나는 직선이 곡선 $x^3 + y^3 = 1729$와 만나는 세 번째 점을 구하고, 이로부터 $p^3 = q^3 + r^3 + s^3$ 꼴의 새로운 항등식을 이끌어 내어라.

더 읽을거리

- **Joseph Silverman & John Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*** (Springer). 『타원곡선 위의 유리점』. 학부생을 위해 쓰인 책으로, 1장은 A 레벨(A level, 영국의 대학 입시 과목 시험) 이상의 지식이 필요하지 않다.
- **Avner Ash & Robert Gross, *Elliptic Tales*** (Princeton University Press). 『타원 이야기』. 버치–스위너턴다이어 추측까지 이어지는 대중서이다.
- **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem***. 『페르마의 마지막 정리』. 타원곡선이 어떻게 350년 묵은 문제를 풀게 되었는지 들려준다.

우리가 배운 것

이 장을 시작하면서 우리는 자연수에 관한 세 가지 질문을 던졌고, 그 밑에 흐르는 네 번째 주제, 곧 무언가를 어떻게 증명(proof)하는가를 다루겠다고 약속했다. 이제 아홉 개의 STEP 문제가 우리를 얼마나 멀리 데려왔는지 살펴볼 때이다.

1. 소수는 얼마나 많고, 어떻게 분포하는가?

Section 1.1에서 우리는 새로운 소수(prime)를 하나도 찾지 않고 소수가 무한히 많다는 것을 증명하였다. 서로 공약수를 갖지 않는 수들의 무한한 모임인 페르마 수(Fermat numbers)를 만들었으므로, 각각의 수에는 자기만의 소수가 하나씩 필요하다. 이것은 크기가 아니라 **구조**에 관한 증명이다.

Section 1.2에서는 한 걸음 더 나아가 n 이하의 모든 소수의 곱이 4^n보다 작다는 것을 보였다. 이것은 우리의 첫 번째 **정량적** 명제였다. 즉 소수가 얼마나 빽빽하게 들어찰 수 있는지에 한계를 준다. 로그(logarithm)를 취하면 이 명제는 $\sum_{p \le n} \ln p < 1.39\, n$이 되는데, 소수 정리(Prime Number Theorem)에 따르면 실제 값은 약 n이다. 우리의 STEP 수준 논증이 이미 올바른 범위에 들어와 있었던 것이다.

우리가 **하지 않은** 것은 소수가 정확히 어떻게 분포하는지를 밝히는 일이다. 이는 리만(Riemann) 제타 함수(zeta function)가 좌우하며, 이를 정밀하게 만드는 것이 수학에서 가장 유명한 미해결 문제인 리만 가설(Riemann Hypothesis)이다. 여러분은 이제 그것이 무엇에 관한 문제인지 이해할 만큼은 알고 있다.

2. 어떤 수가 분수가 아님을 어떻게 증명할 수 있는가?

우리는 꽤 서로 다른 세 가지 방법을 찾았다.

- **가장 작은 것을 택하라** (Section 1.3). $\sqrt{2}$가 분수(fraction)라면 $k\sqrt{2}$를 정수로 만드는 가장 작은 양의 정수 k가 존재할 것이다. 그런데 그러면 $(\sqrt{2}-1)k$가 더 작은 그런 수가 된다. 같은 논증으로 세제곱근도 다루었다.
- **0과 1 사이에 정수를 가두어라** (Section 1.4). e나 e^2이 분수라면, 계승(factorial)을 곱했을 때 0과 1 사이에 엄격하게 놓인 정수가 생겨난다. 이것이 e와 π가 초월수(transcendental)임을 보인 에르미트(Hermite)와 린데만(Lindemann)의 증명 밑에 깔린 아이디어이다.

- **불가능한 나누어떨어짐을 찾아라** (Section 1.5, 연습문제 3). $x^2 + y^2 = 3$ 위에 유리점(rational point)이 없음을 보이는 것은, x가 유리수일 때 $\sqrt{3 - x^2}$이 결코 유리수가 아님을 보이는 것과 같다.

그리고 우리는 아직 모르는 것이 얼마나 많은지도 배웠다. 아직 아무도 $e + \pi$가 무리수(irrational)임을 증명하지 못했다.

3. 어떤 방정식이 정수해를 갖는가?

때로는 답이 **하나도 없다**이며, Section 1.5에서는 이를 증명하는 페르마의 방법을 보였다. 어떤 해든 그보다 작은 해를 만들어 내고, 이것이 끝없이 이어진다는 것이다. 잘 고른 소수를 법(modulo)으로 하여 계산하면 어떤 나누어떨어짐을 이용해야 하는지 알 수 있었다.

때로는 답이 **있다, 그리고 여기 해를 만들어 내는 기계가 있다**이다. Section 1.6에서는 복소수(complex numbers)가 두 제곱수의 합을 곱셈 규칙으로 바꾸어 주었다. Section 1.9에서는 3차 곡선(cubic curve)의 접선(tangent line)이 $20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3$을 만들어 냈다.

그리고 때로는 **수 체계를 바꾸는 것**이 올바른 수이다. 가우스(Gauss) 정수(Gaussian integers)는 두 제곱수의 합을 쉽게 만들어 주었다. 그러나 Section 1.7는 경고를 주었다. 완벽하게 그럴듯해 보이는 체계에서도 수가 서로 다른 두 가지 방식으로 "소수"의 곱으로 인수분해될 수 있다는 것이다. 1847년에 무시되었던 이 경고는 아이디얼(ideal)의 발명과 현대 대수학으로 이어졌다.

Section 1.8는 나름의 반전을 더했다. 자연수보다 훨씬 많아 보이는 분수들도 하나씩 나열할 수 있다는 것이다. 무한은 처음 보이는 것보다 더 많은 구조를 지니고 있다.

4. 증명의 도구 상자

다음은 이 장에서 여러분이 사용한 방법들이다. 이들 모두가 대학 수학 과정에서 거듭거듭 다시 등장할 것이다.

방법	사용한 곳
수학적 귀납법(induction)과 강한 귀납법(strong induction)	페르마 수(1.1); 소수의 곱(1.2)
정렬 원리(well-ordering), 최소 반례(minimal counterexample)	$\sqrt{2}$와 $\sqrt[3]{2}$(1.3); 분수 나열하기(1.8)
무한 강하법(infinite descent)	불가능한 방정식(1.5); 서로소(coprime)인 쌍(1.8)
귀류법(proof by contradiction)	전반에 걸쳐, 특히 1.3과 1.4
n을 법으로 하는 계산	1.5; 1.7
상계 잡기와 조이기(bounding and squeezing)	1.2; 1.4
전단사(bijection) 만들기	1.8
반례(counterexample) 구성하기	유일하지 않은 인수분해(1.7)
배경 바꾸기	복소수(1.6); 기하(1.9)

문제들을 돌아보면, STEP 출제자들이 종종 첫 단계를 알려 주었다는 것을 알아차릴 것이다. "이항전개(binomial expansion)를 고려하여...", "복소수 $2+\mathrm{i}$와 $10+11\mathrm{i}$를 고려하여..." 같은 식이다. 대학에서는 그런 도움이 점차 사라지고, 올바른 첫 단계를 **찾아내는** 것이 바로 기술이 된다. 가장 좋은 준비는 여러분이 지금까지 해 온 바로 그것이다. 문제를 다 풀고 나면 그 힌트가 **왜** 통했는지 물어보라. 그래야 다음번에는 스스로 그것을 떠올릴 수 있다.

다음은 어디로

이 장의 여러 실마리가 이 책의 다른 곳에서 이어진다.

- 분수에 의한 e의 근사는 Section 2.9에서, 리만 제타 함수는 Section 2.4에서 다시 등장하며, 그곳에서 $\zeta(2) = \pi^2/6$을 다룬다.
- 라메(Lamé)의 실패한 증명에 등장했던 단위근(roots of unity)은 Chapter 5의 주제이며, Section 1.1에서 약속한 가우스의 정17각형 작도는 Section 6.2에서 다룬다.
- Section 1.6에 나온 항등식의 네 제곱수 버전은 사원수(quaternions)를 통해 Section 7.8에 등장한다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***(고등 산술): 초등 정수론(number theory)에 대한 단 한 권의 입문서로 가장 좋은 책이다.
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***(하늘책의 증명): 1–4장, 8장, 17장이 이 장과 직접 연결된다.

- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***(친절한 정수론 입문): 여기 나온 거의 모든 내용과 그 이상을 느긋한 속도로 다룬다.
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***(소수의 음악)와 **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem***(페르마의 마지막 정리): 수학 뒤에 숨은 사람들의 이야기이다.

정수론은 사람들을 끌어들이는 버릇이 있다. 그 질문들은 첫날에 던질 수 있을 만큼 단순하면서도, 평생을 바칠 만큼 깊다. 이 절들 가운데 몇몇이 여러분에게 그다음에 무슨 일이 일어나는지 알고 싶게 만들었다면, 그것이 바로 이 책이 노린 바이다.

더 도전하기 해답

여기에 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 제대로 풀어 보라.

1.1 소수 공장

1. $p_1, \ldots, p_k$가 소수(prime) 전부라고 가정하자. 그러면 $p_1 \cdots p_k + 1$은 이 목록에 없는 소인수(prime factor)를 가지므로 모순(contradiction)이다. 페르마 수(Fermat number)를 이용한 증명은 구성적(constructive)이다. 이 증명은 쌍마다 서로소(pairwise coprime)인 수 $F_0, F_1, \ldots$을 무한히 많이 제시하고, 이들 각각이 새로운 소수를 하나씩 제공한다.

2. $n \geq 2$이면 2^n은 4의 배수이므로 $2^{2^n} = 16^{2^{n-2}}$이고, 16의 거듭제곱은 모두 일의 자리가 6이다. 따라서 F_n의 일의 자리는 7이다.

3. (a) 수학적 귀납법(induction): $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) = a_n \cdot a_1 \cdots a_{n-1}$. (b) a_m과 a_n $(m < n)$의 공약수는 $a_1 \cdots a_{n-1} = a_n - 1$과 a_n을 모두 나누므로 1이다. 따라서 각 항은 다른 어떤 항과도 공유하지 않는 소인수를 가진다. (c) $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$이고, 이 합은 망원급수(telescoping series)처럼 소거되어 $1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$이 된다.

4. (a) $p \mid F_n$이면 $2^{2^n} \equiv -1$이고, 양변을 제곱하면 $2^{2^{n+1}} \equiv 1$이다. (b) d는 $2^e \equiv 1$을 만족하는 모든 e를 나누므로 $d \mid 2^{n+1}$이다. 한편 $2^{2^n} \equiv -1 \not\equiv 1$이므로($p$가 홀수이므로) $d \nmid 2^n$이다. 따라서 $d = 2^{n+1}$이다. (c) $2^{p-1} \equiv 1$이므로 $2^{n+1} \mid p - 1$이다. (d) $641 = 64 \times 10 + 1$이다. 641보다 작은 $64k + 1$ 꼴의 소수는 193, 257, 449, 577이다. 시험해 볼 후보가 네 개뿐이며, 오일러(Euler)는 이렇게 하여 641을 찾았다.

5. n번째 소수는 $F_0, \ldots, F_{n-1}$의 소인수 중 가장 큰 것 이하이므로 $p_n \leq F_{n-1} = 2^{2^{n-1}} + 1$이다. $n = 5$일 때 이 상계는 65 537인데 $p_5 = 11$이다. 옳은 부등식이지만 극도로 약하다.

1.2 소수는 얼마나 드문드문 흩어져 있는가?

1. $P_{1,10} = 210$, $P_{1,20} = 9\,699\,690$, $P_{1,30} = 6\,469\,693\,230$이다. $4^{30} \approx 1.15 \times 10^{18}$, $e^{30} \approx 1.07 \times 10^{13}$과 비교해 보자. 이 곱은 4^n보다 훨씬 작고 대략 e^n처럼 증가한다(실제로

$\ln P_{1,n} \sim n$이며, 이는 소수 정리(Prime Number Theorem)의 한 형태이다).

2. $\binom{2m}{k+1}/\binom{2m}{k} = \frac{2m-k}{k+1}$이고, 이 값은 정확히 $k < m$일 때 1보다 크다. 따라서 이항계수(binomial coefficient)는 가운데까지 증가했다가 그 뒤로 감소한다. 합이 4^m인 $2m+1$개의 항 중 가장 큰 것은 이들의 평균 이상이다.

3. $(\sqrt{n}, n]$에 있는 소수는 각각 $\sqrt{n}$보다 크고 그 곱은 4^n보다 작으므로 $(\sqrt{n})^{\pi(n)-\pi(\sqrt{n})} < 4^n$이다. 양변에 로그를 취하라. $2\ln 4 \approx 2.77$이고 $\pi(\sqrt{n}) \le \sqrt{n}$이므로 원하는 부등식이 따라 나온다. 이 상계는 올바른 꼴 $n/\ln n$을 가지며, 다만 상수가 참값 1 대신 2.8이다.

4. 각각 바로 앞 소수의 두 배보다 작은 소수 $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83$을 사용한다. $n \le 50$인 임의의 n에 대해, 이 목록에서 n보다 큰 첫 소수는 바로 앞 소수의 두 배보다 작고, 그 앞 소수는 n 이하이므로, 이 소수는 n과 $2n$ 사이에 있다.

1.3 가장 작은 반례

1. $k\sqrt{3}$이 정수가 되는 가장 작은 양의 정수 k가 있다면, $k' = (\sqrt{3}-1)k$는 더 작은 양의 정수이고 $k'\sqrt{3} = 3k - k\sqrt{3}$도 정수이다. 여기서는 $\sqrt{3}-1$이 $\sqrt{2}-1$의 역할을 한다.

2. $0 < \sqrt{N} - m < 1$이면 $k' = (\sqrt{N}-m)k$는 k보다 작은 양의 정수이고, $k'\sqrt{N} = kN - mk\sqrt{N}$은 정수이므로 모순이다.

3. $N = 4$이면 $m = 2 = \sqrt{4}$이므로 $\sqrt{N} - m = 0$이고, $k' = 0$은 양의 정수가 아니다. "$0 < \sqrt{N} - m$"이라는 단계가 성립하지 않는다.

4. 그림에서, 한 변이 a인 정사각형 안에 겹쳐 놓인 한 변이 b인 두 정사각형은 한 변이 $2b - a$인 가운데 정사각형을 두 번 덮고, 한 변이 $a - b$인 두 정사각형을 덮지 않은 채로 남긴다. 식으로 쓰면 $(2b-a)^2 - 2(a-b)^2 = 2b^2 - a^2 = 0$이다.

1.4 e는 무리수이고, e^2도 그렇다

1. $\frac{1}{e} = \frac{p}{q}$라면 $\frac{1}{e} = \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{k!}$의 양변에 $q!$을 곱한다. $k \le q$인 항은 정수이고, 꼬리 $\sum_{k>q}(-1)^k q!/k!$는 항의 크기가 감소하는 교대급수(alternating series)이므로 그 절댓값은 0과 $\frac{1}{q+1}$ 사이에 엄격하게 놓인다. 따라서 $q!/e$는 정수가 아니므로 모순이다.

2. $\sin 1 = \frac{p}{q}$라면 $2n+1 \ge q$인 $(2n+1)!$을 곱한다. 좌변은 정수이고, 급수의 항 중 $\frac{1}{(2n+1)!}$까지도 정수가 된다. 꼬리는 첫 항의 크기가 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 1$인 교대급수이므로 정수가 아니다.

3. 이 방법에는 $\frac{1}{k!}$처럼 꼬리가 분모가 커지는 속도보다 빨리 줄어드는, 유리수(rational) 항으로 이루어진 급수가 필요한데, π에 대해서는 그런 급수가 알려져 있지 않다. 니븐(Niven)의 증명은 $\int_0^{\pi} \frac{x^n(\pi-x)^n}{n!}\sin x\,\mathrm{d}x$를 이용한다. π가 유리수라면 큰 n에 대해

이 값은 1보다 작은 양의 정수가 되어야 한다.

4. $x^2 - (e+\pi)x + e\pi$의 근은 e와 π이다. $e+\pi$와 $e\pi$가 모두 대수적(algebraic)이라면 π는 대수적 계수를 갖는 다항식의 근이 되므로 대수적 수가 되어, 린데만 정리(Lindemann's theorem)에 모순이다.

1.5 무한 강하법

1. $3 \mid a$이다. $a = 3a_1$로 쓰면 $9a_1^3 + b^3 = 3c^3$이므로 $3 \mid b$이고, 그러면 $3a_1^3 + 9b_1^3 = c^3$이므로 $3 \mid c$이다. 따라서 (a_1, b_1, c_1)은 더 작은 해이며, 이것이 무한 강하법(descent)이다. $p^4 + 2q^4 = 5r^4$의 경우: 네제곱수는 5를 법으로(modulo) 0 또는 1이다(일의 자리가 0, 1, 5, 6 중 하나이다). 따라서 $p^4 + 2q^4 \equiv 0$이면 $5 \mid p$이고 $5 \mid q$이어야 한다. 그러면 $5^4 \mid 5r^4$이므로 $5 \mid r$이고, 다시 무한 강하법을 적용한다.

2. 제곱수는 4를 법으로 0 또는 1이므로 $x^2 + y^2$은 0, 1, 2 중 하나이고 결코 3이 아니다.

3. 유리점(rational point) $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$가 있다면 $c \neq 0$인 $a^2 + b^2 = 3c^2$이 성립하게 되는데, 이는 소문항 (iii)에서 배제된다.

4. x, y를 고정하면 이 방정식은 이차방정식 $z^2 - 3xyz + (x^2 + y^2) = 0$이고, 두 근의 합은 $3xy$이다. $(1,1,1)$에서 시작하면 $(1,1,2)$를 얻는다. $(1,2)$의 맞은편에 있는 1을 바꾸면 $3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 = 5$이므로 $(1,2,5)$를 얻고, 이어서 $(1,5,13)$과 $(2,5,29)$를 얻는다.

1.6 두 제곱수의 합

1. 제곱수는 4를 법으로 0 또는 1이므로, 두 제곱수의 합은 4를 법으로 결코 3이 아니다.

2. $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$이고 $85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$이다. $65 = (2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$로 쓰면 $(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i}) = 4 + 7\mathrm{i}$이고 $(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) = 8 - \mathrm{i}$이다. 마찬가지로 85에 대해서는 $(2+\mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i})$에서 $7 + 6\mathrm{i}$와 $9 - 2\mathrm{i}$를 얻는다.

3. $1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$이다. 5, 13, 17은 각각 가우스 정수(Gaussian integer)와 그 켤레(conjugate)의 곱으로 분해된다. 각 쌍에서 인수를 하나씩 고르면 8개의 곱이 생기는데, 이들은 서로 켤레인 것끼리 짝지어지므로(같은 두 제곱수의 합을 준다) 4개가 남는다.

4. 절댓값(modulus)의 제곱을 취하면 $9 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$이다. 3은 두 제곱수의 합이 아니므로 두 인수 중 하나는 1이다.

1.7 인수분해가 무너질 때

1. $693 = 9 \times 77 = 21 \times 33$이며, 네 인수 모두 S-소수이다. 만드는 법: $4k+3$ 꼴의 소수 네 개 p, q, r, s를 잡으면 $(pq)(rs) = (pr)(qs)$에서 S-소수로의 두 가지 인수분

해(factorisation)를 얻는다.

2. E-소수는 $2 \pmod 4$인 수들이다(두 짝수의 곱으로 나타낼 수 없기 때문이다). $60 = 2 \times 30 = 6 \times 10$이다.

3. $(ac - 5bd)^2 + 5(ad + bc)^2$을 전개하면 $N(zw) = N(z)N(w)$이다. $a^2 + 5b^2$은 결코 2나 3이 아니다. $N(2) = 4$, $N(3) = 9$, $N(1 \pm \sqrt{-5}) = 6$이므로, 단원(unit)이 아닌 수들로 인수분해하려면 노름(norm)이 2 또는 3인 인수가 필요하다.

4. 서로 다른 두 가지 인수분해 $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$를 갖는 가장 작은 수를 n이라 하자. 유클리드 보조정리(Euclid's lemma)에 의해 p_1은 어떤 q_j를 나누므로 $p_1 = q_j$이다. 이를 약분하면 서로 다른 두 가지 인수분해를 갖는 더 작은 수가 생기므로 모순이다.

1.8 유리수 세기

1. $\frac{3}{5}$: 부모를 거슬러 올라가면 $(3,5) \leftarrow (3,2) \leftarrow (1,2) \leftarrow (1,1)$이고, 위치는 $1 \to 2 \to 5 \to 10$이므로 $f(10) = \frac{3}{5}$이다. $\frac{5}{3}$: $(5,3) \leftarrow (2,3) \leftarrow (2,1) \leftarrow (1,1)$이고, 위치는 $1 \to 3 \to 6 \to 13$이므로 $f(13) = \frac{5}{3}$이다.

2. Newman의 규칙 $x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor - x_n + 1}$을 적용하면 $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}$를 얻으며, 이는 $f(1), \ldots, f(10)$과 일치한다.

3. n번째 수의 n번째 자리 숫자가 5이면 4를, 그렇지 않으면 5를 n번째 자리 숫자로 고른다. 이렇게 만든 십진 소수(decimal)는 목록의 모든 수와 다르며, 0과 9를 피했으므로 십진 전개가 하나뿐이어서 실제로 다른 수이다.

4. 모든 양의 정수는 2의 거듭제곱과 홀수의 곱 $2^{m-1}(2n-1)$로 유일하게 나타나므로, $(m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$은 전단사(bijection)이다.

1.9 삼차곡선의 접선

1. $y = t(x+1)$을 $x^2 + y^2 = 1$에 대입하면 $(1+t^2)x^2 + 2t^2 x + t^2 - 1 = 0$이고, 근은 -1과 $\frac{1-t^2}{1+t^2}$이다. $t = \frac{q}{p}$로 두면 그 점은 $\left(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \frac{2pq}{p^2+q^2}\right)$이고, 이로부터 세 쌍 $(p^2-q^2, 2pq, p^2+q^2)$을 얻는다.

2. 직선은 $x + y = 3$이고, $x^3 + (3-x)^3 = 9$는 $9x^2 - 27x + 18 = 0$으로 정리된다. 삼차항이 소거되어 $x = 1, 2$만 남는다. 이 직선은 점근선(asymptote) $y = -x$와 평행하며, 세 번째 교점은 무한히 먼 곳에 있다.

3. 접선(tangent)의 기울기(gradient)는 $\frac{x^2}{y^2} = \frac{289}{400}$이고, 접선은 곡선과 $\left(-\frac{188479}{90391}, -\frac{36520}{90391}\right)$에서 다시 만난다. 분모를 없애면 $188479^3 = 36520^3 + 90391^3 + 180782^3$이다.

4. 직선은 $x^3 + y^3 = 1729$와 $\left(-\frac{37}{3}, \frac{46}{3}\right)$에서 다시 만나므로 $46^3 = 37^3 + 27 \times 1729 = 37^3 + 3^3 + 36^3$이다($27 = 3^3$과 $27 \times 1728 = 36^3$을 이용했다).

장

2

수열, 급수, 수렴

무한은 수학이 흥미로워지는 곳이며, 동시에 가장 틀리기 쉬운 곳이다.

이 장의 내용

2.1 "결국"이란 무슨 뜻인가 STEP III 2015

2.2 극한으로서의 황금비 STEP II 2013

2.3 발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌 STEP III 2014

2.4 $\pi^2/6$ STEP III 2018

2.5 비에트의 곱 STEP III 2022

2.6 산술–기하 평균 STEP II 2024

2.7 여섯 자리인가, 육백 자리인가 STEP II 2023

2.8 제곱하고 2 빼기 STEP III 2021

2.9 e에 다가가는 분수들 STEP II 2021

A 연습문제 해답 177쪽

무한 길들이기

> 무한이여! 이보다 더 깊이 인간의 정신을 뒤흔든 질문은 없었다.
>
> — 다비트 힐베르트(David Hilbert)

2500년 전, 엘레아의 제논(Zeno of Elea)은 운동이 불가능하다고 주장했다. 방을 가로질러 걸어가려면 먼저 절반을 걸어야 하고, 그다음 남은 거리의 절반을, 또 그 남은 거리의 절반을 걸어야 하며, 이것이 끝없이 이어진다. 무한히 많은 일을 해야 하는데, 이를 유한한 시간 안에 끝낼 수는 없을 것이다. 사람들은 실제로 방을 가로지르므로 제논이 틀렸다는 것은 누구나 알았지만, 아주 오랫동안 그가 정확히 **왜** 틀렸는지는 아무도 말하지 못했다. 답은 무한합 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$이 유한한 값 1을 가진다는 것이다. 그런데 무한히 많은 수를 더해서 어떤 값이 된다는 것은 도대체 무슨 **뜻**일까?

이 질문은 2000년 동안 수학의 한가운데에 놓여 있었다. 17세기에 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)는 이 질문에 끝내 제대로 답하지 않은 채 그 위에 미적분학을 세웠고, 그 후계자들은 놀라운 결과들과 함께 엄청난 헛소리도 만들어 냈다. 역사상 가장 위대한 계산가인 오일러(Euler)는 거리낌 없이 $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$이라고 썼다. 다른 이들은 같은 무한급수(infinite series)에 대해 서로 모순되는 것들을 "증명"했다. 19세기에 이르러 코시(Cauchy), 바이어슈트라스(Weierstrass) 등의 연구를 거친 뒤에야 수학자들은 참인 결과와 거짓인 결과를 가려낼 만큼 정밀한 정의를 갖게 되었다. 그 정의들이 이 장의 주제이다.

왜 중요한가

여러분이 계산에 쓰게 될 거의 모든 수는 무언가의 극한(limit)이다. 계산기는 $\sqrt{2}$나 π나 e를 알지 못한다. 계산기가 아는 것은 그 수들에 점점 더 가까워지는 방법이며, 충분히 가까워지면 계산을 멈춘다. 어떤 방법이 **얼마나 빨리** 가까워지는지 이해하느냐에 따라 1밀리초 만에 끝나는 알고리즘과 영원히 끝나지 않는 알고리즘이 갈린다. 날씨를 예보하고, 항공기를 설계하고, 금융 상품의 가격을 매기는 데 쓰이는 컴퓨터 시뮬레이션의 바탕에도 같은 아이디어가 있다. 그리고 가장 순수한 쪽에서는, 극한에 대한 연구가 수학에서 가장 아름다운 공식들로 이어진다. 이 장에서 여러분은

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

임을 증명하게 된다. 이것은 오일러를 유명하게 만든 결과이며, 지금도 거의 마법처럼 보인다.

대학에서 만나게 될 것

거의 모든 대학에서 **해석학**(*Analysis*)은 가장 먼저 듣는 과목 가운데 하나이며, 많은 학생에게 가장 큰 충격을 주는 과목이다. 학교 수학에서는 극한을 계산하는 법을 배우지만, 해석학에서는 정밀한 정의에서 출발하여 극한에 대한 사실을 **증명**하는 법을 배운다. 여러분은 Section 2.1에 나오는 "모든 $\varepsilon > 0$에 대하여"와 "N이 존재한다"라는 표현을 써서 수열(sequence)이 수렴(converge)한다는 것이 무슨 뜻인지 정의하게 된다. 유계(bounded)인 증가수열(increasing sequence)은 모두 수렴한다는 것을 증명하고, 이것이 유리수에는 없는 실수의 성질인 **완비성**(*completeness*)에 달려 있다는 것을 알게 된다. 급수(series)의 수렴 판정법을 공부하고, 같은 아이디어를 써서 연속성, 미분, 적분에 엄밀한 의미를 부여하게 된다.

이후의 과목들은 이 기초 위에서 여러 방향으로 뻗어 나간다. **수치해석**(*numerical analysis*)은 근삿값이 얼마나 빨리 수렴하는지, 그리고 어떻게 하면 더 빠르게 만들 수 있는지를 묻는다(Section 2.7, Section 2.6). **동역학계**(*dynamical systems*)는 어떤 규칙을 거듭 적용할 때 무슨 일이 일어나는지를 연구하는데, 때로는 극한에 도달하고 때로는 혼돈이 생겨난다(Section 2.2, Section 2.8). **복소해석**(*complex analysis*)은 왜 그토록 많은 무한합과 무한곱에 π가 나타나는지를 설명한다(Section 2.4, Section 2.5). 그리고 **해석적 정수론**(*analytic number theory*)은 Section 2.9에서처럼 극한을 이용하여 정수에 관한 질문에 답한다.

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **무한한 과정이 답을 가진다는 것은 무슨 뜻인가?** 수열이 극한에 "가까워진다"거나 무한합이 어떤 수로 "더해진다"는 것을 어떻게 정확하게 말할 수 있는가?
2. **무엇으로 수렴하는지 모르는 채로 어떤 것이 수렴한다는 것을 어떻게 증명할 수 있는가?** 그리고 극한이 존재한다는 것을 알고 나면, 그 극한을 어떻게 구하는가?
3. **얼마나 빠른가?** 두 과정이 같은 극한을 가지면서도 전혀 다른 속도로 그 극한에 다가갈 수 있다. 왜 그런가, 그리고 그 속도를 어떻게 측정하는가?

첫 번째 절(Section 2.1)은 언어에 관한 것으로, 수학자들이 "결국에는"을 말하는 정밀한 방식을 다룬다. 그다음 다섯 절은 유명한 극한들을 다룬다. 연분수(continued fraction)로서의 황금비(golden ratio), 수렴하는 사촌을 가진 발산(divergent) 급수, $\pi^2/6$, $2/\pi$에 대한 비에트(Viète)의 곱, 그리고 가우스(Gauss)의 산술–기하 평균(arithmetic–geometric mean)이다. 마지막 세 절은 속도와 구조를 다룬다. 선형 수렴(linear convergence)과 이차 수렴(quadratic convergence)의 비교, 폭발하거나 혼돈스럽게 떠도는 반복, 그리고 e로 좁혀 들어가는 적분들의 족이다.

수렴을 다루는 도구들

여러분은 몇 안 되는 도구를 서로 다른 상황에서 거듭 만나게 될 것이다.

§	주제	도구
2.1	"결국에는 더 작다"	한정기호(quantifier): m 찾아내기, 명제의 부정
2.2	황금비	단조(monotone)이고 유계인 부분수열(subsequence)
2.3	조화급수(harmonic series)와 켐프너(Kempner) 급수	묶음별 비교
2.4	$\pi^2/6$	다항식의 근, 그리고 조임(squeeze)
2.5	비에트의 곱	망원(telescoping) 소거, 그리고 간단한 극한 하나
2.6	산술–기하 평균	서로 조여 드는 두 수열; 불변량(invariant)
2.7	$\sqrt{2}$의 근사	오차 점화식(recurrence): 선형과 이차
2.8	$x \mapsto x^2 - 2$	사상을 단순하게 만드는 치환(substitution)
2.9	e에 대한 분수	작지만 0은 아닌 적분

이 장을 읽는 방법

1장 에서와 마찬가지로, 각 절은 출제된 그대로의 STEP 문제로 시작한다. 계속 읽기 전에 먼저 풀어 보라. 이 장의 문제들은 어떤 도구를 써야 하는지 알려 주는 경우가 많다("...을 고려하여", "...정리를 이용해도 좋다"). 문제를 풀어 나가면서 같은 몇 가지 도구가 얼마나 자주 다시 등장하는지 눈여겨보라. 대학에서는 그 도구들을 스스로 골라야 하기 때문이다.

몇몇 문제는 극한이 존재한다거나 무한합과 무한곱이 수렴한다고 가정하라고 한다. 그런 경우에는 그것을 증명하려면 무엇이 필요한지 해당 절에서 설명한다. "당연히 성립한다"와 "성립한다는 것을 증명할 수 있다" 사이의 간극을 의식하는 것이 해석학자처럼 생각하는 첫 걸음이다.

2.1 "결국"이란 무슨 뜻인가

문제

STEP III 2015, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/15-s3-q2`

도입

대학에서 처음 듣는 해석학(analysis) 강의에 나오는 명제는 거의 모두 같은 모양을 하고 있다. 어떤 조건이 성립하도록 하는 무언가가 **존재하여**, **모든** 무언가에 대하여 그 조건이 성립한다는 모양이다. "수열(sequence)이 L로 다가간다"는 말은 모든 허용 오차 $\varepsilon > 0$에 대하여 어떤 지점 N이 **존재하여**, $n \geq N$인 **모든** 경우에 $|a_n - L| < \varepsilon$이라는 뜻이다. 이런 모양의 명제에 익숙한 학생은 해석학을 흥미진진하게 느끼고, 그렇지 않은 학생은 해석학 앞에서 어리둥절해한다.

이 문제는 그런 말하기 방식을 부드럽게 소개하도록 아름답게 설계된 문제이다. 이 문제는 "결국에는 더 작다"라는 새로운 개념 하나를 정의하고, 그 개념에 관한 참·거짓 질문 네 개를 던진다. 넷 중 하나는 거짓인데, 그것이 거짓인 이유가 바로 대학 1학년 학생 대부분이 양화사(quantifier)가 들어 있는 명제를 처음으로 **부정**(negate)하려 할 때 빠지는 함정이다.

시작하기 전에

정의를 천천히 읽어 보자. $(s_n) \leq (t_n)$은 모든 n에 대하여 $s_n \leq t_n$이라는 뜻이 아니다. **어느 지점부터는** 그것이 참이라는 뜻이다. 처음 몇 개의 항은 전혀 상관이 없다. 두 수열 가운데 어느 쪽이든 앞부분의 항을 백만 개 바꾸어도 $(s_n) \leq (t_n)$인지 아닌지는 달라지지 않는다.

? **생각해 보기** 정의에는 "양의 정수 m이 존재한다"라는 구절이 들어 있다. $(s_n) \leq (t_n)$임을 증명하려면 정확히 무엇을 제시해야 하는가? 그것이 **거짓**임을 증명하려면 무엇을 보여야 하는가?

증명하려면 적당한 m을 **제시하고**, $n \geq m$인 **모든** 경우에 성립함을 보여야 한다. 반증하려면

어떤 m도 통하지 않음을 보여야 한다. 즉 누가 어떤 m을 내놓든 $s_n > t_n$인 $n \geq m$이 존재함을 보여야 한다. 소문항 (ii)를 위해 이 두 번째 형태를 기억해 두자.

차근차근 풀기

1단계 일차함수 대 이차함수

소문항 (i)은 결국에는 $1000n \leq n^2$인지를 묻는다. $n > 0$이므로 이는 $1000 \leq n$과 같다. 따라서 $m = 1000$이 통한다. $n \geq 1000$인 모든 경우에 $n^2 = n \cdot n \geq 1000n$이기 때문이다. 이 명제는 **참**이다. ■

처음 999개의 항에서 $1000n$이 n^2보다 훨씬 크다는 사실은 상관이 없다. "결국에는"은 유한개의 항을 모두 무시한다.

2단계 "결국에는 더 작다"는 보통의 "더 작다"와 같을까?

보통의 수에서는 $a \leq b$가 아니면 $b < a$이므로 당연히 $b \leq a$이다. 소문항 (ii)는 새로운 관계에서도 같은 일이 성립하는지를 묻는다.

> **생각해 보기** "$(s_n) \leq (t_n)$이 아니다"는 실제로 무슨 뜻인가? 앞에 "아니다"를 붙이지 말고 완전히 풀어서 써 보자.

"m이 존재하여 $n \geq m$인 모든 경우에 $s_n \leq t_n$이다"라는 명제가 거짓이 되는 것은 정확히 다음과 같을 때이다.

$$\text{모든 } m\text{에 대하여 } s_n > t_n\text{인 } n \geq m\text{이 존재한다.}$$

다시 말해 $s_n > t_n$인 일이 **무한히 자주** 일어난다. 이는 "어느 지점부터는 $s_n > t_n$"보다 훨씬 약한 조건이다. 두 수열은 계속해서 자리를 바꿀 수 있다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 끝없이 자리를 바꾸어서 어느 쪽도 결국에는 다른 쪽보다 작다고 할 수 없는, 양수로 이루어진 두 수열을 찾아보자.

$s_n = 2 + (-1)^n$으로 두면 $s_n = 1, 3, 1, 3, \ldots$이고, 모든 n에 대하여 $t_n = 2$로 두자. 모든 m에 대하여 $s_n = 3 > 2 = t_n$인 짝수 $n \geq m$이 존재하므로 $(s_n) \leq (t_n)$이 아니다. 그런데 마찬가지로 모든 m에 대하여 $t_n = 2 > 1 = s_n$인 홀수 $n \geq m$이 존재하므로 $(t_n) \leq (s_n)$도 아니다. 이 명제는 **거짓**이다. ■

3단계 이어 붙이기

생각해 보기 소문항 (iii)에서는 가정마다 하나씩, 두 개의 m 값이 주어진다. 두 값은 다를 수 있다. 결론에는 어느 쪽을 써야 할까?

$n \geq m_1$인 모든 경우에 $s_n \leq t_n$이고, $n \geq m_2$인 모든 경우에 $t_n \leq u_n$이라고 하자. $n \geq \max(m_1, m_2)$이면 두 부등식이 모두 성립하므로 $s_n \leq t_n \leq u_n$이다. 따라서 $m = \max(m_1, m_2)$가 통하고, 이 명제는 **참**이다. ■

두 기준값 가운데 큰 쪽을 택하는 것은 해석학에서 수백 번은 하게 될 수법이다. 예를 들어 수렴(convergent)하는 두 수열의 합이 수렴함을 증명할 때도 이렇게 한다.

4단계 이차함수 대 지수함수

먼저 몇 가지 값을 넣어 보자.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256

따라서 $n^2 \leq 2^n$은 $n = 1, 2$에서 성립하고, $n = 3$에서 성립하지 않으며, $n = 4$부터는 계속 성립하는 것처럼 보인다(그림 2.1.1). 자연스러운 추측은 $m = 4$이다.

생각해 보기 $n \geq 4$인 모든 경우에 $n^2 \leq 2^n$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명하려면 $n^2 \leq 2^n$에서 $(n+1)^2 \leq 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$으로 넘어가야 한다. $(n+1)^2$과 n^2 사이에 어떤 부등식이 있으면 이 단계가 성립할까?

$(n+1)^2 \leq 2n^2$임을 알면 충분하다. 그러면 $(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2 \cdot 2^n$이기 때문이다. 그런데 $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$이고, 이는 $n \geq 3$일 때 양수이다. 따라서 다음과 같다.

- 기저 단계(*base case*): $4^2 = 16 = 2^4$.
- 귀납 단계(*inductive step*): $n \geq 4$이고 $n^2 \leq 2^n$이면 $(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2^{n+1}$이다.

그러므로 $n \geq 4$인 모든 경우에 $n^2 \leq 2^n$이고, 이 명제는 $m = 4$로 **참**이다. ■

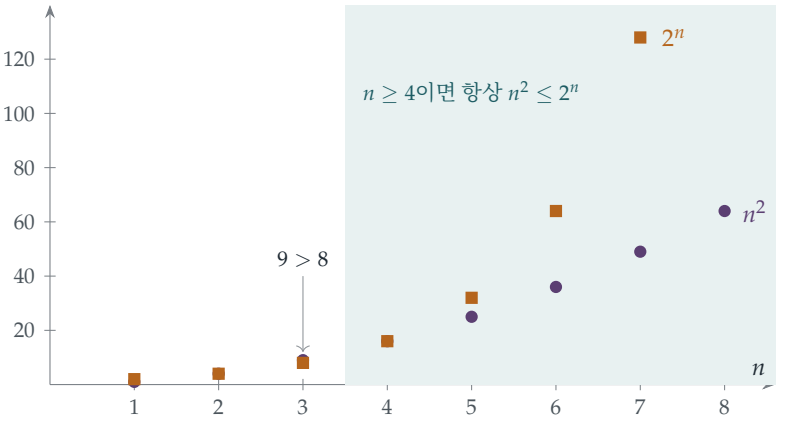


그림 2.1.1 n^2(자주색 원)과 2^n(호박색 사각형)의 비교. 두 수열은 처음 몇 항에서 두 번 교차하지만, $n = 4$부터는 2^n이 영원히 앞선다. 이것이 바로 $m = 4$로 $(n^2) \leq (2^n)$이라는 뜻이다.

돌아보기

- **"존재한다"를 증명한다는 것은 제시한다는 뜻이다.** 소문항 (i), (iii), (iv)에서 증명은 m을 지목하고 그것을 확인하는 것으로 이루어졌다.
- **부정하면 양화사가 뒤바뀐다.** "(m이 존재하여 $n \geq m$인 모든 경우에 P)가 아니다"는 "모든 m에 대하여 $n \geq m$이 존재하여 P가 아니다"가 된다. 이것을 제대로 하는지가 소문항 (ii)가 시험하는 내용이다.
- **새로운 관계가 옛 관계처럼 행동할 필요는 없다.** "결국에는 더 작다"는 $\leq$처럼 추이적(transitive)이지만, $\leq$와 달리 모든 수열 쌍을 비교하지는 못한다.

숨은 수학

해석학의 언어

뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz) 이후 약 150년 동안 수학자들은 극한(limit)과 무한소(infinitesimal)를 훌륭하게 사용했지만, 그것이 정확히 무엇을 뜻하는지는 말하지 못했다. 버클리(Berkeley) 주교는 1734년에 무한소를 "죽은 양의 유령"이라고 조롱했는데, 그의 말에는 일리가 있었다. 이 문제는 19세기에 해결되었다. 오귀스탱루이 코시(Augustin-Louis Cauchy)와 이어서 카를 바이어슈트라스(Karl Weierstrass)가 "무한히 가까워진다"는 모호한 말을 "모든"과 "존재한다"로 이루어진 명제로 바꾸어 놓은 것이

다. 현대적인 정의

$a_n \to L \iff$ 임의의$\varepsilon > 0$에 대하여 어떤N이 존재하여$|a_n - L| < \varepsilon$이 다음 모든 경우에 성립: $n \geq N$

는 이 문제의 정의와 정확히 같은 모양이고, 맨 앞에 양화사가 하나 더 붙어 있을 뿐이다. 이것이 대학 해석학 강의에서 가장 먼저 만나게 될 내용이다.

증가의 차수

소문항 (iv)는 유명한 사다리의 작은 한 칸이다. 고정된 임의의 $k > 0$과 $c > 1$에 대하여

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

이고, 사실 각 수열은 다음 수열보다 결국에는 작을 뿐 아니라 다음 수열의 어떤 상수배보다도 결국에는 작다. G. H. 하디(G. H. Hardy)는 이런 종류의 비교에 관해 *Orders of Infinity*(1910, 무한의 차수)라는 책 한 권을 통째로 썼다. 오늘날 이것은 컴퓨터 과학의 일상 언어가 되었다. 컴퓨터 과학에서 "이 알고리즘은 $O(n^2)$ 단계가 걸린다"라는 말은 단계의 수가 결국에는 n^2의 상수배 이하라는 뜻이다. n^2과 2^n의 차이는 끝나는 프로그램과 태양이 다 타 버리기 전까지 끝나지 않을 프로그램의 차이이다.

전순서가 아닌 순서

소문항 (ii)는 "결국에는 더 작다"가 **전순서**(total order)가 아님을 보여 준다. 즉 아예 비교할 수 없는 수열 쌍이 있다. 이처럼 추이적이지만 모든 것을 비교하지는 못하는 관계를 **원순서**(preorder) 또는 **부분순서**(partial order)라고 하며, 이런 관계는 어디에서나 나타난다. 정수의 나누어떨어짐, 집합의 포함 관계, "부분군이다"가 모두 그 예이다. 어떤 관계가 어떤 성질을 가지고 어떤 성질을 가지지 않는지 알아보는 것은 수학자가 받는 훈련의 일부이다.

사고 기술

> **양화사 다루기**
>
> "m이 존재하여 $n \geq m$인 모든 경우에…"를 증명하려면 m을 지목한 다음 모든 n을 확인한다. 이를 반증하려면 모든 m에 대하여 성립하지 않는 $n \geq m$이 있음을 보인다.
>
> 명제에 양화사가 여러 개 있으면, 증명이나 반증을 시도하기 전에 명제를 완전히 풀어서 쓰고, 왼쪽부터 차례로 부정한다. "모든"은 "존재한다"로, "존재한다"는 "모든"으로 바뀌고, 끝에 있는 조건은 부정된다.

더 도전하기

1 **견본 문제로 몸풀기.** 1987년 첫 STEP 이전에 발표된 시험지의 STEP III Specimen paper, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/spec-s3-q2`)를 풀어 보자. (**마지막 부분에 대한 힌트:** 이항전개(binomial expansion)의 다음 항을 이용한다.)

2 **양쪽 방향.** $(s_n) \leq (t_n)$이고 $(t_n) \leq (s_n)$이면 충분히 큰 모든 n에 대하여 $s_n = t_n$임을 증명하여라.

3 **무한대를 향한 경주.** 둘 다 무한대로 발산하고 어느 쪽도 결국에는 다른 쪽보다 작다고 할 수 없는, 양수로 이루어진 두 증가 수열을 찾아라.

4 **사다리 오르기.** 명시적인 m을 제시하여 $(2^n) \leq (n!)$임을 보여라. 그다음 $(n^{10}) \leq (2^n)$임을 보이고, 통하는 가장 작은 m을 찾아라. (두 번째 부분에는 스프레드시트가 도움이 된다. 답은 놀라울 만큼 크다.)

더 읽을거리

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree*** (Oxford University Press). 수학과 공부하는 법. 3장이 바로 이런 종류의 논리적 언어와, 대학 신입생들이 그것을 어려워하는 이유를 다룬다.
- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis*** (Oxford University Press). 해석학을 생각하는 법. 대학 1학년 해석학의 정의들을 친절하게 안내한다.
- **Daniel Velleman, *How to Prove It*** (Cambridge University Press). 증명하는 법. 논리, 양화사, 증명을 체계적으로 소개한다.

2.2 극한으로서의 황금비

문제

STEP II 2013, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s2-q6`

도입

다음 식을 적어 보자.

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

그리고 이 값이 무엇인지 물어보자. 빠른 답은 이렇다. 이 값을 x라 하면 첫 번째 분수선 아래 부분이 다시 x이므로 $x = 1 + 1/x$이고, 따라서 $x^2 = x + 1$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 즉 황금비(golden ratio) φ이다.

하지만 이 논증은 타당할까? 이 논증은 무한히 이어지는 식이 무언가를 **뜻한다**는 것, 즉 식을 쌓아 가는 과정이 하나의 수로 안정된다는 것을 가정한다. 같은 요령을 $1-1+1-1+\cdots$에 적용하면("이것을 S라 하면 $S = 1 - S$이므로 $S = \frac{1}{2}$") 엉터리 결과가 나온다. 이 문제는 이 작업을 제대로 하는 방법을 보여 준다. 이때 쓰는 도구는 극한을 미리 알지 못한 채 수렴(convergence)을 증명하기 위해 STEP 응시생이 가진 유일한 도구, 곧 **단조수열**(*monotone sequence*)이다.

시작하기 전에

몇 개의 항을 계산해 보자. $u_1 = 1$이면 다음과 같다.

$$1,\quad 2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{8}{5},\quad \frac{13}{8},\quad \frac{21}{13},\quad \frac{34}{21},\quad \cdots$$

생각해 보기 분자와 분모가 눈에 익은가? 소수로도 살펴보자. $1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$. 이 수열은 증가하는가? 감소하는가?

이 수들은 연속한 피보나치(Fibonacci) 수의 비이다. 이 수열은 증가하지도 감소하지도 않는다. 넘쳤다가 모자랐다가 하며 지그재그로 움직인다. 그러므로 주어진 정리는 증가수열에 관한 것이어서 수열 전체에 적용할 수 없다. 하지만 홀수 번째 항 $1, 1.5, 1.6, 1.615, \ldots$은 올라가는 것처럼 보이고, 짝수 번째 항 $2, 1.667, 1.625, \ldots$은 내려가는 것처럼 보인다. 이것이 이 문제의 풀이 계획이다.

차근차근 풀기

1단계 두 칸 떨어진 항 비교하기

소문항 (i)은 두 단계 떨어진 u_{n+2}와 u_n을 비교한다. 자연스러운 첫 수는 $(*)$를 이용해 각각을 바로 앞의 항으로 나타내는 것이다.

생각해 보기 $(*)$를 두 번 써서 $u_{n+2} - u_n$을 $u_{n+1} - u_{n-1}$로 나타내고, 다시 $u_{n+1} - u_{n-1}$을 $u_n - u_{n-2}$로 나타내어 보자.

$(*)$에서

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = -\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{u_{n+1}u_{n-1}},$$

이고, 같은 방법으로 $u_{n+1} - u_{n-1} = -\dfrac{u_n - u_{n-2}}{u_n u_{n-2}}$이다. 이 둘을 합치면 두 음의 부호가 상쇄된다.

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{u_{n+1}u_n \cdot u_{n-1}u_{n-2}}.$$

마지막으로 $(*)$에 의해 $u_{n+1}u_n = u_n + 1$이고 $u_{n-1}u_{n-2} = u_{n-2} + 1$이므로 원하는 공식을 얻는다. ($u_{n-2}$가 존재하려면 $n \geq 3$이어야 한다.) ■

2단계 함정

잠깐, 직접 해 보기 모든 n에 대해 $1 \leq u_n \leq 2$임을 증명하여라.

$u_1 = 1$일 때는 참이다. $1 \leq u_n \leq 2$이면 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$이므로 $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$이고, 이는 분명히 1과 2 사이에 있다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대해 $1 \leq u_n \leq 2$이다. ■

특히 모든 u_n이 양수이므로 소문항 (i)의 분모 $(1 + u_n)(1 + u_{n-2})$는 양수이다.

3단계 두 개의 단조 부분수열

생각해 보기 소문항 (i)의 공식은 $u_{n+2} - u_n$이 $u_n - u_{n-2}$의 양수배라는 것을 말해 준다. 이로부터 $u_3 - u_1, u_5 - u_3, u_7 - u_5, \ldots$의 부호에 대해 무엇을 알 수 있는가?

모두 부호가 같다! $u_3 - u_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$이므로 소문항 (i)과 귀납법에 의해 $u_5 > u_3$, $u_7 > u_5$ 등이 성립한다. 즉 홀수 번째 항들은 증가한다. 이 항들은 위로 2에 의해 유계(bounded)이므로 정리에 의해 어떤 극한(limit)으로 수렴한다. 그 극한을 L이라 하자.

마찬가지로 $u_4 - u_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$이므로 짝수 번째 항들은 감소한다. 이 항들은 아래로 1에 의해 유계이다. 정리는 증가수열에 대해 주어져 있지만, $-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$은 증가하고 위로 -1에 의해 유계이므로 수렴한다. 따라서 짝수 번째 항들도 수렴한다. 그 극한을 M이라 하자.

4단계 극한 구하기

생각해 보기 L을 구하려면 u_{n+2}와 u_n을 직접 연결하는 방정식이 필요하다. $(*)$에서 그런 식을 얻을 수 있는가?

$(*)$를 두 번 적용하면

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + 1/u_n} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

n을 홀수 값으로 따라가며 $n \to \infty$로 보내면 u_n과 u_{n+2}가 모두 L로 수렴하므로

$$L = \frac{2L + 1}{L + 1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0.$$

근은 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$이고, $L \geq 1$이므로 $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$여야 한다. 짝수 값을 따라가며 똑같이 논증하면 $M = \varphi$를 얻는다.

생각해 보기 홀수 번째 항은 φ로, 짝수 번째 항도 φ로 수렴한다. 왜 이것이 수열 전체가 φ로 수렴한다는 뜻이 되는가?

직관적으로 말하면, 모든 항은 홀수 번째 항이거나 짝수 번째 항이고, 두 종류 모두 φ에 가까워진다. 정확히 말하면 이렇다. 임의의 허용 오차 $\varepsilon > 0$이 주어지면, 홀수 번째 항들은 어떤 지점 N_1 이후로 φ와의 차이가 ε 이내이고, 짝수 번째 항들은 어떤 지점 N_2 이후로 그러하다. 따라서 $\max(N_1, N_2)$ 이후로는 모든 항이 φ와의 차이가 ε 이내이며, 이것이 바로 수렴의 뜻이다. (이것은 Section 2.1에서 본 "더 큰 기준점을 택하기" 수법이다.)

5단계 다른 곳에서 시작하기

$u_1 = 3$이면 수열은 다음과 같다.

$$3,\quad \frac{4}{3},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{11}{7},\quad \frac{18}{11},\quad \frac{29}{18},\quad \dots$$

이제 $u_1 = 3$은 $[1,2]$ 밖에 있으므로 소문항 (ii)의 귀납법은 시작되지 않는다. 하지만 $u_2 = \frac{4}{3}$은 안에 있으므로 거기서부터 귀납법이 작동한다. 즉 모든 $n \geq 2$에 대해 $1 \leq u_n \leq 2$이다. 소문항 (i)은 u_{n-2} 이후의 항만 사용하며 그 항들이 양수이기만 하면 되는데, 실제로 모두 양수이다. 이번에는 $u_3 - u_1 = \frac{7}{4} - 3 < 0$이고 $u_4 - u_2 = \frac{11}{7} - \frac{4}{3} > 0$이므로 홀수 번째 항은 감소하고 짝수 번째 항은 증가한다. 역할은 뒤바뀌었지만 각 부분수열(subsequence)은 여전히 단조이고 유계이다. 극한들은 같은 방정식을 만족하고 둘 다 양수이므로 둘 다 φ이다. 결론은 바뀌지 **않는다**. ■

돌아보기

- **수열이 단조가 아니면 단조인 조각을 찾아라.** 홀수 번째 항과 짝수 번째 항으로 나누자 지그재그 수열이 잘 행동하는 두 수열로 바뀌었다.
- **수렴을 먼저 증명하고, 극한은 그다음에 구하라.** 방정식 $L = (2L+1)/(L+1)$은 L이 존재한다는 것을 안 뒤에야 정당하다. 도입의 빠른 논증이 건너뛴 것이 바로 이 단계이다.
- **어느 근인지 확인하라.** 극한 방정식은 해가 두 개였고, 소문항 (ii)의 범위가 어느 쪽이 맞는지 알려 주었다.

숨은 수학

거미줄 그림과 고정점

$u_{n+1} = f(u_n)$으로 정의된 수열은 모두 **거미줄 그림**(*cobweb diagram*)으로 나타낼 수 있다(그림 2.2.1). $y = f(x)$와 $y = x$의 그래프를 그린다. x축 위의 u_1에서 출발하여 곡선까지 수직으로 올라가고(높이 $u_2 = f(u_1)$), 직선 $y = x$까지 수평으로 이동한 뒤(이로써 $x = u_2$로 옮겨 간다), 다시 곡선까지 수직으로 이동하는 과정을 되풀이한다. 여기서 $f(x) = 1 + 1/x$는 감소함수이므로, 경로는 넘쳤다가 모자랐다가를 번갈아 하며 곡선과 직선이 만나는 점, 즉 $f(\varphi) = \varphi$인 **고정점**(*fixed point*) φ를 향해 나선 모양으로 안쪽으로 감겨 들어간다.

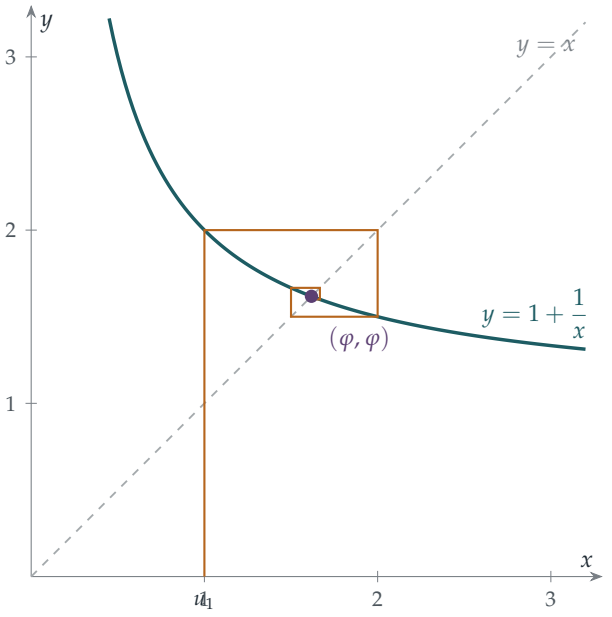


그림 2.2.1 $u_1 = 1$에서 시작하는 $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$의 거미줄 그림. 경로는 곡선까지 올라갔다가 직선 $y = x$까지 가로질러 가는 과정을 되풀이한다. 곡선이 아래로 기울어 있으므로 경로는 양쪽을 번갈아 오가며 고정점 $\varphi \approx 1.618$을 향해 나선 모양으로 감겨 들어간다. 이것이 홀수 번째 항과 짝수 번째 항의 지그재그이다.

얼마나 빠르게, 그리고 왜

소문항 (i)의 인수 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$는 어디에서 왔을까? 고정점 근처에서 $u_{n+1} - \varphi = f(u_n) - f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n - \varphi)$이고, $f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$이다. 따라서 한 단계마다 오차에 약 -0.38이 곱해진다. 부호가 뒤집히고(지그재그) 크기는 줄어든다(수렴). 두 단계를 거치면 $1/\varphi^4 \approx 0.146$이 곱해지는데, 이것이 바로 $1/\big((1+u_n)(1+u_{n-2})\big)$이 수렴하는 값이다. 대학에서는 이것이 **축소 사상 정리**(*contraction mapping theorem*)가 된다. 고정점 근처에서 $|f'| \le k < 1$이면 반복은 그 고정점으로 수렴하며, 오차는 적어도 기하급수적으로 줄어든다. 이 정리는 수학에서 가장 유용한 정리 중 하나이며, 미분방정식이 해를 가짐을 증명하는 방법이기도 하다(제8장). Section 2.8에서는 고정점이 끌어당기지 **않는** 사상을 만나게 되는데, 그 결과는 사뭇 다르다.

가장 무리수다운 수

항 $u_n = F_{n+1}/F_n$은 크기에 비해 φ에 대한 가장 좋은 분수 근삿값이지만, 그 "가장 좋다"는 것이 그리 좋지는 않다. φ는 다른 어떤 수보다도 분수로 근사하기 어렵다. 그 이유는 연분수(continued fraction) 표현 $[1;1,1,1,\ldots]$에서 볼 수 있다. 연분수에 큰 항이 있으면 매우 좋은 근삿값이 생기는데($\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$와 훌륭한 근삿값 $\frac{355}{113}$을 떠올려 보라), φ는

끝까지 가능한 가장 작은 항만 가진다. 아돌프 후르비츠(Adolf Hurwitz)는 1891년에 모든 무리수(irrational number) x에 대해 $|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$을 만족하는 분수가 무한히 많으며, 바로 φ 때문에 $\sqrt{5}$를 더 개선할 수 없음을 증명했다. 이 "최대 무리성"이 해바라기 씨의 나선 무늬에 황금각(golden angle)이 나타나는 이유이다.

사고 기술

단조이고 유계이면 수렴한다

극한을 모르는 채로 수열이 수렴함을 보이려면, 단조이고 유계인 수열을 찾거나 수열을 단조이고 유계인 조각들로 나누어라.

극한이 존재한다는 것을 안 뒤에야 점화식(recurrence relation)에서 "$n \to \infty$로 보내어" 그 극한을 구할 수 있다. 대학에서 이 정리는 실수의 **완비성**(*completeness*), 즉 $\mathbb{R}$을 $\mathbb{Q}$와 구별 짓는 성질의 결과이며, 공리(axiom)로부터 이를 증명하는 것을 보게 될 것이다.

더 도전하기

1 **속에 숨은 피보나치.** $F_1 = F_2 = 1$이고 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$일 때 $u_n = F_{n+1}/F_n$임을 증명하여라.

2 **줄어드는 오차.** $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$임을 보이고, 이로부터 모든 n에 대해 $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$임을 유도하여라. ($\varphi^2 = \varphi + 1$과 $u_n \ge 1$을 이용하여라.)

3 **수열 망가뜨리기.** $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$이면 수열이 상수임을 보여라. 어떤 $u_n = 0$이 되어 수열을 더 이어 갈 수 없게 되는 시작값 u_1을 모두 구하여라. (**힌트:** $u_n = 0$에서 거꾸로 거슬러 올라가 보아라.)

4 **$\sqrt{2}$의 사촌.** $v_1 = 1$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+v_n}$이라 하자. 이 문제의 방법을 응용하여 $v_n \to \sqrt{2}$임을 보이고, $\sqrt{2}$를 연분수로 나타내어라.

더 읽을거리

- **Mario Livio, *The Golden Ratio*** (Broadway). φ의 역사를 다루며, 진짜 수학과 수많은 신화를 구별한다.
- **C. D. Olds, *Continued Fractions*** (Mathematical Association of America). 실력 있는 고

등학생을 대상으로 한, 짧고 매우 읽기 쉬운 연분수 입문서.

- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis*** (Cambridge University Press). 단조수열과 완비성을 엄밀하게 다루며, 연습문제가 많다.

2.3 발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌

문제

STEP III 2014, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s3-q8`

도입

조화급수(harmonic series) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$는 항이 영으로 줄어드는데도 합은 한없이 커지는 급수의 가장 유명한 예이다. 이 급수는 터무니없이 느리게 커진다. 10을 넘으려면 12,000개가 넘는 항이 필요하고, 100을 넘으려면 약 1.5×10^{43}개의 항이 필요하다. 그래도 결국에는 어떤 수든 넘어선다.

이제 분모에 숫자 2가 들어 있는 항을 모두 버려 보자. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$부터 $\frac{1}{29}$까지, $\frac{1}{32}$ 등이 빠진다. 어차피 무한대인 합에서 항의 10분의 1 정도를 없애 봐야 별 차이가 없으리라 예상할 수도 있다. 그런데 실제로는 남은 항의 합이 80보다 작다. 이 놀라운 사실은 1914년에 A. J. Kempner가 증명하였으며, 이 문제는 아름다울 만큼 단순한 한 가지 아이디어, 즉 합을 블록으로 잘라 내는 방법을 통해 이 결과로 이끌어 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 첫 번째 부등식은 $r=k^n$부터 $r=k^{n+1}-1$까지의 항으로 이루어진 블록에 관한 것이다. $k=2$, $n=3$일 때 이 블록에는 어떤 항들이 있고, 모두 몇 개인가?

$f(8), f(9), \ldots, f(15)$의 여덟 개 항이다. 일반적으로 블록은 k^n부터 $k^{n+1}-1$까지이므로 항의 개수는 $k^{n+1}-k^n=k^n(k-1)$이다. 부등식은 블록의 합이 (항의 개수) × (가능한 가장 작은 항)과 (항의 개수) × (가장 큰 항) 사이에 있다는 뜻이다.

차근차근 풀기

1단계 블록의 합 어림하기

f가 감소(decreasing)함수이므로 블록의 모든 항은 다음을 만족한다.

$$f(k^{n+1}) < f(k^{n+1}-1) \le f(r) \le f(k^n) \qquad (k^n \le r \le k^{n+1}-1).$$

$k^n(k-1)$개의 항을 모두 더하면 주어진 부등식을 얻는다. ■

2단계 조화급수

> **생각해 보기** $k=2$, $f(r)=1/r$일 때, 2^n부터 $2^{n+1}-1$까지의 블록에 대한 두 경계는 무엇인가?

하계는 $2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$이고 상계는 $2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$이다. 따라서 **모든** 블록은, 아무리 멀리 있더라도, $\frac{1}{2}$과 1 사이의 값을 기여한다(그림 2.3.1). $n = 0, 1, \ldots, N$에 대한 블록들을 이어 붙이면 정확히 $r=1$부터 $r = 2^{N+1}-1$까지의 합이 되므로, $N+1$개의 블록을 더하면

$$\frac{N+1}{2} \le \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \le N+1.$$

$N \to \infty$일 때 좌변은 한없이 커지므로 부분합(partial sum)은 유계가 아니고, 따라서 급수는 발산(diverge)한다. ■

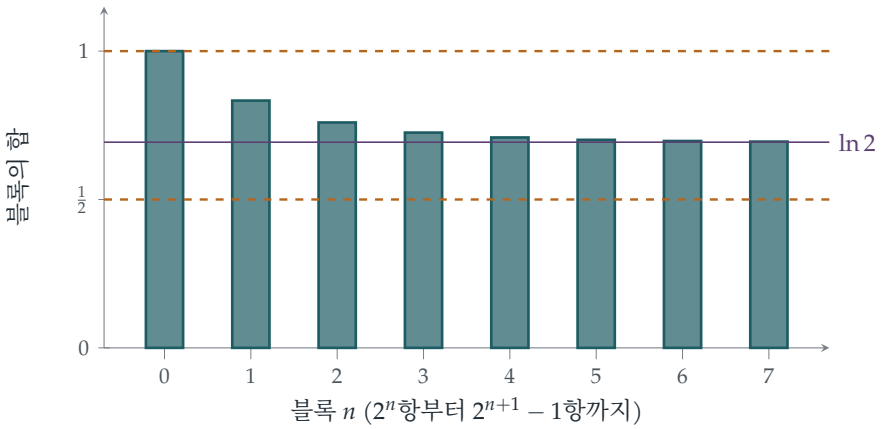


그림 2.3.1 조화급수를 $1, 2, 4, 8, \ldots$개 항의 블록으로 자른 모습. 모든 블록의 합은 $\frac{1}{2}$과 1 사이에 있으며(호박색 점선), 실제로 블록의 합은 $\ln 2 \approx 0.693$(자주색)에 가까워진다. 각각 적어도 $\frac{1}{2}$인 블록이 무한히 많으면 그 합은 유한할 수 없다.

3단계 세제곱의 역수의 합

이제 $k = 2$는 그대로 두고 $f(r) = 1/r^3$으로 놓자. 블록 n의 상계는

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^3} = \frac{1}{4^n}.$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$에 대한 블록들은 모든 양의 정수를 정확히 한 번씩 포함하므로

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

(엄밀히 말하면 이것은 모든 부분합이 $\frac{4}{3}$ 이하임을 보인 것이다. 위로 유계인 증가수열은 수렴(converge)하므로 무한합이 존재하고 그 값은 $\frac{4}{3}$ 이하이다. 참값은 $1.2020\ldots$이다.)

4단계 2가 없는 수 세기

> **생각해 보기** 앞자리에 0을 채우는 것을 허용할 때(그래서 7을 007로 쓴다), 0부터 999까지의 정수 중 숫자 $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$만으로 쓸 수 있는 것은 몇 개인가?

세 자리 각각에 9가지 선택이 있으므로 이러한 문자열은 9^3개이다. 이들은 0부터 999까지의 수 중 2가 없는 수와 정확히 대응하며, 양수가 아닌 0을 빼면 $S(1000)$에는 $9^3 - 1 = 728$개의 수가 남는다. $\blacksquare$

5단계 Kempner 급수

이제 블록 아이디어를 **자릿수**로 정의한 블록에 적용한다. 이는 $k = 10$을 쓰는 것과 같다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 2가 들어 있지 않은 d자리 수는 몇 개인가? 그리고 d자리 수가 가질 수 있는 가장 작은 값은 무엇인가?

첫째 자리는 $1, 3, 4, \ldots, 9$ 중 하나(여덟 가지: 0도 2도 아님)이고, 나머지 $d - 1$개의 자리는 각각 아홉 가지 선택이 있다. 따라서 이러한 수는 $8 \times 9^{d-1}$개이고, 각각은 적어도 10^{d-1}이다. 그러므로 $S(n)$에 속하는 d자리 수들이 $\sigma(n)$에 기여하는 양은 많아야

$$8 \times 9^{d-1} \times \frac{1}{10^{d-1}} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1}$$

이다. 모든 자릿수 $d = 1, 2, 3, \ldots$에 대해 더하면

$$\sigma(n) \le \sum_{d=1}^{\infty} 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1} = \frac{8}{1 - \frac{9}{10}} = 80.$$

엄격한 부등식을 얻으려면, 대부분의 경계가 전혀 날카롭지 않다는 점에 주목하면 된다(예를 들어 $\frac{1}{3} < 1$인데, 우리는 한 자리 수의 모든 항을 1로 어림하였다). 따라서 모든 n에 대해 $\sigma(n) < 80$이다. $\blacksquare$

돌아보기

- **항을 묶어라.** 두 합 모두 항별로 다루기는 쉽지 않다. 알맞은 크기의 블록으로 묶자 각각을 등비급수(geometric series)와 비교할 수 있었다.
- **알맞은 블록은 문제에 따라 다르다.** $1/r$과 $1/r^3$에는 2의 거듭제곱이 알맞았고, 십진법의 숫자에 관한 문제에는 10의 거듭제곱이 알맞았다.
- **유계이고 증가한다.** 두 수렴 증명 모두 Section 2.2에서와 같은 원리에 기대었다. 양수 항의 부분합은 증가하므로 경계 하나만 있으면 충분하다.

숨은 수학

응집 판정법

문제의 첫 번째 부등식은 **코시**(*Cauchy*)**의 응집 판정법**(*condensation test*)의 핵심이다. f가 양수이고 감소하면

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r)\text{가 수렴한다} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n)\text{가 수렴한다.}$$

이 판정법은 어려운 급수를 쉬운 급수로 바꾸어 준다. $f(r) = 1/r^p$에 적용하면 $\sum 2^n \cdot 2^{-np} = \sum (2^{1-p})^n$을 얻는데, 이는 정확히 $p > 1$일 때 수렴하는 등비급수이다. $1/(r \ln r)$에 적용하면 이 급수조차 발산함을 알 수 있고, $1/(r(\ln r)^2)$에 적용하면 이 급수는 수렴함을 알 수 있다. 이 논증은 1350년경에 그림 2.3.1의 블록과 똑같은 방법으로 조화급수의 발산을 증명한 니콜 오렘(Nicole Oresme)까지 거슬러 올라간다.

조화급수는 얼마나 느리게 발산하는가

그림 2.3.1을 보면 각 블록이 약 $\ln 2$씩 기여하므로, 처음 N개 항의 합은 대략 $\log_2 N \times \ln 2 = \ln N$이어야 할 것 같다. 실제로

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + (0\text{으로 가는 어떤 양}),$$

이며, 여기서 $\gamma = 0.5772\ldots$는 오일러-마스케로니 상수(Euler–Mascheroni constant)이다. γ가 유리수(rational number)인지는 아무도 모른다. 이 공식은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 적분을 이용해 증명하게 되며, 조화수는 Section 9.11와 Section 11.12에서 다시 등장한다.

대부분의 수에는 2가 들어 있다

Kempner 급수는 왜 수렴할까? 큰 수들 사이에서 "2가 없는 수"는 매우 드물기 때문이다. 10^d보다 작은 수 중 2가 없는 수의 비율은 많아야 $(0.9)^d$이고, 이는 0으로 간다. 100자리 수 중 숫자 2를 피하는 수는 0.003%도 되지 않는다. 그러니 우리는 항의 10분의 1을 없앤 것이 아니라 거의 전부를 없앤 것이다. 우리가 얻은 경계 80은 넉넉한 값이다. 1979년에 Robert Baillie가 가속된 방법을 써서 이 합을 소수점 아래 여러 자리까지 계산하였는데, 그 값은 약 19.257이다.

거듭제곱의 역수의 합

소문항 (ii)의 합은 $\zeta(3)$으로, Section 1.2에서 만난 리만 제타 함수(Riemann zeta function)의 값이다. Section 2.4에서는 $\zeta(2) = \pi^2/6$을 정확히 구할 것이며, 오일러(Euler)는 $\zeta(4), \zeta(6), \ldots$에 대한 공식을 찾았다. 그러나 $\zeta(3)$에 대한 공식은 아무도 찾지 못하였다. 1978년 Roger Apéry는 Section 2.9에 나오는 것과 비슷한 적분을 이용하여 $\zeta(3)$이 무리수(irrational number)임을 증명해 수학계를 놀라게 하였다. $\zeta(5)$가 무리수인지는 아직도 알려져 있지 않다.

사고 기술

블록 단위로 비교하기

양수 항으로 이루어진 급수가 수렴하는지 판단하려면, 항들이 대략 일정한 블록으로 묶고 각 블록을 간단한 급수와 비교하라.

비교 판정법(comparison test)은 대학 1학년 해석학의 기본 중의 기본이다. 핵심 기술은 무엇과 비교할지 고르는 것이다. 여기서는 항이 기껏해야 일정한 배수만큼만 변하는 크기 2^n 또는 10^d의 블록을 골랐다.

더 도전하기

1 **느림을 느껴 보기.** $\sum_{r \le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$를 이용하여, 조화급수가 10을 넘으려면 몇 개의 항이 필요한지, 그리고 100을 넘으려면 몇 개가 필요한지 어림하여라.

2 **판정법의 실제.** $f(r) = 1/r^2$에 소문항 (i)의 방법을 적용하여 $\sum 1/r^2 \le 2$임을 보여라. 그다음 첫째 항을 따로 다루어 경계를 개선하여라.

3 **수렴과 발산 사이.** $k = 2$인 블록 부등식을 이용하여 $\sum_{r\ge 2} \dfrac{1}{r \ln r}$은 발산하고 $\sum_{r\ge 2} \dfrac{1}{r(\ln r)^2}$은 수렴함을 보여라.

4 **더 많이 빼기.** 심화 십진법 표기에 2도 7도 없는 양의 정수들의 역수의 합이 35보다 작음을 보여라. (35가 어디서 나오는지 알 수 있는가?)

더 읽을거리

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*** (Princeton University Press). 조화급수와 γ를 비롯한 많은 내용을 실력 있는 고등학생을 위해 쓴 책이다.
- **Mary Hart, *Guide to Analysis*** (Palgrave). 급수와 비교 판정법에 관한 장이 명료한, 간결한 대학 1학년 교재이다.
- **Robert Baillie, "Sums of reciprocals of integers missing a given digit"**, *American Mathematical Monthly* 86 (1979). 이 절을 공부하고 나면 읽을 수 있는 짧은 논문이다.

2.4 $\pi^2/6$

문제

STEP III 2018, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/18-s3-q7`

도입

1650년에 피에트로 멩골리(Pietro Mengoli)는 간단한 질문 하나를 던졌다. 다음 값은 무엇인가?

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots?$$

항이 충분히 빠르게 작아지므로 이 합은 수렴(converge)한다(Section 2.3에서 그 값이 많아야 2임을 보였다). 하지만 아무도 그 값을 구하지 못했다. 베르누이(Bernoulli) 형제가 도전했다가 실패했고, 야코프 베르누이(Jacob Bernoulli)는 공개적으로 도움을 간청하기까지 했다. 이 문제는 베르누이 가문의 고향 도시 이름을 따서 **바젤 문제**(Basel problem)라고 불리게 되었다.

1734년, 젊은 오일러(Leonhard Euler)가 이 문제를 풀었고, 그 답으로 그는 유명해졌다. 합은 $\pi^2/6$이다. 도대체 원에 관한 수인 π가 왜 제곱의 역수의 합에 나타나는 것일까? 이 문제는 A레벨(A level, 영국의 대학 입시 과정)을 넘어서지 않는 도구만으로 완전하고 엄밀한 증명(proof)을 제시한다. 드무아브르 정리(De Moivre's theorem), 다항식(polynomial)의 근의 합, 그리고 조임(squeeze)이 그 도구이다.

시작하기 전에

세부 사항에 들어가기 전에 전체 계획을 살펴볼 만하다.

- 소문항 (i)에서는 근이 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$인 다항식을 만든다.
- 소문항 (ii)에서는 그 근들을 하나하나 알지 못한 채, 계수(coefficient)를 이용해 모두 더한다.

▶ 소문항 (iii)에서는 작은 θ에 대해 $\cot\theta \approx 1/\theta$라는 사실을 이용하여 $\cot^2$ 값들의 합을 $1/m^2$ 값들의 합으로 바꾸고, 조인다.

> **생각해 보기** 다항식 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$의 근이 $r_1, \ldots, r_n$이라면, $r_1 + \cdots + r_n$을 계수로 나타내면 무엇인가?

답은 $-a_{n-1}/a_n$이다. 이 사실이 소문항 (ii)의 원동력이다.

차근차근 풀기

1단계 드무아브르

> **생각해 보기** $\cot\theta + \mathrm{i}$를 하나의 분수로 나타내어 보자. 분자에 대해 무엇을 알 수 있는가?

$\cot\theta + \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$이고, 마찬가지로 $\cot\theta - \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$이다. 드무아브르 정리에 의해

$$(\cot\theta \pm \mathrm{i})^{2n+1} = \frac{\cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}.$$

두 식을 빼면 코사인은 소거되고 사인은 두 배가 되며, 2i로 나누면 다음을 얻는다.

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}. \qquad \blacksquare$$

2단계 다항식

이번에는 좌변을 이항정리(binomial theorem)로 전개한다. $c = \cot\theta$, $N = 2n+1$이라 하자.

> **생각해 보기** $(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N$에서 두 이항 전개의 어떤 항이 소거되고, 어떤 항이 두 배가 되는가?

i^j를 포함하는 항은 첫 번째 전개에서는 $+$ 부호로, 두 번째 전개에서는 $(-1)^j$와 함께 나타난다. 따라서 j가 짝수인 항은 소거되고 j가 홀수인 항은 두 배가 된다.

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = 2\sum_{j\ \text{홀수}} \binom{N}{j} c^{N-j}\,\mathrm{i}^j.$$

$j = 2k+1$이라 하면 $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}\,(-1)^k$이고 $c^{N-j} = c^{2n-2k} = (c^2)^{n-k}$이다. 2i로 나누면

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n$$

이다. 여기서 $x = \cot^2\theta$이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 어떤 θ에서 좌변이 영이 되는가? 이를 이용하여 다항식의 서로 다른 근 n개를 구하여라.

좌변은 $\sin(2n+1)\theta = 0$이지만 $\sin\theta \neq 0$일 때 영이 된다. 예를 들어 $m = 1, 2, \ldots, n$에 대해 $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$일 때가 그렇다. 이 각들은 모두 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 엄격히 놓여 있고, 이 구간에서 cot은 양수이며 순감소하므로, n개의 값 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$은 모두 서로 다르다. n차 다항식은 근을 많아야 n개 가지므로, 이것들이 근의 **전부**이다. ■

3단계 근 더하기

근의 합은 다음과 같다. $-(\text{계수} x^{n-1})/(\text{계수} x^n)$:

$$\sum_{m=1}^{n} \cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}. \qquad \blacksquare$$

$n = 1$로 확인해 보자. $\cot^2(\pi/3) = \frac{1}{3}$이고, $\frac{1\times 1}{3} = \frac{1}{3}$이다.

4단계 조임

$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$에서 역수를 취하고(부등식의 방향이 바뀐다) 제곱하면

$$\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta.$$

> **생각해 보기** $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$을 대입하고 $m = 1, \ldots, n$에 대해 모두 더해 보자. 바깥쪽 두 합은 무엇이 되는가? 가운데 합은 $\sum 1/m^2$과 어떤 관계가 있는가?

가운데 합은 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{m^2\pi^2}$이다. 소문항 (ii)에 의해 왼쪽 합은 $\frac{n(2n-1)}{3}$이고, 오른쪽 합은 $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$이다. 전체에 $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$을 곱하면

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

$n \to \infty$일 때 $\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}$과 $\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$은 모두 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$로 수렴한다(분자와 분모를 n^2으로 나누면 된다). 따라서 두 경계는 모두 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴하고, 그 사이에 갇힌 부분합(partial sum)도 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴해야 한다(그림 2.4.1). ■

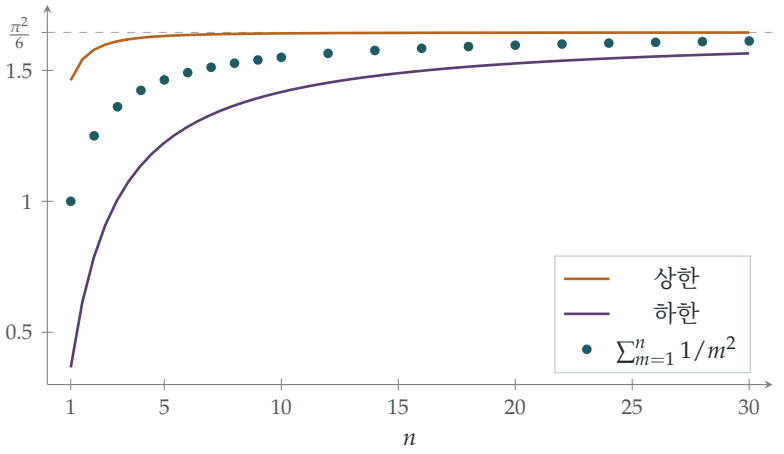


그림 2.4.1 소문항 (iii)의 조임. $\sum 1/m^2$의 부분합(청록색 점)은 하한(자주색)과 상한(주황색) 사이에 갇혀 있고, 두 경계는 모두 $\pi^2/6 \approx 1.645$로 수렴한다.

돌아보기

- **계수에서 얻는 정보.** 근 $\cot^2(m\pi/(2n+1))$을 더 간단한 꼴로 구한 적은 한 번도 없지만, 그 합은 정확히 구했다.
- **근사한 다음 조이기.** $\cot\theta$는 $1/\theta$와 근사적으로만 같지만, 그 오차는 양방향의 정확한 부등식으로 통제되었다.
- **유한에서 무한으로.** 마지막 단계 전까지 모든 단계는 유한한 합을 다루었다. 무한합은 부등식에서 $n \to \infty$로 보냈을 때 비로소 등장했는데, 이것이 무한을 안전하게 다루는 방법이다.

숨은 수학

오일러의 대담한 논증

1734년 오일러 자신의 논증은 현대의 기준으로 엄밀하지는 않았지만, 눈부셨다. 근이 $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots$이고 0에서의 값이 1인 다항식은 $(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$로 인수분해된다. 함수 $\frac{\sin x}{x}$는 0에서의 값이 1이고 근이 $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$이므로, 오일러는 이를 "무한 다항식"으로 취급하여 다음과 같이 썼다.

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots .$$

우변에서 x^2의 계수는 $-\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$이고, 매클로린 급수(Maclaurin series)

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$에서는 그 계수가 $-\frac{1}{6}$이다. 둘을 비교하면 $\pi^2/6$을 얻는다. 우리의 STEP 증명은 같은 아이디어의 유한하고 엄밀한 판이다. 근이 π의 배수와 연결된 다항식, 그리고 그 두 번째 계수가 핵심이다.

제곱의 역수를 넘어서

오일러는 이어서 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$, $\sum 1/m^6 = \pi^6/945$를 구했고, 일반적으로 $\sum 1/m^{2k}$는 π^{2k}의 유리수 배이며 여기에는 **베르누이 수**(Bernoulli numbers)가 관여한다. 홀수 거듭제곱은 전혀 다른 이야기이다. Section 2.3에서 보았듯이, $\sum 1/m^3$에 대한 공식은 아무도 알지 못한다. 이 합들은 리만 제타 함수(Riemann zeta function)의 값 $\zeta(2), \zeta(4), \ldots$이며, 이 함수가 복소수 인수에서 보이는 성질은 소수(prime)의 분포를 지배한다(Section 1.2).

다시 만나게 될 곳

대학에서는 $\zeta(2) = \pi^2/6$의 증명을 적어도 세 가지 더 만나게 된다. 하나는 **푸리에 급수**(Fourier series, 함수를 사인과 코사인의 합으로 나타내는 것)를 이용한 증명이고, 하나는 이중적분(double integral)을 이용한 증명이며, 또 하나는 복소해석학(complex analysis)을 이용한 증명이다. 그리고 이 수는 확률(probability)에서도 나타난다. 무작위로 고른 두 자연수가 공약수를 갖지 않을 확률은 $6/\pi^2 \approx 0.61$이다. (소수 p가 두 수를 모두 나눌 확률은 $1/p^2$이므로, 어떤 소수도 두 수를 모두 나누지 않을 확률은 $\prod_p (1 - 1/p^2)$이며, 오일러는 이 곱이 $1/\zeta(2)$와 같음을 보였다.) 확률의 극한에 π가 나타나는 또 다른 예는 Section 12.23의 주제이다.

사고 기술

조임, 그리고 근의 대칭함수

극한을 구하려면, 그 양을 극한이 같은 더 간단한 두 식 사이에 가두어라.

그리고 다루기 까다로운 수들의 합(또는 곱)이 필요할 때는, 그 수들을 근으로 갖는 다항식을 찾아보아라. 계수가 그 수들의 대칭적인 조합, 즉 대칭함수(symmetric functions)의 값을 거저 알려 줄 것이다.

더 도전하기

1 **1992년 판.** STEP III 1992, 8번 문제 (`step.maths.org/questions/92-s3-q8`)에 도전해 보아라. 이 절의 다항식과 비슷한 다항식을 이용하여 탄젠트의 제곱과 코시컨트의 제곱의 합을 정확히 구한다. (**힌트:** 근이 r_i인 다항식을 알고 있다면, 근이 $1/r_i$인 다항식은 무엇인가?)

2 **홀수의 제곱.** $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$으로부터 $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$임을 이끌어 내어라.

3 **네제곱.** 심화 $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$와 다항식의 계수를 이용하여 $\sum_{m=1}^{n} \cot^4\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$을 구하고, 조임을 변형하여 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$임을 증명하여라.

4 **얼마나 빠른가?** 소문항 (iii)의 하한을 이용하여 $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{4n}$임을 보여라. 부분합이 $\pi^2/6$과의 차이가 0.001 이내가 되려면 n이 얼마나 크면 충분하다고 이 부등식이 보장하는가? 실제 오차가 $1/n$에 가깝다는 사실과 비교해 보아라.

더 읽을거리

- **William Dunham, *Euler: The Master of Us All*** (Mathematical Association of America). 『오일러: 우리 모두의 스승』. 3장에서 바젤 문제의 이야기를 수학과 함께 온전히 들려준다.
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK*,** Chapter 9, "Three times $\pi^2/6$". 『하늘책의 증명』 9장 "$\pi^2/6$의 세 가지 증명". 이 절의 증명이 실려 있다.
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula*** (Princeton University Press). 『오일러 박사의 놀라운 공식』. 복소수, 푸리에 급수, 그리고 이와 같은 합들을 다룬다.

2.5 비에트의 곱

문제

STEP III 2022, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

도입

이 문제의 마지막 줄은 수학에서 가장 아름다운 공식 가운데 하나이며, 이런 종류의 공식으로는 가장 오래된 것 가운데 하나이다. 이 공식은 1593년 프랑스의 법률가이자 수학자인 비에트(François Viète)가 발표하였는데, 누군가가 π를 무한 과정의 결과로 **정확하게** 나타낸 것은 이것이 처음이었다. 비에트 이전에는 π를 근삿값으로만 다룰 수 있었지만, 그 이후로는 끝없이 계속하면 모든 자릿수를 알려 주는 공식으로 π를 정의할 수 있게 되었다.

이 공식은 신비롭게 보인다. 2의 제곱근이 겹겹이 중첩된 꼴은 도대체 어디에서 나오는 것일까? 이 문제는 그것이 배각 공식(double-angle formula)을 되풀이하여 사용한 결과임을 보여 주며, 그 과정에서 같은 방법으로 덜 알려진 또 하나의 공식, 곧 $\ln 2$에 대한 공식도 얻는다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** sinh의 배각 공식은 무엇인가? (확실하지 않다면 $\sinh 2y$와 $\sinh y \cosh y$를 지수함수로 나타내어 비교해 보아라.)

$\sin 2y = 2\sin y \cos y$와 똑같이 $\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$이다. 이 항등식 하나를 거듭 사용하는 것이 문제 전체를 이끌어 간다. 문제는 마지막 부분 직전까지 쌍곡선함수(hyperbolic functions)를 다루며, 마지막 부분에서 보통의 삼각함수로 넘어간다.

차근차근 풀기

1단계 거듭 반으로 나누기

$n = 1$인 경우는 $y = x/2$로 둔 배각 공식 그 자체이다.

$$\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right).$$

> **생각해 보기** n일 때 공식이 성립한다고 하자. 마지막 인수는 $\sinh(x/2^n)$이다. 이것을 어떻게 바꾸어 쓰면 $n+1$일 때의 공식을 얻을 수 있는가?

이 인수에 배각 공식을 적용하면 $\sinh(x/2^n) = 2\cosh(x/2^{n+1})\sinh(x/2^{n+1})$이다. 이를 대입하면

$$\sinh x = 2^{n+1}\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cosh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

이고, 이것이 $n+1$일 때의 공식이다. 따라서 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 n에 대하여 공식이 성립한다. ■

결론을 이끌어 내려면 양변을 x로 나눈 다음, 양변에 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$을 곱한다. 우변에서는 $2^n\sinh(x/2^n)\cdot\dfrac{x/2^n}{x\,\sinh(x/2^n)} = 1$이므로 cosh 항들의 곱만 남는다. ■

2단계 극한

급수 전개로부터 $y \neq 0$일 때

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots,$$

이고, 이것은 $y \to 0$일 때 1로 수렴하므로 그 역수 $y/\sinh y$도 1로 수렴한다. (더 엄밀하게 하고 싶다면 다음과 같이 하면 된다. 나머지 부분 $\frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots$에 나오는 계승은 모두 6 이상이므로, $0 < |y| < 1$일 때 나머지 부분은 많아야 $\frac{1}{6}(y^2 + y^4 + \cdots) = \frac{y^2}{6(1-y^2)}$이고, 이것은 0으로 수렴한다.)

이제 x를 고정하고 소문항 (i)에서 $n \to \infty$로 보내자. 그러면 $y = x/2^n \to 0$이므로 좌변은 $\dfrac{\sinh x}{x} \times 1$로 수렴한다. 우변은 부분곱(partial product)이므로, 부분곱은 $\dfrac{\sinh x}{x}$로 수렴한다. 이것이 바로 무한곱(infinite product)의 뜻이다. ■

3단계 $\ln 2$에 대한 공식

$x = \ln 2$이면 $e^{x/2} = \sqrt{2}$이므로

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2^{1/2} + 2^{-1/2}}{2} = \frac{2+1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

마찬가지로 $e^{x/4} = 2^{1/4}$이므로 $\cosh(x/4) = \dfrac{2^{1/4} + 2^{-1/4}}{2}$이고, 분자와 분모에 $2^{1/4}$을 곱하면 $\dfrac{2^{1/2} + 1}{2 \times 2^{1/4}}$을 얻는다. ■

생각해 보기 $\cosh(x/2^k)$의 일반적인 규칙은 무엇인가? 분모 $2 \times 2^{1/2^k}$을 모두 곱하면 어떻게 되는가?

같은 계산을 하면 모든 $k \geq 1$에 대하여

$$\cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1 + 2^{1/2^{k-1}}}{2} \times 2^{-1/2^k}.$$

이다. ($k = 1$이면 앞에서와 같이 $\frac{1+2}{2} \times 2^{-1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$이다.) $k = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여 곱하면 2의 거듭제곱들은 합쳐져서 $2^{-(1/2+1/4+1/8+\cdots)} = 2^{-1}$이 되고, 첫 번째 분수는 $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$이다. 따라서 무한곱은

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 + 2^{1/2}}{2} \times \frac{1 + 2^{1/4}}{2} \times \frac{1 + 2^{1/8}}{2} \cdots.$$

이다. 한편 $\sinh(\ln 2) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$이므로 $\dfrac{\sinh x}{x} = \dfrac{3}{4 \ln 2}$이다. 양변에서 인수 $\frac{3}{4}$가 약분되어

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1 + 2^{1/2}}{2} \times \frac{1 + 2^{1/4}}{2} \times \frac{1 + 2^{1/8}}{2} \cdots.$$ ■

가 남는다.

4단계 비에트의 공식

생각해 보기 소문항 (iv)에는 π가 들어 있으므로, 쌍곡선함수가 아니라 보통의 삼각함수에서 나와야 한다. sinh와 cosh 대신 sin과 cos을 넣어도 소문항 (i)과 (ii)의 모든 내용이 여전히 성립하는가?

성립한다. 귀납법에서는 배각 공식만 사용하였고, $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$이다. 극한에서는 $y \to 0$일 때 $\frac{\sin y}{y} \to 1$이라는 사실만 사용하였는데, 이는 같은 방법으로 $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \cdots$에서 따라 나온다. 따라서 $x \neq 0$이고 (x가 π의 배수가 아니어서 도중에 0이 되는 인수가 없을 때)

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdots.$$

이다.

잠깐, 직접 해 보기 좌변이 $2/\pi$가 되도록 x를 정하고, 처음 몇 개의 인수를 계산해 보아라. 반각 공식(half-angle formula) $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$일 때)이 유용할 것이다.

$x = \frac{\pi}{2}$로 두자. 그러면 $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$이고, 인수들은 $\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{16}, \ldots$이다. 첫 번째 인수는 $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 어떤 인수가 $\cos\theta = \frac{c}{2}$이면, 반각 공식에 의하여 다음 인수는

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+c/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+c}}{2}.$$

이다. 따라서 분자는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ...와 같이 이어지며, 각 항은 앞의 항에 2를 더한 뒤 제곱근을 취하여 얻는다. 이것이 비에트의 공식이다. ■

돌아보기

- **곱의 망원(telescoping).** 소문항 (i)의 항등식은 어떤 합들이 연쇄적으로 소거되는 것과 마찬가지로, 연쇄적으로 소거되는 곱이다.
- **유한 항등식이 먼저, 극한은 나중에.** Section 2.4에서와 같이, 모든 단계는 유한한 n에 대하여 정확하였고, 필요한 극한은 매우 간단한 $\frac{\sin y}{y} \to 1$뿐이었다.
- **쌍곡선함수와 원함수는 쌍둥이이다.** 두 함수 모두 같은 배각 공식과 같은 작은 각의 극한을 만족하므로, 같은 증명이 두 경우 모두에 통하였다. 이것은 우연이 아니다. Section 5.7에서 보겠지만 $\cosh(ix) = \cos x$이다.

숨은 수학

아르키메데스의 다각형

비에트의 공식에는 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라가는 기하학적 의미가 있다. 반지름이 1인 원에 내접하는 변이 2^n개인 정다각형(regular polygon)의 넓이는 $A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$이다. 변의 개수를 두 배로 늘리면 넓이에

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

이 곱해진다. 정사각형($A_2 = 2$)에서 시작하여 끝없이 두 배로 늘려 가면 넓이는 원의 넓이 π로 수렴한다. 따라서 $\pi = 2 \div \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\right)$이고, 이것이 비에트의 공식이다. 곱의 각 인수는 그림 2.5.1에서 이웃한 두 다각형의 넓이의 비이다.

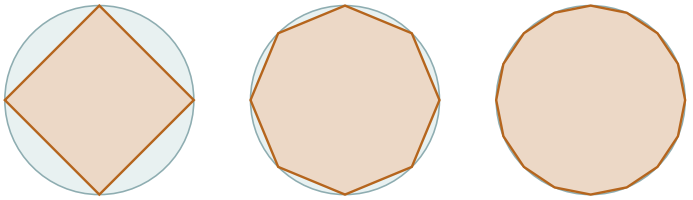


그림 2.5.1 반지름이 1인 원에 내접하는 변이 4개, 8개, 16개인 정다각형. 변의 개수를 두 배로 늘릴 때마다 넓이는 비에트의 곱의 인수 하나만큼씩 더 나누어지며, 넓이는 π를 향해 증가한다.

무한곱

비에트의 곱은 수학에서 최초의 무한곱이었다. 그 뒤로 다른 무한곱들이 이어졌다. 존 월리스(John Wallis)는 1655년에 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$을 발견하였고, $\frac{\sin x}{x}$에 대한 오일러(Euler)의 곱은 Section 2.4에서 나왔다. 대학에서는 무한곱이 언제 수렴(converge)하는지를 배우게 된다. 대략적으로 말하면, 작은 양수 a_n에 대하여 $\prod(1+a_n)$은 $\sum a_n$과 비슷하게 행동하는데, 이는 $\ln(1+a_n) \approx a_n$이기 때문이다. 여기서는 $1-\cos(\pi/2^n) \approx \frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$이고, 이 값은 매번 4분의 1로 줄어들므로 곱은 빠르게 수렴한다.

얼마나 빠른가?

인수 n개를 곱한 부분곱은 정확히 $\dfrac{1}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})}$과 같고, 그 오차는 약 $\frac{\pi^2}{6\cdot 4^{n+1}}$에 $\frac{2}{\pi}$를 곱한 값이다. 인수가 하나 늘어날 때마다 답은 약 4배 정확해지며, 이는 소수점 아래 자릿수로 약 0.6자리를 얻는 셈이다. 인수 열 개를 곱하면 $2/\pi$를 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확하게 얻는다. 좋은 결과이지만, 단계마다 정확한 자릿수를 두 배로 늘리는 Section 2.6의 방법에 비하면 어림도 없이 느리다.

사고 기술

항등식 반복 적용하기

$f(x)$와 $f(x/2)$를 잇는 항등식은 거듭하여 적용할 수 있다. 그 결과에 극한을 취하면 무한급수나 무한곱이 되는 경우가 많다.

n단계 뒤에 남는 "나머지" 항(여기서는 $2^n \sinh(x/2^n)$)을 찾아서 그 극한을 따로 구하라. 이 방식은 무한곱에서 프랙털의 구성에 이르기까지 해석학 곳곳에 나타난다.

더 도전하기

1 **1990년 판.** STEP I 1990, 8번 문제 (`step.maths.org/questions/90-s1-q8`)를 풀어 보아라. 이 문제는 sin의 배각 공식 외에는 아무것도 사용하지 않고, 이 절과는 다른 경로로 비에트의 곱에 도달한다. 어느 접근이 더 자연스럽게 느껴지는가?

2 **다른 각.** $\frac{\sin x}{x}$에 대한 곱에 $x = \frac{\pi}{3}$을 대입하여 $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$를 무한곱으로 나타내고, 처음 두 인수를 간단히 하여라.

3 **인수가 몇 개 필요한가?** 계산기를 사용하여 π를 소수점 아래 4자리까지 정확하게 얻으려면 비에트의 곱의 인수가 몇 개 필요한지 구하여라. 인수가 하나 늘어날 때마다 왜 약 0.6자리를 얻는지 설명하여라.

4 **$\ln 3$에 대한 공식.** $x = \ln 3$으로 두고 소문항 (iii)을 반복하여 $\frac{1}{\ln 3}$을 무한곱으로 나타내어라. $\frac{1}{\ln 3}$을 소수점 아래 두 자리까지 얻으려면 인수가 몇 개 필요한가? 이 곱은 왜 비에트의 곱보다 느리게 수렴하는가?

더 읽을거리

- **Petr Beckmann, *A History of* π** (St Martin's Press). 아르키메데스, 비에트, 월리스 등의 이야기를 열정적으로 들려준다.
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). Section 2.6의 방법을 포함하여 π 계산의 본격적인 수학을 다룬다. 이 장을 공부하고 나면 제1장은 읽을 수 있다.
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights*** (Princeton University Press). 비에트와 그의 곱에 관한 장이 있다.

2.6 산술–기하 평균

문제

STEP II 2024, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

도입

두 양수, 예를 들어 $\sqrt{2}$와 1을 생각하자. 이 두 수를 각각 두 수의 산술평균(arithmetic mean)과 기하평균(geometric mean)으로 바꾼다. 이 과정을 다시, 또다시 반복한다. 그러면 다음과 같은 일이 일어난다.

n	x_n (산술)	y_n (기하)
0	1.4142135623730950488	1
1	1.2071067811865475244	1.1892071150027210667
2	1.1981569480946342956	1.1981235214931201226
3	1.1981402347938772091	1.1981402346773072058
4	1.1981402347355922074	1.1981402347355922074

네 단계 만에 두 수는 소수점 아래 스무 자리까지 일치한다. 이 공통의 극한을 **산술기하평균**(arithmetic–geometric mean) $M(\sqrt{2},1) = 1.19814\ldots$이라고 한다.

1799년 5월 30일, 스물한 살의 카를 프리드리히 가우스(Carl Friedrich Gauss)는 일기에 $1/M(\sqrt{2},1)$이 전혀 다른 문제, 즉 렘니스케이트(lemniscate)라는 곡선의 호의 길이(arc length)에서 나타난 상수와 소수점 아래 열한 자리까지 일치한다는 것을 알아차렸다고 적었다. "이것은 분명 해석학의 완전히 새로운 분야를 열어 줄 것이다."라고 그는 썼다. 실제로 그렇게 되었다. 이 문제는 가우스의 발견 뒤에 있는 핵심 사실, 즉 산술기하평균(AGM)이 통상적인 어떤 방법으로도 계산할 수 없는 적분의 값을 구해 준다는 사실을 증명한다.

시작하기 전에

생각해 보기 서로 다른 두 양수의 산술평균이 기하평균보다 항상 큰 이유는 무엇인가? 한 줄로 증명할 수 있는가?

이것이 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이며, 소문항 (i)의 힌트가 한 줄 증명을 알려 준다. $x \neq y$일 때 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 > 0$이고, 이를 전개하면 $x+y > 2\sqrt{xy}$가 된다. 소문항 (i)의 모든 내용은 이 사실과, 각 평균이 그것을 만든 두 수 사이에 놓인다는 사실로부터 따라 나온다.

차근차근 풀기

1단계 두 수열이 서로 조여든다

$y_n < x_n$이면 $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$이므로 $x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n > 0$이고, 이는 $x_{n+1} > y_{n+1}$을 뜻한다. $y_0 < x_0$이므로 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대하여 $y_n < x_n$이다.

생각해 보기 x_n과 y_n의 산술평균이 x_n보다 작고, 기하평균이 y_n보다 큰 이유는 무엇인가?

$y_n < x_n$이기 때문이다. $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} < \frac{x_n+x_n}{2} = x_n$이고 $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n$이다. 따라서

$$y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < x_2 < x_1 < x_0.$$

y_n은 증가하고 위로 x_0에 의해 유계이므로, 정리에 의해 어떤 극한 M으로 수렴한다.

두 수의 차에 대해서는

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \frac{x_n + y_n}{2} - y_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n),$$

이고, 앞부분에 의해 이 차는 양수이다. 따라서 차는 매 단계마다 적어도 절반으로 줄어든다. 즉 $0 < x_n - y_n < (x_0 - y_0)/2^n$이며, 이는 0으로 수렴한다.

마지막으로 $x_n = y_n + (x_n - y_n)$은 M으로 수렴하는 수열과 0으로 수렴하는 수열의 합이므로 $x_n \to M$도 성립한다. ∎

2단계 치환

이 치환(substitution)은 뜬금없어 보이지만, 제곱근 안의 두 괄호가 모두 완전제곱식(또는 그에 가까운 꼴)이 되도록 설계된 것이다.

생각해 보기 $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$일 때 $t^2 + pq$를 계산하라. 그다음 $t^2 + \frac{1}{4}(p+q)^2$을 계산하라. 둘 중 어느 것이 깔끔하게 인수분해되는가?

먼저

$$t^2 + pq = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) + pq = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2.$$

다음으로

$$\begin{aligned} t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2 &= \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2} + p^2 + 2pq + q^2\right) \\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}. \end{aligned}$$

또한 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{pq}{x^2}\right) = \dfrac{x^2+pq}{2x^2}$이다.

잠깐, 직접 해 보기 이것들을 종합하라. x가 0부터 ∞까지 움직일 때 t는 어떻게 되는가? t에 대한 적분은 무엇이 되는가?

x가 0부터 ∞까지 증가할 때, t는 (도함수가 양수이므로) $-\infty$부터 ∞까지 증가한다. $x > 0$에 대하여

$$\sqrt{\left(t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2\right)\left(t^2+pq\right)} = \frac{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}{2x} \cdot \frac{x^2+pq}{2x},$$

이므로

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cdots}} = \frac{x^2+pq}{2x^2} \cdot \frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}.$$

따라서 t에 대한 적분은 $2\mathrm{I}(p,q)$와 같다.

한편 t에 대한 적분은 I에서 p와 q를 각각 $\frac{1}{2}(p+q) = \mathrm{a}(p,q)$와 $\sqrt{pq} = \mathrm{g}(p,q)$로 바꾼 것과 정확히 같은 꼴인데, 다만 실수 전체에 걸쳐 적분한다는 점만 다르다. 피적분함수(integrand)는 t에 대한 우함수(even function)이므로, t에 대한 적분은 $2\mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big)$이다. 두 결과를 비교하면

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big). \qquad \blacksquare$$

3단계 적분의 값 구하기

생각해 보기 (x_0, y_0)에서 시작하여 이 항등식을 반복해서 적용하라. n단계 후 $\mathrm{I}(x_0, y_0)$는 무엇과 같은가? $n \to \infty$일 때 어떻게 되는가?

모든 n에 대하여 $\mathrm{I}(x_0,y_0)=\mathrm{I}(x_1,y_1)=\mathrm{I}(x_2,y_2)=\cdots=\mathrm{I}(x_n,y_n)$이다. $n\to\infty$일 때 두 인수는 모두 M으로 수렴하고,

$$\mathrm{I}(M,M)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{M^2+x^2}=\left[\frac{1}{M}\arctan\frac{x}{M}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2M}.$$

따라서

$$\mathrm{I}(x_0,y_0)=\frac{\pi}{2M}. \qquad \blacksquare$$

문제에서는 "$\mathrm{I}(x_n,y_n)\to\mathrm{I}(M,M)$"이라는 단계를 그대로 받아들이도록 허용하지만, 이것은 깔끔하게 정당화할 수 있다. p나 q를 크게 하면 피적분함수가 작아지고, $y_n<x_n$이므로

$$\frac{\pi}{2x_n}=\mathrm{I}(x_n,x_n)<\mathrm{I}(x_n,y_n)<\mathrm{I}(y_n,y_n)=\frac{\pi}{2y_n}.$$

양쪽 경계가 모두 $\frac{\pi}{2M}$으로 수렴하고, $\mathrm{I}(x_n,y_n)$은 모든 n에 대하여 같은 수 $\mathrm{I}(x_0,y_0)$이므로, 이 값은 $\frac{\pi}{2M}$이어야 한다. Section 2.4에서처럼 여기서도 조임 정리(squeeze theorem)가 쓰인 것이다.

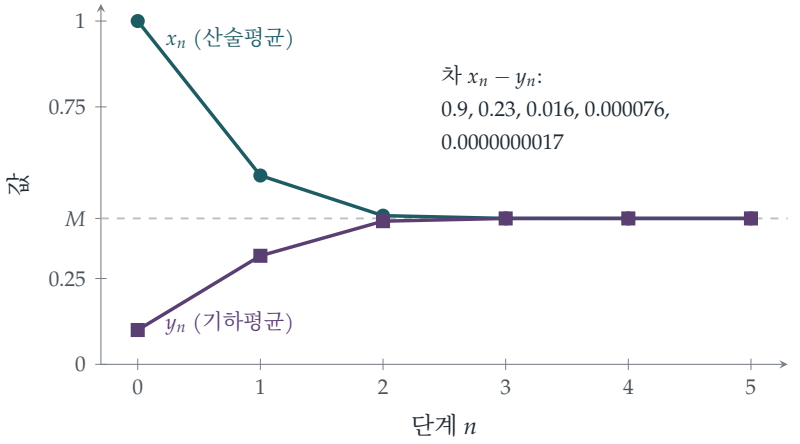


그림 2.6.1 $x_0=1$과 $y_0=0.1$의 산술기하평균. 산술평균 x_n(청록색)은 감소하고 기하평균 y_n(자주색)은 증가하며, 두 수열은 공통의 극한 $M=0.425040709\ldots$에 놀라울 만큼 빠르게 다가간다. 일단 두 값이 가까워지면, 정확한 자릿수가 매 단계마다 대략 두 배가 된다.

돌아보기

- **서로 조여드는 두 단조수열.** 하나는 증가하고 하나는 감소하며, 그 차가 0으로 줄어든다. 이것은 두 수열이 공통의 극한을 가짐을 증명하는 가장 깔끔한 방법이다.
- **불변량.** $\mathrm{I}(x_n,y_n)$이라는 양은 단계가 바뀌어도 결코 변하지 않는다. 다른 모든 것이 움직이는 동안 고정된 채로 남는 것을 찾는 것은 수학에서 가장 강력한 아이디어 가운데 하나이다.

- **영리한 치환은 추측이 아니라 설계의 결과이다.** 이 치환은 제곱근 안의 식이 인수분해되도록 선택된 것이다.

숨은 수학

문제가 말해 주는 것보다 더 빠르다

소문항 (i)은 차가 매 단계마다 적어도 절반으로 줄어든다는 것을 보여 주는데, 이는 단계마다 이진 자릿수가 대략 하나씩 늘어난다는 뜻이다. 그런데 도입의 표는 훨씬 더 극적인 것을 보여 준다. 정확한 자릿수가 매 단계마다 대략 **두 배**가 된다$(2, 4, 10, 21, 43, \ldots)$. 실제로

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\bigr)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\bigl(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\bigr)^2},$$

이므로 각 차는 대략 이전 차의 **제곱**에 상수를 곱한 것이다. 이를 **이차 수렴**(quadratic convergence)이라 하며, Section 2.7에서 제대로 공부할 것이다.

타원적분

우리의 적분 $\mathrm{I}(p, q)$는 모습을 바꾼 **완전 타원적분**(complete elliptic integral)이다. 이것은 타원의 호의 길이를 계산할 때 나타나는 적분으로, 여러분이 아는 함수들로는 나타낼 수 없다. 가장 유명한 응용은 진자(pendulum)이다. 주기에 대한 A 레벨(A level, 영국의 대학 입시 과정) 공식 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$는 작은 진폭에 대해서만 성립하는 근삿값이다. 각 θ_0에서 놓은 진자의 정확한 주기는

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\bigl(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\bigr)},$$

로, 산술기하평균으로 값을 구하는 타원적분이다. $\theta_0 = 90^\circ$일 때 실제 주기는 단순한 공식이 예측하는 것보다 약 18% 더 길다. 가우스의 일기 내용은 8자 모양의 곡선인 렘니스케이트에 관한 것이었는데, 그 전체 호의 길이에는 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$가 들어 있다. 이 적분은 모습만 바꾼 $\mathrm{I}(\sqrt{2}, 1)$과 같으므로, 산술기하평균으로 그 값을 구할 수 있다.

π 계산하기

1976년에 Richard Brent와 Eugene Salamin은 각자 독립적으로 가우스의 아이디어를 매 단계마다 정확한 자릿수를 두 배로 늘리는 π 계산 알고리즘으로 바꾸어 놓았다. 스물다섯 단계면 수천만 자리를 얻는다. 이런 종류의 알고리즘은 1980년대와 1990년대에 π 계산의 기록을 경신하는 데 쓰였으며, 이와 같은 이차 수렴 알고리즘은 오늘날 높은 정밀도가 필요한 곳이면 어디서나 표준으로 쓰인다. 단계마다 약 0.6자리씩 늘어나는 Section 2.5의 비에트(Viète)의 곱과 비교해 보라.

사고 기술

불변량을 찾아라

어떤 과정이 여러 가지를 한꺼번에 바꿀 때는, 변하지 않는 양을 찾아라. 그리고 모든 것이 단순해지는 과정의 끝에서 그 값을 구하라.

여기서 과정은 산술기하평균 단계였고, 불변량(invariant)은 적분 I였다. 과정의 끝에서 두 인수는 같아졌고 적분은 초등적으로 계산할 수 있었다. 불변량은 역학의 에너지 보존(10장)에서부터 어떤 퍼즐이 불가능하다는 증명에 이르기까지 수학 곳곳에 나타난다.

더 도전하기

1 **이차 수렴.** 항등식 $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{(x_n - y_n)^2}{2(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n})^2}$을 증명하고, 이로부터 $x_{n+1} - y_{n+1} \le \dfrac{(x_n - y_n)^2}{8y_0}$임을 보여라.

2 **손으로 계산하기.** 계산기를 사용하여 $M(2,1)$을 소수점 아래 여섯 자리까지 구하라. 몇 단계가 필요했는가?

3 **스케일링.** $\lambda > 0$에 대하여 $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$이고 $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$임을 보여라. 이 두 사실이 $\mathrm{I}(x_0, y_0) = \pi/(2M)$과 모순되지 않음을 확인하라.

4 **진자.** 위의 공식을 이용하여, 60°에서 놓은 진자의 주기가 작은 각 근사의 예측보다 얼마나 더 긴지 유효숫자 세 자리까지 구하라.

더 읽을거리

- **David Cox, "The arithmetic–geometric mean of Gauss"**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984). 역사와 수학을 다룬 고전적인 해설로, 앞부분은 미적분만 알면 읽을 수 있다.
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). 산술기하평균과 π의 고속 계산에 관한 결정판이라 할 만한 책이다.
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters). 실험 수학을 다룬 책으로, 가우스의 발견처럼 수치적 우연의 일치를 포착하여 이루어진 발견들을 담고 있다.

2.7 여섯 자리인가, 육백 자리인가

문제

STEP II 2023, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

도입

$\sqrt{2}$를 근사하는 간단한 방법이 두 가지 있다. 둘 다 1에서 시작하고, 덧셈, 곱셈, 나눗셈만 사용한다. 열 단계를 거친 뒤 첫 번째 방법은 소수점 아래 약 8자리까지 정확하다. 두 번째 방법은 700자리 넘게 정확하다.

두 번째 방법이 $\sqrt{2}$에 대해 더 영리해서 이런 차이가 생기는 것은 아니다. 차이는 오차의 **모양**에 있다. 첫 번째 방법에서는 각 단계가 오차에 일정한 비율을 곱하고, 두 번째 방법에서는 각 단계가 오차를 **제곱**한다. 이 문제는 이 사실을 엄밀하게 다루며, 그 과정에서 수치해석(numerical analysis)의 핵심 아이디어 하나를 소개한다. 수치해석은 모든 계산기, 모든 일기예보, 모든 공학 시뮬레이션의 바탕이 되는 분야이다.

시작하기 전에

각 수열의 처음 몇 항을 분수로 계산해 보자.

$$x_n: \quad 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots \qquad y_n: \quad 1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \dots$$

생각해 보기 두 목록에서 눈에 띄는 점이 있는가? (두 목록에 모두 나타나는 분수를 살펴보라.)

모든 y_n은 x 목록에 나타나지만, 점점 더 뒤쪽에 나타난다. $y_2 = x_3$, $y_3 = x_7$이고, 일반적으로 $y_n = x_{2^n-1}$이다. 두 번째 방법은 같은 근삿값의 수열을 지수적으로 빠르게 건너뛰며 나아가는 것이다. 이 점을 기억해 두자. 그 이유는 끝에서 설명한다.

차근차근 풀기

1단계 첫 번째 방법은 항상 1 이상이다

$x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n + 1}$로 쓸 수 있다. $x_n \geq 1$이면 $x_n + 1 > 0$이므로 $x_{n+1} > 1$이다. $x_0 = 1$이므로, 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대해 $x_n \geq 1$이다. ■

2단계 첫 번째 방법의 오차

> **생각해 보기** 문제는 오차를 $x_n - \sqrt{2}$가 아니라 $x_n^2 - 2$로 측정한다. $x_{n+1}^2 - 2$를 x_n에 관한 하나의 분수로 나타내어라. 분자에서 무엇을 알 수 있는가?

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n + 2)^2 - 2(x_n + 1)^2}{(x_n + 1)^2} = \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n + 1)^2} = \frac{2 - x_n^2}{(x_n + 1)^2}.$$

분자는 정확히 $-(x_n^2 - 2)$이다. 따라서 $x_{n+1}^2 - 2$와 $x_n^2 - 2$는 부호가 반대이고(근삿값이 $\sqrt{2}$의 양쪽을 번갈아 오간다), $x_n \geq 1$이면 $(x_n + 1)^2 \geq 4$이므로

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n + 1)^2} \leq \frac{1}{4}|x_n^2 - 2|. \qquad \blacksquare$$

3단계 열 단계

이를 열 번 적용하면 $|x_{10}^2 - 2| \leq 4^{-10}|x_0^2 - 2| = 4^{-10} = \frac{1}{1048576} < 10^{-6}$이다. 부호를 보면, $x_0^2 - 2 = -1 < 0$이고 부호가 번갈아 바뀌므로 모든 짝수 n에 대해 $x_n^2 - 2 < 0$이다. 따라서 $x_{10}^2 < 2$이고, 이 둘을 합치면 $2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2$를 얻는다. ■

x_n^2의 오차는 각 단계에서 많아야 $\frac{1}{4}$배가 된다. 이를 **선형 수렴**(*linear convergence*)이라 한다. 단계마다 정확한 자릿수가 일정한 개수만큼 늘어난다(여기서는 적어도 $\log_{10} 4 \approx 0.6$자리이고, 실제로는 0.77에 더 가깝다).

4단계 두 번째 방법의 오차

> **생각해 보기** $y_{n+1} - \sqrt{2}$를 하나의 분수로 나타내어라. 분자를 보면 완전제곱식이 떠오를 것이다.

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{(y_n - \sqrt{2})^2}{2y_n}. \qquad \blacksquare$$

$y_n > 0$이면 우변은 음이 아니므로 $y_{n+1} \geq \sqrt{2} > 1$이다. $y_0 = 1$이므로, 귀납법에 의해 모든 n에 대해 $y_n \geq 1$이다. ■(실제로 모든 $n \geq 1$에 대해 $y_n \geq \sqrt{2}$이다. 즉 첫 단계 이후 두 번째 방법은 항상 위쪽에서 $\sqrt{2}$에 다가간다.)

5단계 오차의 제곱

$e_n = y_n - \sqrt{2}$라 하자. 그러면 $n \geq 1$일 때 $e_n \geq 0$이고, $y_n \geq 1$이므로 $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2y_n} \leq \dfrac{e_n^2}{2}$이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$일 때, $n \geq 1$에 대해 $e_n \leq 2r^{2^n}$임을 귀납법으로 증명하여라. 기저 단계를 주의 깊게 확인하라.

기저 단계(*base case*): $e_1 = \dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2 \cdot 1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$이고, $2r^2 = 2 \cdot \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$이다. 두 값이 같으므로 기저 단계가 (등호로 정확히) 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*): $e_n \leq 2r^{2^n}$이면

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}}. \qquad \blacksquare$$

6단계 600자리

$\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$이므로 $r < \frac{1}{4}$이고, 따라서

$$0 \leq y_{10} - \sqrt{2} \leq 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{10}} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

그런데 $2^{10} = 1024 > 10^3$이므로 $2^{-2047} < 2^{-2040} = (2^{10})^{-204} < 10^{-612}$이고, 이는 분명히 10^{-600}보다 작다. $\blacksquare$

돌아보기

- **오차 점화식을 찾아라.** 두 부분 모두 새 오차를 이전 오차의 정확한 함수로 나타내어 풀었다. 나머지는 모두 여기서 따라 나왔다. 이러한 식을 오차 점화식(error recurrence)이라 한다.
- **선형 대 이차.** "새 오차 $\leq$ 상수 $\times$ 이전 오차"이면 단계마다 자릿수가 일정한 개수만큼 늘어난다. "새 오차 $\leq$ 상수 $\times$ (이전 오차)^2"이면 단계마다 정확한 자릿수의 개수가 두 배가 된다(그림 2.7.1).
- **제곱된 양이 부호를 결정한다.** (ii)에서 한 단계 후의 오차는 제곱을 양수로 나눈 것이므로 결코 음수가 될 수 없다. 즉 반복은 위쪽에서 다가간다.

숨은 수학

뉴턴 방법

두 번째 방법은 $f(y) = y^2 - 2$에 **뉴턴 방법**(Newton's method)을 적용한 것이다. 뉴턴 방법은 추측값 y를 y에서의 접선(tangent)이 축과 만나는 점으로 바꾸는 과정을 반복하여 f의 근을 찾는다.

$$y_{\text{새}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2 - 2}{2y} = \frac{y^2 + 2}{2y}.$$

단순근(simple root) α 근처에서 테일러 전개(Taylor expansion)를 하면 새 오차가 대략 $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{이전 오차})^2$임을 알 수 있다. 이것이 뉴턴 방법이 이차 수렴(quadratic convergence)하는 이유이다. "y와 $2/y$의 평균을 취한다"는 이 특별한 경우는 바빌로니아인들도 알고 있었다. 오늘날 YBC 7289라고 불리는 기원전 1700년경의 점토판에는 $\sqrt{2}$가 60진법으로, 백만분의 일보다 작은 오차로 적혀 있다.

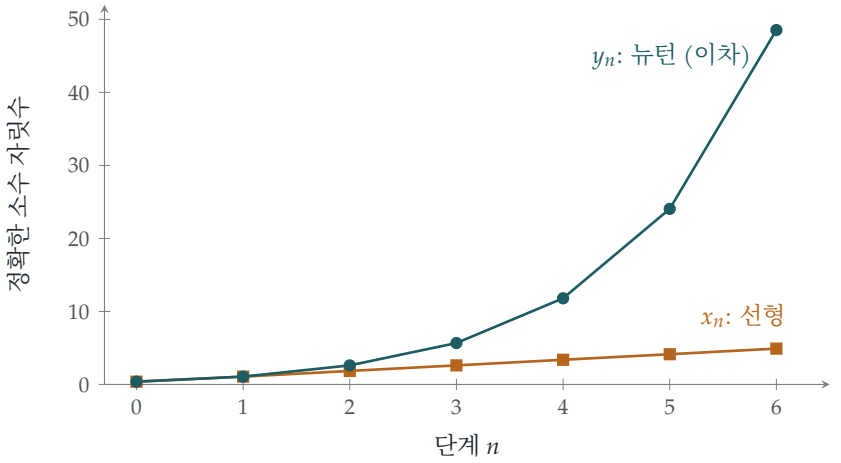


그림 2.7.1 각 방법을 n단계 적용한 뒤 얻은 $\sqrt{2}$의 정확한 소수 자릿수. 선형 방법은 단계마다 약 0.77자리씩 늘어나고, 뉴턴 방법은 단계마다 정확한 자릿수가 대략 두 배가 되어 $n = 10$에서는 약 780자리에 이른다.

고정점과 수렴 속도

두 방법 모두 $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$인 $u_{n+1} = g(u_n)$ 꼴이므로, Section 2.2의 거미줄 그림(cobweb diagram)에서처럼 $\sqrt{2}$는 **고정점**(fixed point)이다. 고정점 α 근처에서 오차는 각 단계마다 약 $g'(\alpha)$배가 된다. 첫 번째 방법에서는 $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$이고 $g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3 - 2\sqrt{2}) \approx -0.17$이다. 음의 부호는 부호가 번갈아 바뀌는 현상을 설명하고, 0.17은 단계마다 0.77자리씩 늘어나는 것을 설명한다($\log_{10}(1/0.17) \approx 0.77$). 뉴턴 방법에서는

$g'(\alpha) = 0$이므로 일차항이 사라지고, 오차는 그다음 항, 곧 제곱항이 결정한다. $g'(\alpha) = 0$인 반복을 설계하는 것이 빠른 수치 계산법의 기술이다.

같은 분수가 나타나는 이유

분수 $x_n = p_n/q_n$은 $p_{n+1} = p_n + 2q_n$과 $q_{n+1} = p_n + q_n$을 만족하고, $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$이며 부호가 번갈아 나타난다. 이들은 **펠 방정식**(Pell's equation) $p^2 - 2q^2 = \pm 1$의 해이며, 연분수(continued fraction) $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$의 근사분수(convergent)이다. 이들은 $1 + \sqrt{2}$의 거듭제곱에서 나온다. 즉 $p_n + q_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{n+1}$이다. 뉴턴 방법의 한 단계는 $p + q\sqrt{2}$를 제곱한다(직접 확인해 보라. $(p + q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$이고, $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$는 정확히 p/q에 뉴턴 공식을 적용한 것이다). 제곱하면 지수가 두 배가 되므로 $y_n = x_{2^n-1}$이다. 같은 "제곱" 패턴이 Section 2.8의 반복을 이끈다.

사고 기술

답이 아니라 오차를 분석하라

근삿값이 어떻게 움직이는지 이해하려면, 한 단계의 오차가 바로 앞 단계의 오차에 어떻게 의존하는지 적어 보라.

이것이 수치해석의 출발점이다. 답 자체($\sqrt{2}$)는 두 방법에서 같다. 다른 것, 그리고 실제로 중요한 것은 오차가 어떻게 변해 가는가이다.

더 도전하기

1 **펠 방정식.** $y_n = p/q$가 기약분수이고 $p^2 - 2q^2 = 1$이면, $y_{n+1} = \dfrac{p^2 + 2q^2}{2pq}$도 이 방정식을 만족함을 보여라. $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$임을 확인하라.

2 **세 제곱근.** $f(y) = y^3 - 2$에 대한 뉴턴 방법을 적고, $\alpha = \sqrt[3]{2}$일 때 새 오차가 $\dfrac{(y_n - \alpha)^2(2y_n + \alpha)}{3y_n^2}$임을 보여라. 이로부터 $y_n > \alpha$이면 새 오차가 이전 오차의 제곱의 많아야 $\frac{1}{\alpha}$배임을 이끌어 내라. (**힌트:** $\alpha^3 = 2$를 이용하라.)

3 **나누지 않고 나누기.** $f(y) = \frac{1}{y} - a$에 대한 뉴턴 방법이 나눗셈이 필요 없는 $y_{n+1} = y_n(2 - ay_n)$을 줌을 보여라. $e_n = 1 - ay_n$이라 하면 $e_{n+1} = e_n^2$임을 보여라. (컴퓨터 프로세서는 이와 같은 반복을 이용해 나눗셈을 한다.)

4 **뉴턴 방법이 실패할 때.** 유일한 근이 0인 $f(y) = y^{1/3}$에 뉴턴 방법을 적용하라. 어떤 값에서 시작하든 각 단계가 근으로부터의 거리를 두 배로 만듦을 보여라. 오차 공식의 어떤 가정이 성립하지 않는가?

더 읽을거리

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*** (Cambridge University Press). 수치해석 입문. 학부의 표준 교재로, 제1장에서 고정점 반복과 뉴턴 방법을 다룬다.
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics*** (Princeton University Press). 프린스턴 응용수학 안내서. 뉴턴 방법과 수치해석에 관한 짧은 글들이 실려 있으며, 전문가들이 폭넓은 독자를 위해 썼다.
- **David Fowler & Eleanor Robson, "Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context"**, *Historia Mathematica* 25 (1998). 고대 바빌로니아 수학의 제곱근 근삿값을 YBC 7289를 중심으로 살펴본 논문.

2.8 제곱하고 2 빼기

문제

STEP III 2021, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

"제곱하고 2를 뺀다"는 수열(sequence)을 만들어 내는 규칙 가운데 거의 가장 단순한 것이다. 그런데도 이 규칙은 실수직선을 두 세계로 나눈다. $[-2, 2]$ 바깥에서 시작하면 수들은 지수적인 속도보다도 빠르게 무한대로 폭발한다. 안쪽에서 시작하면 수들은 영원히 그 안에 갇혀 있으면서, 정확한 의미에서 완전히 예측할 수 없는 방식으로 떠돈다. 이것은 혼돈(*chaos*)의 가장 단순한 예 가운데 하나이다.

같은 규칙을 아주 큰 정수로 수행하면, 메르센 수(Mersenne number) $2^p - 1$이 소수(prime)인지 효율적으로 판정하는 뤼카–레머 판정법(Lucas–Lehmer test)의 엔진이 된다. 이 판정법으로 현재의 최대 소수 기록과, 알려진 가장 큰 소수들 대부분이 발견되었다. 이 문제는 이야기의 탈출하는 쪽을 탐구하고, 수열을 완전히 풀 수 있게 해 주는 숨은 공식을 찾아낸다.

시작하기 전에

몇 가지 시작값을 넣어 보자. $a = 3$이면 $3, 7, 47, 2207, \ldots$이다. $a = 1$이면 $1, -1, -1, -1, \ldots$이다. $a = 0$이면 $0, -2, 2, 2, 2, \ldots$이다. $a = 0.3$이면 $0.3, -1.91, 1.648, 0.716, -1.487, 0.211, \ldots$이다.

> ? **생각해 보기** $[-2, 2]$ 안의 수는 왜 결코 탈출하지 못할까? $-2 \le x \le 2$일 때 $x^2 - 2$의 최댓값과 최솟값은 무엇인가?

$-2 \le x \le 2$이면 $0 \le x^2 \le 4$이므로 $-2 \le x^2 - 2 \le 2$이다. 구간 $[-2, 2]$는 자기 자신 안으로 보내진다. 이것이 소문항 (ii)의 절반이 될 것이다.

차근차근 풀기

1단계 탈출

생각해 보기 소문항 (i)에는 4^{n-1}이 들어 있는데, 이는 2 위로 떨어진 거리가 매 단계 적어도 네 배가 된다는 것을 암시한다. $x_n = 2 + d$라 하자. x_{n+1}을 d로 나타내면 무엇인가?

$x_{n+1} = (2+d)^2 - 2 = 2 + 4d + d^2$이다. 따라서 $d \geq 0$이면 2 위로 떨어진 새 거리는 $4d + d^2 \geq 4d$이다.

이제 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. $n = 1$일 때 $x_1 = a = 2 + 4^0(a-2)$이다. $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$이면 $d = x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2) \geq 0$이므로

$$x_{n+1} - 2 \geq 4d \geq 4^n(a-2). \qquad \blacksquare$$

2단계 $|a| > 2$일 때, 그리고 그때에만 탈출한다

생각해 보기 "필요충분조건(if and only if)"은 두 개의 별도 증명을 뜻한다. 소문항 (i)이 거의 주는 것은 어느 방향이며, 무엇이 빠져 있는가?

$|a| > 2$이면: $a > 2$일 때는 소문항 (i)에 의해 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2) \to \infty$이다. $a < -2$일 때는 첫 단계에서 부호가 정해진다. $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$이고, x_2부터의 수열은 $x_2 > 2$에서 시작한 같은 수열이므로 무한대로 발산한다.

역으로: $|a| \leq 2$이면 $a \in [-2, 2]$이고, 앞의 관찰에 의해 모든 항이 $[-2, 2]$ 안에 머문다. 유계(bounded)인 수열은 무한대로 발산할 수 없다. $\blacksquare$

3단계 숨은 공식

소문항 (iii)은 만만치 않아 보인다. 이 문항에 도전하기 전에 x_n에 대한 공식을 찾아 두는 것이 좋다.

생각해 보기 $a > 2$이면 $a = t + \dfrac{1}{t}$인 수 $t > 1$이 존재한다. (왜 그런가?) x_2와 x_3를 t로 나타내면 무엇인가?

함수 $t + 1/t$는 t가 1에서 ∞로 갈 때 2에서 ∞까지 증가하므로, 모든 $a > 2$를 이런 꼴로 쓸 수 있다. 그러면

$$x_2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad x_3 = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 - 2 = t^4 + \frac{1}{t^4},$$

이고, 귀납법에 의해

$$x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}.$$

제곱하고 2를 빼는 것은 단지 지수를 두 배로 만드는 일이다. 이제 문제를 다룰 수 있게 되었다.

4단계 곱이 연쇄적으로 소거된다

생각해 보기 $\left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)$는 무엇인가? 그 결과에 $t^2 + \frac{1}{t^2}$을 곱하면 어떻게 되는가?

$\left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^2 - \frac{1}{t^2}$이고, 다음으로 $\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = t^4 - \frac{1}{t^4}$이며, 이런 식으로 계속된다. 각 인수 x_k는 두 거듭제곱의 차에서 지수를 두 배로 만든다. 따라서

$$\left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 x_2 \cdots x_n = t^{2^n} - t^{-2^n}.$$

잠깐, 직접 해 보기 $x_{n+1}^2 - 4$를 t로 계산하고, 위의 곱과 비교해 보라.

$$x_{n+1}^2 - 4 = \left(t^{2^n} + t^{-2^n}\right)^2 - 4 = \left(t^{2^n} - t^{-2^n}\right)^2.$$

$t > 1$이므로 $t^{2^n} - t^{-2^n} > 0$이고, 따라서 $\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = t^{2^n} - t^{-2^n} = \left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 x_2 \cdots x_n$이다. 그러므로

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

이고, 이것이 모든 n에 대하여 y_n과 같을 필요충분조건은 $A = t - \frac{1}{t}$이다. 마지막으로 $\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 4 = a^2 - 4$이므로 조건은 $A = \sqrt{a^2 - 4}$, 즉

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

($A > 0$이므로 이 값은 요구대로 2보다 크다.) ■

5단계 y_n은 수렴하는가?

이 a의 값에 대하여

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

소문항 (ii)에 의해 $x_{n+1} \to \infty$이므로 $\frac{4}{x_{n+1}^2} \to 0$이고 $y_n \to 1$이다. 이 수열은 1로 수렴(converge)한다. ■

따라서 무한곱(infinite product) $x_1 x_2 x_3 \cdots$는 정확히 x_{n+1}/A와 같은 속도로 커진다. 빠르게 커지는 항들의 곱이 얼마나 빨리 커지는지를 정확히 알아낸 것이다.

돌아보기

- **불변 영역(invariant region).** $[-2,2]$는 자기 자신 안으로 보내지며, 이 한 가지 사실이 소문항 (ii)의 절반을 해결한다.
- **선형화하는(linearise) 치환.** $a = t + 1/t$로 놓으니 "제곱하고 2를 빼기"가 "지수를 두 배로 만들기"로 바뀌었다. 복잡한 비선형 거동이 단순해졌다.
- **다시 연쇄 소거(telescoping).** Section 2.5의 곱에서처럼, 각 인수가 다음 인수와 맞물리기 때문에 많은 인수의 곱이 간단히 줄어들었다.

숨은 수학

질서와 혼돈

$[-2,2]$ 안에서는 무슨 일이 일어날까? 거기서는 $a = t + 1/t$가 통하지 않지만($|a| \geq 2$가 필요하다), 삼각함수 버전이 통한다. $a = 2\cos\theta$라 하자. 그러면 $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$이고, 일반적으로

$$x_n = 2\cos\bigl(2^{n-1}\theta\bigr).$$

따라서 구간 안에서 이 사상은 단지 **각을 두 배로 만든다**. 해롭지 않게 들리지만, 각을 두 배로 만드는 것은 혼돈적이다. θ/π를 이진법(binary)으로 써 보자. 두 배로 만들면 소수점이 오른쪽으로 한 자리 이동하면서 맨 앞자리 숫자가 버려진다. 50단계 뒤에 x_n은 θ/π의 이진 전개에서 51번째 자리 숫자에 의존하므로, 시작값에 10^{-15}(보통 컴퓨터의 정밀도)만큼의 오차가 있으면 50단계 뒤의 답은 전혀 믿을 수 없게 된다. 이러한 초기 조건에 대한 민감한 의존성(sensitive dependence on initial conditions)이 혼돈의 특징이며, 그림 2.8.1에 나타나 있다. 사상 $x \mapsto x^2 - 2$는 변수를 바꾸면 유명한 로지스틱 사상(logistic map) $x \mapsto 4x(1-x)$와 동등하며, 이 사상은 Section 8.7에서 다시 만난다.

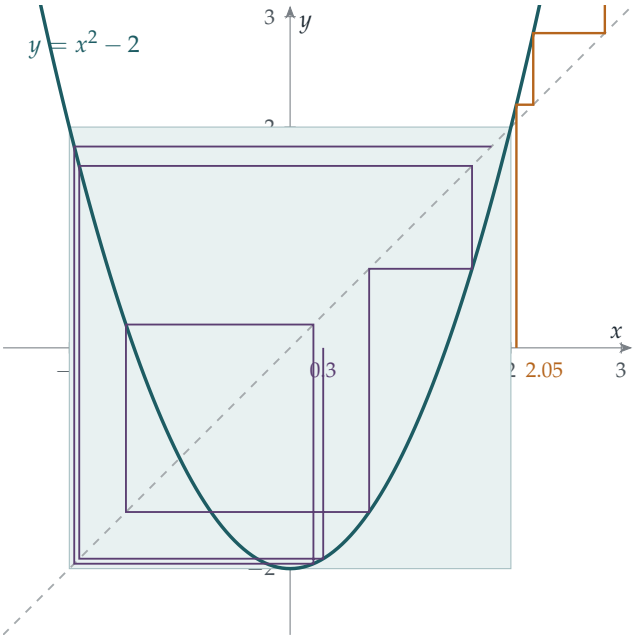


그림 2.8.1 $x_{n+1} = x_n^2 - 2$의 거미줄 그림(cobweb diagram). 0.3(자주색)에서 시작하면 궤도(orbit)는 음영 처리된 정사각형 $[-2,2]^2$ 안에 영원히 머물며 혼돈적으로 떠돈다. 바로 바깥인 2.05(호박색)에서 시작하면 궤도는 탈출한다: $2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

가장 큰 소수 찾기

메르센 수는 $M_p = 2^p - 1$이다. 1876년에 에두아르 뤼카(Édouard Lucas)가 발견하고 1930년에 데릭 레머(Derrick Lehmer)가 완성한, M_p가 소수인지(p가 홀수인 소수일 때) 판정하는 놀라운 방법이 있다. $s_0 = 4$에서 시작하여 제곱하고 2를 빼는 일을 되풀이하되, 매번 M_p를 법으로 하여 줄인다. 그러면

$$M_p\text{는 소수} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

$M_7 = 127$의 경우 $s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$이므로 127은 소수이다. 이 문제와의 연결 고리는 치환이다. $t = 2 + \sqrt{3}$으로 두면 $4 = t + 1/t$이므로 $s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$이고, 판정법의 증명에는 Section 1.6의 가우스 정수(Gaussian integers)와 비슷한 $a + b\sqrt{3}$ 꼴의 수의 산술이 쓰인다. 각 단계에 제곱 한 번만 필요하므로 이 판정법은 매우 빠르며, 그래서 현재의 기록 보유자를 포함하여 알려진 가장 큰 소수들 대부분이 메르센 소수이다(모두가 그런 것은 아니다. $a^{2^n} + 1$과 같은 다른 특수한 꼴에도 그 나름의 빠른 판정법이 있다). 이 글을 쓰는 시점의 기록은 2024년에 발견된 $2^{136279841} - 1$로, 41백만 자리가 넘는 수이다.

망델브로 집합

-2를 임의의 상수 c로 바꾸고 복소수를 허용하자: $z \mapsto z^2 + c$. 0의 궤도가 유계로 남는 c들의 집합이 **망델브로 집합**(*Mandelbrot set*)이다. 우리의 사상은 $c = -2$로, 망델브로 집합의 가장 왼쪽 점이며, 궤도가 유계로 남는 시작값들의 집합(이 사상의 **쥘리아 집합**(*Julia set*))은 바로 소문항 (ii)에서 찾은 구간 $[-2, 2]$이다. 거의 모든 다른 c에 대해서는 이 집합이 프랙털(fractal)이 된다.

사고 기술

> **변수를 바꾸어 사상을 단순하게 만들기**
>
> 반복 과정이 복잡해 보이면, 그것을 두 배로 만들기나 상수 더하기처럼 단순한 것으로 바꾸어 주는 치환을 찾아보라.
>
> 여기서는 $x = t + 1/t$와 $x = 2\cos\theta$가 $x \mapsto x^2 - 2$를 두 배로 만들기로 바꾸었다. 동역학계(dynamical systems) 이론에서는 이것을 **켤레**(*conjugacy*)라 부르며, 이를 찾는 것이 계를 완전히 이해하는 열쇠가 되는 경우가 많다.

더 도전하기

1 **구간 안에서.** $a = 2\cos\theta$이면 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$임을 증명하라. $x_3 = a$이지만 $x_2 \neq a$인 a의 값을 모두 구하라. (**힌트:** 2π를 법으로 하여 $4\theta \equiv \pm\theta$가 되기를 원한다.)

2 **손으로 하는 뤼카–레머 판정.** 판정법을 이용하여 $M_5 = 31$은 소수이고 $M_{11} = 2047$은 소수가 아님을 보여라. (M_{11}에는 아홉 단계가 필요하며, 계산기가 도움이 된다. 2047을 인수분해하여 결론을 확인하라.)

3 **구체적인 예.** $A = \frac{3}{2}$로 두자. a와 t를 구하고, 공식 $y_1 = \sqrt{x_2^2 - 4}/x_2$를 수치로 확인하라.

4 **연쇄 소거되는 합.** 심화 $a = t + 1/t$이고 $t > 1$일 때

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{t - t^{-1}}{t^{2^n} - t^{-2^n}}.$$

임을 보여라. 항등식 $\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{z}{z^2-1}$에 $z = t^{2^n}$을 넣어 다음을 유도하라.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \cdots = \frac{1}{t}.$$

$a = 3$일 때 이를 수치로 확인하라.

더 읽을거리

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?*** (Penguin). 로지스틱 사상을 포함하여 혼돈을 다룬 고전적인 대중서이다.
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 표준적인 학부 입문서이며, 10장은 이와 같은 1차원 사상을 다룬다.
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes*** (Fourth Estate). 메르센 소수를 찾는 이야기가 담겨 있다.

2.9 e에 다가가는 분수들

문제

STEP II 2021, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

e를 잘 근사하는 분수는 어떻게 찾을 수 있을까? 급수(series) $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots$를 중간에서 끊을 수도 있지만, 그렇게 얻은 분수는 분모(denominator)의 크기에 비해 그리 좋은 근사가 아니다. 이 문제는 훨씬 더 영리한 방법을 쓴다. 적분(integral)들의 모임을 만드는데, 각 적분은 "정수 + 정수 × e" 꼴의 작은 수이다. $a+be$가 아주 작으면 e는 $-a/b$에 매우 가깝고, 따라서 이 적분들은 $\frac{19}{7}$, $\frac{193}{71}$, $\frac{2721}{1001}$, ...와 같은 훌륭한 분수들의 수열을 건네준다.

동시에 작으면서 "관심 있는 수의 정수 결합" 꼴인 적분이라는 이 같은 기법은 수학에서 가장 깊은 무리성 증명(irrationality proof)들의 바탕에 있다. 여기에는 e가 초월수임을 보인 에르미트(Hermite)의 증명과 $\zeta(3)$이 무리수임을 보인 아페리(Apéry)의 증명이 포함된다.

시작하기 전에

$[0,1]$에서 피적분함수(integrand) $\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$를 살펴보자.

생각해 보기 $[0,1]$에서 $t(1-t)$의 최댓값은 얼마인가? 이것은 n이 커질 때 T_n의 크기에 대해 무엇을 알려 주는가?

$t(1-t)$의 최댓값은 $t=\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{4}$이다. 따라서 피적분함수는 많아야 $\frac{e}{4^n n!}$이고, 이 값은 놀라울 만큼 빠르게 줄어든다(그림 2.9.1). 이 작음이 이야기의 절반이다. 나머지 절반, 곧 T_n이 a_n+b_ne라는 특별한 꼴을 갖는다는 사실은 부분적분(integration by parts)에서 나온다.

차근차근 풀기

1단계 두 번 미분하기

$p(t) = t^n(1-t)^n$이라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$p'(t) = nt^{n-1}(1-t)^n - nt^n(1-t)^{n-1} = nt^{n-1}(1-t)^{n-1}(1-2t).$$

생각해 보기 한 번 더 미분해 보자. 두 항이 나오는데, 공통인수 $nt^{n-2}(1-t)^{n-2}$를 묶어 낸다. 요구된 꼴에 맞추려면 $(1-2t)^2$을 $t(1-t)$로 나타내야 한다. 어떻게 하면 될까?

$n\,[t(1-t)]^{n-1}(1-2t)$를 곱의 미분법으로 미분하면($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)] = 1-2t$임에 주의한다)

$$\begin{aligned} p''(t) &= n(n-1)[t(1-t)]^{n-2}(1-2t)^2 - 2n[t(1-t)]^{n-1} \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\Big[(n-1)(1-2t)^2 - 2t(1-t)\Big]. \end{aligned}$$

이제 $(1-2t)^2 = 1-4t+4t^2 = 1-4t(1-t)$이므로 괄호 안은 $(n-1) - 4(n-1)t(1-t) - 2t(1-t) = (n-1) - 2(2n-1)t(1-t)$이다. ■

2단계 두 번 부분적분하기

생각해 보기 $p(t)$는 $t=0$과 $t=1$에서 모두 0이다. $n \geq 2$일 때 $p'(t)$는 어떠한가? $p(t)e^t$를 부분적분할 때 이것이 왜 중요한가?

$n \geq 2$이면 $p'(t)$는 인수 $t^{n-1}(1-t)^{n-1}$을 가지므로 역시 양 끝에서 0이 된다. 두 번 부분적분하면 모든 경계항이 0이다.

$$\int_0^1 p\,e^t\,\mathrm{d}t = \Big[p\,e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 p'\,e^t\,\mathrm{d}t = -\Big[p'\,e^t\Big]_0^1 + \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t.$$

1단계에서 $p''(t) = n(n-1)\,t^{n-2}(1-t)^{n-2} - 2n(2n-1)\,t^{n-1}(1-t)^{n-1}$이다. $n!$으로 나누면

$$\frac{p''(t)}{n!} = \frac{t^{n-2}(1-t)^{n-2}}{(n-2)!} - 2(2n-1)\frac{t^{n-1}(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

e^t를 곱하고 적분하면 $T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1}$을 얻는다. ■

3단계 정수 구조

$T_0 = \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e-1$이다. $T_1 = \int_0^1 (t-t^2)e^t\,\mathrm{d}t$에 대해서는 부분적분으로 $\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = 1$과 $\int_0^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t = e-2$를 얻으므로 $T_1 = 1-(e-2) = 3-e$이다.

생각해 보기 $T_0 = -1 + 1 \cdot e$이고 $T_1 = 3 + (-1) \cdot e$이다. 왜 모든 T_n이 정수 a_n, b_n에 대해 $a_n + b_n e$ 꼴이어야 하는가?

강한 귀납법(strong induction)을 쓴다. 정수 계수로 $T_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-2}e$이고 $T_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}e$이면

$$T_n = (a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}) + (b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1})e,$$

이고 새 계수들도 정수이다. ■

4단계 작으므로 정보를 준다

$0 < t < 1$에서 피적분함수는 양수이고, $t^n(1-t)^n \le 1$이며 $e^t < e$이다. 따라서

$$0 < T_n < \int_0^1 \frac{e}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{e}{n!}.$$

잠깐, 직접 해 보기 $0 < a_n + b_n e < \dfrac{e}{n!}$를 $|b_n|$으로 나누어 보자. 이것은 e와 $-a_n/b_n$ 사이의 거리에 대해 무엇을 말해 주는가?

$|b_n|$은 양의 정수이므로 1 이상이고, 이것으로 나누면

$$\left| e - \left(\frac{-a_n}{b_n} \right) \right| = \frac{|a_n + b_n e|}{|b_n|} < \frac{e}{n!\,|b_n|} \le \frac{e}{n!}.$$

우변은 0으로 수렴(converge)하므로 $-a_n/b_n \to e$이다. ■

점화식(recurrence)으로 계산한 처음 몇 개는 다음과 같다.

n	2	3	4	5	6
$-a_n/b_n$	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$	$\frac{49171}{18089}$	$\frac{1084483}{398959}$
오차	4×10^{-3}	3×10^{-5}	1×10^{-7}	3×10^{-10}	5×10^{-13}

분수 $\frac{2721}{1001}$은 분모가 네 자리에 불과한데도 소수점 아래 6자리까지 정확하다.

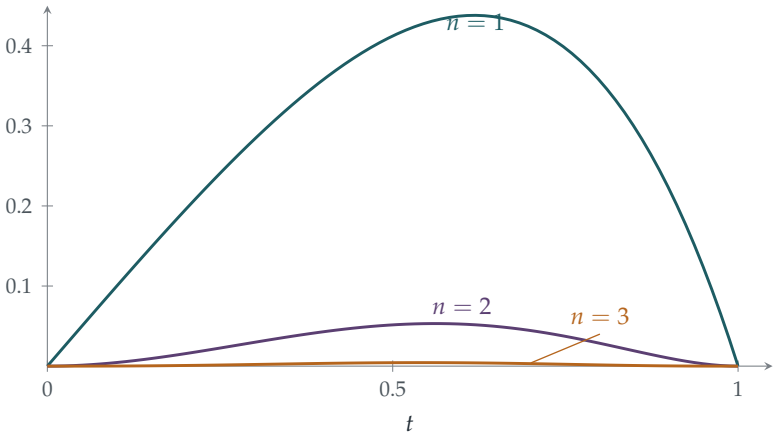


그림 2.9.1 $n = 1, 2, 3$일 때의 피적분함수 $\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$. 각각은 $(0,1)$에서 양수이므로 각 T_n은 양수이다. 또한 매우 빠르게 줄어들어 $n = 3$에서는 곡선이 거의 보이지 않는다. 양수이지만 아주 작다는 것, 이것이 바로 논증에 필요한 것이다.

돌아보기

- **점화식을 만들어 내는 부분적분.** 다항식과 그 도함수가 양 끝에서 0이 되었기 때문에, 부분적분으로 경계항 없는 깔끔한 점화식을 얻었다.
- **구조와 크기를 함께.** 점화식은 T_n이 $a_n + b_n e$ 꼴임을 보여 주었고, 부등식은 그것이 작다는 것을 보여 주었다. 어느 하나만으로는 e의 근사에 대해 아무것도 말할 수 없다.
- **필요 없는 것은 계산하지 마라.** 문제는 a_n과 b_n을 구하지 말라고 했고, 논증에서도 그 값은 전혀 필요하지 않았다. 필요한 것은 그것들이 정수라는 사실뿐이었다.

숨은 수학

e가 무리수라는 또 하나의 증명

이 문제는 유명한 정리의 바로 앞에서 멈춘다. 양의 정수 p, q에 대해 $e = p/q$라고 가정하자. 그러면

$$q\,T_n = qa_n + b_n p$$

는 정수이다. 그런데 $0 < q\,T_n < \frac{qe}{n!}$이고, n이 충분히 크면 우변은 1보다 작다. 따라서 qT_n은 0과 1 사이에 엄격히 놓인 정수가 되어야 하는데, 이는 불가능하다. 그러므로 e는 무리수(irrational number)이다. 이것은 Section 1.4의 "0과 1 사이에 정수를 가두기" 아이디어를 급수 대신 적분으로 구현한 것이다. 바로 이런 종류의 적분, 곧 $t^n(1-t)^n$ 같은

다항식을 포함한 적분을 샤를 에르미트(Charles Hermite)는 1873년에 사용하여 e가 **초월수**(*transcendental number*)임을, 즉 정수 계수 다항식의 근이 될 수 없음을 증명했다.

연분수

표에 나온 분수들은 단지 좋은 정도가 아니라 **가장 좋은 것**에 속한다. 오일러(Euler)가 찾은 e의 연분수(continued fraction)는 아름다운 규칙을 가진다.

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

그리고 그 수렴분수(convergent)는 $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$이다. 우리가 얻은 $-a_n/b_n$은 정확히 세 번째마다의 수렴분수이다. 이보다 작은 분모를 가진 어떤 분수도 e에 더 가까이 가지 못한다. 유리수만이 유한 연분수를 가지므로, 오일러가 찾은 이 규칙 자체가 e가 무리수라는 최초의 증명이었다.

아페리의 기적

1978년 로제 아페리(Roger Apéry)는 $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$이 무리수라는 증명을 발표했다. 이는 오일러 이래로 풀리지 않았던 문제였다(Section 2.3 참고). 그의 증명은 너무나 뜻밖이어서 청중은 처음에 그것을 믿지 않았다. 1년 뒤 Frits Beukers는 다음 꼴의 적분을 이용한 짧은 증명을 찾았다.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

여기서 P_n은 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n(1-x)^n\right)$로부터 만들어진다. 이 적분들은 작고, 양수이며, 통제된 분모로 나눈 "정수 + 정수 $\times\, \zeta(3)$" 꼴이다. 바로 이 문제의 전략 그대로이다. $\zeta(5)$나 $e + \pi$가 무리수인지는 아직도 알려져 있지 않다.

사고 기술

작지만 0은 아닌

어떤 양이 몇몇 수의 정수 결합이라는 것이 알려져 있고, 동시에 작지만 0은 아니라는 것도 알려져 있다면, 그 양은 정보를 담고 있다. 근사에 관한 정보, 그리고 때로는 무리성에 관한 정보이다.

이 패턴은 "구조는 대수에서, 크기는 해석학(analysis)에서"이다. 이것은 정수론(number theory) 전반에 걸쳐 되풀이되며, 해석학과 대수가 가장 생산적으로 만나는 지점 가운데 하나이다.

더 도전하기

1 **점화식 돌려 보기.** 점화식으로 $n = 2, 3, 4$일 때의 a_n과 b_n을 계산하고 표의 분수를 확인하라. b_n의 부호가 번갈아 바뀜을 보여라.

2 **더 날카로운 부등식.** $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$임을 보여라. 이것은 $-a_n/b_n$의 오차 추정을 얼마나 개선하는가?

3 **무리성 증명.** 위 상자에 있는 논증을 꼼꼼히 써 보라. $T_n > 0$이라는 사실은 정확히 어디에서 쓰이는가?

4 **다른 가중치.** 심화 e^t를 e^{2t}로 바꾸어 문제를 다시 풀어라(즉 $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\,dt$). U_n에 대한 점화식을 구하고, U_n이 유리수 계수를 갖는 1과 e^2의 결합임을 보인 다음, 이 논증으로 여전히 e^2이 무리수임을 증명할 수 있는지 탐구하라. (Section 1.4과 비교하라.)

더 읽을거리

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). 에르미트의 방법을 포함하여 무리성 증명을 다룬 고전적인 짧은 책이다.
- **Alfred van der Poorten, "A proof that Euler missed"**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979). 아페리의 증명과 그것이 받아들여진 과정을 생생하게 전하는 글이다.
- **Julian Havil, *The Irrationals*** (Princeton University Press). 일반적인 수학 독자를 위해 쓴 무리수의 역사이다.

우리가 배운 것

우리는 제논(Zeno)에서 출발했고, 무한 과정(infinite process)에 관한 세 가지 질문을 던졌다. 무한 과정에 답이 있다는 것은 무슨 뜻인가, 답이 있다는 것을 어떻게 증명하는가, 그리고 얼마나 빨리 답에 다가가는가. 아홉 개의 STEP 문제를 거친 지금, 우리가 어디까지 왔는지 정리해 보자.

1. 무한 과정에 답이 있다는 것은 무슨 뜻인가?

Section 2.1에서 우리는 그 언어를 배웠다. 수열(sequence)의 장기적 행동에 관한 명제는 "어떤 점 m이 존재하여 모든 $n \geq m$에 대하여..."라는 꼴을 띤다. 이를 증명한다는 것은 m을 실제로 제시한다는 뜻이고, 반증한다는 것은 제시된 어떤 m도 실패함을 보인다는 뜻이다. 극한(limit)의 정의는 맨 앞에 "모든 허용 오차 $\varepsilon > 0$에 대하여"라는 양화사(quantifier)를 하나 더 붙인다. 이것으로 제논의 역설은 해소된다. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$은 어느 지점부터는 원하는 어떤 허용 오차 안으로도 1에 가까워지며, "합이 1이다"라는 말의 뜻은 그것이 전부이다.

이 언어는 엉터리 논증을 막아 주기도 한다. "x를 그 무한 표현식이라 두자"라는 간단한 논증은 Section 2.2에서 황금비(golden ratio)에 대해 올바른 답을 주었지만, 그것은 극한이 존재한다는 것을 따로 증명할 수 있었기 때문이다. 같은 논증을 $1 - 1 + 1 - \cdots$에 적용하면 아무 의미도 없는 답이 나온다.

2. 극한을 모르면서 어떻게 수렴을 증명할 수 있는가?

이 장의 대부분의 절은 몇 가지 도구 가운데 하나를 사용했다.

- **단조(monotone)이고 유계(bounded).** 위로 유계인 증가수열은 반드시 수렴한다(Section 2.2, Section 2.6). 양수 항들의 부분합(partial sum)에도 같은 사실이 성립한다(Section 2.3). 대학에 가면 이것이 사실은 실수 자체에 관한 명제, 즉 **완비성**(*completeness*)이라는 성질임을 보게 된다.
- **비교(comparison).** 양수 항으로 이루어진 급수는 수렴하는 급수보다 작으면 수렴하고, 발산하는 급수보다 크면 발산한다. 항들을 묶음으로 나누면 비교가 쉬워졌고, 이를 통해 조화급수(harmonic series)는 발산하지만 Kempner의 솎아 낸 급수는 수렴함을 보였다(Section 2.3).

- **조임(squeeze).** 구하려는 양을 극한이 같은 더 단순한 두 양 사이에 가둔다. 이렇게 하여 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$을 증명했고(Section 2.4), AGM 적분을 엄밀하게 계산했다(Section 2.6).
- **유한 단계에 대한 정확한 공식.** Section 2.5와 Section 2.8에서는 망원 소거(telescoping)를 이용해 n단계 후의 정확한 식을 구했고, 맨 마지막에 가서야 $n \to \infty$로 보냈다.

극한이 존재한다는 것을 알고 나면, 황금비에 대한 $L = (2L+1)/(L+1)$처럼 점화식(recurrence)에서 "$n \to \infty$로 보내어" 그 값을 구할 수 있는 경우가 많다. 그러나 순서가 중요하다. 존재가 먼저이고, 값은 그다음이다.

3. 얼마나 빨리?

여기서 이 장은 몇 가지 놀라움을 안겨 주었다. 비에트(Viète)의 곱(Section 2.5)은 인수 하나마다 십진 자릿수를 약 0.6자리씩 얻는다. Section 2.7의 $\sqrt{2}$를 구하는 간단한 방법은 한 단계마다 약 0.8자리를 얻는다. 뉴턴(Newton)의 방법과 산술기하평균(AGM, arithmetic-geometric mean)(Section 2.6)은 단계마다 맞는 자릿수를 **두 배로** 늘린다. 뉴턴의 방법을 열 번만 적용해도 $\sqrt{2}$의 자릿수를 700자리 넘게 얻는다. 차이는 오차 점화식의 꼴에 있다. "새 오차 $\approx$ 상수 $\times$ 이전 오차"(선형(linear))와 "새 오차 $\approx$ 상수 $\times$ (이전 오차)^2"(이차(quadratic))의 차이이다. 그리고 Section 2.8에서는 반대쪽 극단을 보았다. 2보다 조금 큰 곳에서 시작하면 사상 $x \mapsto x^2 - 2$는 수를 지수적인 속도보다 더 빨리 밀어내고, $[-2, 2]$ 안에서는 아주 작은 오차를 증폭시켜 결국 예측 가능성을 모두 잃게 만든다.

속도는 이론에서도 중요하다. Section 2.9의 적분들은 e에 매우 빠르게 다가가는 분수들을 만들어 내며, 이를 통해 e가 무리수(irrational)임이 증명된다. 어떤 분수 p/q도 다른 분수들에 의해 그렇게 빨리 근사될 수는 없기 때문이다.

4. 해석학을 위한 도구 상자

방법	사용한 곳
양화사 제시하기와 부정하기	"결국"(2.1)
단조 유계 수열	황금비(2.2); AGM(2.6)
비교와 응축(condensation)	조화급수와 Kempner 급수(2.3)
조이기	$\pi^2/6$(2.4); AGM 적분(2.6)
근의 대칭함수(symmetric function)	$\cot^2$ 값들의 합(2.4)
망원 소거되는 합과 곱	비에트(2.5); $x^2 - 2$(2.8)
불변량(invariant)	AGM 적분(2.6)
오차 점화식	선형 수렴과 이차 수렴(2.7)
사상을 단순하게 만드는 변수 변환	$a = t + 1/t$, $a = 2\cos\theta$(2.8)
작지만 0이 아닌 정수 결합	e의 근사(2.9)

이 도구들 중 얼마나 많은 것이 "사용해도 되는 정리"를 곁들여 주어졌는지 눈여겨보자. STEP은 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem)를 그냥 건네주거나, 극한이 존재한다고 가정하라고 말해 주는 경우가 많다. 대학에서는 그런 정리들을 실수의 공리(axiom)로부터 직접 증명하게 되며, 어떤 논증이 극한의 존재를 슬그머니 가정하고 있을 때 그것을 스스로 알아차릴 것을 요구받는다. 풀이를 읽을 때 다음과 같이 묻는 것은 매우 좋은 습관이다. **정확히 어디에서 극한을 취했으며, 그것은 정당했는가?**

다음은 어디로

이 장의 아이디어들은 책의 나머지 부분 전체에 걸쳐 이어진다.

- 고정점(fixed point)과 거미줄 그림(cobweb diagram)은 Section 8.7에서 다시 등장하는데, 그곳에서는 혼돈(chaos)을 보이는 사상이 정확한 해를 가진다는 것이 밝혀진다.
- 조화수(harmonic number) $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$은 Section 9.11에서는 확률에, Section 11.12에서는 역학에 나타난다.
- 확률에서 비롯되어 극한 속에 π가 나타나는 또 다른 예는 Section 12.23에 있다.
- 극한을 신중하게 다루는 태도는 제3장의 주제이며, 제3장은 Section 3.1, 즉 옳아 보이지만 실제로는 틀린 논증들로 시작한다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***: 대학 1학년 해석학이 어떤 것인지, 그리고 그것에 어떻게 대처할지를 다룬다.
- **David Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis***: 수학자들이 신중해질 수밖에 없게 만든 수수께끼들에서 출발하여, 역사를 통해 해석학을 가르친다.
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press): 케임브리지의 해석학자가 바로 이 책의 독자 같은 사람들을 위해 쓴 책이다.
- **Julian Havil, *Gamma*와 William Dunham, *Euler: The Master of Us All***: 이 장에 나온 많은 급수 뒤에 숨은 이야기를 들려준다.

제논은 무한이 운동을 불가능하게 만든다고 생각했다. 수학자들이 그에게 답하기까지는 이천 년이 걸렸고, 그 답은 지금까지 발견된 가장 강력한 아이디어 가운데 하나로 밝혀졌다. 바로 끝나지 않는 과정에 대해 정확한 명제를 세우는 방법이다. 여러분은 이제 그 언어의 첫 몇 단어를 알게 되었다. 그 언어를 유창하게 말하는 법은 해석학(analysis)에서 배우게 될 것이다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 먼저 제대로 풀어 보라.

2.1 "결국"이란 무슨 뜻인가

1. $(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$의 모든 항은 음이 아니므로 $(1+x)^n \geq 1 + nx > nx$이다. $y = 1 + x$로 두면, $n > K/(y-1)$이기만 하면 $y^n > n(y-1) > K$이다. 그다음 항을 이용하면 $y^n > \binom{n}{2}(y-1)^2$이므로, $n > 1 + 2K/(y-1)^2$이기만 하면 $y^n/n > \frac{1}{2}(n-1)(y-1)^2 > K$이다.

2. $n \geq m_1$에서 $s_n \leq t_n$이고 $n \geq m_2$에서 $t_n \leq s_n$이면, $n \geq \max(m_1, m_2)$에서 $s_n = t_n$이다.

3. 예를 들어 n이 짝수일 때 $s_n = n + 0.6$, n이 홀수일 때 $s_n = n$으로 두고, n이 홀수일 때 $t_n = n + 0.6$, n이 짝수일 때 $t_n = n$으로 둔다. 두 수열은 모두 증가하고, 각 수열이 다른 수열보다 큰 경우가 무한히 많다.

4. $n \geq 4$이면 $2^n \leq n!$이다(귀납법(induction)으로: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq (n+1)\,n!$). $n^{10} \leq 2^n$의 경우, 이 부등식은 2부터 58까지의 모든 n에서 성립하지 않고 모든 $n \geq 59$에서 성립하므로, 가장 작은 m은 59이다.

2.2 극한으로서의 황금비

1. 귀납법: $u_1 = 1 = F_2/F_1$이고, $u_n = F_{n+1}/F_n$이면 $u_{n+1} = 1 + F_n/F_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1}$이다.

2. $\varphi - 1 = 1/\varphi$이므로 $u_{n+1} - \varphi = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi} = -\frac{u_n - \varphi}{\varphi u_n}$이다. $u_n \geq 1$이므로 $|u_{n+1} - \varphi| \leq |u_n - \varphi|/\varphi$이고, $|u_1 - \varphi| < 1$이므로 $|u_n - \varphi| \leq \varphi^{-(n-1)}$이다.

3. $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$는 $\psi^2 = \psi + 1$을 만족하므로 $1 + 1/\psi = \psi$이다. 거꾸로 거슬러 올라가면 $u_{n-1} = \frac{1}{u_n - 1}$이다. 0에서 시작하면 $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{8}, \ldots$을 얻는다. 즉 어떤 $k \geq 1$에 대해 $u_1 = -F_{k-1}/F_k$이다. 이 값들은 ψ에 가까워진다.

4. 고정점(fixed point)은 $v = 1 + \frac{1}{1+v}$, 즉 $v^2 = 2$를 만족한다. 오차(error)에는 매번 $-\frac{1}{(1+v_n)(1+\sqrt{2})}$가 곱해지고 그 크기는 많아야 $\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$이므로 $v_n \to \sqrt{2}$이다. 또한

$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$이다.

2.3 발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌

1. $\ln N + 0.5772 = 10$에서 $N \approx 12\,400$을 얻는다. 100을 넘으려면 약 $e^{99.4} \approx 1.5 \times 10^{43}$개의 항이 필요하다.

2. $k = 2$일 때 블록 n은 많아야 $2^n \cdot 4^{-n} = 2^{-n}$이므로, 합은 많아야 $\sum_{n\ge 0} 2^{-n} = 2$이다. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$를 정확히 더하고 $r = 4$부터의 블록들을 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}$로 위에서 어림하면 약 1.86을 얻는다. (참값은 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$이다.)

3. $1/(r \ln r)$의 경우 2^n부터 $2^{n+1} - 1$까지의 블록은 적어도 $\frac{2^n}{2^{n+1}(n+1)\ln 2} = \frac{1}{2(n+1)\ln 2}$이고, 이 값들은 조화급수(harmonic series)처럼 더해지므로 발산(divergence)한다. $1/(r(\ln r)^2)$의 경우 블록은 많아야 $\frac{1}{n^2(\ln 2)^2}$이고, $\sum \frac{1}{n^2}$은 수렴(convergence)한다.

4. 허용되는 숫자: 맨 앞자리에는 7가지, 나머지 각 자리에는 8가지 선택이 있으므로, 허용되는 d자리 수는 많아야 $7 \cdot 8^{d-1}$개이고 각각은 적어도 10^{d-1}이다. 따라서 합은 많아야 $\sum_{d\ge 1} 7(0.8)^{d-1} = \frac{7}{1-0.8} = 35$이다.

2.4 $\pi^2/6$

1. 수 $\tan^2 = 1/\cot^2$들은 계수를 거꾸로 배열한 다항식(reversed polynomial) $\sum_j (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} y^j$의 근(roots)이고, 이 근들의 합은 $\binom{2n+1}{2n-1} = n(2n+1)$이다. 그러면 $\operatorname{cosec}^2 = 1 + \cot^2$에서 $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$을 얻는다.

2. 짝수 번째 항들의 합은 $\frac{1}{4}\sum \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{24}$이므로, 홀수 번째 항들의 합은 $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$이다.

3. 근들에 대해 $e_1 = \frac{n(2n-1)}{3}$이고 $e_2 = \binom{2n+1}{5}/\binom{2n+1}{1}$이므로 $\sum \cot^4 = e_1^2 - 2e_2 = \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}$이다. $\cot^4\theta < \theta^{-4} < (1+\cot^2\theta)^2$로 조이고(squeezing) $n \to \infty$로 보내면 $\frac{\pi^4}{90}$을 얻는다.

4. 하한(lower bound)에서 $\sum_{m\le n} \frac{1}{m^2} > \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$이므로, 오차는 $\frac{\pi^2(6n+1)}{6(2n+1)^2} < \frac{\pi^2}{4n}$보다 작다. 이로써 $n \ge 2468$이면 정확도 0.001이 보장된다. 실제로는 $n \approx 1000$이면 충분하다.

2.5 비에트의 곱

1. $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 반복해서 쓰면 곱이 연쇄적으로 소거된다(telescopes). $n \to \infty$로 보내고(그러면 $2^n \sin(\alpha/2^n) \to \alpha$이다) $\alpha = \frac{\pi}{2}$로 둔 뒤, $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$와 $\cos\frac{\theta}{2} =$

$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta}$를 이용한다.

2. $\frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{24}\cdots$이고, 여기서 $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이다.

3. 인수 8개로 3.14157을 얻고, 이를 반올림하면 3.1416이다. 인수 n개를 곱한 뒤의 오차는 약 $\frac{\pi^3}{6\cdot 4^{n+1}}$인데, 생략된 인수들이 $\cos\frac{\pi}{2^{j+1}} \approx 1-\frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$이기 때문이다. 즉 인수 하나가 오차를 약 4로 나누며, $\log_{10} 4 \approx 0.6$이다.

4. $x = \ln a$로 두면 같은 논증으로

$$\frac{a-1}{\ln a} = \prod_{j\geq 1}\frac{1+a^{1/2^j}}{2},$$

를 얻으므로 $\frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2}\prod_{j\geq 1}\frac{1+3^{1/2^j}}{2}$이다. 인수 일곱 개로 0.906을 얻고, 이를 반올림하면 0.91이다(참값은 0.9102이다). 여기서는 인수들이 $1+\frac{\ln 3}{2^{j+1}}$처럼 1에 다가가므로 새 인수 하나는 오차를 절반으로 줄일 뿐이다(약 0.3자리). 반면 비에트(Viète)의 인수들은 $1-\frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$처럼 1에 다가가며 오차를 4분의 1로 줄인다.

2.6 산술–기하 평균

1. $x_{n+1}-y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n}-\sqrt{y_n})^2 = \frac{(x_n-y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$이고, $(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2 \geq 4y_n \geq 4y_0$이다.

2. $M(2,1) = 1.456791$이다. 세 단계만 지나도 x_3과 y_3은 이미 소수점 아래 일곱째 자리까지 일치한다.

3. 반복의 모든 단계가 λ배로 바뀌므로 $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$이다. 적분에 $x = \lambda u$를 대입하면 $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$를 얻는다. $\mathrm{I} = \frac{\pi}{2M}$의 양변은 모두 λ^{-1}배가 된다.

4. $M(1,\cos 30^\circ) \approx 0.9318$이므로 주기(period)는 1.073배, 즉 약 7.32% 길어진다.

2.7 여섯 자리인가, 육백 자리인가

1. $(p^2+2q^2)^2 - 2(2pq)^2 = (p^2-2q^2)^2 = 1$이고, $577^2 - 2\times 408^2 = 332\,929 - 332\,928 = 1$이다.

2. $y_{n+1} = \frac{2y_n^3+2}{3y_n^2}$이고 $y_{n+1}-\alpha = \frac{2y^3-3\alpha y^2+\alpha^3}{3y^2} = \frac{(y-\alpha)^2(2y+\alpha)}{3y^2}$이다. $y > \alpha$이면 $\frac{2y+\alpha}{3y^2} < \frac{3y}{3y^2} = \frac{1}{y} < \frac{1}{\alpha}$이다.

3. $y - \frac{1/y-a}{-1/y^2} = y + y - ay^2 = y(2-ay)$이고, $1-ay(2-ay) = (1-ay)^2$이다.

4. $y - \frac{y^{1/3}}{\frac{1}{3}y^{-2/3}} = y - 3y = -2y$이다. 오차 공식이 성립하려면 근 근처에서 f'이 0이 아니고 f''이 유계(bounded)여야 한다. 여기서는 f'이 0에서 무한대이다.

2.8 제곱하고 2 빼기

1. $(2\cos u)^2 - 2 = 2\cos 2u$이므로 귀납법으로 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$를 얻는다. $x_3 = a$이려면 $4\theta \equiv \pm\theta$, 즉 3θ 또는 $5\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$이어야 한다. $x_2 = a$인 경우(고정점 $a = 2$와 $a = -1$)를 제외하면 $\theta = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$가 남는다. 즉 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 또는 $a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$이고, 이 둘은 2-주기(2-cycle)의 두 점이다.

2. M_5의 경우 수열은 $4, 14, 194 \equiv 8, 62 \equiv 0$이므로 소수(prime)이다. M_{11}의 경우 수열은 $4, 14, 194, 788, 701, 119, 1877, 240, 282, 1736 \neq 0$이므로 합성수(composite)이고, 실제로 $2047 = 23 \times 89$이다.

3. $A = t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$에서 $t = 2$, $a = \frac{5}{2}$를 얻는다. 그러면 $x_2 = \frac{17}{4}$, $y_1 = \frac{Ax_1}{x_2} = \frac{15}{17}$이고, $\frac{\sqrt{x_2^2-4}}{x_2} = \frac{15/4}{17/4} = \frac{15}{17}$이다.

4. $x_k = t^{2^{k-1}} + t^{-2^{k-1}}$이고, $x_1 \cdots x_n$에 $t - t^{-1}$을 곱하면 연쇄적으로 소거되어 $t^{2^n} - t^{-2^n}$이 된다. 합은 $(t - t^{-1}) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{t^{2^n}-1} - \frac{1}{t^{2^{n+1}}-1} \right) = \frac{t-t^{-1}}{t^2-1} = \frac{1}{t}$가 된다. $a = 3$일 때 $t = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$이고 $\frac{1}{t} \approx 0.3820$이며, 급수 $\frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} + \cdots$도 이와 일치한다.

2.9 e에 다가가는 분수들

1. $T_0 = e - 1$, $T_1 = 3 - e$, $T_2 = 7e - 19$, $T_3 = 193 - 71e$, $T_4 = 1001e - 2721$이므로 $\frac{19}{7}$, $\frac{193}{71}$, $\frac{2721}{1001}$을 얻는다. $b_n = b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}$이고 (귀납적으로) b_{n-1}의 부호가 b_{n-2}와 반대이므로, b_n의 부호는 b_{n-2}와 같다.

2. $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$이므로 $T_n < \frac{e}{4^n n!}$이다. $-a_n/b_n$의 오차는 $T_n/|b_n|$이고, 이제 4^n배만큼 개선된다.

3. $e = \frac{p}{q}$라면 $qT_n = qa_n + pb_n$은 정수(integer)이다. $T_n > 0$이므로 이는 양의 정수이고, 따라서 적어도 1이다. 그러나 n이 크면 $qT_n < \frac{qe}{n!} < 1$이다.

4. 부분적분(integration by parts)을 두 번 하면(경계항(boundary terms)은 사라진다) $U_n = \frac{1}{4}\left(U_{n-2} - 2(2n-1)U_{n-1}\right)$이고, $U_0 = \frac{e^2-1}{2}$, $U_1 = \frac{1}{2}$이다. 따라서 어떤 정수 A_n, B_n에 대해 $2^{2n+1}U_n = A_n + B_n e^2$이고, 한편 $0 < U_n < \frac{e^2}{4^n n!}$이다. $e^2 = \frac{p}{q}$라면 $q2^{2n+1}U_n$은 $\frac{2qe^2}{n!}$보다 작은 양의 정수인데, n이 크면 이는 불가능하다. 따라서 이 논증은 실제로 e^2이 무리수(irrational)임을 증명한다.

장

3

함수, 부등식, 그리고 엄밀함

어떤 것이 참이라는 사실을 아는 것과 왜 참인지 아는 것은 같지 않으며, 바로 그 차이 속에 수학이 있다.

이 장의 내용

3.1 오류 찾기 STEP I 1991

3.2 AM–GM, 거꾸로 STEP II 1993

3.3 볼록성의 힘 STEP II 2007

3.4 부등식을 증명하는 넓이 STEP III 2011

3.5 π^e인가, e^π인가? STEP II 2013

3.6 기울기의 한계 STEP I 1988

3.7 $\pi^2 \leq 10$ STEP II 2014

3.8 덧셈 법칙으로 정해지는 함수 STEP III 2019

3.9 새로운 함수 만들기 STEP II 2021

A 연습문제 해답 247쪽

제대로 맞히기

> 수학에서는 무언가를 이해하는 것이 아니다. 그저 익숙해질 뿐이다.
>
> — 존 폰 노이만(John von Neumann)

여기 $1 = 2$라는 "증명(proof)"이 있다. $a = b$라 하자. 그러면 $a^2 = ab$이므로 $a^2 - b^2 = ab - b^2$이고, 이를 인수분해하면 $(a+b)(a-b) = b(a-b)$이다. 양변에서 $a-b$를 약분하면 $a+b = b$이고, $a = b$이므로 이는 $2b = b$, 곧 $2 = 1$이라는 뜻이다.

아마 문제를 알아챘을 것이다. $a = b$이므로 "$a-b$를 약분한다"는 것은 0으로 나누는 것이다. 그러나 모든 단계가 얼마나 그럴듯해 보였는지, 그리고 그 오류가 일상적인 조작 속에 얼마나 쉽게 숨어 있었는지 주목하자. 실제 수학에서 저지르는 실제 실수는 이렇게 뻔한 경우가 드물며, 역사상 가장 위대한 수학자들조차 그런 실수에 속아 넘어갔다. 이 장은 그런 실수를 잡아내는 사고 습관에 관한 것이다. 정확한 정의, 정리의 신중한 사용, 그리고 너무 쉬워 보이는 논증에 대한 건강한 의심이 그것이다.

엄밀함이 왜 중요한가

학교에서 수학은 대체로 답을 구하는 일이다. 대학에서 수학은 대체로 **자신의 답이 옳다는 것을 아는** 일이며, 다른 사람을 납득시킬 수 있는 일이다. 이러한 전환은 학교 수학과 대학 수학 사이의 가장 큰 변화이며, 당혹스러울 수 있다. "당연히" 성립하는 것을 증명하는 데 왜 한 쪽이나 써야 하는가?

그 답은 "당연함"을 믿을 수 없다는 것이다. 해석학(analysis)의 역사는 당연해 보였지만 거짓이었던 결과들로 가득하다. 연속함수(continuous function)는 몇몇 고립된 점을 제외하면 반드시 미분가능(differentiable)하다는 주장(앙드레마리 앙페르(André-Marie Ampère)가 1806년에 "증명"을 발표했으나, 1872년 바이어슈트라스(Weierstrass)가 어디에서도 미분가능하지 않은 연속함수를 찾아냈다), 연속함수들의 수렴하는 합은 연속이라는 주장(코시(Cauchy)는 이를 믿었으나 아벨(Abel)이 반례(counterexample)를 찾아냈다), 수렴하는 급수(convergent series)의 항의 순서를 바꾸어도 그 합은 변하지 않는다는 주장(일반적으로는 그렇지 않다)이 그 예이다. 엄밀함(rigour)은 현학이 아니다. 엄밀함은 참인 것과 그럴듯한 것을 구별하는 유일하게 믿을 만한 방법이다.

부등식: 해석학의 실무 도구

이 장의 두 번째 주제는 **부등식**(*inequality*)이다. 학교 수학에서 대부분의 결과는 등식, 곧 이것이 저것과 같다는 형태이다. 해석학에서 대부분의 결과는 부등식, 곧 이것이 많아야 저것이라는 형태이다. 수열이 수렴함을 증명하려면 오차가 어떤 허용치보다도 **작음**을 보이고, 적분이 존재함을 증명하려면 어떤 합이 **유계**(*bounded*)임을 보이며, 근삿값이 얼마나 좋은지 추정하려면 오차의 상한을 구한다. 전문 해석학자는 등식보다 부등식을 증명하는 데 훨씬 많은 시간을 쓰며, 여기서 만나게 될 고전적인 부등식들(산술-기하 평균 부등식(AM–GM), 옌센(Jensen) 부등식, 영(Young) 부등식, 횔더(Hölder) 부등식, 코시–슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식)은 이 분야의 필수 도구이다.

이 부등식들은 그 자체로도 놀랍다. 함수에 관한 부등식 하나에 잘 고른 예를 적용하면 $\pi^2 \leq 10$이 증명된다(Section 3.7). 로그함수의 모양에 관한 사실 하나로 π^e와 e^π 중 어느 쪽이 더 큰지 판가름 난다(Section 3.5). 측정 오차에 관한 한 화학자의 질문은 수학에서 가장 중요한 다항식들 가운데 일부로 이어진다(Section 3.6).

대학에서 만나게 될 것

엄밀함은 1학년 **해석학** 과목의 주제이며, 증명을 정확하게 쓰는 법을 배우는 **수와 집합**(*Numbers and Sets*) 또는 **수학의 기초**(*Foundations*)라고 흔히 불리는 과목의 주제이기도 하다. 여기서 연속성과 미분가능성의 형식적인 정의를 만나고, 가정이 정확하게 주어진 정리들(사잇값 정리(intermediate value theorem), 평균값 정리(mean value theorem), 최대·최소 정리(extreme value theorem))을 만나는데, 이 정리들의 가정은 정말로 중요하다. 이후의 과목들은 이 장의 부등식들을 하나의 분야로 발전시킨다. **함수해석학**(*functional analysis*)은 Section 3.4와 Section 3.7에 나오는 것과 같은 적분으로 크기를 재는 함수 공간을 연구한다. **볼록해석학**(*convex analysis*)과 **최적화**(*optimisation*)는 Section 3.3에서, **근사이론**(*approximation theory*)은 Section 3.6에서 자라 나온다. 그리고 Section 3.9에 나오는 것과 같은 **특수함수**(*special functions*)는 응용수학과 물리학 전반에 걸쳐 등장한다.

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **논증이 옳다는 것을 어떻게 아는가?** 그럴듯한 논증이 무너지는 흔한 방식은 무엇이며, 이를 어떻게 점검하는가?
2. **부등식은 어떻게 증명하는가?** 고전적인 부등식들은 어디에서 오며, 어느 것을 쓸지 어떻게 고르는가?
3. **함수란 정말로 무엇인가?** 함수를 공식이 아니라 그 함수가 가진 성질로 정의할

> 수 있는가? 그리고 기존의 함수로 충분하지 않을 때 새로운 함수를 만들어 낼 수 있는가?

이 장은 오류 찾기(Section 3.1)로 시작하여, 고전적인 부등식들을 각기 다른 각도에서 차례로 다룬다. 독특한 귀납법(induction), 볼록성(convexity), 넓이, 그래프의 모양, 다항식 보간(polynomial interpolation), 시험 함수(test function)가 그것이다. 마지막으로 성질로 정의되는 함수에 관한 두 절로 끝맺는다. 덧셈 법칙으로부터 얻는 e^x와 $\tanh x$, 그리고 역함수로 정의되는 완전히 새로운 함수이다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
3.1	그럴듯하지만 틀린 논증	계산, 논리, 숨은 가정 점검하기
3.2	산술-기하 평균 부등식	앞으로–뒤로 귀납법
3.3	옌센 부등식	오목한 곡선은 현보다 위에 있다
3.4	영 부등식	그림 속 넓이 비교하기
3.5	π^e인가 e^π인가?	하나의 함수로 귀착시켜 그 그래프 조사하기
3.6	이차함수의 기울기	모르는 것을 아는 것으로 나타내기
3.7	$\pi^2 \leq 10$	일반적인 부등식에 시험 함수 대입하기
3.8	e^x와 $\tanh x$	함수방정식으로 정의되는 함수
3.9	W 함수	역함수로 함수 만들어 내기

이 장을 읽는 방법

앞에서와 마찬가지로, 풀이를 읽기 전에 각 문제를 먼저 풀어 보자. 이 장에서는 한 가지를 더 해 보자. 각 풀이를 읽은 뒤에 되돌아가서, 부주의한 학생이 틀릴 만한 한두 단계를 찾아보는 것이다. 숨은 가정은 어디에 끼어들 수 있는가? 어느 정리의 어느 가정을 점검해야 하는가? 이렇게 비판적이고 능동적으로 읽는 것은 대학에 가기 전에 기를 수 있는 가장 유용한 습관이다.

3.1 오류 찾기

문제

STEP I 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/91-s1-q6`

도입

대부분의 시험 문제는 논증을 직접 만들어 내라고 요구한다. 이 문제는 두 개의 논증을 건네주고 그것을 분해해 보라고 한다. 이것은 전혀 다른 기술이며, 대학에서 가장 많이 쓰게 될 기술이기도 하다. 자기 풀이를 점검할 때, 책에 실린 증명(proof)을 읽고 그것을 믿을지 판단할 때, 친구의 풀이를 채점할 때, 논문을 심사할 때 모두 이 기술이 필요하다.

여기 실린 논증들은 배울 점이 많은 방식으로 틀렸다. 모든 단계가 백 번쯤 본 것처럼 **보인다**. 몇몇 단계에는 계산 실수가 있지만, 더 심각한 오류는 **논리**의 오류, 즉 계산이 맞더라도 결론이 따라 나오지 않는 오류이다. 이런 오류야말로 전문적인 수학에까지 살아남는 오류이며, 그것을 찾아내는 것이 이 장의 주제이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** "각 단계를 비판하라"는 요구를 받았을 때, 각 단계에서 무엇을 확인해야 할까? 시작하기 전에 목록을 만들어 보자.

좋은 점검 목록에는 적어도 세 가지 질문이 들어간다. **계산이 올바른가?** **이 단계가 앞 단계들로부터 따라 나오는가?** **숨은 가정(함수가 연속(*continuous*)이라는 가정, 극한이 존재한다는 가정, 정류점(*stationary point*)은 반드시 극대점이나 극소점이라는 가정)이 있는가?** 문제는 또한 결론이 어쨌든 참일 수도 있는지를 묻는다. 틀린 논증도 참인 결론을 가질 수 있으므로, 이것은 따로 확인해야 한다.

차근차근 풀기

1단계 도함수가 맞는가?

> ? **생각해 보기** 몫의 미분법(quotient rule)으로 g를 미분해 보자. $g'(x) = 0$이 되는 곳은 어디인가? $x = 1$과 $x = -1$을 직접 확인해 보자.

몫의 미분법에 의해

$$g'(x) = \frac{6x^2(x^4+4) - (2x^3+3)\cdot 4x^3}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^6 - 12x^3 + 24x^2}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^2(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

따라서 $g'(x) = 0$인 것은 $x = 0$이거나 $x^4 + 6x - 12 = 0$일 때이다. $x = 1$에서 $x^4 + 6x - 12 = -5$이고, $x = -1$에서는 -17이다. 어느 쪽도 정류점이 아니다. 첫 번째 주장은 **거짓**이다.

사차식 $x^4 + 6x - 12$는 $x = 0$에서 -12이고 양쪽 방향으로 $+\infty$로 발산하므로, 양의 근과 음의 근을 (적어도) 하나씩 가진다. 또한 이계도함수 $12x^2$이 음이 아니므로 이 사차식은 볼록(convex)하고, 따라서 o을 많아야 두 번 지나므로 실근은 정확히 두 개이다. 수치적으로 두 근은 $x \approx 1.386$과 $x \approx -2.247$이다.

2단계 함숫값이 맞는가?

$g(0) = \frac{3}{4}$는 맞고, $g(1) = \frac{5}{5} = 1$이다. 그러나 $g(-1) = \frac{-2+3}{1+4} = \frac{1}{5}$이며, 1이 아니다. 이 논증은 그 자체의 기준으로 보더라도 계산 오류를 담고 있다. g가 우함수(even function)라고 가정한 것으로 보인다.

3단계 값을 비교하면 어느 것이 극대인지 알 수 있는가?

> ? **생각해 보기** 어떤 함수가 정확히 두 개의 정류점을 가지고, 그 값이 $\frac{3}{4}$과 1이라고 하자. 그렇다면 첫 번째가 극소이고 두 번째가 극대라고 할 수 있는가?

그렇지 않다. 정류점의 **종류**는 국소적인 성질이다. 그것은 그 점 근처에서 함수가 어떻게 행동하는지에 달려 있을 뿐, 그 점에서의 값이 다른 곳의 값과 어떻게 비교되는지와는 관계가 없다. 함수는 극솟값보다 작은 극댓값(local maximum)을 가질 수도 있고($x + 2\sin x$를 생각해 보라), 극대도 극소도 아닌 정류점을 가질 수도 있다. 여기서는 $x = 0$ 근처에서 인수 $x^4 + 6x - 12$가 -12에 가까우므로

$$g'(x) = \frac{-2x^2(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2} > 0 \qquad \text{작은 값의} x \neq 0.$$

도함수가 0의 양쪽에서 모두 양수이다. $x = 0$은 극소점이 아니라 **변곡점**(point of inflection)인 정류점이다.

4단계 정류점에서의 값이 함수를 제한하는가?

> **잠깐, 직접 해 보기** 정류점이 올바르게 구해졌다 하더라도, g의 모든 값이 가장 작은 정류값과 가장 큰 정류값 사이에 있다고 결론지을 수 없는 이유는 무엇인가? $g(x) < \frac{3}{4}$인 x의 값을 하나 찾아보자.

정류점은 **국소적인** 행동만을 알려 준다. 전역적인 행동은 정의역의 끝에서, 여기서는 $x \to \pm\infty$일 때 무슨 일이 일어나는지에도 달려 있다. $x \to \pm\infty$일 때 $g(x) \to 0$이고, $2x^3 + 3 < 0$일 때, 즉 $x < -\sqrt[3]{3/2} \approx -1.14$일 때마다 $g(x) < 0$이므로, 이 함수는 음의 값을 가진다. 예를 들어 $g(-2) = \frac{-13}{20}$이다. 따라서 결론 $\frac{3}{4} \le g(x) \le 1$은 **거짓**이다(그림 3.1.1).

올바른 서술은 다음과 같다. g는 증가하여 $x \approx 1.386$에서 약 1.083인 최댓값(global maximum)에 이른 뒤 0을 향해 감소한다. 왼쪽으로는 0에서부터 감소하여 $x \approx -2.247$에서 약 -0.668인 최솟값에 이른 뒤, 증가하면서 $x = 0$(여기서 접선이 수평인 변곡점을 가진다)을 지나 최댓값까지 올라간다. 따라서 모든 x에 대해 $-0.668 \lesssim g(x) \lesssim 1.083$이다.

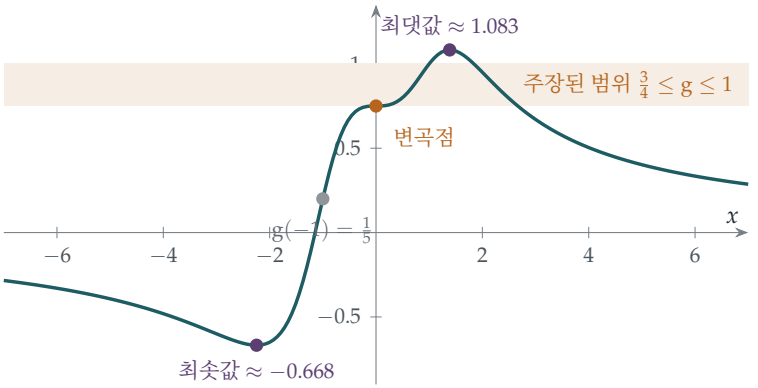


그림 3.1.1 $g(x) = \frac{2x^3+3}{x^4+4}$의 실제 그래프. 논증이 주장한 범위(호박색 띠)는 모든 단계에서 틀렸다. $x = -1$은 정류점이 아니며 $g(-1) = \frac{1}{5}$이다. $x = 0$은 극소점이 아니라 변곡점이다. 그리고 함수는 이 띠를 크게 벗어나, 1보다 큰 최댓값과 0보다 작은 최솟값을 가진다.

5단계 적분

> **생각해 보기** $-3(1-x)^{-4}$를 미분해 보자. $(1-x)^{-3}$이 나오는가?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-3(1-x)^{-4}\right] = -3 \cdot (-4)(1-x)^{-5} \cdot (-1) = -12(1-x)^{-5}$이다. 지수도 계수도 모두 틀렸다. 올바른 역도함수(antiderivative)는

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + C,$$

이며, 미분하여 확인할 수 있다.

> **생각해 보기** 올바른 역도함수를 쓰면 $\left[\frac{1}{2}(1-x)^{-2}\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0$이다. 그렇다면 결국 답은 맞았던 것일까? 정말 그럴까?

그렇지 않다. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus) $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$는 피적분함수가 구간 $[a,b]$ 전체에서 연속이어야 성립한다. 여기서 $(1-x)^{-3}$은 $[-1,3]$ 안에 있는 $x=1$에서 정의되지 않으며, $x=1$ 근처에서 값이 엄청나게 커진다. 이 적분은 **이상적분**(improper integral)으로 다루어야 하며, 문제가 되는 점에서 나누어야 한다.

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{-3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\tfrac{1}{2}(1-x)^{-2}\right]_{-1}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}-\frac{1}{8}\right) = +\infty.$$

-1부터 1까지의 적분은 무한대이고(1부터 3까지의 적분은 $-\infty$이다), 따라서 $\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,dx$는 **존재하지 않는다**. 결론 "$=0$"은 거짓인데, 그 이유는 참값이 다른 무엇이어서가 아니라 값 자체가 없기 때문이다. ■

돌아보기

- **세 종류의 오류.** 계산 오류(도함수, $g(-1)$, 역도함수), 논리적 오류(값을 비교하여 정류점의 종류를 판정한 것, 정류값을 전역적인 경계로 쓴 것), 그리고 숨은 가정(미적분학의 기본정리에서의 연속성).
- **맞는 답, 틀린 이유.** 소문항 (ii)에서 역도함수를 바로잡으면 답 0이 다시 나오지만, 논증은 여전히 타당하지 않다. 맞아 보이는 답은 추론이 건전하다는 증거가 되지 못한다.
- **국소 대 전역.** 도함수는 한 점 근처에서의 행동을 알려 준다. 전역적인 결론을 내리려면 더 많은 것이 필요하다. 정의역의 끝에서, 또는 함수가 제대로 행동하지 않는 점에서 무슨 일이 일어나는지를 알아야 한다.

숨은 수학

위대한 수학자들이 틀렸을 때

바로 이런 종류의 오류를 해석학의 창시자들도 저질렀다. 코시(Augustin-Louis Cauchy)는 1821년의 *Cours d'analyse*(해석학 강의)에서 연속함수들의 수렴하는 합은 언제나 연속이라고 "증명"했다. 1826년 아벨(Niels Henrik Abel)은 반례(counterexample)를 지적했다. 푸리에 급수(Fourier series)

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

는 모든 x에 대해 수렴(converge)하고 각 항은 연속이지만, 그 합은 $x = \pm\pi$에서 불연속적으로 뛴다($-\pi < x < \pi$에서 합은 $x/2$이다). 코시의 논증에서 정확히 무엇이 잘못되었는지 밝혀내는 데는 수십 년이 걸렸고, 그 결과 오늘날 해석학을 배우는 모든 학생이 익히는 **균등수렴**(uniform convergence)의 개념이 탄생했다. 숨은 가정, 특히 두 극한의 순서를 바꾸는 것에 관한 가정은 해석학 전체에서 가장 흔한 오류의 원천이다.

가정이 붙은 정리

이 문제의 오류 가운데 두 가지는 정리의 가정(hypothesis)을 무시한 데서 나온다.

- **최대최소 정리**(extreme value theorem)는 닫힌 유계 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수가 최댓값과 최솟값을 가진다고 말한다. 이것들을 찾으려면 양 끝점, 정류점, 그리고 함수가 미분가능하지 않은 점을 모두 확인해야 한다. 예를 들어 $[-1, 1]$에서 $|x|$의 최솟값은 0에서 나타나는데, 이 점은 끝점도 정류점도 아니다. f가 구간 내부의 모든 점에서 미분가능하다면, 내부에서의 최댓값이나 최솟값은 반드시 정류점에서 나타난다. 실수 전체에서는 확인할 끝점이 없으며, 함수가 최댓값을 아예 가지지 않을 수도 있다. 그 대신 $x \to \pm\infty$일 때의 행동을 살펴보아야 한다.
- **미적분학의 기본정리**는 피적분함수가 $[a, b]$에서 연속이어야 한다. 연속이 아니라면 적분이 여전히 존재할 수도 있고($\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$를 계산해 보라), 존재하지 않을 수도 있으며(이 문제처럼), 극한을 이용하여 확인해야 한다.

대학에서 만나는 모든 정리에는 정확한 가정의 목록이 따라온다. 정리를 쓰기 전에 매번 그 가정들을 확인하는 것도 훈련의 일부이다.

발산하는 적분에 값을 주기

소문항 (ii)에는 흥미로운 뒷이야기가 있다. 구간 $[-1, 3]$은 문제가 되는 점 $x = 1$에 대해 대칭이고, $(1 - x)^{-3}$은 그 점에 대해 "기함수"이다. 대칭인 틈 $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$을 잘라 내고 $\varepsilon \to 0$으로 보내면, 무한대인 두 조각이 상쇄되어 실제로 0을 얻는다. 이것을 **코시 주요값**(Cauchy principal value)이라고 하며, 물리학과 복소해석학에서 실제로 유용하게 쓰인다. 그러나 이것은 의도적으로 선택한 **다른 정의**이며, 우연히 그 값에 도달한 논증은 아무것도 증명하지 못한 것이다.

사고 기술

논증을 비판적으로 읽기

모든 단계에서 세 가지를 확인하라. 계산이 맞는가, 그 단계가 논리적으로 따라 나오는가, 그리고 말하지 않은 채 무엇을 가정했는가?

그다음 결론을 따로 확인하라. 틀린 논증도 참인 결론을 가질 수 있고, "맞는" 답이 타당하지 않은 논증에서 나올 수도 있다. 자기 풀이에도 똑같이 엄격한 잣대를 적용하라. 가장 믿기 쉬운 논증은 바로 자기 자신의 논증이다.

더 도전하기

1 **거짓말하는 치환.** STEP I 1987, 8번 문제 (`step.maths.org/questions/87-s1-q8`)을 풀어 보자. 치환(substitution)을 하면 양수인 적분이 음수인 적분과 같아지는 것처럼 보인다. 논증이 정확히 어디에서 무너지는지 찾은 뒤, 두 적분을 올바르게 계산해 보자.

2 **참일까, 거짓일까?** STEP I 1998, 3번 문제 (`step.maths.org/questions/98-s1-q3`)을 풀어 보자. 증명하거나 반증해야 할 네 개의 주장이 있다. 각각에 대해, 쓰기 시작하기 전에 어느 쪽일지 먼저 예상해 보자.

3 **모든 말은 같은 색이다.** 수학적 귀납법(induction)을 이용한 다음 "증명"의 결함을 찾아보자. 말 한 마리는 자기 자신과 같은 색이다. $n+1$마리의 말이 주어지면, 귀납 가정에 의해 처음 n마리는 같은 색이고, 마지막 n마리도 같은 색이다. 두 무리가 겹치므로 $n+1$마리 모두 같은 색이다.

4 **실제로 존재하는 적분.** 피적분함수가 0에서 정의되지 않음에도 $\int_{-1}^{1} |x|^{-1/2}\,\mathrm{d}x$가 존재함을 보이고, 그 값을 구해 보자.

더 읽을거리

- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics*** (Cambridge University Press). 그럴듯하지만 틀린 논증들을 주제별로 정리한 고전적인 모음집으로, 식스폼(sixth form, 영국의 대학 진학 준비 과정) 학생들을 위해 쓰였다.
- **Bernard Gelbaum & John Olmsted, *Counterexamples in Analysis*** (Dover). 정리의 가정이 왜 중요한지 보여 주는 수백 개의 예. 해석학 강의를 듣기 시작한 뒤에 조금씩 들춰 보자.

- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*** (Cambridge University Press). 수학자들이 증명의 오류를 어떻게 찾아내고 바로잡는지에 관한 탁월한 대화편.

3.2 AM–GM, 거꾸로

문제

STEP II 1993, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/93-s2-q8`

도입

산술평균–기하평균 부등식(arithmetic mean–geometric mean inequality, AM–GM)은 아마도 수학에서 가장 쓸모 있는 부등식일 것이다. 이 부등식에 따르면 양수들의 보통 평균은 언제나 "곱셈의 평균"보다 크거나 같고, 등호는 모든 수가 같을 때에만 성립한다. 이 부등식은 미적분 없이 최적화(optimisation) 문제를 풀고, 다른 부등식을 증명하며, 해석학(analysis)의 모든 분야에 등장한다.

이 문제는 1821년 오귀스탱루이 코시(Augustin-Louis Cauchy)가 고안한, 기묘하고도 아름다운 귀납법(induction)으로 이 부등식을 증명한다. n에서 $n+1$로 나아가는 대신 2에서 4로, 8로, 16으로 건너뛰며 2의 거듭제곱만을 다룬 다음, 다시 **아래로 내려와** 그 사이의 수들을 채운다. 이 증명은 "귀납법"이 교과서에 나오는 형태보다 훨씬 유연한 개념임을 일깨워 준다.

시작하기 전에

온라인 자료실에 있는 이 시험지에는 오타가 있다. "$b_1 = a_2$"라고 되어 있는데, 당연히 $b_1 = a_1$이어야 한다. 핵심은 b들이 a들에 그 평균의 복사본을 덧붙여 채운 것이라는 점이다.

생각해 보기 n개에서 $n+1$개로 가는 것보다 2^m개의 수에서 2^{m+1}개의 수로 가는 것이 왜 더 쉬울까?

2^{m+1}개의 수는 자연스럽게 2^m개씩 두 묶음으로 나뉘므로, 각 절반에 귀납 가정을 적용한 뒤 두 수의 경우를 이용해 두 절반을 합칠 수 있기 때문이다. n에서 $n+1$로 가는 경우에는 이처럼 대칭적으로 다룰 수 있는 구조가 없다.

차근차근 풀기

1단계 두 수의 경우

$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2-4a_1a_2}{4} = \frac{(a_1-a_2)^2}{4} \geq 0.$ ■

2단계 두 배로 늘리기

$m = 1$인 경우는 1단계이다. 2^m개의 수에 대하여 $(*)$이 성립한다고 가정하고, 2^{m+1}개의 양수를 택하자.

> **생각해 보기** 2^{m+1}개의 수를 앞쪽 절반과 뒤쪽 절반으로 나누고, 두 절반의 산술평균을 각각 P와 Q라 하자. 귀납 가정은 각 절반에 대하여 무엇을 말해 주는가?

각 절반에 $(*)$을 적용하면

$$a_1 \cdots a_{2^m} \leq P^{2^m} \qquad \text{그리고} \qquad a_{2^m+1} \cdots a_{2^{m+1}} \leq Q^{2^m}.$$

모든 수가 양수이므로 두 식을 곱하면, 2^{m+1}개의 수 전체의 곱은 $(PQ)^{2^m}$ 이하이다. 이제 두 수의 경우에 의해 $PQ \leq \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2$이고, $\frac{P+Q}{2}$는 정확히 2^{m+1}개의 수 전체의 평균이다. 따라서

$$a_1 \cdots a_{2^{m+1}} \leq (PQ)^{2^m} \leq \left(\frac{P+Q}{2}\right)^{2^{m+1}} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

이고, 이것이 바로 $m+1$에 대한 $(*)$이다. 수학적 귀납법에 의해, 항의 개수가 2의 거듭제곱일 때마다 AM–GM이 성립한다. ■

3단계 빈틈 채우기

이제 임의의 n을 택하고, $2^m > n$인 m을 고르자. 목록 $a_1, \ldots, a_n$에 그 자신의 평균 A의 복사본 $2^m - n$개를 덧붙여 채운다.

> **생각해 보기** 채워 넣은 목록 $b_1, \ldots, b_{2^m}$의 평균은 무엇인가?

합은 $(a_1 + \cdots + a_n) + (2^m - n)A = nA + (2^m - n)A = 2^m A$이므로 평균은 A 그 자체이다. 평균의 복사본을 덧붙여도 평균은 변하지 않는다. 따라서 b들에 $(*)$을 적용하면

$$a_1 \cdots a_n \cdot A^{2^m-n} \leq A^{2^m}.$$

> **잠깐, 직접 해 보기** 증명을 마무리하라.

양변을 A^{2^m-n}(양수이다)으로 나누면 $a_1 \cdots a_n \leq A^n$이다. 양변에 n제곱근을 취하면

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$ ■

돌아보기

- **다른 경로를 따르는 귀납법.** 2단계는 m에 대한 귀납법으로, $n = 2, 4, 8, \ldots$을 다룬다. 3단계는 2의 임의의 거듭제곱에서 그보다 작은 임의의 n으로 내려가는 방법이다(그림 3.2.1).
- **평균으로 채우기.** 평균을 바꾸지 않고 목록을 늘리는 이 기법은 기억해 둘 만하다. 임의의 n에 관한 문제를 다루기 편한 n에 관한 문제로 바꾸는 방법이다.
- **등호는 언제 성립하는가?** 증명을 거슬러 올라가 보면, 등호가 성립하려면 두 수의 경우를 사용한 모든 곳에서 등호가 성립해야 하고, 이는 모든 수가 같을 때에만 일어난다.

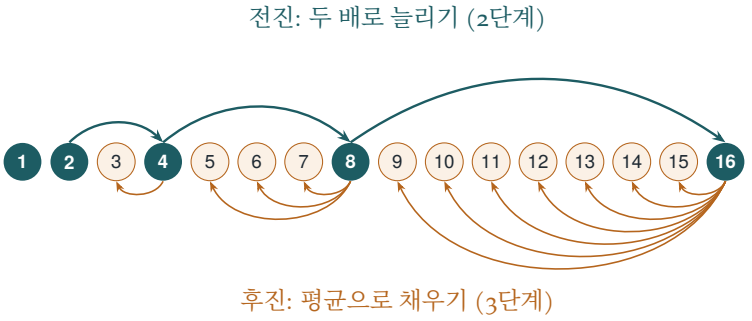


그림 3.2.1 코시의 전진–후진 귀납법. 청록색 화살표는 두 배로 늘리는 방법으로 $2, 4, 8, 16, \ldots$개의 수에 대한 AM–GM을 증명하고, 호박색 화살표는 목록을 다음 2의 거듭제곱까지 채워서 나머지 모든 n을 메운다.

숨은 수학

코시의 귀납법

코시는 이 증명을 *Cours d'analyse*(해석학 강의, 1821)에 발표했다. 이 책은 2장에서 다룬 엄밀한 해석학의 출발점이 된 책이다. 이 기법은 오늘날 **전진–후진 귀납법**(forward–backward induction)이라 불린다. 무한히 많은 경우의 수열(여기서는 2의 거듭제곱)에 대하여 명제를 증명한 다음, n인 경우가 $n-1$인 경우를 함의함을 보이는 것이다. 이 둘을 합치면 모든 n에 도달한다. 우리의 3단계는 2^m에서 n으로 곧바로 내려가지만, 한 단계씩 내려갈 수도 있다. $n-1$개의 수에 그 평균의 복사본 하나를 덧붙이면 n인 경우가 $n-1$인 경우를 함의함을 알 수 있다.

하나의 부등식, 여러 가지 증명

AM–GM에는 수십 가지 증명이 있으며, 이들을 비교해 보는 것은 수학의 다양한 스타일을 엿보는 좋은 방법이다.

- **볼록성을 이용한 증명.** 로그함수는 오목(concave)하므로, 로그값들의 평균은 평균의 로그값 이하이다. 양변에 지수함수를 취하면 바로 AM–GM이 되며, 이것이 Section 3.3의 주제인 볼록성(convexity)이다.
- **조지 폴리아(George Pólya)의 증명.** $e^{x-1} \geq x$를 이용한다($x = 1$에서 e^{x-1}에 그은 접선(tangent line)은 곡선 아래에 놓인다). 평균을 A라 하고, 각 a_i/A에 이 부등식을 적용하여 곱하면 $\prod \frac{a_i}{A} \leq e^{\sum(a_i/A - 1)} = e^0 = 1$이다. 폴리아는 이 증명이 꿈속에서 떠올랐다고 말했다.
- **고르게 만들기를 이용한 증명.** 두 수가 서로 다르면 둘 다 그 평균으로 바꾼다. 산술평균은 변하지 않고, 두 수의 경우에 의해 곱은 커진다. 이 과정을 반복하면 모든 수가 평균 쪽으로 밀려간다.

미적분 없는 최적화

AM–GM을 쓰면 많은 최적화 문제가 한 줄로 풀린다. 겉넓이가 주어진 상자 가운데 부피가 가장 큰 것은 무엇인가? 둘레가 주어진 직사각형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 무엇인가? (두 수의 경우에 의해 정사각형이다: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$이고, 등호는 $x = y$일 때 성립한다.) 등호 조건은 최적값이 어디에 있는지 알려 주고, 부등식은 그것이 단지 정상점(stationary point)이 아니라 정말로 최적값임을 알려 준다. Section 3.1의 경고와 비교해 보라.

사고 기술

유연한 귀납법

귀납법이 반드시 $1, 2, 3, \ldots$ 순서로 진행될 필요는 없다. 모든 경우에 도달하는 경로라면 어떤 경로를 따라도 귀납할 수 있다. 두 배로 늘려 가거나, 강한 귀납법(*strong induction*)을 쓰거나, 부분수열(*subsequence*)을 따라 전진한 뒤 후진하여 빈틈을 채울 수도 있다.

n에서 $n+1$로 가는 뻔한 단계가 어렵다면, 어떤 단계가 쉬울지, 그리고 그 단계를 이용해 모든 경우에 도달할 수 있는지 물어보라.

더 도전하기

1 **한 걸음 뒤로.** 평균의 복사본 하나를 덧붙이는 방법으로, n개의 수에 대하여 AM–GM이 성립하면 $n-1$개의 수에 대해서도 성립함을 직접 보여라.

2 **증가하는 수열.** $n+1$개의 수 $1+\frac{1}{n},\dots,1+\frac{1}{n},1$($1+\frac{1}{n}$이 n개)에 AM–GM을 적용하여 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$임을 보여라.

3 **최고의 상자.** 닫힌 직육면체 상자의 겉넓이가 S이다. 서로 다른 세 면의 넓이에 AM–GM을 적용하여 부피가 $(S/6)^{3/2}$ 이하이고, 등호는 정육면체일 때 성립함을 보여라.

4 **조화평균.** 수 $1/a_i$에 AM–GM을 적용하여, 조화평균(harmonic mean) $\dfrac{n}{1/a_1+\cdots+1/a_n}$이 기하평균 이하임을 보여라.

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 바로 이 수준에서 출발하는, 문제 중심으로 구성된 훌륭한 부등식 책이다. 2장이 AM–GM에 관한 내용이다.
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities*** (Cambridge University Press). 20세기의 위대한 해석학자 세 사람, 하디(Hardy), 리틀우드(Littlewood), 폴리아가 쓴 고전적인 참고서이다.
- **Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*** (Springer). 7장에는 올림피아드의 부등식 문제가 대량으로 모여 있다.

3.3 볼록성의 힘

문제

STEP II 2007, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/07-s2-q7`

도입

Section 3.2에서는 교묘한 귀납법(induction)으로 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 증명하였다. 여기서는 이 부등식이 훨씬 더 큰 원리의 특수한 경우로서 단 한 줄 만에 얻어진다. 그 큰 원리는 바로 **오목성**(concavity), 즉 언덕 꼭대기처럼 아래로 휘어지는 곡선의 모양이다. 이러한 곡선에 관한 기하학적 사실 하나, 곧 곡선이 자신의 현(chord)보다 위에 있다는 사실만으로 놀라울 만큼 다양한 부등식을 증명할 수 있다. 삼각형에 관한 사실에서 AM–GM, 그리고 확률론, 정보 이론, 경제학의 부등식에 이르기까지 말이다.

대학에서 이 아이디어는 **볼록성**(convexity)이 되며, 현대 수학 전체를 하나로 꿰는 위대한 주제 가운데 하나이다. 볼록 최적화(convex optimisation)와 같은 분야 전체가 이 개념 위에 세워져 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 $(0, \pi)$에서의 $y = \sin x$처럼 아래로 휘어지는 곡선을 그려 보자. 곡선 위에 두 점을 찍고 직선으로 이어 보자. 현은 곡선보다 위에 있는가, 아래에 있는가?

아래에 있다. 오목한 곡선에서는 모든 현이 두 끝점 사이에서 곡선보다 아래에 놓인다. 두 함숫값의 평균은 현의 중점의 높이이고, 평균에서의 함숫값은 그 중점 위에 있는 곡선의 높이이다. 따라서 "현이 곡선보다 아래에 있다"는 것은 정확히 $n = 2$일 때의 젠센 부등

식(Jensen's inequality)이다.

$$\frac{\mathrm{f}(x_1)+\mathrm{f}(x_2)}{2} \le \mathrm{f}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

점이 n개일 때, 점 $(x_k, \mathrm{f}(x_k))$들의 평균은 이들의 무게중심(centre of mass)이고, 이는 곡선 아래 영역의 내부에 있으므로 역시 곡선보다 아래에 있다(그림 3.3.1).

차근차근 풀기

1단계 오목성 확인하기

$0 < x < \pi$에서 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$이고, $x > 0$에서 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$이다. ■

2단계 삼각형

생각해 보기 어떤 함수와 어떤 점들을 택해야 하며, 그 점들의 평균은 무엇인가? 삼각형의 각들은 함수가 오목한 구간 안에 있는가?

$\mathrm{f}(x) = \sin x$와 세 점 A, B, C를 택하자. 각각은 sin이 오목한 구간인 0과 π 사이에 엄격하게 놓여 있으며, 이들의 평균은 $\frac{A+B+C}{3} = \frac{\pi}{3}$이다. 젠센 부등식에 의해

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

이므로 $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$이고, 등호는 정확히 정삼각형일 때 성립한다. ■

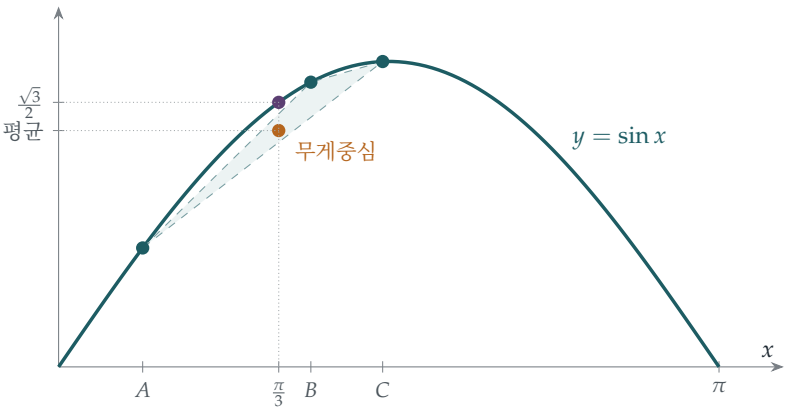


그림 3.3.1 삼각형의 세 각 $A = 0.4$, $B = 1.2$, $C = \pi - 1.6$에 대한 $\sin x$의 젠센 부등식. 곡선 위 세 점의 무게중심(주황색)은 색칠한 삼각형 내부에 있으므로 곡선보다 아래에 있다. 무게중심의 높이는 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$의 평균이고, 그 위에 있는 곡선의 높이는 $\sin\frac{\pi}{3}$이다.

3단계 한 줄로 끝내는 AM–GM

생각해 보기 AM–GM은 곱과 합을 비교한다. 곱을 합으로 바꾸어 주는 오목함수는 무엇인가?

바로 로그함수이다. $f = \ln$과 양수 $t_1, \dots, t_n$에 젠센 부등식을 적용하면

$$\frac{\ln t_1 + \cdots + \ln t_n}{n} \le \ln\left(\frac{t_1 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

좌변은 $\ln\left(\sqrt[n]{t_1 \cdots t_n}\right)$이다. ln은 증가함수이므로 양변에서 ln을 없앨 수 있고, 그것이 곧 AM–GM이다. 등호는 정확히 모든 t_k가 같을 때 성립한다. ■

4단계 AM–GM 활용하기

생각해 보기 (a)에서 좌변은 네 항의 합이고 우변에는 세 변수의 곱이 들어 있다. 몇 개의 항에 AM–GM을 적용해야 하며, 16은 왜 도움이 되는가?

네 양수 $x^4, y^4, z^4, 16$에 AM–GM을 적용하면

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \ge \sqrt[4]{16\,x^4y^4z^4} = 2xyz.$$

양변에 4를 곱하면 $x^4 + y^4 + z^4 + 16 \ge 8xyz$를 얻는다. ■

잠깐, 직접 해 보기 이제 $x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$의 최솟값을 구해 보자. (힌트: $x^5y^5z^5$의 다섯제곱근이 필요하므로 수가 다섯 개 있어야 한다. 나머지 두 수는 무엇이어야 할까?)

$x^5, y^5, z^5, 1, 1$에 AM–GM을 적용하면

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5 + 1 + 1}{5} \ge \sqrt[5]{x^5y^5z^5} = xyz,$$

이므로 $x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz \ge -2$이다. 등호는 $x^5 = y^5 = z^5 = 1$, 즉 $x = y = z = 1$일 때 성립하며, 이때 식의 값은 $3 - 5 = -2$이다. 따라서 최솟값은 -2이다. ■

등호 조건(equality condition)이 두 가지 역할을 한다는 점에 주목하자. 등호 조건은 이 하한이 실제로 달성됨을 보여 주므로, -2는 단순한 하한이 아니라 최솟값이다.

돌아보기

- **하나의 아이디어, 많은 부등식.** 오목한 곡선에 관한 기하학적 사실 하나로 삼각형에 관한 결과와 AM–GM을 얻었으며, 이계도함수(second derivative)를 확인하는 것 말고는 계산이 전혀 필요하지 않았다.

- **함수와 점을 고르라.** 젠센 부등식을 쓴다는 것은 어떤 함수에, 어떤 점들에서 적용할지를 정하는 일이다. 곱을 합으로 바꾸어 주는 로그함수가 단골 선택이다.
- **채워서 맞추라.** (b)에서는 1 두 개를 더함으로써 AM–GM을 문제에 꼭 맞게 만들었다. Section 3.2에서 평균으로 채워 넣었던 것과 같은 방식이다.

숨은 수학

볼록함수

대학에서 쓰는 **볼록**(convex)함수(오목함수를 뒤집은 것)의 표준적인 정의에는 도함수가 전혀 등장하지 않는다. 함수 f가 볼록하다는 것은

$$\mathrm{f}\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \le t\,\mathrm{f}(x_1) + (1-t)\,\mathrm{f}(x_2) \qquad \text{모든} x_1, x_2 \text{와} 0 \le t \le 1,$$

에 대하여 이 부등식이 성립한다는 것이며, 이는 정확히 현이 곡선보다 위에 있다는 뜻이다. 이 정의는 $|x|$처럼 미분가능하지 않은 함수나 다변수함수에도 의미가 있다. 덴마크의 공학자이자 수학자인 Johan Jensen은 1906년에 자신의 이름이 붙은 부등식과 함께 볼록함수를 독립된 연구 주제로 만들었다.

어디에나 있는 볼록성

볼록성은 수학과 그 응용 곳곳에 등장한다.

- **확률.** 젠센 부등식에 따르면 오목함수 f와 임의의 확률변수(random variable) X에 대하여 $\mathrm{E}[\mathrm{f}(X)] \le \mathrm{f}(\mathrm{E}[X])$이다. 경제학에서 f를 오목한 "효용(utility)" 함수로 택하면, 이 부등식은 사람들이 £0 또는 £200을 반반의 확률로 받는 도박보다 확실한 £100을 더 선호하는 이유, 그리고 보험이 존재하는 이유를 설명해 준다.
- **정보 이론.** 엔트로피(entropy)가 균등분포(uniform distribution)에서 최대가 된다는 사실의 증명은 ln에 대한 젠센 부등식이며, 이 사실은 데이터 압축의 바탕이 된다.
- **최적화.** 볼록함수에는 전역 최솟값(global minimum) 외의 극솟값(local minimum)이 없으므로, "내리막으로 걸어가기"만 하면 언제나 최선의 답을 찾을 수 있다. 이것이 볼록 최적화 문제를 효율적으로 풀 수 있는 이유이며, 문제를 볼록한 형태로 바꾸어 쓰는 데 그토록 많은 노력이 들어가는 이유이다.

Section 3.4에서는 볼록성의 또 다른 면, 즉 함수와 그 역함수 사이의 기하학적 쌍대성(duality)을 살펴볼 것이다.

사고 기술

일반 원리를 찾으라

여러 결과의 증명이 서로 비슷할 때는 그 뒤에 숨은 하나의 원리를 찾으라. 그런 다음 그 원리를 한 번 증명하고 여러 번 적용하라.

AM–GM, 사인에 관한 삼각형 부등식을 비롯한 많은 부등식은 모두 "오목한 곡선은 자신의 현보다 위에 있다"는 원리의 예이다. 원리를 알아보는 순간, 잡다한 요령의 모음이 하나의 방법이 된다.

더 도전하기

1 **정의.** STEP II 2018, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/18-s2-q2`)의 소문항 (i)과 (ii)는 위 상자에 나온 오목성의 현 정의에서 출발하여 세 점에 대한 젠센 부등식까지 쌓아 올린다.

2 **사인의 곱.** STEP II 2018, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/18-s2-q2`)의 소문항 (iii)을 풀어 보자.

3 **예각삼각형.** $\tan x$가 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 볼록함을 보이고, 이로부터 예각삼각형에서 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$임을 이끌어 내라.

4 **거듭제곱 평균.** x^2이 볼록함을 보이고, 이로부터 $\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$임을 이끌어 내라. 이를 수들의 집합의 분산(variance)에 관한 명제로 해석해 보라.

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 6장 은 볼록성과 젠센 부등식을 다룬다.
- **Claudi Alsina & Roger Nelsen, *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities*** (Mathematical Association of America). 그림으로 증명하는 부등식들을 담았으며, 그중 상당수가 볼록성을 이용한다.
- **Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization*** (Cambridge University Press). 온라인에서 무료로 볼 수 있는 현대의 고전으로, 앞부분의 장들은 볼록성이 실제로 왜 중요한지 보여 준다.

3.4 부등식을 증명하는 넓이

문제

STEP III 2011, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/11-s3-q4`

도입

여기 우표 한 장에 들어갈 만큼 단순한 그림으로 증명되는 부등식이 있다. 원점을 지나는 증가하는 곡선을 하나 그려 보자. 곡선 아래의 넓이와 곡선 왼쪽의 넓이를 더하면 언제나 직사각형 하나를 덮는다. 이 관찰 하나에서 **영 부등식**(*Young's inequality*) $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$가 나오고, 이 부등식은 다시 해석학에서 가장 중요한 도구 가운데 두 가지인 횔더(Hölder) 부등식과 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식의 열쇠가 된다.

이 그림에는 더 깊은 아이디어도 담겨 있다. 그림은 함수와 그 역함수(inverse function)를 완벽하게 대칭적으로 짝짓는데, 이 짝짓기를 일반화한 것이 바로 **르장드르 변환**(*Legendre transform*)이다. 르장드르 변환은 고전역학의 두 가지 위대한 정식화를 이어 주고, 열역학의 두 가지 주요 기술 방식도 이어 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$는 곡선과 x축 사이의 넓이이다. 같은 그림에서 $\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$는 어떤 넓이를 나타내는가?

$x = \mathrm{f}^{-1}(y)$의 그래프는 $y = \mathrm{f}(x)$와 같은 곡선을 옆에서 본 것이다. 따라서 $\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$는 높이 0부터 높이 b까지 곡선과 y축 사이의 넓이이다. 이것만 알면 소문항 (i)은 그림을 그리는 문제일 뿐이다.

차근차근 풀기

1단계 그림

생각해 보기 꼭짓점이 $(0,0)$과 (a,b)인 직사각형을 그려 보자. 0부터 a까지 곡선 아래의 영역을 한 가지 색으로, 0부터 b까지 곡선 왼쪽의 영역을 다른 색으로 칠해 보자. 두 영역이 직사각형을 덮는가? 겹치는 부분도 남는 부분도 없는 것은 언제인가?

두 영역을 합치면 직사각형 $[0,a]\times[0,b]$ 전체를 덮고, 보통은 그 바깥의 넓이도 어느 정도 덮는다(그림 3.4.1). 직사각형의 모든 점 (x,y)는 곡선 아래에 있거나($x\le a$이므로 첫째 영역에 속한다) 곡선 왼쪽에 있다($y\le b$이므로 둘째 영역에 속한다). 따라서 칠해진 넓이의 합은 적어도 직사각형의 넓이 ab 이상이다. 이것이 $(*)$이다.

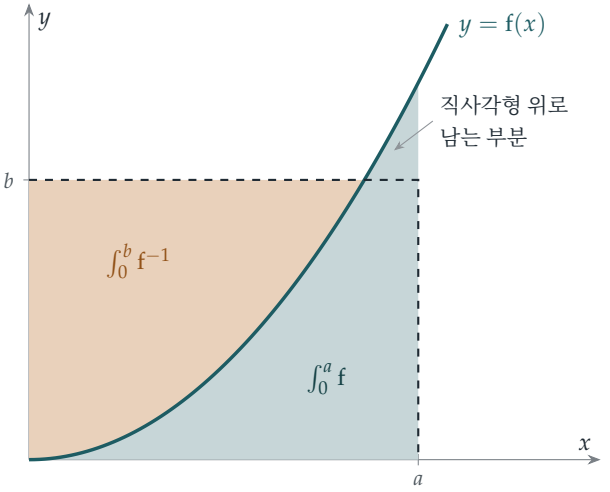


그림 3.4.1 그림으로 본 영 부등식. 0부터 a까지 곡선 아래의 넓이(청록색)와 0부터 b까지 곡선 왼쪽의 넓이(호박색)를 합치면 넓이가 ab인 점선 직사각형을 덮고, 넓이가 조금 남는다. 남는 부분이 없는 것은 꼭짓점 (a,b)가 곡선 위에 있을 때, 그리고 그때뿐이다.

남는 부분은 곡선과 직사각형의 꼭짓점 사이에 있는 작은 곡선 모양의 영역이다. 이 영역은 곡선이 꼭짓점 (a,b)를 지날 때, 그리고 그때에만 사라진다. 즉

$$b=\mathrm{f}(a).$$

일 때이다.

2단계 영 부등식

생각해 보기 $f(x) = x^{p-1}$이면 $f^{-1}(y)$는 무엇인가? 두 적분을 모두 계산하고, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$을 이용하여 둘째 적분을 깔끔하게 정리해 보자.

$p > 1$이므로 $f(x) = x^{p-1}$은 연속이고 증가하며 $f(0) = 0$이고, $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$이다. 그러면

$$\int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{1/(p-1)}\,dy = \frac{b^{1+1/(p-1)}}{1+1/(p-1)}.$$

이다. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$에서 $q = \frac{p}{p-1}$이므로 $1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$이고, 둘째 적분은 $\frac{b^q}{q}$이다. 따라서 $(*)$는

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \blacksquare$$

가 된다. 등호는 $b = f(a) = a^{p-1}$일 때 성립해야 한다. 확인해 보자. 이때 $ab = a^p$이고 $b^q = a^{(p-1)q} = a^p$이므로, 우변은 $a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p$이다. $\blacksquare$

$p = q = 2$이면 이 부등식은 $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$가 되는데, 이는 Section 3.2에서 다룬 두 수에 대한 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이 모습을 바꾼 것이다.

3단계 역사인 함수

이제 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $f(x) = \sin x$를 생각하자. 이 함수는 연속이고 증가하며 $f(0) = 0$이고, $[0,1]$에서 $f^{-1} = \arcsin$이다.

생각해 보기 $\int_0^a \sin x\,dx$는 쉽다. $\arcsin y$는 어떻게 적분할 것인가?

$\int_0^a \sin x\,dx = 1 - \cos a$이다. 역사인 함수는 $\arcsin y \times 1$로 보고 부분적분(integration by parts)한다.

$$\int_0^b \arcsin y\,dy = \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.$$

두 결과를 더하면 $(*)$에서 $ab \le b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a$를 얻는다. $\blacksquare$

잠깐, 직접 해 보기 이제 $\arcsin(t^{-1})$에 대한 부등식을 이끌어 내 보자. a의 값으로 무엇을 택해야 할까? (가장 단순한 값을 시도해 보자.)

$a = 0$으로 두면 $0 \le b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1$, 즉 $b\arcsin b \ge 1 - \sqrt{1-b^2}$이다. (이는 $\int_0^b \arcsin y\,dy \ge 0$이라는 사실을 말할 뿐이다.) $t \ge 1$에 대하여 $b = 1/t$로 두면 $0 < b \le 1$이고, 양변을 b로 나누면

$$\arcsin\left(\frac{1}{t}\right) \ge t\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}\right) = t - \sqrt{t^2-1}. \qquad \blacksquare$$

이다.

돌아보기

- **증명으로서의 그림.** 소문항 (i)은 알맞은 그림을 보기만 하면 그것으로 완전한 증명이 된다. 기하학적 사실을 적분 사이의 부등식으로 옮기는 것은 강력한 기법이다.
- **일반적인 결과를 특수화하기.** 하나의 일반적인 부등식에서 f를 달리 택하여 영 부등식과 arcsin에 대한 부등식을 얻었다.
- **가장 단순한 선택이 올바른 선택일 수 있다.** 마지막 유도에서는 부등식이 거의 자명해지는 $a = 0$을 사용했다. 언제나 쉬운 경우를 시도해 보자.

숨은 수학

영에서 휠더까지

William Henry Young은 1912년에 이 부등식을 발표했다. 이 부등식의 중요성은 그것이 이끌어 내는 결과에서 나온다. $\sum a_i^p = 1$이고 $\sum b_i^q = 1$이라고 하자. 각 쌍에 영 부등식을 적용하여 더하면

$$\sum a_i b_i \le \frac{\sum a_i^p}{p} + \frac{\sum b_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

이다. 합이 1이 되도록 a들과 b들의 크기를 조정하면 **휠더 부등식**을 얻는다. 양수들에 대하여

$$\sum a_i b_i \le \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum b_i^q\right)^{1/q}.$$

$p = q = 2$이면 이는 **코시-슈바르츠 부등식** $\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$이 되는데, 이 부등식은 두 벡터(vector) 사이의 각의 코사인이 1 이하라는 것을 말해 준다. 휠더 부등식은 L^p 공간 이론의 토대이다. L^p 공간은 "거리"를 $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}$로 재는 함수들의 공간으로, 함수해석학(functional analysis)과 확률론 강의에서 만나게 될 것이다.

르장드르 변환

그림 3.4.1의 그림은 f와 f^{-1}을 완전히 대칭적으로 다룬다. $F(a) = \int_0^a \mathrm{f}$, $G(b) = \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$이라고 쓰자. 부등식은 $F(a) + G(b) \ge ab$이고 곡선 위에서 등호가 성립한다는 것이므로

$$G(b) = \max_a \bigl(ab - F(a)\bigr).$$

이다. 볼록함수(convex function) F를 새로운 볼록함수 G로 바꾸는 이 연산이 **르장드르 변환**이며, 이를 두 번 적용하면 다시 F로 돌아온다. 역학에서 르장드르 변환은 위치와 속도의 함수인 **라그랑지안**(*Lagrangian*)을 위치와 운동량의 함수인 **해밀토니안**(*Hamiltonian*)으로 바꾼다. 이 둘은 뉴턴(Newton)의 법칙에 대한 동치인 두 정식화로, 대학 2학년 강의에

서 만나게 될 것이다. 열역학에서는 에너지, 엔탈피(enthalpy), 자유 에너지(free energy) 사이를 오가게 해 준다. $F(a) = a^p/p$의 변환은 $G(b) = b^q/q$이며, 영 부등식의 두 지수가 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$로 연결되어 있는 것은 이 때문이다.

사고 기술

그림에서 얻는 부등식

적분은 넓이이다. 잘 고른 그림에서 넓이를 비교하면, 대수적으로는 알아보기 어려운 부등식을 증명할 수 있다.

한 영역이 다른 영역을 분명히 포함하거나, 여러 영역이 또 다른 영역을 분명히 덮는 그림을 찾아보자. 그런 다음 각 넓이를 적분으로 옮긴다.

더 도전하기

1 **1987년 버전.** STEP I 1987, 6번 문제 (`step.maths.org/questions/87-s1-q6`)을 풀어 보자. 같은 종류의 그림을 이용하여 역함수를 적분하는 문제이다. 미분하여 답을 검산해 보자.

2 **코시-슈바르츠.** $p = q = 2$인 영 부등식을 이용하여 양수들에 대하여 $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$임을 증명하여라. (**힌트:** 먼저 두 제곱근이 모두 1인 경우를 다루어라.)

3 **지수함수 버전.** $(*)$에서 $f(x) = e^x - 1$로 두어, $a, b \ge 0$에 대하여

$$ab \le e^a - 1 - a + (1+b)\ln(1+b) - b.$$

임을 보여라. 등호는 언제 성립하는가?

4 **이 한계는 얼마나 좋은가?** 심화 계산기를 이용하여 $t = 1, 2, 10$에 대해 $\arcsin(1/t)$와 $t - \sqrt{t^2-1}$을 비교하여라. t가 클 때 $t - \sqrt{t^2-1} \approx \frac{1}{2t}$이고 $\arcsin(1/t) \approx \frac{1}{t}$임을 보여라. 왜 이 한계는 2배만큼 차이가 나는가? ($a = 0$일 때의 그림을 보자. 남는 부분 가운데 얼마만큼이 낭비되는가?)

더 읽을거리

▶ **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 제1장과 제9장에서 코시-슈바르츠 부등식과 휠더 부등식을 다루며, 그 과정에서 영

부등식도 소개한다.

- **Roger Nelsen, *Proofs Without Words*** (Mathematical Association of America). 말 없는 증명. 영 부등식을 비롯한 여러 그림 증명이 실려 있다.
- **V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*** (Springer). 고전역학의 수학적 방법. 아르놀트(Arnold)는 제14절에서 바로 이 그림으로 르장드르 변환을 설명한다. 수준이 높지만 해당 절은 짧다.

3.5 π^e인가, e^π인가?

문제

STEP II 2013, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s2-q1`

도입

π^e와 e^π 중 어느 쪽이 더 클까? 계산기는 1초 만에 알려 준다: $e^\pi \approx 23.14$이고 $\pi^e \approx 22.46$이다. 그러나 계산기는 **그렇다는 사실**만 알려 줄 뿐 **왜** 그런지는 알려 주지 않으며, 비슷한 질문 무한히 많은 것을 한꺼번에 해결하는 데에도 도움이 되지 않는다. 3^π는 π^3보다 클까? 당연한 $n = m$ 말고도 $n^m = m^n$을 만족하는 자연수가 있을까?

이 모든 질문은 결국 하나의 곡선 $y = \ln x$와 그것을 가로지르는 직선들에 관한 것이다. 이 문제는 그래프를 신중하게 사용하면 대수적으로는 가망 없어 보이는 비교를 해결할 수 있다는 것, 그리고 수 e가 자연스러운 경계점으로 등장한다는 것을 보여 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 로그(logarithm)를 취하면 $a^b = b^a$는 $b \ln a = a \ln b$와 같다. 이 식을 변형하여 a는 한쪽에만, b는 다른 쪽에만 나타나게 하라.

$b \ln a = a \ln b$는 다음과 같다.

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}.$$

따라서 a^b와 b^a의 비교는 모두 하나의 함수 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$의 a와 b에서의 값을 비교하는 것이다. 또 $\frac{\ln a}{a}$는 원점과 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(a, \ln a)$를 잇는 직선의 기울기(gradient)이다. 이 문제가 직선에 관한 것인 이유가 바로 이것이다.

차근차근 풀기

1단계 원점을 지나는 접선

생각해 보기 $y = mx$가 $x = x_0$에서 $y = \ln x$에 접한다면, 어떤 두 등식이 성립해야 하는가?

직선과 곡선이 만나야 하므로 $mx_0 = \ln x_0$이고, 기울기가 같아야 하므로 $m = 1/x_0$이다. 둘째 식을 첫째 식에 대입하면 $1 = \ln x_0$이므로 $x_0 = e$이고 $m = 1/e$이다. 원점에서 그은 접선(tangent)은 점 $(e, 1)$에서 곡선에 접한다.

반대로 $y = mx$가 $x = a$와 $x = b$에서 곡선과 만나면 $\ln a = ma$이고 $\ln b = mb$이므로 $\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b}$이다. 이로부터 $b \ln a = a \ln b$를 얻고, 따라서 $a^b = b^a$이다. ■

그래프에 대하여: 원점을 지나면서 접선보다 약간 덜 가파른 직선은 접점의 양쪽에서 한 번씩, 모두 두 번 곡선과 만나므로 $a < e < b$이다. 기울기가 $1/e$보다 큰 직선은 곡선과 전혀 만나지 않는데, $\ln x$가 위로 볼록(concave)하여 접선 $y = x/e$보다 완전히 아래에 있기 때문이다.

2단계 원점 위쪽에서 y축과 만나는 직선

생각해 보기 이제 직선은 $c > 0$인 $y = mx + c$이다. $\frac{\ln p}{p}$와 $\frac{\ln q}{q}$를 m과 c로 나타내면 무엇인가?

$\ln p = mp + c$와 $\ln q = mq + c$로부터

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

$c > 0$이고 $p < q$이므로 $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$이고, 따라서 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$이다. 양변에 $pq > 0$을 곱하면 $q \ln p > p \ln q$이므로 $p^q > q^p$이다. ■

기하학적으로 보면: 두 점을 지나는 직선이 원점 위쪽에서 y축과 만날 때, 원점에서 바라보면 점 $(p, \ln p)$가 $(q, \ln q)$보다 더 가파른 각도에 보인다.

3단계 e 오른쪽의 현

생각해 보기 $e \le p < q$일 때 $(p, \ln p)$에서 $(q, \ln q)$까지의 현(chord)은 p에서의 곡선의 기울기보다 작은 기울기를 가진다. 왜 그런가? 그리고 그 때문에 왜 현의 y절편(intercept)이 양수가 되는가?

$\ln x$는 위로 볼록하므로 그 기울기 $1/x$는 감소하고, 따라서 p에서 q까지의 현은 p에서의 접

선보다 덜 가파르다. 즉 현의 기울기 s는 $s < \frac{1}{p}$를 만족한다. 현의 y절편은

$$c = \ln p - sp > \ln p - \frac{1}{p} \cdot p = \ln p - 1 \geq 0$$

이다. 여기서 $p \geq e$를 이용하였다. 따라서 현은 원점 위쪽에서 y축과 만난다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** 이 결과와 2단계를 이용하여 π^e와 e^π 중 어느 쪽이 더 큰지 판단하라.

$p = e, q = \pi$로 두자. 두 점 사이의 현은 절편이 양수이므로, 2단계에 의해 $p^q > q^p$이다. 즉

$$e^\pi > \pi^e.$$

4단계 접선과 평행한 현

이제 p에서 q까지의 현의 기울기가 접선 $y = \frac{x}{e}$의 기울기와 같은 정확히 $\frac{1}{e}$라고 하자.

> **생각해 보기** 이 현은 $(e, 1)$에서의 접선과 평행하다. $\ln x$는 위로 볼록하므로 곡선은 그 접선 아래에 있다. 현은 원점 위쪽에서 y축과 만나는가, 아니면 아래쪽에서 만나는가?

현은 어떤 c에 대하여 직선 $y = \frac{x}{e} + c$이다. 현의 양 끝점은 곡선 위에 있는데, 곡선은 접선 $y = \frac{x}{e}$ 위에 있거나 그보다 아래에 있으며, $x = e$에서만 접선과 닿는다. 양 끝점이 모두 $x = e$에 있을 수는 없으므로 적어도 하나는 접선보다 엄밀히 아래에 있고, 따라서 평행한 현 전체가 접선 아래에 있다: $c < 0$. 이제 $c < 0$으로 2단계를 반복하면 부등식의 방향이 바뀌어 $\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$가 되고, 따라서 $q^p > p^q$이다. ■

돌아보기

- **하나의 함수로 환원하기.** a^b와 b^a의 비교는 $h(a)$와 $h(b)$의 비교가 되었다. 여기서 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$이다.
- **근거가 있는 그래프.** "그래프를 이용하여"라는 각 요구는 정확한 사실로 뒷받침되었다: ln의 볼록성(현은 곡선 아래, 접선은 곡선 위)과 절편의 부호이다.
- **e의 특별한 역할.** 원점에서 그은 접선은 $x = e$에서 접하며, 이 점이 이 모든 비교의 경계점이다.

숨은 수학

$\frac{\ln x}{x}$의 그래프

이 문제의 모든 내용은 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$의 그래프(그림 3.5.1)에서 볼 수 있다. 그 도함수(derivative)는 $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$이므로, h는 $(0, e)$에서 증가하고 $x = e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$에 도달한 뒤 0을 향해 감소한다. 0과 $\frac{1}{e}$ 사이의 높이 m에 그은 수평선은 그래프와 두 번, 즉 $h(a) = h(b)$인 두 점 $a < e < b$에서 만나는데, 이것이 바로 $a^b = b^a$이다. e의 오른쪽에서 h는 감소하므로 $e \le p < q$이면 $h(p) > h(q)$, 즉 $p^q > q^p$이다. 특히 $e^\pi > \pi^e$이고, 더 일반적으로 모든 $x \neq e$에 대하여 $e^x > x^e$이다. 이 게임에서 e를 이기는 수는 없다.

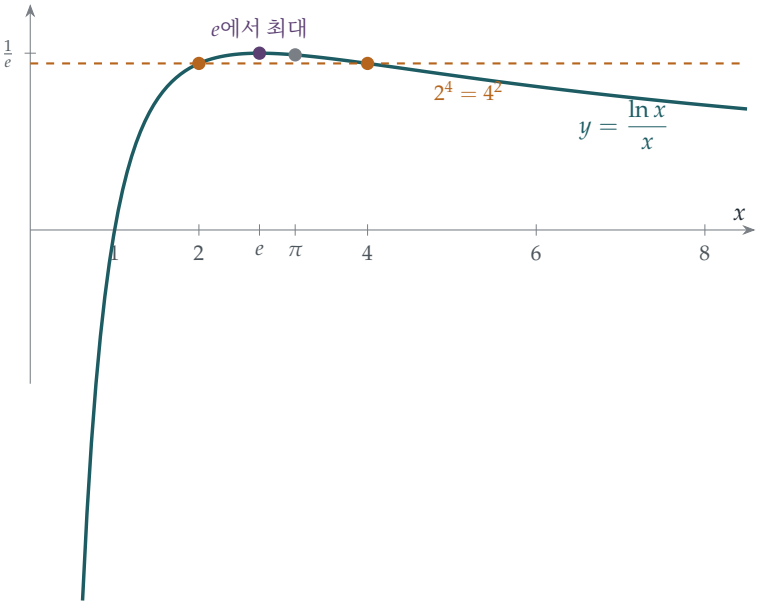


그림 3.5.1 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$의 그래프. 그래프는 $x = e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$까지 올라갔다가 내려간다. $h(e) > h(\pi)$이므로 $e^\pi > \pi^e$를 얻는다. 높이 $\frac{\ln 2}{2}$의 수평선(호박색)은 $x = 2$와 $x = 4$에서 그래프와 만난다. 이것이 $n^m = m^n$을 만족하는 서로 다른 자연수의 유일한 쌍이다.

$x^y = y^x$의 모든 해

$x^y = y^x$를 만족하는 서로 다른 양의 실수 쌍은 무엇일까? 깔끔한 요령으로 그것을 모두 찾을 수 있다. $t > 1$로 $y = tx$라 두면, $x^{tx} = (tx)^x$로부터 $x^t = tx$를 얻으므로 $x^{t-1} = t$이고

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

$t = 1 + \frac{1}{n}$으로 쓰면 $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$과 $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$을 얻는다. $n = 1$이면 $(2, 4)$이고, $n = 2$이면 $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$인데, 실제로 $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8} = \left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$이다. $n \to \infty$일 때 둘 다 두 갈래가 만나는 점인 e로 수렴한다. 이 문제는 1728년 다니엘 베르누이(Daniel Bernoulli)와 크리스티안 골드바흐(Christian Goldbach)가 주고받은 편지에서 논의되었고, 나중에 오일러(Euler)도 다루었다.

가장 경제적인 밑

함수 $x^{1/x} = e^{h(x)}$ 역시 $x = e$에서 최대가 된다. 이 사실은 흥미로운 질문 하나에 답해 준다: 기수법의 "비용"을 밑과 필요한 자릿수의 곱으로 정하면, 가장 경제적인 밑은 e이고, 자연수 중에서는 3이다(근소한 차이로 2를 앞선다). 1958년 소련의 세툰(Setun) 같은 몇몇 실험적인 컴퓨터는 3진법을 사용했다.

사고 기술

변수를 분리하도록 변형한 다음, 하나의 함수를 살펴보라

두 양이 얽혀 있는 부등식이나 등식은 하나의 함수를 두 점에서 계산한 값에 관한 명제가 되는 경우가 많다.

그 함수를 얻고 나면, 그 그래프(어디서 증가하고, 감소하고, 최대가 되는지)가 모든 질문에 한꺼번에 답해 준다. 여기서는 a^b 대 b^a가 $h(a)$ 대 $h(b)$가 되었다.

더 도전하기

1 **자연수.** STEP I 1988, 1번 문제 (`step.maths.org/questions/88-s1-q1`)를 풀어 보라.

2 **더 많은 비교.** STEP II 2025, 3번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`)를 풀어 보라. 이 절의 그래프를 이용하여 a^b와 b^a 사이의 비교를 더 해결하는 문제로, 그중 하나에서는 e에 대한 수치적 한계가 결정적인 역할을 한다.

3 **한 줄 증명.** $x \neq 0$일 때 성립하는 $e^x > 1 + x$에 $x = \frac{\pi}{e} - 1$을 대입하여 $e^\pi > \pi^e$를 직접 증명하라.

더 읽을거리

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number*** (Princeton University Press). 방정식 $x^y = y^x$를 포함하여 e의 역사를 다룬다.
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale*** (Princeton University Press). $\sqrt{-1}$에 관한 내용만 있는 것이 아니다. 바로 이런 종류의 흥미로운 계산으로 가득하다.
- **Michael Spivak, *Calculus*** (Cambridge University Press). 11장에서는 도함수를 이용하여 그래프의 모양을 이해하는 방법을 완전히 엄밀하게 다룬다.

3.6 기울기의 한계

문제

STEP I 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/88-s1-q7`

도입

어떤 구간에서 함수(function)의 값이 -1과 1 사이에 머문다는 것을 안다면, 그 함수가 얼마나 가파른지에 대해 무언가 말할 수 있을까? 일반적인 함수라면 그럴 수 없다. $\sin(1000x)$는 -1과 1 사이에 머물지만 기울기(slope)가 1000만큼 커지기도 한다. 하지만 이차함수(quadratic)는 그렇게 요동칠 수 없다. 이 문제는 상자 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ 안에 갇힌 이차함수의 기울기가 상자 안에서 결코 4보다 클 수 없으며, 4가 가능한 최선의 값임을 보여 준다.

이 문제의 기원은 놀랍다. 1887년, 주기율표(periodic table)로 유명한 화학자 드미트리 멘델레예프(Dmitri Mendeleev)는 용액의 밀도가 농도에 따라 어떻게 달라지는지 연구하면서 자료에 이차함수를 맞추고 있었다. 그는 자료의 오차가 곡선의 기울기에 얼마나 크게 영향을 줄 수 있는지 알아야 했고, 바로 이 문제의 결과를 증명(proof)했다. 2년 뒤 젊은 안드레이 마르코프(Andrei Markov)는 임의의 차수(degree)의 다항식(polynomial)에 대한 일반적인 문제를 해결했고, 그 답은 곧바로 수학에서 가장 중요한 다항식들 가운데 일부로 이어졌다.

시작하기 전에

생각해 보기 $f'(x)$에 대한 공식은 $-1, 0, 1$에서의 f의 값 세 개만 사용한다. 왜 세 개의 값만으로 이차함수의 도함수(derivative)가 결정되어야 할까?

이차함수는 계수(coefficient)가 세 개이므로 임의의 세 점에서의 값으로 결정된다. 따라서 계수들의 또 다른 함수인 도함수도 그 세 값으로 나타낼 수 있어야 한다. 공식은 그 방법을

알려 준다. 그리고 이것이 바로 필요한 것인데, 가정(hypothesis) $|f(x)| \le 1$은 f의 **값**에 대해 알려 주는 반면, 결론(conclusion)은 그 **도함수**에 관한 것이기 때문이다.

차근차근 풀기

1단계 공식

$f(1) = a+b+c, f(-1) = a-b+c, f(0) = c$이다. 따라서 우변은

$$(a+b+c)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + (a-b+c)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - 2cx$$

이다. x의 계수는 $(a+b+c)+(a-b+c)-2c = 2a$이고, 상수항(constant term)은 $\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{1}{2}(a-b+c) = b$이다. 따라서 우변은 $2ax+b = f'(x)$이다. ■

2단계 상계(bound)

생각해 보기 공식의 양변에 절댓값(absolute value)을 취하고, $|f(1)|, |f(-1)|, |f(0)| \le 1$과 함께 삼각부등식(triangle inequality)을 사용하라. x의 함수로서 $|f'(x)|$에 대해 어떤 상계를 얻는가?

삼각부등식 $|u+v+w| \le |u|+|v|+|w|$에 의해

$$|f'(x)| \le |f(1)|\,|x+\tfrac{1}{2}| + |f(-1)|\,|x-\tfrac{1}{2}| + 2|f(0)|\,|x| \le |x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| + 2|x|.$$

잠깐, 직접 해 보기 $|x| \le 1$일 때 $|x+\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}| + 2|x| \le 4$임을 보여라. (부호에 따라 경우를 나누어라.)

$|x| \le \frac{1}{2}$이면 $x+\frac{1}{2} \ge 0$이고 $x-\frac{1}{2} \le 0$이므로 $|x+\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}| = (x+\frac{1}{2}) - (x-\frac{1}{2}) = 1$이고, 전체는 $1+2|x| \le 2$이다.

$\frac{1}{2} \le |x| \le 1$이면 두 괄호 안의 식은 모두 x와 부호가 같으므로 $|x+\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}| = 2|x|$이고, 전체는 $4|x| \le 4$이다.

어느 경우든 $|f'(x)| \le 4$이다. ■

이 상계는 $x = \pm 1$에서만 도달한다. 구간의 가운데 절반에서는 기울기가 많아야 2이다.

3단계 극단적인 예

생각해 보기 $x = 1$에서 상계에 도달하려면 2단계의 모든 부등식에서 등호가 성립해야 한다. $f(1), f(-1), f(0)$은 어떤 값을, 어떤 부호로 가져야 할까?

$x = 1$에서 공식은 $f'(1) = \frac{3}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) - 2f(0)$이다. 이 값이 4가 되려면 $f(1) = 1$, $f(-1) = 1, f(0) = -1$이어야 한다. $(-1,1)$, $(0,-1)$, $(1,1)$을 지나는 이차함수는

$$f(x) = 2x^2 - 1,$$

이므로 $a = 2, b = 0, c = -1$이다. $|x| \le 1$에서 $x^2 \in [0,1]$이므로 $2x^2 - 1 \in [-1,1]$이고, $f'(1) = 4$이다. ■

돌아보기

- **알고 싶은 것을 아는 것으로 나타내라.** 공식은 도함수를 f의 값으로 다시 썼고, 바로 그 값에 대해 가정이 정보를 주었다.
- **삼각부등식.** 합을 절댓값들의 합으로 누르는 것은 해석학(analysis)에서 가장 흔한 수법 가운데 하나이다.
- **등호 조건(equality condition)에서 극단적인 경우를 찾아라.** 모든 부등식에서 언제 등호가 성립하는지 물으니 예 $2x^2 - 1$이 곧바로 나왔다.

숨은 수학

마르코프 부등식(Markov's inequality)과 체비쇼프 다항식

안드레이 마르코프는 1889년에 p가 $[-1,1]$에서 $|p(x)| \le 1$을 만족하는 n차 다항식이면

$$|p'(x)| \le n^2 \qquad \text{단, } |x| \le 1$$

임을 증명했다. $n = 2$일 때 이것은 우리의 상계 4이다. 극단적인 경우는 **체비쇼프 다항식**(*Chebyshev polynomials*) T_n으로, 다음과 같이 정의된다.

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

예를 들어 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$에서 우리의 극단적인 이차함수 $T_2(x) = 2x^2 - 1$을 얻고, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$에서 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$를 얻는다. $T_n(x) = \cos n\theta$이므로 이 다항식들은 n차 다항식이 할 수 있는 한 가장 자주 -1과 1 사이를 진동하며, 양 끝에서 가능한 한 가장 가파르다(그림 3.6.1). 마르코프의 동생 블라디미르(Vladimir)는 1892년에 이 결과를 고계도함수로 확장했다.

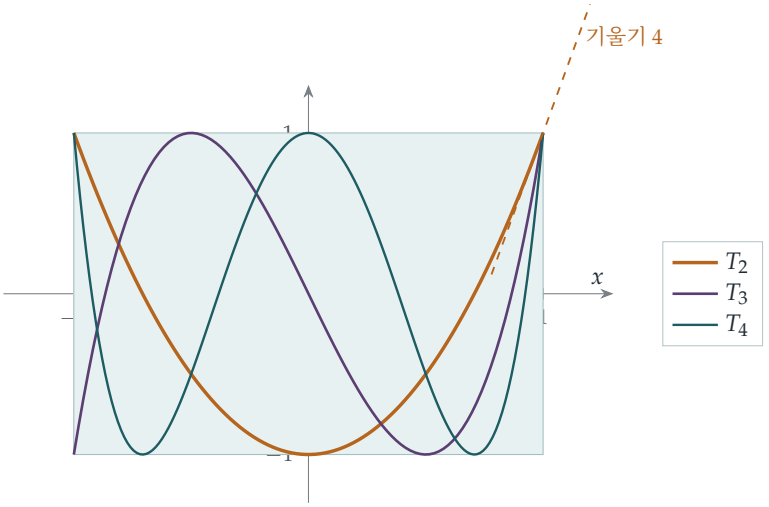


그림 3.6.1 체비쇼프 다항식 $T_2 = 2x^2 - 1$, $T_3 = 4x^3 - 3x$, $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$은 상자 $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ 안에 머물며, 가능한 한 자주 상자의 위와 아래에 닿는다. 이들은 양 끝에서 같은 차수의 다항식 가운데 가장 가파르다: $T_n'(1) = n^2$. 점선은 $x = 1$에서 T_2에 그은 접선(tangent)으로, 기울기는 4이다.

보간법(interpolation)

문제의 공식은 **라그랑주 보간법**(*Lagrange interpolation*)의 한 예이다. 몇 개의 점에서 함수의 값이 주어지면, 그 점들을 지나는 차수가 가장 낮은 유일한 다항식을 써 내고, 그것으로 함수나 그 도함수를 근사한다. 여기서 세 점은 $-1, 0, 1$이다. 이런 공식은 수치해석(numerical analysis)의 모든 곳에서 쓰이며, 예를 들어 측정 자료로부터 도함수를 추정하는 데 쓰인다. 마르코프 부등식은 이런 공식에 따라붙는 경고이다. 값의 작은 오차가 도함수에서는 최대 n^2배까지 커질 수 있는데, 이것이 바로 멘델레예프가 걱정했던 문제이다.

실제로 쓰이는 체비쇼프 다항식

체비쇼프 다항식은 근사 이론(approximation theory)의 일꾼이다. 함수를 등간격의 점이 아니라 T_n의 근에서 보간하면 오차를 제어할 수 있다. 등간격의 점을 쓰면 고차 보간이 구간의 양 끝 근처에서 크게 어긋날 수 있다(룽게 현상(Runge's phenomenon)). 함숫값을 기계 정밀도까지 계산하거나 미분방정식을 매우 정확하게 푸는 소프트웨어는 내부적으로 체비쇼프 전개를 사용하는 경우가 많다.

사고 기술

모르는 것을 아는 것으로 나타내기

가정이 한 종류의 양에 대해 알려 주고 결론이 다른 종류의 양에 관한 것이라면, 둘을 잇는 항등식을 찾은 뒤 항별로 상계를 구하라.

그리고 상계를 얻었다면 그것이 최선인지 물어라. 등호 조건을 거꾸로 따라가면 대개 극단적인 예에 이르고, 그 극단적인 예는 그 자체로 흥미로운 경우가 많다.

더 도전하기

1 **일반적인 아이디어.** f가 이차함수이면 $f(x) = f(-1)\dfrac{x(x-1)}{2} + f(0)(1-x^2) + f(1)\dfrac{x(x+1)}{2}$임을 보이고, 이를 미분하여 문제의 공식을 다시 얻어라.

2 **유일성(uniqueness).** 심화 $[-1,1]$에서 $|f(x)| \le 1$이고 $[-1,1]$의 어떤 점에서 $|f'(x)| = 4$인 이차함수는 $\pm(2x^2-1)$뿐임을 보여라.

3 **체비쇼프 다항식.** $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$를 이용하여 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$임을 확인하고, $T_3'(1) = 9$임을 확인하라. $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$임을 보이고, T_4를 구하라.

4 **T_n의 기울기.** $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$를 θ에 대해 미분하여 $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$임을 보이고, $\theta \to 0$으로 보내어 $T_n'(1) = n^2$임을 유도하라.

더 읽을거리

- **Lloyd N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*** (SIAM). 체비쇼프 다항식과 보간법에 관한 아름다운 현대적 책으로, 실력 있는 고등학생도 읽을 수 있으며 책 전체에 걸쳐 컴퓨터 실험이 실려 있다.
- **Peter Borwein & Tamás Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*** (Springer). 마르코프 부등식과 그 친척들에 대한 전체 이야기를 다룬다. 고급 수준이다.
- **George M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*** (Springer). 라그랑주 보간법, 체비쇼프 다항식, 마르코프형 부등식을 다루는 학부 교재이다.

3.7 $\pi^2 \leq 10$

문제

STEP II 2014, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s2-q2`

도입

학교에 다니는 학생이라면 누구나 π가 3보다 조금 크다는 것을 안다. 그렇다면 π의 상한(upper bound)을 어떻게 **증명**할 수 있을까? 아르키메데스(Archimedes)는 다각형을 이용했다. 이 문제는 전혀 예상하지 못한 방법을 쓴다. 함수에 관한 일반적인 부등식(inequality)에 간단한 포물선을 대입하면 곧바로 $\pi^2 \leq 10$을 읽어 낼 수 있다. 다른 함수를 고르면 유명한 근삿값 $\pi \leq \frac{22}{7}$을 얻는다.

부등식 $(*)$는 **비르팅거 부등식**(*Wirtinger's inequality*)이다. 이 부등식은 양 끝에서 0으로 고정된 함수가 "가파르지" 않으면서 "클" 수는 없다는 것을 말한다. 그 배경에는 수리물리학의 핵심 아이디어 가운데 하나가 있다. 바로 현의 진동, 양자 입자의 에너지 준위, 그리고 고윳값(eigenvalue) 이론이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $[0, \pi]$의 양 끝에서 0인 함수가 가운데에서 크다면 왜 가파를 수밖에 없을까? 조건 $f(0) = f(\pi) = 0$은 왜 중요할까?

함수가 거리 π 안에서 0에서 어떤 높이 H까지 올라갔다가 다시 0으로 내려오려면, 적어도 $H/(\pi/2)$의 평균 변화율로 올라가야 한다. 따라서 도함수(derivative)가 모든 곳에서 작을 수는 없다. 양 끝의 조건이 없으면 이런 제약도 없다. 상수함수는 도함수가 0이면서도 얼마든지 클 수 있다. 부등식 $(*)$는 이 생각을 엄밀하게 만든 것으로, "크기"와 "가파름"을 제곱의 적분(integral)으로 잰다.

차근차근 풀기

1단계 사인파

생각해 보기 $\int_0^\pi \sin^2 nx\,dx$의 값은 얼마인가? $\int_0^\pi \cos^2 nx\,dx$는? ($\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$를 이용하라.)

$\int_0^\pi \cos 2nx\,dx = 0$이므로 두 값은 모두 $\frac{\pi}{2}$이다. $f(x) = \sin nx$이면 $f'(x) = n\cos nx$이므로, $n \geq 1$에서

$$\int_0^\pi f^2 = \frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2} = \int_0^\pi (f')^2,$$

이다. ■$n = 1$이면 등호가 성립하므로, 이 부등식은 더 이상 개선할 수 없을 만큼 날카롭다는 점에 주목하자.

2단계 양 끝 조건이 중요하다

생각해 보기 $f(0) \neq 0$이면서 $(*)$가 성립하지 않는 간단한 함수를 찾아라. 그다음 $f(0) = 0$이지만 $f(\pi) \neq 0$인 함수를 찾아라.

상수함수 $f(x) = 1$은 $f(0) = 1 \neq 0$이고, $\int_0^\pi 1\,dx = \pi > 0 = \int_0^\pi 0\,dx$이다.

두 번째 경우로, $f(x) = x$는 $f(0) = 0$이지만 $f(\pi) = \pi$이고,

$$\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^3}{3} \approx 10.3 > \pi = \int_0^\pi 1^2\,dx.$$

이다. 따라서 두 경우 모두 $(*)$가 성립하지 않는다. ■

3단계 포물선

생각해 보기 $x = 0$과 $x = \pi$에서 0이 되는 이차식(quadratic)은 무엇인가? (상수배를 무시하면 하나뿐이다. 상수배가 왜 상관없을까?)

이차식은 $x(\pi - x)$의 상수배여야 하고, f에 상수 k를 곱하면 $(*)$의 양변에 모두 k^2이 곱해지므로 $f(x) = x(\pi - x)$, 즉 $a = -1, b = \pi, c = 0$으로 놓아도 된다. 그러면 $f'(x) = \pi - 2x$이고, 치환(substitution) $u = x - \frac{\pi}{2}$ (두 피적분함수를 모두 우함수(even function)로 만든다)를 쓰면

$$\int_0^\pi x^2(\pi - x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - u^2\right)^2 du = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^\pi (\pi - 2x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4u^2\,du = \frac{\pi^3}{3}.$$

이다. (첫 번째 적분은 $h = \frac{\pi}{2}$로 놓고 $\int_{-h}^{h}(h^2-u^2)^2\,du = 2(h^5 - \frac{2}{3}h^5 + \frac{1}{5}h^5) = \frac{16}{15}h^5$을 이용한다.) 따라서 $(*)$는 $\frac{\pi^5}{30} \le \frac{\pi^3}{3}$, 즉

$$\pi^2 \le 10. \qquad \blacksquare$$

을 뜻한다.

4단계 삼각함수 선택

> **생각해 보기** $f(x) = p\sin\frac{1}{2}x + q\cos\frac{1}{2}x + r$일 때, $f(0)=0$과 $f(\pi)=0$은 p, q, r에 어떤 조건을 주는가?

$f(0) = q + r = 0$이고 $f(\pi) = p + r = 0$이다. 따라서 $p = q = -r$이고, 상수배를 조정하여 $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1$로 놓는다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 이 함수에 대해 $\int_0^\pi f^2$와 $\int_0^\pi (f')^2$를 계산하라. π에 관해 어떤 부등식이 나오는가?

$s = \sin\frac{x}{2}$, $c = \cos\frac{x}{2}$로 놓자. 그러면 $(s+c)^2 = 1 + 2sc = 1 + \sin x$이므로

$$f^2 = (s+c)^2 - 2(s+c) + 1 = 2 + \sin x - 2\sin\tfrac{x}{2} - 2\cos\tfrac{x}{2}.$$

이다. $\int_0^\pi \sin x = 2$, $\int_0^\pi \sin\frac{x}{2} = 2$, $\int_0^\pi \cos\frac{x}{2} = 2$를 이용하면

$$\int_0^\pi f^2\,dx = 2\pi + 2 - 4 - 4 = 2\pi - 6.$$

이다. 또 $f' = \frac{1}{2}(c - s)$이므로 $(f')^2 = \frac{1}{4}(1 - \sin x)$이고 $\int_0^\pi (f')^2\,dx = \frac{1}{4}(\pi - 2)$이다. 이제 $(*)$에서

$$2\pi - 6 \le \frac{\pi - 2}{4} \quad\Longrightarrow\quad 8\pi - 24 \le \pi - 2 \quad\Longrightarrow\quad \pi \le \frac{22}{7}. \qquad \blacksquare$$

을 얻는다.

5단계 어느 쪽이 더 좋은가?

$\pi \le \frac{22}{7}$에서 $\pi^2 \le \frac{484}{49} \approx 9.878$을 얻으므로, 이것이 $\pi^2 \le 10$보다 더 좋다. (실제 값은 $\pi^2 \approx 9.870$이다.) 이로써 $\frac{22}{7}$이 π의 상한임이 증명된다는 점에 주목하자. 전혀 다른 적분을 다루는 Section 4.3에서는 이 값이 π와 같지 않음을 보인다.

돌아보기

- **일반적인 부등식, 구체적인 함수.** 시험 함수를 하나 고르자 모든 함수에 관한 명제가 하나의 수에 관한 명제로 바뀌었다.

- **상수배 조정.** $(*)$의 양변은 같은 비율로 바뀌므로, 각 함수족에서 자유로운 상수를 하나로 고정할 수 있었다.
- **더 좋은 시험 함수가 더 좋은 한계를 준다.** 시험 함수가 극단적인 경우인 $\sin x$에 가까울수록 부등식은 등호에 가까워지고, 추정도 더 좋아진다(그림 3.7.1).

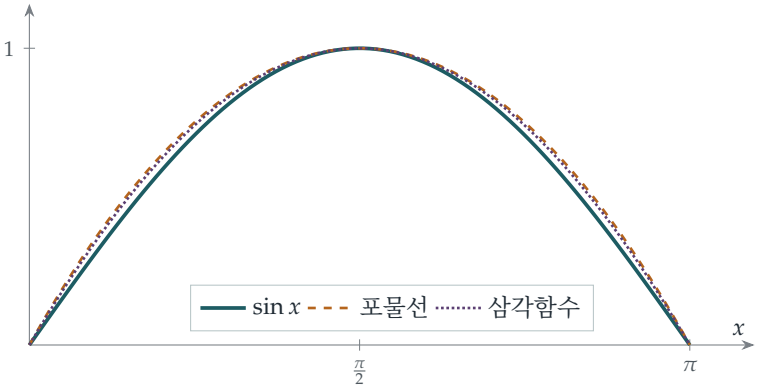


그림 3.7.1 이 절에 나온 세 함수를 최댓값이 1이 되도록 조정한 그래프: $(*)$에서 등호가 성립하는 극단적인 경우 $\sin x$(실선), $\pi^2 \le 10$을 주는 포물선 $x(\pi - x)$(파선), $\pi \le \frac{22}{7}$을 주는 $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1$(점선). 두 시험 함수 모두 $\sin x$에 매우 가깝기 때문에 한계가 이렇게 좋다.

숨은 수학

푸리에 급수를 이용한 증명

$(*)$는 왜 참일까? 대학에 가면 $[0, \pi]$에서 정의되고 양 끝에서 0이 되는 적당한 함수는 모두 **푸리에**(*Fourier*) **사인 급수**(*Fourier sine series*)

$$\mathrm{f}(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots .$$

로 쓸 수 있다는 것을 배운다. $m \neq n$이면 $\int_0^\pi \sin mx \sin nx \, dx = 0$이므로, 제곱하여 적분하면 교차항이 모두 사라져

$$\int_0^\pi \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots\right), \qquad \int_0^\pi (\mathrm{f}')^2 = \frac{\pi}{2}\left(1^2 b_1^2 + 2^2 b_2^2 + 3^2 b_3^2 + \cdots\right).$$

을 얻는다. 오른쪽 식의 각 항은 왼쪽 식의 대응하는 항보다 크거나 같으므로 $(*)$가 증명되고, 등호는 f가 $\sin x$의 상수배일 때만 성립한다는 것도 알 수 있다. 문제의 소문항 (i)은 항이 하나뿐인 경우이다.

진동하는 현과 양자 입자

비 $\int (f')^2 / \int f^2$를 **레일리 몫**(*Rayleigh quotient*)이라 하며, $(*)$는 0과 π에서 고정된 함수에 대해 이 비의 가능한 최솟값이 1이라는 것을 말한다. 이 수에는 물리적인 의미가 있다. 양 끝이 고정된 현에서 $\int (f')^2$는 늘어남에 따른 에너지를, $\int f^2$는 변위의 크기를 나타내며, 이 비의 최솟값이 현이 낼 수 있는 가장 낮은 음을 결정한다. 양자역학(quantum mechanics)에서는 같은 최솟값이 상자에 갇힌 입자의 가장 낮은 에너지이다. 양 끝이 고정된 파동은 휘어질 수밖에 없으므로 이 에너지는 0이 될 수 없다. 레일리 경(Lord Rayleigh)은 바로 이 방법, 즉 시험 함수를 추측하여 비를 계산하는 방법으로 진동계의 진동수를 추정했다. 극단적인 경우가 최솟값을 주므로 어떤 추측이든 실제 최저 진동수의 상한을 주며, 좋은 추측은 매우 정확한 상한을 준다.

변분법

적분의 비를 최소로 만드는 함수를 찾는 것은 **변분법**(*calculus of variations*)의 문제로, 여기서 미지의 대상은 수가 아니라 함수 전체이다. 이 경우의 최소화 함수 $\sin x$는 미분방정식(differential equation) $f'' + f = 0$을 만족하는데, 이것은 우연이 아니다. 적분을 최소화하면 언제나 최소화 함수에 대한 미분방정식이 나온다. 이 아이디어는 Section 4.7에서 다시 다룬다.

사고 기술

시험 함수

어떤 함수족의 모든 함수에 대해 성립하는 부등식을 교묘하게 고른 함수에 적용하면 특정한 수에 관한 정보를 얻을 수 있다.

핵심은 고르는 솜씨에 있다. 극단적인 경우에 가까운 시험 함수(test function)는 거의 날카로운 결과를 준다. 이 아이디어는 고윳값 추정에서 유한 요소법(finite element method)에 이르기까지 해석학, 물리학, 공학 전반에 걸쳐 쓰인다.

더 도전하기

1 **사차식.** $(*)$에 $f(x) = x^2(\pi - x)^2$을 대입하라. 이 함수로는 $\pi^2 \le 12$밖에 얻지 못함을 보여라. 이 시험 함수가 포물선보다 나쁜 이유는 무엇인가? (그 모양을 $\sin x$와 비교해 보라.)

2 **두 사인파.** $f(x) = \sin x + \sin 2x$에 대해 양변을 직접 계산하여 $(*)$를 확인하라.

3 **다른 구간.** 치환을 이용하여 $g(0) = g(L) = 0$이면 $\displaystyle\int_0^L g^2 \le \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L (g')^2$임을 보여라. 이것은 길이가 다른 현에 대해 무엇을 말해 주는가?

4 **레일리의 방법.** 심화 $f(x) = x(\pi - x) + \lambda x^2(\pi - x)^2$으로 놓고, π^2에 대한 한계가 가장 좋아지도록 λ를 정하라. (계산이 매우 복잡하므로 컴퓨터 대수 시스템을 쓰면 도움이 된다.)

더 읽을거리

- **T. W. Körner, *Fourier Analysis*** (Cambridge University Press). 케임브리지의 해석학자가 쓴, 푸리에 급수와 그 응용을 폭넓게 풀어낸 훌륭한 책이다.
- **하디(Hardy), 리틀우드(Littlewood), 포여(Pólya), *Inequalities*** (Cambridge University Press). 부등식에 관한 책으로, 7장에서 비르팅거 부등식과 그와 관련된 부등식들을 다룬다.
- **리처드 파인만(Richard Feynman), *The Feynman Lectures on Physics*,** 제II권 19장 ("The principle of least action", 최소 작용의 원리). 적분을 최소화하는 문제를 처음부터 끝까지 물리적 직관과 함께 다룬 파인만의 강의이다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.

3.8 덧셈 법칙으로 정해지는 함수

문제

STEP III 2019, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

도입

e^x가 무엇인지 어떻게 아는가? 학교에서는 복리 이자를 통해, 또는 자기 자신이 도함수(derivative)인 함수로, 또는 $\lim(1+x/n)^n$으로 소개한다. 이 문제는 또 다른 답을 제시한다. e^{kx}는 덧셈을 곱셈으로 바꾸는, 즉 $\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$를 만족하는 **유일한** 미분가능(differentiable) 함수이다. 이 규칙 하나와 수 $\mathrm{f}'(0)$ 하나만으로 함수가 완전히 결정된다.

두 번째 부분은 더 낯선 규칙 $g(x+y)=\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}$에 대해 같은 일을 한다. 이 식이 낯익어 보인다면 그럴 만하다. 이것은 빛의 속도를 1로 놓았을 때, 특수 상대성 이론(special relativity)에서 속도를 더하는 아인슈타인(Einstein)의 규칙이다. 이 규칙이 강제하는 함수는 tanh이며, 이것이 어떤 것도 빛의 속도 이상으로 가속될 수 없는 이유를 설명해 준다.

시작하기 전에

$\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$처럼 미지수가 함수인 방정식을 **함수방정식**(*functional equation*)이라고 한다.

생각해 보기 이 방정식은 **모든** x와 y에 대해 성립한다. 가장 먼저 시도해 볼 만한 유용한 것은 무엇인가?

특수한 값이다. $y=0$(또는 $x=y$, 또는 $y=-x$)으로 놓으면 적은 노력으로 많은 정보를 얻을 때가 많다. 두 부분 모두 이렇게 시작한다.

차근차근 풀기

1단계 0에서의 값

$x = y = 0$을 대입하면 $f(0) = f(0)^2$이므로 $f(0) = 0$ 또는 1이다.

> **생각해 보기** $f(0) = 0$이면 무엇이 잘못되는가?

$f(0) = 0$이면 $y = 0$을 대입하여 모든 x에 대해 $f(x) = f(x)f(0) = 0$을 얻는다. 그러면 f는 항등적으로 0이고 $f'(0) = 0$이 되어 $f'(0) = k \neq 0$에 모순이다. 따라서 $f(0) = 1$이다. ■

2단계 0에서의 미분계수로부터 모든 점에서의 도함수 구하기

> **생각해 보기** $(*)$에서 $f(x+h) = f(x)f(h)$로 써 보자. 극한 밖으로 무엇을 꺼낼 수 있는가?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \\ &= f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f(x)\, f'(0) = k\, f(x). \end{aligned}$$ ■

함수방정식 덕분에 0 근처에서의 성질을 다른 모든 점으로 옮길 수 있다.

3단계 $f' = kf$ 풀기

$u(x) = f(x)e^{-kx}$를 생각하자. 그러면 $u'(x) = \big(f'(x) - kf(x)\big)e^{-kx} = 0$이므로 u는 상수이고, $u(0) = f(0) = 1$이다. 따라서

$$f(x) = e^{kx}.$$ ■

(변수분리(separation of variables)로 $\int \frac{df}{f} = \int k\,dx$를 계산해도 같은 답을 얻지만, 이때는 $f(x) \neq 0$이 필요하다. u를 쓰는 요령은 이런 걱정을 피하게 해 준다.)

4단계 두 번째 규칙

> **생각해 보기** g에 대한 규칙에 $y = 0$을 대입해 보자. 이것으로 $g(0)$에 대해 무엇을 알 수 있는가? $|g(x)| < 1$은 어디에서 쓰이는가?

$y = 0$이면 $g(x)\big(1 + g(x)g(0)\big) = g(x) + g(0)$이고, 이를 정리하면 $g(0)\big(g(x)^2 - 1\big) = 0$이다. $|g(x)| < 1$이므로 괄호 안은 결코 0이 아니고, 따라서 $g(0) = 0$이다.

잠깐, 직접 해 보기 이제 규칙을 이용해 $g(x+h)-g(x)$를 계산하고 정리한 다음, h로 나누고 $h\to 0$으로 보내 보자.

$$g(x+h)-g(x)=\frac{g(x)+g(h)-g(x)-g(x)^2g(h)}{1+g(x)g(h)}=\frac{g(h)\bigl(1-g(x)^2\bigr)}{1+g(x)g(h)}.$$

h로 나눈다. $h\to 0$일 때 $\frac{g(h)}{h}=\frac{g(h)-g(0)}{h}\to g'(0)=k$이고, $g(h)\to g(0)=0$(미분가능한 함수는 연속이다)이므로 분모는 1로 수렴한다. 따라서

$$g'(x)=k\bigl(1-g(x)^2\bigr). \qquad \blacksquare$$

5단계 미분방정식 풀기

생각해 보기 변수를 분리하자. $|g|<1$에서 도함수가 $\frac{1}{1-g^2}$인 함수는 무엇인가?

$|g|<1$이므로 나눌 수 있다: $\dfrac{g'}{1-g^2}=k$. 함수 $\operatorname{artanh} g=\frac{1}{2}\ln\frac{1+g}{1-g}$의 도함수는 $\frac{1}{1-g^2}$이므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{artanh} g(x)=k$이고 $\operatorname{artanh} g(x)=kx+C$이다. $g(0)=0$에서 $C=0$이므로

$$g(x)=\tanh kx. \qquad \blacksquare$$

확인: 덧셈정리 $\tanh(A+B)=\dfrac{\tanh A+\tanh B}{1+\tanh A\tanh B}$는 주어진 규칙과 정확히 같다.

돌아보기

- **특수한 값부터.** $y=0$을 대입하여 $f(0)$과 $g(0)$을 구했다.
- **한 점에서 모든 점으로.** 덧셈 법칙이 0에서의 미분계수를 모든 x로 옮겨 주었고, 이로써 함수방정식이 미분방정식(differential equation)으로 바뀌었다.
- **유일성(uniqueness).** 이 논증은 e^{kx}와 $\tanh kx$가 조건을 만족함을 확인하는 데 그치지 않고, 이들이 유일한 가능성임을 보인다. 바로 이 점이 함수방정식을 하나의 정의로 만들어 준다.

숨은 수학

상대성 이론에서의 속도

일상생활에서 기차가 속도 u로 움직이고 그 안에서 앞쪽으로 속도 v로 걸어가면, 지면에 대한 속도는 $u+v$이다. 아인슈타인은 1905년에 이것이 근사일 뿐임을 보였다. c를 빛의 속도라 할 때, 올바른 규칙은

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv/c^2}.$$

이다. 속도를 c에 대한 비율로 나타내면, 이것은 정확히 g에 대한 규칙이다. 우리의 결과는 각 속도를 $v = \tanh\phi$로 쓰면, 속도의 합성이 ϕ 값들을 **더하는** 것이 된다는 뜻이다. 양 $\phi = \operatorname{artanh} v$를 **신속도**(*rapidity*)라고 한다. 로켓 엔진이 한 번 가속할 때마다 일정한 양의 신속도가 더해지지만, 모든 ϕ에 대해 $\tanh\phi < 1$이므로 속도는 빛의 속도에 점점 가까워질 뿐 결코 도달하지 못한다(그림 3.8.1). $0.9c$와 $0.9c$를 합성하면 $1.8c$가 아니라 $\frac{1.8}{1.81}c \approx 0.9945c$가 된다.

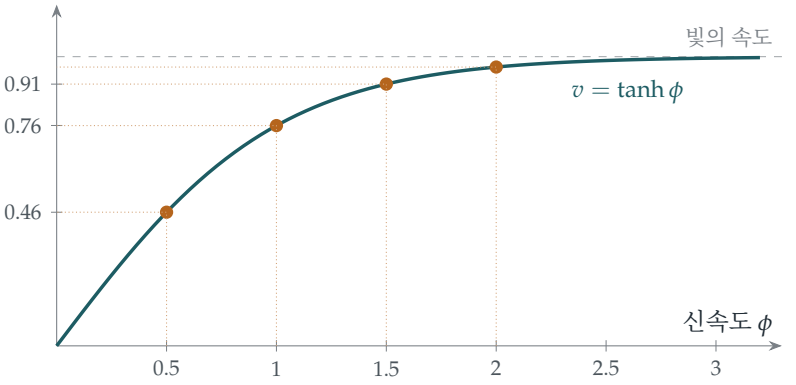


그림 3.8.1 신속도에 따른 속도(빛의 속도에 대한 비율). 엔진이 같은 가속을 할 때마다 주어지는 것처럼 신속도를 같은 간격으로 늘리면, 속도는 0.46, 0.76, 0.91, 0.96, ...으로 점점 적게 증가하며 결코 1에 도달하지 않는다.

코시의 함수방정식

가장 단순한 함수방정식은 $f(x+y) = f(x)+f(y)$로, 1821년에 코시(Cauchy)가 연구하였다. f가 미분가능하면 이 문제의 방법으로 $f(x) = kx$임을 보일 수 있다. 사실 연속성(continuity)만으로도 충분하다. 그러나 정칙성 가정이 전혀 없으면, 그래프가 평면 전체에 조밀하게 흩어져 있는 전혀 다른, 극도로 기괴한 해들이 존재한다. Georg Hamel이 1905년에 이러한 해를 구성하였는데, 그 구성에는 **선택공리**(*axiom of choice*)가 필요하며, 그 중 어느 것도 명시적으로 적어 낼 수 없다. 이 문제가 f가 미분가능하다고 굳이 못 박는 이유

중 하나가 이것이다. 이 가정은 형식적인 것이 아니다.

준동형사상

$f(x+y) = f(x)f(y)$는 f가 실수의 덧셈을 양의 실수의 곱셈으로 바꾸면서 두 구조를 모두 보존한다는 뜻이다. 대학 1학년 대수학의 언어로 말하면, f는 $(\mathbb{R}, +)$에서 $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$로 가는 **군 준동형사상**(*group homomorphism*)이고, 로그는 그 역함수이다. 수학에서 가장 중요한 함수들 중 상당수가 이런 식으로, 즉 그것이 보존하는 구조로 특징지어진다. Section 7.6에서는 tanh의 기하학적 의미를 만나게 된다. tanh는 "쌍곡각"을 재며, 그 덧셈 법칙은 쌍곡 회전의 합성에서 나온다.

사고 기술

성질로 함수를 정의하기

공식 대신 함수가 따르는 규칙으로 함수를 기술하고, 그 규칙을 따르는 함수가 하나뿐임을 증명한다.

수학자들은 exp, sin, cos를 비롯한 많은 함수를 흔히 이렇게 생각한다. 공식으로서가 아니라 함수방정식이나 미분방정식의 유일한 해로서 말이다. 이렇게 보면 이 함수들을 어떻게 계산하는지뿐 아니라 왜 중요한지도 알 수 있다.

더 도전하기

1 **탄젠트 규칙.** g가 미분가능하고 $g'(0) = k \neq 0$이며, 양변이 정의될 때마다 $g(x+y) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$라고 하자. $g'(x) = k(1+g(x)^2)$임을 보이고, $x = 0$ 근처에서 $g(x) = \tan kx$임을 이끌어 내어라.

2 **코시의 방정식.** f가 미분가능하고 모든 x, y에 대해 $f(x+y) = f(x) + f(y)$이면 $f(x) = kx$임을 보여라.

3 **도함수 없이.** 심화 $f(x+y) = f(x)f(y)$이고 $f(1) = a > 0$이라는 것만 가정하자. 양의 정수 n에 대해 $f(n) = a^n$임을 보이고, 다음으로 $f(1/n) = a^{1/n}$임을, 그다음 모든 양의 유리수 q에 대해 $f(q) = a^q$임을 보여라. (더 나아가려면 왜 연속성이 필요한가?)

4 **로켓 과학.** 어떤 로켓은 분사할 때마다 현재 기준틀에 대해 속도를 $0.5c$만큼 높일 수 있다. 정지 상태에서 출발할 때, 2번, 3번, 4번 분사한 후의 (출발점에 대한) 속도는 얼마인가? 신속도를 이용하여라.

더 읽을거리

- **Christopher Small, *Functional Equations and How to Solve Them*** (Springer). 함수방정식과 그 풀이법. 문제 풀이를 즐기는 사람을 위한 읽기 쉬운 입문서이다.
- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman). 시공간 물리학. 특수 상대성 이론의 고전적인 입문서로, 처음부터 끝까지 신속도를 사용한다.
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press). 야심 찬 이들을 위한 미적분. 지수함수와 삼각함수를 그 성질로부터 정의하며, 바로 이 절의 정신과 같다.

3.9 새로운 함수 만들기

문제

STEP II 2021, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

$e^{-x} = 5x$를 풀 수 있을까? 계산기에 있는 어떤 함수로도 풀 수 없다. 식을 이리저리 정리해 보아도 소용없다. x가 지수함수의 안과 밖에 동시에 갇혀 있기 때문이다. 시행착오(trial and improvement)로 수치적인 답을 찾을 수는 있지만, "공식"은 없다.

정말 그럴까? 이 문제는 대담한 한 걸음을 내딛는다. 어떤 방정식들의 모임이 알려진 함수로 나타낸 해를 갖지 않는다면, 그 방정식들을 푸는 **새로운 함수를 만들어 내는** 것이다. 수학자들이 $\sqrt{x}$(x^2의 역함수), $\ln x$(e^x의 역함수), $\arcsin x$를 가지고 한 일이 바로 이것이다. 여기서 새로 등장하는 함수는 xe^x의 역함수(inverse function)로, 오늘날 **람베르트 W 함수**(Lambert W function)라고 부른다. 이 함수만 있으면 $x^x = 10$에서부터 물리 법칙에 이르기까지 놀라울 만큼 다양한 방정식을 정확하게 풀 수 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 방정식을 "푼다"는 것은 정확히 무슨 뜻일까? $x = \sqrt{2}$는 $x^2 = 2$의 해일까, 아니면 단지 그 해에 붙인 이름일까?

둘 다이다. $\sqrt{2}$는 "제곱하면 2가 되는 양수"에 붙인 이름이다. 우리가 이것을 답으로 받아들이는 까닭은 함수 $\sqrt{\ }$를 잘 이해하고 있고, 값을 계산하기 쉬우며, 그 성질이 알려져 있기 때문이다. 어떤 답을 "공식"으로 볼지는 우리가 어떤 함수들에 이름을 붙이기로 합의했는지에 달려 있다. 이 문제는 그 목록에 함수를 하나 더 보탠다.

차근차근 풀기

1단계 **곡선** $y = xe^x$

$\frac{dy}{dx} = e^x + xe^x = (1+x)e^x$이고, 이는 $x = -1$에서만 0이 되며, 이때 $y = -e^{-1}$이다. 도함수(derivative)는 $x < -1$에서 음수이고 $x > -1$에서 양수이므로, 이 점은 극소(minimum)이다.

> ? **생각해 보기** $x \to +\infty$일 때와 $x \to -\infty$일 때 xe^x는 어떻게 될까? 곡선은 좌표축과 어디에서 만날까?

$x \to \infty$일 때 $xe^x \to \infty$이다. $x \to -\infty$일 때는 지수적 감소가 일차적 증가를 이기므로 $xe^x \to 0$이며, 아래쪽에서 0에 다가간다. 곡선은 원점을 지난다. 따라서 곡선은 x축의 음의 부분 바로 아래에서 들어와 최솟점 $(-1, -\frac{1}{e})$까지 내려간 다음, $(0,0)$을 지나 위로 가파르게 솟아오른다(그림 3.9.1).

2단계 **역함수**

역함수를 가지려면 f는 일대일(one-to-one)이어야 하므로, 순증가하거나 순감소하는 구간으로 정의역을 제한해야 한다. 오른쪽 부분을 포함하는 그런 구간 가운데 가장 큰 것은 $[-1, \infty)$이므로 $a = -1$이다. $[-1, \infty)$에서 f는 $-\frac{1}{e}$에서 ∞까지 증가하므로, 역함수 g는 $[-\frac{1}{e}, \infty)$에서 정의되고, $g(-\frac{1}{e}) = -1$에서 시작하여 증가하면서 $g(0) = 0$을 지나고, 천천히 커진다(큰 x에 대해서는 $\ln x$보다도 더 천천히 커진다). 그 그래프는 $y = xe^x$의 오른쪽 부분을 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 것이며, $(-\frac{1}{e}, -1)$에서 수직인 접선(tangent)을 가진다.

g를 정의하는 성질은 다음과 같다.

$$g(z)\, e^{g(z)} = z, \qquad g(z) \geq -1.$$

따라서 (iii)의 모든 소문항에 대한 전략은 같다. 방정식을 (어떤 것) $e^{(\text{같은 그것})}$ = (어떤 수)의 꼴로 정리하는 것이다.

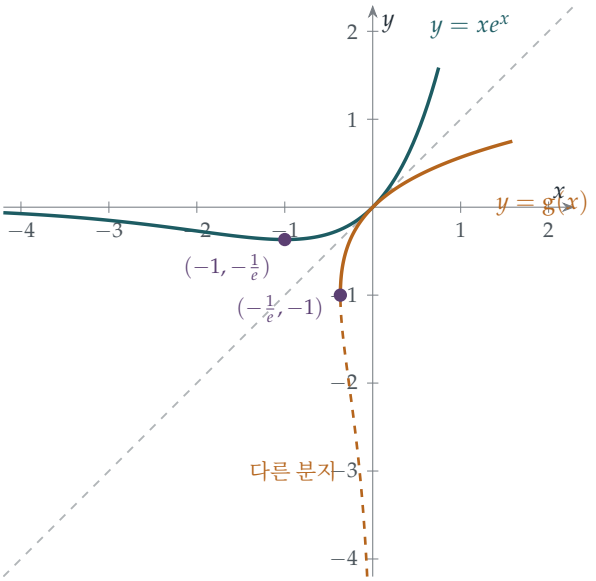


그림 3.9.1 곡선 $y = xe^x$(청록색)는 $(-1, -\frac{1}{e})$에서 최솟값을 가진다. $x \geq -1$로 제한하고 $y = x$에 대하여 대칭이동하면 역함수 g(호박색 실선), 곧 람베르트 W 함수를 얻는다. 호박색 점선 곡선은 $y = xe^x$의 왼쪽 부분을 대칭이동한 것으로, 소문항 (iii)의 두 번째 근을 구할 때 필요한 두 번째 분지(branch)이다.

3단계 네 개의 방정식

(a) $e^{-x} = 5x$. 양변에 e^x를 곱하고 5로 나누면 $xe^x = \frac{1}{5}$이다. 따라서 $x = \mathrm{g}\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0.169$이다. $x < 0$에서 xe^x는 음수이므로 근은 모두 양수이고, $x > 0$에서 xe^x는 증가하므로 이것이 유일한 근이다.

> **생각해 보기** (b)와 (c)에서 미지수는 $x \ln x$의 꼴로 나타난다. 어떤 치환(substitution)을 하면 $x \ln x$가 ue^u 꼴이 될까?

$x = e^u$로 놓으면 $\ln x = u$이고 $x \ln x = ue^u$이다.

(b) $2x \ln x + 1 = 0$은 $ue^u = -\frac{1}{2}$가 된다. 그런데 모든 실수 u에 대하여 $ue^u \geq -\frac{1}{e} \approx -0.368$이고, $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{e}$이다. 따라서 **실근은 없다**.

(c) $3x \ln x + 1 = 0$은 $ue^u = -\frac{1}{3}$이 되고, $-\frac{1}{e} < -\frac{1}{3} < 0$이다. 높이 $-\frac{1}{3}$인 수평선은 $y = ue^u$와 **두 번** 만나는데, $u = -1$에서의 최솟점 양쪽에서 한 번씩 만난다. 오른쪽 근은 $u = \mathrm{g}\left(-\frac{1}{3}\right)$이므로

$$x = e^{\mathrm{g}(-1/3)} \approx 0.538$$

이다. 다른 근에서는 $u < -1 < \mathrm{g}\left(-\frac{1}{3}\right)$이고, $x = e^u$는 u에 대하여 증가하므로, 우리가 구한 근은 두 근 가운데 **더 큰** 근이다. (다른 근은 약 0.220이다.)

잠깐, 직접 해 보기 이제 (d) $x = 3\ln x$를 풀어 보자. (**힌트**: 양변을 지수로 올린 다음, (어떤 것) $e^{\text{어떤 것}}$의 꼴을 만들되 그 "어떤 것"이 x의 상수배가 되도록 하라.)

(d) $x = 3\ln x$는 $e^{x/3} = x$를 뜻하므로 $xe^{-x/3} = 1$이고, 양변에 $-\frac{1}{3}$을 곱하면

$$\left(-\frac{x}{3}\right) e^{-x/3} = -\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 $-\frac{x}{3}$은 (c)에서 찾은 $ue^u = -\frac{1}{3}$의 두 해 가운데 하나이다. g로 주어지는 해를 택하면 $x = -3\,\mathrm{g}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 1.857$이다. 다른 근은 다른 해 $u < \mathrm{g}(-\frac{1}{3})$에서 나오며, 이는 더 큰 $x = -3u$를 준다. 따라서 이번에는 우리가 구한 근이 두 근 가운데 **더 작은** 근이다. (다른 근은 약 4.536이다.) ■

4단계 $x^x = 10$

양변에 로그를 취하면 $x\ln x = \ln 10$이다. $x = e^u$로 놓으면 이는 $ue^u = \ln 10$이므로 $u = \mathrm{g}(\ln 10)$이고

$$x = e^{\mathrm{g}(\ln 10)} \approx 2.506$$

이다. $\mathrm{g}(z)e^{\mathrm{g}(z)} = z$이므로 이를 $x = \dfrac{\ln 10}{\mathrm{g}(\ln 10)}$로 쓸 수도 있다. ■

돌아보기

- **없는 함수에 이름을 붙여라.** 알려진 함수로 방정식을 풀 수 없을 때, 역함수로서 새로운 함수를 정의하는 것은 정당한 방법이며, 흔히 많은 것을 밝혀 주는 방법이다.
- **표준형으로 정리하라.** (iii)과 (iv)의 모든 소문항은 $x = e^u$나 $u = -\frac{x}{3}$ 같은 치환을 써서 결국 $ue^u =$ 상수로 귀결되었다.
- **그래프로 근의 개수를 세어라.** $ue^u = c$의 해가 0개, 1개, 2개 가운데 몇 개인지는 오로지 c가 최솟값 $-\frac{1}{e}$에 대하여 어디에 있는지에만 달려 있다.

숨은 수학

오랜 역사와 최근의 이름을 가진 함수

요한 하인리히 람베르트(Johann Heinrich Lambert)는 1758년에 이런 꼴의 방정식을 연구하였고, 오일러(Euler)는 1783년에 이를 더 발전시켰다. 그러나 이 함수는 1990년대까지 표준적인 이름이 없었는데, 그때 컴퓨터 대수 시스템 Maple의 개발자들에게 이름이 필요해졌다. 1996년에 Robert Corless, Gaston Gonnet, David Hare, David Jeffrey, 그리고

도널드 커누스(Donald Knuth)는 이 함수의 성질과 응용을 정리한 논문 "On the Lambert W function"을 발표하였다. 이 논문은 수천 번 인용되었고, 이제 W는 대부분의 수학 소프트웨어에 내장되어 있다. 문제의 함수 g는 **주분지**(principal branch) W_0이다. 그림 3.9.1의 점선 곡선은 (c)와 (d)에서 두 번째 근을 주었는데, 이것이 또 하나의 실수 분지 W_{-1}이다.

W가 나타나는 곳

- **빈의 변위 법칙(Wien's displacement law).** 뜨거운 물체가 가장 강하게 복사하는 파장은 그 물체의 온도에 반비례한다. 그 비례상수는 $5(1-e^{-x})=x$를 풀어서 얻는데, 이 방정식의 양의 해는 $x = 5 + W\left(-5e^{-5}\right) \approx 4.965$이다. 약 5800 K인 태양이 노르스름한 흰색으로 보이고, 더 차가운 적색 왜성이 붉게 보이는 까닭이 여기에 있다.
- **거듭제곱 탑.** 무한히 쌓은 탑 $x^{x^{x^{\cdots}}}$은 $e^{-e} \le x \le e^{1/e}$일 때 수렴(converge)하고, 그 값은 $\dfrac{W(-\ln x)}{-\ln x}$이다.
- **인구 모형과 전염병 모형.** 가장 단순한 모형에서 전염병의 최종 규모와, 몇몇 성장 모형에서 주어진 인구에 도달하는 데 걸리는 시간은 모두 W로 주어진다.

초등함수

W는 정말 새로운 함수일까, 아니면 exp, ln, 거듭제곱근, 삼각함수를 써서 나타낼 수 있을까? 이 함수는 진정으로 새로운 함수이다. 1830년대의 리우빌(Joseph Liouville)까지 거슬러 올라가는 정리에 따르면 W는 **초등함수**(elementary function)가 아니다. 같은 이론에 따르면 $\int e^{-x^2}\,dx$처럼 겉보기에 순진해 보이는 어떤 적분들은 초등함수로 계산할 수 없으며, 정규분포에 고유한 특수함수가 필요한 것도 이 때문이다.

사고 기술

해로서의 역함수

f를 일대일이 되도록 제한하기만 하면, 방정식 $f(x) = c$의 해는 $x = f^{-1}(c)$이다. 어떻게 제한하느냐에 따라 어떤 해를 얻는지가 정해진다.

겉보기에 달라 보이는 많은 방정식이 사실은 모습만 바꾼 같은 방정식이다. 공통된 꼴을 드러내 주는 치환을 찾는 것이 핵심 단계이다.

더 도전하기

1 **2, 4, 그리고 하나 더.** 방정식 $x^2 = 2^x$는 자명한 해 $x = 2$와 $x = 4$를 가진다(Section 3.5와 비교해 보라). 이 방정식이 음의 해도 가지며, 그 해가

$$x = -\frac{2}{\ln 2}\, g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx -0.767$$

임을 보여라.

2 **도함수.** $g(x)e^{g(x)} = x$를 음함수 미분(implicit differentiation)하여, $x \neq 0$일 때

$$g'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + g(x))}$$

임을 보여라. $x = -\frac{1}{e}$에서는 어떤 일이 일어나는가?

3 **적분.** 치환 $x = we^w$를 이용하여 $\int_0^e g(x)\,dx = e - 1$임을 보여라.

4 **탑.** 탑 $T = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$이 수렴한다고 가정하고, $T = \sqrt{2}^{T}$임을 보인 다음, $T = 2$ 또는 $T = 4$임을 이끌어 내어라. 어느 쪽일까? (수열 $t_1 = \sqrt{2}$, $t_{n+1} = \sqrt{2}^{t_n}$의 몇몇 항을 계산해 보고, Section 2.2의 거미줄 그림(cobweb diagram)을 생각해 보라.)

더 읽을거리

- **Robert Corless et al., "On the Lambert W function"**, *Advances in Computational Mathematics* 5 (1996). 이 함수에 이름을 붙인 논문이다. 이 절을 공부했다면 앞부분은 읽을 수 있다.
- **Brian Hayes, "Why W?"**, *American Scientist* 93 (2005). 이 함수의 역사와 쓰임새를 다룬 생동감 있는 에세이("왜 W인가?")이다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Brian Conrad, "Impossibility theorems for elementary integration"**. 리우빌의 이론을 설명하는 강의 노트(초등 적분의 불가능성 정리)로, 온라인에서 볼 수 있다. 고급 수준이다.

우리가 배운 것

우리는 $1 = 2$라는 "증명(proof)"과 세 가지 질문으로 이 장을 시작했다. 논증이 옳다는 것을 어떻게 알 수 있는가, 부등식(inequality)을 어떻게 증명하는가, 그리고 함수(function)란 진정 무엇인가. 이 장의 아홉 문제가 우리에게 가르쳐 준 것을 정리해 보자.

1. 논증이 옳다는 것을 어떻게 아는가?

Section 3.1에서는 점검 목록을 얻었다. 매 단계에서 세 가지를 묻는다. **계산이 맞는가? 그 단계가 논리적으로 따라 나오는가? 말하지 않은 채 가정한 것은 무엇인가?** 그곳에서 본 오류들은 전형적인 것이었다. 두 정류점(stationary point)에서의 값을 비교하는 것만으로는 어느 쪽이 최댓값인지 알 수 없다. 무한한 정의역(domain)에서는 정류값이 함수의 범위를 제한하지 않는다. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)는 피적분함수(integrand)가 연속이어야 성립한다. 그리고 논증은 우연히 "맞아 보이는" 답에 도달할 수도 있다.

같은 경계심은 이 장의 나머지 전체를 관통했다. Section 3.7에서는 가정(hypothesis) $f(0) = f(\pi) = 0$을 빼면 부등식이 깨진다는 것을 반례(counterexample)로 보였다. Section 3.8에서는 함수가 미분가능(differentiable)하다는 가정이 핵심이었다. 이 가정이 없으면 코시(Cauchy)의 함수방정식(functional equation)은 아무도 써 낼 수 없는 기괴한 해를 갖는다. 그리고 Section 3.6와 Section 3.3에서는 등호 조건(equality condition)을 통해 어떤 한계가 최선인지를 알 수 있었다. 이것이야말로 신중한 수학자라면 언제나 던지는 종류의 질문이다.

2. 부등식은 어떻게 증명하는가?

우리는 고전적인 부등식들을 여러 방향에서 만났고, 그것들이 서로 어떻게 연결되는지 보았다.

- **제곱은 음이 아니다.** 두 수에 대한 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)은 $(a-b)^2 \geq 0$에 지나지 않는다. 코시의 전진-후진 귀납법(forward–backward induction)은 이로부터 일반적인 경우를 세웠다(Section 3.2).
- **볼록성(convexity).** 오목(concave)한 곡선은 그 현(chord)보다 위에 있다. 이 한 가지 사실로부터 옌센(Jensen) 부등식이 나오고, 로그에 적용하면 산술-기하 평균 부등식이 한 줄로 나오며, $\sin x$에 적용하면 삼각형에 대한 날카로운 부등식이 나온다(Section 3.3).

- **넓이.** 곡선 아래의 넓이와 곡선 옆의 넓이를 합하면 직사각형을 덮는다. 여기서 영(Young) 부등식이 나오고, 이것은 횔더(Hölder) 부등식과 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식으로 이어진다(Section 3.4).
- **그래프의 모양.** a^b와 b^a의 비교를 두 점에서 $\frac{\ln x}{x}$의 값을 비교하는 문제로 바꾸어 써서 π^e와 e^π의 대소를 결정했다(Section 3.5).
- **보간(interpolation)과 삼각부등식(triangle inequality).** 도함수를 함숫값으로 나타낸 다음 항별로 한계를 잡아 이차식에 대한 마르코프(Markov) 부등식을 얻었다(Section 3.6).
- **시험함수(test function).** 일반적인 부등식을 교묘하게 고른 함수에 적용하여 $\pi^2 \leq 10$과 $\pi \leq \frac{22}{7}$를 얻었다(Section 3.7).

이 가운데 무엇을 쓸지 고르는 것은 연습을 통해 길러지는 기술이다. 대략적인 지침은 다음과 같다. 곱과 합이 보이면 산술-기하 평균 부등식을, 함숫값의 평균이 보이면 옌센 부등식을, 함수와 그 역함수(inverse function)가 보이면 영 부등식을 떠올린다. 같은 꼴의 두 식을 비교해야 한다면 그 뒤에 숨은 하나의 함수를 찾아본다.

3. 함수란 진정 무엇인가?

마지막 두 절은 이 질문에 두 가지 방식으로 답했다. Section 3.8에서 e^{kx}와 $\tanh kx$는 식으로 주어진 것이 전혀 아니었다. 이 함수들은 특정한 덧셈 법칙을 만족하는 **유일한** 미분가능한 함수였다. 이것은 식보다 더 깊은 종류의 이해이다. 이 함수들이 복리(compound interest)에서도, 아인슈타인(Einstein)의 속도 덧셈(velocity addition)에서도 거듭 나타나는 이유를 설명해 주기 때문이다. Section 3.9에서는 한 걸음 더 나아가 xe^x의 역함수라는 함수를 **발명**했다. 우리가 가진 함수들만으로는 자연스러운 방정식족 하나를 풀기에 충분하지 않았기 때문이다. 계산기에 있는 모든 함수도 한때는 같은 방식으로 새로운 함수였다.

4. 엄밀성과 부등식을 위한 도구 모음

방법	사용한 곳
모든 단계와 모든 가정 점검하기	그럴듯하지만 틀린 논증(3.1)
국소적 행동과 전역적 행동	정류점과 무한대에서의 극한(3.1)
전진-후진 귀납법	산술-기하 평균 부등식(3.2)
추가 항으로 채우기	산술-기하 평균 부등식(3.2, 3.3)
옌센 부등식	삼각형; 산술-기하 평균 부등식(3.3)
넓이 비교하기	영 부등식(3.4)
변수를 분리해 하나의 함수로 모으기	π^e와 e^π의 비교(3.5)
삼각부등식, 등호가 성립하는 경우	마르코프 부등식(3.6)
시험함수	$\pi^2 \leq 10$ (3.7)
함수방정식	e^x와 $\tanh x$ (3.8)
역함수와 치환	W 함수(3.9)

다음으로

- Section 3.7에서 살짝 엿본 변분법(calculus of variations)은 Section 4.7의 주제이다.
- tanh와 그 덧셈 법칙 뒤에 있는 기하는 Section 7.6에서 다룬다.
- 제4장에서는 이 장의 신중한 태도를 적분 자체에 적용하며, 적분이 실제로 무엇인지에서 출발한다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***: 부등식에 대한 최고의 입문서로, 전체가 문제들로 구성되어 있다.
- **Daniel Velleman, *How to Prove It***: 올바른 증명을 쓰는 법에 대한 체계적인 안내서이다.
- **Michael Spivak, *Calculus***: 기초부터 쌓아 올린 엄밀한 미적분학 책으로, 많은 케임브리지(Cambridge) 학생들이 입학 전 여름에 읽는다.
- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics***: 무엇이 잘못되었는지 찾아내는 연습을 위한 책이다.

폰 노이만(von Neumann)은 수학에서는 무언가를 이해하는 것이 아니라 그저 익숙해질 뿐이라고 농담한 적이 있다. 이 말에는 일리가 있다. 이 장의 정확한 정의와 신중한 논증은 처음에는 낯설게 느껴질 수 있다. 그러나 바로 그것에 익숙해지는 과정이 계산할 줄 아는 학생을 확신할 줄 아는 수학자로 바꾸어 놓는다. $1 = 2$라는 증명에 다시는 속지 않을 것이다. 수

학 학위 과정의 목표는 그보다 더 미묘한 모든 오류도 그만큼 쉽게 보이도록 만드는 것이다.

더 도전하기 해답

다음은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계만 제시하므로 이를 이용해 자신의 풀이를 확인할 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 제대로 풀어 보아라.

3.1 오류 찾기

1. x가 -1에서 1까지 움직이는 동안 0을 지나는데, 그곳에서 $t = 1/x$는 정의되지 않는다. 즉 치환(substitution)이 이 구간에서 연속(continuous)이 아니다. 올바르게 계산하면 $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$이고($x = \tan\theta$를 이용한다), 반면 $\int_{-1}^{1} \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$이다.

2. (a) 참: 양변의 로그(logarithm)가 모두 $\ln a \ln b$이다. (b) 거짓: $\theta = 0$에서 $\cos 0 = 1 \neq \sin 1$이다. (실제로 $|\sin\theta \pm \cos\theta| \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 두 값은 결코 같지 않다.) (c) 거짓: 상수가 아닌 다항식(polynomial)은 유계(bounded)가 아니고, 상수는 1과 -1 모두에 10^{-6} 이내로 가까울 수 없다. (d) 참: 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $x^4 + x^{-4} \geq 2$이고, 등호는 $x = 1$일 때 성립한다.

3. $n = 1$에서 $n = 2$로 넘어가는 단계가 성립하지 않는다. 말 두 마리에서 "앞의 1마리"와 "뒤의 1마리"는 겹치지 않는다.

4. $\int_{\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,dx = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2$이므로, 대칭성에 의해 이 적분은 (극한으로서) 존재하고 그 값은 4이다.

3.2 AM–GM, 거꾸로

1. $a_1, \ldots, a_{n-1}$의 평균(mean)이 A, 기하평균(geometric mean)이 G라 하고, n번째 수로 A를 추가한다. 평균은 여전히 A이므로 $(G^{n-1}A)^{1/n} \leq A$이고, 이로부터 $G \leq A$를 얻는다.

2. 이 $n+1$개의 수는 평균이 $1 + \frac{1}{n+1}$, 기하평균이 $(1+\frac{1}{n})^{n/(n+1)}$이고, 모두 같지는 않으므로 등호가 없는 엄격한 부등식(strict inequality)이 성립한다. 양변을 $n+1$제곱한다.

3. 각 면의 넓이는 ab, bc, ca이고 $S = 2(ab + bc + ca)$이다. 산술-기하 평균 부등식에 의해 $\frac{S}{6} \geq (abc)^{2/3} = V^{2/3}$이고, 등호는 $ab = bc = ca$, 즉 정육면체일 때 성립한다.

4. $1/a_i$에 산술-기하 평균 부등식을 적용하면 $\frac{1}{n}\sum \frac{1}{a_i} \geq \frac{1}{G}$이다. 양변의 역수를 취한다.

3.3 볼록성의 힘

1. $\mathrm{f}'' < 0$이면 기울기가 감소하므로 곡선은 각 현(chord)보다 위에 있다. $t = \frac{1}{3}$으로 두면 $\mathrm{f}\left(\frac{u+v+w}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\mathrm{f}(u) + \frac{2}{3}\mathrm{f}\left(\frac{v+w}{2}\right) \geq \frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(u) + \mathrm{f}(v) + \mathrm{f}(w)\big)$이다.

2. $(\ln\sin x)'' = -\mathrm{cosec}^2 x < 0$이므로 $\ln\sin$은 $(0,\pi)$에서 오목(concave)하다. 옌센(Jensen) 부등식에 의해 $\frac{1}{3}\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln\sin\frac{\pi}{3}$이므로, 곱은 최대 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$이다.

3. $(0, \frac{\pi}{2})$에서 $(\tan x)'' = 2\sec^2 x \tan x > 0$이므로, 옌센 부등식에 의해 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$이다.

4. $(x^2)'' = 2 > 0$이므로 옌센 부등식에 의해 주어진 부등식이 성립한다. 이 부등식은 분산(variance) $\frac{1}{n}\sum a_i^2 - \bar{a}^2$이 음이 아니라는 뜻이다.

3.4 부등식을 증명하는 넓이

1. $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\mathrm{f} = \sin$으로 두면 $b = \mathrm{f}(a)$일 때 등호가 성립한다. $a = \arcsin t$, $b = t$로 두면 $t\arcsin t = (1 - \cos(\arcsin t)) + \int_0^t \arcsin y \,\mathrm{d}y$이다. 결과의 우변을 미분하면 $\arcsin t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$이다.

2. $p = q = 2$인 영(Young) 부등식에 의해 $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$이다. $\sum a_i^2 = \sum b_i^2 = 1$이면 이를 모두 더하여 $\sum a_i b_i \leq 1$을 얻는다. 일반적인 경우에는 $a_i / \sqrt{\sum a_j^2}$와 $b_i / \sqrt{\sum b_j^2}$에 이를 적용한다.

3. $\int_0^a (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = e^a - 1 - a$이고 $\int_0^b \ln(1+y)\,\mathrm{d}y = (1+b)\ln(1+b) - b$이다. 등호는 $b = e^a - 1$일 때 성립한다.

4. $t = 1$: 1.571 대 1; $t = 2$: 0.524 대 0.268; $t = 10$: 0.1002 대 0.0501. t가 크면 $t - \sqrt{t^2-1} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}} \approx \frac{1}{2t}$이다. 이 한계(bound)는 $a = 0$에서 나오는데, 이때 $(*)$는 단지 $0 \leq \int_0^b \arcsin y \,\mathrm{d}y$라는 것만 말해 준다. b가 작으면 이 넓이는 약 $\frac{b^2}{2}$로 $b\arcsin b \approx b^2$의 절반이며, 이를 버리면 인수 2를 잃게 된다.

3.5 π^e인가, e^π인가?

1. $n^m = m^n$은 $h(n) = h(m)$을 뜻한다. h는 $(1, e)$에서 증가하고 그 이후로는 감소하므로 두 수 중 하나는 e보다 작다. ($h(1) = 0$이라는 값은 다시 나타나지 않으므로) 그 수는 2여야 하고, 그러면 다른 하나는 4이다. 가능한 쌍은 $\{2, 4\}$뿐이다.

2. $e < 3 < \pi$이고 그 범위에서 h는 감소하므로 $h(3) > h(\pi)$, 즉 $3^\pi > \pi^3$이다. $\frac{9}{4}$와 $\sqrt{5}$는 모두 e보다 작고 $\frac{9}{4} > \sqrt{5}$이므로 $h(\frac{9}{4}) > h(\sqrt{5})$이며, 이로부터 두 번째 부등식을 얻는다. $1 < x < 2$일 때는 $3 < x + 2 < 4$이므로 $h(x) < h(2) = h(4) < h(x+2)$이고, 따라서 $x^{x+2} < (x+2)^x$이다. 마지막으로 $9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$이고 $\sqrt{2}^{\,9} = 16\sqrt{2} = (2\sqrt{2})^3$이

다. $e^2 < 8$이므로 $e < 2\sqrt{2} < 3$이고, 이 범위에서 h는 감소하므로 $h(2\sqrt{2}) > h(3)$이다. 이로부터 $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$를 얻으므로 $\sqrt{2}^9$이 더 크다.

3. $e^{\pi/e-1} > \frac{\pi}{e}$이므로 $e^{\pi/e} > \pi$이다. 양변을 e제곱한다.

3.6 기울기의 한계

1. 양변은 모두 이차식(quadratic)이고 $x = -1, 0, 1$에서 값이 같으므로 서로 같다(라그랑주 보간법, Lagrange interpolation). 미분하면 $f(-1)(x - \frac{1}{2}) - 2f(0)x + f(1)(x + \frac{1}{2})$를 얻는다.

2. $[-1, 1]$에서 $|f'(x)| \le |x - \frac{1}{2}| + 2|x| + |x + \frac{1}{2}| \le 4$이고, 등호는 $x = \pm 1$에서만, 그리고 $f(1), f(-1), -f(0)$이 모두 1이거나 모두 -1일 때만 성립한다. 이차식은 이 세 값으로 결정되므로 $\pm(2x^2 - 1)$을 얻는다.

3. $T_3(\cos\theta) = \cos 3\theta$로부터 $4x^3 - 3x$를 얻고, $T_3'(1) = 12 - 3 = 9$이다. $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$로부터 $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$이고, $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$이다.

4. $-\sin\theta\, T_n'(\cos\theta) = -n\sin n\theta$이다. $\theta \to 0$일 때 $\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta} \to n^2$이다.

3.7 $\pi^2 \le 10$

1. $\int_0^\pi f^2 = \frac{\pi^9}{630}$이고 $\int_0^\pi (f')^2 = \frac{2\pi^7}{105}$이므로, $(*)$로부터 $\pi^2 \le 12$를 얻는다. 이 사차식(quartic)은 $\sin x$에 비해 양 끝 근처에서는 너무 평평하고 가운데에서는 너무 뾰족하므로, 크기에 대한 기울기의 비가 최적값에서 더 멀리 떨어져 있다.

2. $\int_0^\pi (\sin x + \sin 2x)^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$이고(교차항(cross term)의 적분은 0이다), $\int_0^\pi (\cos x + 2\cos 2x)^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$이다.

3. $g(x) = f(\pi x/L)$로 둔다. 좌변은 $\frac{L}{\pi}$배가 되고 $\int (g')^2$은 $\frac{\pi}{L}$배가 된다. 현의 경우 가장 낮은 진동수(frequency)는 $\frac{1}{L}$에 비례한다. 즉 길이를 절반으로 줄이면 음높이(진동수)가 두 배가 된다.

4. 한계 $\pi^2 \le \int (f')^2 / \int f^2$(적당한 단위에서)는 $\lambda \approx 1.133/\pi^2$에서 최소가 되며, 이때 $\pi^2 \le 9.86975$를 얻는다. 참값은 9.86960이다.

3.8 덧셈 법칙으로 정해지는 함수

1. $x = y = 0$을 대입하면 $g(0) = 0$이다. y에 대해 미분하고 $y = 0$을 대입하면 $g'(x) = k(1 + g(x)^2)$이므로 $\frac{d}{dx}\arctan g(x) = k$이고 $g(x) = \tan kx$이다.

2. y에 대해 미분하면 $f'(x + y) = f'(y)$이므로 f'은 상수 k이다. 또한 ($x = y = 0$을 대입하면) $f(0) = 0$이다.

3. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x/2)^2 \geq 0$이고, f는 결코 0이 되지 않는다(그렇지 않으면 모든 곳에서 0이 된다). 수학적 귀납법(induction)으로 $\mathrm{f}(n) = a^n$을 얻는다. $\mathrm{f}(1/n) > 0$이고 $\mathrm{f}(1/n)^n = \mathrm{f}(1) = a$이므로 $a^{1/n}$을 얻고, 그러면 $\mathrm{f}(m/n) = \mathrm{f}(1/n)^m$이다. 연속성이 없으면 무리수(irrational)에서의 값은 아무런 제약을 받지 않는다. "하멜 기저(Hamel basis)"를 이용해 만든, a^x가 아닌 이상한 해들이 존재한다.

4. 한 번 발사할 때마다 래피디티(rapidity) $\phi = \operatorname{artanh}\frac{1}{2}$가 더해지므로, k번 발사한 후의 속력은 $\tanh k\phi = \frac{3^k-1}{3^k+1}$이다. 즉 $0.8c$, $\frac{13}{14}c \approx 0.929c$, $\frac{40}{41}c \approx 0.976c$이다.

3.9 새로운 함수 만들기

1. $x = -1$에서 $x^2 - 2^x = \frac{1}{2} > 0$이고 $x = 0$에서는 -1이므로 음의 근이 존재한다. $x = -2u/\ln 2$로 두면 ($x < 0$이므로 $x = -2^{x/2}$로 택하여) $x^2 = 2^x$는 $ue^u = \frac{\ln 2}{2}$가 되므로, $u = \mathrm{g}\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$이고 $x \approx -0.7667$이다.

2. $\mathrm{g}'e^{\mathrm{g}}(1+\mathrm{g}) = 1$이고 $e^{\mathrm{g}} = x/\mathrm{g}$이다. $x = -\frac{1}{e}$에서 $\mathrm{g} = -1$이고 기울기는 무한대이다(그래프가 그 점에서 수직이다).

3. $x = we^w$로 두면 $\mathrm{d}x = (1+w)e^w\,\mathrm{d}w$이고 w는 0에서 1까지 변한다. 따라서 $\int_0^1 w(1+w)e^w\,\mathrm{d}w = \left[(w^2-w+1)e^w\right]_0^1 = e-1$이다.

4. $T = \sqrt{2}^{\,T}$는 $\frac{\ln T}{T} = \frac{\ln 2}{2}$를 뜻하므로 $T = 2$ 또는 4이다. 항 $1.414, 1.633, 1.761, \ldots$은 증가하면서 2보다 작게 유지되므로($t_n < 2$이면 $t_{n+1} < \sqrt{2}^{\,2} = 2$이다) $T = 2$이다. 고정점(fixed point) 4는 밀어내는(repelling) 고정점이다.

장

4

제대로 하는 미적분

적분(*integration*)은 해석학(*analysis*), 기하학, 정수론(*number theory*)이 만나는 곳이며, 수학에서 가장 아름다운 공식들 가운데 몇몇이 자리한 곳이다.

이 장의 내용

4.1	적분이란 무엇인가?	STEP III 1989
4.2	적분으로 삼각함수 세우기	STEP III 2017
4.3	22/7은 π보다 크다	STEP I 1997
4.4	월리스, 베타 함수, 그리고 1/2의 계승	STEP II 1995
4.5	2학년생의 꿈	STEP III 2009
4.6	공식으로 나타낼 수 없는 적분	STEP III 2016
4.7	변분법	STEP III 2014
4.8	공 모양 빵 자르기	STEP I 2001
4.9	홀디치의 정리	STEP III 2011
A	연습문제 해답	315쪽

역도함수(antiderivative) 그 이상

> 도함수를 갖지 않는 함수라는 개탄스러운 해악 앞에서 나는 공포와 전율을 느끼며 고개를 돌린다.
>
> — 샤를 에르미트(Charles Hermite), 1893년의 편지에서

학생에게 적분이 무엇이냐고 물으면 아마 "미분(differentiation)의 반대"라는 답을 듣게 될 것이다. 이는 멋진 사실, 곧 **미적분학의 기본정리**(*fundamental theorem of calculus*)이며, 학교에서 만나는 적분 대부분을 판에 박힌 계산으로 만들어 준다. 그러나 이것은 적분에 관한 정리일 뿐 적분의 정의가 아니며, 적분을 흥미롭게 만드는 것의 대부분을 가려 버린다.

적분은 미분보다 약 2천 년이나 오래되었다. 아르키메데스(Archimedes)는 도함수라는 생각을 누구도 하기 훨씬 전에, 얇은 조각들을 더하여 포물선 활꼴(parabolic segment)의 넓이와 구의 겉넓이를 구했다. 또한 적분은 미분이 닿지 못하는 곳까지 닿는다. 웬만한 함수는 모두 기계적인 규칙으로 미분할 수 있지만, 대부분의 함수는 공식으로 적분할 수 **없다**. 그러면 자연스러운 질문이 떠오른다. 언제 적분할 수 있으며, 적분할 수 없을 때는 어떻게 해야 하는가? 적분은 새로운 함수를 정의하고, 수 사이의 부등식(inequality)을 증명하며, 달리 기술할 방법이 없는 넓이와 부피를 계산하고, 무한합과 무한곱(infinite product)의 정확한 값을 알려 준다. 이 장은 이 모든 것을 다룬다.

적분이란 실제로 무엇인가

이 장은 맨 처음, 곧 정의에서 출발한다(Section 4.1). 적분은 얇은 직사각형들의 합의 극한(limit)이다. 역도함수 없이 이 정의만으로 $\int_0^a x^5\,dx$ 하나를 계산하는 것조차 상당한 작업이며, 이를 해 보면 기본정리가 얼마나 고마운지 알게 된다. 정의가 정확해지면 질문도 정확해진다. 어떤 함수가 적분가능(integrable)한가? 이 질문의 답과 그 답이 불러일으킨 문제들은 20세기 초 르베그(Lebesgue)의 적분 이론으로 이어졌고, 이 이론은 현대 확률론(probability)의 토대가 되었다.

무언가를 증명하는 적분

이 장에서 가장 놀라운 결과 가운데 몇몇은 넓이와 전혀 관계없어 보이는 사실을 적분으로 증명한다. 양의 함수의 적분 하나가 $\frac{22}{7} - \pi$와 같다는 사실로부터 단 한 줄로 $\pi < \frac{22}{7}$가 증명된다(Section 4.3). $\sin t$의 거듭제곱은 π에 대한 월리스(Wallis)의 무한곱과 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$라는 값으로 이어진다(Section 4.4). x^x의 적분은 급수(series) $\sum(-1)^{n+1}n^{-n}$으

로 바뀐다(Section 4.5). 그리고 적분 하나, $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$만으로 삼각법(trigonometry)을 처음부터 쌓아 올릴 수 있다(Section 4.2).

대학에서 만나게 될 것

1학년 **해석학** 과목에서는 적분의 정의에서 출발하여 미적분학의 기본정리를 제대로 증명한다. 그 뒤의 과목들은 여러 방향으로 뻗어 나간다. **측도론**(*measure theory*)과 **르베그 적분**(*Lebesgue integral*)은 적분이 극한과 매끄럽게 어울리도록 해 주며 확률론의 바탕이 된다. **벡터 미적분학**(*vector calculus*)은 곡선, 곡면, 입체 위에서 적분하며, 그린(Green) 정리와 스토크스(Stokes) 정리가 이들을 서로 이어 준다(Section 4.9에서 그 맛을 볼 수 있다). **복소해석학**(*complex analysis*)은 복소평면을 돌아가는 우회로를 통해 실적분을 계산한다. **변분법**(*calculus of variations*)은 어떤 함수가 적분을 가장 작게 만드는지 묻고(Section 4.7), 물리학의 최소 작용의 원리(principle of least action)로 이어진다. 그리고 **미분대수**(*differential algebra*)는 어떤 적분이 애초에 공식을 갖는지를 설명한다(Section 4.6).

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **적분이란 무엇이며, 어떤 함수가 적분을 갖는가?** 합의 극한이라는 정의는 역도함수와 어떻게 연결되는가?
2. **적분으로 무엇을 증명할 수 있는가?** 넓이가 어떻게 π에 대해, 계승(factorial)에 대해, 무한합에 대해 알려 줄 수 있는가?
3. **공식이 없을 때는 무엇을 할 수 있는가?** 적분에 공식이 없다는 것을 어떻게 알며, 그럼에도 무엇을 계산할 수 있는가?

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
4.1	적분의 정의	하 합 과 상 합(lower and upper sums); 망 원 합(telescoping)
4.2	$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$에서 얻는 삼각법	적분을 보존하는 치환(substitution)
4.3	$\frac{22}{7} > \pi$	양수인 함수의 적분으로 나타낸 부등식
4.4	월리스와 $\left(\frac{1}{2}\right)!$	점화식(reduction formula), 불변량(invariant), 조이기(squeeze)
4.5	$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$	급수 전개와 항별 적분(term-by-term integration)
4.6	공식이 없는 적분	다항식 대수를 이용한 불가능성 증명
4.7	변분법	적분 속에서 완전제곱식 만들기(completing the square)
4.8	아르키메데스의 모자 상자 정리(hat-box theorem)	피적분함수(integrand)를 간단히 하면 기하가 드러난다
4.9	Holditch 정리	경계 적분으로 구하는 넓이; 소거(elimination)

이 장을 읽는 방법

여러 절에 무겁지만 판에 박힌 계산이 나온다. 다항식의 나눗셈, 부분적분(integration by parts), 곱의 전개 같은 것들이다. 본문을 읽기 전에 연필과 종이로 직접 해 보라. 그런 다음 그 계산을 가능하게 한 아이디어, 곧 불변량, 대칭, 상쇄를 찾아보라. 계산은 채점자가 확인하는 것이고, 아이디어는 여러분이 기억하여 다시 쓰게 될 것이다.

4.1 적분이란 무엇인가?

문제

STEP III 1989, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/89-s3-q10`

도입

여러분은 몇 년째 적분을 해 왔다. "적분은 미분의 역연산이다"라는 이유로 $\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^6$임을 알고 있다. 그러나 이것은 정리이지 정의가 아니다. 그렇다면 적분(integral)이란 무엇인가?

솔직한 답은 이렇다. 적분은 넓이이며, 얇은 직사각형들의 넓이의 합의 극한(limit)으로 정의된다. 이 문제는 오직 그 정의만으로 적분을 계산하라고 요구한다. 원시함수(antiderivative)도, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)도 쓰지 않고, 직사각형을 더하고 극한을 취하는 것 말고는 아무것도 쓰지 않는다. 생각보다 어렵다. 바로 그렇기 때문에 이 계산을 쉽게 만들어 주는 미적분학의 기본정리가 그토록 놀라운 결과인 것이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 소문항 (iii)의 두 합은 폭이 $\frac{a}{n}$인 직사각형들의 넓이의 합이다. 증가함수(increasing function) f에 대하여, 어느 합이 곡선 아래 넓이보다 작게 어림한 값이고 어느 합이 크게 어림한 값인가?

첫 번째 합은 각 띠의 **왼쪽** 끝, 즉 $r = 0, \ldots, n-1$에 대한 $x = \frac{ra}{n}$에서의 높이를 사용한다. 증가함수에서는 이 점이 띠에서 가장 낮은 점이므로 직사각형들이 곡선 아래에 들어간다. 이것이 **하합**(lower sum)이다. 두 번째 합은 오른쪽 끝 $r = 1, \ldots, n$을 사용하므로 직사각형이 곡선 위로 튀어나온다. 이것이 **상합**(upper sum)이다(그림 4.1.1). 정의에 따르면, 띠가 얇아질 때 두 합이 같은 극한에 가까워지면 적분이 존재한다.

$f(x) = x^5$일 때 두 합에는 모두 $\sum r^5$가 들어 있다. 소문항 (i)과 (ii)는 이 합을 위와 아래에서 각각 어림한다.

차근차근 풀기

1단계 연쇄적으로 소거되는 합(telescoping sum)

생각해 보기 연속하는 정수 여섯 개의 곱 $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$를 생각하자. $P(r) - P(r-1)$은 무엇인가?

$P(r)$와 $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$는 다섯 개의 인수 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$를 공유하므로

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)[(r+5) - (r-1)] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

$r = 1$부터 n까지 더하면, 우변의 합은 연쇄 소거에 의해 $P(n) - P(0) = P(n)$이 된다. 따라서

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = \tfrac{1}{6}P(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

■

모든 $r \geq 1$에 대하여 $r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$이므로 부등식(inequality)이 성립한다. ■

2단계 하계(lower bound)

잠깐, 직접 해 보기 1단계를 내려가는 연속 정수 다섯 개의 곱 $r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)$에 맞게 고쳐 보자. $r = 0$부터 $n-1$까지의 합을 구하고, 이를 r^5와 비교하라.

$Q(r) = (r-5)(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$라 하자. 그러면 $Q(r+1) - Q(r) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r[(r+1) - (r-5)] = 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$이다. $r = 0$부터 $n-1$까지 더하면 연쇄적으로 소거되어 $Q(n) - Q(0) = Q(n)$이 되므로

$$\sum_{r=0}^{n-1} (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r = \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

이제 항별로 비교하자. $r = 0$일 때 양변은 모두 0이다. $1 \leq r \leq 4$이면 곱에 0인 인수가 있지만 $r^5 > 0$이다. $r \geq 5$이면 모든 인수가 양수이고 r 이하이며, 그중 일부는 r보다 엄밀히 작

으므로 곱은 r^5보다 작다. $n > 1$이므로 합에는 부등식이 엄밀하게 성립하는 $r = 1$이 포함되고, 따라서

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n. \qquad \blacksquare$$

3단계 적분

생각해 보기 $\mathrm{f}(x) = x^5$에 대한 하합과 상합을 $\sum r^5$로 나타내라. 분모에는 n의 몇 제곱이 나타나는가?

$\mathrm{f}(x) = x^5$이면

$$L_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1} r^5, \qquad U_n = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n} r^5.$$

소문항 (i), (ii)와 $L_n < U_n$에 의하여

$$\frac{a^6}{6}\cdot\frac{(n-5)(n-4)\cdots n}{n^6} < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+5)}{n^6}.$$

두 분수는 각각 $\frac{n-3}{n} = 1 - \frac{3}{n}$이나 $\frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n}$과 같은 인수 여섯 개의 곱이고, 각 인수는 1로 수렴한다. 따라서 바깥쪽의 두 경계는 모두 $\frac{a^6}{6}$으로 수렴하고, 조임 정리(squeeze theorem)에 의하여 L_n과 U_n도 그렇다. 두 극한이 모두 존재하고 서로 같으므로, 정의에 의하여

$$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}a^6. \qquad \blacksquare$$

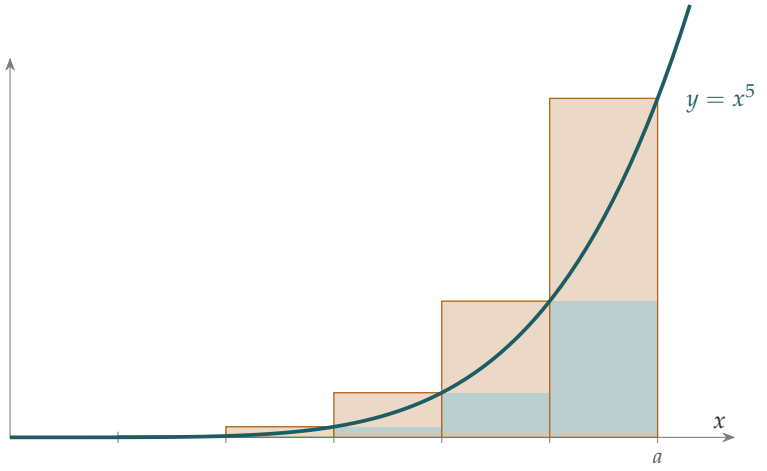


그림 4.1.1 $n = 6$개의 띠로 나눈 $[0, a]$ 위에서 x^5의 하합과 상합. 하합은 청록색 영역(곡선 아래의 직사각형들)이고, 상합은 여기에 호박색 조각들을 더한 것이다. 둘의 차이는 정확히 마지막의 가장 높은 직사각형의 넓이 $\frac{a}{n}\mathrm{f}(a)$이며, 이는 n이 커지면 0으로 수렴한다.

돌아보기

- **다시 연쇄 소거.** 연속하는 정수들의 곱의 합이 연쇄적으로 소거되었는데, 이는 2장의 합과 곱에서와 똑같다.
- **어림한 뒤 조이기.** 우리는 $\sum r^5$를 정확히 구하지 않았다(그 값은 $\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$이다). 양쪽에서의 어림만으로 충분했다.
- **정의가 일을 한다.** 원시함수는 어디에도 나오지 않았다. 모든 것이 적분을 합의 극한으로 보는 정의에서 나왔다.

숨은 수학

리만의 정의

얇은 띠의 넓이를 더해 넓이를 구한다는 생각은 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라간다. 그는 기원전 250년경 바로 이 논증의 한 형태로 포물선(parabola) 아래의 넓이를 구했다. 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)는 적분을 미분의 역연산으로 바꾸어 놓았고, 그 후 150년 동안 대부분의 사람들은 적분을 그렇게 생각했다. 1854년 베른하르트 리만(Bernhard Riemann)은 오늘날에도 대학 강의가 출발점으로 삼는 정의를 내놓았다. $[a,b]$를 작은 조각들로 나누고, (폭) $\times$ (조각 안 어딘가에서의 f의 높이)의 합을 만든 다음, 조각이 작아질 때 그러한 합들이 모두 하나의 극한에 가까워지면 f가 적분가능(integrable)하다고 한다. 이 문제에서 다룬, 폭이 같은 띠와 왼쪽·오른쪽 끝점을 쓰는 형태는 증가함수에서 통하는 특수한 경우이다. 장가스통 다르부(Jean-Gaston Darboux)의 "상합과 하합"을 쓰면 일반적인 경우도 깔끔하게 다룰 수 있다.

모든 함수가 적분을 갖는 것은 아니다

정확한 정의가 있으면 어떤 함수가 적분가능한지 물을 수 있다. 닫힌구간(closed interval)에서 연속인 함수(continuous function)는 모두 적분가능하고, 증가함수도 모두 그렇다. 그러나 디리클레(Dirichlet) 함수를 생각해 보자. x가 유리수(rational)이면 $f(x)=1$이고, 무리수(irrational)이면 0이다. 아무리 얇은 띠에도 유리수와 무리수가 모두 들어 있으므로, 모든 상합은 1이고 모든 하합은 0이다. 둘은 결코 일치하지 않으므로 $\int_0^1 f$는 리만의 의미로는 존재하지 않는다. 1902년 앙리 르베그(Henri Lebesgue)는 더 강력한 적분인 르베그 적분(Lebesgue integral)을 고안했다. 이 적분은 이 함수도 다룰 수 있고(이 함수의 르베그 적분은 0이다) 극한에 대해서도 훨씬 잘 작동한다. 르베그 적분은 현대 확률론(probability theory)의 기초이며, 여러분은 대학 2학년이나 3학년 때 이를 만나게 될 것이다.

이산 미적분학

1단계의 연쇄 소거는 모습을 바꾼 미적분학이다. "상승 계승(rising factorial)" $r(r+1)\cdots(r+k-1)$은 합에 대하여, x^k가 적분에 대하여 행동하는 것과 똑같이 행동한다. 이것을 더하면 인수의 개수가 하나 늘어나고 새로운 인수의 개수로 나누어지는데, 이는 $\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$과 꼭 같다. 합과 적분, 차분과 도함수 사이의 이러한 평행 관계를 **유한 차분법**(calculus of finite differences)이라 하며, 이는 합을 계산하는 강력한 도구이다.

사고 기술

> **정의에서 출발하라**
>
> "정의를 사용하여" 무언가를 증명하라는 요구를 받으면, 그 밖의 것은 아무것도 쓰지 마라. 증명하려는 것에 의존하는 정리도, 익숙한 지름길도 안 된다.
>
> 이는 의외로 어렵지만, 지름길이 얼마나 가치 있는지를 정확히 보여 준다. 대학에서는 모든 강의의 처음 몇 주가 이런 식으로 진행된다. 먼저 정의가 나오고, 그다음에 더 이상 정의에서 직접 출발하지 않아도 되게 해 주는 정리들이 나온다.

더 도전하기

1 **적분으로서의 극한.** STEP III 1999, 3번 문제 (`step.maths.org/questions/99-s3-q3`)에 도전해 보자. 이 문제는 합의 극한을 적분으로 바꾼다. 각 합에서 곡선 아래의 직사각형을 찾아보라.

2 **아르키메데스의 포물선.** $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$과 소문항 (iii)의 정의를 이용하여 $\int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$임을 증명하라.

3 **상승 계승.** 모든 양의 정수 k에 대하여 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$임을 보여라.

4 **정확한 합.** 항등식 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = r^5 + 10r^4 + 35r^3 + 50r^2 + 24r$와 $k \le 4$인 $\sum r^k$에 대한 알려진 공식들을 이용하여 $\sum_{r=1}^{n} r^5$를 정확히 구하라.

더 읽을거리

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*** (Cambridge

University Press). 리만 적분에서 르베그 적분에 이르는 이야기를, 각 단계를 불가피하게 만든 문제들을 통해 들려준다.

- **Michael Spivak, *Calculus*** (Cambridge University Press). 13장에서 이 절과 똑같이 상합과 하합으로 적분을 정의한다.
- **Graham, Knuth & Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley). 2장에서 상승계승과 하강 계승(falling factorial)을 사용하여 유한 차분법을 전개한다.

4.2 적분으로 삼각함수 세우기

문제

STEP III 2017, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/17-s3-q6`

도입

π란 무엇인가? 학교에서는 원의 둘레와 지름의 비로 배우고, sin과 cos는 삼각형으로 정의한다. 기하학에서는 이것으로 충분하지만, 곤란한 질문이 남는다. 곡선을 따라 잰 "길이"란 정확히 무엇인가? $\sin x$의 매클로린 급수(Maclaurin series)는 왜 그런 꼴인가? 덧셈정리(addition formula)가 그림으로 그릴 수 있는 각뿐 아니라 모든 각에서 성립한다는 것을 어떻게 아는가?

이 문제는 전혀 다른 길을 보여 준다. 삼각형과 원은 잊어버리자. Section 4.1에서 다룬 적분(integral)의 정의 말고는 아무것도 필요 없는 적분 하나, $\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$에서 출발한다. π를 $2\mathrm{T}_\infty$로 정의한다. 그런 다음 치환(substitution)만을 써서 $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$과 $\mathrm{T}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$을 증명한다. 이는 여러분이 $\arctan\sqrt{3} = 60°$, $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2}-1$로 알고 있는 사실이다. 아무것도 없는 데서 삼각법을 다시 세우는 것이다.

시작하기 전에

여러분은 사실 $\mathrm{T}(x) = \arctan x$이고 $\mathrm{T}_\infty = \frac{\pi}{2}$임을 알고 있다. 문제는 이 사실을 쓰지 못하게 하며, 바로 그것이 핵심이다. 모든 것은 적분에서 나와야 한다. 하지만 이 숨은 지식은 좋은 길잡이가 된다.

? **생각해 보기** 소문항 (i)과 (ii)는 각각 어떤 삼각함수 항등식에 대응하는가? ($\arctan x + \arctan\frac{1}{x}$, 그리고 $\tan(A+B)$의 공식을 떠올려 보라.)

소문항 (i)은 $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$이다. 소문항 (ii)는 덧셈정리 $\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$가 모습을 바꾼 것이다. 즉 $u = \tan A$, $a = \tan B$로 두면 $v = \tan(A+B)$이

다. 이 문제는 이 항등식들을 기하학 없이 적분으로부터 증명한다.

차근차근 풀기

1단계 **반사** $u \mapsto 1/u$

$\mathrm{T}(x)$에 $u = 1/w$를 치환한다. 그러면 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}w/w^2$이고 $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{w^2}{w^2+1}$이므로

$$\mathrm{T}(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{w^2}{w^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) \mathrm{d}w = \int_{1/x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \mathrm{T}_{\infty} - \mathrm{T}(x^{-1}). \qquad \blacksquare$$

다시 말해, $\frac{1}{1+u^2}$ 아래에서 0부터 x까지의 넓이는 $\frac{1}{x}$부터 ∞까지의 넓이와 같다(그림 4.2.1).

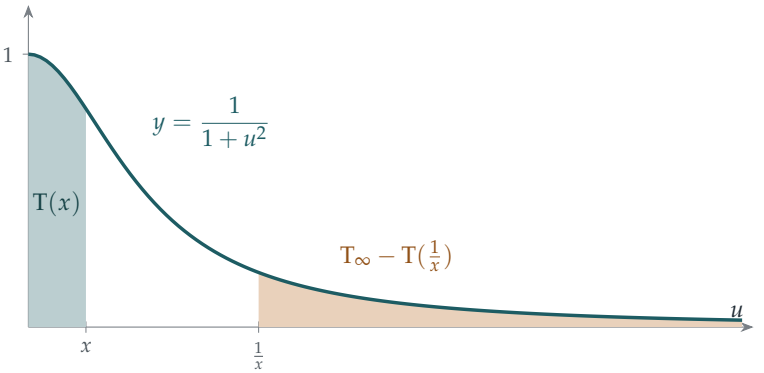


그림 4.2.1 치환 $u = 1/w$는 $\frac{1}{1+u^2}$ 아래의 색칠한 두 넓이, 즉 0부터 x까지의 넓이(청록색)와 $\frac{1}{x}$부터 끝없이 뻗은 넓이(호박색)가 같음을 보여 준다. 여기서 $x = \frac{1}{2}$이다.

2단계 **덧셈 치환**

> **생각해 보기** 몫의 미분법(quotient rule)으로 $v = \dfrac{u+a}{1-au}$를 미분하라. 그다음 $1+v^2$을 하나의 분수로 계산하여 비교해 보라.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2},$$
$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

나누면 $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$이다. $\blacksquare$

생각해 보기 이 식은 $\dfrac{du}{1+u^2} = \dfrac{dv}{1+v^2}$라는 뜻이다. 따라서 치환 $u \mapsto v$는 피적분 함수(integrand)를 전혀 바꾸지 않는다. 그렇다면 이 치환은 $\mathrm{T}(x)$의 적분 구간 끝값을 어떻게 바꾸는가?

u가 0부터 x까지 움직일 때($x < \frac{1}{a}$이므로 구간 전체에서 $1-au > 0$이고, v는 연속이며 증가한다), v는 a부터 $\frac{x+a}{1-ax}$까지 움직인다. 따라서

$$\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_a^{(x+a)/(1-ax)} \frac{dv}{1+v^2} = \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - \mathrm{T}(a). \qquad \blacksquare$$

3단계 두 가지 항등식 더

소문항 (i)과 두 번 결합하면

$$\mathrm{T}(x^{-1}) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}(x) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) + \mathrm{T}(a) = 2\mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - \mathrm{T}(a^{-1}). \qquad \blacksquare$$

이제 문자를 바꾼다. $y = 1/x$, $b = 1/a$로 두자. 조건 $x < 1/a$는 $1/y < b$, 즉 $y > 1/b$가 되고

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{1/y + 1/b}{1 - 1/(by)} = \frac{b+y}{by-1}.$$

따라서 $\mathrm{T}(y) = 2\mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\dfrac{y+b}{by-1}\right) - \mathrm{T}(b)$이다. $\blacksquare$

4단계 특수한 값

잠깐, 직접 해 보기 마지막 항등식에서 $\frac{y+b}{by-1}$이 y 자신과 같아지도록 y와 b를 골라 보라. 무엇을 얻는가?

$y = b = \sqrt{3}$으로 두자. 그러면 $y > \frac{1}{b}$이고 $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3}$이다. 항등식은 $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = 2\mathrm{T}_\infty - 2\mathrm{T}(\sqrt{3})$이 되므로

$$\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}\mathrm{T}_\infty. \qquad \blacksquare$$

생각해 보기 $\sqrt{2}-1$에 대해서는 덧셈 항등식에 $x = a = \sqrt{2}-1$을 넣어 보라. $\frac{2x}{1-x^2}$은 무엇인가? 그리고 $\mathrm{T}(1)$은 무엇인가?

$x = a = \sqrt{2}-1$로 두면($x^2 = 3-2\sqrt{2} < 1$이므로 $x < \frac{1}{a}$이다) 덧셈 항등식에서 $2\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$이다. 그런데 $1-x^2 = 2\sqrt{2}-2 = 2(\sqrt{2}-1) = 2x$이므로 $\frac{2x}{1-x^2} = 1$이고, $2\mathrm{T}(\sqrt{2}-1) = \mathrm{T}(1)$이다. 마지막으로 소문항 (i)에 $x = 1$을 넣으면 $\mathrm{T}(1) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}(1)$이

므로 $\mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$이다. 그러므로

$$\mathrm{T}(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{4}\mathrm{T}_\infty. \qquad \blacksquare$$

돌아보기

- **피적분함수를 보존하는 치환.** 두 핵심 단계 모두 $\frac{du}{1+u^2}$을 바꾸지 않는 치환을 썼고, 움직인 것은 적분 구간의 끝값뿐이었다. 적분의 이러한 "대칭"은 강력한 도구이다.
- **고정점(fixed point).** $\mathrm{T}(\sqrt{3})$의 값은 어떤 식이 자기 자신과 같아지도록 수를 골라서 얻었다. 그렇게 하여 항등식이 방정식으로 바뀌었다.
- **정의는 해석학에서 올 수 있다.** 삼각형은 한 번도 쓰지 않았지만 $\frac{\pi}{3}$과 $\frac{\pi}{8}$을 되찾았다(π를 $2\mathrm{T}_\infty$로 정의했을 때).

숨은 수학

초등함수 세우기

엄밀한 해석학 강의에서는 exp, sin, cos, ln 같은 함수를 그냥 주어진 것으로 가정할 수 없다. 이 함수들을 **구성**하고 그 성질을 증명해야 한다. 표준적인 방법은 세 가지이다. 거듭제곱급수(power series)로 정의할 수 있다($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$). 연습문제에 있는 1986년 예시 문제(specimen question)처럼 미분방정식(differential equation)의 해로 정의할 수도 있다($\mathrm{f}' = \mathrm{f}$, $\mathrm{f}(0) = 1$이 exp를 정의한다). 또는 여기서처럼 역함수(inverse function)를 적분으로 정의할 수 있다. 즉 $\ln x = \int_1^x \frac{du}{u}$, $\arctan x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2}$로 정의하고, $\pi = 2\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$로 정의한다. 각 방법에는 저마다 장점이 있으며, 세 방법이 모두 같은 함수를 준다는 것을 증명하는 일은 보람 있는 연습이다. Section 3.8의 함수방정식(functional equation)을 이용한 방법과도 비교해 보라.

원 너머로: 타원적분

적분을 이용한 방법은 삼각형을 이용한 방법으로는 불가능한 방식으로 일반화된다. 1718년 Giulio Fagnano는 8자 모양의 곡선인 **렘니스케이트**(lemniscate)의 호의 길이(arc length)를 연구했는데, 이는 $\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$으로 이어진다. 그는 우리의 치환이 T를 두 배로 만든 것처럼 호를 두 배로 만드는 치환을 찾아냈다. 1751년 Fagnano의 연구를 읽은 오일러(Euler)는 완전한 덧셈정리를 찾았고, 이는 결국 아벨(Abel)과 야코비(Jacobi)를 거쳐 **타원함수**(elliptic function)의 이론으로 이어졌다. 타원함수란 이와 같은 적분의 역함수로, 원에 대한 sin과 cos의 역할을 렘니스케이트에 대해 하는 함수이다. 같은 적분을 산술기하평균(AGM)에 관한 가우스(Gauss)의 연구에서도 만난 바 있다(Section 2.6). 오늘날 타원함수는 정수

론(number theory)의 중심에 있으며, Section 1.9의 타원곡선(elliptic curve)은 그 기하학적 그림자이다.

π 계산하기

덧셈 항등식은 π를 계산하는 가장 유명한 공식들의 바탕이기도 하다. 예를 들어 이를 거듭 적용하면 $\mathrm{T}(1) = 4\mathrm{T}(\frac{1}{5}) - \mathrm{T}(\frac{1}{239})$임을 보일 수 있는데, 이것이 1706년의 마친(Machin)의 공식이다. 이 공식을 급수 $\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$와 결합하여 π의 100자리를 얻었고, 이 방법은 두 세기 반 동안 으뜸가는 방법으로 쓰였다. 이것이 Section 5.1의 주제이다.

사고 기술

적분의 대칭

피적분함수를 바꾸지 않는 치환을 찾아라. 그런 치환은 적분이 정의하는 함수의 항등식으로 바뀐다.

여기서는 $u \mapsto 1/u$와 $u \mapsto \frac{u+a}{1-au}$가 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$을 보존하며, 각각 반사 공식과 덧셈정리를 준다. 같은 아이디어를 다른 적분에 적용한 것이 특수함수 이론의 바탕을 이룬다.

더 도전하기

1 **지수함수와 코사인.** STEP II Specimen paper, 6번 문제 (`step.maths.org/questions/spec-s2-q6`)를 풀어 보라. 이 문제는 지수함수와 코사인의 덧셈정리를 오직 그 미분방정식만으로 이끌어 낸다. (**힌트:** 코사인의 경우, 0이 되어야 할 두 식을 찾고 그 제곱의 합이 상수임을 보여라.)

2 **역사인 함수.** STEP III 2007, 7번 문제 (`step.maths.org/questions/07-s3-q7`)을 풀어 보라. 이 문제는 역사인 함수를 이 절의 적분과 같은 방식으로 다루고, 치환으로 둘을 연결한다.

3 **초기의 마친형 공식.** 덧셈 항등식을 이용하여 $\mathrm{T}(\frac{1}{2}) + \mathrm{T}(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$임을 보여라.

4 **T_∞는 유한하다.** 모든 $x \geq 1$에 대해 $\mathrm{T}(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} < 2$임을 보이고, $0 < x < 1$에서도 $\mathrm{T}(x) < 2$인 이유를 설명한 다음, 단조수렴정리(monotone convergence theorem, Section 2.2)로부터 T_∞가 존재함을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press). 여러 방법을 논의하면서 초등함수를 엄밀하게 세운다.
- **Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*** (McGraw-Hill). 유명한 "베이비 루딘(baby Rudin)"이다. 8장의 머리말에서 몇 쪽 안 되는 우아한 서술로 거듭제곱급수에서 exp, sin, cos를 구성한다. 고급.
- **Victor Prasolov & Yuri Solovyev, *Elliptic Functions and Elliptic Integrals*** (American Mathematical Society). 렘니스케이트가 어디로 이어지는지 알고 싶은 독자를 위한 책이다. 고급.

4.3 22/7은 π보다 크다

문제

STEP I 1997, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/97-s1-q6`

도입

여러 세대의 학생들이 π는 "대략 $\frac{22}{7}$"이라고 배워 왔다. 이것은 매우 좋은 근삿값(approximation)이다. $\frac{22}{7} = 3.142857\ldots$이고 $\pi = 3.141592\ldots$이다. 그런데 $\frac{22}{7}$은 π보다 큰가, 작은가? 그리고 누군가가 대신 계산해 둔 π의 자릿수를 그냥 찾아보지 않고, 이것을 증명할 수 있는가?

이 문제는 수학 전체를 통틀어 가장 우아한 증명 가운데 하나를 보여 준다. 양의 함수의 적분 하나는 당연히 양수여야 하는데, 이 적분이 정확히 $\frac{22}{7} - \pi$와 같다는 것이 밝혀진다. 피적분함수(integrand)가 양수이므로 적분도 양수이고, 따라서 $\frac{22}{7} > \pi$이다. 증명 전체가 몇 줄에 들어가며, 너무나 깔끔해서 수학 티셔츠에 퍼즐로 실릴 정도이다.

시작하기 전에

생각해 보기 왜 $\int_0^1 \frac{\text{다항식}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$에서 π가 나오는가? 이런 꼴의 간단한 적분 가운데 그 자체로 π를 주는 것은 무엇인가?

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$이다. 다항식을 $1+x^2$으로 나누면, 다항식인 몫(quotient)(적분하면 유리수가 된다)과 $1+x^2$ 위에 놓인 상수 나머지(remainder)(적분하면 π의 유리수배가 된다)를 얻는다. 문제의 첫 부분은 바로 이 나눗셈을 하라고 요구한다.

차근차근 풀기

1단계 다항식의 나눗셈

먼저 전개한다. $(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$이므로

$$x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4.$$

> **생각해 보기** 다항식의 나눗셈(polynomial division)을 하든 계수를 비교하든, x^2+1로 나누어 보자. 나머지는 무엇인가?

$(a_6x^6 + \cdots + a_0)(x^2+1) + b$에서 최고차항부터 계수를 비교(comparing coefficients)하면 다음과 같다. $a_6 = 1$; $a_5 = -4$; $a_4 + a_6 = 6$이므로 $a_4 = 5$; $a_3 + a_5 = -4$이므로 $a_3 = 0$; $a_2 + a_4 = 1$이므로 $a_2 = -4$; $a_1 + a_3 = 0$이므로 $a_1 = 0$; $a_0 + a_2 = 0$이므로 $a_0 = 4$; 마지막으로 $a_1 = 0$(x의 계수)이고 $a_0 + b = 0$이므로 $b = -4$이다. 즉,

$$x^4(1-x)^4 = (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)(x^2+1) - 4.$$

2단계 적분

$1 + x^2$으로 나누면

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2},$$

이므로

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + \frac{5}{5} - \frac{4}{3} + 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi.$$

이제 $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$이므로 유리수 부분은 $\frac{1}{7} + 3 = \frac{22}{7}$이고, 적분값은 $\frac{22}{7} - \pi$이다. ■

3단계 적분값의 범위 정하기

> **생각해 보기** 피적분함수는 $(0,1)$에서 양수이므로 곧바로 $\frac{22}{7} > \pi$이다. π의 하계를 얻으려면 적분값의 상계가 필요하다. $[0,1]$에서 $\frac{1}{1+x^2}$은 얼마나 커질 수 있는가?

$[0,1]$에서 $1 \le 1 + x^2 \le 2$이므로

$$\tfrac{1}{2}x^4(1-x)^4 \le \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \le x^4(1-x)^4,$$

이고, 양 끝점을 제외하면 등호가 성립하지 않는다.

잠깐, 직접 해 보기 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$를 계산하고 증명을 마무리하라.

전개식을 항별로 적분하면

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx = \frac{1}{9} - \frac{4}{8} + \frac{6}{7} - \frac{4}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{630}.$$

(공통분모 2520으로 통분하면 $280 - 1260 + 2160 - 1680 + 504 = 4$이고, $\frac{4}{2520} = \frac{1}{630}$이다.) 따라서

$$0 < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630},$$

즉 $\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$이다. ■

수치로 보면 $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} = 3.14127\ldots$이므로 $3.1412 < \pi < 3.1429$를 증명한 셈이다. 왼쪽 부등식까지 이용하면 $\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi$이고, 이로써 상계를 $\pi < 3.14207$로 개선할 수 있다.

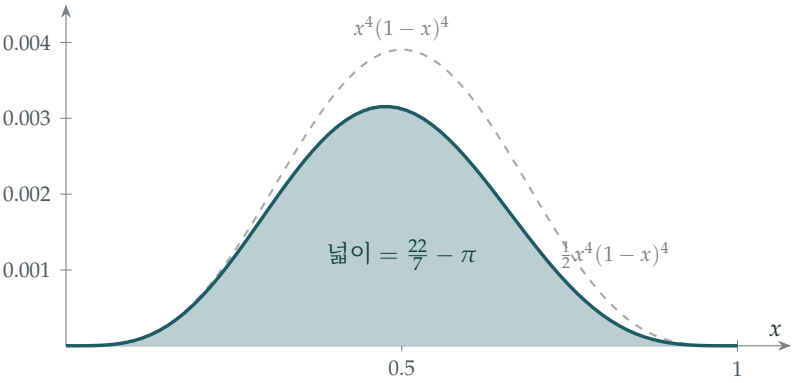


그림 4.3.1 피적분함수 $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$(청록색)는 양수이지만 매우 작다. 최댓값이 약 0.003이다. 색칠한 넓이는 정확히 $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.00126$이다. 피적분함수는 $\frac{1}{2}x^4(1-x)^4$(점선)과 $x^4(1-x)^4$(파선) 사이에 있으며, 이 두 함수 아래의 넓이는 각각 $\frac{1}{1260}$과 $\frac{1}{630}$이다.

돌아보기

- **양수성으로 부등식을 증명한다.** 양의 함수의 적분은 양수이다. 적분값이 $\frac{22}{7} - \pi$임을 알아내자마자 부등식이 곧바로 나왔다.
- **작은 피적분함수, 정밀한 범위.** 인수 $x^4(1-x)^4$는 $[0,1]$에서 매우 작으며(최대 $\frac{1}{256}$), 이 때문에 적분값이 작고 범위가 정밀해진다.
- **유리수와 π의 배수의 합.** Section 2.9에서와 마찬가지로, "유리수 + 어떤 상수의 유리수 배" 꼴의 적분이 작으면 그 상수의 좋은 유리수 근삿값을 얻는다.

숨은 수학

역사가 있는 증명

아르키메데스(Archimedes)는 기원전 250년 무렵, 원에 내접하고 외접하는 96각형의 둘레를 계산하여 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$을 증명하였다(Section 2.5의 다각형과 비교해 보라). 적분을 이용한 증명은 훨씬 최근의 것이다. 이 증명은 D. P. Dalzell이 1944년에 발표하였고, 1968년 미국 대학생들을 위한 퍼트넘 대회(Putnam competition)에 문제로 출제되면서 유명해졌다. 이 증명의 매력은 수치 계산이 전혀 필요 없다는 점이다. 부등식 $\frac{22}{7} > \pi$는 양의 함수의 적분은 양수라는 사실에서 저절로 나온다.

같은 아이디어로 얻는 더 나은 근삿값

이 방법은 일반화된다. $x^4(1-x)^4$ 대신 $x^8(1-x)^8$을 쓰면 같은 나눗셈으로

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{188684}{15015},$$

를 얻고, 이로써 $\pi > \frac{47171}{15015} = 3.1415917\ldots$가 증명되는데, 이는 유효숫자(significant figures) 여섯 자리까지 정확하다. 2009년에 Stephen Lucas는 피적분함수가 음이 아닌 이런 종류의 적분들의 족을 찾아내어, 유효숫자 일곱 자리까지 정확한 $\frac{355}{113}$을 비롯한 다른 유명한 근삿값들에 대한 부등식을 증명하였다.

근삿값과 무리성

왜 π는 $\frac{22}{7}$이나 $\frac{355}{113}$처럼 좋은 분수 근삿값을 가질까? 모든 무리수(irrational number)는 그 수와의 차가 $\frac{1}{q^2}$ 이내인 분수 $\frac{p}{q}$를 무한히 많이 가지는데, π는 연분수(continued fraction) $[3;7,15,1,292,\ldots]$에 큰 항 292가 들어 있어서 앞부분에 유난히 좋은 근삿값을 몇 개 가지게 된다(Section 2.2 참고). 이 문제에 나온 것과 같은 적분을 점점 더 작게 만드는 것은, 어떤 수가 분수로 너무 잘 근사될 수 **없으며** 따라서 무리수임을 보이는 증명의 출발점이 된다. π가 무리수라는 Ivan Niven의 유명한 한 쪽짜리 증명(1947)은 $\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\sin(\pi x)$의 적분을 이용하는데, 이는 Section 2.9에 나온 적분들의 삼각함수 사촌이다.

사고 기술

부등식을 양의 함수의 적분으로 바꾸어 표현하라

$A > B$를 증명하려면, 적분값이 $A - B$인 양의 함수를 찾아라.

이렇게 하면 부등식이 하나의 항등식과 자명한 사실로 바뀐다. 이것은 해석학에서 가장 유용한 요령 가운데 하나이며, 적분 대신 제곱의 합을 쓰는 같은 아이디어로 Section 3.2에서 AM–GM을 증명하였다.

더 도전하기

1 **수치를 확인하라.** $\frac{22}{7} - \pi$를 유효숫자 네 자리까지 계산하고, 그 값이 $\frac{1}{1260}$과 $\frac{1}{630}$ 사이에 있음을 확인하라.

2 **베타 적분.** 공식 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$(Section 4.4에서 증명함)을 이용하여 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}$임을 확인하라.

3 **아래쪽 근삿값.** 다음을 보여라.

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{그리고} \quad \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{47}{15},$$

이로부터 $\pi > 3$과 $\pi > \frac{47}{15}$을 이끌어 내라. 왜 이것들은 $\frac{22}{7}$보다 덜 정확한가?

4 **더 나아가기.** 심화위에 주어진 $\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$에 대한 항등식을 확인하라. (나눗셈은 컴퓨터 대수 시스템(computer algebra system)이 해 줄 것이다. 핵심은 나머지가 16이어서 4π가 나온다는 것을 확인하는 데 있다.)

더 읽을거리

- **Petr Beckmann, *A History of* π** (St Martin's Press). π의 역사. 아르키메데스의 다각형 방법을 자세히 다루며, 그 밖에도 많은 내용이 담겨 있다.
- **Stephen Lucas, "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands"**, *American Mathematical Monthly* 116 (2009). 음이 아닌 피적분함수를 가진 적분에서 얻은 π의 근삿값. 짧고 읽기 쉽다.
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). 무리수. π가 무리수라는 Niven의 증명이 실려 있다.

4.4 월리스, 베타 함수, 그리고 1/2의 계승

문제

STEP II 1995, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/95-s2-q4`

도입

$\left(\frac{1}{2}\right)!$은 무엇일까? 터무니없는 질문처럼 들린다. $n!$은 $1 \times 2 \times \cdots \times n$을 뜻하는데, 항을 "반 개"만 곱할 수는 없기 때문이다. 그런데도 자연스러운 답이 있으며, 그 답은 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

π는 어디에서 나올까? 바로 이 문제가 다루는 $\sin t$의 거듭제곱의 적분에서 나온다. 이 문제는 그 과정에서 π에 관한 가장 오래되고 가장 기이한 공식 가운데 하나인, 1655년 존 월리스(John Wallis)의 무한곱(infinite product)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots,$$

을 증명하고, 모든 확률론 연구자와 통계학자가 사용하는 $n!$에 대한 스털링 공식(Stirling's formula)에 숨어 있는 상수를 찾아낸다.

시작하기 전에

생각해 보기 u_0과 u_1은 얼마인가? 그리고 n이 클 때 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin^n t$의 그래프는 대략 어떤 모양인가?

$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$이고 $u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \mathrm{d}t = 1$이다. n이 크면 $\sin^n t$는 $\sin t$가 1에 가까운 $t = \frac{\pi}{2}$ 근처를 제외하면 매우 작다. 즉 그래프는 오른쪽 끝에 붙은 좁은 뾰족한 봉우리가 된다(그림 4.4.1). 따라서 n이 커지면 u_n은 줄어든다. 이 문제는 그 속도가 정확히 얼마인지, 곧 $\sqrt{\pi/(2n)}$과 같은 빠르기임을 밝혀낸다.

차근차근 풀기

1단계 축소 공식

> **생각해 보기** $\sin t$를 적분하고 $\sin^{n-1} t$를 미분하여 $\int \sin t \cdot \sin^{n-1} t \, dt$를 부분적분(integration by parts)하라. 새 피적분함수에는 $\cos^2 t$가 들어 있다. 어떻게 하면 다시 $\sin t$의 거듭제곱으로 돌아갈 수 있을까?

$dv = \sin t \, dt$(따라서 $v = -\cos t$), $w = \sin^{n-1} t$(따라서 $w' = (n-1)\sin^{n-2} t \cos t$)로 두면

$$u_n = \Big[-\cos t \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t \, dt.$$

$n \geq 2$이면 경계항은 0이다. $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$로 쓰면 적분은 $u_{n-2} - u_n$이 되므로 $u_n = (n-1)(u_{n-2} - u_n)$, 즉

$$n u_n = (n-1) u_{n-2}. \qquad \blacksquare$$

이것이 축소 공식(reduction formula)이다. 양변에 u_{n-1}을 곱하면 $n u_n u_{n-1} = (n-1) u_{n-1} u_{n-2}$를 얻는다. $\blacksquare$

2단계 불변량

> **생각해 보기** 이 관계식은 n이 하나 줄어들어도 양 $n u_n u_{n-1}$이 변하지 않는다는 뜻이다. $n = 1$일 때 이 값은 얼마인가?

이를 반복해서 적용하면 $n u_n u_{n-1} = (n-1) u_{n-1} u_{n-2} = \cdots = 1 \cdot u_1 u_0 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2}$이다. 따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여 $n u_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$이다. 이처럼 변하지 않는 양을 불변량(invariant)이라 한다. $\blacksquare$

3단계 조임

$0 < t < \frac{\pi}{2}$이면 $0 < \sin t < 1$이므로 $\sin^n t < \sin^{n-1} t$이다. 즉 끝점을 제외하면 $\sin^n t$의 그래프는 $\sin^{n-1} t$의 그래프 아래에 있다. 적분하면 $0 < u_n < u_{n-1}$이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** $u_n < u_{n-1}$과 $n u_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$를 이용하여 $n u_n^2$을 양쪽에서 가두어라.

u_{n-1}을 더 작은 u_n으로 바꾸면 $n u_n^2 < n u_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$이다. u_n을 더 큰 u_{n-1}로 바꾸면 $\frac{1}{2}\pi = n u_n u_{n-1} < n u_{n-1}^2$이다. 따라서 $n u_n^2 < \frac{1}{2}\pi < n u_{n-1}^2$이다. $\blacksquare$

오른쪽 부등식에서 n 대신 $n+1$을 넣으면 $\frac{1}{2}\pi < (n+1) u_n^2$이므로 $n u_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}\pi$이다. 둘

을 합치면

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\tfrac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi. \qquad \blacksquare$$

$\frac{n}{n+1} \to 1$이므로 조임 정리(squeeze theorem)에 의해 $nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$이다. $\blacksquare$

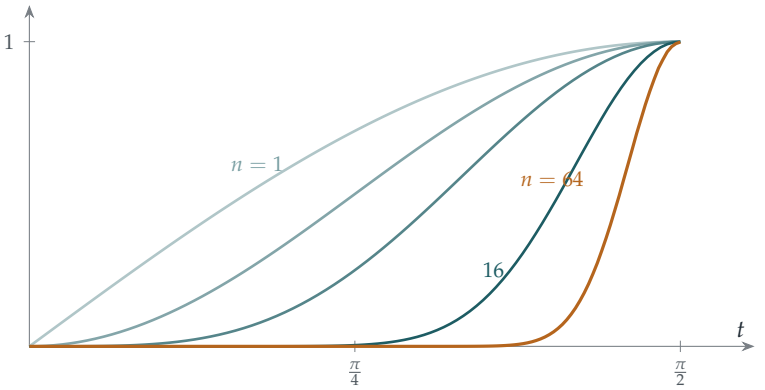


그림 4.4.1 $n = 1, 2, 4, 16, 64$일 때 $\sin^n t$의 그래프. n이 커질수록 곡선 아래의 넓이 u_n은 줄어들며 $t = \frac{\pi}{2}$ 근처에 몰린다. 이 문제는 $u_n \approx \sqrt{\pi/(2n)}$임을 보인다. $n = 64$이면 이 값은 약 0.157이다.

돌아보기

- **축소 공식.** 부분적분으로 u_n을 u_{n-2}로 바꾸었으므로, 모든 u_n은 u_0과 u_1에 의해 결정된다.
- **불변량을 찾아라.** 곱 nu_nu_{n-1}은 고정되어 있었다. 이는 Section 2.6에서 산술기하평균(AGM) 단계를 거쳐도 적분이 변하지 않았던 것과 같다.
- **단조성과 불변량이 합쳐지면 조임이 된다.** $u_n < u_{n-1}$이라는 사실과 nu_nu_{n-1}의 정확한 값을 알면, nu_n^2을 극한이 같은 두 양 사이에 가둘 수 있었다. 이런 성질을 단조성(monotonicity)이라 한다.

숨은 수학

월리스의 곱

축소 공식을 u_0 또는 u_1까지 내려가며 적용하면 명시적인 값을 얻는다.

$$u_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad u_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}.$$

조임을 이용하면 $u_{2m}/u_{2m+1} \to 1$임을 보일 수 있다. 이 비를 풀어 쓰고 정리하면 월리스의 곱

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

을 얻는다. 존 월리스는 1655년에 대담한 보간(interpolation) 과정을 통해 이 공식을 찾아냈다. 지수가 자연수인 적분들의 표에 $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$를 끼워 넣어, 그 값이 "마땅히" 무엇이어야 하는지 추측한 것이다. 이것은 비에트(Viète)의 곱(Section 2.5)에 이어 수학에 등장한 최초의 무한곱 가운데 하나였고, 유리수만을 사용한 것으로는 최초였다.

반의 계승

월리스의 보간 아이디어는 1729년 오일러(Euler)에 의해 엄밀해졌다. 오일러는 오늘날 **감마 함수**(*Gamma function*)라고 부르는 함수

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt,$$

를 찾아냈는데, 이 함수는 $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$(부분적분하면 된다)를 만족하고 자연수 n에 대하여 $\Gamma(n+1) = n!$이다. 감마 함수는 계승(factorial)을 모든 양의 실수로 매끄럽게 확장한다. 이와 밀접하게 관련된 **베타 함수**(*Beta function*)

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

는 Section 4.3와 Section 2.9의 적분들을 포함하며, $x = \sin^2 t$로 치환하면 우리의 u_n도 포함한다. 특히 $\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{8}$(연습문제 2)이므로 $\Gamma(\frac{3}{2})^2/\Gamma(3) = \frac{\pi}{8}$, 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다. 이는 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$와 같은 말이며, 유명한 가우스 적분(Gaussian integral) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$와 같은 사실이다. 정규분포(normal distribution)의 공식에 π가 나타나는 이유가 바로 이것이다.

스털링 공식

스털링 공식에 따르면 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$이다. $(n/e)^n$ 부분은 비교적 쉽게 얻을 수 있지만 상수 $\sqrt{2\pi}$는 더 어렵다. 이 상수를 구하는 표준적인 방법이 바로 이 문제이다. u_{2m}의 명시적인 값에는 $(2m)!/(m!)^2$이 들어 있고, 극한 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$가 상수를 정확히 결정한다. 확률을 통해 같은 상수에 이르는 전혀 다른 길은 Section 12.23에 있다.

사고 기술

적분에서 얻는 점화식

부분적분을 하면 매개변수가 n인 적분을 매개변수가 더 작은 같은 적분과 연결할 수 있는 경우가 많다. 그렇게 얻은 점화식(*recurrence*)은 풀 수도 있고, $n \to \infty$일 때의 거동을 분석할 수도 있다.

점화식이 바꾸지 않는 양과 n에 대한 단조성에 주목하라. 이 둘을 함께 쓰면 명시적인 공식 없이도 극한을 구할 수 있는 경우가 많다.

더 도전하기

1 **월리스의 곱.** u_{2m}과 u_{2m+1}의 명시적인 값과 $u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}$을 이용하여 월리스의 곱을 증명하라.

2 **베타 적분.** STEP II 2013, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/13-s2-q2`)에 도전해 보라. 이 문제는 축소 공식으로 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$를 계산한 뒤, $n = \frac{1}{2}$일 때 그 답이 무엇을 시사하는지 묻는다. 반의 계승을 처음 엿보는 셈이다.

3 **베타 함수.** STEP III 2025, 1번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`)에 도전해 보라. 이 문제는 일반적인 베타 적분 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$와 그 대칭성 및 점화식을 전개하고, 이를 이용하여 $[0,\infty)$에서의 적분을 계산한다.

4 **중심 이항계수(central binomial coefficients).** 심화 $u_{2m} = \binom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2^{2m+1}}$임을 보이고, $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$를 이용하여 m이 클 때 $\binom{2m}{m} \approx \dfrac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$임을 유도하라. $m = 10$일 때 이를 확인하라.

더 읽을거리

- **Julian Havil, *Gamma*** (Princeton University Press). 감마 함수와 그 역사를 다룬다.
- **Philip J. Davis, "Leonhard Euler's integral: a historical profile of the Gamma function"**, *American Mathematical Monthly* 66 (1959). 상을 받은 고전적인 논문으로, 이 절을 공부했다면 읽을 수 있다.
- **Emil Artin, *The Gamma Function*** (Dover). 해석학을 어느 정도 공부한 뒤에 읽기 좋은, 짧고 아름다운 단행본이다.

4.5 2학년생의 꿈

문제

STEP III 2009, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/09-s3-q8`

도입

모든 학생은 언젠가 $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$임을 배운다. 이 틀린 등식은 농담 삼아 "신입생의 꿈"(freshman's dream)이라고 불린다. 이 문제는 그만큼이나 초보자의 실수처럼 보이는 사실을 증명한다.

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots,$$

그리고 그 짝인 $\int_0^1 x^{-x} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$도 성립한다. x^x의 적분이 n^{-n}의 합으로 바뀐다니, 믿기 어려울 만큼 좋아 보인다. 그래서 이 등식을 **2학년생의 꿈**(sophomore's dream)이라고 부른다. 하지만 이것은 참이며, 요한 베르누이(Johann Bernoulli)가 1697년에 발견하였다.

증명에는 대학에서 끊임없이 만나게 될 세 가지 아이디어가 쓰인다. 지수함수와 거듭제곱을 비교하는 극한(limit), 점화식(reduction formula), 그리고 함수를 거듭제곱급수(power series)로 전개한 뒤 항별로 적분하는 것(term-by-term integration)이다.

시작하기 전에

생각해 보기 함수 x^x는 $x = 0$에서 여러분이 아는 어떤 식으로도 정의되지 않는다(0^0은 모호하다). x가 위쪽에서 0에 다가갈 때 이 함수는 어떻게 움직이는가? 계산기로 $x = 0.1, 0.01, 0.001$을 넣어 보아라.

$0.1^{0.1} \approx 0.794$, $0.01^{0.01} \approx 0.955$, $0.001^{0.001} \approx 0.993$이다. 1에 다가가는 것처럼 보인다. 소문항 (i)이 이를 증명하는데, 이로부터 피적분함수(integrand)가 0 근처에서 얌전하게 행동하

며 적분이 의미를 가짐을 알 수 있다. $(0,1]$에서 x^x의 그래프는 1 근처에서 시작하여 최솟값까지 내려갔다가 $x=1$에서 다시 1로 돌아온다(그림 4.5.1).

차근차근 풀기

1단계 거듭제곱은 로그를 이긴다

생각해 보기 $x \to 0^+$일 때 $\ln x \to -\infty$이다. 어떤 치환을 하면 $x \to 0^+$가 $t \to \infty$로 바뀌고, $x^m (\ln x)^n$이 $e^{-mt} t^n$과 비슷한 꼴로 바뀌는가?

$x = e^{-t}$로 놓자. $x \to 0^+$일 때 $t \to \infty$이고 $\ln x = -t$이므로

$$x^m (\ln x)^n = e^{-mt}(-t)^n = (-1)^n e^{-mt} t^n \to 0.$$

말로 하면, $x \to 0$일 때 x의 양의 거듭제곱은 $\ln x$의 어떤 거듭제곱이 발산하는 것보다도 빠르게 0으로 간다. ■

$m = n = 1$이면 $x \ln x \to 0$이고, 지수함수는 연속이므로 $x^x = e^{x \ln x} \to e^0 = 1$이다. ■

2단계 점화식

생각해 보기 $I_{n+1} = \int_0^1 x^m (\ln x)^{n+1}\, dx$를 부분적분(integration by parts)하여라. 어느 인수를 적분해야 하는가? $x=0$에서 경계항은 어떻게 되는가?

x^m을 적분하고 $(\ln x)^{n+1}$을 미분하면

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\, dx.$$

$x=1$에서는 $\ln 1 = 0$이므로 경계항이 0이고, $x \to 0$일 때는 소문항 (i)에 의해($m+1$과 $n+1$을 대입하여) 0으로 수렴한다. 남은 적분은 $\frac{n+1}{m+1} I_n$이므로

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n. \quad ■$$

$I_0 = \int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1}$에서 출발하여 이 공식을 n번 적용하면

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \cdot \frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}. \quad ■$$

3단계 급수

생각해 보기 e^y의 급수를 이용하여 $x^x = e^{x\ln x}$를 전개하여라. 각 항은 어떤 꼴인가? m을 어떤 값으로 두면 소문항 (ii)의 적분이 나타나는가?

모든 y에 대하여 $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$이므로

$$x^x = e^{x\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}.$$

잠깐, 직접 해 보기 소문항 (ii)에서 $m = n$으로 두고($n = 0$인 경우는 따로 다루어) 0부터 1까지 항별로 적분하여라. 무엇이 나오는가?

$n = 0$인 항은 1이고, 이를 적분하면 1이다. $n \geq 1$이면 소문항 (ii)에서 $m = n$으로 두어 $\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$를 얻으므로, n번째 항의 기여는 $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$이다. 모두 더하면

$$\int_0^1 x^x \, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots . \qquad \blacksquare$$

($n = 0$인 항도 같은 규칙 $\frac{1}{1^1}$에 들어맞는다.) 항들은 매우 빠르게 작아진다. 일곱 개의 항만으로 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확한 값 0.783430…을 얻는다.

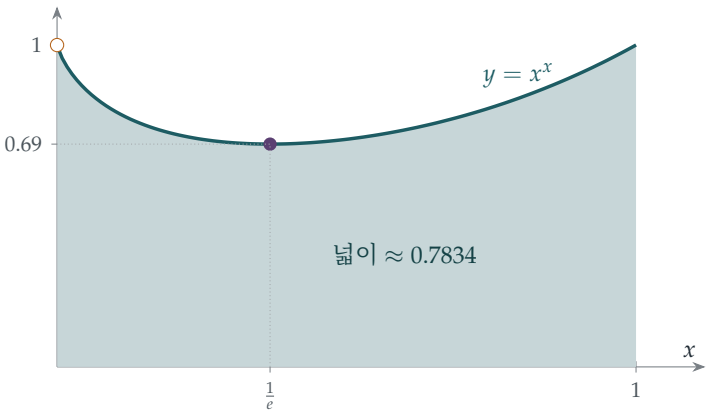


그림 4.5.1 $(0, 1]$에서 x^x의 그래프. $x \to 0$일 때 1로 수렴하고(빈 원), $x = \frac{1}{e}$에서 최솟값 $e^{-1/e} \approx 0.692$까지 내려갔다가 $x = 1$에서 다시 1로 돌아온다. 색칠한 부분의 넓이는 $\sum (-1)^{n+1} n^{-n} \approx 0.7834$이다.

돌아보기

- **증가 속도를 비교하려면 치환하라.** $x = e^{-t}$로 놓아 0에서의 극한을 익숙한 ∞에서의 극한으로 바꾸었다.

- **경계항은 반드시 확인해야 한다.** 점화식은 $x = 0$에서 경계항이 사라지는 데 의존했고, 바로 여기서 소문항 (i)이 쓰였다.
- **먼저 급수로, 그다음 적분.** 피적분함수를 거듭제곱급수로 전개하여 각 항을 적분함으로써, 초등함수인 원시함수(antiderivative)가 없는 적분을 빠르게 수렴하는 합으로 바꾸었다.

숨은 수학

합과 적분의 순서 바꾸기

3단계에서는 무한합과 적분의 순서를 슬그머니 바꾸었다. 즉 $\int \sum = \sum \int$로 두었다. 이것이 언제나 허용되는 것은 아니다. 대학에서는 이것이 성립하지 않는 예와, 언제 안전한지 알려 주는 정리들을 만나게 된다. 가장 간단한 정리에 따르면, 급수가 **균등수렴**(uniform convergence)할 때, 곧 급수의 꼬리를 모든 x에서 동시에 작게 만들 수 있을 때 순서를 바꾸어도 안전하다. 여기서는 $(0,1]$에서 $|x \ln x| \le \frac{1}{e}$이므로, x가 무엇이든 n번째 항의 크기는 많아야 $\frac{e^{-n}}{n!}$이다. 이 상계들의 합은 수렴하므로 꼬리는 균등하게 작고, 순서를 바꾸는 것이 정당화된다. 이 논증을 **바이어슈트라스 M-판정법**(Weierstrass M-test)이라고 하며, 해석학에서 가장 많이 쓰이는 도구 가운데 하나이다.

"꿈"이 이루어지는 이유

이 항등식은 특별하다. 이는 $\frac{(x\ln x)^n}{n!}$의 거듭제곱과 적분 $\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$이 정확히 맞아떨어져 $n!$이 완벽하게 약분되는 데 달려 있다. 그 밑바탕에서 이 적분은 감마 함수(Gamma function)가 모습을 바꾼 것이다. 치환 $x = e^{-t/(n+1)}$을 하면 이 적분은 $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t} \, dt = \frac{(-1)^n \, \Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$이 되어, Section 4.4와 연결된다.

이름

"2학년생의 꿈"이라는 이름은 Jonathan Borwein과 공저자들이 2004년 책 *Experimentation in Mathematics*에서 "신입생의 꿈" $(a+b)^n = a^n + b^n$의 짝으로 붙인 것이다(신기하게도 "신입생의 꿈"은 어떤 수 체계에서는 참이다. 소수(prime) p를 법으로 하는 산술에서는 가운데 이항계수(binomial coefficient)가 모두 p로 나누어떨어지므로 $(a+b)^p = a^p + b^p$이다). Borwein은 **실험수학**(experimental mathematics)의 선구자였다. 실험수학에서는 컴퓨터를 이용해 이와 같은 항등식을 발견하고, 그런 다음 손으로 증명한다.

사고 기술

전개하고 항별로 적분하기

피적분함수가 각 항을 적분할 수 있는 거듭제곱급수를 가진다면, 각 항을 적분하여 그 결과를 더하라.

이는 초등함수인 원시함수가 없는 적분의 값을 구하는 강력한 방법이다. 합과 적분의 순서를 바꾸는 것이 정당한지 항상 따져 보아라. 대개는 정당하지만, 왜 그런지 알고 있어야 한다.

더 도전하기

1 **짝이 되는 등식.** $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \approx 1.2913$임을 보여라.

2 **최솟값.** x^x가 $(0,\infty)$에서 $x = \frac{1}{e}$일 때 최솟값 $e^{-1/e}$를 가짐을 보여라.

3 **몇 개의 항이 필요한가?** 항이 감소하는 교대급수(alternating series)에서는 중간에 멈추었을 때의 오차가 처음으로 생략한 항보다 작다. 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확하게 구하려면 $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$의 급수에서 몇 개의 항이 필요한가?

4 **사촌 격인 문제.** 같은 방법으로 $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$이고 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$임을 보여라. (Section 2.4에 의해 이 값은 $-\frac{\pi^2}{6}$이다.)

더 읽을거리

- **Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics*** (A. K. Peters). 이 이름의 출처이며, 컴퓨터로 발견한 더 많은 항등식이 실려 있다.
- **William Dunham, *The Calculus Gallery*** (Princeton University Press). 뉴턴(Newton)부터 르베그(Lebesgue)까지 해석학의 걸작들을 다루며, 베르누이의 업적도 포함되어 있다.
- **Mary Hart, *Guide to Analysis*** (Palgrave). 균등수렴과, 합과 적분의 순서를 언제 바꿀 수 있는지를 명료하게 설명한다.

4.6 공식으로 나타낼 수 없는 적분

문제

STEP III 2016, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s3-q3`

도입

미분(differentiation)은 기계적이다. 규칙이 정해져 있고, 흔히 쓰는 재료로 만든 함수라면 그 규칙을 적용하기만 하면 미분할 수 있다. 적분(integration)은 그렇지 않다. 어떤 기법으로도 풀리지 않는 적분을 만나 보고, 자신이 그저 충분히 영리하지 못한 것인지 고민해 본 학생이 많을 것이다. 때로는 그 답이 이렇다. 누구도 그만큼 영리할 수는 없다. **공식이 존재하지 않기** 때문이다.

이 문제는 특수한 경우에 바로 그런 사실을 증명한다. 적분 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$는 넓이로서 분명히 존재한다. 그러나 이것을 (유리함수(rational function)) $\times e^x$ 꼴로 쓸 수는 없다. 이 꼴은 부분적분(integration by parts)으로 얻으리라 기대할 법한 형태이다. 무언가를 찾아내는 것이 아니라 무언가가 불가능함을 증명하는 것은 전혀 다르고, 매우 독특한 종류의 수학이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\int \mathrm{f}(x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x + C$이면 P와 Q는 어떤 등식을 만족해야 하는가? (우변을 미분해 보자.)

미분하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x\right) = \frac{\mathrm{P'Q} - \mathrm{PQ'} + \mathrm{PQ}}{\mathrm{Q}^2}e^x$이고, 이것이 $\mathrm{f}(x)e^x$와 같아야 한다. 따라서 문제 전체는 다음 다항식 항등식(polynomial identity)에 관한 것이다.

$$\mathrm{P'Q} - \mathrm{PQ'} + \mathrm{PQ} = \mathrm{f}\,\mathrm{Q}^2.$$

적분에 관한 질문이 다항식에 관한 질문, 즉 다항식의 인수와 차수(degree)에 관한 질문으

로 바뀌었다.

차근차근 풀기

1단계 **인수 $x+1$**

$\mathrm{f}(x)=\dfrac{x^3-2}{(x+1)^2}$일 때, 항등식의 양변에 $(x+1)^2$을 곱하면 다음을 얻는다.

$$(x+1)^2(\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q})=(x^3-2)\,\mathrm{Q}^2. \tag{†}$$

> **생각해 보기** (†)에 $x=-1$을 대입하자. 무엇이 성립해야 하는가?

$x=-1$에서 좌변은 0이다. 우변은 $(-1-2)\,\mathrm{Q}(-1)^2=-3\,\mathrm{Q}(-1)^2$이다. 따라서 $\mathrm{Q}(-1)=0$이고, 인수정리(factor theorem)에 의해 $x+1$은 Q의 인수이다. ■

2단계 **차수**

P의 차수를 p, Q의 차수를 q라 하자.

> **생각해 보기** $\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q}$에서 차수가 가장 높은 항은 무엇인가? 그 항이 다른 항들과 상쇄될 수 있는가?

PQ의 차수는 $p+q$이고, $\mathrm{P}'\mathrm{Q}$와 $\mathrm{P}\mathrm{Q}'$의 차수는 많아야 $p+q-1$이다. 따라서 (†)의 좌변의 차수는 정확히 $2+p+q$이고, 우변의 차수는 $3+2q$이다. 두 값을 같게 놓으면 $p=q+1$이다. ■

3단계 **P 구하기**

$\mathrm{Q}=x+1$이면 $\mathrm{Q}'=1$이고 P의 차수는 2이다. (†)를 $(x+1)^2$으로 나누면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}'(x+1)-\mathrm{P}+\mathrm{P}(x+1)=x^3-2, \qquad \text{즉,} \qquad (x+1)\mathrm{P}'+x\mathrm{P}=x^3-2.$$

$\mathrm{P}=\alpha x^2+\beta x+\gamma$로 놓아 보자. 좌변은

$$(x+1)(2\alpha x+\beta)+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x=\alpha x^3+(2\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+\beta+\gamma)x+\beta.$$

이를 x^3-2와 비교하면 $\alpha=1$, $2\alpha+\beta=0$이므로 $\beta=-2$, 그러면 $\gamma=0$이다. 상수항 $\beta=-2$도 모순 없이 맞는다. 따라서

$$\mathrm{P}(x)=x^2-2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,e^x\,dx=\frac{x^2-2x}{x+1}\,e^x+C. \qquad ■$$

(원한다면 미분하여 확인해 보자. 몫의 미분법(quotient rule)을 연습하기에 좋다.)

4단계 불가능성

이제 P와 Q가 공통인수(common factor)를 갖지 않으면서 $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx = \frac{P}{Q}e^x + C$라고 가정하자. 항등식은 다음과 같이 된다.

$$(x+1)\left(P'Q - PQ' + PQ\right) = Q^2.$$

1단계에서와 같이 $x = -1$을 대입하면 $Q(-1) = 0$임을 알 수 있다. $Q = (x+1)^k R$로 쓰자. 여기서 $k \geq 1$이고 $R(-1) \neq 0$이다($x+1$을 가능한 한 많이 인수로 뽑아낸다).

> **잠깐, 직접 해 보기** $Q = (x+1)^k R$을 대입하고, $(x+1)$을 가능한 한 많이 약분한 다음, $x = -1$을 대입하자. $P(-1)$에 대해 무엇을 알 수 있는가?

그러면 $Q' = k(x+1)^{k-1}R + (x+1)^k R'$이고,

$$P'Q - PQ' + PQ = (x+1)^{k-1}\Big[(x+1)\left(P'R - PR' + PR\right) - kPR\Big].$$

따라서 항등식은 $(x+1)^k\big[(x+1)(P'R - PR' + PR) - kPR\big] = (x+1)^{2k}R^2$이 된다. $(x+1)^k$으로 나누면

$$(x+1)\left(P'R - PR' + PR\right) - kPR = (x+1)^k R^2.$$

$k \geq 1$이므로 $x = -1$에서 이 식은 $-kP(-1)R(-1) = 0$을 준다. $k \neq 0$이고 $R(-1) \neq 0$이므로 $P(-1) = 0$이어야 한다. 그런데 그러면 $x+1$이 P와 Q를 모두 나누게 되어, 둘이 공통인수를 갖지 않는다는 가정에 모순이다. 따라서 그러한 P와 Q는 존재하지 않는다. ■

돌아보기

- **대수로 옮기기.** "이것을 이 꼴로 적분할 수 있는가?"라는 질문이 "이 다항식 항등식에 해가 있는가?"라는 질문이 되었다.
- **특별한 점에서 값 구하기.** $x = -1$을 대입하여 인수에 관한 정보를 세 번이나 끌어냈다.
- **기약분수를 이용한 귀류법.** Section 1.3의 $\sqrt{2}$에서와 마찬가지로, 분수가 기약분수(lowest terms)라고 가정한 뒤 공통인수를 찾아내어 모순을 얻었다. 이것이 귀류법(proof by contradiction)이다.

숨은 수학

극과 로그

소문항 (ii) 뒤에는 간단한 그림이 숨어 있다. 피적분함수(integrand) $\frac{e^x}{x+1}$은 $x=-1$에서 **단순극**(simple pole)을 가진다. 즉, 그 근처에서 $\frac{e^{-1}}{x+1}$처럼 행동한다. $\frac{1}{x+1}$을 적분하면 $\ln|x+1|$이 되므로, 원시함수(antiderivative)는 -1 근처에서 $e^{-1}\ln|x+1|$처럼 행동하여 로그적으로 $-\infty$로 발산해야 한다(그림 4.6.1). 그러나 유리함수와 e^x의 곱은 $(x+1)^{-k}$ 같은 거듭제곱처럼만 발산할 수 있고, 그러면 그 도함수는 $k+1\geq 2$차의 극을 가지므로 결코 단순극이 될 수 없다. 로그적인 행동은 유리함수로 만들어 낼 수 없다. 4단계의 대수적 논증은 이 관찰을 엄밀하게 만든 것이다. 반면 소문항 (i)에서는 피적분함수가 **이중극**(double pole)을 가지는데, 이는 단순극을 가진 함수의 도함수가 정확히 보여 주는 모습이므로 유리함수 꼴의 답이 가능했다.

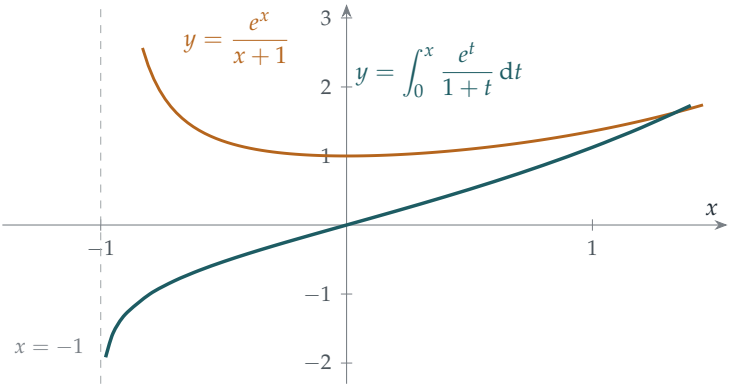


그림 4.6.1 피적분함수 $\frac{e^x}{x+1}$(호박색)은 $x=-1$에서 단순극을 가진다. 그 원시함수(청록색, 수치적으로 계산)는 문제없이 존재하지만, $x\to -1^+$일 때 $e^{-1}\ln(x+1)$처럼 **로그적으로** $-\infty$로 발산한다. 유리함수와 e^x의 곱은 결코 이렇게 행동할 수 없다.

리우빌과 리시 알고리즘

1830년대에 리우빌(Joseph Liouville)은 어떤 적분이 **초등함수**(elementary functions, 다항함수, 지수함수, 로그함수, 거듭제곱근, 삼각함수로부터 일반적인 연산을 통해 만든 함수)로 표현될 수 있는지에 관한 이론을 세웠다. 그의 결과 중 하나에 따르면, f와 g가 유리함수이고 g가 상수가 아닐 때 $\int \mathrm{f}(x)e^{\mathrm{g}(x)}\,dx$가 초등함수가 되는 것은 어떤 유리함수 R에 대해 이 적분이 $\mathrm{R}(x)e^{\mathrm{g}(x)}$(에 상수를 더한 것)와 같을 때뿐이다. (g에 대한 조건은 중요하다. $\mathrm{g}=0$이고 $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$이면 적분은 $\ln|x|$인데, 이는 초등함수이지만 유리함수는 아니다.) 따라서 유리함수 꼴을 배제하는 이 문제는 사실 $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$가 아예 초등함수가 아님을 증명한

다. 같은 정리의 여러 변형을 이용하면 $\int e^{-x^2}\,dx$와 $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$도 초등함수가 아님을 보일 수 있다. 1969년에 Robert Risch는 리우빌의 아이디어를 알고리즘으로 바꾸었는데, 이 알고리즘은 넓은 부류의 함수에 대해 초등함수인 적분이 존재하는지 판정하고, 존재한다면 그것을 찾아낸다. 이 알고리즘의 여러 변형이 컴퓨터 대수 시스템(computer algebra system) 안에서 작동하고 있다.

특수함수

어떤 적분이 초등함수 꼴을 갖지 않으면, 수학자들은 그 적분에 이름을 붙이고 새로운 함수로서 연구한다. Section 3.9에서 람베르트(Lambert) W 함수를 다룬 것과 마찬가지이다. 여기서 다룬 적분은 본질적으로 **지수적분**(exponential integral) $\mathrm{Ei}(x)$이다. 이 함수는 열의 흐름에 나타나며, **로그적분**(logarithmic integral) $\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$에도 나타난다. 로그적분은 x 이하의 소수(prime)의 개수에 대한 가장 좋은 간단한 근삿값이다(Section 1.2). $x < 0$이면 지수적분은 $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$이다. $x > 0$이면 이 적분은 $t = 0$에서의 무한히 치솟는 부분을 지나가므로, 그 주위의 작은 구간 $(-\varepsilon, \varepsilon)$을 잘라 내고 $\varepsilon \to 0$으로 보내어 $\mathrm{Ei}(x)$를 정의한다. 이것이 **코시 주요값**(Cauchy principal value)이다.

사고 기술

불가능성 증명하기

어떤 일이 불가능함을 보이려면, 그것이 가능하다고 가정하고, 그 가정을 정확한 대수로 옮긴 다음, 모순을 이끌어 낸다.

어려운 부분은 옮기는 과정이다. 즉, "할 수 있다"는 것이 무엇을 뜻하는지 정확한 명제로 나타내는 일이다. 여기서 그것은 "공통인수가 없으면서 이 항등식을 만족하는 다항식 P, Q가 존재한다"는 뜻이었다. 수학에서 가장 깊은 결과 가운데 상당수가 이런 종류의 불가능성 증명이다.

더 도전하기

1 **성공하는 두 경우.** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1} + C$이고 $\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{x-1}{x+1}e^x + C$임을 보여라.

2 **가우스 함수.** $\int e^{-x^2}\,dx = \mathrm{P}(x)e^{-x^2} + C$를 만족하는 다항식 P가 존재하지 않음을 보여라. (힌트: 미분한 다음 차수를 비교하라.)

3 **또 다른 극.** 소문항 (ii)의 논증을 변형하여 $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$가 $\frac{P(x)}{Q(x)}e^x + C$ 꼴이 아님을 보여라.

4 **언제 가능한가?** f가 다항식이고, 어떤 다항식 P에 대해 $\displaystyle\int \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,e^x\,dx = \frac{P(x)}{x+1}\,e^x + C$라고 하자. $(x+1)P' + xP = f$임을 보이고, 이 식과 그 도함수에 $x = -1$을 대입하여 $f(-1) + f'(-1) = 0$임을 보여라. 이 조건이 $f(x) = x^3 - 2$와 연습문제 1의 예들에서 성립하는지 확인하라. 심화이 조건이 충분조건이기도 함을 보일 수 있는가?

더 읽을거리

- **Brian Conrad, "Impossibility theorems for elementary integration"**. 리우빌의 정리를 예와 함께 설명하는, 무료로 볼 수 있는 강의 노트이다.
- **Elena Anne Marchisotto & Gholam-Ali Zakeri, "An invitation to integration in finite terms"**, *The College Mathematics Journal* 25 (1994). 리우빌 이론에 대한 친절한 입문이다.
- **Manuel Bronstein, *Symbolic Integration I*** (Springer). 컴퓨터 대수 시스템이 실제로 어떻게 적분하는지 다룬다. 고급 수준이다.

4.7 변분법

문제

STEP III 2014, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s3-q4`

도입

학교에서 다루는 최적화(optimisation) 문제는 대부분 가장 좋은 **수**를 묻는다. 예를 들어 넓이를 최대로 만드는 x의 값을 구하는 식이다. 반면 **변분법**(calculus of variations)은 가장 좋은 **함수**를 묻는다. 두 점 사이에서 구슬이 가장 빨리 미끄러져 내려가는 곡선은 무엇인가? 매달린 사슬은 어떤 모양이 되는가? 빛은 렌즈를 지날 때 어떤 경로를 따르는가? 어느 경우든 최적화할 양은 적분이고, 미지수는 함수 전체이다.

이 문제는 그중 가장 단순하면서도 흥미로운 예를 다룬다. 적분 $J = \int_0^1 ((y')^2 - a^2 y^2)\,\mathrm{d}x$에서는 서로 경쟁하는 두 항이 균형을 이룬다. 가파름은 값을 끌어올리고, 크기는 값을 끌어내린다. a가 작으면 언제나 가파름이 이겨서 모든 함수에 대해 $J \geq 0$이다. 그러나 균형이 뒤집히는 임계값 a가 존재하고, 이 문제는 그 값을 정확히 구한다. 바로 $a = \frac{\pi}{2}$이다. π가 어디에서 나오는지가 이 절의 이야기이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $I \geq 0$이 왜 자명하지 않은가? $y(1) = 0$을 만족하는 $y = 1 - x$를 넣어 보자.

I는 두 양수의 차이므로 부호가 어느 쪽이든 될 수 있다. $y = 1 - x$이면 $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$이고 $\int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$이므로 $I = \frac{2}{3} > 0$이다. 그러나 더 영리하게 고른 함수라면 $\int (y')^2$에 비해 $\int y^2$을 더 크게 만들 수도 있다. 이 문제의 요령은 I를 **제곱**의 적분으로 쓰는 것이며, 제곱의 적분은 당연히 음이 아니다. 이것은 적분에서의 "완전제곱식 만들기(completing the square)"이다.

차근차근 풀기

1단계 완전제곱식 만들기

I_1의 제곱을 전개하면

$$I_1 = \int_0^1 ((y')^2 + 2yy' \tan x + y^2 \tan^2 x)\,\mathrm{d}x,$$

이므로

$$I - I_1 = -\int_0^1 (y^2 + y^2 \tan^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x.$$

> **생각해 보기** 피적분함수(integrand) $y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x$는 어떤 함수의 도함수(exact derivative)이다. 무엇의 도함수인가?

곱의 미분법(product rule)에 따라 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 \tan x) = 2yy' \tan x + y^2 \sec^2 x$이다. 따라서

$$I - I_1 = -\Big[y^2 \tan x\Big]_0^1 = -(y(1)^2 \tan 1 - y(0)^2 \tan 0) = 0,$$

이다. $y(1) = 0$이고 $\tan 0 = 0$이기 때문이다. 그러므로 $I = I_1 \geq 0$이다. 제곱의 적분이기 때문이다. ■

2단계 $I = 0$은 언제인가?

> **생각해 보기** 음이 아닌 연속함수의 적분이 0이면 그 함수에 대해 무엇을 말할 수 있는가? 그렇다면 $I = 0$일 때 y는 어떤 방정식을 만족해야 하는가?

적분이 0인 음이 아닌 연속함수는 항등적으로 0이어야 한다(어느 한 점에서 양수라면 그 점 근처의 작은 구간에서도 양수가 되어 적분에 양의 값을 보태기 때문이다). 따라서 $I = 0$이면 $[0,1]$에서 $y' + y\tan x = 0$이어야 한다. 양변에 $\sec x$를 곱하면 이 식은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y'\cos x + y\sin x}{\cos^2 x} = 0$을 뜻하므로 $y = C\cos x$이다. 그러면 $y(1) = C\cos 1 = 0$이고, $\cos 1 \neq 0$이므로 $C = 0$이다. 따라서 $I = 0$인 것은 $y \equiv 0$일 때뿐이다. ■

3단계 일반적인 경우

> **생각해 보기** $\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$로 1단계를 되풀이해 보자. 남는 항들이 어떤 함수의 도함수가 되려면 b는 무엇이어야 하는가?

이 적분을 K라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} J - K &= -\int_0^1 (a^2y^2 + a^2y^2\tan^2 bx + 2ayy'\tan bx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 (a^2y^2\sec^2 bx + 2ayy'\tan bx)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

한편 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ay^2\tan bx) = 2ayy'\tan bx + aby^2\sec^2 bx$이다. 이 둘이 정확히 일치하는 것은 $ab = a^2$, 즉 $b = a$일 때이다. 그러면

$$J - K = -\Big[ay^2\tan ax\Big]_0^1 = -a\,y(1)^2\tan a = 0,$$

이므로 $J = K \geq 0$이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 이 논증은 어디에서 무너질 수 있는가? (구간 $0 \leq x \leq 1$에서 $\tan ax$를 살펴보라.)

이 논증이 성립하려면 $\tan ax$가 $[0,1]$의 모든 x에서 정의되고 연속이어야 한다. 그렇지 않으면 K가 존재하지 않을 수도 있고 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 적용할 수 없다. x가 $[0,1]$을 움직이면 ax는 $[0,a]$를 움직이고, tan가 그 구간에서 연속인 것은 정확히 $a < \frac{\pi}{2}$일 때이다. 따라서 이 증명은

$$a < k = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

일 때 유효하다.

4단계 임계 경우

> **생각해 보기** $a = \frac{\pi}{2}$이면 증명이 실패한다. 2단계에서 $I = 0$을 만드는 함수는 $y' + y\tan x = 0$을 만족해야 했다. 이제 이에 대응하는 방정식은 무엇이고, 그 해는 무엇인가?

대응하는 방정식은 $y' + ay\tan ax = 0$이고, 그 해는 $y = C\cos ax$이다. $a = \frac{\pi}{2}$이면 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$는 $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$을 만족한다. 직접 확인하면

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\frac{\pi x}{2} - \cos^2\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos\pi x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

따라서 임계값에서는 0이 아닌 함수가 J를 정확히 0으로 만든다.

돌아보기

- **적분에서 완전제곱식 만들기.** 어떤 함수의 도함수를 더하고 빼서 J를 제곱의 적분과 사라지는 경계항의 합으로 바꾸었다.
- **도구가 실패하는 곳을 확인하라.** 이 방법은 $\tan ax$가 구간에서 유한한 동안에만 통했다. 방법이 실패한 지점 $a = \frac{\pi}{2}$가 바로 임계값이었다.
- **극단적인 경우는 미분방정식을 푼다.** $J = 0$을 주는 함수는 1계 방정식 $y' + ay \tan ax = 0$에서 나왔고, 이 함수는 $y'' + a^2 y = 0$도 만족한다.

숨은 수학

최속강하선과 한 분야의 탄생

1696년 요한 베르누이(Johann Bernoulli)는 유럽의 수학자들에게 도전 과제를 냈다. 구슬이 한 점에서 다른 점으로 가장 짧은 시간에 미끄러져 내려가는 곡선을 찾으라는 것이었다. 뉴턴(Newton)(익명으로, 하룻밤 만에 풀었다. 베르누이는 "발톱을 보고 사자를 알아보았다"고 말했다), 라이프니츠(Leibniz), 로피탈(l'Hôpital), 야코프 베르누이(Jakob Bernoulli)가 해답을 보내왔다. 답은 사이클로이드(cycloid)이다. 1750년대에 오일러(Euler)와 젊은 조제프루이 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange)는 이러한 개별적인 요령을 일반적인 방법으로 바꾸어 놓았다. y가 $\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$를 정류(stationary)하게 만들면, y는 **오일러–라그랑주 방정식**(Euler–Lagrange equation)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

을 만족한다. 우리의 J에서는 $F = (y')^2 - a^2 y^2$이고, 오일러–라그랑주 방정식은 $y'' + a^2 y = 0$, 즉 단진동(simple harmonic motion)이다.

왜 $\pi/2$인가?

$a < \frac{\pi}{2}$이면 J의 최솟값은 0이고, 이 값은 $y \equiv 0$일 때만 얻어진다. $a = \frac{\pi}{2}$에서도 최솟값은 여전히 0이지만 이를 달성하는 두 번째 함수가 생긴다. $a > \frac{\pi}{2}$이면 같은 함수 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$가

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} < 0,$$

을 주고, y를 크게 확대하면 J를 원하는 만큼 작은 음수로 만들 수 있다. 즉 최솟값이 아예 없다(그림 4.7.1). 임계값은 $y'' + a^2 y = 0$이 경계 조건(boundary conditions)($y(1) = 0$, 그리고 자유로운 끝에서의 "자연" 조건 $y'(0) = 0$)을 만족하는 0이 아닌 해를 가지는 첫 번째

a이다. 이것은 **고유값 문제**(eigenvalue problem)이고, $a^2 = \frac{\pi^2}{4}$는 그 가장 작은 고유값이다. Section 3.7와 비교해 보자. 그곳에서는 길이 π인 구간의 양 끝에서 함수를 고정하여 임계값 1을 얻었다. 여기서는 구간의 길이가 1이고 한쪽 끝만 고정되어 있는데, 이는 길이 2인 구간의 절반과 같으므로 임계값 a는 $\frac{\pi}{2}$이다.

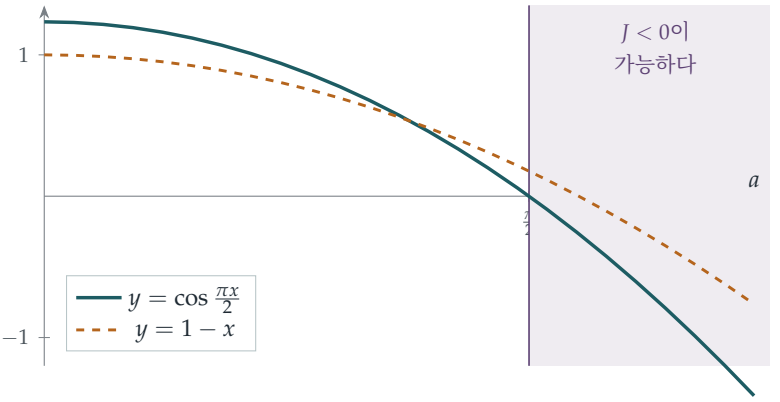


그림 4.7.1 $y(1) = 0$을 만족하는 두 시험 함수에 대하여 a에 따른 J의 값. $y = 1 - x$이면 $J = 1 - \frac{a^2}{3}$은 $a > \sqrt{3}$일 때에만 음수가 된다. $y = \cos\frac{\pi x}{2}$이면 $J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2}$는 $a > \frac{\pi}{2}$가 되자마자 음수가 되며, 이보다 나은 함수는 없다. $a < \frac{\pi}{2}$이면 모든 y에 대해 $J \geq 0$이다.

물리학과 최소 작용의 원리

변분법은 자연 그 자체를 기술한다는 것이 밝혀졌다. 18세기와 19세기에 걸쳐 운동 법칙을 다음과 같이 서술할 수 있다는 사실이 드러났다. 역학계는 **작용**(action)이라 불리는 적분을 정류하게 만드는 방식으로 움직인다. 마찬가지로 빛은 시간이 가장 적게 걸리는 경로를 따라 진행하며(페르마(Fermat)의 원리), 이것으로 굴절(refraction)이 설명된다. 20세기에는 리처드 파인만(Richard Feynman)의 "경로 합(sum over paths)"을 통해 같은 아이디어가 양자역학(quantum mechanics)의 토대가 되었다. 이 문제의 이차 적분은 그 가장 단순한 예이며, 이 적분이 이끄는 고유값 문제는 Section 8.6에서 양자 진동자의 에너지 준위로 다시 등장한다.

사고 기술

완전제곱식을 만들고, 경계에 주의하라

이차식이 음이 아님을 보이려면, 그것을 제곱과 다룰 수 있는 무언가의 합으로 써라. 적분에서는 그 "무언가"가 흔히 어떤 함수의 도함수이며, 이를 적분하면 경계항이 된다.

그리고 그 방법이 어디에서 통하지 않게 되는지 언제나 물어라. 여기서 실패한 지점은 우연이 아니었다. 그것은 이 문제에서 가장 중요한 수였다.

더 도전하기

1 **임계값 너머.** $a > \frac{\pi}{2}$이면 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$가 $J < 0$을 줌을 보여라.

2 **오일러–라그랑주 방정식.** 심화 $y(1) = 0$을 만족하는 함수들 가운데 y가 J를 최소로 만든다고 하자. $\eta(1) = 0$을 만족하는 임의의 함수 η와 임의의 수 ε에 대하여 $J(y + \varepsilon\eta) \geq J(y)$이다. $J(y + \varepsilon\eta)$를 ε의 거듭제곱으로 전개하여 $\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta)\,\mathrm{d}x = 0$임을 유도하여라. 부분적분(integration by parts)을 이용하여 $y'' + a^2 y = 0$이고 $y'(0) = 0$임을 보여라(y가 충분히 매끄럽다고 가정한다).

3 **더 긴 구간.** 치환(substitution)을 이용하여, $y(L) = 0$일 때 모든 y에 대해 $\int_0^L ((y')^2 - a^2 y^2)\,\mathrm{d}x \geq 0$인 것은 정확히 $a \leq \frac{\pi}{2L}$일 때이고, 0이 아닌 y가 등호를 주는 것은 $a = \frac{\pi}{2L}$일 때뿐임을 보여라.

4 **사이클로이드.** 최속강하선(brachistochrone) 문제를 찾아보고 사이클로이드의 매개변수 방정식을 구하여라. 거꾸로 뒤집힌 사이클로이드 위의 어느 곳에서든 정지 상태로 놓은 구슬이 같은 시간에 바닥에 도달함을 보여라(**등시곡선**(tautochrone) 성질로, 1659년 하위헌스(Huygens)가 발견하였다).

더 읽을거리

- **Paul Nahin, *When Least Is Best*** (Princeton University Press). 최속강하선을 포함한 최적화의 역사와 수학을 학생들을 위해 쓴 책이다.
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics,*** Volume II, Chapter 19 ("The principle of least action"). 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Bruce van Brunt, *The Calculus of Variations*** (Springer). 학부 교재로, 앞부분의 장들은 A 레벨(A level, 영국의 대학 입학 자격 시험) 수준의 미적분만 있으면 읽을 수 있다.

4.8 공 모양 빵 자르기

문제

STEP I 2001, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/01-s1-q6`

도입

공 모양의 빵을 같은 두께로 썬다고 하자. 가운데 근처의 조각은 둘레에 얇은 껍질 띠가 둘린 두툼한 원판이다. 양 끝 근처의 조각은 거의 껍질뿐인 듯한 작은 뚜껑 모양이다. 당연히 끝 조각에 껍질이 더 많지 않을까?

그렇지 않다. 가운데에 가깝게 자르든 끝에 가깝게 자르든, 모든 조각의 껍질 넓이는 정확히 같다. 가운데의 얇은 띠는 둘레는 길지만 거의 수직으로 서 있고, 끝의 뚜껑은 둘레는 짧지만 가파르게 기울어 있어서 껍질이 더 넓은 폭에 걸쳐 펼쳐진다. 이 두 효과가 정확히 상쇄된다. 이것은 아르키메데스(Archimedes)의 정리로, 그는 이 정리를 무척 아껴서 자신의 무덤에 원기둥 안에 든 구를 새겨 달라고 부탁했다. 문제의 둘째 부분은 조금 더 가벼운 규정이야기이지만, 같은 계산에 바탕을 두고 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 반지름이 a인 구는 어떤 곡선을 x축을 중심으로 회전시켜 얻는가? 그 곡선에 대해 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$는 무엇인가?

반원 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$를 회전시키면 구가 된다. 그러면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$이다. 이것을 기억해 두자. 기울기는 양 끝($x \to \pm a$) 근처에서 가파르고 가운데에서는 완만한데, 이것이 바로 도입에서 설명한 효과이다.

차근차근 풀기

1단계 껍질 공식이 간단해진다

? **생각해 보기** 반원에 대해 $y\sqrt{1+(y')^2}$를 계산해 보아라. 놀라운 일이 일어난다.

$y' = -x/y$이므로

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2+x^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2},$$

따라서 $y\sqrt{1+(y')^2} = y \cdot \frac{a}{y} = a$로 상수이다! 그러므로 임의의 두 평면 $x = x_1$과 $x = x_2$ 사이의 껍질 넓이, 곧 겉넓이(surface area)는

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} a \, \mathrm{d}x = 2\pi a(x_2 - x_1).$$

이 값은 두 평면이 어디에 있는지와 상관없이 두 평면 사이의 거리에만 의존한다.

2단계 껍질은 조각 수에 비례한다

빵을 두께 h인 조각으로 자르면 각 조각의 껍질 넓이는 $2\pi ah$로 모두 같다. 한쪽 끝에서든, 양쪽 끝에서든, 어디에서든 몇 조각을 먹으면, 남은 껍질은 $2\pi ah$에 남은 조각의 수를 곱한 것이다. ■

3단계 바삭한 빵의 조건

문제의 힌트는 한쪽 끝에서부터 조각을 먹었을 때 남는 빵을 설명하므로, 그대로 따라가 보자. 조각을 끝 $x = a$에서부터 먹어서 남은 부분이 $x = -a$부터 $x = -a + t$까지라고 하자. "조각을 몇 개 먹든"에 대한 규정은 빵을 아무리 잘게 썰어도 성립해야 하므로, t가 0과 $2a$ 사이의 어떤 값이든 가질 수 있다고 본다. (4단계에서는 양쪽 끝에서 조각을 먹는 경우를 살펴본다.)

? **생각해 보기** 주어진 공식을 써서 V를 계산하여라. 치환 $s = x + a$를 쓰면 계산이 더 깔끔해질 것이다.

$s = x + a$로 두면 $y^2 = a^2 - x^2 = a^2 - (s-a)^2 = 2as - s^2$이므로

$$V = \pi \int_0^t (2as - s^2)\, \mathrm{d}s = \pi\left(at^2 - \frac{t^3}{3}\right), \qquad A = 2\pi at,$$

이고

$$\frac{V}{A} = \frac{at^2 - t^3/3}{2at} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}.$$

잠깐, 직접 해 보기 규정은 조각을 몇 개 먹은 뒤에도 $V/A < 1$이기를, 곧 $0 < t \le 2a$인 모든 t에 대해 이것이 성립하기를 요구한다. 이 범위에서 $\frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}$의 최댓값은 무엇인가?

t에 대해 미분하면 $t = \frac{3a}{2}$에서 $\frac{1}{2} - \frac{t}{3a} = 0$이고, 이 값은 범위 $(0, 2a]$ 안에 있으며 최댓값을 준다(이 식은 t에 대해 위로 볼록한 포물선이다). 최댓값은

$$\frac{3a}{4} - \frac{9a^2/4}{6a} = \frac{3a}{4} - \frac{3a}{8} = \frac{3a}{8}.$$

바삭한 빵이 되려면 모든 t에 대해, 특히 $t = \frac{3a}{2}$에서 $V/A < 1$이어야 하므로 $\frac{3a}{8} < 1$, 곧 $a < \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$미터이다. ■

4단계 문제를 넘어서: $2\frac{2}{3}$이면 충분한가?

생각해 보기 문제는 반지름이 반드시 만족해야 하는 조건만 묻는다. $a < \frac{8}{3}$이면 충분하기도 한가? 양쪽 끝에서 조각을 먹으면 어떻게 될까?

충분하지 않다. 양쪽 끝에서 먹으면 가운데에 띠가 남는데, 가운데 띠는 끝의 뚜껑보다 껍질에 비해 더 많은 빵을 담고 있다. 띠 $-\frac{w}{2} \le x \le \frac{w}{2}$에 대해

$$V = \pi \int_{-w/2}^{w/2} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(a^2 w - \frac{w^3}{12}\right), \qquad A = 2\pi a w, \qquad \frac{V}{A} = \frac{a}{2} - \frac{w^2}{24a},$$

이고, 얇은 띠에서는 이 값이 $\frac{a}{2}$에 가깝다. 예를 들어 반지름이 $2\frac{2}{3}$보다 넉넉히 작은 2.4미터인 빵을 네 조각으로 썰어 양 끝 두 조각을 먹으면, $w = a$인 띠가 남고 $\frac{V}{A} = \frac{11a}{24} = 1.1$이다. 사실 어떤 조각들의 모임에 대해서도 $\frac{V}{A} < \frac{a}{2}$이므로, 조각을 어디에서든 먹을 수 있다면 빵이 바삭할 필요충분조건은 $a \le 2$미터이다. 문제의 $2\frac{2}{3}$은 올바른 필요조건이지만, 규정은 문제가 드러내는 것보다 더 엄격하다.

돌아보기

- **적분하기 전에 간단히 하라.** 껍질의 피적분함수는 복잡해 보였지만 알고 보니 상수였다. 피적분함수는 덤벼들기 전에 항상 먼저 간단히 하라.
- **"임의의"를 주의 깊게 읽어라.** 조건은 몇 개의 조각을 먹은 뒤에도 성립해야 했으므로, 빵 전체에 대한 값($\frac{a}{3}$)이 아니라 V/A의 최댓값이 필요했다.
- **간단한 계산에서 나온 놀라운 답.** 껍질이 같다는 성질은 믿기 어렵게 들리지만, 계산은 두 줄이면 끝난다.

숨은 수학

아르키메데스의 모자 상자 정리

아르키메데스는 *On the Sphere and Cylinder*(구와 원기둥에 대하여)에서, 평행한 두 평면 사이에 있는 구의 띠의 넓이가 그 두 평면이 구를 감싸는 원기둥에서 잘라 내는 띠의 넓이와 같음을 증명하였다(그림 4.8.1). 우리의 계산이 바로 이 정리이다. 반지름이 a인 원기둥은 단위 길이당 껍질 넓이가 $2\pi a$이고, 구도 마찬가지이다. 구 전체를 생각하면, 구의 겉넓이는 원기둥의 옆넓이 $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$과 같다. 아르키메데스는 이 결과를, 구의 부피가 원기둥 부피의 3분의 2라는 사실과 함께 자신의 가장 훌륭한 업적으로 여겼다. 기원전 75년에 시라쿠사를 방문한 키케로(Cicero)는 무덤에 새겨진 구와 원기둥을 찾아서, 수풀에 뒤덮인 그의 무덤을 발견하였다.

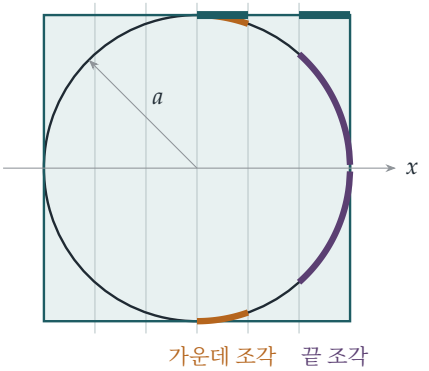


그림 4.8.1 감싸는 원기둥 안에 놓인 반지름 a인 공 모양 빵의 단면으로, 같은 두께의 조각으로 잘려 있다. 가운데 조각(호박색)은 축에서 멀리 떨어진 짧고 거의 수평인 껍질 호를 가지고, 끝 조각(자두색)은 축에 가까운 길고 가파른 호를 가진다. x축을 중심으로 회전시키면, 두 조각 모두 원기둥의 대응하는 띠(청록색)와 정확히 같은 껍질 넓이, 곧 두께에 $2\pi a$를 곱한 값을 준다.

지구의 지도

모자 상자 정리를 이용하면 넓이를 보존하는 지구 지도를 그릴 수 있다. 지구본의 각 점을 감싸는 원기둥 위로 수평 방향 바깥쪽으로 투영한 다음 원기둥을 펼치면 된다. 구의 띠는 넓이가 같은 원기둥의 띠로 옮겨지고, 어떤 영역에 대해서도 마찬가지이다. 이것이 **람베르트**(*Lambert*) **원통 정적 도법**(1772)이다. 이 도법은 극 근처에서 모양을 심하게 왜곡하지만 넓이는 정직하게 나타낸다. 이는 그린란드를 아프리카만큼 크게 보이게 하는(실제로는 약 14분의 1 크기이다) 익숙한 메르카토르(Mercator) 도법과 다른 점이다. 가우스(Gauss)의 유명한 정리인 **빼어난 정리**(*Theorema Egregium*)(1827)는 구의 어떤 지도도 넓이와 모양을

동시에 보존할 수 없음을 보여 준다. 지구의 모든 평면 지도는 무언가를 왜곡할 수밖에 없다.

구 위의 무작위 점

실용적인 결과도 하나 있다. 구 위에서 점을 균등하게 무작위로 고르려고 위도와 경도를 균등하게 고르면, 점들이 극 근처에 몰리게 된다. 모자 상자 정리는 올바른 방법을 알려 준다. 높이 x를 $-a$와 a 사이에서 균등하게, 경도를 0과 2π 사이에서 균등하게 고르면 된다. 넓이가 높이에 비례하므로 이것은 정확히 균등 분포이다. 물리학과 컴퓨터 그래픽스의 컴퓨터 시뮬레이션에서 이 방법을 쓴다. (놀랍게도 이 방법은 3차원에서만 통한다. 4차원 이상의 구에 대해서는 이에 대응하는 명제가 거짓이다.)

사고 기술

숨은 단순함을 찾아라

계산 결과가 상수처럼 뜻밖에 단순하게 나오면, 멈추고 왜 그런지 물어보아라. 대개 기하학적인 이유가 있으며, 그 이유를 찾는 데에 진짜 이해가 있다.

여기서 피적분함수 $y\sqrt{1+(y')^2}$가 상수였던 것은 구에서는 가파름과 축으로부터의 거리가 서로를 정확히 보상하기 때문이다. 그것이 바로 아르키메데스의 정리이다.

더 도전하기

1 **빵 전체.** 자르지 않은 빵 전체에 대해 $V/A = \frac{a}{3}$임을 보여라. 문제의 조건이 $\frac{a}{3} < 1$보다 만족하기 어려운 이유는 무엇인가?

2 **열대 지방.** 지구 표면 가운데 남위 23.4°와 북위 23.4° 사이에 있는 부분은 몇 분의 몇인가? (지구를 구로 생각하여라. 넓이가 높이에 비례하므로 $\sin 23.4°$만 있으면 된다.)

3 **다른 모양.** 포물면 모양의 빵($y = \sqrt{x}$를 x축을 중심으로 회전)에서는 조각당 껍질이 상수가 아님을 보여라. 어떤 곡선 $y(x)$에 대해 $y\sqrt{1+(y')^2}$가 상수인가? (미분방정식(differential equation)을 풀어라.)

4 **부피.** 부피 공식을 이용하여, 아르키메데스가 밝혔듯이 구의 부피가 감싸는 원기둥 부피의 3분의 2임을 보여라.

더 읽을거리

- **Sherman Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?*** (Mathematical Association of America). 아르키메데스의 수학을 현대 독자를 위해 설명한다.
- **Timothy Gowers, *Mathematics: A Very Short Introduction*** (Oxford University Press). 기하학을 다룬 장에서 곡면의 기하학을 소개한다.
- **John Snyder, *Flattening the Earth*** (University of Chicago Press). 2천 년에 걸친 지도 투영법의 역사.

4.9 홀디치의 정리

문제

STEP III 2011, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/11-s3-q5`

도입

아무 타원형(oval) 곡선이나 하나 잡자. 볼록(convex)하기만 하면 어떤 모양이라도 좋다. 길이가 일정한 막대를 두 끝이 모두 곡선 위에 놓이도록 하면서 곡선 안쪽을 따라 한 바퀴 미끄러뜨린다. 막대 위에 점을 하나 찍어 막대를 길이 a와 b인 두 부분으로 나눈다. 막대가 한 바퀴 도는 동안 이 점은 더 작은 타원형 곡선을 그린다. 두 곡선 사이에 있는 고리 모양 영역의 넓이는 얼마인가?

놀랍게도 답은 **원래 곡선의 모양과 관계없이** πab이다. 길고 가느다란 타원형이든, 달걀 모양이든, 모서리가 둥근 삼각형이든 고리의 넓이는 언제나 같고, 오직 점이 막대 위 어디에 있는지에만 달려 있다. 이 결과는 1858년 케임브리지 곤빌 앤드 키즈 칼리지(Gonville and Caius College, Cambridge)의 펠로였던 Hamnet Holditch 목사가 발견했으며, 초등 기하학에서 가장 놀라운 정리 가운데 하나이다. 이 문제는 넓이를 구하는 공식 하나만으로 이 정리를 증명한다.

시작하기 전에

생각해 보기 가장 간단한 경우에 정리를 확인해 보자. $\mathcal{C}$가 반지름이 R인 원이라면 P는 어떤 곡선을 그리며, 고리의 넓이는 얼마인가?

대칭성에 의해 P는 중심이 같고 반지름이 어떤 값 r인 원을 그린다. 막대 AB는 P를 지나는 큰 원의 현(chord)이고, **두 현의 정리**(intersecting chords theorem), 곧 "방멱 정리"(power of a point)에 따르면 P를 지나는 모든 현에 대해 $PA \times PB = R^2 - r^2$이다. 따라서 $ab = R^2 - r^2$이고, 고리의 넓이는 $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$이다. 이 정리는 원뿐 아니라 모든

볼록 곡선에 대해 이것이 성립한다고 말한다.

차근차근 풀기

1단계 좌표로 나타낸 넓이

생각해 보기 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이고 이들이 모두 t의 함수일 때 $x\dot{y} - y\dot{x}$를 계산하라. 여기서 점은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$를 나타낸다.

$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$이고 $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$이다. 그러면

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) = r^2\dot{\theta}.$$

따라서 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int r^2\dot{\theta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t$이다. ■

이 공식에는 극좌표(polar coordinates)가 필요 없고, 매개변수(parameter)의 함수로 나타낸 직교좌표(cartesian coordinates) 위치만 있으면 된다. 점이 O를 둘러싼 폐곡선(closed curve)을 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돌 때, 이 공식은 곡선 내부의 넓이를 준다.

2단계 막대의 양 끝

막대는 A에서 B로 향하는 방향 $(\cos t, \sin t)$를 가리키고, P는 A에서 거리 a, B에서 거리 b만큼 떨어져 있다. 따라서

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$

3단계 OA가 쓸고 지나가는 넓이

생각해 보기 A에 $(*)$를 적용하라. $x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A$를 전개하고 a의 거듭제곱에 따라 항을 정리하라.

$x_A = x - a\cos t$, $y_A = y - a\sin t$이면 $\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$이고 $\dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t$이다. 전개하면

$$\begin{aligned} x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A &= (x - a\cos t)(\dot{y} - a\cos t) - (y - a\sin t)(\dot{x} + a\sin t) \\ &= (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) - a[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t]. \end{aligned}$$

0부터 2π까지 적분하고 반으로 나누면, 첫째 항은 $[P]$, 둘째 항은 $\frac{1}{2}a^2 \cdot 2\pi = \pi a^2$, 셋째 항은 $-af$가 된다. 따라서

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af. \qquad ■$$

잠깐, 직접 해 보기 이제 $[B]$를 구하라. (**힌트:** A의 식에서 a를 무엇으로 바꾸면 B가 되는가?)

$B = (x + b\cos t, y + b\sin t)$는 A의 식에서 a를 $-b$로 바꾼 것이다. 따라서

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

4단계 f 소거하기

생각해 보기 A와 B는 모두 같은 곡선 $\mathcal{C}$를 한 바퀴 돈다. 이로부터 $[A]$와 $[B]$에 대해 무엇을 알 수 있는가?

t가 0부터 2π까지 변할 때 A와 B는 각각 $\mathcal{C}$를 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돌므로 $[A] = [B] =$ 넓이$(\mathcal{C})$이다. 두 식을 같다고 놓으면

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad \Longrightarrow \quad f(a+b) = \pi(a^2 - b^2) \quad \Longrightarrow \quad f = \pi(a-b).$$

P는 $\mathcal{D}$를 한 바퀴 돌므로 $[P] =$ 넓이$(\mathcal{D})$이고,

$$\text{넓이}(\mathcal{C}) - \text{넓이}(\mathcal{D}) = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab. \qquad \blacksquare$$

곡선의 모양에 따라 달라지는 수수께끼 같은 양 f는 끝내 계산하지 않았다. 소거되었을 뿐이다.

돌아보기

- **문제에 알맞은 공식.** 넓이 공식 $(*)$에는 매개변수의 함수로 나타낸 좌표만 필요했는데, 막대의 움직임이 바로 그렇게 기술된다.
- **식은 둘, 미지수는 하나.** f를 계산할 수는 없었지만 f가 들어 있는 식이 두 개 있었으므로, 연립방정식(simultaneous equations)을 풀 때처럼 f를 소거했다.
- **특수한 경우부터 확인하라.** 원의 경우가 시작하기 전에 이미 답 πab를 알려 주었고, 무엇을 목표로 해야 하는지 보여 주었다.

숨은 수학

그린 정리와 구적기

공식 $(*)$는 **그린 정리**(Green's theorem)의 특수한 경우이다. 그린 정리는 폐곡선을 따라 도는 적분을 그 곡선 내부 영역에서의 적분과 연결한다. 넓이에 관한 형태로 쓰면, 곡선이 둘러싼 넓이는 $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$이며, 이 적분은 경계를 따라 한 바퀴 도는 것만으로 계산할 수 있다. 공학자들은 이 사실을 **구적기**(planimeter)에 활용했다. 구적기는 19세기에 발명된 기계 장치로(그중 가장 성공한 것은 Jakob Amsler가 1854년에 설계한 것이다), 지도나 도면 위 도형의 경계를 바늘로 따라가면 바퀴가 둘러싸인 넓이를 기록한다. 구적기는 토지 면적을 재거나, 지압 선도(indicator diagram)로부터 증기 기관이 한 일을 계산하는 등 여러 용도로 쓰이다가 디지털 방식으로 대체되었다. Holditch의 정리는 이와 밀접한 관련이 있다. 막대는 구적기의 팔과 같다.

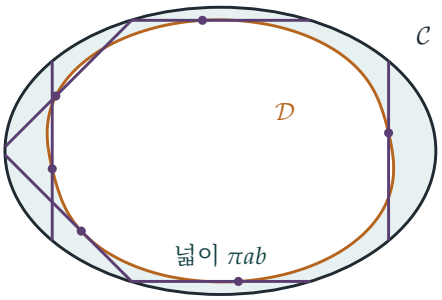


그림 4.9.1 반축(semi-axis)의 길이가 3과 2인 타원(ellipse)과, $a = 1, b = 1.5$인 길이 2.5의 막대에 대한 Holditch의 정리. 막대의 몇 가지 위치(자주색)와 점 P를 표시했다. P가 그리는 곡선 $\mathcal{D}$(주황색)는 수치적으로 계산한 것이며, 두 곡선 사이의 색칠한 고리의 넓이는 정리가 예측한 대로 정확히 $4.7124\ldots = 1.5\pi$이다.

숨은 조건

Holditch는 조건에 크게 신경 쓰지 않고 정리를 진술했지만, 이 정리에는 몇 가지 조건이 필요하다. 막대가 두 끝을 곡선 위에 둔 채로 끝까지 한 바퀴 돌 수 있어야 하고, 그려지는 곡선 $\mathcal{D}$는 한 번만 그려지는 단순 폐곡선(simple closed curve)이어야 한다. 막대가 $\mathcal{C}$의 폭에 비해 너무 길면 $\mathcal{D}$가 스스로 교차할 수 있고, 그러면 공식이 주는 "넓이"는 어떤 영역을 두 번 세거나 음의 부호로 센다. 이 문제는 $\mathcal{D}$가 O를 포함하는 볼록 곡선이라고 가정함으로써 이런 어려움을 피한다. 정리가 정확히 언제 성립하는지 밝히는 일은 아름다운 아이디어를 어떻게 엄밀하게 다듬어야 하는지 보여 주는 좋은 예이며, 이는 3장의 주제이기도 하다.

사고 기술

> **계산할 수 없는 것은 소거하라**
>
> 어떤 양이 너무 복잡해서 계산할 수 없다면, 그 양이 들어 있는 서로 다른 두 식을 찾아 그것을 소거하라.
>
> 여기서 f는 곡선의 세세한 모양에 모두 의존했지만, $[A]$와 $[B]$의 식에 모두 나타났고, $[A] = [B]$라는 사실이 그것을 없애 주었다. 답 πab가 곡선과 무관할 수 있었던 것은 오직 곡선에 의존하는 부분이 상쇄되었기 때문이다.

더 도전하기

1 **타원의 넓이.** $x = p\cos t, y = q\sin t$로 놓고 $(*)$를 이용하여 반축의 길이가 p와 q인 타원의 넓이가 πpq임을 보여라.

2 **원의 경우.** 두 현의 정리를 증명하라. 곧, 원의 두 현이 P에서 만나면 각 현의 두 선분의 길이의 곱이 서로 같음을 보여라. 이로부터 원에 대한 Holditch의 정리를 이끌어 내라.

3 **중점.** $f = \pi(a-b)$이므로 P가 막대의 중점일 때 $f = 0$임을 보여라. 이때 고리의 넓이를 막대의 길이 L로 나타내면 얼마인가?

4 **삼각형.** 심화 꼭짓점이 $(0,0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2)인 삼각형의 경계를 따라 돌면서 $(*)$를 이용하여 그 넓이를 구하고, 넓이가 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$임을 보여라. 이것이 임의의 다각형의 넓이를 구하는 "신발끈 공식"(shoelace formula)의 출발점이다.

더 읽을거리

- **Mark Levi, *The Mathematical Mechanic*** (Princeton University Press). 막대, 바퀴, 용수철을 이용한 물리적 추론으로 수학적 결과를 증명하는 책으로, 이 절과 같은 정신을 담고 있다.
- **H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That*** (Norton). 그린 정리를 포함하여 벡터 미적분학(vector calculus)을 편안하게 소개하는 입문서이다.
- **Hamnet Holditch, "Geometrical theorem"**, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858). 원래의 짧은 글로, 숨은 조건은 전혀 언급하지 않은 단 한 문단짜리이다.

우리가 배운 것

이 장은 적분(integral)이란 정확히 무엇인지, 적분으로 무엇을 증명할 수 있는지, 그리고 적분에 공식이 없을 때는 어떻게 해야 하는지를 묻는 데서 시작했다. 이 장의 아홉 문제가 이 질문들에 어떻게 답했는지 정리해 보자.

1. 적분이란 무엇이고, 어떤 함수가 적분을 가지는가?

Section 4.1에서는 적분을 얇은 직사각형들로 만든 하합(lower sum)과 상합(upper sum)의 공통 극한으로 정의하고, 이 정의만으로 $\int_0^a x^5\,dx$를 계산했다. 연속한 수의 곱에 대한 망원합(telescoping sum), 양쪽에서의 부등식 평가, 그리고 조임 정리(squeeze)까지 꽤 많은 작업이 필요했다. 이 수고가 바로 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)가 얼마나 많은 것을 거저 주는지를 보여 주는 척도이다.

정의는 또한 모든 함수가 적분가능(integrable)한 것은 아니라는 사실도 알려 주었다. 유리수에서 1, 무리수에서 0인 디리클레(Dirichlet) 함수는 상합이 모두 1이고 하합이 모두 0이다. 이와 같은 문제들이 르베그(Lebesgue)를 더 강력한 적분 이론으로 이끌었으며, 이 이론은 나중에 대학에서 만나게 될 것이다.

2. 적분으로 무엇을 증명할 수 있는가?

넓이보다 훨씬 많은 것을 증명할 수 있다.

- **수 사이의 부등식.** 양의 함수의 적분이 $\frac{22}{7}-\pi$와 같으므로 $\frac{22}{7}>\pi$이다(Section 4.3). "$A-B$를 양인 무언가의 적분으로 나타낸다"는 아이디어는 단순한 만큼 유용하다.
- **무한곱과 특수한 값.** $\int \sin^n t\,dt$에 대한 점화식(reduction formula), 불변량(invariant), 그리고 조임 정리로부터 월리스(Wallis) 곱, 스털링 공식(Stirling's formula)의 상수, 그리고 $\left(\frac{1}{2}\right)!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$를 얻었다(Section 4.4).
- **무한급수.** x^x를 거듭제곱급수(power series)로 전개하여 항별 적분(term-by-term integration)하면 "2학년생의 꿈(sophomore's dream)"을 얻는다(Section 4.5).
- **삼각함수의 기초.** $\mathrm{T}(x)=\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$와 $\pi=2\mathrm{T}(\infty)$로 정의하면, 치환만으로 덧셈정리(addition formula)와 $\mathrm{T}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$ 같은 특수한 값이 나온다(Section 4.2).
- **기하.** 상수로 간단해지는 피적분함수로부터 아르키메데스(Archimedes)의 모자 상자 정리(hat-box theorem)가 드러났고(Section 4.8), 경계를 따라 도는 적분으로 쓴 넓이

공식으로 Holditch의 놀라운 정리를 증명했다(Section 4.9).

- **최적의 함수.** 적분 안에서 완전제곱식을 만들어(completing the square) $\int((y')^2 - a^2y^2)$이 정확히 언제 음이 아니어야 하는지 밝혔고, 임계값 $\frac{\pi}{2}$는 고윳값(eigenvalue)으로 드러났다(Section 4.7).

3. 공식이 없을 때는 무엇을 할 수 있는가?

Section 4.6에서는 $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$를 유리함수(rational function)와 e^x의 곱으로 나타낼 수 없음을 증명했고, 리우빌(Liouville)의 이론은 이 적분에 초등(elementary) 공식이 전혀 없음을 보여 준다. 극(pole)의 관점에서 보면 그 이유는, 역도함수(antiderivative)가 $x = -1$ 근처에서 로그처럼 행동해야 하는데 유리함수는 그럴 수 없기 때문이다. 그럼에도 이 적분은 아무 문제 없이 존재하며, 우리는 이를 계산할 수 있다. 수치적으로 계산할 수도 있고, (Section 4.5의 $\int x^x$처럼) 급수로 계산할 수도 있으며, Section 3.9에서 W 함수에 대해 했듯이 이름을 붙여 새로운 함수로 연구할 수도 있다.

4. 적분의 도구 상자

방법	사용한 곳
정의로부터 직접 계산하기	직사각형으로 구한 $\int_0^a x^5$ (4.1)
망원합	연속한 수의 곱의 합 (4.1)
적분을 보존하는 치환	$\int \frac{du}{1+u^2}$로부터 얻은 삼각함수 (4.2)
다항식의 나눗셈	$\frac{22}{7} - \pi$ (4.3)
양수성과 피적분함수의 평가	$\pi < \frac{22}{7}$ (4.3)
점화식	$\int \sin^n t$ (4.4); $\int x^m(\ln x)^n$ (4.5)
불변량과 조임 정리	$nu_nu_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ (4.4)
항별 적분	2학년생의 꿈 (4.5)
인수와 차수에 대한 논증	유리함수인 역도함수가 없음 (4.6)
완전제곱식 만들기	변분법 (4.7)
적분하기 전에 간단히 하기	구형 빵 (4.8)
경계 적분으로 나타낸 넓이	Holditch의 정리 (4.9)

다음으로

- Section 4.4의 감마 함수(Gamma function)와 베타 함수(Beta function), 그리고 스털링 공식의 상수 $\sqrt{2\pi}$는 Section 12.23에서 확률(probability)과 관련하여 다시 등장한다.
- Section 4.7의 고윳값 문제는 Section 8.6에서 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)가 된다.
- Section 4.2의 덧셈 항등식으로 만들어지는 마친 공식(Machin's formula)은 Sec-

tion 5.1의 주제이다.

- 제5장에서는 복소수(complex number)를 다루는데, 복소수는 이 장의 그토록 많은 적분에 왜 π가 등장하는지를 설명해 준다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Paul Nahin, *Inside Interesting Integrals*** (Springer): 기발한 적분들과 그 뒤에 숨은 요령들의 향연이다.
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***: 뉴턴(Newton)부터 르베그까지 해석학의 걸작들을 담았다.
- **Michael Spivak, *Calculus***: 적분의 정의와 기본정리를 제대로 다룬다.
- **Sherman Stein, *Archimedes***: 적분의 고대 뿌리를 알고 싶다면.

에르미트(Hermite)는 도함수가 없는 함수 앞에서 몸서리쳤지만, 적분에는 그런 문제가 없었다. 적분은 너그러워서 미분이 다룰 수 없는 함수들도 받아들이며, 끊임없이 놀라움을 안겨 준다. 이 장을 관통하는 하나의 주제가 있다면, 그것은 적분이 단지 넓이를 구하는 기법이 아니라는 것이다. 적분은 수, 함수, 도형에 관한 사실을 표현하고 증명하는 하나의 언어이며, 여러분은 앞으로의 수학 인생 내내 이 언어를 쓰게 될 것이다.

더 도전하기 해답

다음은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계만 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 제대로 풀어 보아라.

4.1 적분이란 무엇인가?

1. 이 합은 $[1,2]$에서 $y=\mathrm{f}(x)$ 아래에 놓인 너비 $\frac{1}{n}$인 직사각형 n개의 넓이를 모두 더한 것이다. $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$로 두면 $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+m/n}=\sum\frac{1}{n+m}\to\ln 2$이다. 두 번째 합은 $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+(m/n)^2}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$이다.

2. 띠 n개로 만든 상합(upper sum)은 $\frac{a}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^2=\frac{a^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$이고, 하합(lower sum)은 첫 번째 인수에서 $n+1$ 대신 $n-1$을 넣은 것과 같다. 둘 다 $\frac{a^3}{3}$에 수렴한다.

3. 각 항이 연쇄적으로 소거된다(telescope): $r(r+1)\cdots(r+k)-(r-1)r\cdots(r+k-1)=(k+1)\,r(r+1)\cdots(r+k-1)$.

4. $\sum_{r=1}^{n}r^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

4.2 적분으로 삼각함수 세우기

1. 도함수(derivative)는 $-\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=0$이므로 $\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(a)$이다. 여기에 $a=x+y$를 대입한다. 코사인의 경우, y를 고정하고 $p(x)=\mathrm{c}(x+y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y)+\mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$, $q(x)=\mathrm{s}(x+y)-\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$로 두자. 그러면 $p'=-q$, $q'=p$이므로 p^2+q^2은 상수이고, $x=0$에서 그 값은 0이다.

2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=(1+u^2)^{-3/2}$이고 $\sqrt{1-y^2}=(1+u^2)^{-1/2}$이므로 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$이다. 그러면 $\mathrm{S}(\frac{1}{\sqrt{2}})=\mathrm{T}(1)$이고, 소문항 (i)에 $x=1$을 넣으면 $\mathrm{T}(1)=\frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$를 얻는다.

3. $a=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$으로 두면 $\frac{x+a}{1-ax}=1$이므로 $\mathrm{T}(\frac{1}{3})=\mathrm{T}(1)-\mathrm{T}(\frac{1}{2})$이다.

4. $[0,1]$에서 $\frac{1}{1+u^2}\le 1$이고 $[1,x]$에서 $\le\frac{1}{u^2}$이므로, $x\ge 1$이면 $\mathrm{T}(x)\le 1+(1-\frac{1}{x})<2$이고, $0<x<1$이면 $\mathrm{T}(x)<\mathrm{T}(1)\le 1$이다. (상계 $1+\int_1^x u^{-2}\,\mathrm{d}u$는 $x<1$일 때 성립하지 않는다. $x=\frac{1}{2}$에서 그 값은 0이다.) T는 증가(increasing)하고 유계(bounded)이므로 극한(limit)을 가진다.

4.3 22/7은 π보다 크다

1. $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.001264$로, $\frac{1}{1260} \approx 0.000794$와 $\frac{1}{630} \approx 0.001587$ 사이에 있다.
2. $\frac{(4!)^2}{9!} = \frac{576}{362\,880} = \frac{1}{630}$.
3. $\frac{x(1-x)^2}{1+x^2} = x - 2 + \frac{2}{1+x^2}$이고, 이를 적분하면 $\frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{2}$이다. 마찬가지로 $\frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2} = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4 + \frac{4}{1+x^2}$이고, 이를 적분하면 $\frac{1}{5} - 1 + \frac{5}{3} - 4 + \pi = \pi - \frac{47}{15}$이다. 두 적분 모두 양수이다. 이 피적분함수(integrand)들은 $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$(최댓값이 약 0.003)보다 훨씬 크므로, 오차 $\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \approx 0.07$과 $\pi - \frac{47}{15} \approx 0.008$도 더 크다.
4. 다항식 나눗셈(polynomial division)을 하면 나머지(remainder) $\frac{16}{1+x^2}$가 남고, 이를 적분하면 4π이다. 적분값은 $4\pi - \frac{188684}{15015} \approx 3.6 \times 10^{-6}$이므로 $\pi \approx 3.14159174$이다.

4.4 월리스, 베타 함수, 그리고 1/2의 계승

1. $u_{2m} = \frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots2m} \cdot \frac{\pi}{2}$이고 $u_{2m+1} = \frac{2\cdot4\cdots2m}{3\cdot5\cdots(2m+1)}$이다. 그러면 $1 < \frac{u_{2m}}{u_{2m+1}} < \frac{u_{2m-1}}{u_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}$이므로 이 비는 1에 수렴하고, 이를 정리하면 $\frac{\pi}{2} = \prod_{k\geq1} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$이 된다.
2. 부분적분(integration by parts)을 하면 $I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$를 얻고, $x^{n+1}(1-x)^{n-1} = x^n(1-x)^{n-1} - x^n(1-x)^n$으로 쓴 뒤 대칭성(symmetry)을 함께 이용하면 $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$에 이른다. 귀납법(induction)을 적용하면 $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$이라는 결과를 얻는다. $x = \sin^2\theta$로 치환하면 $I_{1/2} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$이다. 이 공식대로라면 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2/2! = \frac{\pi}{8}$일 것이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다(이는 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$이다).
3. 대칭성은 $x \mapsto 1-x$로부터, 점화식(recurrence)은 $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$로부터 얻는다. 또 $x = \frac{t}{1+t}$로 치환하면 $1 - x = \frac{1}{1+t}$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$이다. 주어진 적분은 $\mathrm{b}\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$이고, 점화식과 대칭성을 써서 $\mathrm{b}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$로 줄여 나가면 $\frac{3\pi}{256}$을 얻는다.
4. 소문항 (i)에서 구한 명시적인 값으로부터 $u_{2m} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \binom{2m}{m}\frac{\pi}{2^{2m+1}}$이다. 그러면 $2mu_{2m}^2 \to \frac{\pi}{2}$로부터 $\binom{2m}{m}^2 \approx \frac{4^{2m}}{\pi m}$을 얻는다. $m = 10$이면 $\binom{20}{10} = 184\,756$인데, $\frac{4^{10}}{\sqrt{10\pi}} \approx 187\,079$이다(약 1.3% 크다).

4.5 2학년생의 꿈

1. $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n\geq0} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$이고, $\int_0^1 \frac{x^n(-\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$이다($x = e^{-u}$로 치환한다). 따라서 적분값은 $\sum_{n\geq1} n^{-n} \approx 1.2913$이다.
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = x^x(\ln x + 1)$이고, 이는 $x = \frac{1}{e}$에서 0이다. 그때의 값은 $(e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1/e} \approx 0.692$이다.
3. 각 항은 $\frac{1}{n^n}$이다. 7개 항까지 더하고 멈추면 오차가 $\frac{1}{8^8} \approx 6 \times 10^{-8}$보다 작아 충분하지

만, 6개 항까지만 더하면 상계 $\frac{1}{7^7} \approx 1.2 \times 10^{-6}$으로는 충분하지 않다. 따라서 7개 항이 필요하다.

4. 부분적분으로 계산하면 $\int_0^1 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$이다. 일반적으로 $\int_0^1 x^n \ln x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$이고, $\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n \ln x$이다.

4.6 공식으로 나타낼 수 없는 적분

1. 미분하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{e^x}{x+1} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$이고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{(x-1)e^x}{x+1} = e^x \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}$이다.

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{P}e^{-x^2}\right) = (\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P})e^{-x^2}$이고, $\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P}$의 차수(degree)는 $\deg \mathrm{P} + 1 \geq 1$이므로($\mathrm{P} \neq 0$일 때) 1이 될 수 없다.

3. $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$(기약 형태(lowest terms))가 0에서 위수(order)가 $k \geq 1$인 극(pole)을 가진다면, $\mathrm{R}' + \mathrm{R}$는 그곳에서 위수가 $k+1 \geq 2$인 극을 가진다. 그런데 $\frac{1}{x}$는 위수가 1인 극을 가진다. R가 0에서 극을 가지지 않으면 $\mathrm{R}' + \mathrm{R}$도 극을 가지지 않는다. 어느 경우든 $(\mathrm{R}e^x)' \neq \frac{e^x}{x}$이다.

4. $\frac{\mathrm{P}e^x}{x+1}$을 미분하면 $e^x \frac{(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}}{(x+1)^2}$이다. $x = -1$에서 $\mathrm{f}(-1) = -\mathrm{P}(-1)$이고, $\mathrm{f}' = (x+1)\mathrm{P}'' + (x+1)\mathrm{P}' + \mathrm{P}$로부터 $\mathrm{f}'(-1) = \mathrm{P}(-1)$이다. $x^3 - 2$의 경우 $-3 + 3 = 0$, x의 경우 $-1 + 1 = 0$, $x^2 + 1$의 경우 $2 - 2 = 0$이다. 이 조건은 충분조건이기도 하다. 차수가 d 미만인 다항식에서 차수가 d 이하인 다항식으로 가는 사상 $\mathrm{P} \mapsto (x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}$는 단사(injective)이므로 그 상(image)의 차원(dimension)은 d이고, 이 상은 $\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$을 만족하는 f들이 이루는 d차원 공간 안에 있다. 따라서 상은 그 공간 전체이다.

4.7 변분법

1. $y = \cos \frac{\pi x}{2}$로 두면 $J = \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 \sin^2 - a^2 \int_0^1 \cos^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right) < 0$이다.

2. $J(y + \varepsilon\eta) = J(y) + 2\varepsilon \int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta) + \varepsilon^2 J(\eta)$이다. $\varepsilon = 0$에서 최솟값을 가지려면 일차항이 0이어야 한다. 부분적분하면 $\eta(1) = 0$인 모든 η에 대해 $-y'(0)\eta(0) - \int_0^1 (y'' + a^2 y)\eta = 0$이고, 이로부터 $y'' + a^2 y = 0$, $y'(0) = 0$이어야 한다.

3. $x = Lu$로 두면 $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{L} \int_0^1 \left((Y')^2 - (aL)^2 Y^2\right) \mathrm{d}u$이므로 조건은 $aL \leq \frac{\pi}{2}$이다. ($aL = \frac{\pi}{2}$일 때에도 본문에서처럼 적분은 결코 음수가 되지 않지만, $y = \cos \frac{\pi x}{2L}$이면 0이 된다. $aL > \frac{\pi}{2}$이면 바로 그 함수에 대해 적분이 음수가 된다.)

4. 사이클로이드(cycloid)는 $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1 - \cos\theta)$이다. 등시곡선(tautochrone)에 대해서는 Section 11.4을 보라. 호의 길이(arc length)로 나타내면 그 운동은 정확히 단진동(simple harmonic motion)이다.

4.8 공 모양 빵 자르기

1. $V/A = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$이다. 그러나 높이가 t인 남은 조각은 $A = 2\pi at$, $V = \frac{1}{3}\pi t^2(3a - t)$이므로 $V/A = \frac{t(3a-t)}{6a}$이고, 이는 $t = \frac{3}{2}a$일 때 최댓값 $\frac{3a}{8}$을 가진다. 이 값은 $\frac{a}{3}$보다 크다.

2. 띠의 높이는 구 전체의 높이 $2R$ 가운데 $2R\sin 23.4°$이므로, 그 비율은 $\sin 23.4° \approx 0.40$이다.

3. $y = \sqrt{x}$이면 $y\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$로 상수가 아니다. $y\sqrt{1 + (y')^2} = c$로부터 $(y')^2 = \frac{c^2}{y^2} - 1$을 얻고, 그 해는 $y = c$(원기둥(cylinder))와 원 $(x - x_0)^2 + y^2 = c^2$(구)이다.

4. 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi a^3$, 원기둥의 부피는 $\pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$이므로 그 비는 $\frac{2}{3}$이다.

4.9 홀디치의 정리

1. $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p\cos t \cdot q\cos t + q\sin t \cdot p\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot 2\pi pq = \pi pq$.

2. 두 현(chord)의 끝점을 이어 만든 삼각형들은 닮음(similar)이므로(같은 호에 대한 원주각은 같다) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$이다. 반지름이 R인 원에서 P가 중심으로부터 거리 r에 있을 때, P를 지나는 지름을 택하면 $(R - r)(R + r)$이 되므로 $ab = R^2 - r^2$이고, 고리의 넓이는 $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$이다.

3. $a = b$이면 $f = \pi(a - b) = 0$이고, 고리의 넓이는 $\pi a^2 = \frac{\pi L^2}{4}$로, 막대를 지름으로 하는 원의 넓이와 같다.

4. O를 지나는 두 변을 따라서는 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$이다. 세 번째 변을 $0 \le s \le 1$에 대해 $(x_1, y_1) + s(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$로 매개화(parametrise)하면 그 값은 $(x_1y_2 - x_2y_1)\,\mathrm{d}s$이다. 따라서 넓이는 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$이다.

장

5

복소수

실수 영역의 두 진리를 잇는 가장 짧은 길은 복소수 영역을 지나간다.

이 장의 내용

5.1 마친의 공식 STEP III 1987

5.2 단위근 필터 STEP I 1990

5.3 $z^{2n}+1$의 인수분해 STEP III 2013

5.4 정다각형 속의 거리 STEP III 2016

5.5 유리수처럼 보이지만 아닌 각 STEP III 2022

5.6 페르마 점 STEP III 2000

5.7 사상으로서의 복소 지수함수 STEP II 1997

5.8 원판에 숨은 거리 STEP III 2013

A 연습문제 해답 377쪽

허수, 실제의 답

> 실수 영역의 두 진리를 잇는 가장 짧은 길은 복소수 영역을 지나간다.
>
> — 자크 아다마르(Jacques Hadamard)

1545년 카르다노(Gerolamo Cardano)는 삼차방정식(cubic equation)의 해법 공식을 발표했는데, 그 과정에서 당혹스러운 사실을 발견했다. 세 개의 멀쩡한 실근을 가진 어떤 삼차방정식에서는, 공식을 적용하는 도중에 음수의 제곱근을 구해야 했던 것이다. 이 제곱근들은 마지막에 서로 상쇄되어 실수인 답을 남겼지만, 계산 중간에는 당시의 어떤 기준으로 보아도 존재하지 않는 양이 등장했다. 카르다노는 이런 조작을 "미묘한 만큼 쓸모없다"고 했다. 그 뒤 두 세기 동안 수학자들은 이 "허수(imaginary number)"를 어쩌다 잘 통하는 요령쯤으로 여기며 불편한 마음으로 사용했다.

허수가 제대로 인정받게 된 것은 19세기 초, 베셀(Caspar Wessel), 아르강(Jean-Robert Argand), 가우스(Gauss)가 복소수(complex number)를 평면 위의 점으로 나타내면서부터였다. 그렇게 되자 복소수는 요령이 아니라 하나의 계시였음이 드러났다. 복소수는 실제 현상이 왜 그렇게 행동하는지를 설명해 주며, 아다마르의 말처럼 실수에 관한 결과에 이르는 가장 짧은 길을 거듭 제공한다.

복소수가 중요한 이유

모든 다항방정식은 복소수 범위에서 해를 가진다. 이것이 **대수학의 기본정리**(*fundamental theorem of algebra*)이다. 따라서 복소수는 정확한 의미에서 대수학이 완비되는 곳이다. 복소수는 또한 회전과 진동을 나타내는 자연스러운 언어이기도 하다. 절댓값(modulus)이 1인 복소수를 곱하면 평면이 회전하므로, 각, 파동, 주기적인 현상이 관련된 문제는 복소수를 쓰면 더 간단해진다. 전기 공학자는 교류 전류를 분석할 때 복소수를 사용하고, 물리학자는 복소수 없이는 양자역학을 적어 내려갈 수조차 없으며, 휴대전화에서 MRI 스캐너에 이르기까지 신호 처리는 복소 푸리에 변환(Fourier transform)으로 돌아간다. 그리고 순수수학에서 복소변수 함수는 놀라울 만큼 경직되어 있고 아름답다는 것이 밝혀졌다. 아주 작은 영역에서 복소함수를 알면 그 함수가 모든 곳에서 결정된다.

대학에서 만나게 될 내용

복소수는 대학 첫 주부터 사용하게 되지만, 큰 도약은 보통 2학년에 배우는 **복소해석학**(*complex analysis*)과 함께 찾아온다. 복소해석학의 중심 대상은 미분 가능한 복소함수인 **정칙**(*holomorphic*) 함수이며, 이 이론은 놀라운 사실로 가득하다. 모든 정칙함수는 자동으로 무한 번 미분 가능하고, 자신의 테일러 급수(Taylor series)와 같다. 닫힌 곡선을 따라 구하는 적분은 함수가 발산하는 점들만 살펴보아 계산할 수 있으며(코시(Cauchy)의 유수 정리(residue theorem)), 이를 이용하면 다른 어떤 방법으로도 풀리지 않는 실수 적분을 계산할 수 있다. 이 이론은 등각사상(conformal map)(Section 5.7), 리만 곡면(Riemann surface), 그리고 소수(prime)의 분포를 지배하는 리만(Riemann) 제타 함수(Section 1.2)로 이어진다. 이와 나란히, 1의 거듭제곱근(roots of unity)의 대수(Section 5.2, Section 5.3)는 갈루아(Galois) 이론으로 이어지고, 복소 기하는 Section 5.8의 비유클리드 기하학(non-Euclidean geometry)으로 이어진다.

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **복소수는 실수 문제를 푸는 데 어떻게 도움이 되는가?** 복소평면을 거쳐 돌아가는 길이 왜 π, 이항계수, 코사인에 관한 사실을 만들어 내는가?
2. **1의 거듭제곱근은 무엇이 특별한가?** $z^n = 1$의 해들은 왜 합, 곱, 다각형, 각에서 거듭 나타나는가?
3. **복소함수는 어떻게 생겼는가?** 입력과 출력이 모두 평면 위의 점인 함수를 어떻게 그림으로 나타낼 수 있으며, 그 그림은 어떤 기하를 드러내는가?

이 장은 편각(argument)과 곱셈(마친(Machin)의 공식)에서 출발하여, 1의 거듭제곱근의 대수(필터, 인수분해, 다각형의 거리, 무리수 각)를 거쳐, 복소수를 이용한 기하(페르마(Fermat) 점)로 나아가고, 마지막으로 사상으로서의 복소함수(지수함수, 그리고 단위원판 속에 숨은 거리)에 이른다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
5.1	마친의 공식	복소수를 곱하면 편각이 더해진다
5.2	세 개마다 하나씩 고른 이항계수	1의 거듭제곱근에 대해 평균을 내면 나머지에 따라 걸러진다
5.3	코사인의 곱	근들로 인수분해한 다음 대입한다
5.4	정다각형의 현	거리는 절댓값이다; $z^n - 1 = \prod(z - \omega^k)$
5.5	$\cos^{-1}\frac{1}{3}$은 무리수이다	드무아브르(De Moivre), 홀짝성, 최소 반례
5.6	페르마 점	회전은 곱셈이다; 좋은 좌표
5.7	사상으로서의 e^w	복소함수를 그림으로 나타내기; 다대일 사상
5.8	숨은 거리	쌍곡기하학의 삼각부등식으로서의 부등식

이 장을 읽는 방법

그림을 그려라. 이 장의 거의 모든 결과에는 기하학적 의미가 있으며, 복소평면을 간단히 스케치해 보면(1의 거듭제곱근이 어디에 있는지, 곱셈이 어느 방향으로 회전시키는지, 격자선이 어디로 가는지) 대수 계산을 하기도 전에 무엇을 해야 할지 보이는 경우가 많다. 그런 다음 대수 계산은 꼼꼼하게 하라. 그림은 부호나 2π의 배수에 관해서는 잘못된 인상을 줄 수 있기 때문이다.

5.1 마친의 공식

문제

STEP III 1987, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/87-s3-q3`

도입

1706년 런던의 수학자 존 마친(John Machin)은 손 계산만으로 π를 소수점 아래 100자리까지 구했다. 그 전에는 누구도 그 근처에조차 가지 못했다. 그의 비결은 소문항 (ii)의 공식으로, 이 공식은 $\frac{\pi}{4}$를 탄젠트 값이 아주 작은 분수인 각들로 나타낸다. 분수가 작으면 급수(series) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$가 매우 빠르게 수렴(converge)하며, 마친의 공식과 그 변형들은 컴퓨터와 Section 2.6의 방법이 등장하기 전까지 두 세기 반 동안 π를 계산하는 표준적인 방법이었다.

이 공식은 삼각함수 항등식이 빚어낸 기적처럼 보인다. 그러나 이 문제는 이것이 사실 복소수의 곱셈에 관한 사실임을 보여 준다. 복소수를 곱하면 편각(argument)이 더해진다. 성분이 정수인 복소수들의 곱셈 한 번으로 전체가 증명된다.

시작하기 전에

생각해 보기 $5 - \mathrm{i}$의 편각은 무엇인가? $1 + \mathrm{i}$의 편각은? 복소수를 곱하면 편각은 어떻게 되는가?

$\arg(5 - \mathrm{i}) = -\tan^{-1}\frac{1}{5}$로 작은 음의 각이고, $\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$이다. 복소수를 곱하면 절댓값(modulus)은 곱해지고 편각은 (2π의 정수배 차이를 제외하면) 더해진다. 따라서

$$\arg((5 - \mathrm{i})^4(1 + \mathrm{i})) = \frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} \quad \text{(경우에 따라 } 2\pi\text{의 정수배를 더함).}$$

이 곱을 직접 계산하여 편각을 다른 방법으로 구할 수 있다면 항등식을 얻는다.

차근차근 풀기

1단계 절댓값의 범위

생각해 보기 상한(upper bound)을 보이려면 양변을 제곱해 보라. 하한(lower bound)을 보이려면 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$를 두 벡터의 내적(dot product)으로 생각해 보라.

상한: $(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y| \geq x^2+y^2 = |z|^2$이고 양변이 모두 음이 아니므로 $|z| \leq |x|+|y|$이다.

하한: $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$는 길이가 $|z|$인 벡터 $(|x|, |y|)$와 단위벡터 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$의 내적이다. 내적은 두 벡터의 길이의 곱보다 클 수 없으므로 이 값은 $|z|$ 이하이다. (대수적으로는 $|z|^2 - (|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha)^2 = (|x|\sin\alpha - |y|\cos\alpha)^2 \geq 0$이다.) ■

2단계 핵심이 되는 곱셈

생각해 보기 $(5-\mathrm{i})^2$을 계산하고, 그것을 다시 제곱한 뒤, $1+\mathrm{i}$를 곱하라.

$(5-\mathrm{i})^2 = 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i}$이다. 그러면 $(24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i}$이다. 마지막으로

$$(476-480\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i}.$$

잠깐, 직접 해 보기 이제 편각을 비교하라. $956-4\mathrm{i}$의 편각은 무엇인가? 2π의 정수배가 더 붙지 않는다고 어떻게 확신할 수 있는가?

$956-4\mathrm{i} = 4(239-\mathrm{i})$이므로 편각은 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$이다. 따라서 어떤 정수 k에 대하여

$$\frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi$$

이다. 그런데 $0 < \tan^{-1}\frac{1}{5} < \frac{1}{5}$이므로 좌변은 $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5}$와 $\frac{\pi}{4}$ 사이, 즉 대략 -0.02와 0.79 사이에 있고, 우변에서 $2k\pi$를 뺀 부분은 -0.005와 0 사이에 있다. 2π는 이 차이보다 훨씬 크므로 $k=0$이다. 정리하면

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}. \qquad ■$$

그림 5.1.1은 무슨 일이 일어났는지 보여 준다. 45°에서 출발하여 $5-\mathrm{i}$를 한 번 곱할 때마다 시계 방향으로 약 11.3°씩 회전(rotation)하고, 네 번 곱하고 나면 실수축을 겨우 0.24° 지나친다.

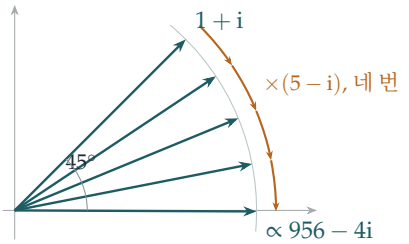


그림 5.1.1 $1+\mathrm{i}$에 $5-\mathrm{i}$를 네 번 곱하기. 한 번 곱할 때마다 시계 방향으로 $\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 11.31°$만큼 회전한다(길이도 늘어나지만 여기서는 무시한다). 네 번 회전하면 $45°$가 $-0.24°$가 되는데, 이것이 $956-4\mathrm{i}$의 편각인 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$이다.

3단계 두 번째 공식

생각해 보기 앞의 경우에서 유추하면, 이번에는 어떤 곱을 계산해야 하는가?

$(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$를 생각하자. 이 수의 편각은 $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$이다. 이제 $(4+\mathrm{i})^2=15+8\mathrm{i}$이므로 $(4+\mathrm{i})^3=(15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i})=52+47\mathrm{i}$이다. 그러면 $(52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i})=1040+52\mathrm{i}+940\mathrm{i}-47=993+992\mathrm{i}$이고,

$$(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})=(1971105-992)+(993+1969120)\mathrm{i}=1970113+1970113\mathrm{i}.$$

실수부분과 허수부분이 같으므로 편각은 $\frac{\pi}{4}$이다. 세 각은 모두 작은 양수이므로(그 합은 $3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{1985}<1<2\pi$보다 작다) 2π의 정수배를 걱정할 필요가 없고, 공식이 성립한다. ■

돌아보기

- **곱셈에서 편각은 더해진다.** 이 하나의 사실이 가우스 정수의 곱을 각 사이의 항등식으로 바꾸어 주었다.
- **2π의 정수배에 주의하라.** 편각은 2π의 정수배 차이를 제외하고만 정해지므로, 각 항등식마다 크기를 어림하여 그 정수배를 확정해야 했다.
- **정수가 일을 한다.** 모든 계산은 정수로 이루어졌고, π에 대한 항등식은 근사 없이 정확하게 나왔다.

숨은 수학

손으로 π 계산하기

마친의 공식은 왜 계산에 그토록 유용할까? 급수 $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$는 $|x| \leq 1$에서 수렴하지만, $x = 1$에서는 고통스러울 만큼 느리게 수렴한다. $\frac{\pi}{4}$를 소수점 아래 세 자리까지 구하려면 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$의 항이 약 천 개나 필요하다. $x = \frac{1}{5}$이면 각 항이 앞의 항보다 약 25배씩 작아져서 항 하나당 대략 1.4자리를 얻고, $x = \frac{1}{239}$이면 항 하나당 약 4.8자리를 얻는다. 마친의 100자리 계산에는 첫 번째 급수의 항 약 70개와 두 번째 급수의 항 20개 정도만 필요했다. 1873년 William Shanks는 마친형 공식을 이용해 707자리를 계산하느라 수년을 계산에 쏟았는데, 1944년에 그가 528번째 자리에서 실수를 했고 그 뒤의 자리는 모두 틀렸다는 사실이 밝혀졌다.

다시 만나는 가우스 정수

a, b가 정수일 때 $a + b\mathrm{i}$ 꼴의 수는 Section 1.6에서 다룬 **가우스 정수**(Gaussian integers)이다. $5 - \mathrm{i}$가 이렇게 잘 들어맞는 이유는 인수분해(factorisation)에 있다. $239^2 + 1 = 57122 = 2 \times 13^4$이고, 이를 가우스 정수에서 쓰면 $(239 + \mathrm{i})(239 - \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})^4(3 - 2\mathrm{i})^4$가 되며, $5 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$도 같은 가우스 소수(Gaussian primes)들로 이루어져 있다. 마친형 공식을 찾는 일은 사실 $n^2 + 1$ 꼴의 수를 인수분해하는 문제이다. 1899년 Carl Størmer는 바로 이 아이디어를 이용하여, a, b, m, n이 정수일 때 $\frac{\pi}{4} = a\tan^{-1}\frac{1}{m} + b\tan^{-1}\frac{1}{n}$ 꼴의 공식은 마친의 공식과 오일러(Euler), Hermann, Hutton이 찾은 세 공식, 이렇게 네 개뿐임을 증명했다.

회전

절댓값이 1인 복소수를 곱하는 것은 평면의 회전이다. 그래서 복소수는 이 장 뒷부분의 기하학에서부터 전기공학의 교류, 양자역학의 파동함수에 이르기까지 회전과 각이 관련된 모든 것을 나타내는 자연스러운 언어가 된다. Section 4.2에서는 $\tan^{-1}$의 덧셈정리를 교묘한 치환으로 얻었지만, 여기서는 복소수의 곱셈에서 얻었다. 두 가지는 같은 사실을 서로 다른 쪽에서 본 것이다.

사고 기술

각을 복소수의 곱셈으로 옮겨 생각하기

각의 합 사이의 항등식은 곱의 편각 사이의 항등식이다. 곱을 정확하게 계산하고 그 편각을 읽어 내라.

복소수의 계산은 기계적이고 정확한 반면, 역삼각함수(inverse trigonometric functions)를 다루는 일은 실수하기 쉽다. 한쪽에서 다른 쪽으로 옮겨 생각하는 것이 증명에 이르는 가장 빠른 길일 때가 많다.

더 도전하기

1 **사촌 격인 문제.** STEP II 2000, 4번 문제 (`step.maths.org/questions/00-s2-q4`)에 도전해 보라. 이 문제는 이 절과 같은 방법, 즉 복소수를 곱하고 편각을 읽어 내는 방법으로 $\frac{\pi}{4}$에 대한 또 다른 아크탄젠트 공식을 증명한다.

2 **오일러의 공식.** $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$를 생각하여 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$임을 보여라.

3 **Hutton의 공식.** $\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$임을 보여라.

4 **항이 몇 개 필요할까?** 마친의 공식으로 π를 소수점 아래 20자리까지 계산하려면 각 급수의 항이 몇 개씩 필요한지 어림해 보라. 그다음 계산기로 처음 몇 자리를 직접 계산해 보라.

더 읽을거리

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). 마친형 공식의 역사를 담고 있다.
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed*** (Springer). π를 계산하는 옛 방법과 새 방법을 생동감 있게 소개한다.
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 복소수를 기하학적으로 보는 데 가장 좋은 책이다. 제1장은 회전과 확대로서의 곱셈을 다룬다.

5.2 단위근 필터

문제

STEP I 1990, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/90-s1-q2`

도입

파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)의 한 행에 있는 이항계수(binomial coefficient)를 모두 더하면 2^n이다. $(1+x)^n$에 $x=1$을 대입하면 된다. 대신 $x=-1$을 대입하면 교대합(alternating sum)을 얻는데, 그 값은 0이다. 두 식을 더하면 짝수 번째 자리에 있는 계수의 합이 정확히 절반인 2^{n-1}임을 알 수 있다. 즉 짝수 번째 항과 홀수 번째 항이 전체 합을 똑같이 나누어 가진다.

그렇다면 **세 번째마다** 있는 계수는 어떨까? $0, 3, 6, \ldots$번째 자리만 골라내는 실수 x는 존재하지 않는다. 그러나 복소수(complex number) 중에는 그런 수가 있다. 1의 세제곱근(cube roots of unity)은 필터 역할을 한다. 거듭제곱 ω^k를 $1, \omega, \omega^2$에 대하여 평균 내면, k가 3의 배수일 때는 1이 되고 그렇지 않을 때는 0이 된다. 이 아이디어, 즉 **1의 거듭제곱근 필터**(roots-of-unity filter)는 지금까지 고안된 가장 중요한 알고리즘(algorithm) 가운데 하나인 **이산 푸리에 변환**(discrete Fourier transform)의 축소판이다.

시작하기 전에

생각해 보기 ω는 $z^3-1=0$의 근이다. z^3-1을 인수분해(factorise)하여라. 이로부터 왜 $1+\omega+\omega^2=0$이 성립하는가?

$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$이다. $\omega^3=1$이지만 $\omega\neq 1$이므로, ω는 두 번째 인수의 근이어야 한다. 즉 $\omega^2+\omega+1=0$이다. 기하학적으로 보면 $1, \omega, \omega^2$는 원점을 중심으로 하는 정삼각형(equilateral triangle)의 꼭짓점이고, 이들의 합은 삼각형의 무게중심(centre of mass), 곧 0이다.

차근차근 풀기

1단계 절댓값과 편각

$1+\omega+\omega^2=0$으로부터 $1+\omega^2=-\omega$이다. $\omega=e^{2\pi\mathrm{i}/3}$이므로 $-\omega=e^{\mathrm{i}\pi}e^{2\pi\mathrm{i}/3}=e^{5\pi\mathrm{i}/3}=e^{-\pi\mathrm{i}/3}$이다. 따라서 $1+\omega^2$의 절댓값(modulus)은 1이고 편각(argument)은 $-\frac{\pi}{3}$이다. 마찬가지로 $1+\omega=-\omega^2=e^{\pi\mathrm{i}/3}$이고, 절댓값은 1, 편각은 $\frac{\pi}{3}$이다.

2단계 필터

> **생각해 보기** k가 3의 배수일 때 $1+\omega^k+\omega^{2k}$의 값은 무엇인가? 3의 배수가 아닐 때는?

$3\mid k$이면 $\omega^k=1$이므로 합은 3이다. 그렇지 않으면 ω^k는 ω 또는 ω^2이고, 어느 경우든 $1+\omega^k+\omega^{2k}=1+\omega+\omega^2=0$이다. 따라서 식 $\frac{1}{3}(1+\omega^k+\omega^{2k})$는 $3\mid k$일 때 1이고 그 밖의 경우에는 0이다. 즉 이 식은 3의 배수를 가려내는 판별기이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** $r=1,2,3$에 대하여 $(1+\omega^r)^n$을 각각 이항정리(binomial theorem)로 전개하여 모두 더하여라. 무엇을 얻는가?

$\omega^3=1$이므로

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\omega^k+\omega^{2k}+1)=3\sum_{3\mid k}\binom{n}{k}.$$

한편 1단계에 의하여

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+2^n=e^{n\pi\mathrm{i}/3}+e^{-n\pi\mathrm{i}/3}+2^n=2\cos\frac{n\pi}{3}+2^n.$$

양변을 3으로 나누면 원하는 공식을 얻는다. ■

3단계 두 가지 계산

$n=25$일 때, $\frac{25\pi}{3}=8\pi+\frac{\pi}{3}$이므로 $\cos\frac{25\pi}{3}=\frac{1}{2}$이고,

$$\binom{25}{0}+\binom{25}{3}+\cdots+\binom{25}{24}=\frac{33554432+1}{3}=11184811.$$

> **생각해 보기** 두 번째 합에서는 $k\equiv 2\pmod 3$인 자리가 필요하다. $k\equiv 0$ 대신 $k\equiv 2$를 가려내려면 필터를 어떻게 바꾸면 될까?

판별기를 평행이동한다. $\frac{1}{3}(1+\omega^{k-2}+\omega^{2(k-2)})$는 정확히 $k \equiv 2 \pmod 3$일 때 1이다. $\omega^{-2}=\omega$이고 $\omega^{-4}=\omega^2$이므로

$$\sum_{k\equiv 2}\binom{n}{k} = \frac{1}{3}\Big(2^n + \omega(1+\omega)^n + \omega^2(1+\omega^2)^n\Big).$$

$n=24$이면 $(1+\omega)^{24} = e^{8\pi i} = 1$이고 마찬가지로 $(1+\omega^2)^{24}=1$이므로, 괄호 안은 $2^{24}+\omega+\omega^2 = 2^{24}-1$이다. $2^{24}=16777216$이므로

$$\binom{24}{2}+\binom{24}{5}+\cdots+\binom{24}{23} = \frac{16777215}{3} = 5592405. \qquad \blacksquare$$

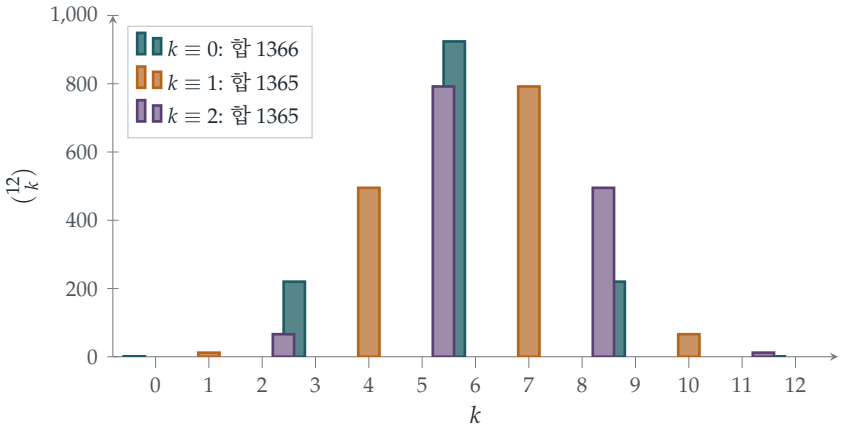


그림 5.2.1 파스칼의 삼각형의 12번째 행을 k를 3으로 나눈 나머지에 따라 색칠한 그림. 세 부류의 합은 각각 1366, 1365, 1365로, $2^{12}=4096$의 거의 정확히 3분의 1씩이다. 1의 거듭제곱근 필터는 $\frac{4096}{3}$과의 작은 차이 $+\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$까지 정확히 예측한다.

돌아보기

- **1의 거듭제곱근에 대한 평균은 나머지(residue)에 따라 걸러 낸다.** $\frac{1}{3}\sum_r \omega^{rk}$는 3이 k를 나누는지에 따라 1 또는 0이다. 다항식(polynomial)의 값을 1의 거듭제곱근에서 구해 더하면 세 번째마다 있는 계수만 골라낼 수 있다.
- **필터 평행이동하기.** 평균을 내기 전에 ω^{-rj}를 곱하면 $k \equiv j$인 계수만 골라낸다.
- **실수 답을 위한 복소수.** 답은 정수이고 문제도 정수에 관한 것이었지만, 풀이는 복소평면(complex plane)을 거쳐 갔다.

숨은 수학

이산 푸리에 변환

3을 임의의 N으로, ω를 $e^{2\pi \mathrm{i}/N}$로 바꾸어 보자. 수의 목록 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$에 대하여 수

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

들은 이 목록의 **이산 푸리에 변환**을 이루며, 필터 항등식 $\sum_r \omega^{rk} = N$ 또는 0 덕분에 $\hat{a}_r$로부터 a_k를 복원할 수 있다. 이 변환은 신호를 그 구성 주파수들로 분해한다. 1965년 제임스 쿨리(James Cooley)와 존 튜키(John Tukey)는 이 변환을 N^2단계 대신 약 $N \log_2 N$단계 만에 계산하는 방법, 곧 **고속 푸리에 변환**(fast Fourier transform)을 발표하였다. 가우스(Gauss)는 1805년에 본질적으로 같은 아이디어를 발견하였지만 끝내 발표하지 않았다. FFT는 오디오와 이미지 압축(MP3와 JPEG), 휴대전화 신호, 의료 영상 장비, 그리고 엄청나게 큰 수의 곱셈에 쓰이며, 20세기의 가장 중요한 알고리즘 가운데 하나로 자주 꼽힌다.

생성함수

이 필터는 더 큰 아이디어의 한 사례이다. 수열(sequence) $a_0, a_1, a_2, \ldots$는 다항식이나 멱급수(power series) $A(x) = \sum a_k x^k$로 묶어 나타낼 수 있는데, 이것을 수열의 **생성함수**(generating function)라 한다. 그러면 수열에 대한 연산이 함수에 대한 연산이 된다. 1에서 값을 구하면 수열의 합이 되고, 1의 거듭제곱근에서 값을 구하면 잉여류(residue class)를 골라내며, 미분하면 각 항에 k를 가중치로 곱하게 된다. 이 방법은 많은 세기 문제를 대수 문제로 바꾸어 주며, 9장의 핵심 기법이다. 같은 필터를 1의 다섯제곱근과 함께 $(1+x)^n$에 적용하면 정오각형(regular pentagon)과 황금비(golden ratio)로 이어진다. 1의 거듭제곱근의 대수는 Section 6.1에서 더 깊이 다룬다.

사고 기술

대칭을 이용하여 걸러 내기

합에서 어떤 조건을 만족하는 항만 골라내려면, 원하는 항에서는 1이고 나머지 항에서는 0인 함수를 대칭(*symmetry*)적인 평균으로 만들어라.

1의 거듭제곱근에 대한 평균이 대표적인 예이다. "대칭들의 군(group)에 대하여 평균을 내어 원하는 부분을 분리한다"는 같은 원리는 1의 거듭제곱근 필터부터 군의

표현론(representation theory)에 이르기까지 대수학 곳곳에 나타난다.

더 도전하기

1 **짝수 번째 자리.** 1의 제곱근(1과 -1)으로 필터를 사용하여 $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$임을 보여라.

2 **나머지 한 부류.** $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$에 대한 공식을 구하고, 세 공식을 더하면 2^n이 됨을 확인하여라.

3 **네 번째마다.** i를 사용하여 $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$임을 보여라.

4 **나누어떨어짐.** $\{1, 2, \ldots, 12\}$의 부분집합(subset) 가운데 원소의 개수가 3으로 나누어떨어지는 것은 몇 개인가? 원소의 합이 3으로 나누어떨어지는 것은 몇 개인가? (두 번째 질문의 힌트: $\prod_{j=1}^{12}(1 + x^j)$를 1의 세제곱근에서 생각해 보아라.)

더 읽을거리

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (A. K. Peters; 온라인 무료 공개). 생성함수에 대한 즐거운 입문서로, 1의 거듭제곱근 필터가 앞부분에 나온다.
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count*** (Mathematical Association of America). 이항 항등식을 세기로 증명하는 책이다.
- **T. W. Körner, *Fourier Analysis*** (Cambridge University Press). 이산 푸리에 변환과 FFT를 다룬다.

5.3 $z^{2n}+1$의 인수분해

문제

STEP III 2013, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s3-q4`

도입

$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$의 값은 얼마인가? 각 인수는 제곱근이 겹겹이 들어간 복잡한 수이지만, 이들의 곱은 정확히 $\frac{1}{8}$이다. 같은 간격으로 놓인 각에서의 코사인 값들의 곱은 이처럼 자꾸 간단한 수로 정리되는데, 이 문제는 그 이유를 설명해 준다. 요령은 이 각들을 어떤 다항식(polynomial)의 근(root)의 편각(argument)으로 알아보고, 그 다항식을 인수분해(factorise)한 다음, 교묘하게 고른 값을 대입하는 것이다.

복소수 범위에서는 모든 다항식이 일차 인수(linear factor)들로 완전히 인수분해된다. 실수 범위에서는 실수가 아닌 근들이 켤레(conjugate) 쌍으로 나타나고, 이 쌍들이 합쳐져 실수 계수 이차 인수가 된다. 여기서는 이 두 사실이 모두 드러나며, 특히 두 번째 사실 덕분에 실근이 하나도 없는 $z^{2n}+1$을 실수 계수 이차식(quadratic)들의 곱으로 나타낼 수 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 복소평면(complex plane)에서 $z^{2n}=-1$의 해들은 어디에 있는가? $n=2$와 $n=4$일 때 그려 보아라.

이 해들의 절댓값(modulus)은 모두 1이고, 편각 θ는 $2n\theta=\pi+2m\pi$를 만족하므로 θ는 $\frac{\pi}{2n}$의 홀수 배이다. 이 해들은 단위원(unit circle) 위에서 정$2n$각형을 이루며, 어느 꼭짓점도 실수축 위에 놓이지 않도록 회전되어 있다(그림 5.3.1). 이들은 실수축에 대해 서로 대칭인 켤레 쌍 $e^{\pm i\theta}$로 짝지어진다.

차근차근 풀기

1단계 **켤레 쌍은 실수 계수 이차식을 준다**

$(z-e^{\mathrm{i}\theta})(z-e^{-\mathrm{i}\theta}) = z^2 - (e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta})z + 1 = z^2 - 2z\cos\theta + 1.$ ■

2단계 **인수분해**

$-\pi < \theta \le \pi$인 -1의 $2n$제곱근은 $e^{\pm \mathrm{i}\theta_k}$이고, 여기서

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

이들은 서로 다른 $2n$개의 수이고 모두 $2n$차 다항식 $z^{2n}+1$의 근이므로, 이것이 근의 전부이며

$$z^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n}(z-e^{\mathrm{i}\theta_k})(z-e^{-\mathrm{i}\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n}(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1).$$ ■

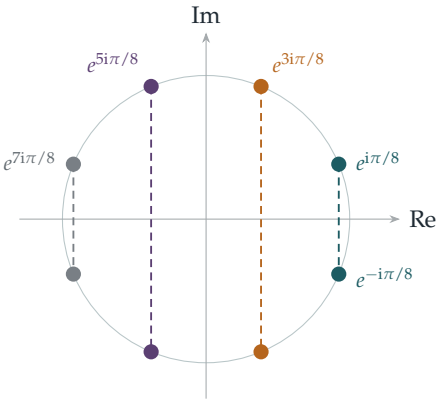


그림 5.3.1 $z^8 = -1$의 여덟 개의 해($n=4$인 경우). 이들은 점선으로 연결된 네 개의 켤레 쌍을 이루며, 각 쌍은 z^8+1의 실수 계수 이차 인수 $z^2 - 2z\cos\theta_k + 1$ 하나를 준다.

3단계 **$z = \mathrm{i}$ 대입하기**

생각해 보기 $\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta + 1$은 무엇인가? 또 n이 짝수일 때 $\mathrm{i}^{2n}+1$은 무엇인가?

각 인수는

$$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta_k + 1 = -2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

가 되므로 우변은 $(-2\mathrm{i})^n \prod_k \cos\theta_k$이다. 좌변은 $\mathrm{i}^{2n}+1 = (-1)^n + 1$이고, n이 짝수이면 이 값은 2이다. 또 n이 짝수일 때

$$(-2\mathrm{i})^n = 2^n(-\mathrm{i})^n = 2^n\big((-\mathrm{i})^2\big)^{n/2} = 2^n(-1)^{n/2}.$$

따라서

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{n/2}} = (-1)^{\frac{1}{2}n} 2^{1-n}. \qquad \blacksquare$$

$n=4$이면 이것은 도입에서 본 곱이 된다: $(-1)^2 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

4단계 n이 홀수일 때

> **생각해 보기** n이 홀수이면 각 θ_k 가운데 하나가 $\frac{\pi}{2}$와 같다. 그것은 어느 것이며, 그 때문에 왜 $z=\mathrm{i}$를 그대로 대입하는 것이 쓸모없게 되는가?

$k=\frac{n+1}{2}$일 때 $\theta_k = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$이므로 해당 인수는 z^2+1이고, 이는 $z=\mathrm{i}$에서 0이 된다. 그러면 양변이 모두 0이 되어 아무것도 알 수 없다. 이를 피하는 방법은 먼저 그 인수로 나누어 없애는 것이며, 문제에 주어진 항등식이 바로 그렇게 한 것이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 인수분해의 양변을 $1+z^2$으로 나누고, $z=\mathrm{i}$를 대입한 뒤 정리하여라. 남은 코사인들을 짝지어야 할 것이다.

인수 $z^2+1 (k=\frac{n+1}{2}$인 항)로 나누면

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + z^{2n-2} = \prod_{k\neq\frac{n+1}{2}} \left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right).$$

$z=\mathrm{i}$에서 좌변의 모든 항은 $(-z^2)^j = 1^j = 1$이고 항이 n개이므로 좌변은 n이다. 우변은 $(-2\mathrm{i})^{n-1}\prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\cos\theta_k$이다. $n-1$이 짝수이므로 $(-2\mathrm{i})^{n-1} = 2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}$이다.

이제 각들을 짝지어 보자. $\theta_{n+1-k} = \pi - \theta_k$이므로 $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$이다. 남은 $n-1$개의 인수는 $k=1,\ldots,\frac{n-1}{2}$에 대하여 이러한 쌍 $\frac{n-1}{2}$개를 이루고, 각 쌍은 $-\cos^2\theta_k$를 기여한다. 따라서

$$n = 2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}\cdot(-1)^{(n-1)/2}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k,$$

이고, 이로부터 $\prod\cos^2\theta_k = n2^{1-n}$을 얻는다. $k=\frac{n-1}{2}$인 마지막 인수는 문제에서처럼 $\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}$이다. $\blacksquare$

$n=3$으로 확인해 보자: $\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 3\cdot 2^{-2}$.

돌아보기

- **근을 알면 다항식을 안다.** 다항식은 (상수배를 제외하면) 근에 의해 결정되므로, $z^{2n}+1$의 근을 나열하는 것만으로 인수분해를 얻었다.
- **교묘한 값을 대입하라.** $z=\mathrm{i}$를 대입하자 모든 이차 인수가 코사인의 상수배로 바뀌었다.

▶ **대입했더니 $0 = 0$이 나오면, 먼저 나누어라.** n이 홀수일 때는 인수 하나가 $z = \mathrm{i}$에서 0이 되었으므로, 대입하기 전에 그 인수를 제거하였다.

숨은 수학

대수학의 기본정리

$z^{2n} + 1$이 $\mathbb{C}$ 위에서 일차 인수들로 완전히 인수분해된다는 사실은 **대수학의 기본정리**(*fundamental theorem of algebra*)의 특수한 경우이다. 이 정리는 복소수 계수의 상수가 아닌 모든 다항식이 복소수 근을 가지며, 따라서 일차 인수들로 완전히 인수분해된다는 것이다. 가우스(Gauss)는 1799년 박사 학위 논문에서 널리 인정받은 최초의 증명을 내놓았고, 이후에도 여러 차례 이 정리로 돌아와 새로운 증명을 제시하였다. 이 정리의 결과로, 실수가 아닌 근은 1단계에서 본 것과 똑같이 켤레 쌍으로 나타나므로, 모든 실수 계수 다항식은 실수 계수의 일차 인수와 이차 인수들로 인수분해된다. 이 정리는 이름은 "대수학"이지만 실질은 해석학이다. 모든 증명은 연속성 같은 실수의 어떤 성질을 사용하며, 복소해석학(complex analysis) 첫 강의에서 가장 매끄러운 증명 가운데 하나를 보게 될 것이다.

사인과 코사인의 곱

이 방법으로 항등식들을 한 무리 얻을 수 있다. $z^{2n} + 1$ 대신 $z^n - 1$을 사용하면

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

을 얻으며, 이것의 기하학적 형태는 Section 5.4에서 증명된다. 이런 항등식들은 진동계의 분석(용수철로 연결된 n개의 질점의 진동수에는 $\sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$이 나타난다)과 세기 문제(어떤 그래프(graph)의 신장 트리(spanning tree)의 개수나 직사각형의 도미노 타일링(domino tiling)의 개수가 코사인들의 곱으로 주어진다)에 등장한다. $m \times n$ 직사각형의 도미노 타일링에 대한 Kasteleyn의 1961년 공식은 $\cos^2 \frac{j\pi}{m+1}$과 $\cos^2 \frac{k\pi}{n+1}$로 이루어진 식들의 이중 곱이다.

사고 기술

근에서 곱으로

같은 간격으로 놓인 각에서의 삼각함수 값들의 곱을 계산하려면, 그 값들이 간단한 다항식의 근에서 나온 것임을 알아보고, 인수분해한 뒤, 편리한 값을 대입하라.

어떤 값을 고르느냐가 기술의 핵심이다. 여기서는 $z=\mathrm{i}$가 각 이차 인수를 코사인으로 바꾸어 주었다. 다른 값($z=1$이나 $z=-1$ 등)을 고르면 다른 항등식을 얻는다.

더 도전하기

1 **칠각형과 관련된 곱.** 소문항 (ii)에 $n=7$을 적용하여 $\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}$임을 보여라. 그리고 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$임을 보여라. (**힌트:** $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$를 이용하여 각들 사이의 관계를 찾거나, 항등식 $\sin 2x=2\sin x\cos x$를 반복해서 사용하여라.)

2 **또 다른 대입.** 인수분해에 $z=1$을 대입하여 다음을 보여라.

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}=2^{\frac{1}{2}-n}.$$

3 **z^6+1을 인수분해하기.** z^6+1을 세 개의 실수 계수 이차식의 곱으로 나타내고, 전개하여 답을 확인하여라.

4 **사인.** $z^{2n}-1$을 같은 방법으로 인수분해하고 z^2-1로 나누어 다음을 보여라.

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

더 읽을거리

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 『시각적 복소해석학』. 2장에서 1의 거듭제곱근(roots of unity)과 다항식을 아름다운 그림과 함께 다룬다.
- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra*** (Springer). 『대수학의 기본정리』. 해석학, 대수학, 위상수학(topology)에서 나온 이 정리의 여러 증명을 학부생을 위해 서술하였다.
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale*** (Princeton University Press). 『허수 이야기』. 1의 거듭제곱근과 그 쓰임을 포함한 $\sqrt{-1}$의 역사.

5.4 정다각형 속의 거리

문제

STEP III 2016, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s3-q7`

도입

반지름이 1인 원에 정칠각형(regular heptagon)을 그린다. 한 꼭짓점에서 나머지 꼭짓점으로 여섯 개의 현(chord)을 긋고 그 길이를 잰다. 여섯 길이를 모두 곱한다. 답은 정확히 7이다. 정100각형에서 한 꼭짓점에서 그은 99개의 현의 길이를 모두 곱하면 정확히 100이다.

이렇게 깔끔한 결과가 왜 성립할까? 현의 길이 자체는 지저분하다($2\sin\frac{\pi}{7}$, $2\sin\frac{2\pi}{7}$ 등). 이 문제는 이 결과가 간단한 대수적 항등식, 즉 단위근(roots of unity)을 이용한 $z^n - 1$의 인수분해(factorisation)의 기하학적 그림자라는 것, 그리고 평면 위의 거리가 복소수의 절댓값(modulus)이라는 것을 보여 준다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 다각형의 꼭짓점을 1의 n제곱근 $X_k = \omega^k$에 놓자. P가 점 z일 때 $|PX_k|$를 z로 나타내면 무엇인가? 그렇다면 모든 거리의 곱은 무엇인가?

$|PX_k| = |z - \omega^k|$이고, 이들을 모두 곱하면 $|(z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1})|$인데, 문제의 첫 부분에 따르면 이는 $|z^n - 1|$이다. n개의 거리의 곱이 하나의 절댓값이 되었다. 나머지는 모두 z를 영리하게 고르는 일이다.

차근차근 풀기

1단계 **인수분해**

각 ω^k는 $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$을 만족하므로 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$은 $z^n - 1$의 근이다. 이들은 서로 다르다(편각 $\frac{2\pi k}{n}$이 0과 2π 사이에서 모두 다르다). 따라서 이들은 이 n차 다항식의 근 n개 전부이고, 최고차항의 계수가 1이므로 $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k)$이다. ■

2단계 수직이등분선 위의 점

그림을 회전하여 $X_k = \omega^k$가 되게 하자. $X_0 = 1$과 $X_1 = \omega$에서 같은 거리에 있는 점들은 X_0X_1의 수직이등분선(perpendicular bisector)을 이루며, 이는 O를 지나고 각이 $\frac{\pi}{n}$인 직선이다.

생각해 보기 따라서 P는 어떤 실수 t(양수 또는 음수)에 대해 $z = te^{i\pi/n}$이고, $|OP| = |t|$이다. z^n은 무엇인가?

$z^n = t^n e^{i\pi} = -t^n$이다. 따라서

$$|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |z^n - 1| = |-t^n - 1| = |t^n + 1|.$$

n이 짝수이면 $t^n = |t|^n \geq 0$이므로 이 값은 $|OP|^n + 1$이다. ■

잠깐, 직접 해 보기 n이 홀수이면 어떻게 될까? $t > 0$인 경우와 $t < 0$인 경우를 따로 생각하고, 각 경우가 기하학적으로 무엇을 뜻하는지 말해 보아라.

n이 홀수이면 t^n은 t와 부호가 같다.

- $t \geq 0$이면, 즉 P가 O를 기준으로 X_0X_1의 중점과 같은 쪽에 있으면, 곱은 $|OP|^n + 1$이다.
- $t < 0$이면, 즉 P가 O를 기준으로 반대쪽(변 X_0X_1의 맞은편 꼭짓점 쪽)에 있으면, $t^n = -|OP|^n$이고 곱은 $\left|1 - |OP|^n\right|$이다.

n이 홀수일 때, O를 지나고 X_0X_1에 수직인 직선은 반대편의 한 꼭짓점을 지난다. 두 번째 경우에서 P가 그 꼭짓점일 때($|OP| = 1$) 곱은 0이 되는데, 이때 거리 중 하나가 0이므로 당연한 결과이다.

3단계 꼭짓점에서 그은 현

생각해 보기 이제 $P = X_0$이고 거리 중 하나인 $|X_0X_0|$가 0이므로 $|z^n - 1| = 0$은 쓸모가 없다. $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$을 근으로 갖지만 1은 근으로 갖지 않는 다항식은 무엇인가?

$z^n - 1$을 $z - 1$로 나누면

$$(z - \omega)(z - \omega^2)\cdots(z - \omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

우변은 다항식이므로 이 식은 모든 z에 대해 성립하며, $z = 1$에서도 성립하고 이때 값은 n이다. $z = 1$에서 절댓값을 취하면

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = |1-\omega|\,|1-\omega^2| \cdots |1-\omega^{n-1}| = n. \qquad \blacksquare$$

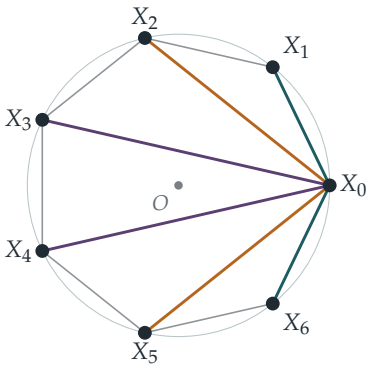


그림 5.4.1 반지름이 1인 원에 내접하는 정칠각형. X_0에서 그은 여섯 현의 길이는 $2\sin\frac{k\pi}{7}$이며, 약 0.868(청록색), 1.564(호박색), 1.950(자주색)이 각각 두 번씩 나타난다. 이들의 곱은 정확히 7이다.

돌아보기

- **거리는 절댓값이다.** $|PX_k| = |z - \omega^k|$이므로 거리의 곱은 곱의 절댓값이고, 그 곱은 닫힌 꼴(closed form)로 나타낼 수 있었다.
- **대칭을 이용해 좌표를 정한다.** 꼭짓점이 단위근이 되도록 회전하고 O를 지나는 대칭축을 이용하자 z^n을 쉽게 계산할 수 있었다.
- **대입하기 전에 0이 되는 인수를 소거한다.** Section 5.3에서처럼, 관심 있는 점에서 0이 되는 인수를 나누어 없애자 대입이 가능해졌다.

숨은 수학

코츠(Cotes)의 정리

소문항 (i)은 로저 코츠의 정리이다. 코츠는 뉴턴(Newton)의 *Principia*(프린키피아) 제2판을 편집한 케임브리지의 뛰어난 젊은 수학자로, 1716년 서른세 살의 나이로 세상을 떠났다(뉴턴은 "그가 살았더라면 우리는 무언가를 알게 되었을 것이다"라고 말했다). 코츠는 P가 O에서 정n각형의 한 꼭짓점을 지나는 반직선 위에 있으면 P에서 꼭짓점들까지

의 거리의 곱이 $||OP|^n - 1|$이고, P가 한 변의 중점을 지나는 반직선 위에 있으면 그 곱이 $|OP|^n + 1$임을 발견했다. 그는 복소수를 쓰지 않고 이 결과를 이용해 $x^n \pm 1$을 실수 계수 이차식들로 인수분해했는데, 이는 유리함수(rational function)를 적분하는 데 필요했다. 이 정리는 그가 죽은 뒤인 1722년에 출판되었다.

사인의 곱

$|1 - \omega^k| = |e^{-i\pi k/n} - e^{i\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$이므로 소문항 (ii)는 다음을 말한다.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

이것은 Section 5.3의 코사인 곱과 짝을 이룬다. 이와 관련된 곱은 $z^n - 1$의 **판별식**(discriminant)을 준다. 서로 다른 1의 n제곱근의 모든 쌍 사이 거리의 제곱을 곱하면 n^n이다. 판별식은 다항식의 근들이 서로 얼마나 떨어져 있는지를 재며, 다항식의 대수학과 수체(number field)의 대수학에서 핵심적인 역할을 한다. 이 내용은 6장에서 다룬다.

정전기학과 균등한 간격

물리적으로 해석할 수도 있다. 원 위에 크기가 같은 전하 n개를 놓자. (2차원 정전기학의 로그 퍼텐셜을 쓸 때) 퍼텐셜 에너지를 최소화하는 배치는 정다각형이며, 그 에너지에는 정확히 $\sum \ln|X_jX_k|$, 즉 거리의 곱의 로그가 들어 있다. "가능한 한 넓게 퍼진" 점들은 수치해석(Section 3.6에서 최적의 보간점은 $x = \cos\theta$를 통해 정다각형에서 나온다)과 무작위 행렬(random matrices) 이론에서 중요하다.

사고 기술

> **복소수로 기하를 대수로 바꾸기**
>
> 평면 위의 점은 복소수이고, 거리는 절댓값이며, 정다각형은 단위근이다. 거리의 곱은 다항식의 절댓값이 된다.
>
> 이렇게 옮기면 $z^n - 1$의 인수분해 같은 대수적 항등식으로, 직접 보기는 매우 어려운 기하학적 사실을 증명할 수 있다.

더 도전하기

1 **작은 경우 확인하기.** 정사각형($n=4$)과 정삼각형($n=3$)에 대해 소문항 (ii)를 직접 확인하여라.

2 **꼭짓점을 지나는 경우.** P가 O에서 X_0을 지나는 반직선 위에 있으면 $|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = \big||OP|^n - 1\big|$임을 보여라.

3 **평균 거리.** 소문항 (ii)와 Section 3.2의 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 이용하여 X_0에서 그은 $n-1$개의 현의 평균 길이가 $n^{1/(n-1)}$ 이상임을 보여라. 실제 평균 $\frac{1}{n-1}\sum_{k} 2\sin\frac{k\pi}{n}$을 $n=6$일 때 구하고 비교하여라.

4 **모든 현.** 심화단위원에 내접하는 정n각형의 $\binom{n}{2}$개 현의 길이를 모두 곱하면 $n^{n/2}$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 복소수를 이용한 기하학을 아름다운 그림과 함께 다룬다.
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems*** (Mathematical Association of America). 정다각형에 관한 우아한 문제 여러 개가 실려 있다.
- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher*** (Cambridge University Press). 코츠의 생애와 그의 수학을 다룬 전기이다.

5.5 유리수처럼 보이지만 아닌 각

문제

STEP III 2022, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

도입

학교 기하에서 만나는 각은 대개 $30°$, $45°$, $60°$처럼 도 단위로 정수이다. 이 각들의 코사인 값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$나 $\frac{1}{2}$ 같은 수이다. 그렇다면 반대 방향은 어떨까? 코사인 값이 $\frac{1}{3}$ 같은 간단한 분수라면, 그 각도 도 단위로 깔끔한 수일까?

각 $\cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.528779\ldots°$는 과학의 여러 분야에 등장한다. 이 각은 정사면체(regular tetrahedron)의 두 면 사이의 각이고, 그 보각(supplement)인 $109.47°$는 메테인 분자에서 두 결합 사이의 각이다. 이 문제는 이 각이 도 단위로 유리수(rational)가 아님을 증명한다. 즉 $70\frac{1}{2}$도 아니고, $\frac{1411}{20}$도 아니며, 어떤 분수도 아니다. 이 각의 소수 전개는 결코 순환하지 않는다. 언뜻 사소해 보이는 이 사실이 1900년에 다비트 힐베르트(David Hilbert)가 제시한 유명한 문제 가운데 하나를 해결했다.

시작하기 전에

생각해 보기 θ가 유리수, 예를 들어 $\theta = \frac{p}{q}$도라고 가정하자. $\sin(k\theta) = 0$을 만족하는 양의 정수 k를 찾아라.

$k = 180q$로 잡으면 $k\theta = 180p$도이고, 이는 반 바퀴의 정수배이므로 $\sin(k\theta) = 0$이다. 따라서 유리수 각은 언제나 어떤 배수가 $180°$의 배수에 떨어진다. 그러므로 θ가 무리수(irrational)임을 증명하려면 어떤 배수 $k\theta$도 사인 값이 0이 아님을 보이면 충분하다. 소문항 (ii)는 그런 k가 있다면 그 가운데 가장 작은 것을 잡고 모순(contradiction)을 이끌어 냄으로써 이를 보인다. 이는 다시 Section 1.3의 정렬 원리(well-ordering principle)이다.

차근차근 풀기

1단계 배각 공식

생각해 보기 $\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$로 쓰고, 인수 $\cos^k\theta$를 묶어 내어라. 괄호 안에는 무엇이 남는가?

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k = \cos^k\theta \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{i}^j \tan^j\theta$이다. 허수부(imaginary part)는 홀수 $j = 2m+1$에서 나오며, 이때 $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}(-1)^m$이다.

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m+1}\theta \\ &= \sin\theta\cos^{k-1}\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m}\theta.\end{aligned}$$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$이므로 이것이 구하는 공식이다. ■짝수 $j = 2m$에서 나오는 실수부(real part)는 다음을 준다.

$$\cos k\theta = \cos^k\theta \left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

2단계 홀짝성

이제 $\sec\theta = a$는 홀수인 정수이므로 $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$은 짝수인 정수이다. 또 θ는 0°와 90° 사이에 있으며 양 끝값은 아니므로 $\sin\theta \neq 0$이고 $\cos\theta \neq 0$이다.

생각해 보기 $\sin(k\theta) = 0$이면 괄호 $k - \binom{k}{3}(a^2-1) + \cdots$는 0이어야 한다. 첫째 항을 뺀 모든 항은 $a^2 - 1$의 배수이다. 이로부터 k에 대해 무엇을 알 수 있는가?

괄호는 k에 짝수 $a^2 - 1$의 배수들을 더한 것이다. k가 홀수라면 괄호는 홀수가 되는데, 홀수인 정수는 0일 수 없다. 따라서 k는 짝수여야 한다.

그러면 $\sin(k\theta) = 2\sin(\tfrac{1}{2}k\theta)\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$이다. 그런데 $\tfrac{1}{2}k$는 k보다 작은 양의 정수이므로, k의 최소성에 의해 $\sin(\tfrac{1}{2}k\theta) \neq 0$이다. 따라서 $\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$이다. ■

3단계 모순

잠깐, 직접 해 보기 $m = \tfrac{1}{2}k$로 두고 코사인 공식을 적용하여라. $\cos(m\theta)$는 왜 결코 0이 될 수 없는가?

1단계에 의해 $\cos(m\theta) = a^{-m}\left(1 - \binom{m}{2}(a^2-1) + \binom{m}{4}(a^2-1)^2 - \cdots\right)$이다. 괄호는 1에 짝수 $a^2 - 1$의 배수들을 더한 것이므로 홀수이고, 특히 0이 아니다. 따라서 $\cos(m\theta) \neq 0$이며,

이는 2단계와 모순이다.

그러므로 $\sin(k\theta) = 0$을 만족하는 양의 정수 k는 존재하지 않는다. (그런 것이 하나라도 있다면 가장 작은 것이 있어야 하는데, 방금 가장 작은 것이 존재할 수 없음을 보였다.) 시작하기 전에에서 관찰한 사실에 의해, θ는 도 단위로 유리수일 수 없다. ■

4단계 코탄젠트 버전

? **생각해 보기** $\cot\phi = \frac{1}{b}$이면 $\sec^2\phi - 1$은 무엇인가? 그것은 짝수인가?

$\tan\phi = b$이므로 $\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2$이고, b가 짝수이므로 이 값은 짝수이다(실제로는 4의 배수이다). 또 $0° < \phi < 90°$이므로 $\sin\phi$와 $\cos\phi$는 0이 아니다. 이제 똑같은 논증이 그대로 통한다. k가 $\sin(k\phi) = 0$을 만족하는 가장 작은 양의 정수라면, 괄호 $k - \binom{k}{3}b^2 + \cdots$는 0이 되어야 하므로 k는 짝수이다. 그러면 $\cos(\frac{1}{2}k\phi) = 0$이다. 그러나 코사인의 괄호 $1 - \binom{m}{2}b^2 + \cdots$는 홀수이다. 모순이므로 ϕ는 무리수이다. ■

예를 들어 $\cot^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}2 \approx 63.43°$는 무리수이다.

돌아보기

- **유리수 각은 주기적인 배수를 가진다.** 이렇게 바꾸어 말함으로써 무리수임을 보이는 문제가 모든 k에 대한 $\sin(k\theta)$에 관한 명제로 바뀌었다.
- **홀짝성 논증.** 2를 법으로(modulo 2) 계산하여 어떤 정수들이 홀수이고 따라서 0이 아님을 보였다. 단순하지만 결정적이다.
- **가장 작은 반례.** 가장 작은 k를 가정하고 그보다 작은 것(여기서는 $\frac{1}{2}k$)이 존재해야 함을 보이는 것은 1장의 정렬 원리 논증이다.

숨은 수학

무리수 각만큼의 회전

θ가 도 단위로 유리수이면, θ만큼 계속 회전할 때 결국 출발점으로 돌아온다. θ가 무리수이면 결코 돌아오지 않으며, 놀라운 일이 일어난다. 점 $k\theta$들(360°를 법으로 생각한다)이 원 위에 **고르게** 퍼져서 모든 각에 얼마든지 가까이 다가간다. 이것이 **균등분포 정리**(equidistribution theorem)로, 1910년 무렵 헤르만 바일(Hermann Weyl), 바츨라프 시에르핀스키(Wacław Sierpiński), Piers Bohl이 각자 독립적으로 증명하였다. 그림 5.5.1은 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$의 처음 40개 배수를 보여 준다. 이 점들은 이미 원을 채워 가고 있으며, 어느 점도

반복되지 않는다.

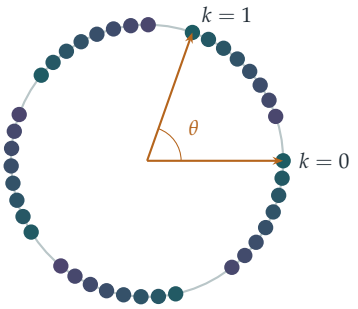


그림 5.5.1 $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$일 때, $k = 0, 1, \ldots, 39$에 대한 각 $k\theta$의 점들(k가 커질수록 청록색에서 자두색으로 바뀐다). θ가 무리수이므로 어느 점도 반복되지 않으며, 점들은 원 전체에 고르게 퍼진다.

힐베르트의 세 번째 문제

1900년 힐베르트는 새로운 세기를 위한 스물세 개의 문제를 제시하였다. 그 세 번째 문제는 다음과 같다. 두 다면체(polyhedron)의 부피가 같다면, 한쪽을 유한 개의 다면체 조각으로 잘라 다시 이어 붙여 언제나 다른 쪽을 만들 수 있는가? (평면의 다각형에 대해서는 답이 "그렇다"이며, 이것이 월리스–보여이–게르비엔 정리(Wallace–Bolyai–Gerwien theorem)이다.) 1년도 안 되어 힐베르트의 제자 막스 덴(Max Dehn)은 답이 **아니다**임을 보였다. 정사면체는 잘라서 다시 이어 붙여 같은 부피의 정육면체로 만들 수 없다. 덴의 증명은 각 다면체에 모서리의 길이와 이면각(dihedral angle)으로 만든 양, 오늘날 **덴 불변량**(Dehn invariant)이라 부르는 양을 대응시키는데, 이 양은 자르고 다시 이어 붙여도 변하지 않는다. 정육면체에서는 이 값이 0이고, 정사면체에서는 0이 아닌데, 그 까닭은 바로 이면각 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이 $180°$의 유리수 배가 아니기 때문이다. 이것이 정확히 이 문제가 증명하는 내용이다.

니븐의 정리

이 이야기는 어디까지 나아갈까? 1956년 이반 니븐(Ivan Niven)은 θ가 도 단위로 유리수이고 $\cos\theta$가 유리수이면 $\cos\theta$는 $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ 가운데 하나임을 증명하였다. 따라서 코사인 값이 유리수인 "좋은" 각은 $0°, 60°, 90°, 120°, 180°$와 이와 관련된 각들뿐이다. 이 증명은 $2\cos\theta$가 정수 계수를 갖는 최고차항 계수가 1인 다항식(monic polynomial)의 근, 즉 **대수적 정수**(algebraic integer)라는 사실을 이용하며, 이는 Section 1.3의 끝에서 언급한 아이디어이다.

사고 기술

0이 아님을 보이는 증명으로서의 홀짝성

정수로 이루어진 식이 결코 0이 아님을 보이려면, 그것이 언제나 홀수임을 보여라. 즉 2를 법으로 줄여라.

이 단순한 아이디어가 최소 반례(minimal counterexample)와 결합하여 깊은 사실을 증명하였다. 작은 수를 법으로 줄여 어떤 방정식이 성립할 수 없음을 보이는 것은 Section 1.5에서처럼 정수론(number theory)에서 가장 흔히 쓰이는 수법 가운데 하나이다.

더 도전하기

1 **정사면체.** 정사면체의 두 면 사이의 각이 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이고, 메테인 분자에서 두 결합 사이의 각(정사면체의 중심에서 두 꼭짓점으로 향하는 선분 사이의 각)이 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$임을 보여라.

2 **3–4–5 삼각형.** 3–4–5 삼각형의 가장 작은 각이 도 단위로 무리수임을 보여라. (*힌트:* 이 각은 $\cot^{-1}\frac{4}{3}$이다. 논증을 적절히 고치거나, 가우스 정수(Gaussian integer) $4+3i$의 거듭제곱을 생각하여 어느 것도 실수가 아님을 보여라.)

3 **왜 a가 홀수인가?** $a=2$일 때 논증의 어디가 잘못되는가? $\cos^{-1}\frac{1}{2}$는 유리수인가?

4 **작은 경우에 대한 니븐의 정리.** $0°$와 $90°$ 사이에서 도 단위로 정수인 각 θ 가운데 $\cos\theta$가 유리수인 것을 모두 찾고, 그 목록이 니븐의 정리와 일치하는지 확인하여라.

더 읽을거리

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). 삼각함수의 유리수 값에 관한 니븐의 정리가 실려 있다.
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK*,** 힐베르트의 세 번째 문제를 다룬 장. 덴의 해법을 아름답게 설명한다.
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*** (A. K. Peters). 스물세 개 문제 모두에 얽힌 이야기를 들려준다.

5.6 페르마 점

문제

STEP III 2000, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/00-s3-q3`

도입

세 마을이 서로를 모두 잇는 도로망을 가능한 한 짧게 건설하려 한다. 교차점은 어디에 두어야 할까? 1640년경 페르마(Pierre de Fermat)는 삼각형 내부에서 $PA + PB + PC$를 최소로 하는 점 P를 찾는 문제를 제기했고, 토리첼리(Evangelista Torricelli)가 이를 풀었다. 그 점은 세 변이 모두 120°의 각으로 보이는 점이다.

이 문제는 복소수(complex numbers)를 이용하여 그 점을 작도하는 아름다운 방법을 증명한다. 삼각형의 각 변 위에 바깥쪽으로 정삼각형(equilateral triangle)을 세우고, 새로 생긴 각 꼭짓점을 원래 삼각형의 마주 보는 꼭짓점과 잇는다. 세 직선은 한 점, 곧 **페르마 점**(Fermat point)에서 만나며, 세 선분의 길이는 모두 같고 그 길이가 바로 도로 총길이의 최솟값이다. 복소수와 $e^{\mathrm{i}\pi/3}$에 관한 항등식 하나만 있으면 전체 논증은 몇 줄의 대수 계산으로 끝난다.

시작하기 전에

생각해 보기 A, B, C는 어디에 있는가? 각각의 편각(argument)은 무엇인가? OA, OB, OC가 서로 이루는 각은 얼마인가?

$A = p$는 양의 실수축(real axis) 위에 있다(편각 0°). $B = q\alpha^2 = qe^{2\pi\mathrm{i}/3}$의 편각은 120°이다. $C = -r\alpha = re^{\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}\pi/3}$의 편각은 240°이다. 따라서 원점은 삼각형 내부의 점으로, 이 점에서 세 꼭짓점은 서로 120°의 각을 이루며 보이고, 각 꼭짓점까지의 거리는 p, q, r이다. 원점은 구성상 **바로** 페르마 점이다. 이 문제는 정삼각형 작도가 이 점을 찾아낸다는 것을 보이는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 핵심 항등식

$\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$이므로 α는 $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$의 근이다. $\alpha \neq -1$이므로 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, 즉 $1+\alpha^2 = \alpha$이다. ■

여기서 유용한 두 결과가 나온다. $1-\alpha = -\alpha^2$이고, $\alpha - \alpha^2 = 1$이다. 또한 $1-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\pi/3}$은 α의 켤레복소수(complex conjugate)이다.

2단계 회전으로 본 정삼각형

생각해 보기 삼각형 CAN은 꼭짓점을 시계 방향으로 이름 붙인 정삼각형이다. C에 서 있다면 A에서 N으로 어떻게 갈 수 있는가? $N-C$를 $A-C$로 나타내어라.

C, A, N 순으로 시계 방향으로 돌면, 점 N은 A를 C를 중심으로 시계 방향으로 60° 회전(rotation)시켜 얻는다. $e^{-i\pi/3} = 1-\alpha$를 곱하면 시계 방향으로 60° 회전하므로

$$\begin{aligned} N &= C + (1-\alpha)(A-C) = -r\alpha + (1-\alpha)(p+r\alpha) \\ &= (1-\alpha)p + r(\alpha - \alpha^2 - \alpha) = (1-\alpha)p - \alpha^2 r. \end{aligned}$$ ■

(반시계 방향이 아니라 시계 방향으로 회전시키므로 N은 CA에 대해 원점의 반대편, 즉 삼각형 바깥에 놓인다.)

잠깐, 직접 해 보기 같은 방법으로 L과 M을 구하고, 1단계의 항등식을 이용하여 간단히 하여라.

마찬가지로 $L = A + (1-\alpha)(B-A)$이고 $M = B + (1-\alpha)(C-B)$이다.

$$\begin{aligned} L &= p + (1-\alpha)(q\alpha^2 - p) = \alpha p + (\alpha^2 - \alpha^3)q = \alpha p + (\alpha^2+1)q = \alpha(p+q), \\ M &= q\alpha^2 + (1-\alpha)(-r\alpha - q\alpha^2) = q\alpha^3 + r(\alpha^2 - \alpha) = -q - r. \end{aligned}$$

그리고 $1-\alpha = -\alpha^2$을 이용하면 $N = -\alpha^2 p - \alpha^2 r = -\alpha^2(p+r)$이다.

3단계 원점을 지나는 세 직선

생각해 보기 $L = \alpha(p+q)$와 $C = -r\alpha$를 비교해 보라. 무엇을 알 수 있는가? M과 A, N과 B에 대해서도 같은 방법으로 해 보라.

L은 α의 양의 실수배이고 C는 α의 음의 실수배이다. 따라서 L과 C는 O를 지나는 같은 직선

위에서 O의 양쪽에 놓이고, 선분 LC는 원점을 지나며 그 길이는 $|L-C| = |\alpha|(p+q+r) = p+q+r$이다.

마찬가지로 $M = -(q+r)$과 $A = p$는 실수축 위에서 O의 양쪽에 놓이므로, MA는 O를 지나고 길이는 $p+q+r$이다. 또 $N = -\alpha^2(p+r)$과 $B = q\alpha^2$은 O를 지나고 방향이 α^2인 직선 위에서 서로 반대편에 놓이므로, NB는 O를 지나고 길이는 $p+q+r$이다. ■

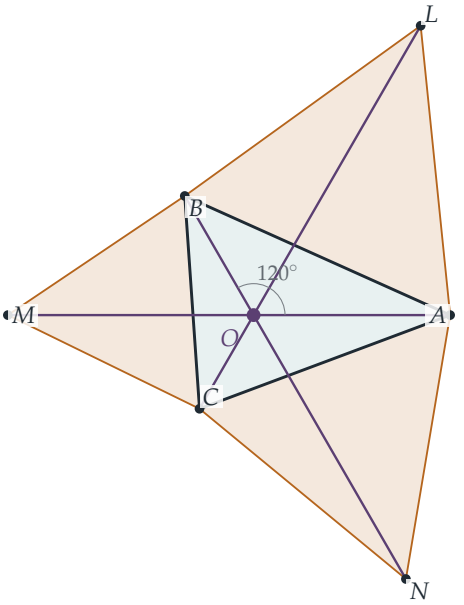


그림 5.6.1 $p = 2, q = 1.4, r = 1.1$일 때의 페르마 점. ABC의 각 변 위에 바깥쪽으로 정삼각형(호박색)을 세운다. 직선 LC, MA, NB(자주색)는 모두 원점 O를 지나는데, O는 ABC의 각 변이 120°의 각으로 보이는 점이다. 세 선분의 길이는 모두 $p+q+r = 4.5$이다.

돌아보기

- **회전은 곱셈이다.** 정삼각형을 세운다는 것은 한 꼭짓점을 다른 꼭짓점을 중심으로 60° 회전시킨다는 뜻이고, 이는 $e^{\pm i\pi/3}$을 곱하는 것이다.
- **영리한 좌표 선택.** 페르마 점을 원점에 두고 꼭짓점들을 1, α^2, $-\alpha$ 방향에 놓았더니 모든 식이 간단히 정리되었다.
- **하나의 항등식을 거듭 사용하기.** 모든 식의 간단히 하기는 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$과 $\alpha^3 = -1$에서 나왔다.

숨은 수학

페르마 점이 거리의 합을 최소로 하는 이유

왜 $PA + PB + PC$는 각 변이 120°의 각으로 보이는 점에서 가장 작아야 할까? 멋진 논증이 하나 있다. 전체 그림을 B를 중심으로 60° 회전시켜 A를 L'(AB 위에 세운 정삼각형의 꼭짓점)으로, P를 P'으로 보낸다. 삼각형 BPP'은 정삼각형이므로 $PB = PP'$이고, $PA = P'L'$이다. 그러면 $PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$이고, 이는 L'에서 C로 가는 경로의 길이이다. 이 값은 $|L'C|$ 이상이며, 등호는 경로가 직선일 때, 즉 P에서의 각이 120°일 때 정확히 성립한다. 따라서 총길이의 최솟값은 문제에서 구한 대로 $|LC| = p + q + r$이다. (이 논증은 삼각형의 모든 각이 120°보다 작을 때 성립한다. 그렇지 않으면 최솟값은 둔각인 꼭짓점에서 나온다.)

비누막과 슈타이너 트리

세 개의 말뚝(A, B, C를 나타낸다)이 달린 틀을 비눗물에 담갔다 꺼내면, 비누막은 표면장력(surface tension) 에너지를 최소로 하면서 페르마 점에서 120°로 만나는 세 개의 벽을 이룬다. 점이 더 많을 때 이들을 잇는 가장 짧은 연결망은 **슈타이너 트리**(Steiner tree)로, 세 변이 120°로 만나는 교차점이 추가로 생긴다. 슈타이너 트리를 찾는 일은 일반적으로 계산상 어렵지만(NP-난해(NP-hard) 문제이다), 도로망, 송유관, 컴퓨터 칩의 배선을 설계할 때 실제로 중요하다.

나폴레옹 정리(Napoleon's theorem)

같은 그림 속에는 또 하나의 보석이 숨어 있다. 임의의 삼각형의 세 변 위에 세운 세 정삼각형의 **중심**은 정삼각형을 이룬다. 이 정리는 전통적으로 나폴레옹 보나파르트(Napoleon Bonaparte, 열성적인 아마추어 수학자였다)의 업적으로 알려져 있지만, 그가 이것을 발견했다는 증거는 없다. 이 정리 역시 $1 + \alpha^2 = \alpha$를 이용하면 복소수로 짧게 증명할 수 있다.

사고 기술

문제에 맞는 좌표를 고르라

가장 중요한 점을 원점에 두고, 문제의 대칭성에 맞추어 배치하라. 좋은 선택을 하면 대수 계산이 거의 자명해질 수 있다.

여기서 원점은 페르마 점이었고, 세 꼭짓점은 (부호를 제외하면) -1의 세제곱근(cube roots) 방향에 놓였다. 다른 좌표를 썼다면 같은 계산이 훨씬 복잡해졌을 것이다.

더 도전하기

1 **이름 붙인 순서 확인하기.** 정삼각형의 꼭짓점을 반시계 방향으로 이름 붙이면(즉 안쪽으로 세우면) 세 직선이 일반적으로 O를 지나지 않음을 보여라.

2 **나폴레옹 정리.** 정삼각형 ABL의 중심이 $\frac{1}{3}(A+B+L)$임을 보여라. 위에서 구한 식들을 이용하여 세 중심이 정삼각형을 이룸을 보여라.

3 **최솟값.** $p=2$, $q=1.4$, $r=1.1$일 때, P가 각 꼭짓점에 있을 때와 무게중심(centroid) $\frac{1}{3}(A+B+C)$에 있을 때 $PA+PB+PC$를 계산하고, 모두 4.5보다 큼을 확인하여라.

4 **정삼각형 판정법.** z_1, z_2, z_3이 (어느 방향으로든) 정삼각형을 이루기 위한 필요충분조건(if and only if)이 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***(수학이란 무엇인가) (Oxford University Press). 7장에서 페르마 점, 슈타이너 트리, 비누막을 다룬다.
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***(복소수와 기하학) (Mathematical Association of America). 복소수로 증명한 여러 기하학 정리를 정확히 이 수준에서 다룬다.
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***(시각적 복소해석학) (Oxford University Press). 1장에 나폴레옹 정리와 그 밖의 기하학적 결과가 실려 있다.

5.7 사상으로서의 복소 지수함수

문제

STEP II 1997, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/97-s2-q5`

도입

지수함수(exponential function)는 $y = e^x$라는 곡선으로 익숙할 것이다. 그러나 복소변수(complex variable) 함수는 곡선으로 그릴 수 없다. 입력이 평면 위의 점이고 출력도 평면 위의 점이기 때문이다. 이런 함수는 **사상**(map)으로 그려 보는 것이 좋다. 사상이란 한 평면의 모든 점을 다른 평면의 점으로 옮기는 변환(transformation)으로, 그 과정에서 평면을 늘이고 구부린다.

문제의 식은 $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v) = e^{u+\mathrm{i}v} = e^w$이다. 사상으로 보면 복소 지수함수는 놀라운 일을 한다. 평면의 가로 띠 하나를 말아서 (원점을 뺀) 평면 전체로 만들고, 세로 직선은 원으로 감고 가로 직선은 반직선으로 펼친다. 그리고 빙 둘러 감기 때문에 일대일(one-to-one)이 아니다. 각 점으로 무한히 많은 점이 옮겨 간다. 이것이 복소로그(complex logarithm)가 "다가(multi-valued)"인 이유이며, 복소해석학(complex analysis)에서 처음 만나는 놀라움 가운데 하나이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$의 절댓값(modulus)과 편각(argument)을 u와 v로 나타내면 무엇인가?

$|z| = e^u$이고 $\arg z = v$이다(2π의 배수 차이는 무시한다). 따라서 w의 실수부 u는 원점으로부터의 거리를 지수적으로 조절하고, 허수부 v는 방향을 조절한다. 이 관찰 하나로 문제의 거의 모든 부분이 풀린다.

차근차근 풀기

1단계 $e^w = \mathrm{i}e$ 풀기

생각해 보기 $\mathrm{i}e$의 절댓값과 편각은 무엇인가?

$|\mathrm{i}e| = e$이고 $\arg(\mathrm{i}e) = \frac{\pi}{2}$이다. 따라서 $e^u = e$이어야 하므로 $u = 1$이고, 임의의 정수 k에 대하여 $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$이다. 해는

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

이다. 해는 무한히 많고, 세로 방향으로 2π 간격으로 놓여 있다.

2단계 격자선의 상

세로 직선 $u = c$ 위에서는 v가 변하는 동안 $|z| = e^c$가 고정된다. 따라서 상은 원점을 중심으로 하고 반지름이 e^c인 원이며, v가 모든 실수를 지나는 동안 이 원을 무한히 여러 번 돈다.

가로 직선 $v = d$ 위에서는 $\arg z = d$가 고정되고 $|z| = e^u$는 모든 양의 값을 가진다. 따라서 상은 원점에서 각 d 방향으로 뻗은 열린 **반직선**(ray)이며, 원점 자체는 포함하지 않는다. 직선 $v = d$와 $v = d + 2\pi$는 같은 반직선을 준다.

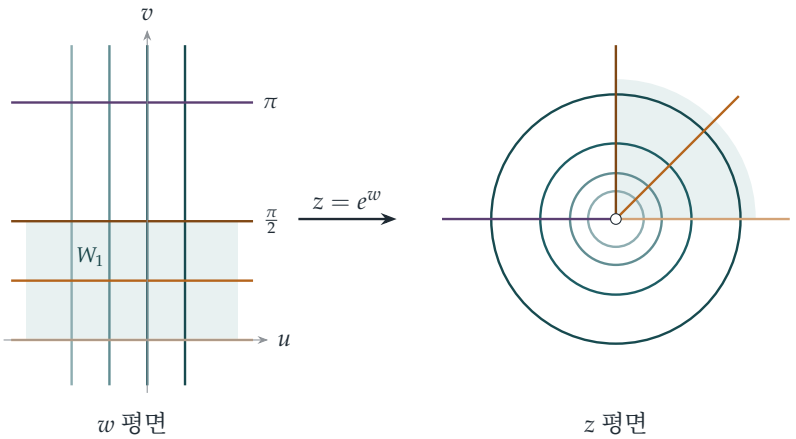


그림 5.7.1 사상으로서의 복소 지수함수. w 평면의 세로 직선 $u = c$(청록색)는 반지름이 e^c인 원으로 가고, 가로 직선 $v = d$(호박색, 자주색)는 각 d 방향의 반직선으로 간다. 색칠한 띠 $W_1 = \{0 < v < \frac{\pi}{2}\}$는 정확히 제1사분면 위로 간다. 두 그림 모두에서 격자선이 직각으로 만난다는 점에 주목하라. 이 사상은 각을 보존한다. 원점(빈 원)에는 결코 도달하지 않는다.

3단계 일대일 대응인 조각

생각해 보기 어떤 점 w가 제1사분면 $x > 0, y > 0$으로 옮겨 가는가? 그 집합이 사분면과 일대일 대응을 이루기에는 너무 큰 이유는 무엇인가?

z가 열린 제1사분면에 있을 필요충분조건은 절댓값과 상관없이 $\arg z$가 (2π를 법으로 하여) 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 엄격하게 있는 것이다. 따라서 w는 $0 < v < \frac{\pi}{2}$ 또는 $2\pi < v < \frac{5\pi}{2}$ 또는 ...를 만족해야 한다. 즉 무한히 많은 가로 띠이며, 각 띠는 사분면 전체 위로 옮겨 간다. 띠 하나 안에서는 u와 v가 $|z|$와 $\arg z$에 의해 유일하게 정해지므로, 어느 띠 하나든 사분면과 일대일 대응을 이룬다. 따라서 다음과 같이 잡을 수 있다.

$$W_1 = \{u + \mathrm{i}v : 0 < v < \tfrac{\pi}{2}\}, \qquad W_2 = \{u + \mathrm{i}v : 2\pi < v < \tfrac{5\pi}{2}\}.$$

잠깐, 직접 해 보기 이번에는 구멍 뚫린 원판(punctured disc) $0 < |z| < 1$과 일대일 대응을 이루는 w 평면의 집합 두 개를 찾아라.

$|z| < 1$은 $e^u < 1$, 즉 $u < 0$을 뜻한다. 또 모든 편각이 정확히 한 번씩 덮여야 하므로, v는 길이가 정확히 2π이고 한쪽 끝은 포함하되 다른 쪽 끝은 포함하지 않는 구간 위를 움직여야 한다. 예를 들면 다음과 같다.

$$W_3 = \{u + \mathrm{i}v : u < 0,\ 0 \le v < 2\pi\}, \qquad W_4 = \{u + \mathrm{i}v : u < 0,\ -\pi < v \le \pi\}.$$

이들은 한쪽 경계는 포함하고 다른 쪽 경계는 제외한 반쪽 띠이다. (두 경계를 모두 포함하면 양의 실수축 위의 점이 두 번 대응되고, 둘 다 제외하면 빠지게 된다.) ■

돌아보기

- **절댓값과 편각이 변수를 분리한다.** $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$이고 $\arg e^w = \operatorname{Im} w$이므로, w의 실수부와 허수부가 거리와 방향을 각각 독립적으로 조절한다.
- **복소함수를 사상으로 그려 보라.** 격자선이 어디로 가는지 따라가면, 그래프로 그릴 수 없는 함수도 분명하게 그려 볼 수 있다.
- **주기성(periodicity)은 단사성(injectivity)을 깨뜨린다.** $e^{w+2\pi\mathrm{i}} = e^w$이므로 이 사상은 다대일이며, 역함수를 가지려면 높이가 2π인 띠로 제한해야 한다.

숨은 수학

복소로그

실수 직선에서 ln은 exp의 역함수이다. 복소평면에서는 $z \neq 0$인 각 z에 대하여 $e^w = z$의 해 w가 무한히 많고, 이 해들은 $2\pi i$의 배수만큼 차이 나므로 "$\log z$"는 하나의 수가 아니다. 진짜 함수를 얻으려면 **분지**(branch)를 골라야 하는데, 이는 W_3이나 W_4 같은 띠를 고른다는 뜻이다. **주분지**(principal branch)는 $-\pi < \arg z \leq \pi$로 잡는다. 모든 분지는 원점에서 뻗은 어떤 반직선을 따라 값이 뛰는데, 이 반직선을 **분지 절단**(branch cut)이라 한다. 리만(Bernhard Riemann)은 1851년 학위 논문에서 로그가 평면 위에 산다는 고집을 버리는 것으로 이 문제를 해결했다. 로그는 무한한 나선 계단, 곧 **리만 곡면**(Riemann surface) 위에 살며, 그 위에서는 일가이고 매끄럽다. 오늘날 리만 곡면은 기하학, 정수론(number theory), 끈 이론(string theory)의 중심에 있다.

각이 보존된다

그림 5.7.1을 다시 보자. 세로 격자선과 가로 격자선은 직각으로 만나고, 이들이 옮겨 간 원과 반직선도 직각으로 만난다. 이는 우연이 아니다. 복소함수는 도함수가 0이 아닌 곳이면 어디서나 곡선 사이의 각을 보존한다. 이런 사상을 **등각**(conformal) 사상이라 한다. 국소적으로 등각 사상은 회전과 확대·축소일 뿐인데, 이는 바로 복소수 $f'(z)$를 곱하는 일이 하는 것이다. 등각 사상은 복잡한 영역을 답이 알려진 단순한 영역으로 변환함으로써 유체 흐름, 정전기학, 열전도 문제를 푸는 데 쓰인다.

메르카토르 지도

이 절과 Section 4.8을 잇는 놀라운 사실이 있다. 1569년 메르카토르(Gerardus Mercator)의 지도는 나침반 방위가 일정한 항로가 직선이 되도록 설계되었는데, 그러려면 각을 보존해야 한다. 지구를 먼저 (북극에서) 평면 위로 입체 사영(stereographic projection)한 다음 복소로그를 취하면, 그 결과가 정확히 메르카토르 도법이다. log 아래에서 반직선과 원이 가로 직선과 세로 직선이 되는 것과 똑같이, 경선은 세로 직선이 되고 위선은 가로 직선이 된다. 이 절의 지수 사상을 거꾸로 돌리면 바로 항해사가 쓰는 해도의 수학이 된다.

사고 기술

함수를 변환으로 시각화하기

함수를 그래프로 그릴 수 없을 때는 함수가 하는 일을 그려라. 단순한 곡선들의 격자를 따라가며 그 곡선들이 어디로 가는지 보라.

복소함수의 경우에는 가로 직선과 세로 직선, 또는 원과 반직선의 상이 보통 모든 것을 말해 준다. 사상이 도형에 무슨 일을 하는지 생각하는 이런 사고방식은 기하학과 해석학 전체에 걸쳐 흐른다.

더 도전하기

1 **방정식 풀기.** $e^w = -1$을 만족하는 모든 복소수 w와, $e^w = 1 + \mathrm{i}$를 만족하는 모든 w를 구하여라.

2 **정사각형의 상.** 꼭짓점이 $0, 1, 1+\mathrm{i}, \mathrm{i}$인 정사각형의 $z = e^w$에 의한 상을 구하고 그려라.

3 **직각.** 원 $|z| = e^c$와 반직선 $\arg z = d$가 직각으로 만남을 직접 보이고, 이것이 직선 $u = c$와 $v = d$가 수직이라는 사실과 어떻게 맞아떨어지는지 설명하여라.

4 **제곱.** c와 d를 0이 아닌 실수라 하자. 사상 $z \mapsto z^2$에 의한 직선 $x = c$와 $y = d$의 상을 구하여라. 그 상들이 포물선(parabola)이며, 만나는 곳에서는 언제나 직각으로 만남을 보여라. ($c = 0$ 또는 $d = 0$이면 어떻게 되는가?)

더 읽을거리

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 제 2장과 제 4장에서 지수함수, 로그, 등각 사상을 훌륭한 그림과 함께 다룬다.
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis*** (Oxford University Press). 명료한 대학 학부 첫 교재이다.
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis*** (Cambridge University Press). 기하학에 중점을 둔 또 하나의 훌륭한 학부 입문서이다.

5.8 원판에 숨은 거리

문제

STEP III 2013, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s3-q6`

도입

얼핏 보면 이 문제는 절댓값(modulus)과 켤레복소수(conjugate)를 다루는 연습 문제이고, 끝에는 묘하게 생긴 부등식이 나온다. 도대체 누가 $\frac{|z-w|}{|1-zw^*|}$ 같은 것에 관심을 가질까?

그것이 거리이기 때문이다. z와 w 사이의 보통 거리가 아니라 전혀 다른 기하학에서의 거리이다. 그 기하학에서는 단위원판(unit disc)이 무한히 펼쳐진 하나의 우주 전체이고, 직선은 원호이며, 삼각형의 세 각의 합은 $180°$보다 작다. 이것이 바로 **쌍곡기하학**(*hyperbolic geometry*)이다. 쌍곡기하학은 유클리드(Euclid)의 평행선 공준(parallel postulate)을 증명하려던 이천 년에 걸친 시도 끝에 19세기에 발견되었고, 이 문제의 부등식은 알고 보면 모습을 감춘 쌍곡기하학의 삼각부등식(triangle inequality)이다. 더욱 놀랍게도 우변은 Section 3.8에서 만났던 특수상대성이론(special relativity)의 속도 합성 공식이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** $|z-w| \le |z| + |w|$가 그림으로부터 어떻게 나오는가? (z와 $-w$를 벡터로 생각해 보라.)

$z - w = z + (-w)$이다. 원점에서 출발하는 화살표로 z를 그리고, z의 끝점에서 출발하는 화살표로 $-w$를 그린다. 원점에서 마지막 점까지의 화살표가 $z - w$이고, 세 화살표는 세 변의 길이가 $|z|$, $|w|$, $|z-w|$인 삼각형을 이룬다. 삼각형의 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 클 수 없다.

또한 임의의 복소수 a에 대하여 $|a|^2 = aa^*$임을 떠올리자. 이를 이용하면 문제에 나오는 모

든 절댓값을 대수식으로 바꿀 수 있다.

차근차근 풀기

1단계 절댓값 전개하기

생각해 보기 $|z-w|^2 = (z-w)(z^*-w^*)$를 전개하라. 이것을 $(|z|+|w|)^2$와 비교하라.

$|z-w|^2 = zz^* - zw^* - z^*w + ww^* = |z|^2 + |w|^2 - zw^* - z^*w$이다. 한편 $(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 - zw^* - z^*w - 2|zw|$이고, $|z||w| = |zw|$이므로 이것은 앞의 식과 같다. ■

$E = (zw^*) + (zw^*)^* + 2|zw| = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw|$이므로 이것은 실수이다. 그리고 삼각부등식에 의하여 $E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2 \geq 0$이다. ■

2단계 두 번째 항등식

$|1-zw^*|^2 = (1-zw^*)(1-z^*w) = 1 - zw^* - z^*w + |z|^2|w|^2$이고, $(1+|zw|)^2 - E = 1 + 2|zw| + |zw|^2 - zw^* - z^*w - 2|zw|$이므로 둘은 같다. ■

3단계 부등식

생각해 보기 $A = (|z|+|w|)^2$, $B = (1+|zw|)^2$이라 하자. 부등식을 제곱하면 $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$가 된다. 이것은 언제 성립하는가?

증명해야 할 부등식의 양변은 모두 음이 아니므로, 이 부등식은 양변을 제곱한 $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$와 동치이다. $B - E = |1-zw^*|^2 > 0$이라 가정하고 분모를 없애면 다음과 같다.

$$(A-E)B \leq A(B-E) \iff -EB \leq -EA \iff E(B-A) \geq 0.$$

$E \geq 0$이므로 이 부등식은 $B \geq A$, 즉 $1 + |zw| \geq |z| + |w|$일 때 항상 성립한다.

잠깐, 직접 해 보기 $1 + |z||w| - |z| - |w|$가 인수분해(factorise)됨을 보여라. 이 식은 언제 음이 아닌가?

$1 + |z||w| - |z| - |w| = (1-|z|)(1-|w|)$이다. $|z| > 1$이고 $|w| > 1$이면 두 인수가 모두 음수이므로 곱은 양수이다. 따라서 $B \geq A$이고 부등식이 성립한다. ■

반대로 $|z| < 1$이고 $|w| < 1$이면 두 인수가 모두 양수이므로 곱은 이번에도 양수이고, 같은 논증이 그대로 통한다. 즉 **그렇다**, 이 경우에도 부등식은 성립한다. (두 경우 모두

$|zw^*| \neq 1$이므로 $1 - zw^* \neq 0$이고, 따라서 좌변이 정의된다.) 부등식이 성립하지 않을 수 있는 것은 하나는 단위원 안에, 다른 하나는 단위원 밖에 있는 쌍인 경우이다.

돌아보기

- $|a|^2 = aa^*$. 모든 항등식은 켤레복소수의 곱을 전개하여 얻었다. 이것은 절댓값을 대수적으로 다루는 표준적인 방법이다.
- **한 양의 부호 문제로 줄이기.** 제곱하고 분모를 없앤 뒤에는 부등식 전체가 $(1 - |z|)(1 - |w|)$의 부호에 달려 있었다.
- **다른 경우도 확인하기.** 마지막 질문은 $|z|, |w| < 1$인 경우를 물었는데, 같은 인수분해로 곧바로 답할 수 있었다.

숨은 수학

비유클리드 기하학(non-Euclidean geometry)

이천 년 동안 수학자들은 유클리드의 다섯 번째 공준(직선 위에 있지 않은 한 점을 지나 그 직선에 평행한 직선은 정확히 하나 있다)을 그의 다른 공리들로부터 증명하려고 애썼다. 1820년대와 1830년대에 로바첸스키(Nikolai Lobachevsky), 보여이 야노시(János Bolyai), 그리고 (공개하지는 않았지만) 가우스(Gauss)는 그것이 불가능하다는 것을 깨달았다. 평행선이 무한히 많은, 완벽하게 모순 없는 기하학이 존재하는 것이다. 1882년 푸앵카레(Henri Poincaré)는 단위원판 안에서 이 기하학의 아름다운 모형을 찾아냈다. 점은 열린 원판의 점이고, "직선"은 지름, 그리고 경계원과 직각으로 만나는 원호이며, z와 w 사이의 거리는 다음과 같다.

$$d(z, w) = 2 \tanh^{-1} \rho(z, w), \qquad \text{여기서} \qquad \rho(z, w) = \frac{|z - w|}{|1 - zw^*|}.$$

점이 경계원에 가까워질수록 중심으로부터의 거리는 무한대로 커진다. 즉 이 원판은 왜곡 렌즈를 통해 바라본, 무한히 펼쳐진 평면 전체이다.

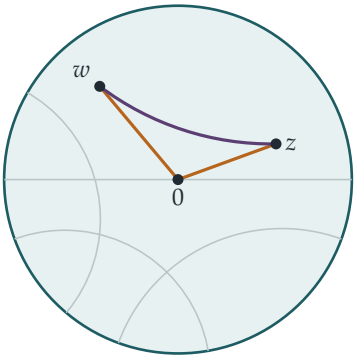


그림 5.8.1 푸앵카레 원판(Poincaré disc). 쌍곡기하학의 "직선"은 지름이거나 경계와 직각으로 만나는 원의 호이다(회색). 꼭짓점이 $0, z, w$인 쌍곡삼각형은 두 변이 지름 위에 있고(호박색) 한 변이 원호 위에 있다(자주색). 문제의 부등식은 쌍곡 거리로 잴 때 자주색 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 길지 않다는 뜻이다.

모습을 감춘 삼각부등식

$|z|, |w| < 1$일 때 이 문제가 증명한 것은 다음과 같다. $|z| = \tanh a$, $|w| = \tanh b$라 하면, 0에서 z와 w까지의 쌍곡 거리는 각각 $2a$와 $2b$이다. 그러면 Section 3.8에서 본 tanh의 덧셈 정리에 의하여

$$\frac{|z| + |w|}{1 + |zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} = \tanh(a + b).$$

따라서 부등식은 $\tanh\left(\frac{1}{2}d(z,w)\right) \leq \tanh(a+b)$, 즉

$$d(z,w) \leq 2a + 2b = d(z,0) + d(0,w).$$

라는 뜻이다. 이것이 쌍곡 거리에 대한 삼각부등식이다(그림 5.8.1). 상대론적 속도 합성 공식과 쌍곡기하학은 사실 같은 것이다. 특수상대성이론에서 가능한 속도 전체의 집합은 알맞은 거리 개념을 주면 그 자체로 쌍곡공간이다. 이 이야기는 Section 7.6에서 다시 다룬다.

원판의 대칭

왜 ρ가 올바른 양일까? $|a| < 1$일 때 사상 $z \mapsto \dfrac{z-a}{1-a^*z}$는 단위원판을 자기 자신으로 보내고, 쌍곡 거리를 보존하며, a를 중심으로 옮긴다. 이 사상들은 평행이동의 쌍곡기하학 버전이고, $\rho(z,w)$는 w를 중심으로 옮겼을 때의 $|$옮겨진$z|$와 정확히 같다. 이러한 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformations*)은 복소해석학(complex analysis)의 핵심 주제이다. 에셔(M. C. Escher)의 *Circle Limit*(원의 극한) 목판화 연작은 수학자 콕서터(H. S. M. Coxeter)의 그림에서 영감을 받은 작품으로, 합동인 물고기와 천사로 푸앵카레 원판을 쪽매맞춤한 모습을 보여 준다. 가장자리로 갈수록 무늬가 작아지는 것은 그곳에서 쌍곡 거리가 한없이 커지기 때문이다.

사고 기술

식이 무엇을 뜻하는지 물어라

어떤 대수식이 자꾸 나타나면, 그것에 거리, 각, 확률, 대칭 같은 의미가 있는지 물어보라.

여기서는 절댓값으로 이루어진 이상한 비가 다른 기하학에서의 거리였고, 이상한 부등식이 그 기하학의 삼각부등식이었다. 의미를 알아보면 결과가 왜 참인지, 그리고 그것이 어디로 이어지는지가 설명된다.

더 도전하기

1 **수치로 확인하기.** $z = \frac{1}{2}, w = -\frac{1}{2}$로 두고 부등식의 양변을 계산하라. 다음으로 쌍곡 거리 $d(z,0), d(0,w), d(z,w)$를 계산하고, 이 경우 삼각부등식에서 등호가 성립함을 확인하라. 왜 그런가?

2 **섞인 경우.** 부등식이 성립하지 않는, $|z| < 1 < |w|$인 z, w를 찾아라.

3 **등거리변환(isometry).** $|a| < 1$일 때 $f(z) = \dfrac{z - a}{1 - a^{*}z}$라 하자. $|z| = 1$이면 $|f(z)| = 1$이고, $f(a) = 0$임을 보여라. 또한 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w)$임을 보여라.

4 **무한은 가깝다.** 0에서 r까지$(0 < r < 1)$의 쌍곡 거리가 $\ln \frac{1+r}{1-r}$이고, $r \to 1$일 때 이 값이 무한대로 발산함을 보여라. 중심으로부터의 쌍곡 거리가 10이 되려면 점이 경계에 얼마나 가까워야 하는가?

더 읽을거리

- **Caroline Series, “Hyperbolic geometry” 강의 노트** (University of Warwick, 무료 공개). 푸앵카레 원판에서 출발하는 명쾌한 입문 강의이다.
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space*** (Oxford University Press). 유클리드에서 아인슈타인(Einstein)에 이르는 비유클리드 기하학의 역사를 다룬다.
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 6장에서 비유클리드 기하학과 뫼비우스 변환을 아름다운 그림과 함께 다룬다.

우리가 배운 것

우리는 실수인 답을 얻는 데에도 허수를 거치는 단계가 필요할 수 있다는 카르다노(Cardano)의 당혹스러운 발견에서 출발했고, 세 가지 질문을 던졌다. 복소수(complex number)는 실수 문제를 푸는 데 어떻게 도움이 되는가, 단위근(roots of unity)은 무엇이 특별한가, 그리고 복소함수는 어떻게 생겼는가. 이 장의 여덟 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 복소수는 실수 문제를 푸는 데 어떻게 도움이 되는가?

실수에 관한 사실이 복소평면을 거치면 짧게 증명되는 경우를 거듭 보았다.

- **각은 곱이 된다.** π에 관한 마친(Machin)의 공식은 $(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$가 $239-\mathrm{i}$의 실수배라는 명제이며, 이는 정수 계산만으로 확인된다(Section 5.1).
- **세기는 평균 내기가 된다.** 이항계수(binomial coefficient)를 세 개마다 하나씩 더한 합은 $(1+x)^n$에 1의 세제곱근을 대입하여 얻었다(Section 5.2).
- **삼각함수의 곱은 다항식의 값이 된다.** 같은 간격의 각에서 코사인 값을 곱한 것은 $z^{2n}+1$을 인수분해하고 $z=\mathrm{i}$를 대입하여 얻었다(Section 5.3).
- **기하는 대수가 된다.** 거리는 절댓값(modulus)이 되므로, 정n각형의 한 꼭짓점에서 그은 현(chord)들의 길이의 곱은 $|1+1+\cdots+1|=n$이다(Section 5.4). 회전은 곱셈이 되므로, 페르마 점(Fermat point)의 작도는 항등식 $1+\alpha^2=\alpha$로 귀결되었다(Section 5.6).
- **드무아브르로부터 무리성을.** $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^k$를 전개하고 홀짝성(parity)을 따지는 논증으로, $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이 도 단위로 유리수가 아님을 보였다. 이는 힐베르트(Hilbert)의 세 번째 문제에 대한 덴(Dehn)의 풀이에서 핵심이 되는 사실이다(Section 5.5).

2. 단위근은 무엇이 특별한가?

n제곱근인 단위근은 정n각형의 꼭짓점이고, 가장 단순한 다항식 z^n-1의 근이며, 곱셈에 대하여 군(group)을 이룬다. 이 세 가지 사실을 합치면 단위근이 어디에나 등장하는 이유가 설명된다. 원 위에 고르게 퍼져 있으므로 그 합은 0이고, 이로부터 Section 5.2의 거르기 방법과, 더 일반적으로는 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)이 나온다. z^n-1의 근이므로 단위근 전체에 걸친 곱은 단순한 다항식의 값이 된다(Section 5.3, Section 5.4). 그리고 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로 단위근의 거듭제곱은 순환하는데, 바로 이 성질이 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$

같은 각에서는 성립하지 않는다(Section 5.5). 6장에서 단위근은 대수학의 중심이 되며, 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다.

3. 복소함수는 어떻게 생겼는가?

Section 5.7에서 우리는 e^w를 띠 모양의 영역을 말아서 평면으로 만드는 사상으로 그려 보았다. 이 사상은 세로선을 원으로, 가로선을 반직선으로 보내고, 무한히 여러 번 감기므로 로그는 다가함수가 된다. 또한 이 사상이 각을 보존한다는 것, 즉 **등각**(*conformal*) 사상의 첫 번째 예라는 것과 메르카토르(Mercator) 도법의 바탕이 된다는 것을 보았다. Section 5.8에서는 낯선 부등식 하나가 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 삼각부등식(triangle inequality)임이 밝혀졌다. 쌍곡기하학에서 단위원판은 무한한 평면이고, 직선은 원호이며, 거리는 상대론적 속도 덧셈 공식에 따라 합쳐진다.

4. 복소수 도구 상자

방법	사용한 곳
곱셈에서 편각(argument)이 더해짐	마친의 공식(5.1)
2π의 배수 확인하기	마친의 공식(5.1)
단위근에 대한 평균	세 개마다 하나씩 고른 계수(5.2)
근을 이용해 인수분해한 뒤 대입하기	코사인의 곱(5.3); 현(5.4)
0이 되는 인수를 나누어 없애기	5.3; 5.4
드무아브르(De Moivre)의 정리	배각 공식(5.5)
홀짝성과 최소 반례(minimal counterexample)	무리수 각(5.5)
곱셈으로서의 회전	정삼각형(5.6)
격자의 사상	지수 사상(5.7)
$\lvert a\rvert^2 = aa^*$	푸앵카레(Poincaré) 원판 부등식(5.8)

다음으로

- 단위근은 6장을 이끌어 가며, 여기에는 Section 6.1의 원분다항식(cyclotomic polynomial)과 Section 6.2의 가우스(Gauss)의 정17각형 작도가 포함된다.
- 쌍곡기하학, tanh, 상대성이론 사이의 관계는 Section 7.6에서 전개된다.
- 마친의 공식에 등장한 가우스 정수(Gaussian integers)는 Section 1.6의 주제였다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***(시각적 복소해석학): 지금까지 쓰인 복소수 책 가운데 가장 아름다운 책으로, 그림이 가득하다. 1장부터 시작하자.
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***(허수 이야기): 카르다노에서 현대 물리학까지 이어지는 $\sqrt{-1}$의 역사.
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***(복소수와 기하학): 복소수로 다루는 유클리드 기하학으로, 수준이 이 장과 꼭 맞는다.
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***(복소해석학 입문): 대학 과정을 처음 엿보기에 좋다.

카르다노는 자신의 허수량이 미묘한 만큼이나 쓸모없다고 생각했다. 다섯 세기가 지난 지금, 수학이나 물리학에서 허수가 등장하지 않는 분야를 찾기는 어렵다. 이 장의 교훈은 아다마르(Hadamard)의 말 그대로이다. 실수에 관한 문제가 어려우면 실수 직선 밖으로 나가 보라. 복소평면은 더 넓고, 그 안에서는 복잡해 보이던 많은 것이 단순해진다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 스스로 푼 것을 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 제대로 풀어 보아라.

5.1 마친의 공식

1. $(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 34+14\mathrm{i}$이고, 이 수의 편각(argument)은 $\tan^{-1}\frac{7}{17}$이다. 또한 이 편각은 $-2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\frac{\pi}{4}$이기도 하다.
2. $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5+5\mathrm{i}$이고, 편각은 $\frac{\pi}{4}$이다.
3. $(3+\mathrm{i})^2(7+\mathrm{i}) = (8+6\mathrm{i})(7+\mathrm{i}) = 50+50\mathrm{i}$이다.
4. 두 급수는 교대급수(alternating series)이므로 오차(error)는 처음으로 생략한 항보다 작다. $16\tan^{-1}\frac{1}{5}$의 경우 생략한 항 $\frac{16}{(2N+1)5^{2N+1}}$이 5×10^{-21}보다 작아야 하고, 이를 위해서는 $N=14$개의 항이 필요하다. $4\tan^{-1}\frac{1}{239}$의 경우에는 4개의 항이면 충분하다. 계산기를 쓰면 $16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}\right)-\frac{4}{239}\approx3.14162$이다.

5.2 단위근 필터

1. $(1+1)^n+(1-1)^n = 2\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots\right)$이므로, $n\ge1$일 때 합은 2^{n-1}이다.
2. 평균을 내기 전에 ω^{-1}과 ω^{-2}를 곱한다: $\frac{1}{3}\left(2^n+\omega^{-1}(1+\omega)^n+\omega^{-2}(1+\omega^2)^n\right)$. $1+\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이므로 이는 $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$이다. 세 번째 나머지(residue)에 대해서는 $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$를 얻으며, 세 코사인의 합 $\cos x+\cos(x-\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{2\pi}{3})$은 0이다.
3. $j=0,1,2,3$에 대해 $(1+\mathrm{i}^j)^n$의 평균을 낸다. 합은 $\frac{1}{4}\left(2^n+(1+\mathrm{i})^n+0+(1-\mathrm{i})^n\right)$이고, $(1\pm\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\pi/4}$이다.
4. 크기로 세면: $\frac{1}{3}(2^{12}+2\cos4\pi) = 1366$. 합으로 세면: $\prod(1+\omega^j)$는 $2, 1+\omega, 1+\omega^2$를 각각 네 개씩 인수로 가지고 $(1+\omega)(1+\omega^2)=1$이므로, 그 값은 16이다(ω^2에서의 곱도 마찬가지이다). 따라서 개수는 $\frac{1}{3}(4096+16+16) = 1376$이다.

5.3 $z^{2n}+1$의 인수분해

1. 소문항 (ii)에 $n=7$을 대입하면 $\cos^2\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{3\pi}{14}\cos^2\frac{5\pi}{14}=\frac{7}{64}$를 얻고, 세 코사인은 모두 양수이다. 두 번째 식에 대해서는 $c=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$이라 하자. 그러면 $8c\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$이므로 $c=-\frac{1}{8}$이다. 또한 $\cos\frac{4\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$이다.

2. $z=1$에서 $2=\prod\bigl(2-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\bigr)=\prod 4\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}$이므로, (모두 양수인) 사인들의 곱은 $\sqrt{2/4^n}=2^{\frac{1}{2}-n}$이다.

3. $z^6+1=(z^2-\sqrt{3}z+1)(z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)$이고, 바깥쪽 두 인수의 곱은 z^4-z^2+1이다.

4. $z^{2n}=1$의 근은 ±1과, $1\le k\le n-1$에 대한 켤레(conjugate) 쌍 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\pi/n}$이므로 $\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\bigl(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\bigr)$이다. $z\to1$로 보내면 좌변은 n으로 수렴하고, 우변은 $\prod 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$이다.

5.4 정다각형 속의 거리

1. 정사각형: $\sqrt{2}\times2\times\sqrt{2}=4$. 정삼각형: $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$.

2. $X_k=\omega^k$로 두고, $P=r$을 양의 실수축 위에 둔다. 그러면 $\prod|r-\omega^k|=|r^n-1|$이다.

3. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 평균은 기하평균(geometric mean) $n^{1/(n-1)}$ 이상이다. $n=6$일 때 현(chord)의 길이는 $1,\sqrt{3},2,\sqrt{3},1$이고, 평균은 $\frac{4+2\sqrt{3}}{5}\approx1.493$이다. 이에 비해 $6^{1/5}\approx1.431$이다.

4. 소문항 (ii)에 의해 각 꼭짓점에서 나가는 $n-1$개 현의 곱은 n이다. 모든 n개의 꼭짓점에 대해 곱하면 n^n이 되는데, 이때 모든 현이 두 번씩 세어지므로 $\binom{n}{2}$개 현의 곱은 $n^{n/2}$이다.

5.5 유리수처럼 보이지만 아닌 각

1. 꼭짓점 $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$과 중심 O를 잡자. 두 결합 벡터(bond vector)의 내적(dot product)은 -1이고 길이는 $\sqrt{3}$이므로, 결합각(bond angle)은 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$이다. 한 면의 바깥쪽 법선(outward normal)은 맞은편 꼭짓점으로 향하는 벡터에 음의 부호를 붙인 것이므로, 바깥쪽 법선 사이의 각도 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$이고, 두 면 사이의 각은 그 보각(supplement)인 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이다.

2. $(4+3\mathrm{i})^k=a_k+\mathrm{i}b_k$라 하자. $4+3\mathrm{i}$와 그 켤레는 $t^2-8t+25$의 근이므로 $b_{k+1}=8b_k-25b_{k-1}\equiv3b_k\pmod 5$이고, $b_1=3$이므로 $b_k\equiv3^k\not\equiv0\pmod 5$이다. 따라서 어떤 거듭제곱도 실수가 아니다. 만약 이 각이 유리수 도(degree)라면 그 각의 어떤 배수는 180°의 배수가 되고, 그에 해당하는 거듭제곱은 실수가 될 것이다.

3. $a = 2$이면 $a^2 - 1 = 3$이 홀수이므로 홀짝성(parity) 논증이 성립하지 않는다. 실제로 $\cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ$는 유리수이며, $k = 3$일 때 사인 쪽 괄호는 $3 - \binom{3}{3} \cdot 3 = 0$이다.

4. 0°, 60°, 90°이고, 코사인 값은 각각 1, $\frac{1}{2}$, 0이다. 니븐 정리(Niven's theorem)에 따르면, 180°의 유리수배에서 cos이 가질 수 있는 유리수 값은 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1뿐이다.

5.6 페르마 점

1. 안쪽으로 세우면 꼭짓점은 $A + (1 - \bar{\alpha})(B - A)$ 등이 된다. $p = 2$, $q = 1.4$, $r = 1.1$인 예에서 C와 새로운 L을 지나는 직선은 O를 지나지 않으며(판정식 $\operatorname{Im}(\bar{C}L') = 0$이 성립하지 않는다), 나머지 두 직선도 마찬가지이다.

2. 정삼각형(equilateral triangle)의 중심은 무게중심(centroid)이다. $L = \alpha(p + q)$, $M = -(q + r)$, $N = -\alpha^2(p + r)$일 때, ABL, BCM, CAN의 중심 G_1, G_2, G_3는 $G_3 - G_1 = \alpha(G_2 - G_1)$을 만족하며($\alpha^2 = \alpha - 1$을 이용해 전개하라), 이는 $G_1G_2G_3$가 정삼각형임을 뜻한다. 예에서 그 한 변의 길이는 $\frac{p+q+r}{\sqrt{3}} \approx 2.598$이다.

3. $PA + PB + PC$의 값은 A에서 약 5.68, B에서 5.13, C에서 4.89, 무게중심에서 4.54이며, 모두 4.5보다 크다.

4. (어느 한 방향(orientation)으로) 정삼각형이라는 것은 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$일 때 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ 또는 $z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$이라는 뜻이다. $\omega + \omega^2 = -1$을 이용하면 두 좌변의 곱은 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1$이다.

5.7 사상으로서의 복소 지수함수

1. $w = (2k + 1)\pi\mathrm{i}$일 때 $\mathrm{e}^w = -1$이고, $w = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$일 때 $\mathrm{e}^w = 1 + \mathrm{i}$이다. 여기서 k는 정수이다.

2. 영역 $1 \le |z| \le \mathrm{e}$, $0 \le \arg z \le 1$(1라디안(radian))로, 고리 영역(annulus)의 일부이다. 아래쪽 변은 실수축 위의 $[1, \mathrm{e}]$로, 오른쪽 변은 반지름이 e인 호로, 위쪽 변은 각 1인 반지름 방향의 선분으로, 왼쪽 변은 단위원의 호로 옮겨진다.

3. 반직선(ray)은 반지름 방향이고, 원의 접선(tangent)은 반지름에 수직이다. 이것이 직선 $u = c$와 $v = d$의 관계와 맞아떨어지는 것은 e^w가 각을 보존하기 때문이다(그 도함수는 결코 0이 되지 않는다).

4. $(x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$이다. 직선 $x = c$는 $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$으로, $y = d$는 $u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2$으로 옮겨진다. 이들은 각각 왼쪽과 오른쪽으로 열린 포물선(parabola)이며, 둘 다 초점(focus)이 0에 있다. 두 식을 같게 놓으면 $v^2 = 4c^2d^2$이므로, 두 포물선은 $u = c^2 - d^2$, $v = \pm 2cd$에서 두 번 만난다. $v = 2cd$(두 직선이 교차하는 점 $c + \mathrm{i}d$의 상(image))에서 기울기 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$는 $-\frac{d}{c}$와 $\frac{c}{d}$이고, $v = -2cd$에서는 $\frac{d}{c}$와 $-\frac{c}{d}$이다. 두 경우 모두 곱은 -1이다. (두 번째 교점은 첫 번째 직선 위의 점 $c - \mathrm{i}d$의 상이자 두 번째 직선

위의 점 $-c + \mathrm{i}d$의 상이다. 제곱하면 z와 $-z$가 같은 곳으로 가기 때문이다.) $c = 0$이면 $x = 0$의 상은 반직선 $u \le 0$, $v = 0$이고, $d = 0$이면 $y = 0$의 상은 반직선 $u \ge 0$, $v = 0$이다. 이들은 포물선이 아니다. 두 직선이 0이 아닌 곳에서 교차하면 반직선도 여전히 다른 쪽 상과 직각으로 만나지만, $c = d = 0$이면 두 상이 모두 실수축 위에 놓인다. 0에서 이 사상은 각을 두 배로 만들기 때문에(그곳에서 도함수 $2z$가 0이다), 두 축 사이의 직각이 평각(straight angle)이 된다.

5.8 원판에 숨은 거리

1. 양변이 모두 $\frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$이다. 그러면 $d(z,0) = d(0,w) = 2\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \ln 3$이고 $d(z,w) = 2\tanh^{-1}\frac{4}{5} = \ln 9$이므로 등호가 성립한다. 즉 0은 z에서 w로 가는 쌍곡 선분(hyperbolic line segment) 위에 있다(이 선분은 지름이다).

2. 소문항 (i)과 (ii)에 의해, $E > 0$일 때 부등식은 $|z| + |w| \le 1 + |zw|$, 즉 $(1-|z|)(1-|w|) \ge 0$과 동치이다. 혼합된 경우에는 이것이 성립하지 않는다. 예를 들어 $z = \frac{1}{2}$, $w = 3$이면 좌변은 $\frac{5/2}{1/2} = 5$이고 우변은 $\frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$이다.

3. $|z| = 1$이면 $|1 - a^*z| = |\bar{z} - a^*| = |z - a|$이다. 직접 계산하면 $f(z) - f(w) = \frac{(1-|a|^2)(z-w)}{(1-a^*z)(1-a^*w)}$이고 $1 - f(z)f(w)^* = \frac{(1-|a|^2)(1-zw^*)}{(1-a^*z)(1-aw^*)}$이다. 나눈 뒤 절댓값(modulus)을 취하면 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z,w)$를 얻는다.

4. $d(0,r) = 2\tanh^{-1} r = \ln\frac{1+r}{1-r}$이고, 이는 $r \to 1$일 때 ∞로 발산한다. 거리가 10이 되려면 $r = \tanh 5 \approx 0.99991$이어야 한다. 즉 가장자리로부터 약 9×10^{-5} 이내이다.

장

6

대수와 구조

대수학의 모든 기발한 요령 뒤에는 구조가 있으며, 그 구조를 이해하는 것은 요령을 아무리 많이 아는 것보다 값지다.

이 장의 내용

6.1 근이 모두 단위근인 다항식 STEP III 2010

6.2 가우스의 정17각형 STEP II 1991

6.3 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$를 근으로 갖는 다항식 STEP II 2023

6.4 사차방정식 풀기 STEP III 2017

6.5 공리에서 출발하는 미분 STEP II 1992

6.6 부분군의 합집합 STEP II 1988

6.7 사원수군 STEP III 1993

6.8 특이행렬로 이루어진 군 STEP III 1996

A 연습문제 해답 439쪽

방정식에서 구조로

> 수학은 서로 다른 것에 같은 이름을 붙이는 기술이다.
>
> — 앙리 푸앵카레(Henri Poincaré)

역사의 대부분 동안 대수학(algebra)은 방정식을 푸는 일을 뜻했다. 바빌로니아인은 4000년 전에 이차방정식(quadratic equation)을 풀었고, 16세기 이탈리아 수학자들은 삼차방정식(cubic equation)과 사차방정식(quartic equation)을 풀었다. 그러고 나서 거의 300년 동안 오차방정식(quintic equation)은 모든 시도를 견뎌 냈다. 1820년대와 1830년대에 마침내 해결이 이루어졌을 때, 대수학은 완전히 바뀌었다. 닐스 헨리크 아벨(Niels Henrik Abel)은 오차방정식의 일반적인 근의 공식이 존재하지 않음을 증명했고, 에바리스트 갈루아(Évariste Galois)는 어떤 방정식을 풀 수 있는지를 정확히 설명했는데, 방정식 자체가 아니라 **근**(*root*)**의 대칭**(*symmetry*)을 연구함으로써 그렇게 했다. 이를 위해 그는 새로운 종류의 수학적 대상, 곧 군(group)을 고안해야 했다.

답을 계산하는 것에서 구조를 연구하는 것으로의 이 전환이 바로 이 장의 주제이다. 현대 대수학은 "해가 무엇인가?"라고 묻는 대신 "이것은 어떤 종류의 대상이며, 어떤 연산을 허용하는가?"라고 묻는다. 그 답은 옛 요령들이 왜 통했는지를 설명해 주고, 요령만으로는 결코 해결할 수 없었던 문제들을 매듭짓는다.

구조가 왜 중요한가

2000년 동안 모든 시도를 견뎌 낸 세 가지 고대 문제가 있다. 자와 컴퍼스(ruler and compasses)만으로 정육면체의 부피를 두 배로 늘리는 것, 임의의 각을 삼등분하는 것, 정7각형을 작도(construction)하는 것이다. 이 가운데 어느 것도 불가능하며, 19세기에 발견된 그 증명은 기발한 작도가 아니라 구조에 관한 논증이다. 곧 자와 컴퍼스로 도달할 수 있는 수들이 이루는 체(field)의 **차수**(*degree*)에 관한 논증이다(Section 6.3). 같은 이론으로 정17각형은 왜 **작도할 수 있는지**(Section 6.2), 그리고 사차방정식은 풀 수 있지만 오차방정식은 왜 풀 수 없는지(Section 6.4)도 설명된다.

구조는 또한 여러 곳으로 옮겨 간다. 결정(crystal)의 대칭, 다항식의 근들의 치환(permutation), 3차원 공간의 회전, 루빅스 큐브의 움직임, 타원곡선(elliptic curve) 위의 점들은 모두 군의 공리(axiom)를 만족한다. 공리로부터 한 번 증명한 정리는 이 모두에서 성립한다. 푸앵카레의 말처럼 "서로 다른 것에 같은 이름을 붙이는" 이 경제성이야말로 추상대수학(abstract algebra)을 그토록 강력하게 만드는 것이다.

대학에서 만나게 될 것

1학년 때는 **군**(세 가지 공리를 만족하는 연산이 주어진 집합)을 만나고, 대개 **환**(*ring*)과 **체**(덧셈과 곱셈이 주어진 집합)도 만난다. 부분군(subgroup)의 크기가 군의 크기를 나눈다는 라그랑주(Lagrange) 정리를 증명하고, 치환, 대칭군(symmetry group), 행렬군(matrix group)을 만난다. 2학년과 3학년에는 이것들이 체와 군을 연결하고 방정식과 작도에 관한 고전적인 질문에 답하는 **갈루아 이론**(*Galois theory*), 행렬을 통해 군을 연구하는 **표현론**(*representation theory*), 그리고 Section 1.7의 아이디어를 튼튼한 기반 위에 세우는 **대수적 정수론**(*algebraic number theory*)으로 이어진다. 이 장의 마지막 세 절은 군에 관한 것이다. 군은 더 이상 STEP 출제 범위(syllabus)에 포함되지 않지만(2019년에 빠졌다), 문제들은 그 자체로 완결되어 있으며 각 절에서 필요한 정의를 제시한다.

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **무엇으로부터 무엇을 만들 수 있는가?** 유리수(rational number)로부터 제곱근을 취하거나 방정식을 풀어서 어떤 수에 도달할 수 있으며, 어떤 수에 도달할 수 없다는 것은 어떻게 증명하는가?
2. **방정식의 근의 공식은 왜 성립하는가?** 이차, 삼차, 사차방정식에 근의 공식이 있는 숨은 이유는 무엇이며, 오차가 되면 무엇이 달라지는가?
3. **추상화로 무엇을 얻는가?** 대상을 그것이 따르는 규칙만으로 기술하면 어떤 일이 일어나는가?

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
6.1	원분다항식(cyclotomic polynomial)	1의 거듭제곱근(root of unity)을 위수(order)에 따라 분류한다
6.2	정17각형	가우스(Gauss) 주기: 합과 곱이 이차방정식을 준다
6.3	최소다항식(minimal polynomial)	거듭제곱근(radical)을 소거한다; 차수는 곱해진다
6.4	사차방정식 풀기	대칭함수(symmetric function); 분해삼차식(resolvent cubic)
6.5	공리로부터 출발하는 미분(differentiation)	규칙에 의해 결정되는 연산
6.6	부분군의 합집합	군의 공리로부터 논증하기
6.7	사원수군(quaternion group)	연산을 행렬로 표현하기
6.8	특이행렬(singular matrix)로 이루어진 군	정의를 문자 그대로 읽기

이 장을 읽는 방법

이 문제들 중 상당수는 힘으로 밀어붙이는 계산(brute force)으로 풀 수 있다. 모든 것을 전개하고, 계수를 비교하고, 모든 경우를 확인하는 것이다. 필요하다면 먼저 그렇게 하라. 그런 다음 돌아보며, 무엇 덕분에 그 계산이 통했는지, 그리고 그 뒤에 구조적인 이유가 있는지 물어보라. 구조적인 이유는 대개 더 짧고, 언제나 더 많은 것을 밝혀 주며, 힘으로 밀어붙이는 계산이 불가능해질 때 필요한 것이 바로 그것이다.

6.1 근이 모두 단위근인 다항식

문제

STEP III 2010, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/10-s3-q3`

도입

n차 단위근(roots of unity), 즉 $z^n = 1$의 해는 정n각형의 꼭짓점에 놓인다. 그러나 이들이 모두 같은 성격인 것은 아니다. 예를 들어 12차 단위근 가운데 1은 이미 1차 단위근이고, -1은 2차 단위근이며, i는 4차 단위근이다. 열두 개 가운데 **원시**(*primitive*) 단위근인 네 개만이 열두 걸음을 모두 거쳐야 1로 돌아온다.

단위근을 필요한 걸음 수에 따라 분류하고 각 부류마다 다항식을 하나씩 만들면 **원분다항식**(*cyclotomic polynomials*)을 얻는다(그리스어로 "원을 나눈다"는 뜻이다). 소수가 자연수를 이루는 기본 구성 요소이듯이 원분다항식은 $z^n - 1$을 이루는 기본 구성 요소이며, 가우스(Gauss)의 정17각형 작도(Section 6.2), 단위근 필터(Section 5.2), 그리고 현대 정수론의 많은 부분의 바탕에 놓여 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 모든 n차 단위근은 $z^n = 1$을 만족한다. 그러나 1이 되는 가장 작은 양의 거듭제곱 지수는 n보다 작을 수도 있다. 네 개의 4차 단위근 1, i, -1, $-\mathrm{i}$ 각각에 대하여 그 가장 작은 지수는 무엇인가?

$1^1 = 1$, $(-1)^2 = 1$이고, $\mathrm{i}^4 = (-\mathrm{i})^4 = 1$이며 이보다 작은 지수로는 성립하지 않는다. 따라서 가장 작은 지수는 각각 1, 4, 2, 4이다. 이 가장 작은 지수를 단위근의 **위수**(*order*)라 하며, 원시 n차 단위근은 바로 위수가 n인 단위근이다. 이 문제 전체의 핵심이 되는 사실은 **모든 단위근의 위수는 정확히 하나로 정해진다**는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 처음 몇 개

원시 4차 단위근은 i와 $-\mathrm{i}$이므로 $\mathrm{C}_4(x) = (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) = x^2+1$이다. ■

> **생각해 보기** 위수가 1, 2, 3, 5, 6인 단위근은 각각 무엇인가? (6차 단위근을 그려 보고 위수에 따라 분류해 보아라.)

위수 1: 1뿐이므로 $\mathrm{C}_1(x) = x-1$이다. 위수 2: -1뿐이므로 $\mathrm{C}_2(x) = x+1$이다.

위수 3: 1이 아닌 3차 단위근, 즉 $\frac{x^3-1}{x-1}$의 근이다. 따라서 $\mathrm{C}_3(x) = x^2+x+1$이다.

위수 5: 1이 아닌 5차 단위근으로, 이들은 $\frac{x^5-1}{x-1}$의 근이다. 따라서 $\mathrm{C}_5(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$이다.

위수 6: 6차 단위근 $e^{k\pi\mathrm{i}/3}$, $k = 0, \dots, 5$ 가운데 $k = 0, 3$인 것의 위수는 각각 1, 2이고, $k = 2, 4$인 것의 위수는 3이다. 남는 것은 $e^{\pm\pi\mathrm{i}/3}$이므로

$$\mathrm{C}_6(x) = (x-e^{\mathrm{i}\pi/3})(x-e^{-\mathrm{i}\pi/3}) = x^2 - 2x\cos\tfrac{\pi}{3} + 1 = x^2 - x + 1. \qquad ■$$

2단계 어떤 n에서 x^4+1이 나오는가?

$x^4+1=0$의 근은 $x^4=-1$을 만족하므로 $x^8=1$이지만 $x^4\neq 1$이다. 따라서 그 위수는 8의 약수이지만 4의 약수는 아니므로 8이다. 역으로 위수가 8인 근은 $x^8=1$, $x^4\neq 1$을 만족하므로 $x^4=-1$이다. 원시 8차 단위근은 네 개이고 x^4+1의 근도 네 개이므로 $n=8$이다. ■

3단계 소수

p가 소수(prime)이면 p차 단위근의 위수는 p의 약수이므로 1 또는 p이다. 따라서 1을 제외한 모든 p차 단위근은 원시 단위근이고,

$$\mathrm{C}_p(x) = \frac{x^p-1}{x-1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1. \qquad ■$$

4단계 어떤 원분다항식도 다른 두 원분다항식의 곱이 아니다

> **잠깐, 직접 해 보기** $\mathrm{C}_q = \mathrm{C}_r\mathrm{C}_s$라고 하자. C_r의 근 하나를 잡자. 그 위수는 무엇인가? 이 항등식은 그 위수에 대해 무엇을 말해 주는가? 그 결과 무엇이 강제되는가?

C_r의 모든 근($e^{2\pi\mathrm{i}/r}$이 원시 단위근이므로 근은 적어도 하나 있다)은 $\mathrm{C}_r\mathrm{C}_s = \mathrm{C}_q$의 근이므로 위수가 q이다. 그런데 이 근의 위수는 r이기도 하고, 단위근의 위수는 하나뿐이므로 $r=q$이

다. 그러면 $C_q = C_q C_s$이고, C_q는 영다항식이 아니므로 $C_s = 1$이다. 그러나 C_s는 적어도 하나의 근 $e^{2\pi i/s}$를 가지므로 이는 불가능하다. 따라서 그러한 q, r, s는 존재하지 않는다. ■

돌아보기

- **위수에 따라 분류하라.** 모든 단위근은 유일한 위수를 가지며, 위수에 따라 묶으면 $z^n - 1$의 근이 서로소인 부류들로 나뉜다.
- **근으로 다항식을 정의하라.** 각 C_n은 어떤 수들이 정확히 그 근인지를 밝힘으로써 결정되었다.
- **유일성에서 불가능성이 나온다.** 소문항 (iv)에는 단 하나의 아이디어만 필요했다. 하나의 근이 서로 다른 두 위수를 가질 수는 없다는 것이다.

숨은 수학

$x^n - 1$의 인수분해

모든 n차 단위근은 n의 약수인 어떤 위수 d를 가지며, d차 단위근 가운데 위수가 d인 것은 $d \mid n$일 때 모두 n차 단위근이다. 따라서 $x^n - 1$의 근은 위수에 따라 여러 부류로 나뉘고, 다음을 얻는다.

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} C_d(x).$$

예를 들어 $x^6 - 1 = C_1 C_2 C_3 C_6 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$이다. 그림 6.1.1은 열두 개의 12차 단위근을 이런 방식으로 분류한 것이다. 원시 n차 단위근의 개수, 즉 C_n의 차수는 k 가운데 1과 n 사이에 있으면서 n과 공약수가 없는 것의 개수이며, 이것이 바로 오일러 피 함수(*Euler's totient function*) $\varphi(n)$이다. 차수를 비교하면 항등식 $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$을 얻는다.

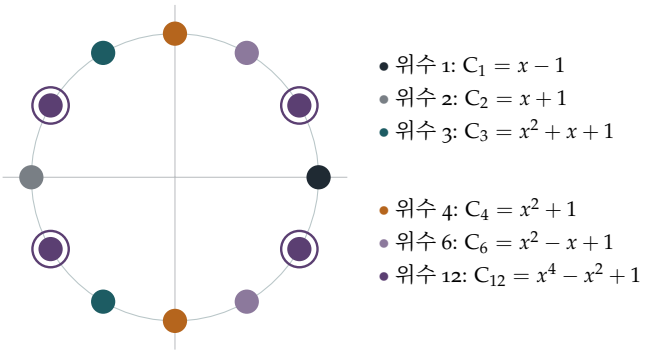


그림 6.1.1 위수에 따라 색칠한 열두 개의 12차 단위근. 네 개의 원시 12차 단위근(고리 표시)은 C_{12}의 근이다. 모든 부류를 합치면 $x^{12} - 1 = C_1C_2C_3C_4C_6C_{12}$이고, 차수는 $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$이다.

정수 계수, 그리고 뜻밖의 사실

정의만 보아서는 분명하지 않지만, 모든 원분다항식의 계수는 **정수**이다. ($x^n - 1$의 인수분해와 수학적 귀납법(induction)을 이용한다. C_n은 $x^n - 1$을 그보다 앞선 원분다항식들의 곱으로 나눈 것이고, 정수 계수 다항식을 최고차항의 계수가 1인(monic) 정수 계수 다항식으로 나누는 다항식의 나눗셈에서는 계수가 계속 정수로 남는다.) 오랫동안 알려진 모든 예는 계수가 0, 1, -1뿐이었다. 첫 번째 예외는 1883년 Migotti가 발견한 C_{105}로, 이 다항식에는 $-2x^7$이라는 항이 있다. $105 = 3 \times 5 \times 7$은 서로 다른 홀수 소인수를 세 개 가지는 가장 작은 수이다. 사실 원분다항식의 계수는 원하는 만큼 크게 만들 수 있다.

기약성

소문항 (iv)는 어떤 원분다항식도 다른 두 원분다항식의 곱이 아님을 보여 준다. 실제로는 훨씬 강한 사실이 성립한다. C_n은 유리수 계수를 가진 더 낮은 차수의 다항식들로 전혀 인수분해되지 않는다. 가우스는 소수 n에 대하여 이를 증명했고(이는 대학 첫 대수학 강의에서 배우게 될 **아이젠슈타인 판정법**(*Eisenstein's criterion*)에서 나온다), 크로네커(Kronecker)와 데데킨트(Dedekind)는 일반적인 n에 대하여 증명했다. 이 **기약성**(*irreducibility*) 덕분에 원분다항식은 단위근과 관련된 다항식 가운데 "소수"의 역할을 하며, 이는 단위근에 대한 갈루아(Galois) 이론의 출발점이 된다.

사고 기술

분류한 다음 쌓아 올리기

문제 속의 대상들을 하나의 잘 정의된 불변량(*invariant*)에 따라 부류로 나누고, 부류별로 구조를 쌓아 올려라.

여기서 불변량은 단위근의 위수였다. 각 근의 위수가 정확히 하나이므로 부류들은 겹치지 않으며, $x^n - 1$은 이 부류들에 걸친 곱으로 분해된다. 같은 패턴(유일한 불변량이 서로소인 분해를 낳는 것)이 소인수분해와 유한 아벨 군(finite abelian groups)의 분류의 바탕에도 놓여 있다.

더 도전하기

1 **인수분해 확인하기.** $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^6 - 1$임을 확인하고, $x^{12} - 1$이 그림 6.1.1에서처럼 인수분해됨을 확인하여라.

2 **소수의 두 배.** p가 홀수인 소수이면 $C_{2p}(x) = C_p(-x)$임을 보여라. $p = 3$일 때 이를 확인하여라.

3 **오일러 피 함수.** 소수 p에 대하여 $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$이고 $C_{p^k}(x) = C_p\left(x^{p^{k-1}}\right)$임을 보여라. 이를 이용하여 C_9를 구하여라.

4 **조금 긴 문제.** 심화 $x^{15} - 1 = C_1C_3C_5C_{15}$를 이용하여 $C_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press). 갈루아 이론에 대한 표준적인 학부 입문서이다. 원분다항식과 정다각형이 앞부분에 나온다.
- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic*** (Cambridge University Press). 단위근과 그 산술을 다룬다.
- **Marcus du Sautoy, *Finding Moonshine*** (Fourth Estate). 대칭과 군론을 다룬 교양서로, 갈루아의 이야기도 담겨 있다.

6.2 가우스의 정17각형

문제

STEP II 1991, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/91-s2-q4`

도입

1796년 3월 30일, 괴팅겐의 열여덟 살 학생이 평생 쓰게 될 수학 일기의 첫 항목을 적었다. 그는 자와 컴퍼스(ruler and compasses)만으로 정17각형을 작도하는 방법을 발견한 것이다. 그리스인들은 변이 3개, 4개, 5개, 15개인 정다각형(regular polygon)과 그 변의 수를 두 배씩 늘린 정다각형을 작도하는 법을 알고 있었지만, 그 뒤 이천 년 동안 아무도 새로운 정다각형을 단 하나도 더하지 못했다. 카를 프리드리히 가우스(Carl Friedrich Gauss)는 훗날 이 발견 덕분에 문헌학자가 아니라 수학자가 되기로 마음먹었다고 말했고, 자신의 묘비에 정17각형을 새겨 달라고 부탁했다고 전해진다.

이 작도의 핵심은 이 문제의 후반부에 있다. 특정한 네 코사인의 합이 $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$, 즉 제곱근만 들어 있는 수와 같다는 것이다. 제곱근으로 만들어지는 길이는 자와 컴퍼스로 작도할 수 있으며, 같은 종류의 단계를 세 번 더 거쳐 가우스는 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 자체를 작도할 수 있었다.

시작하기 전에

생각해 보기 정17각형에 관한 문제에 왜 $\cos\frac{2\pi}{5}$에 관한 첫 부분이 나오는가?

이것은 같은 아이디어를 더 작은 다각형에 적용해 보는 준비 운동이다. 정오각형의 경우 합 $\cos\phi + \cos 2\phi$는 유리수 계수의 이차방정식(quadratic equation)을 만족하므로, 이 이차방정식을 풀어 구할 수 있다. 정17각형의 경우에도 네 코사인의 합 z가 이차방정식을 만족함이 드러날 것이다. 두 경우 모두의 요령은 코사인끼리 곱한 다음 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$를 이용하여 곱을 다시 같은 각들의 코사인의 합으로 바꾸는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 정오각형

생각해 보기 $y^2 = (\cos\phi + \cos 2\phi)^2$을 전개하고, 각 곱을 합으로 바꾼 뒤, $5\phi = 2\pi$를 이용하여 3ϕ나 4ϕ 같은 각을 줄여 보자.

$y^2 = \cos^2\phi + 2\cos\phi\cos 2\phi + \cos^2 2\phi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 3\phi + \cos\phi) + \frac{1}{2}(1+\cos 4\phi)$.

$5\phi = 2\pi$이므로 $\cos 3\phi = \cos(2\pi - 2\phi) = \cos 2\phi$이고 $\cos 4\phi = \cos\phi$이다. 따라서

$$y^2 = 1 + \tfrac{1}{2}(\cos\phi + \cos 2\phi) + (\cos\phi + \cos 2\phi) = 1 + \tfrac{3}{2}y,$$

즉 $2y^2 = 3y + 2$이다. ■$2y^2 - 3y - 2 = (2y+1)(y-2) = 0$의 근은 $y = 2$와 $y = -\frac{1}{2}$이다. 그런데 $y = 2$가 되려면 두 코사인이 모두 1이어야 하는데 그렇지 않으므로 $y = -\frac{1}{2}$이다. ■

2단계 17제곱 단위근의 합은 0이다

$\sum_{k=0}^{16}\cos k\theta$는 $\sum_{k=0}^{16}\omega^k$의 실수부이다. 여기서 $\omega = e^{i\theta}$는 원시(primitive) 17제곱 단위근(root of unity)이다. 이 등비급수(geometric series)는 $\frac{\omega^{17}-1}{\omega-1} = 0$이다. ■

따라서 $\sum_{k=1}^{16}\cos k\theta = -1$이다. $\cos(17-k)\theta = \cos k\theta$이므로 항들이 짝을 이루고,

$$\sum_{k=1}^{8}\cos k\theta = -\tfrac{1}{2}.$$

3단계 코사인을 두 묶음으로 나누기

생각해 보기 $z = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 8\theta$라 하고, 나머지 네 코사인의 합 $\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta$를 z'이라 하자. $z + z'$은 얼마인가?

2단계에 의해 $z + z' = -\frac{1}{2}$이다. zz'도 구할 수 있다면 z와 z'은 어떤 이차방정식의 두 근이 된다.

잠깐, 직접 해 보기 zz'을 계산하라. 이를 16개의 곱 $\cos a\theta\cos b\theta$로 전개하고, 각각을 두 코사인의 합으로 바꾼 다음, $\cos\theta, \cos 2\theta, \ldots, \cos 8\theta$가 각각 몇 번 나타나는지 세어 보라. ($\cos k\theta = \cos(17-k)\theta$와 $\cos(-k\theta) = \cos k\theta$를 이용하여 각을 줄인다.)

각 곱은 $\cos a\theta\cos b\theta = \frac{1}{2}(\cos(a+b)\theta + \cos(a-b)\theta)$가 되므로, zz'은 32개의 코사인의 합에 $\frac{1}{2}$을 곱한 것이다. $a \in \{1,2,4,8\}$, $b \in \{3,5,6,7\}$인 16개의 쌍을 차례로 살펴보자. 예

를 들어 $a=1, b=3$이면 $\cos 4\theta$와 $\cos 2\theta$가 나오고, $a=8, b=7$이면 $\cos 15\theta = \cos 2\theta$와 $\cos\theta$가 나온다. 열여섯 쌍 모두에 대해 이렇게 계산하면 $\cos\theta, \dots, \cos 8\theta$가 각각 정확히 네 번씩 나타난다. 그러므로

$$zz' = \tfrac{1}{2} \times 4 \times \sum_{k=1}^{8} \cos k\theta = 2 \times \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1.$$

4단계 이차방정식

따라서 z와 z'은 $t^2 + \frac{1}{2}t - 1 = 0$, 즉 $4t^2 + 2t - 4 = 0$의 두 근이고, 그 근은 $t = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$이다. 어느 쪽이 z인가? 수치로 보면 $\cos\theta \approx 0.932$, $\cos 2\theta \approx 0.739$, $\cos 4\theta \approx 0.092$, $\cos 8\theta \approx -0.983$이므로 $z \approx 0.78 > 0$이다. 그러므로

$$z = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} = -\frac{1-\sqrt{17}}{4}. \qquad \blacksquare$$

돌아보기

- **곱을 합으로.** 코사인의 곱셈 공식은 y^2과 zz'을 같은 코사인들의 합으로 바꾸어 주었고, 그래서 계산이 닫힌 형태로 마무리되었다.
- **합과 곱이 이차방정식을 준다.** $z+z'$과 zz'을 아는 것은 z와 z'을 두 근으로 하는 이차방정식을 아는 것과 같다.
- **올바르게 나누는 것이 중요하다.** 여덟 개의 코사인을 $\{1,2,4,8\}$과 $\{3,5,6,7\}$로 나누었기 때문에 zz'에서 모든 지표가 똑같은 횟수만큼 나타났다. 아무렇게나 나누면 이렇게 되지 않는다.

숨은 수학

가우스 주기

왜 $\{1,2,4,8\}$인가? 17을 법으로 할 때, 3의 거듭제곱 $3^0, 3^1, 3^2, \dots$은 0이 아닌 모든 나머지(residue)를 거친다.

$$1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6.$$

하나 걸러 하나씩, 즉 $3^0, 3^2, 3^4, \dots$을 택하면 1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2가 나오는데, 이는 17을 법으로 ±1, ±2, ±4, ±8이며, 정확히 z에 들어 있는 각들이다. 나머지 절반은 $\pm3, \pm5, \pm6, \pm7$로, z'에 들어 있는 각들이다. 가우스는 이러한 묶음에 걸친 ω^k의 합을 주기(*period*)라고 불렀다. $17-1 = 16 = 2^4$이므로 나머지들을 네 번 반으로 나눌 수 있고,

각 단계에서 주기들은 이전 단계의 주기들이 계수에 들어 있는 이차방정식을 만족한다. 이 차방정식 네 개, 즉 제곱근 네 개를 거쳐 유리수에서 $\cos\frac{2\pi}{17}$까지 내려갈 수 있다.

$$\cos\tfrac{2\pi}{17} = \tfrac{1}{16}\Big(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\ +2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\Big).$$

모든 단계에 제곱근만 들어 있고, 제곱근은 (닮은 삼각형이나 반원을 이용하여) 자와 컴퍼스로 작도할 수 있으므로, 정17각형은 작도 가능(constructible)하다.

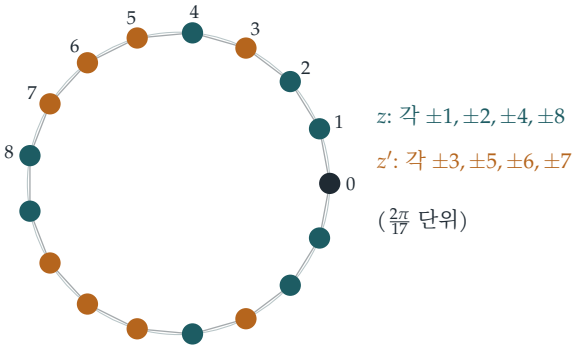


그림 6.2.1 가우스의 두 주기로 나눈 정17각형의 꼭짓점. 청록색 꼭짓점은 ($\frac{2\pi}{17}$ 단위로) 각 $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$에 있으며, 이들의 x좌표의 합은 $2z = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$이다. 호박색 꼭짓점은 $2z' = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$을 준다.

어떤 다각형을 작도할 수 있는가?

가우스가 주장하고 1837년 피에르 방첼(Pierre Wantzel)이 증명한 바에 따르면, 정n각형을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는 것은 n이 2의 거듭제곱과 서로 다른 **페르마 소수**(*Fermat prime*)들의 곱의 곱일 때, 그리고 그때뿐이다. 페르마 소수란 $2^{2^m}+1$ 꼴의 소수이다. 알려진 페르마 소수는 3, 5, 17, 257, 65537이며, 이는 Section 1.1의 페르마 수이다. (페르마(Fermat)는 이런 수가 모두 소수라고 추측했지만, 오일러(Euler)가 $2^{32}+1$이 641로 나누어떨어짐을 보였고, 그 뒤로 더 이상의 페르마 소수는 발견되지 않았다.) 따라서 정257각형과 정65537각형은 작도 가능하다. 19세기에 Johann Hermes는 약 십 년에 걸쳐 정65537각형의 작도법을 완성했고, 그의 원고는 괴팅겐에 보관되어 있다. 정7각형과 정11각형은 작도할 수 없는데, 7과 11이 페르마 소수가 아니기 때문이다($7-1=6$과 $11-1=10$은 2의 거듭제곱이 아니다). 정9각형도 작도할 수 없는데, $9=3^2$에서 페르마 소수 3이 반복되기 때문이다. 방첼의 증명은 Section 6.3에서 다루는 체의 차수(degree of a field extension) 이론을 이용한다.

사고 기술

합과 곱을 계산하여 이차방정식 찾기

어떤 양을 구하려면, 그것과 자연스럽게 짝을 이루는 상대를 찾아 둘의 합과 곱을 계산하고, 그로부터 얻은 이차방정식을 풀어라.

요령은 합과 곱을 모두 계산할 수 있도록 짝을 고르는 데 있다. 여기서는 17을 법으로 한 나머지들의 대칭성에서 짝이 나왔고, 이 아이디어를 네 번 되풀이하여 가우스는 작도법을 얻었다.

더 도전하기

1 **정칠각형.** STEP II 1995, 6번 문제 (`step.maths.org/questions/95-s2-q6`)을 풀어 보라. 단위근을 묶는 가우스의 아이디어를 7제곱 단위근에 적용하여, 코사인의 합과 사인의 합의 정확한 값을 구하는 문제이다. 사인 합의 부호를 결정하는 것이 미묘한 단계이다.

2 **정오각형.** $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$임을 보이고, 이를 이용하여 자와 컴퍼스로 정오각형을 작도하는 방법을 설명하라.

3 **다른 주기.** $z' = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$임을 수치로 확인하라.

4 **생성원.** 17을 법으로 할 때 3의 거듭제곱은 0이 아닌 모든 나머지를 주지만, 2의 거듭제곱은 그렇지 않음을 보여라. 2의 거듭제곱은 어떤 나머지들을 주는가?

더 읽을거리

- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press). 자와 컴퍼스 작도와 정17각형을 다루는 장이 있다.
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?*** (Oxford University Press). 제3장은 정17각형을 포함하여 작도를 초등적으로 아름답게 설명한다.
- **Daniel Kehlmann, *Measuring the World*** (Quercus). 가우스와 알렉산더 폰 훔볼트(Alexander von Humboldt)에 관한 유쾌한 소설로, 머리를 식히기에 좋다.

6.3 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$를 근으로 갖는 다항식

문제

STEP II 2023, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

도입

$\sqrt{2}$는 정수 계수 다항식 x^2-2의 근이다. $\sqrt{3}$도 x^2-3의 근이다. 그렇다면 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$도 어떤 정수 계수 다항식의 근일까? $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$나 $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$은 어떨까?

정수 계수 다항식의 근이 되는 수를 **대수적 수**(algebraic number)라 한다. 이 문제는 직접 손으로 근호를 소거하여 대수적 수의 합이 다시 대수적 수임을 보인다. 이 과정에서 나오는 차수 4, 8, 6, 9는 우연이 아니다. 이 차수는 각 수가 얼마나 "복잡한지"를 재는 척도이며, 바로 이 척도, 곧 **체의 확대 차수**(degree of a field extension)가 고대 그리스의 문제인 정육면체의 배적 문제와 각의 삼등분 문제를 마침내 해결하였다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\sqrt{2}$를 근으로 갖는 다항식을 찾으려면 $x=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하여 제곱근을 없앤다. 서로 다른 두 제곱근은 어떻게 하나씩 없앨 수 있을까?

한 제곱근을 한쪽으로 분리한 뒤 제곱하면 그 제곱근이 사라진다. 그다음 다른 제곱근을 분리하여 다시 제곱한다. 제곱할 때마다 차수는 두 배가 될 수 있다. 이것이 이 문제의 전략 전부이다. 근호를 하나씩 소거하는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 두 개의 제곱근

$(x-\sqrt{2})^2 = 3$이면 $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 = 3$이므로 $x^2 - 1 = 2\sqrt{2}\,x$이다. 양변을 제곱하면 남은 제곱근이 사라져 $(x^2-1)^2 = 8x^2$, 즉

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \qquad \blacksquare$$

이다. 또 $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$은 $(x-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$을 만족하므로 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$이다. $\blacksquare$

2단계 세 개의 제곱근

? **생각해 보기** $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$라 하면 $x - \sqrt{5} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$은 f의 근이다. $f(x-\sqrt{5}) = 0$을 $P(x) + \sqrt{5}\,Q(x) = 0$ 꼴로 나타내 보자. 그다음 $\sqrt{5}$는 어떻게 소거할까?

$(x-\sqrt{5})^2 = x^2 + 5 - 2\sqrt{5}x$와 $(x-\sqrt{5})^4 = \left(x^2+5-2\sqrt{5}x\right)^2 = x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x(x^2+5)$를 이용하여 전개하면

$$f(x-\sqrt{5}) = \left(x^4+30x^2+25\right) - 4\sqrt{5}\,x(x^2+5) - 10\left(x^2+5\right) + 20\sqrt{5}\,x + 1.$$

이다. 정리하면 $P(x) = x^4 + 20x^2 - 24$이고 $Q(x) = -4x^3 - 20x + 20x = -4x^3$이다. 따라서 $x^4 + 20x^2 - 24 = 4\sqrt{5}\,x^3$이다. 양변을 제곱하면

$$\left(x^4+20x^2-24\right)^2 = 80x^6,$$

이고, 전개하면

$$g(x) = x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576. \qquad \blacksquare$$

를 얻는다. (검산: $400 - 48 = 352$를 이용하면 $(x^4+20x^2-24)^2 = x^8 + 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576$이고, 여기서 $80x^6$을 빼면 g가 된다.)

3단계 삼차방정식의 근과 제곱근

? **생각해 보기** $x = a + \sqrt{2}$이면 $x - \sqrt{2}$는 $t^3 - 3t + 1$의 근이다. 이를 대입하고, $\sqrt{2}$가 있는 항과 없는 항을 나눈 뒤 제곱하라.

$(x-\sqrt{2})^3 = x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$이므로

$$(x-\sqrt{2})^3 - 3(x-\sqrt{2}) + 1 = \left(x^3+3x+1\right) - \sqrt{2}\left(3x^2-1\right) = 0.$$

이다. 따라서 $(x^3+3x+1)^2 = 2(3x^2-1)^2$이다. 전개하면 $x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 6x + 1 = 18x^4 - 12x^2 + 2$이므로

$$h(x) = x^6 - 12x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 6x - 1. \qquad \blacksquare$$

이다. a가 t^3-3t+1의 근이라는 사실만 사용했으므로 같은 논증이 $b+\sqrt{2}$와 $c+\sqrt{2}$에도 그대로 적용된다. (h의 나머지 세 근은 $a-\sqrt{2}$, $b-\sqrt{2}$, $c-\sqrt{2}$이며, 이들은 제곱하는 과정에서 끼어든 것이다.)

4단계 두 개의 세제곱근

> **잠깐, 직접 해 보기** $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$이라 하자. 양변을 세제곱하라. 그 결과를 x와 세제곱근 하나만으로 나타낼 수 있는가?

$u=\sqrt[3]{2}$, $v=\sqrt[3]{3}$으로 두고 $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$를 이용하면

$$x^3=2+3+3\sqrt[3]{6}\,x, \qquad \text{따라서} \qquad x^3-5=3\sqrt[3]{6}\,x.$$

이다. 다시 세제곱하면 마지막 세제곱근이 사라져 $(x^3-5)^3=27\cdot 6\,x^3=162x^3$이 된다. $(x^3-5)^3=x^9-15x^6+75x^3-125$로 전개하면

$$\mathrm{k}(x)=x^9-15x^6-87x^3-125. \qquad \blacksquare$$

이다.

돌아보기

- **근호는 하나씩 소거한다.** 근호 하나를 분리하고, 알맞은 거듭제곱을 한 다음, 이를 반복한다.
- **유리 부분과 무리 부분을 나눈다.** 식을 $P+\sqrt{5}\,Q$ 꼴로 쓰고 $P^2=5Q^2$을 이용하는 것이 핵심 단계이다.
- **제곱하면 근이 늘어난다.** 제곱할 때마다 $a+\sqrt{2}$에 대한 $a-\sqrt{2}$처럼 "켤레"(conjugate) 근이 끼어든다. 최종 다항식은 이 근들을 모두 근으로 갖는다.

숨은 수학

체와 그 차수

p, q가 유리수일 때 $p+q\sqrt{2}$ 꼴인 수 전체의 집합 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, (0이 아닌 수로의) 나눗셈에 대하여 닫혀 있다. 즉 이 집합은 **체**(field)이다. 이 체는 $\mathbb{Q}$ 위의 2차원 "벡터 공간"(vector space)이고 기저(basis)는 1, $\sqrt{2}$이므로, $\mathbb{Q}$ 위에서 **차수**(degree)가 2라고 한다. 여기에 $\sqrt{3}$을 첨가하면 기저가 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$이고 차수가 4인 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$을 얻고, $\sqrt{5}$까지 첨가하면 차수가 8이 된다(그림 6.3.1). **탑 법칙**(tower law)에 따르면 체의 탑을

따라 올라가면서 차수는 곱해진다. 어떤 수가 생성하는 체의 차수는 그 수의 **최소다항식**(minimal polynomial), 곧 그 수를 근으로 갖는 유리수 계수 다항식 가운데 차수가 가장 낮은 것의 차수와 같다. 이 문제의 다항식 f와 g가 최소다항식임을 보일 수 있으므로, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$의 차수는 4이고 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$의 차수는 8이다. 실제로 수 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 하나가 차수 8인 체 전체를 생성한다.

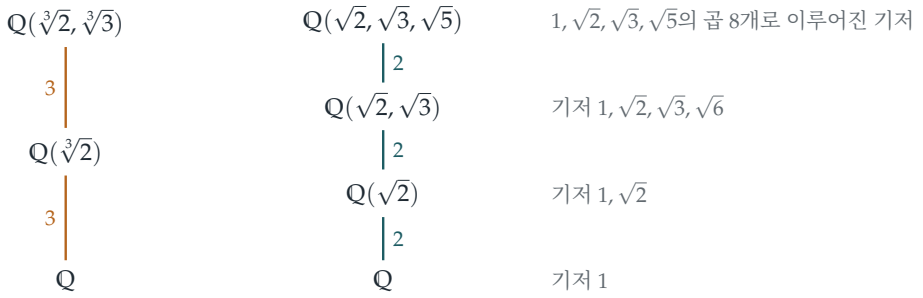


그림 6.3.1 체의 탑. 오른쪽: 제곱근을 하나 첨가할 때마다 차수가 두 배가 되어 $2\times2\times2=8$, 곧 g의 차수가 된다. 왼쪽: 세제곱근을 하나 첨가할 때마다 차수가 세 배가 되어 $3\times3=9$, 곧 k의 차수가 된다. 탑을 따라 올라가면서 차수는 곱해진다. 이 **탑 법칙**이 자와 컴퍼스 작도의 불가능성 증명의 열쇠이다.

정육면체의 배적 문제

자와 컴퍼스를 이용한 작도(ruler-and-compass construction)로 얻을 수 있는 길이는 유리수에서 출발하여 일차방정식과 이차방정식을 거듭 풀어 얻는 길이뿐이다. 이러한 각 단계는 차수가 1 또는 2인 체의 확대를 주므로, 탑 법칙에 의해 작도 가능한 길이는 모두 차수가 2의 거듭제곱인 체에 속하고, 그 길이 자체의 차수도 2의 거듭제곱이다. 그런데 $\sqrt[3]{2}$의 최소다항식은 차수가 3인 x^3-2이다. 3은 2의 거듭제곱이 아니므로 $\sqrt[3]{2}$는 작도할 수 없고, 따라서 기원전 430년 무렵에 제기된, 자와 컴퍼스로 정육면체의 부피를 두 배로 만드는 델로스 문제(Delian problem)는 불가능하다. Pierre Wantzel은 1837년에 이를 증명하였고, 아울러 일반적인 각의 삼등분이 불가능함과 작도 가능한 정다각형의 분류(Section 6.2)도 증명하였다. 이천 년에 걸친 시도가 차수에 관한 논증 하나로 끝난 것이다.

대수적 수는 체를 이룬다

이 문제의 방법은 몇 가지 예에서 대수적 수의 합이 대수적 수임을 보여 준다. 일반적인 경우는 선형대수로 증명한다. α와 β의 차수가 각각 m과 n이면, $(i<m,\ j<n$인$)$ 수 $\alpha^i\beta^j$ 전체는 차원이 최대 mn인 공간을 생성(span)하므로, $mn+1$개의 거듭제곱 $1,\alpha+\beta,(\alpha+\beta)^2,\ldots$은 일차 종속(linearly dependent)이어야 하고, 이로부터 차수가 최대 mn인 다항식을 얻는다. 우리가 얻은 차수 $4=2\times2,\ 6=3\times2,\ 9=3\times3$은 이 패턴에 정확히 들어맞는다. 대

수적 수가 아닌 수를 **초월수**(transcendental number)라 한다. e와 π가 그 예이며(에르미트(Hermite), 1873년, 린데만(Lindemann), 1882년), π가 초월수라는 린데만의 정리는 원과 넓이가 같은 정사각형의 작도 역시 불가능함을 증명하였다.

사고 기술

> **소거한 다음, 측정하라**
>
> 근호로 나타낸 식이 만족하는 다항식을 찾으려면, 근호를 분리하고 거듭제곱하여 하나씩 없앤다.
>
> 그다음 차수가 무엇을 말해 주는지 물어라. 최소다항식의 차수는 그 수의 불변량(invariant)이며, 차수를 비교하는 것은 어떤 일이 불가능함을 증명하는 가장 강력한 방법 가운데 하나이다.

더 도전하기

1 **원시원소.** $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$이라 하자. $y^3=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$임을 보이고, 이로부터 $\sqrt{2}=\frac{1}{2}(y^3-9y)$임을 이끌어 내어라. 따라서 모든 수 $p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}+s\sqrt{6}$은 y에 대한 다항식으로 나타낼 수 있다.

2 **섞인 근호.** $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$을 근으로 갖는, 정수 계수의 6차 다항식을 구하여라.

3 **기약성(irreducibility).** x^4-10x^2+1은 유리수 근을 갖지 않으며, 정수 계수 이차식 두 개의 곱으로 나타낼 수 없음을 보여라. (**힌트:** $(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$ 꼴을 시도해 보라.) 이로부터 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$의 차수가 4임을 이끌어 내어라.

4 **삼등분.** $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$임을 보이고, 이로부터 $\cos 20^\circ$가 $8x^3-6x-1=0$의 근임을 이끌어 내어라. 이 삼차식이 유리수 근을 갖지 않는다고 할 때(이를 확인하라), 자와 컴퍼스로 60°인 각을 삼등분할 수 없는 이유를 설명하여라.

더 읽을거리

- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press). 갈루아 이론. 체의 확대, 탑 법칙, 고전적인 작도 문제를 학부생을 위해 다룬다.
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?*** (Oxford University Press). 수학이란 무엇인가. 제 3장에서 선수 지식 없이 그리스 작도 문제의 불가능성을 증명한

다.

- **Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*** (Springer). 기하학: 유클리드와 그 너머. 자와 컴퍼스 작도를 현대 대수학으로 다룬다.

6.4 사차방정식 풀기

문제

STEP III 2017, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/17-s3-q3`

도입

이차방정식(quadratic equation)의 근의 공식은 모든 학생이 배운다. 삼차방정식(cubic)과 사차방정식(quartic)의 근의 공식도 존재한다. 이 공식들은 16세기 이탈리아에서 비밀 대결과 우선권을 둘러싼 격렬한 논쟁 속에서 발견되었다. 지롤라모 카르다노(Gerolamo Cardano)는 1545년 저서 *Ars Magna*(**위대한 술법**)에서 두 공식을 모두 발표했는데, 삼차방정식의 공식은 (그에게 비밀 유지를 맹세하게 했던) 니콜로 타르탈리아(Niccolò Tartaglia)에게서, 사차방정식의 공식은 자신의 제자 로도비코 페라리(Lodovico Ferrari)에게서 얻은 것이었다. 그 뒤 거의 300년 동안 수학자들은 오차방정식(quintic)의 근의 공식을 찾으려 했지만 헛수고였다.

이 문제는 사차방정식을 푸는 요령을 보여 주며, 이 요령에는 깊은 의미가 담겨 있다. 네 근을 두 개씩 짝짓는 세 가지 방법에 따라 세 개의 새로운 양을 만든다. 이 세 양은 하나의 삼차방정식을 만족하고, 그 삼차방정식은 풀 수 있으며, 그 해로부터 원래의 근을 구할 수 있다. 이 방법이 **왜** 통하는지, 즉 왜 네 근은 세 개의 양으로 줄일 수 있는데 다섯 근은 같은 방식으로 줄일 수 없는지라는 물음이 갈루아(Galois)를 군론(group theory)의 창시로 이끌었다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 네 대상 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$를 두 쌍으로 나누는 방법은 몇 가지인가?

세 가지이다. $\{\alpha\beta, \gamma\delta\}$, $\{\alpha\gamma, \beta\delta\}$, $\{\alpha\delta, \beta\gamma\}$이다(그림 6.4.1). 문제에 나오는 세 양 $\alpha\beta + \gamma\delta$ 등은 이 세 가지 짝짓기에 대응한다. 네 근을 어떻게 재배열하든 세 짝짓기는 자기들끼리 뒤섞일 뿐이다. 따라서 세 양에 대한 대칭식(symmetric expression)은 모두 네 근에 대한 대

칭식이 되고, p, q, r, s로 나타낼 수 있다. 바로 이 때문에 세 양은 계수가 p, q, r, s만으로 이루어진 삼차방정식을 만족한다.

차근차근 풀기

1단계 빠진 계수

생각해 보기 삼차방정식 $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$에서 근의 합을 A로 나타내면 무엇인가? 그리고 $(\alpha\beta + \gamma\delta) + (\alpha\gamma + \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)$를 사차방정식의 계수로 나타내면 무엇인가?

삼차방정식의 근의 합은 $-A$이다. 세 양의 합은 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$에서 두 개씩 곱한 여섯 개의 곱을 모두 더한 것이고, 사차식 $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$에서 이 값은 q이다. 따라서 $A = -q$이다.

2단계 구체적인 삼차방정식

$p = 0, q = 3, r = -6, s = 10$이면 삼차방정식은 다음과 같다.

$$y^3 - 3y^2 + (0 - 40)y + (120 - 0 - 36) = y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = 0.$$

생각해 보기 84의 작은 약수들을 대입해 보라.

$y = 2$를 대입하면 $8 - 12 - 80 + 84 = 0$이다. 나누어 보면 $y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = (y - 2)(y^2 - y - 42) = (y - 2)(y - 7)(y + 6)$이다. 가장 큰 근은 7이므로 $\alpha\beta + \gamma\delta = 7$이다. ■

3단계 근의 쌍

$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$이고, 이는 두 개씩 곱한 여섯 개의 곱의 합에서 $\alpha\beta + \gamma\delta$를 뺀 것, 즉 $q - 7 = 3 - 7 = -4$이다.

또 $\alpha\beta \cdot \gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta = s = 10$이다. 따라서 $\alpha\beta$와 $\gamma\delta$는 합이 7이고 곱이 10이므로 $t^2 - 7t + 10 = (t - 2)(t - 5)$의 두 근이다. $\alpha\beta > \gamma\delta$이므로 $\alpha\beta = 5, \gamma\delta = 2$이다. ■

4단계 사차방정식 풀기

잠깐, 직접 해 보기 $\alpha + \beta$와 $\gamma + \delta$를 구하라. 두 값의 합(p로부터)과 곱(3단계로부터)은 알고 있다. 어느 쪽이 어느 값인지 정하려면 r을 이용하라.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -p = 0$이고 $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = -4$이므로 $\{\alpha + \beta, \gamma + \delta\} = \{2, -2\}$이다. 계수 r은 세 개씩 곱한 네 곱의 합을 준다. 즉 $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -r = 6$이다. 이

식은 $\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=5(\gamma+\delta)+2(\alpha+\beta)$로 쓸 수 있다. $\alpha+\beta=2$이면 이 값은 $-10+4=-6$이고, $\alpha+\beta=-2$이면 $10-4=6$이다. 따라서 $\alpha+\beta=-2$, $\gamma+\delta=2$이다.

이제 α, β는 $t^2+2t+5=0$의 두 근이므로 $-1\pm 2\mathrm{i}$이고, γ, δ는 $t^2-2t+2=0$의 두 근이므로 $1\pm\mathrm{i}$이다. 네 근은 다음과 같다.

$$x=-1\pm 2\mathrm{i}, \qquad x=1\pm\mathrm{i}. \qquad \blacksquare$$

검산: $(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)=x^4+3x^2-6x+10$.

돌아보기

- **대칭함수.** 모든 단계에서 근과 계수의 관계, 즉 근의 합과 곱을 이용했다.
- **차수를 낮춰라.** 사차방정식 문제가 삼차방정식(**분해 삼차방정식**(resolvent cubic))이 되었고, 다시 두 개의 이차방정식이 되었다.
- **모든 정보를 활용하라.** p와 q는 합과 곱을 주었고, s는 $\alpha\beta$와 $\gamma\delta$를 구분해 주었으며, r은 어느 쌍이 어느 합에 대응하는지 정해 주었다.

숨은 수학

이 요령이 통하는 이유: 근의 치환

1770년 조제프루이 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange)는 삼차방정식과 사차방정식의 풀이법이 왜 통하는지 물었고, 그 답을 근의 **치환**(permutation)에서 찾았다. 네 근을 재배열하는 방법은 24가지이다. 이 모든 재배열에서 세 양 $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$, $y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$, $y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$는 자기들끼리 뒤섞일 뿐이다. 네 근의 각 재배열은 세 짝짓기의 재배열을 유도한다(그림 6.4.1). 따라서 이 세 양은 계수가 근에 대해 대칭인 3차 다항식을 만족한다. 현대적인 언어로 말하면, 대칭군(symmetric group) S_4(24개의 모든 치환)에서 S_3(짝짓기의 6가지 치환)로 가는 전사 군 준동형사상(group homomorphism)이 존재하며, 이것이 사차방정식을 삼차방정식으로 줄일 수 있는 이유이다.

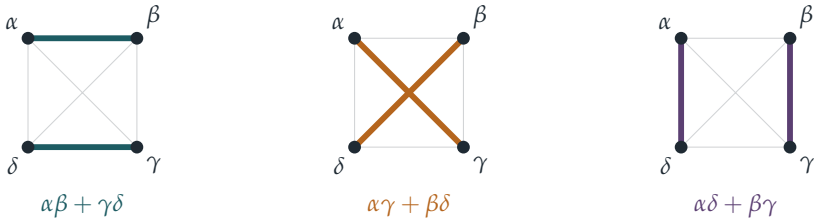


그림 6.4.1 네 근을 두 쌍으로 나누는 세 가지 방법과, 그에 대응하는 분해 삼차방정식의 근. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$를 어떻게 재배열하든 이 세 그림은 자기들끼리 치환될 뿐이다. 이 때문에 세 양은 계수를 사차방정식의 계수로 나타낼 수 있는 삼차방정식을 만족한다.

오차방정식

라그랑주는 다섯 근에 대해서도 근의 치환에 따라 몇 가지 값만 취하는 비슷한 양을 찾으려 했지만, 쓸모 있는 것을 찾지 못했다. 1799년 파올로 루피니(Paolo Ruffini)가, 그리고 1824년 닐스 헨리크 아벨(Niels Henrik Abel)이 (증명을 완성하여) 사칙연산과 거듭제곱근(radical)만으로 오차방정식의 근을 나타내는 일반적인 공식은 존재하지 않음을 보였다. 몇 년 뒤 에바리스트 갈루아는 어떤 다항식이 거듭제곱근으로 풀리는지 정확히 설명했다. 바로 **근의 대칭군**을 특정한 방식으로 더 단순한 조각들로 분해할 수 있는 다항식이다. 대칭군 S_4는 (S_3와 더 작은 군들을 거쳐) 분해할 수 있지만, S_5는 더 이상 분해할 수 없는 크기 60의 "단순(simple)" 조각을 포함하므로 분해할 수 없다. 갈루아는 1832년 스무 살의 나이로 결투에서 목숨을 잃기 전날 밤, 서둘러 자신의 이론을 글로 남겼다. 이 이론은 오늘날 수학과 학부 과정의 백미 중 하나이며, 보통 3학년에 배운다.

삼차방정식 풀기

삼차방정식 자체도 비슷한 요령으로 풀 수 있다. 축약 삼차식(depressed cubic) $x^3 - 3px + q$를 두 완전세제곱식의 결합으로 나타내면 이차방정식으로 줄어든다. 이것이 연습문제에 있는 2011년 문제의 방법이며, 카르다노의 공식과 동치이다. 삼차방정식이 세 실근을 가질 때에도 이 공식은 계산 과정에서 복소수(complex number)를 필요로 하는데, 바로 이 현상 때문에 수학자들은 복소수를 진지하게 받아들일 수밖에 없었다(5장의 도입 참고).

사고 기술

대칭은 복잡함을 줄인다

근으로 만든 어떤 양들이 근을 치환할 때 자기들끼리만 치환된다면, 그 양들은 계수를 계산할 수 있는 더 낮은 차수의 다항식을 만족한다.

이것이 갈루아 이론(Galois theory)의 씨앗이다. 방정식을 이해하려면 그 근의 대칭을 이해하라.

더 도전하기

1 **삼차방정식 확인하기.** $y_1 = \alpha\beta + \gamma\delta$ 등일 때 $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = pr - 4s$임을 확인하라. (전개한 뒤 $\sum\alpha = -p$, $\sum\alpha\beta\gamma = -r$, $\alpha\beta\gamma\delta = s$를 이용하라.)

2 **세제곱의 합으로 본 삼차방정식.** STEP III 2011, 3번 문제 (`step.maths.org/questions/11-s3-q3`)을 풀어 보라. 이 문제는 삼차방정식을 두 세제곱식의 결합으로 나타내어 푸는데, 이 절의 방법과는 상당히 다른 길이다. 답을 수치적으로 확인해 보라.

3 **또 하나의 사차방정식.** 이 절의 방법으로 $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = 0$을 풀어라. (분해삼차방정식의 한 근은 작은 정수이다.)

4 **치환 세기.** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$의 24가지 치환 가운데 짝짓기 $\{\alpha\beta, \gamma\delta\}$를 자기 자신으로 보내는 것을 모두 찾아라. 그런 치환이 8개임을 보여라. (이들은 S_4의 부분군(subgroup)을 이룬다.)

더 읽을거리

- **Mario Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved*** (Simon & Schuster). 오차방정식과 군론의 탄생 이야기를 일반 독자를 위해 풀어낸 책이다.
- **Ian Stewart, *Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry*** (Basic Books). 바빌로니아의 방정식에서 갈루아와 그 너머까지 다룬다.
- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press). 학부 교재로, 바로 이 내용을 다루는 역사적 도입부가 있다.

6.5 공리에서 출발하는 미분

문제

STEP II 1992, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/92-s2-q4`

도입

미분(differentiation)이란 무엇인가? 학교에서는 미분을 극한(limit) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$로 정의하고, 그다음 여러 규칙을 배운다. 합의 도함수(derivative)는 도함수의 합이라는 규칙, 곱의 미분법(product rule) 등이다. 이 문제는 이 순서를 뒤집는다. 극한은 완전히 잊어버리자. 어떤 연산에 대해 아는 것이라고는 그 연산이 합의 법칙, 곱의 법칙, 상수에 관한 법칙을 따르고 x를 1로 보낸다는 사실뿐이라고 하자. 그러면 이 문제가 보여 주듯이, 적어도 다항식(polynomial)에서는 그 연산이 **반드시** 미분이어야 한다.

이것이 미적분을 바라보는 대수학자의 관점이다. 연산은 공식이 아니라 그 연산이 따르는 규칙으로 특징지어진다. 곱의 법칙을 따르는 연산을 **도분**(derivation)이라고 하며, 도분은 대수학, 기하학, 물리학 곳곳에 등장한다. 놀랍게도 같은 아이디어가 현대의 기계 학습 시스템을 훈련시키는 소프트웨어 안에서도 작동하고 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 규칙 (i)은 곱의 법칙이다. 곱의 법칙이 어떻게 상수에 대해 무언가를 알려 줄 수 있을까? (상수를 곱으로 생각해 보자.)

수 1은 1×1과 같다. 1×1에 곱의 법칙을 적용하면 $\Diamond 1$을 자기 자신과 연결하는 관계식이 나오고, 이 관계식 때문에 그 값은 o일 수밖에 없다. 일반적으로 이런 공리(axiom)를 다룰 때의 요령은 영리하게 고른 간단한 입력에 공리를 적용하는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 상수

생각해 보기 $\mathrm{f} = \mathrm{g} = 1$로 놓고 규칙 (i)을 적용하라. 그다음 다른 상수에 대해서는 규칙 (iv)를 사용하라.

$\Diamond 1 = \Diamond(1 \cdot 1) = 1 \cdot \Diamond 1 + 1 \cdot \Diamond 1 = 2\Diamond 1$이므로 $\Diamond 1 = 0$이다. 임의의 상수 λ에 대해 규칙 (iv)에 의해 $\Diamond \lambda = \Diamond(\lambda \cdot 1) = \lambda \Diamond 1 = 0$이다. ■

2단계 거듭제곱

규칙 (iii)을 사용하면 $\Diamond x^2 = \Diamond(x \cdot x) = x\Diamond x + x\Diamond x = 2x$이다. 그러면

$$\Diamond x^3 = \Diamond(x^2 \cdot x) = x\Diamond x^2 + x^2\Diamond x = x \cdot 2x + x^2 = 3x^2.$$

잠깐, 직접 해 보기 모든 양의 정수 n에 대해 $\Diamond x^n = nx^{n-1}$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명하라.

$n = 1$인 경우는 규칙 (iii)이다. $\Diamond x^n = nx^{n-1}$이면

$$\Diamond x^{n+1} = \Diamond(x^n \cdot x) = x\Diamond x^n + x^n\Diamond x = x \cdot nx^{n-1} + x^n = (n+1)x^n. \quad ■$$

3단계 모든 다항식

일반적인 다항식은 $\mathrm{h}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$이다. 규칙 (ii)를 (반복해서) 적용하고 규칙 (iv)를 적용하면

$$\begin{aligned}\Diamond \mathrm{h}(x) &= \Diamond a_0 + a_1\Diamond x + a_2\Diamond x^2 + \cdots + a_m\Diamond x^m \\ &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + m a_m x^{m-1} = \mathrm{h}'(x). \quad ■\end{aligned}$$

돌아보기

- **공리가 연산을 결정한다.** 극한은 전혀 언급하지 않은 네 개의 규칙만으로 다항식 위에서 $\Diamond$가 완전히 결정되었다.
- **생성원(generators).** 모든 다항식은 상수와 x로부터 덧셈과 곱셈을 써서 만들어진다. 기본 재료에 대해 $\Diamond$가 무엇을 하는지, 그리고 만드는 연산과 어떻게 어우러지는지를 알면 모든 곳에서 그 값이 결정된다.

▶ **구성을 따라가는 귀납법.** 증명은 다항식이 만들어지는 방식을 그대로 따라갔다. 먼저 곱셈을 반복해 거듭제곱을 다루고, 그다음 합을 다루었다.

숨은 수학

도분

어떤 대수적 체계 위의 연산 D가 덧셈을 보존하고 곱의 법칙 $D(fg) = fD(g) + gD(f)$를 만족하면, 이를 **도분**이라고 한다. 이 문제는 다항식 위에서 상수를 0으로 보내는 도분이 $D(x)$에 의해 완전히 결정된다는 것을 보여 준다. 실제로 $D(h) = h'(x)\,D(x)$이므로, 남은 자유는 다항식 $D(x)$를 고르는 것뿐이다. 규칙 (iii)은 $D(x) = 1$로 정한다. 도분은 수학 전반에 나타난다. 기하학에서는 곡면 위의 **벡터장**(vector field)을 그 곡면 위의 함수들에 작용하는 도분으로 정의할 수 있다(벡터장은 함수를 그 장의 방향으로 미분한다). 대수학에서는 어떤 구조의 도분이 그 구조의 "무한소 대칭"을 측정한다. 물리학에서는 양자역학의 교환자(commutator) $[A, B] = AB - BA$가 각 변수에 대해 도분이다.

극한 없는 미적분

대수적인 도함수는 극한이 전혀 의미가 없는 상황에서도 작동한다. 소수 p를 법으로 하는 산술과 같은 유한체(finite field) 위에서는 극한이 없지만, 다항식의 형식적 도함수(formal derivative)는 같은 규칙으로 정의되며 여전히 중근(repeated root)을 찾아낸다. 다항식 f가 중근을 가질 필요충분조건은 f와 f'이 공통인수를 가지는 것이다. 예를 들어 $p \nmid n$일 때 $x^n - 1$이 중근을 갖지 않음을 이런 방법으로 보이며, 이 사실은 Section 6.1의 원분다항식(cyclotomic polynomial)을 유한체 위에서 정의하는 데 필요하다. 같은 아이디어가 부호이론(coding theory)과 암호학(cryptography)에서도 쓰인다.

자동 미분

현대적인 응용을 하나 살펴보자. $\varepsilon^2 = 0$이지만 $\varepsilon \neq 0$인 수 ε을 새로 만들어 내고, **이원수**(dual numbers) $a + b\varepsilon$으로 산술을 한다. 그러면 $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon$이다. 즉 ε 부분은 정확히 곱의 법칙을 따른다. 따라서 임의의 다항식에 대해

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + f'(x)\,\varepsilon,$$

이고, f에 이원수 $x + \varepsilon$을 대입하여 계산하면 함숫값과 미분계수가 동시에, 정확하게 계산된다. 극한도 필요 없고, 작은 차이에서 생기는 반올림 오차도 없다(그림 6.5.1). 이를 **전진 모드 자동 미분**(forward-mode automatic differentiation)이라고 한다. 그 사촌인 후진 모드는 수십억 개의 매개변수를 가진 신경망(neural network)을 훈련시키는 데 쓰이는 알고리즘(**역전파**(backpropagation))이다. 이런 시스템이 학습할 때마다, 시스템은 곱의 법칙

과 연쇄법칙(chain rule)을 도분으로서 한 단계씩 적용하고 있는 것이다.

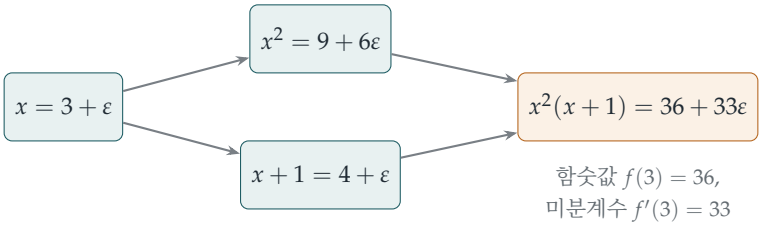


그림 6.5.1 $f(x) = x^2(x+1)$의 $x = 3$에서의 이원수($\varepsilon^2 = 0$)를 이용한 자동 미분. 각 단계는 이 문제의 규칙을 따른다. $(3+\varepsilon)^2 = 9 + 6\varepsilon$이고, $(9+6\varepsilon)(4+\varepsilon) = 36 + (9+24)\varepsilon$이다. ε의 계수는 $f'(3) = 3\cdot 9 + 2\cdot 3 = 33$이며, 정확하게 계산된다.

사고 기술

성질로 특징짓기

연산을 그것이 따르는 규칙으로 기술한 다음, 그 규칙이 연산을 유일하게 결정함을 보여라.

이것이 대학 대수학의 중심인 공리적 방법(axiomatic method)이다. 이 방법의 힘은 공리로부터 증명한 모든 것이 그 공리를 만족하는 모든 연산에 적용된다는 데 있다. 그것이 다항식의 미분이든, 곡면 위 함수의 미분이든, 아직 발명되지 않은 무언가이든 마찬가지이다.

더 도전하기

1 **다른 도분.** $\Diamond$가 규칙 (i), (ii), (iv)를 만족하되, 1 대신 $\Diamond x = x$라고 하자. $\Diamond \mathrm{h}(x) = x\,\mathrm{h}'(x)$임을 보여라. $\Diamond$는 x^n을 무엇으로 보내는가?

2 **몫의 미분법.** 규칙 (i)이 여전히 성립한다고 가정하고 $\Diamond$를 유리함수(rational function) f/g로 확장하라. $\mathrm{g}\cdot\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}} = \mathrm{f}$에 규칙 (i)을 적용하여 몫의 미분법(quotient rule)을 유도하라.

3 **중근.** $(x-a)^2$이 다항식 f를 나누면 $x-a$가 f'을 나눔을 보여라. 이를 이용하여 $x^n - 1$이 중근을 갖지 않음을 보여라.

4 **이원수.** 이원수를 이용하여 $f(x) = (x^2 + 1)^3$에 대해 $f(2)$와 $f'(2)$를 계산하고, 연쇄법칙으로 검산하라.

더 읽을거리

- **Peter Cameron, *Introduction to Algebra*** (Oxford University Press). 대학 1학년 수준에서 환, 다항식, 체를 다루며 형식적 도함수도 소개한다.
- **Andreas Griewank & Andrea Walther, *Evaluating Derivatives*** (SIAM). 자동 미분에 관한 표준 참고서이다. 고급 수준.
- **Michael Nielsen, *Neural Networks and Deep Learning*** (온라인 무료 공개). 2장에서 역전파를 명쾌하게 설명한다.

6.6 부분군의 합집합

문제

STEP II 1988, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/88-s2-q9`

도입

이 문제는 이 책에서 가장 짧은 문제 가운데 하나이면서, 대학 수학의 성격을 가장 잘 보여 주는 문제 가운데 하나이다. 이 문제는 대칭을 다루는 수학의 언어인 **군**(group)에 관한 것이다. 그리고 퍼즐처럼 들리는 질문을 던진다. 군 안에 들어 있는 더 작은 군 두 개로 그 군 전체를 덮을 수 있을까? 답은 "아니다"이고, 증명은 세 줄이면 된다. 그런데 더 작은 군 세 개로는 덮을 수 있다. 이는 뜻밖의 사실이다.

군론(group theory)은 2019년까지 STEP 출제 범위에 들어 있었고, 지금은 대학 1학년 과정의 기본 내용이다. 이 문제를 풀려면 아래에 제시한 정의만 알면 된다. 그리고 이 문제는 군론 학자들이 어떻게 생각하는지를 처음 맛보기에 안성맞춤이다. 공리만을 사용하는 짧고 영리한 논증이기 때문이다.

시작하기 전에

군이란 다음 조건을 만족하는 연산(곱셈처럼 ab로 쓴다)이 주어진 집합 G이다.

- 연산이 **결합법칙**(associative)을 만족한다. 즉 $(ab)c = a(bc)$이다.
- 모든 a에 대하여 $ea = ae = a$인 **항등원**(identity) e가 존재한다.
- 모든 a에 대하여 $aa^{-1} = a^{-1}a = e$인 **역원**(inverse) a^{-1}가 존재한다.

예를 들어 덧셈에 대한 정수(양수, 음수, 0) 전체, 곱셈에 대한 0이 아닌 실수 전체, 합성에 대한 정사각형의 회전 전체는 모두 군이다. **부분군**(subgroup)이란 G의 부분집합 K로서 같은 연산에 대하여 그 자체로 군이 되는 것이다. 즉 K는 e를 포함하고, $a, b \in K$이면 $ab \in K$이

고 $a^{-1} \in K$이다.

> **생각해 보기** K가 부분군이고 $a \in K$이지만 $b \notin K$일 때, ab가 K에 속할 수 있을까?

그럴 수 없다. $ab \in K$이면 $b = a^{-1}(ab)$는 K의 두 원소의 곱이므로 K에 속하게 된다. 이 작은 관찰이 증명의 전부이다.

차근차근 풀기

1단계 부분군 두 개로는 덮을 수 없다

모순을 이끌어 내기 위해, $G = G_1 \cup G_2$이지만 G_1과 G_2 모두 G 전체가 아니라고 가정하자.

> **생각해 보기** $G_1 \neq G$이므로 G_1에 속하지 않는 원소가 있다. 그 원소는 어디에 있어야 할까? G_2에 대해서도 마찬가지로 생각해 보자. 이제 두 원소를 곱해 보자.

$a \notin G_1$인 $a \in G$를 고르자. 모든 원소는 G_1이나 G_2에 속하므로 $a \in G_2$이다. 또 $b \notin G_2$인 $b \in G$를 고르면 $b \in G_1$이다. 곱 ab를 생각하자. 이 곱은 G_1이나 G_2에 속한다.

- $ab \in G_1$인 경우: $b \in G_1$이므로 $a = (ab)b^{-1} \in G_1$이다. 모순이다.
- $ab \in G_2$인 경우: $a \in G_2$이므로 $b = a^{-1}(ab) \in G_2$이다. 모순이다.

어느 경우든 모순에 이르므로 $G_1 = G$이거나 $G_2 = G$이다. ■

G가 유한하다는 사실은 한 번도 사용하지 않았다는 점에 주목하자. 이 결과는 모든 군에서 성립한다.

2단계 부분군 세 개로는 덮을 수 있다

> **잠깐, 직접 해 보기** 세 부분군의 합집합이 되는 군을 찾아라. 단, 세 부분군 가운데 어느 것도 군 전체가 아니어야 한다. (**힌트:** 모든 원소가 자기 자신의 역원인 작은 군을 시도해 보라.)

클라인 4원군(Klein four-group) $V = \{e, a, b, c\}$를 생각하자. 연산 규칙은 $a^2 = b^2 = c^2 = e$이고 $ab = ba = c$, $bc = cb = a$, $ca = ac = b$이다. (구체적으로는 정사각형이 아닌 직사각형의 네 가지 대칭, 즉 아무것도 하지 않기, 180° 회전, 두 축 각각에 대한 대칭이동이다. 또는 비트 0, 1로 이루어진 순서쌍 (x, y) 전체에 법 2에 대한 덧셈을 준 것이라 해도 된다.) 이 군의 세 부분군

$$H_1 = \{e, a\}, \qquad H_2 = \{e, b\}, \qquad H_3 = \{e, c\}$$

은 각각 원소가 두 개이고, 어느 것도 군 전체가 아니며, 이들을 합하면 V의 모든 원소를 포

함한다(그림 6.6.1). ■

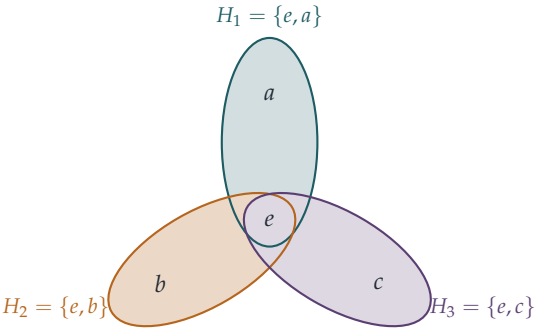


그림 6.6.1 클라인 4원군 $\{e, a, b, c\}$는 위수(order)가 2인 세 부분군의 합집합이며, 이 부분군들은 항등원 e에서만 겹친다. 문제의 첫 부분에 따르면, 어떤 군도 진 부분군(proper subgroup) 두 개만의 합집합이 될 수는 없다.

돌아보기

- **증거가 되는 원소를 골라 결합하라.** 증명에서는 각 부분군 밖에 있는 원소를 하나씩 골라 곱했다. 이렇게 "각각에서 하나씩 골라 결합하는" 방법은 대수학에서 매우 자주 쓰인다.
- **닫혀 있음은 강력하다.** 부분군의 성질 가운데 사용한 것은 곱셈과 역원에 대하여 닫혀 있다(closed)는 것뿐이었다.
- **필요한 가정을 확인하라.** 유한하다는 조건은 주어졌지만 사용하지 않았다. 어떤 가정이 불필요하다는 것을 알아차리는 것도 증명을 이해하는 일의 일부이다.

숨은 수학

대칭의 언어

군은 19세기에 여러 방향에서 동시에 생겨났다. 다항식의 근의 치환에 대한 갈루아(Galois)의 연구(Section 6.4), 치환에 관한 코시(Cauchy)의 연구, 그리고 기하학과 결정학에서의 대칭 연구가 그것이다. 세 공리를 만족하는 것이면 무엇이든 군이라고 하는 위의 추상적인 정의는 19세기 말에 자리 잡았다. 이 정의의 힘은 일반성에 있다. 이 문제의 정리처럼 공리로부터 증명한 정리는 수의 군, 행렬의 군, 대칭의 군, 치환의 군에서 동시에 성립한다. 오늘날 군은 어디에나 있다. 입자물리학(표준 모형은 대칭군 위에 세워져 있다), 화학(분자의 대칭이 스펙트럼을 결정한다), 암호학(타원곡선 군, Section 1.9), 그리고 루빅스 큐브 풀이에도 군이 쓰인다.

부분군이 몇 개 필요할까?

이 문제에서 자연스러운 질문이 떠오른다. 합집합이 군 전체가 되는 진부분군의 최소 개수는 얼마일까? 이 문제에 따르면 그 수는 결코 2가 아니다. 1926년에 Gaetano Scorza는 군이 세 진부분군의 합집합이 될 필요충분조건이 클라인 4원군을 "몫군(quotient)"으로 가지는 것임을 보였다. 1994년에 J. H. E. Cohn은 일반적인 문제를 연구하여 여러 결과를 추측하였고, 1997년에 M. J. Tomkinson은 3부터 6까지의 모든 수는 이 최소 개수로 나타나지만, 이 최소 개수가 7인 군은 존재하지 않음을 증명하였다. 이처럼 진술은 간단하지만 놀랄 만큼 미묘한 질문은 군론의 전형적인 모습이다.

벡터 공간

비슷한 논증으로, 실수 위의 벡터 공간(vector space)(평면이나 3차원 공간 같은 것)은 결코 유한 개의 진부분공간(proper subspace)의 합집합이 될 수 없음을 보일 수 있다. 즉 평면은 원점을 지나는 유한 개의 직선의 합집합이 아니다. 그러나 유한체(finite field) 위에서는 가능하다. 원소가 두 개인 체 위의 평면은 바로 클라인 4원군이며, 이는 세 직선의 합집합이다.

사고 기술

공리로부터 논증하라

추상대수학에서는 대상이 만족하는 공리 말고는 그 대상에 대해 아무것도 모를 때가 많다. 증명은 그 공리만을 사용해야 한다.

그 때문에 논증은 여기서처럼 짧고 깔끔해질 수밖에 없고, 어디에나 적용할 수 있게 된다. 익숙해지는 데 시간이 걸리며, 이는 대학 1학년 대수학 강의에서 겪는 가장 독특한 경험 가운데 하나이다.

더 도전하기

1 **군인지 확인하기.** 클라인 4원군의 곱셈표를 작성하고 군의 공리를 확인하라. 이 군이 곱셈에 대한 군 $\{1, i, -1, -i\}$와 같지 않음을 보여라. (**힌트:** 자기 자신의 역원인 원소는 어느 것인가?)

2 **순환군.** 모든 원소가 한 원소 g의 거듭제곱일 때 그 군을 **순환군**(cyclic group)이라 한다. 순환군은 진부분군을 몇 개 쓰더라도 그 합집합이 될 수 없음을 보여라. (**힌트:** g를 포함하는 부분군은 어느 것인가?)

3 **정수.** $(\mathbb{Z}, +)$가 부분군 $2\mathbb{Z}$(짝수 전체)와 $3\mathbb{Z}$(3의 배수 전체)의 합집합이 아님을 직접 보여라. 이 군은 어떤 두 진부분군의 합집합이 될 수 있는가?

4 **평면 위의 직선.** 심화평면 $\mathbb{R}^2$가 원점을 지나는 유한 개의 직선의 합집합이 아님을 보여라. (힌트: 각 직선은 원점을 제외하면 포물선 $y = x^2$ 위의 점을 많아야 하나 포함한다.)

더 읽을거리

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*** (Springer). 『군과 대칭』. 기하학적 예를 중심으로 전개하며 그림이 아름다운 입문서이다.
- **Nathan Carter, *Visual Group Theory*** (Mathematical Association of America). 『시각적 군론』. 그림으로 군을 배우는 책으로, 대학 입학 전에 읽기에 이상적이다.
- **Peter Neumann, Gabrielle Stoy & Edward Thompson, *Groups and Geometry*** (Oxford University Press). 『군과 기하학』. 옥스퍼드 대학 1학년 과정의 고전적인 교재이다.

6.7 사원수군

문제

STEP III 1993, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/93-s3-q5`

도입

1843년 10월 16일, 윌리엄 로언 해밀턴(William Rowan Hamilton)은 아내와 함께 더블린의 로열 운하를 따라 걷다가, 여러 해 동안 좇던 영감을 번뜩 얻었다. 그는 복소수(complex numbers)가 수의 쌍을 곱하듯이 수의 세 쌍을 곱하는 방법을 찾으려 했지만 번번이 실패했다. 그런데 갑자기 답이 보였다. 수가 네 개 필요하고, 곱하는 순서가 중요한 곱셈, 즉 $ij \neq ji$인 곱셈이 필요하다는 것이었다. 그는 브룸 다리(Brougham Bridge)의 돌에 다음 규칙을 새겼다.

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

이것이 바로 **사원수**(quaternions)이다. 이 문제는 복소수의 쌍으로 사원수를 만들고, 그 안에서 뒤틀린 곱셈을 가진 원소 여덟 개짜리 작은 군을 찾아낸다. 오늘날 사원수는 모든 컴퓨터 게임, 비행 시뮬레이터, 우주선 유도 장치에서 3차원 회전을 기술하는 데 쓰인다.

시작하기 전에

군의 정의는 Section 6.6를 보라. 용어 두 가지를 더 알아 두자. 군(group)의 원소 g의 **위수**(order)는 $g^n = e$를 만족하는 가장 작은 양의 정수 n이다. 그리고 두 군 사이에 연산을 보존하는 일대일 대응(one-to-one correspondence)이 있으면 두 군은 **동형**(isomorphic)이라고 한다. 즉 두 군은 "이름표만 다른 같은 군"이다.

? **생각해 보기** 쌍 (z_1, z_2)를 "수" $z_1 + z_2\mathrm{j}$를 나타내는 것으로 생각하자. 여기서 j는 $\mathrm{j}^2 = -1$이고 복소수 w에 대하여 $\mathrm{j}w = w^*\mathrm{j}$를 만족하는 새로운 기호이다. 이 규칙을 써서 $(z_1 + z_2\mathrm{j})(w_1 + w_2\mathrm{j})$를 곱해 보라. ∘의 공식이 나오는가?

$(z_1 + z_2\mathrm{j})(w_1 + w_2\mathrm{j}) = z_1w_1 + z_1w_2\mathrm{j} + z_2\mathrm{j}w_1 + z_2\mathrm{j}w_2\mathrm{j} = z_1w_1 + z_1w_2\mathrm{j} + z_2w_1^*\mathrm{j} + z_2w_2^*\mathrm{j}^2$이고, 이는 $(z_1w_1 - z_2w_2^*) + (z_1w_2 + z_2w_1^*)\mathrm{j}$이다. 그렇다. 연산 $\circ$는 변장한 사원수 곱셈이다.

차근차근 풀기

1단계 행렬을 이용한 결합법칙

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$를 직접 확인하려면 계산이 길다. 더 깔끔한 방법이 있다.

> **생각해 보기** (z_1, z_2)에 복소 행렬 $M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$를 대응시키자. 행렬의 곱 $M(z_1, z_2)\,M(w_1, w_2)$의 첫째 행은 무엇인가?

곱의 첫째 행은 $(z_1w_1 - z_2w_2^*,\ z_1w_2 + z_2w_1^*)$로 정확히 $(z_1, z_2) \circ (w_1, w_2)$이고, 둘째 행은 $(-(z_1w_2 + z_2w_1^*)^*,\ (z_1w_1 - z_2w_2^*)^*)$이므로 곱도 같은 특수한 꼴이다. 따라서 $M(a \circ b) = M(a)M(b)$이다. 행렬의 곱셈은 결합법칙을 만족하고, M은 일대일이므로(첫째 행에서 z_1, z_2를 읽어 낼 수 있다) $\circ$는 결합법칙(associativity)을 만족한다. ■

2단계 교환법칙이 성립하지 않음

$(0,1) \circ (\mathrm{i}, 0) = (0 \cdot \mathrm{i} - 1 \cdot 0,\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot \mathrm{i}^*) = (0, -\mathrm{i})$이지만 $(\mathrm{i}, 0) \circ (0, 1) = (0, \mathrm{i})$이다. 따라서 $\circ$는 교환법칙(commutative law)을 만족하지 않는다.

네 가지 특수한 곱은 정의에서 바로 나온다.

$$(z,0) \circ (w,0) = (zw, 0), \qquad (z,0) \circ (0,w) = (0, zw),$$
$$(0,z) \circ (w,0) = (0, zw^*), \qquad (0,z) \circ (0,w) = (-zw^*, 0).$$

3단계 원소 여덟 개의 군

사원수 표기로 쓰면 $A = 1$, $C = \mathrm{i}$, $B = \mathrm{j}$, $D = \mathrm{ij} = \mathrm{k}$이고, E, G, F, H는 각각 이들의 음수이다. S_1의 모든 원소는 $u \in \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$에 대하여 $(u, 0)$ 또는 $(0, u)$ 꼴이다.

> **생각해 보기** 네 가지 특수한 곱을 이용하여 S_1이 닫혀 있음을 보여라. 항등원은 무엇인가?

네 가지 특수한 곱에 의해, $(u, 0)$ 또는 $(0, u)$ 꼴인 두 원소의 곱은 다시 이 두 꼴 가운데 하나이고, 그 첫째 또는 둘째 성분은 uv, uv^* 또는 $-uv^*$이다. $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$는 곱셈, 켤레(conjugation), 부호 바꾸기에 대하여 닫혀 있으므로(closed), 그 곱은 S_1에 속한다. 항등원(identity)은 $A = (1, 0)$이다. $(1,0) \circ (w_1, w_2) = (w_1, w_2)$이고 $(w_1, w_2) \circ (1,0) =$

(w_1, w_2)이기 때문이다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 각 원소의 위수와 역원을 구하라.

A의 위수는 1이다. $E \circ E = (-1,0) \circ (-1,0) = (1,0)$이므로 E의 위수는 2이다. $C = (\mathrm{i}, 0)$에 대하여 $C \circ C = (-1,0) = E$이므로 C의 위수는 4이고 $C^{-1} = C^3 = E \circ C = G$이다. $B = (0,1)$에 대하여 $B \circ B = (-1 \cdot 1^*, 0) = (-1,0) = E$이므로 B의 위수는 4이고 $B^{-1} = F$이다. 마찬가지로 $D \circ D = (-\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^*, 0) = (-\mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}), 0) = (-1,0) = E$이므로 D의 위수는 4이고 역원은 H이다. 그리고 G, F, H는 C, B, D의 역원(inverse)이며 위수는 역시 4이다. 정리하면 다음과 같다.

원소	A	B	C	D	E	F	G	H
역원	A	F	G	H	E	B	C	D
위수	1	4	4	4	2	4	4	4

닫혀 있고, 결합법칙(1단계)을 만족하며, 항등원과 역원이 있으므로 S_1은 군이다. ■이 군을 **사원수군**(quaternion group) Q_8이라고 한다.

4단계 부분군

$\{A, B, E, F\} = \{1, \mathrm{j}, -1, -\mathrm{j}\}$는 B의 거듭제곱으로 이루어져 있다. $B^1 = B$, $B^2 = E$, $B^3 = F$, $B^4 = A$이다. 따라서 이 집합은 닫혀 있고 역원을 포함하므로 부분군(subgroup)이며, 위수가 4인 **순환군**(cyclic group)이다. 행렬 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$는 $J^2 = -I$, $J^3 = -J$, $J^4 = I$를 만족하므로 역시 위수가 4인 순환군을 생성한다. $B^k \leftrightarrow J^k$로 대응시키면 동형사상이 된다. ■(사실 J는 정확히 $M(0,1)$, 즉 B의 행렬이다.)

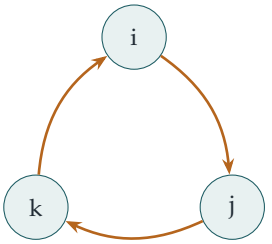
돌아보기

- **행렬로 표현하라.** 직접 확인하기 고통스러운 결합법칙을 행렬 곱셈으로부터 물려받았다.
- **공식 뒤에 숨은 구조를 찾아라.** 낯선 연산 $\circ$는 사원수 곱셈이었고, 이를 알아차리자 모든 것이 쉬워졌다.
- **위수와 역원은 군을 묘사한다.** 위수 표만 보아도 Q_8이 특이하다는 것을 알 수 있다. 위수가 2인 원소는 하나뿐이고 위수가 4인 원소는 여섯 개이다.

숨은 수학

복소수 너머

실수는 덧셈, 곱셈, 나눗셈을 할 수 있는 1차원 수 체계를 이루고, 복소수는 2차원 수 체계를 이룬다. 해밀턴의 사원수는 4차원이며 여전히 나눗셈을 할 수 있지만, 곱셈은 더 이상 교환법칙을 만족하지 않는다(그림 6.7.1). 1878년 프로베니우스(Ferdinand Frobenius)는 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$(해밀턴의 머리글자) 이 세 가지가 실수 위의 유한 차원 "나눗셈 대수"(division algebra) 가운데 곱셈이 결합법칙을 만족하는 유일한 것임을 증명했다. 결합법칙을 포기하되, 실수, 복소수, 사원수에서처럼 크기가 곱셈적인 성질 $|xy| = |x|\,|y|$를 유지하면 정확히 하나가 더 있다. 1840년대에 John Graves와 케일리(Arthur Cayley)가 발견한 8차원의 **팔원수**(octonions)이다. 1898년 후르비츠(Adolf Hurwitz)는 이 네 가지가 그러한 체계의 전부임을 증명했다. (크기에 대한 조건을 빼면 이보다 더 기묘한 비결합 나눗셈 대수가 또 있지만, 보트(Raoul Bott), 밀너(John Milnor), 케르베르(Michel Kervaire)가 1958년에 증명한 깊은 정리에 따르면 모든 유한 차원 실수 나눗셈 대수의 차원은 1, 2, 4, 8 중 하나이다.)



화살표 방향: $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$, $\mathrm{jk} = \mathrm{i}$, $\mathrm{ki} = \mathrm{j}$

반대 방향: $\mathrm{ji} = -\mathrm{k}$, $\mathrm{kj} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{ik} = -\mathrm{j}$

그리고 $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$

그림 6.7.1 해밀턴의 곱셈 규칙. i, j, k 중 두 개를 화살표 방향으로 곱하면 나머지 하나가 되고, 화살표 반대 방향으로 곱하면 나머지 하나에 음의 부호를 붙인 것이 된다. 여덟 개의 원소 $\pm 1, \pm\mathrm{i}, \pm\mathrm{j}, \pm\mathrm{k}$는 이 문제의 사원수군 Q_8을 이룬다.

3차원의 회전

절댓값이 1인 사원수는 3차원 공간의 회전을 나타낸다. 단위 축 $\mathbf{u}$를 중심으로 각 θ만큼 회전하는 것은 $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(u_1\mathrm{i} + u_2\mathrm{j} + u_3\mathrm{k})$에 대응하고, 이는 벡터 $\mathbf{v}(v_1\mathrm{i} + v_2\mathrm{j} + v_3\mathrm{k}$로 쓴다)에 $\mathbf{v} \mapsto q\mathbf{v}q^{-1}$로 작용한다. 회전을 합성하는 것은 사원수를 곱하는 것이다. 이 방법은 행렬이나 각을 쓰는 것보다 효율적이고 수치적으로 안정적이며, "짐벌 잠금"(gimbal lock)을 피할 수 있다. 짐벌 잠금은 자유도 하나를 잃는 현상으로, 아폴로 우주비행사들은 자이로스코프 기반 항법 장치를 쓰면서 이 문제를 피해 가야 했다. 반각 $\frac{\theta}{2}$는 깊은 사실에 대한 단서이기도 하다. 360°만큼 회전하면 1이 아니라 $q = -1$이 되는데, 물리학자들은 이 사실을 전자의 행동(스핀(spin))에서 관찰한다.

네 제곱수

사원수의 절댓값은 복소수의 절댓값과 마찬가지로 곱셈적이다. 즉 $|pq| = |p||q|$이다. 이를 풀어 쓰면 오일러(Euler)의 **네 제곱수 항등식**(four-square identity)을 얻는다. 네 제곱수의 합 두 개의 곱은 그 자체로 네 제곱수의 합이라는 것이다. 이는 모든 양의 정수가 네 제곱수의 합이라는 라그랑주(Lagrange)의 정리에서 핵심 단계이다. 이 정리는 Section 7.8에서 증명하며, Section 1.6의 두 제곱수 결과의 4차원 사촌이다.

사고 기술

추상적인 대상을 구체적으로 표현하라

추상적인 연산을 다루기 어렵다면, 그 연산이 익숙한 연산이 되는 행렬 같은 구체적인 모형을 찾아라.

그러면 결합법칙 같은 성질은 저절로 따라온다. 군을 행렬로 표현하여 연구한다는 이 아이디어는 **표현론**(representation theory)이라는 크고 아름다운 분야로 자라난다.

더 도전하기

1 **해밀턴의 규칙.** 쌍을 이용하여 $C \circ B = D$이고 $B \circ C = H$임을, 즉 $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$이고 $\mathrm{ji} = -\mathrm{k}$임을 확인하라.

2 **위수가 2인 원소는 하나뿐.** Q_8에서 위수가 2인 원소는 $E = -1$뿐임을 보여라. 이로부터 Q_8이 정사각형의 대칭군(위수가 2인 원소가 다섯 개이다)과 동형이 아님을 보여라.

3 **네 제곱수.** $\det M(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$임을 보여라. $\det(M_1 M_2) = \det M_1 \det M_2$를 이용하여, 네 제곱수의 합 두 개의 곱이 네 제곱수의 합임을 보여라.

4 **부분군.** Q_8의 부분군을 모두 구하라. $\{A\}$가 아닌 모든 부분군은 E를 포함함을 보이고, Q_8이 위수가 4인 세 순환 부분군의 합집합임을 보여라(Section 6.6와 비교해 보라).

더 읽을거리

- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions*** (A. K. Peters). 사원수와 팔원수의 기하학과 산술을 다룬다. 수준이 높지만 매혹적이다.
- **John Baez, "The octonions"**, *Bulletin of the American Mathematical Society* 39 (2002); 온

라인에서 무료로 볼 수도 있다. 훌륭한 개관 논문이며, 서론은 지금 읽어도 이해할 수 있다.

- **Andrew Hanson, *Visualizing Quaternions*** (Morgan Kaufmann). 회전을 위한 사원수를 그래픽스 응용과 함께 다룬다.

6.8 특이행렬로 이루어진 군

문제

STEP III 1996, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/96-s3-q6`

도입

행렬식(determinant)이 0인 행렬은 역행렬(inverse matrix)을 갖지 않는다는 것은 모든 학생이 배운다. 그렇다면 모든 원소가 역원을 갖는 행렬의 군(group)에는 특이(singular) 행렬이 들어 있을 수 없지 않을까?

들어 있을 수 있다. 함정은 "역원(inverse)"이라는 말에 있다. 군에서 $\mathbf{A}$의 역원은 $\mathbf{A}$와 결합하여 **그 군의** 항등원(identity element)을 만드는 원소이고, 군의 항등원이 반드시 단위행렬 $\mathbf{I}$여야 한다는 조건은 어디에도 없다. 이 문제는 모든 행렬이 특이 행렬인 군을 만들며, 그 군의 항등원은 행렬식이 0인 행렬이다. 이 문제는 정의를 글자 그대로 읽는 법, 그리고 추상적인 구조와 그 구조를 처음 만났을 때의 익숙한 예가 어떻게 다른지를 가르쳐 준다.

시작하기 전에

군의 정의는 Section 6.6을 참고한다.

? **생각해 보기** 소문항 (i)에서 단위행렬 $\mathbf{I}$는 $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ 꼴이 아니다. 그렇다면 S의 항등원은 무엇일 수 있을까?

그것은 S의 모든 $\mathbf{X}$에 대하여 $\mathbf{EX} = \mathbf{XE} = \mathbf{X}$를 만족하는, S에 속한 어떤 행렬 $\mathbf{E}$여야 한다. 이는 모든 행렬이 아니라 이 특별한 꼴의 행렬에 $\mathbf{E}$가 어떻게 작용하는지에 대한 조건일 뿐이다. 방정식을 풀어서 찾아보자.

차근차근 풀기

1단계 닫힘성

네 성분이 모두 a인 행렬을 $\mathbf{M}_a$라 쓰자. 그러면

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{2ab},$$

이고, $a, b \neq 0$이면 $2ab \neq 0$이다. 따라서 S는 닫혀 있다(closed). ■

2단계 군의 공리

> **생각해 보기** 행렬의 곱셈은 결합법칙을 만족한다. 항등원을 찾으려면 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_a$를 풀고, 역원을 찾으려면 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_e$를 푼다.

결합법칙(*associativity*)은 행렬의 곱셈에서 그대로 물려받는다. **항등원:** 모든 a에 대하여 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_{2ea} = \mathbf{M}_a$가 성립할 필요충분조건은 $e = \tfrac{1}{2}$이다. 공식이 대칭이므로 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{M}_a$도 성립한다. 따라서

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

가 S의 항등원이다. **역원:** $b = \tfrac{1}{4a}$이면 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2ab} = \mathbf{M}_{1/2}$이고 이 b는 0이 아니므로, $\mathbf{M}_{1/(4a)}$가 S에서 $\mathbf{M}_a$의 역원이다. 따라서 S는 군이다. ■모든 원소의 행렬식은 $a^2 - a^2 = 0$이다.

3단계 특이성은 퍼진다

> **잠깐, 직접 해 보기** $\mathbf{A} \in G$가 특이 행렬이라 하고, $\mathbf{B}$를 G의 임의의 원소라 하자. $\mathbf{B}$를 $\mathbf{A}$가 들어간 곱으로 나타낸 다음 행렬식을 취해 보라.

$\mathbf{A}^{-1}$를 군 G에서의 $\mathbf{A}$의 역원(반드시 역행렬일 필요는 없다)이라 하자. 그러면 $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$는 G에 속하고

$$\mathbf{AC} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{EB} = \mathbf{B}.$$

이다. 행렬식을 취하면 $\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{C} = 0$이다. 따라서 G의 모든 원소는 특이 행렬이다. ■특히 행렬군의 한 원소가 행렬로서 가역이면 모든 원소가 가역이다. 즉 행렬군은 모두 가역이거나 모두 특이이다.

4단계 3×3 예

생각해 보기 소문항 (i)을 3×3 행렬로 일반화할 수 있을까? 아니면 세 좌표 중 두 개를 "무시하는" 행렬을 써서 더 간단한 예를 찾을 수 있을까?

다음을 생각하자.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\}.$$

모서리 성분이 a와 b인 두 행렬의 곱은 모서리 성분이 ab인 행렬이므로 G는 닫혀 있다. 곱셈은 결합법칙을 만족하고, 항등원은 모서리 성분이 1인 행렬이며, 모서리 성분이 a인 행렬의 역원은 모서리 성분이 $\frac{1}{a}$인 행렬이다. 따라서 G는 군이고, 모든 원소의 행렬식은 0이다. ■(또 다른 예: 아홉 성분이 모두 $a \neq 0$인 3×3 행렬들. 이때 항등원은 모든 성분이 $\frac{1}{3}$인 행렬이다.)

돌아보기

- **정의를 글자 그대로 읽는다.** 군의 항등원은 그 군 안에서 항등원 역할을 하는 원소이면 무엇이든 된다. 익숙한 단위행렬일 필요는 없다.
- **구조를 방정식으로 구한다.** S의 항등원과 역원은 추측이 아니라 방정식을 풀어서 찾았다.
- **행렬식은 곱셈적이다.** 이 성질 하나로 특이성이 한 원소에서 모든 원소로 퍼진다는 것을 보였다.

숨은 수학

멱등원과 숨은 가역성

임의의 행렬군의 항등원 $\mathbf{E}$는 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$를 만족한다. 즉 **멱등**(*idempotent*)이다. 기하적으로 멱등 행렬은 **사영**(*projection*)이다. 즉 모든 벡터를 어떤 부분공간(subspace) 위로 보내고, 그 부분공간 안의 벡터는 그대로 둔다. 소문항 (i)에서 $\mathbf{E}$는 평면을 직선 $y = x$ 위로 사영하고, 각 행렬 $\mathbf{M}_a$는 먼저 그 직선 위로 사영한 다음 직선을 따라 $2a$배로 늘인다(그림 6.8.1). 직선 위에서 이 군은 가역인 늘이기로 작용하며, 직선에 수직인 방향은 그냥 무시한다. 따라서 S는 실제로는 곱셈에 대한 0이 아닌 실수의 군($\mathbf{M}_a \mapsto 2a$를 통해)이 평면 안의 한 직선 위에 놓여 있는 것이다. 이는 일반적으로도 참이다. 모든 행렬군은 기저 변환(change of basis)을 하고 나면, 항등원의 상(image) 위에 작용하는 가역 행렬들의 군에 0을 덧붙인 것이다.

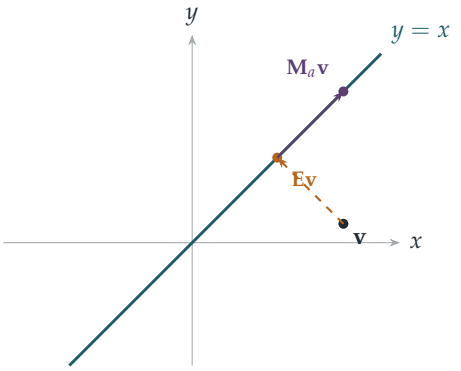


그림 6.8.1 소문항 (i)의 행렬들이 하는 일. 항등원 $\mathbf{E}$는 모든 벡터 $\mathbf{v}$를 직선 $y = x$ 위로 사영한다(호박색, 점선). 각 $\mathbf{M}_a$는 같은 사영을 한 다음 직선을 따라 $2a$배로 늘인다(자주색. 여기서는 $2a = \frac{16}{9}$). 직선 위에서 이 군은 보통의 가역인 배율 변환으로 작용한다.

추상과 구체

사람들이 처음 연구한 군은 치환(permutation), 대칭(symmetry), 가역 행렬처럼 구체적인 것이었다. 추상적인 정의(세 공리(axiom)를 만족하는 연산이 주어진 집합)는 이런 예들로부터 걸러 낸 것이다. 이 문제는 추상적인 관점의 가치를 보여 준다. 하나는 특이 행렬로, 다른 하나는 수로 이루어져 있는데도 S와 곱셈에 대한 0이 아닌 실수의 군은 *동형*(*isomorphic*)이다. 즉 옷만 다르게 입은 같은 군이다. 겉모습이 다른 두 구조가 언제 "같은지" 알아보는 것은 대수학의 핵심 기술 가운데 하나이며, 동형이라는 개념은 수학자들이 이를 엄밀하게 표현하는 방법이다.

사고 기술

익숙한 대상에 대한 숨은 가정을 의심하라

익숙한 대상이 추상적인 정의 속에 나타나면, 그 대상의 익숙한 성질 가운데 정의가 실제로 요구하는 것이 무엇인지 확인하라.

"행렬군의 항등원은 $\mathbf{I}$이다"라는 말은 당연하게 들리지만 정의의 일부가 아니며, 이 가정을 버리자 진정으로 새로운 예가 나왔다. 이렇게 가정을 의심하는 것이 많은 새로운 수학적 구조가 발견되는 방식이다.

더 도전하기

1 **동형사상.** 사상 $\mathbf{M}_a \mapsto 2a$가 S에서 0이 아닌 실수로의 일대일 대응(one-to-one correspondence)이며, 행렬의 곱셈을 수의 곱셈으로 바꾼다는 것을 보여라.

2 **군이 아닌 경우.** $a \neq 0$인 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$의 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있지만 군이 아님을 보여라. (힌트: 항등원을 찾아보라. 좌항등원(left identity)이 있는가? 우항등원(right identity)은?)

3 **멱등 행렬.** $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$인 2×2 실행렬 $\mathbf{E}$를 모두 구하라. 이들을 기하적으로 설명하라.

4 **모든 성분이 같은 행렬.** 모든 성분이 $a \neq 0$인 $n \times n$ 행렬들이 곱셈에 대하여 군을 이룸을 보이고, 그 항등원을 구하라.

더 읽을거리

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*** (Springer). 행렬군과 동형사상을 많은 기하적 예와 함께 다룬다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 사영과 멱등 행렬을 명쾌하게 설명한다.
- **Joseph Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*** (CRC Press). 특이한 군의 예가 많이 담긴 친절한 입문서이다.

우리가 배운 것

이 장은 방정식을 푸는 일에서 구조를 연구하는 일로 옮겨 간 대수학의 변화와 함께 세 가지 질문으로 시작하였다. 무엇으로부터 무엇을 만들 수 있는가, 방정식의 근의 공식은 왜 성립하는가, 그리고 추상화로 무엇을 얻는가. 이 장의 여덟 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 무엇으로부터 무엇을 만들 수 있는가?

Section 6.3에서는 거듭제곱근(radical)을 하나씩 소거하여 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$을 근으로 갖는 다항식을 구하였고, 그 차수는 각각 4, 8, 9였다. 이 차수들은 불변량(invariant), 즉 그 수가 생성하는 체(field)의 차수이다. 체의 탑(tower of fields)을 따라 올라가면 차수가 곱해지므로, 제곱근만으로 도달할 수 있는 수의 차수는 2의 거듭제곱이다. 이 사실 하나로 정육면체의 부피를 두 배로 만드는 작도가 불가능하다는 것($\sqrt[3]{2}$의 차수는 3이다)과 60°인 각을 삼등분할 수 없다는 것이 증명된다.

반대 방향으로, Section 6.2에서는 어떤 것을 실제로 **만들 수 있는** 방법을 보았다. 17제곱하여 1이 되는 1의 거듭제곱근(roots of unity)들을 가우스(Gauss)의 주기(period)로 나누면, 합 $\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}+\cos\frac{16\pi}{17}$은 $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$을 근으로 갖는 이차방정식을 만족한다. 이차방정식을 세 번 더 풀면 $\cos\frac{2\pi}{17}$에 이르고, 따라서 정17각형을 작도할 수 있다. 두 절의 바탕에는 Section 6.1의 원분다항식(cyclotomic polynomial)이 있었다. 원분다항식은 1의 거듭제곱근을 위수(order)에 따라 분류하여 얻는 것으로, x^n-1을 이루는 기본 구성 요소이다.

2. 방정식의 근의 공식은 왜 성립하는가?

Section 6.4에서는 사차방정식(quartic)의 비밀을 보았다. 네 근으로부터 세 양 $\alpha\beta+\gamma\delta$, $\alpha\gamma+\beta\delta$, $\alpha\delta+\beta\gamma$를 만드는데, 이는 근을 둘씩 짝짓는 방법 하나마다 하나씩 대응한다. 근을 어떻게 재배열하더라도 이 세 양은 서로 자리만 바뀔 뿐이므로, 이들은 계수를 알 수 있는 삼차방정식을 만족한다. 이 삼차방정식을 풀고 이어서 이차방정식 두 개를 풀면 근이 구해진다. 라그랑주(Lagrange)는 이 방법이 통하는 까닭이 네 대상의 치환(permutation)이 세 가지 짝짓기에 작용하는 방식에 있음을 알아차렸고, 갈루아(Galois)는 다섯 대상의 치환군(group)이 더 이상 쪼갤 수 없는 부분을 포함하기 때문에 근이 다섯 개일 때는 이 방법이 실패함을 알아냈다. 근의 공식은 군 구조의 그림자인 것이다.

3. 추상화로 무엇을 얻는가?

마지막 네 절에서는 대상을 그것이 따르는 규칙으로 기술하였다.

- Section 6.5에서는 네 가지 규칙(가법성(additivity), 곱의 법칙(product rule), 상수에 대한 규칙, $\Diamond x = 1$)만으로, 극한을 전혀 쓰지 않고도 어떤 연산이 미분일 수밖에 없음을 보였다. 같은 규칙이 현대 소프트웨어의 자동미분(automatic differentiation)을 움직인다.
- Section 6.6에서는 군의 공리로부터 세 줄짜리 논증으로, 어떤 군도 두 진부분군(proper subgroup)의 합집합이 될 수 없음을 모든 군에 대해 한꺼번에 보였다.
- Section 6.7에서는 복소수 순서쌍에 대한 낯선 연산이 알고 보니 해밀턴(Hamilton)의 사원수(quaternion) 곱셈이었고, 이를 행렬로 표현하자 결합법칙(associativity)이 저절로 성립하였다.
- Section 6.8에서는 군의 정의를 문자 그대로 읽어 특이행렬(singular matrix)들로 이루어진 군을 만들었다. 이 군의 항등원(identity)은 단위행렬이 아니며, 이 군은 "사실은" 0이 아닌 실수들의 군이 모습을 바꾼 것이다.

각각의 경우에 추상적인 관점은 계산만으로는 가려졌을 무언가를 설명해 주었다.

4. 대수학의 도구 상자

방법	사용한 곳
유일한 불변량에 따른 분류	위수에 따른 1의 거듭제곱근 분류 (6.1)
합과 곱으로 이차방정식 만들기	가우스 주기 (6.2); 사차방정식 (6.4)
곱을 합으로 바꾸는 공식	정17각형 (6.2)
거듭제곱근 소거	최소다항식(minimal polynomial) (6.3)
차수와 탑 법칙(tower law)	작도 불가능성 (6.3)
근의 대칭함수(symmetric function)	분해 삼차방정식(resolvent cubic) (6.4)
공리로 연산 결정하기	도분(derivation) (6.5)
군의 공리로부터 논증하기	부분군의 합집합 (6.6)
행렬 표현(matrix representation)	사원수 (6.7)
동형(isomorphism)	특이행렬군 (6.8)

다음으로

- 사원수는 Section 7.8의 라그랑주의 네 제곱수 정리(four-square theorem)로 이어진다.
- 고유한 규칙을 갖는 대수적 대상으로서의 행렬은 7장의 주제이다.
- 인수분해(factorisation)가 유일하지 않을 수 있는 가우스 정수(Gaussian integer)와 같

은 수 체계의 산술은 Section 1.7의 주제였다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Mario Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved***: 오차방정식(quintic), 갈루아, 그리고 군론의 탄생.
- **Nathan Carter, *Visual Group Theory***: 그림으로 보는 군. 처음 접하기에 이상적이다.
- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***: 기하학을 바탕으로 한 대학 첫 강좌.
- **Ian Stewart, *Galois Theory***: 전체 이야기를 받아들일 준비가 되었을 때.

갈루아는 결투 끝에 스무 살의 나이로 세상을 떠났고, 수학계가 이해하는 데 수십 년이 걸린 몇십 쪽의 원고를 남겼다. 그가 본 것은 방정식의 가장 깊은 비밀이 계수에 있는 것이 아니라 해들의 대칭성에 있다는 사실이었다. 서로 다른 것들에 같은 이름을 붙이고 그것들이 공유하는 구조를 연구한다는 이 통찰은 이제 수학 전체에 스며 있다. 여러분은 이 통찰이 다항식, 다각형, 사원수, 행렬에서 작동하는 것을 보았다. 대학에 가면 거의 모든 곳에서 이를 보게 될 것이다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 문제를 제대로 풀어 보라.

6.1 근이 모두 단위근인 다항식

1. $(x-1)(x+1) = x^2-1$이고 $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$이며, 이 둘의 곱은 x^6-1이다. 마찬가지로 $x^{12}-1 = (x^6-1)(x^6+1)$이고 $x^6+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1) = \mathrm{C}_4\mathrm{C}_{12}$이다.

2. $2p$의 약수(divisor)는 1, 2, p, $2p$이므로 $\mathrm{C}_{2p} = \frac{x^{2p}-1}{(x-1)(x+1)\mathrm{C}_p(x)} = \frac{x^p+1}{x+1}$이다. 또한 p가 홀수이므로 $\mathrm{C}_p(-x) = \frac{(-x)^p-1}{-x-1} = \frac{x^p+1}{x+1}$이다. $p=3$이면 $\mathrm{C}_6 = x^2-x+1 = \mathrm{C}_3(-x)$이다.

3. p^k 이하의 수 중에서 p^k와 공통인 인수를 갖는 것은 p의 배수 p^{k-1}개이다. 원시 p^k제곱근(primitive p^kth root)은 $x^{p^k}-1$의 근 중에서 $x^{p^{k-1}}-1$의 근이 아닌 것이므로 $\mathrm{C}_{p^k} = \frac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1} = \mathrm{C}_p\left(x^{p^{k-1}}\right)$이다. 따라서 $\mathrm{C}_9 = x^6+x^3+1$이다.

4. $\mathrm{C}_{15} = \frac{(x^{15}-1)(x-1)}{(x^3-1)(x^5-1)}$이다. $(x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$에 주어진 8차식(octic)을 곱하면 $x^{15}-1$이 됨을 전개하여 확인하라.

6.2 가우스의 정17각형

1. $\eta+\eta'$은 실수가 아닌 7제곱근(seventh root) 여섯 개의 합이므로 -1이다. $\eta\eta'$을 전개하면 지수가 $4,6,0,5,0,1,0,2,3 \pmod 7$인 아홉 개의 항 α^{a+b}가 나온다. 즉 1이 세 개이고 실수가 아닌 근이 각각 한 번씩 나오므로 $\eta\eta' = 3-1 = 2$이다. 따라서 η, η'은 $\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$이다. η의 실수부(real part)에서 코사인의 합을 얻는다. η의 허수부(imaginary part)는 $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$이고, $\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$이므로 양수이다. 따라서 허수부는 $+\frac{\sqrt{7}}{2}$이다.

2. $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/5}$라 하면, 주기(period) $\zeta+\zeta^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5}$와 $\zeta^2+\zeta^3$의 합은 -1, 곱은 -1이므로 이 둘은 $t^2+t-1=0$의 근이고, 그중 양수인 것에서 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$를 얻는다. 작도하려면 다음과 같이 한다. 단위원에서 직각을 낀 두 변의 길이가 1과 $\frac{1}{2}$인 직각삼각형의 빗변(hypotenuse)은 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이다. 여기서 $\frac{1}{2}$을 빼고 반으로 나누면 $\cos\frac{2\pi}{5}$를 얻는다. 그 거리에서 축에 수직인 직선은 $(1,0)$에 이웃한 꼭짓점에서 원과 만난다. 이

현(chord)을 원을 따라 차례로 옮겨 가면 된다.

3. 둘 다 소수점 아래 다섯째 자리까지 -1.28078이다.

4. 3의 거듭제곱은 $3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6, 1$로, 열여섯 개가 모두 나온다. 2의 거듭제곱은 여덟 단계마다 반복되며($2^8 = 256 \equiv 1$) $\{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$을 주는데, 이는 17을 법으로 하는 0이 아닌 제곱수(square modulo 17)이다.

6.3 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$를 근으로 갖는 다항식

1. $y^3 = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$이고 $9y = 9\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$이므로 $y^3 - 9y = 2\sqrt{2}$이다. 그러면 $\sqrt{3} = y - \sqrt{2}$와 $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$도 y에 대한 다항식이다.

2. $x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$으로 놓고 세제곱하면 $x^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}(3x^2 + 2)$이다. 이를 제곱하면 $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0$을 얻는다.

3. 가능한 유리근(rational root)은 ± 1뿐인데, 어느 것도 근이 아니다. x^3항이 없으므로 최고차항의 계수가 1인(monic) 이차식 두 개로 인수분해하면 $(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$ 꼴이 되고, $a(c - b) = 0$, $b + c - a^2 = -10$, $bc = 1$이다. $a = 0$이면 $b + c = -10$, $bc = 1$인데, 이는 정수에서 불가능하다. $b = c = \pm 1$이면 $a^2 = 12$ 또는 8이 되어 역시 불가능하다. 따라서 이 사차식은 기약(irreducible)이고 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$의 차수(degree)는 4이다.

4. 드무아브르(De Moivre)의 정리에서 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$이고, $\theta = 20^\circ$로 두면 $\frac{1}{2} = 4c^3 - 3c$이다. 후보 $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$는 모두 근이 아니다. 따라서 $\cos 20^\circ$의 차수는 3이다. 그런데 작도 가능한(constructible) 길이는 모두 차수가 2의 거듭제곱이므로, 60°로부터 20°를 작도할 수 없다.

6.4 사차방정식 풀기

1. $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1$은 $\alpha^2\beta\gamma$ 꼴의 열두 항(한 근의 제곱에 다른 두 근을 곱한 것)의 합이다. 그리고 $\left(\sum \alpha\right)\left(\sum \alpha\beta\gamma\right)$는 이 열두 항에 $4\alpha\beta\gamma\delta$를 더한 것이다. 따라서 그 합은 $(-p)(-r) - 4s$이다.

2. 계수를 비교하면 $a + b = 1$, $a\alpha + b\beta = 0$, $a\alpha^2 + b\beta^2 = -p$를 얻는다. 이는 $\alpha \neq \beta$일 때 풀 수 있는데, 바로 두 조건이 이를 보장한다. $p \neq 0$이면 t에 대한 방정식이 진짜 이차방정식이 되고($p = 0$이면 $-qt = 0$으로 줄어들어 근이 0 하나뿐이다), $q^2 \neq 4p^3$이면 그 판별식(discriminant) $q^2 - 4p^3$이 0이 아니다. $x^3 - 24x + 48$의 경우 $p = 8$, $q = 48$이고, $8t^2 - 48t + 64 = 0$에서 $\alpha = 2$, $\beta = 4$이다. 그러면 $\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^3 = -\frac{b}{a} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$이므로 $x - 2 = 2^{-1/3}(x - 4)$이고, 이를 정리하면 주어진 근 $x \approx -5.6946$을 얻는다.

3. 분해 삼차식(resolvent cubic)은 $y^3 - 7y^2 + 16y - 12 = (y - 3)(y - 2)^2$이다. 근 $y = 3$에서 $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 2)$를 얻으므로 근은 1(두 번)과 $1 \pm \mathrm{i}$이다.

4. 각 쌍 안에서 바꿀지 말지(4가지), 그리고 두 쌍끼리 바꿀지 말지(2가지)를 정한다. 즉 항등치환(identity), $(\alpha\beta)$, $(\gamma\delta)$, $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$, $(\alpha\gamma)(\beta\delta)$, $(\alpha\delta)(\beta\gamma)$, $(\alpha\gamma\beta\delta)$, $(\alpha\delta\beta\gamma)$이다. 이는 정사각형의 대칭군(symmetry group)과 똑같은 구조이다.

6.5 공리에서 출발하는 미분

1. 상수는 여전히 0이 되고, 규칙 (i)과 귀납법(induction)에 의해 $\diamondsuit x^n = x^{n-1}\diamondsuit x + x\diamondsuit x^{n-1} = nx^n$이다. 선형성(linearity)에 의해 $\diamondsuit \mathrm{h} = x\mathrm{h}'$이다.
2. $\diamondsuit \mathrm{f} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}\diamondsuit \mathrm{g} + \mathrm{g}\diamondsuit\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}$이므로 $\diamondsuit\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{g}\diamondsuit\mathrm{f} - \mathrm{f}\diamondsuit\mathrm{g}}{\mathrm{g}^2}$이다.
3. $\mathrm{f} = (x-a)^2\mathrm{g}$이면 $\mathrm{f}' = (x-a)\big(2\mathrm{g} + (x-a)\mathrm{g}'\big)$이다. $x^n - 1$의 중근(repeated root)은 nx^{n-1}의 근이어야 하므로 0이어야 한다. 그러나 0은 $x^n - 1$의 근이 아니다.
4. $(2+\varepsilon)^2 + 1 = 5 + 4\varepsilon$이고 $(5+4\varepsilon)^3 = 125 + 300\varepsilon$이다. 따라서 $f(2) = 125$, $f'(2) = 300$이다. 연쇄법칙(chain rule)으로 계산하면 $3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 3 \cdot 25 \cdot 4 = 300$이다.

6.6 부분군의 합집합

1. $V = \{e, a, b, c\}$에서 $a^2 = b^2 = c^2 = e$이고, a, b, c 중 어느 두 개의 곱도 나머지 하나이다. 모든 원소가 자기 자신의 역원(inverse)이다. $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$에서는 i의 역원이 $-\mathrm{i}$이므로 두 군은 서로 다르다.
2. g가 진부분군(proper subgroup) H에 속한다면 g의 모든 거듭제곱도 H에 속하므로, H는 군 전체가 되어 버린다.
3. 1은 짝수도 아니고 3의 배수도 아니다. 더 일반적으로, $\mathbb{Z}$는 순환군(cyclic group)이므로(1로 생성된다) 앞의 문제에 의해 진부분군을 몇 개 모으더라도 그 합집합(union)이 될 수 없다.
4. 직선 $y = mx$는 $y = x^2$와 $x = 0$과 $x = m$에서만 만나고, 직선 $x = 0$은 원점에서만 만난다. 따라서 k개의 직선은 $t \neq 0$인 무수히 많은 점 (t, t^2) 중 많아야 k개만 포함한다.

6.7 사원수군

1. $C \circ B = (\mathrm{i}, 0) \circ (0, 1) = (0, \mathrm{i}) = D$이고, $B \circ C = (0, 1) \circ (\mathrm{i}, 0) = (0, \mathrm{i}^*) = (0, -\mathrm{i}) = H$이다.
2. A의 위수(order)는 1, E의 위수는 2이다. 나머지 여섯 원소는 각각 제곱하면 E이므로 위수가 4이다. 정사각형의 대칭군에는 위수가 2인 원소가 다섯 개(반사 네 개와 반 바퀴 회전) 있으므로 두 군은 동형(isomorphic)이 아니다.
3. 행렬식(determinant)은 $\det M = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2$이고, 이는 네 실수의 제곱의 합이다. $M(z)M(w)$는 $z \circ w$의 행렬이므로, 행렬식을 곱하면 $(a_1^2 + \cdots + a_4^2)(b_1^2 +$

$\cdots + b_4^2$)를 $|u_1|^2 + |u_2|^2$, 즉 다시 네 제곱수의 합으로 나타낼 수 있다.

4. 부분군은 $\{A\}$, $\{A, E\}$, $\{A, E, C, G\}$, $\{A, E, B, F\}$, $\{A, E, D, H\}$, Q_8이다. A가 아닌 모든 원소는 거듭제곱하면 E가 나오므로, $\{A\}$가 아닌 모든 부분군은 E를 포함한다. 위수가 4인 세 부분군을 합치면 여덟 원소가 모두 들어 있다.

6.8 특이행렬로 이루어진 군

1. $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2ab}$이고 $2(2ab) = (2a)(2b)$이다. 이 사상(map)은 일대일(one-to-one)이며 0이 아닌 실수 전체 위로의(onto) 사상이다.

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이고 $ac \neq 0$이므로 이 집합은 닫혀 있다(closed). 모든 $\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$는 왼쪽 항등원(left identity)이다. 그러나 $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$에 대해 $\mathbf{XE} = \mathbf{X}$가 되려면 $e = 1$, $f = b/a$여야 하고, 이는 $\mathbf{X}$에 따라 달라진다. 따라서 오른쪽 항등원이 없으므로 항등원이 없고, 군이 아니다.

3. $\mathbf{0}$, $\mathbf{I}$, 그리고 $bc = a(1-a)$인 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$(대각합(trace)이 1, 행렬식이 0)이다. 이들은 평면을 한 직선 위로 다른 직선을 따라 보내는 사영(projection)이다.

4. 모든 성분이 a인 행렬 $\mathbf{J}_a$는 $\mathbf{J}_a\mathbf{J}_b = \mathbf{J}_{nab}$를 만족한다. 항등원은 $\mathbf{J}_{1/n}$이고 $\mathbf{J}_a$의 역원은 $\mathbf{J}_{1/(n^2a)}$이다.

장

7

선형대수학과 기하학

행렬은 수를 늘어놓은 표가 아니다. 행렬은 공간의 변환이며, 그 자체로 살아 움직이는 대상이다.

이 장의 내용

7.1 행렬에서는 성립하지 않는 법칙 STEP II 1993

7.2 돌지 않고 늘어나기 STEP III 1990

7.3 행렬식을 행렬식이게 하는 것 STEP II 2019

7.4 제자리로 돌아오는 행렬 STEP II 2020

7.5 3차원에서의 회전 STEP III 2022

7.6 쌍곡 회전과 상대성 이론 STEP III 1991

7.7 결코 변하지 않는 양 STEP III 2024

7.8 네 제곱수 STEP III 1994

7.9 정다면체는 다섯 개뿐이다 STEP III 1999

A 연습문제 해답 507쪽

공간의 변환

> 우리는 기저 없이 생각하고, 기저 없이 쓴다. 하지만 막상 일이 닥치면 연구실 문을 닫고 미친 듯이 행렬로 계산한다.
>
> — Irving Kaplansky, 자신과 Paul Halmos의 선형대수학 접근 방식에 대하여

학교에서 행렬(matrix)은 보통 연립방정식(simultaneous equations)을 푸는 도구로, 또는 점을 변환하는 방법으로 등장한다. 행렬에 열벡터(column vector)를 곱하고 새 좌표를 읽어 내는 식이다. 둘 다 쓸모 있지만, 이런 시각은 행렬이 수학에서 가장 중요한 개념 가운데 하나인 이유를 가려 버린다. 행렬은 **선형변환**(*linear transformation*), 곧 공간을 늘이고, 회전하고, 반사하고, 층밀리기하는 방법이며, 수처럼 더하고, 곱하고, 거듭제곱하고, 미분할 수 있다. 그런데 행렬은 수와 같지 않다. 행렬의 곱셈은 순서에 따라 달라지고, 영이 아닌 두 행렬을 곱해 영이 될 수 있으며, 행렬에는 어떻게 적느냐와 상관없이 그 본질적인 성질을 담아내는 숨은 불변량(invariant)(대각합(trace), 행렬식(determinant), 고윳값(eigenvalue))이 있다.

선형대수학이 중요한 이유

선형대수학(linear algebra)은 아마 수학에서 가장 널리 쓰이는 분야일 것이다. 비디오 게임에서 영화 애니메이션에 이르기까지 모든 컴퓨터 그래픽 엔진은 행렬을 곱하는 기계이다. 캐릭터의 모든 회전, 모든 카메라 각도, 모든 원근 투영(perspective projection)이 행렬이다. 인터넷의 검색 엔진과 추천 시스템은 고유벡터(eigenvector) 위에 세워져 있다. 공학자는 고윳값으로 다리와 건물의 진동수를 구하고, 통계학자는 고윳값으로 데이터의 주요 패턴을 찾아내며, 양자역학은 전부 선형대수학의 언어로 쓰여 있다. 그리고 현대 기계학습은 그 핵심을 들여다보면 엄청난 양의 행렬 곱셈이다.

이렇게 어디에나 쓰이는 데에는 이유가 있다. 선형 문제는 우리가 완전히 풀 수 있는 문제이고, 거의 모든 비선형 문제는 충분히 가까이 확대해 보면 선형처럼 보인다. 이것이 미적분학(calculus)의 아이디어이며, 이는 곧 선형대수학이 거의 모든 것의 국소적인 행동을 기술하는 언어라는 뜻이다.

대학에서 만나게 될 내용

선형대수학은 해석학(analysis)과 함께 대학 1학년 과정의 두 기둥 가운데 하나이다. 여러분은 **벡터공간**(*vector space*)(더하고 스칼라배할 수 있는 집합으로, 평면과 3차원 공간

은 그 첫 번째 예일 뿐이다)과 그 사이의 **선형사상**(*linear map*)을 만나게 되고, 행렬이란 단지 선형사상을 좌표로 적은 것임을 배우게 된다. 행렬식, 고윳값과 고유벡터, 그리고 대칭행렬(symmetric matrix)은 회전으로 대각화(diagonalise)할 수 있다는 **스펙트럼 정리**(*spectral theorem*)도 공부한다. 이후의 과목들은 이것을 어디서나 사용한다. 미분방정식(differential equations)(제8장)에서, 기하학(회전과 반사가 군(group)을 이루는 곳)에서, 연속적인 대칭을 기술하는 **리 군**(*Lie group*) 이론에서, 그리고 무한 차원의 선형대수학이라 할 수 있는 함수해석학(functional analysis)에서 말이다.

이 장을 관통하는 질문

세 가지 큰 질문

1. **행렬은 어떤 점에서 수와 같고, 어떤 점에서 다른가?** 산술의 어떤 법칙이 살아남고, 어떤 법칙이 무너지는가?
2. **행렬은 실제로 무엇을 하는가?** 변환의 기하학적 모습을 어떻게 볼 수 있으며, 좌표와 무관하게 그것을 담아내는 수는 무엇인가?
3. **무엇이 변하지 않는가?** 변환이나 운동에 의해 보존되는 양은 무엇이며, 그것은 우리에게 무엇을 알려 주는가?

이 장은 행렬 대수의 법칙(Section 7.1)에서 시작하여 변환의 기하학으로 넘어간다. 고유벡터, 행렬식, 유한 위수(finite order)의 행렬, 3차원 회전, 그리고 특수상대성이론(special relativity)의 쌍곡 회전(hyperbolic rotation)을 다룬다. 이어서 시간에 따라 변하는 행렬의 보존량(conserved quantity), 행렬식에서 나오는 네 제곱수 항등식을 살펴보고, 마지막으로 정다면체(Platonic solids)를 분류하는 세기 논법인 오일러(Euler) 공식으로 마무리한다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
7.1	무너지는 법칙	비가환성(non-commutativity); 영인자(zero divisor)
7.2	고유벡터	변환이 회전시키지 않는 방향
7.3	행렬식	곱셈성(multiplicativity)에 의한 특징짓기; 부호 있는 넓이(signed area)
7.4	유한 위수의 행렬	대각합, 행렬식, 케일리–해밀턴(Cayley–Hamilton)
7.5	3차원 회전	외적(cross product)에서 얻는 Rodrigues 공식
7.6	로런츠 부스트(Lorentz boost)	쌍곡각은 더해진다
7.7	보존량	교환자(commutator)의 대각합은 0이다
7.8	네 제곱수	곱셈적인 행렬식
7.9	정다면체	이중 세기(double counting)와 오일러 공식

이 장을 읽는 방법

이 장에 나오는 모든 행렬에 대해, 그 행렬이 하는 일을 그림으로 그려 보아라. 단위정사각형이나 단위원, 또는 벡터 몇 개를 잡고 그 상을 대강 그려 보는 것이다. 2분짜리 스케치만으로도 계산을 시작하기 전에 답(고유벡터, 반례(counterexample), 불변직선(invariant line))이 보이는 경우가 많고, 나중에 계산을 검산하는 데에도 도움이 된다.

7.1 행렬에서는 성립하지 않는 법칙

문제

STEP II 1993, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/93-s2-q6`

도입

행렬(matrix)은 더하고 곱할 수 있으므로 수처럼 다루고 싶어진다. 이 문제는 수에서는 참인 네 가지 "규칙"을 제시하고, 그중 어느 것이 행렬에서도 살아남는지를 물으며 바로 그 유혹을 시험한다. 대부분은 성립하지 않으며, 성립하지 않는 방식이 많은 것을 알려 준다. 행렬의 곱셈은 교환법칙(commutative law)을 만족하지 않는다. 곱이 영행렬인 영이 아닌 행렬들이 있다. 그리고 행렬에 대한 이차방정식(quadratic equation)은 해를 무한히 많이 가질 수 있다.

이러한 실패는 결함이 아니다. 오히려 행렬이 쓸모 있는 이유가 바로 여기에 있다. 행렬은 공간의 변환을 나타내며, 두 변환을 다른 순서로 하면 실제로 다른 결과가 나온다. 1925년 하이젠베르크(Werner Heisenberg)는 양자역학의 물리량이 수가 아니라 행렬처럼 행동한다는 것, 그리고 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$가 성립하지 않는다는 사실이 불확정성 원리(uncertainty principle)의 수학적 형태라는 것을 발견하였다.

시작하기 전에

생각해 보기 실수에서 $ab = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$인 이유는 무엇인가? 그 논증은 수의 어떤 성질을 사용하며, 그 성질은 행렬에서도 성립하는가?

$ab = 0$이고 $a \neq 0$이면 양변을 a로 나누어 $b = 0$을 얻는다. 이 논증에는 영이 아닌 모든 수가 역원(inverse)을 가진다는 사실이 필요하다. 영이 아닌 행렬이 반드시 역행렬을 가지는 것은 아니므로(행렬식(determinant)이 0인 행렬은 역행렬이 없다) 이 논증은 무너진다. 기하적인 그림도 함께 염두에 두자. 행렬은 평면의 변환이며, 곱 $\mathbf{AB}$는 "$\mathbf{B}$를 먼저 하고, 그다음

$\mathbf{A}$를 한다"는 뜻이다.

차근차근 풀기

1단계 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이지만 $\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$일 수 있는가?

> **생각해 보기** 기하적으로 생각해 보자. $\mathbf{B}$가 모든 것을 한 직선 위로 보내고, $\mathbf{A}$가 그 직선을 0으로 찌그러뜨리게 하고 싶다. 그러나 반대 순서에서는 $\mathbf{A}$가 남긴 것을 $\mathbf{B}$가 모두 없애 버려서는 안 된다.

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$로 두자. 이 행렬은 x축 위로의 사영(projection)이다(y축을 없앤다). 또 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$로 두면, 이 행렬은 (x, y)를 y축 위의 점 $(0, x)$로 보낸다. 그러면

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

따라서 이 명제는 **거짓**이다(그림 7.1.1). ■

2단계 제곱의 차

모든 곱의 순서를 유지하면서 주의 깊게 전개하면

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2.$$

이것은 정확히 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$일 때 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$와 같다. 단계 1의 행렬들에서는 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$이므로 이 명제는 **거짓**이다. ■

3단계 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$의 영이 아닌 해

> **생각해 보기** $\det \mathbf{A} \neq 0$이면 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$에 무엇을 할 수 있는가? $\det \mathbf{A} = 0$이면 $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$인 영이 아닌 열벡터(column vector) $\mathbf{v}$를 찾을 수 있는가?

$\det \mathbf{A} \neq 0$이면 $\mathbf{A}^{-1}$이 존재하고 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{0}$이다. 즉 영이 아닌 해는 없다.

$\det \mathbf{A} = 0$이면 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad = bc$로 쓰자. 벡터 $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$는 $\mathbf{A}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - ba \\ cb - da \end{pmatrix} = \mathbf{0}$을 만족하고, 다른 하나도 마찬가지이다. $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이므로 둘 중 적어도 하나는 영벡터가 아니다. 그것을 $\mathbf{v}$라 하자. 그러면 두 열이 모두 $\mathbf{v}$인 행렬 $\mathbf{X}$는 영행렬이 아니고 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$이다. 따라서 이 명제는 **참**이다. ■

4단계 제곱근은 몇 개인가?

> **잠깐, 직접 해 보기** $\mathbf{X}^2 + \mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$이 해를 무한히 많이 가지도록 하는 영이 아닌 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$를 찾아라. (힌트: 좌변을 완전제곱 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2$으로 만들고, 제곱이 영행렬인 행렬을 생각해 보라.)

둘 다 영이 아닌 $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$를 택하자. 그러면 방정식은 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$이 된다. $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$인 임의의 행렬 $\mathbf{N}$은 해 $\mathbf{X} = \mathbf{I} + \mathbf{N}$을 주며, 이러한 $\mathbf{N}$은 무한히 많다.

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}, \text{ 임의의 실수} t.$$

따라서 모든 t에 대하여 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$은 해이고, 이 명제는 **거짓**이다. ■

돌아보기

- **순서가 중요하다.** 모든 전개에서 곱의 순서를 지켜야 한다. $\mathbf{AB}$와 $\mathbf{BA}$는 대개 다르다.
- **영인자.** 영이 아닌 행렬끼리 곱해서 영행렬이 될 수 있으며, 이 때문에 "이차방정식의 근은 많아야 두 개"라는 논증이 무너진다.
- **변환으로 생각하라.** 각 반례(counterexample)는 행렬이 평면에 무엇을 하는지 그려 보면 쉽게 찾을 수 있었다.

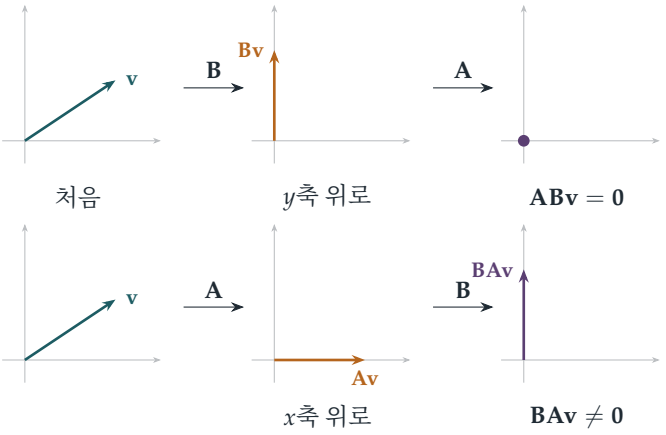


그림 7.1.1 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이지만 $\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$인 이유. 위: $\mathbf{B}$는 모든 벡터를 y축 위로 보내고, $\mathbf{A}$(x축 위로의 사영)가 이를 o으로 짓눌러 버린다. 아래: 반대 순서에서는 $\mathbf{A}$가 x성분을 남기고, $\mathbf{B}$가 그것을 y축 위로 옮기며, 그곳에서 벡터는 살아남는다.

숨은 수학

대수로서의 행렬

케일리(Arthur Cayley)는 1858년에 행렬을 단순한 계수의 표가 아니라 더하고 곱할 수 있는 하나의 대상으로 다루는 행렬 대수를 도입하였다. 그는 곱셈이 교환법칙을 만족하지 않는다는 것을 곧바로 알아차렸고, **케일리–해밀턴 정리**(*Cayley–Hamilton theorem*)를 증명하였다. 이 정리는 모든 정사각행렬이 자기 자신의 특성방정식(characteristic equation)을 만족한다는 것이다. 대각합(trace)이 t이고 행렬식이 d인 2×2 행렬에 대해서 이 정리는 $\mathbf{M}^2 - t\mathbf{M} + d\mathbf{I} = \mathbf{0}$임을 말하며, 이 사실은 이 장에서 거듭 사용된다(Section 7.4). 2×2 실수 행렬 전체는 **환**(*ring*)을 이룬다. 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 할 수 있지만 곱셈은 교환법칙을 만족하지 않으며, **영인자**(*zero divisor*), 즉 곱이 영이 되는 영이 아닌 원소들이 존재한다.

무한히 많은 제곱근

단계 4는 훨씬 더 인상적으로 만들 수 있다. 방정식 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$는 뻔한 해 $\pm\mathbf{I}$뿐 아니라, 원점을 지나는 직선에 대한 평면의 모든 반사(reflection) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$도 해로 가진다. 두 번 반사하면 아무것도 변하지 않기 때문이다. 이것은 $\mathbf{I}$의 제곱근이 원 하나만큼 있다는 뜻이다. 계수가 수인 n차 다항식(polynomial)이 많아야 n개의 근을 가지는 것은 수에 영인자가 없기 때문이다. 행렬에는 영인자가 있으므로 이 개수 세기가 성립하지 않는다.

물리학에서의 비가환성

고전역학에서 위치 x와 운동량(momentum) p는 수이며 $xp = px$이다. 양자역학에서 이들은 $xp - px = i\hbar$를 만족하는 연산자(operator, 무한 행렬)가 된다. 여기서 $\hbar$는 플랑크 상수(Planck's constant)를 2π로 나눈 값이다. 이 하나의 비가환 관계로부터 하이젠베르크의 불확정성 원리, 즉 위치와 운동량을 동시에 정확히 알 수 없다는 사실이 나온다. 1925년 하이젠베르크가 양자역학의 규칙을 발견했을 때 그는 행렬이 무엇인지 알지 못했다. 하이젠베르크가 고안한 이상한 곱셈 규칙이 바로 행렬의 곱셈이라는 것을 알아본 사람은 막스 보른(Max Born)이었다.

사고 기술

익숙한 규칙을 새로운 상황에서 시험하기

새로운 종류의 대상을 만나면, 익숙한 규칙 중 어느 것이 여전히 성립하는지 확인하고, 각 규칙이 정확히 어떤 성질에 의존하는지 알아내라.

"$ab = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$"이라는 규칙은 나눗셈에 의존한다. "$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$"은 교환법칙에 의존한다. 각 규칙이 무엇에 기대고 있는지 알면 그 규칙을 언제 여전히 쓸 수 있는지 알 수 있다.

더 도전하기

1 **언제 교환되는가?** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$과 교환되는 2×2 행렬을 모두 구하여라.

2 **영행렬의 제곱근.** $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$인 2×2 실수 행렬 $\mathbf{N}$을 모두 구하여라. (힌트: 케일리–해밀턴 정리를 사용하여 $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \det\mathbf{N} = 0$임을 보여라.)

3 **반사.** 모든 반사 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$을 제곱하면 $\mathbf{I}$가 됨을 보이고, 이 행렬이 반사의 기준으로 삼는 직선을 구하여라.

4 **케일리–해밀턴.** 모든 2×2 행렬이 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$을 만족함을 직접 계산하여 증명하여라.

더 읽을거리

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 가장 널리 쓰이는 입문 선형대수(linear algebra) 교재로, 이해를 강조한다.
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*** (Springer; 온라인 무료). 행렬보다 선형사상(linear map)을 중심에 둔, 좀 더 추상적인 접근이다.
- **Jim Baggott, *The Quantum Story*** (Oxford University Press). 하이젠베르크의 행렬역학을 포함한 양자역학의 역사이다.

7.2 돌지 않고 늘어나기

문제

STEP III 1990, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/90-s3-q6`

도입

행렬 변환은 보통 모든 벡터를 새로운 방향으로 옮긴다. 그러나 많은 행렬에는 전혀 돌리지 않고 그 방향으로 늘이거나 줄이기만 하는 특별한 방향이 몇 개 있다. 이것을 그 행렬의 **고유벡터**(eigenvector)라 하고(독일어 *eigen*은 "자신의" 또는 "고유한"이라는 뜻이다), 늘어나는 비율을 **고윳값**(eigenvalue)이라 한다. 이 문제의 행렬처럼 대칭행렬에서는 언제나 그렇듯이 고유벡터가 충분히 많으면, 변환이 투명하게 드러난다. 알맞은 좌표에서 보면 그것은 단지 두 축 방향으로 늘이는 것일 뿐이다.

이 문제는 특정한 행렬의 고유벡터를 구하고, 이를 이용해 그 행렬이 원을 어떻게 바꾸는지 이해한다. 고유벡터는 응용수학 전체에서 가장 유용한 개념 가운데 하나이다. 고유벡터는 다리의 고유 진동, 회전하는 물체의 주축, 원자의 에너지 준위, 데이터 구름에서 가장 중요한 방향, 그리고 구글(Google)의 초기 PageRank 알고리즘에 의한 웹 페이지 순위를 설명한다.

시작하기 전에

생각해 보기 T가 벡터를 "방향은 그대로 두고 스칼라배만 한다"는 것은 무슨 뜻인가? 이를 식으로 써 보아라.

이는 어떤 수 λ에 대하여 $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$라는 뜻이다. 즉 $\mathbf{v}$는 고윳값이 λ인 고유벡터이다. 문제에 나오는 두 벡터 $(1, 2)$와 $(2, -1)$이 서로 수직이라는 점에 주목하자. 이는 우연이 아니다. 이 행렬은 **대칭**(symmetric)행렬이고, 대칭행렬의 고유벡터는 언제나 서로 수직이다.

차근차근 풀기

1단계 고유벡터

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

따라서 $(1,2)$는 2배로, $(2,-1)$은 4배로 늘어난다. ■

2단계 원의 상

> **생각해 보기** E의 방정식을 구하려면 x와 y를 X와 Y로 나타내고(역행렬을 구한다), 이를 $x^2+y^2=1$에 대입하면 된다.

행렬 $\frac{2}{5}\begin{pmatrix}9&-2\\-2&6\end{pmatrix}$의 행렬식(determinant)은 $\frac{4}{25}(54-4) = 8$이고, 역행렬(inverse matrix)은 $\frac{1}{20}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}$이다. 따라서 $x = \frac{6X+2Y}{20}$, $y = \frac{2X+9Y}{20}$이고, $x^2+y^2=1$은

$$(6X+2Y)^2 + (2X+9Y)^2 = 400 \quad\Longrightarrow\quad 40X^2+60XY+85Y^2 = 400,$$

이 되며, 이를 5로 나누면 $8X^2+12XY+17Y^2=80$이다. ■

> **생각해 보기** E는 어떤 모양이며, 그 넓이는 얼마인가? 고유벡터를 이용하여라.

단위원은 모든 방향으로 반지름이 1이다. $(2,-1)$ 방향으로는 4배로, 이에 수직인 방향 $(1,2)$로는 2배로 늘어난다. 따라서 E는 고유벡터 방향을 따라 반축(semi-axis)의 길이가 4와 2인 타원(ellipse)이고(그림 7.2.1), 그 넓이는 $\pi\times 4\times 2 = 8\pi$이다. (같은 이야기로, 모든 선형사상(linear map)은 넓이를 $|\det T|=8$배로 만들고, 원의 넓이는 π이다.)

3단계 X의 최댓값

> **생각해 보기** C 위에서 $X=\frac{2}{5}(9x-2y)$이다. $x^2+y^2=1$일 때 $9x-2y$는 얼마나 커질 수 있는가?

$9x-2y$는 $(9,-2)$와 단위벡터 (x,y)의 내적(dot product)이므로, 그 최댓값은 $|(9,-2)| = \sqrt{85}$이고 (x,y)가 $(9,-2)$ 방향을 향할 때 이 값을 가진다. 따라서 X의 최댓값은 $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{\frac{85}{25}} = 2\sqrt{\frac{17}{5}}$이다. ■

4단계 접선

잠깐, 직접 해 보기 C 위의 점 $\frac{1}{5}(3,4)$에서의 접선(tangent line)은 $3x+4y=5$이다. 선형사상은 접선을 접선으로 보낸다. 이를 이용하여 E의 접선을 구하여라.

$3x+4y=5$에 $x=\frac{6X+2Y}{20}$, $y=\frac{2X+9Y}{20}$을 대입하면

$$\frac{3(6X+2Y)+4(2X+9Y)}{20}=5 \quad\Longrightarrow\quad 26X+42Y=100,$$

즉 $13X+21Y=50$이다. ■

(검산: 그 점 자체는 $T(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(\frac{38}{25},\frac{36}{25})$이고, $13\cdot\frac{38}{25}+21\cdot\frac{36}{25}=\frac{494+756}{25}=50$이다.)

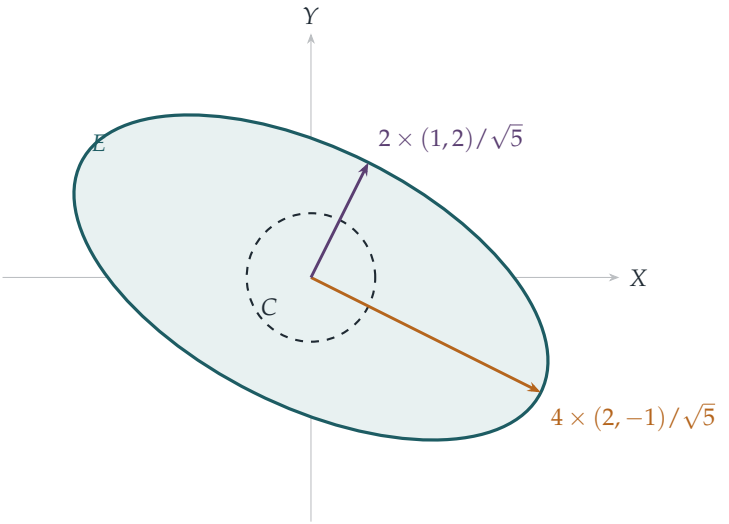


그림 7.2.1 단위원 C(점선)와 T에 의한 그 상 E. 고유벡터 $(2,-1)$ 방향으로 원은 4배로 늘어나고, 이에 수직인 고유벡터 $(1,2)$ 방향으로는 2배로 늘어난다. 따라서 E는 그 방향들을 따라 반축의 길이가 4와 2이고 넓이가 8π인 타원이다.

돌아보기

- **고유벡터는 자연스러운 축이다.** 고유벡터로 주어지는 좌표에서 T는 단지 4배와 2배로 늘이는 것일 뿐이고, 원에 미치는 효과도 뻔하다.
- **행렬식은 넓이를 잰다.** E의 넓이는 C의 넓이의 $|\det T|$배이다.
- **선형사상은 접함을 보존한다.** 원의 접선을 변환하자 계산을 거의 하지 않고도 타원의 접선을 얻었다.

숨은 수학

스펙트럼 정리

모든 실대칭행렬은 서로 수직인 고유벡터를 빠짐없이 갖추고 있으며, 고윳값은 모두 실수이다. 이것이 **스펙트럼 정리**(spectral theorem)로, 처음 배우는 선형대수(linear algebra) 과목의 핵심 결과 가운데 하나이다. 이 정리에 따르면 모든 대칭 선형사상은 적절한 직교좌표에서 각 축 방향으로 늘이는 것일 뿐이다. 같은 이야기로, $8X^2 + 12XY + 17Y^2$ 같은 모든 이차형식(quadratic form)은 회전을 통해 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ 꼴로 바꿀 수 있으며, 그래서 모든 유심 원뿔곡선(central conic)은 서로 수직인 축을 가진 타원이나 쌍곡선(hyperbola)이다(**주축 정리**(principal axis theorem)). 이 아이디어는 1820년대의 코시(Cauchy)까지 거슬러 올라가는데, 그는 이를 이용해 이차곡면의 주축과 고체 내부 응력의 주축을 구했다.

이것이 성립하게 하는 것은 대칭성이다. 대칭이 아닌 행렬은 이렇게 고분고분하지 않을 수 있다. 90° 회전은 모든 방향을 돌리므로 실수 고유벡터가 전혀 없고, 전단(shear) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$은 고유벡터 방향이 하나뿐이므로 어떤 두 축을 택해도 그 방향으로 늘이는 변환이 되지 않는다.

어디에나 있는 고유벡터

고유벡터가 등장하는 곳 몇 군데를 소개한다.

- **진동.** 질점과 용수철로 이루어진 계는 **정규 모드**(normal mode)로 진동한다. 정규 모드란 모든 부분이 하나의 진동수로 발맞추어 움직이는 패턴이다. 이것은 어떤 행렬의 고유벡터이고, 진동수는 고윳값에서 나온다(Section 11.2).
- **데이터.** 데이터 점들의 구름이 가장 넓게 퍼져 있는 방향은 그 공분산 행렬(covariance matrix)의 고유벡터이다. 이를 찾는 것이 **주성분 분석**(principal component analysis)으로, 통계학과 기계 학습의 기본 도구 가운데 하나이다(Section 13.7).
- **양자역학.** 어떤 물리량을 측정했을 때 나올 수 있는 결과는 어떤 행렬(또는 연산자(operator))의 고윳값이며, 원자의 에너지 준위도 고윳값이다.
- **웹 검색.** 구글 검색 엔진의 바탕이 된 최초의 아이디어인 PageRank는 페이지 사이의 링크를 나타내는 거대한 행렬에서 고윳값이 1인 고유벡터의 성분에 따라 페이지의 순위를 매긴다.

사고 기술

변환에 맞는 좌표를 골라라

선형변환을 이해하려면 그 변환이 돌리지 않는 방향을 찾아라. 그 좌표에서 변환은 단순해진다.

이것은 Section 5.6에서 페르마(Fermat) 점을 원점으로 잡은 것이나, Section 2.8에서 사상을 단순하게 만들려고 변수를 바꾼 것과 같은 아이디어이다. 알맞은 좌표를 잡으면 구조가 뻔히 드러난다.

더 도전하기

1 **고윳값 구하기.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 고윳값이 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$의 근임을 보이고, 문제의 행렬에서 $\lambda = 2$와 4가 나옴을 확인하여라.

2 **수직인 고유벡터.** $\mathbf{M}$이 대칭행렬이고 $\lambda \neq \mu$에 대하여 $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{Mv} = \mu\mathbf{v}$이면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$임을 보여라. (힌트: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu}$를 두 가지 방법으로 계산하여라.)

3 **회전.** 회전행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$은 θ가 π의 배수가 아니면 실수 고유벡터를 갖지 않음을 보여라. 이 행렬의 복소수 고윳값은 무엇인가?

4 **거듭제곱.** 고유벡터를 이용하여 $T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$을 구하여라. (힌트: $(1,0)$을 $(1,2)$와 $(2,-1)$의 일차결합으로 나타내어라.)

더 읽을거리

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 선형대수 입문서. 6장은 고윳값과 그 응용에 대한 훌륭한 입문이다.
- **Kurt Bryan & Tanya Leise, "The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google"**, *SIAM Review* 48 (2006). 구글 뒤에 숨은 선형대수를 다룬 논문으로, 읽기 쉽고 무료로 볼 수 있다.
- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra*** (동영상 시리즈, 온라인 무료). 이 절에서 다룬 기하학적 아이디어를 정확히 보여 주는 아름다운 애니메이션이다.

7.3 행렬식을 행렬식이게 하는 것

문제

STEP II 2019, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

도입

2×2 행렬의 행렬식(determinant)은 $ad - bc$이다. 이 공식은 어디에서 왔으며, 왜 그렇게 중요할까? 한 가지 답은 행렬식이 그 행렬이 넓이를 늘리거나 줄이는 비율이라는 것이다. 이 문제가 탐구하는 또 다른 답은, 행렬식이 행렬의 곱셈을 보통의 곱셈으로 바꾸어 주는 사실상 **유일한** 함수라는 것이다: $\det(\mathbf{MN}) = \det \mathbf{M} \det \mathbf{N}$.

이 문제는 바로 이 성질 하나(와 자명한 경우를 배제하기 위한 가벼운 조건 두 개)만을 가진 미지의 함수 f를 주고, 그 함수가 어떻게 행동해야 하는지를 한 단계씩 연역하도록 한다. Section 6.5의 도함수 문제처럼, 이것은 대상을 오직 그 성질만으로 확정해 내는 연습이다. 끝에 이르면 f는 행을 바꾸면 부호가 바뀌고, 특이(singular) 행렬에서는 값이 영이 되며, 층밀림(shear)에서는 1이 될 수밖에 없다. 이는 정확히 행렬식의 행동이다.

시작하기 전에

생각해 보기 문제에 나오는 각각의 특수한 행렬은 무슨 일을 하는가? 일반적인 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 **JM**, **MJ**, **KM**, **PM**을 계산해 보라.

JM은 **M**의 두 행을 맞바꾸고, **MJ**는 두 열을 맞바꾼다. **KM**은 둘째 행에 k를 곱한다. **PM**은 둘째 행을 첫째 행에 더한다. 이것들은 가우스(Gauss) 소거법(Gaussian elimination)의 기본행연산(elementary row operations)이다. f는 곱을 곱으로 바꾸므로, 이 특수한 행렬들에서 f의 값을 알면 각 행연산에 대해 f가 어떻게 반응하는지 알 수 있다.

차근차근 풀기

1단계 항등행렬

$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I})$이다. $\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$이므로 양변을 나누면 $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$을 얻는다. ■

2단계 행 바꾸기

$\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이고, 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$이다. $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$이다. 이제 $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{JM}$이므로 이 행렬에서의 값은 $\mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{M}) = -\mathrm{f}(\mathbf{M})$이다. 또 $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \mathbf{JMJ}$(행을 바꾼 다음 열을 바꾼 것)이므로 이 행렬에서의 값은 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})$이다. ■

3단계 종속인 행

생각해 보기 먼저 두 행이 같은 행렬 $\mathbf{B}$를 생각하자. $\mathbf{JB}$는 무엇인가? 이것은 $\mathrm{f}(\mathbf{B})$에 대해 무엇을 말해 주는가?

$\mathbf{B}$의 두 행이 모두 (a, b)라면, 두 행을 바꾸어도 달라지는 것이 없다: $\mathbf{JB} = \mathbf{B}$. 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = \mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B})$이고, 이로부터 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$일 수밖에 없다.

이제 $\mathbf{A}$의 행이 (a, b)와 $k(a, b)$라면, 두 행이 모두 (a, b)인 $\mathbf{B}$에 대해 $\mathbf{A} = \mathbf{KB}$이다. 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$이다. ■(여기에는 둘째 행이 영벡터인 $k = 0$인 경우도 포함된다.)

4단계 층밀림

잠깐, 직접 해 보기 $\mathbf{P}^2$과 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$를 계산하라. 두 값이 같아지도록 k를 고르라. 그러면 $\mathrm{f}(\mathbf{P})$에 대해 무엇을 알 수 있는가?

$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이고, $k \neq 0$이면

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이다. $k = 2$로 두면 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \mathbf{P}^2$이다. 양변에 f를 취하고 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$을 이용하면

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ 또는 1이다. 그런데 $\mathbf{P}$는 가역(invertible)이고 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) \neq 0$이다. 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$이다. ■

돌아보기

- **특수한 원소가 함수의 정체를 드러낸다.** 곱셈적 성질을 $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{P}$에 적용하여 각각에서의 f의 값과, 각 행연산이 미치는 효과를 얻었다.
- **변환해도 자기 자신과 같은 원소.** 두 행이 같은 행렬은 행 바꾸기로 변하지 않는데, 행 바꾸기는 f의 부호를 바꾼다. 따라서 그런 행렬에서 f는 영이어야 한다.
- **켤레(conjugation)는 f를 보존한다.** $f(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = f(\mathbf{P})$이며, 이 사실은 대수학에서 거듭 쓰인다.

숨은 수학

모든 곱셈적 함수는 행렬식의 함수이다

문제는 $f(\mathbf{P}) = 1$에서 멈추지만, 논증을 끝까지 완성할 수 있다. 모든 가역 행렬은 기본행렬(elementary matrices)(행 바꾸기, 행의 상수배, 층밀림)의 곱이고, 이 문제는 각각에서 f가 어떻게 행동하는지 보여 준다. 이로부터 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$를 만족하는 어떤 실수 한 변수 함수 ϕ에 대해 $f(\mathbf{M}) = \phi(\det \mathbf{M})$임이 따라 나온다. 행렬식 자체는 $\phi(x) = x$인 경우이지만, $\phi(x) = x^3$이나 $\phi(x) = |x|^{1/2}\operatorname{sign}(x)$도 조건을 만족한다. 다시 말해, **행렬식은 행렬 위에서 정의되는 본질적으로 새로운 유일한 곱셈적(*multiplicative*) 함수이다.** 군론(group theory)의 언어로 말하면, 행렬식은 가역 행렬들의 군에 대해 가환군(commutative group)이 볼 수 있는 모든 것을 담고 있다.

넓이로서의 행렬식

기하적으로 보면, 2×2 행렬은 단위정사각형을 평행사변형으로 보내며, $\det \mathbf{M}$은 그 평행사변형의 **부호 있는 넓이**(signed area)이다. 방향(orientation)이 보존되면 양수, 뒤집히면 음수이다(그림 7.3.1). 그러면 곱셈적 성질의 의미가 분명해진다. 두 변환을 차례로 하면 넓이의 확대 비율이 곱해진다. 행 바꾸기는 방향을 뒤집으므로 $\det \mathbf{J} = -1$이고, 층밀림은 정사각형을 밀어서 넓이가 같은 평행사변형으로 만들므로 $\det \mathbf{P} = 1$이며, 행이 종속인 행렬은 정사각형을 납작하게 짓눌러 버리므로 행렬식이 영이다. 문제의 모든 단계에는 그에 맞는 그림이 있다.

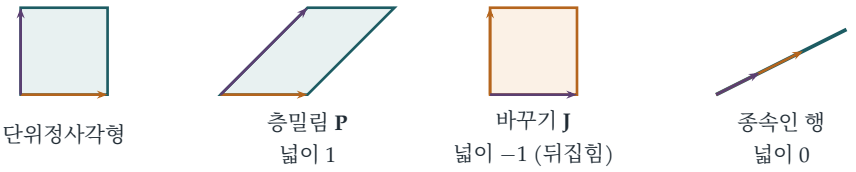


그림 7.3.1 부호 있는 넓이로서의 행렬식. 두 기저 벡터(basis vectors)의 상(호박색, 자주색)이 평행사변형을 만든다. 층밀림은 넓이를 보존하고, 기저 벡터를 맞바꾸면 방향이 뒤집히며, 행(또는 열)이 종속이면 정사각형이 직선 위로 무너진다. 두 변환을 차례로 하면 부호 있는 넓이가 곱해지는데, 이것이 바로 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$이라는 성질이다.

고차원의 행렬식

$n \times n$ 행렬에서 행렬식은 부호 있는 부피의 확대 비율이며, 세 가지 성질로 특징지어진다. 각 행에 대해 선형이고, 두 행을 바꾸면 부호가 바뀌며, 항등행렬에서 값이 1이다. 이 성질들만으로 익숙한 전개 공식들을 유도할 수 있고, 가우스 소거법은 행렬식을 효율적으로 계산하는 방법을 준다. 행렬식은 중적분의 변수변환 공식(**야코비안**(Jacobian))에, 역행렬 공식에, 그리고 Section 5.4에서 보았듯이 다항식의 판별식(discriminant)에 나타난다.

사고 기술

특수한 입력으로 미지의 함수를 탐색하라

어떤 함수가 오직 하나의 성질로만 알려져 있을 때는, 떠올릴 수 있는 가장 단순한 특수한 입력에 그 성질을 적용해 보고 무엇이 강제되는지 살펴보라.

여기서는 항등행렬, 행 바꾸기, 상수배, 층밀림만으로 거의 모든 것을 결정할 수 있었다. 자기 자신의 제곱, 역원, 켤레가 되는 입력을 고르는 것이 특히 효과적이다.

더 도전하기

1 **다른 예.** $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^3$은 문제의 모든 조건을 만족하고, $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = |\det \mathbf{M}|$은 곱셈적 성질은 만족하지만 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$은 만족하지 않음을 보여라.

2 **열연산.** 둘째 열이 첫째 열의 상수배인 행렬에서도 f의 값이 영임을 보여라.

3 **상수배.** $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$라 하자. $\mathrm{f}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$이고 $\mathrm{f}(\mathbf{K}_k)\mathrm{f}(\mathbf{K}_l) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_{kl})$임을 보여라.

4 **행렬식으로의 환원.** 심화모든 가역 2×2 행렬은 $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}_k$, $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 꼴의 행렬들의 곱으로 나타낼 수 있음을 보여라. 이로부터 $\mathrm{f}(\mathbf{M})$이 $\det \mathbf{M}$에만 의존함을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*** (Springer; 온라인 무료 공개). 이 문제와 같은 정신으로, 행렬식을 그 성질로부터 정의한다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 5장에서 세 가지 규칙으로부터 행렬식을 전개한다.
- **3Blue1Brown, "The determinant"** (영상, 온라인 무료 공개). 넓이로서의 해석을 아름다운 애니메이션으로 보여 준다.

7.4 제자리로 돌아오는 행렬

문제

STEP II 2020, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip`

도입

어떤 변환은 충분히 여러 번 반복하면 모든 것을 처음 자리로 되돌려 놓는다. 90° 회전은 네 번 만에, 반사는 두 번 만에 그렇게 한다. 어떤 n에 대하여 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$라는 성질을 가지는 2×2 행렬은 어떤 것들이며, 그것을 어떻게 알아볼 수 있을까?

이 문제의 놀라운 점은 두 수, 곧 **대각합**(*trace*)과 **행렬식**(*determinant*)만으로 판정이 된다는 것이다. 네 성분을 알 필요 없이 $a + d$와 $ad - bc$만 알면 된다. 그리고 그 답은 물리적 세계에 대해 놀라운 결과를 낳는다. 결정이 2-, 3-, 4-, 6-회 대칭은 가질 수 있지만 5-회 대칭은 결코 가질 수 없는 이유를 설명해 주는 것이다. 이는 두 세기 동안 성립해 온 결정학의 "법칙"이었는데, 1982년의 한 발견이 이를 뒤집고 노벨상을 받았다.

시작하기 전에

생각해 보기 모든 2×2 행렬은 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$을 만족한다(케일리–해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem). 직접 곱해서 확인해 보라). 이것이 $\mathbf{M}^2$에 관한 질문에 어떻게 도움이 될 수 있을까?

이 식은 $\mathbf{M}^2$을 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{I}$로 나타내 준다. 즉 $t = \operatorname{tr}\mathbf{M}$, $d = \det\mathbf{M}$이라 하면 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$이다. 따라서 $\mathbf{M}^2$에 대한 조건은 $\mathbf{M}$, t, d를 잇는 조건이 된다. 이것이 문제 전체의 열쇠이다.

차근차근 풀기

1단계 제곱의 대각합

$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$이므로 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = a^2 + 2bc + d^2 = (a+d)^2 - 2(ad-bc)$이다. ■

2단계 $\pm\mathbf{I}$의 제곱근

> **생각해 보기** $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$라고 하자. 이를 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$에 대입하라. $t \neq 0$이면 이것은 $\mathbf{M}$에 대해 무엇을 말해 주는가?

$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$이면 $\mathbf{I} = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$이므로 $t\mathbf{M} = (1+d)\mathbf{I}$이다. $t \neq 0$이면 $\mathbf{M}$은 $\mathbf{I}$의 상수배, 예컨대 $c\mathbf{I}$이고 $c^2 = 1$이므로 $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}$인데, 이는 제외된 경우이다. 따라서 $t = 0$이고, 그러면 $(1+d)\mathbf{I} = \mathbf{0}$이므로 $d = -1$이다.

역으로 $t = 0$이고 $d = -1$이면 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I} = \mathbf{I}$이고, $\operatorname{tr}(\pm\mathbf{I}) = \pm 2 \neq 0$이므로 $\mathbf{M} \neq \pm\mathbf{I}$이다. ■

$\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$인 경우: 대입하면 $t\mathbf{M} = (d-1)\mathbf{I}$를 얻는다. $t \neq 0$이면 $\mathbf{M} = c\mathbf{I}$이고 $c^2 = -1$인데, 이는 실수 c에 대해 불가능하다. 따라서 $t = 0$이고 $d = 1$이다. 역으로 $t = 0$이고 $d = 1$이면 $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$이다. ■

3단계 네제곱근

> **잠깐, 직접 해 보기** $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$이라 하면, $\mathbf{M}^4 = \mathbf{I}$는 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}$를 뜻한다. (ii)에 의해 $\mathbf{N} = \pm\mathbf{I}$이거나, $\operatorname{tr}\mathbf{N} = 0$이고 $\det\mathbf{N} = -1$이다. 두 번째 경우는 왜 불가능한가?

$\det\mathbf{N} = \det(\mathbf{M}^2) = (\det\mathbf{M})^2 \geq 0$이므로 $\det\mathbf{N} \neq -1$이다. 따라서 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I}$이다. 역은 분명하다. ■

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$인 경우: $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$에 (ii)를 적용하면, 이 식은 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = 0$이고 $\det(\mathbf{M}^2) = 1$일 때, 곧 $t^2 - 2d = 0$이고 $d^2 = 1$일 때에만 성립한다. $t^2 = 2d \geq 0$이므로 $d = 1$이어야 하고, 그러면 $t^2 = 2$이다. 따라서

$$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det\mathbf{M} = 1 \text{ 이고 } \operatorname{tr}\mathbf{M} = \pm\sqrt{2}. \qquad ■$$

4단계 회전이 아닌 $\mathbf{I}$의 여덟제곱근

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$인 행렬은 모두 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$를 만족한다. 45° 회전은 대각합이 $\sqrt{2}$이고 행렬식이 1이

다. 우리는 대각합과 행렬식이 같으면서 회전이 아닌 다른 행렬을 원한다. 다음을 잡자.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathbf{M} = \sqrt{2}, \quad \det\mathbf{M} = 1.$$

3단계에 의해 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$이므로 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$이다. 그러나 $\mathbf{M}$은 회전도 반사도 아니다. 회전과 반사는 길이를 보존하는데, $\mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$의 길이는 $\sqrt{3} \neq 1$이기 때문이다. ■

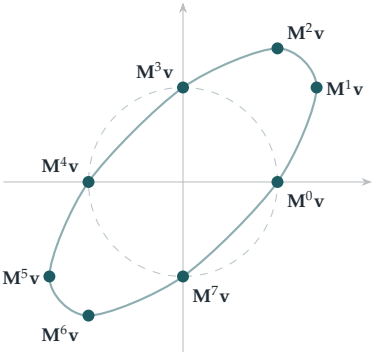


그림 7.4.1 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 의한 $\mathbf{v} = (1,0)$의 궤도(orbit). 여덟 단계 뒤에 출발점으로 돌아온다. 점들이 원(점선) 위에 있지 않으므로 $\mathbf{M}$은 회전이 아니지만, 점들은 타원 위에 놓인다. 즉 $\mathbf{M}$은 비스듬한 좌표에서 본 45° 회전이다.

돌아보기

- **케일리–해밀턴 정리는 거듭제곱을 일차결합으로 바꾼다.** 2×2 행렬의 모든 거듭제곱은 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{I}$의 일차결합(linear combination)이며, 그 계수는 대각합과 행렬식에만 의존한다.
- **제곱의 행렬식은 음이 아니다.** 이 단순한 사실 하나로 (iii)에서 한 경우 전체를 배제할 수 있었다.
- **대각합과 행렬식은 불변량이다.** 대각합과 행렬식이 같은 두 행렬은($\mathbf{I}$의 상수배가 아니라면) 겉모습이 닮았든 아니든 거듭제곱에 대해 같은 방식으로 행동한다.

숨은 수학

닮은 행렬

4단계의 $\mathbf{M}$은 왜 "변장한 회전"일까? 어떤 가역행렬 $\mathbf{S}$에 대하여 $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$이면 두 행렬 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{R}$은 **닮았다**(*similar*)고 한다. 이들은 서로 다른 좌표에서 같은 변환을 나타낸다. 닮은 행렬은 대각합과 행렬식이 같으며, ($\mathbf{I}$의 상수배가 아닌 2×2 행렬에 대해서는) 그 역도 성립한다. 따라서 대각합이 $\sqrt{2}$이고 행렬식이 1인 실행렬은 모두 45° 회전과 닮았고, $\mathbf{S}$가 주는 비스듬한 좌표에서는 그저 회전할 뿐이다(그림 7.4.1). 일반적으로 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$인 실수 2×2 행렬은 언제나 회전이나 반사와 닮았다.

결정에 5회 대칭이 없는 이유

결정은 원자가 규칙적으로 반복되어 배열된 것이다. 결정의 회전 대칭은 원자의 격자(lattice)를 자기 자신으로 보내므로, 격자를 기준으로 한 좌표에서는 **정수** 성분을 가지는 행렬로 주어진다. 따라서 그 대각합은 정수이다. 그런데 각 θ만큼의 회전은 어떤 좌표에서든 대각합이 $2\cos\theta$이고, $2\cos\theta$가 정수인 것은 그 값이 $-2, -1, 0, 1$ 또는 2일 때뿐이다. 곧 위수(order)가 2, 3, 4, 6인(그리고 1인) 회전뿐이다. 5회 대칭이 되려면 $2\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$이어야 하는데, 이는 정수가 아니다. 이것이 **결정학적 제한 정리**(*crystallographic restriction theorem*)이다. 1982년 단 셰흐트만(Dan Shechtman)은 겉보기에 5회 대칭을 가진 합금을 관찰했고 처음에는 조롱을 받았다. 그것은 펜로즈(Penrose) 타일링처럼 질서는 있지만 주기적이지 않은 **준결정**(*quasicrystal*)으로 밝혀졌고, 따라서 이 정리의 적용 대상이 아니었다. 그는 2011년에 노벨 화학상을 받았다.

사고 기술

본질적인 행동을 담아내는 불변량을 찾아라

매개변수가 많은 대상에 관한 문제라면, 관점을 바꾸어도 변하지 않는 몇 가지 조합만으로 충분한지 물어보라.

여기서는 네 성분이 두 불변량(invariant), 곧 대각합과 행렬식으로 줄어들었다. 질문("$\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$인가?")이 좌표에 의존하지 않기 때문이다. 알맞은 불변량을 찾는 것이 분류 문제의 열쇠인 경우가 많다.

더 도전하기

1 **위수가 3인 회전.** STEP II 2021, 7번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`)에 도전해 보라. 이 문제는 특이한 성질을 가진 회전행렬에서 출발하여, 세제곱이 단위행렬인 모든 실수 2×2 행렬에 관한 사실로 끝난다.

2 **위수가 6인 경우.** $\mathbf{M}^6 = \mathbf{I}$이지만 $\mathbf{M}^2 \neq \mathbf{I}$이고 $\mathbf{M}^3 \neq \mathbf{I}$이기 위한 대각합과 행렬식의 조건을 구하라.

3 **결정학적 제한.** $\mathbf{M}$의 성분이 정수이고 $\det \mathbf{M} = 1$이며 어떤 n에 대하여 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$이면 $\operatorname{tr} \mathbf{M} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$임을 보여라. 위수가 6인 정수 행렬을 하나 구하라.

4 **거듭제곱에 대한 케일리–해밀턴 정리.** $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$를 이용하여 $\mathbf{M}^3$과 $\mathbf{M}^4$를 $p\mathbf{M} + q\mathbf{I}$ 꼴로 나타내고, 이를 이용하여 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$가 되는 조건을 다시 유도하라.

더 읽을거리

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*** (Springer). 『군과 대칭』. 결정학적 제한과 벽지 무늬의 분류를 다룬다.
- **Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry*** (Cambridge University Press). 『준결정과 기하학』. 준결정과 비주기적 질서의 수학을 다룬다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 『선형대수학 입문』. 닮은 행렬과 케일리–해밀턴 정리를 다룬다.

7.5 3차원에서의 회전

문제

STEP III 2022, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

도입

2차원에서 점을 회전시키는 것은 쉽다. $e^{i\theta}$를 곱하면 된다. 3차원에서는 훨씬 어렵다. 곱할 복소수 하나가 따로 있는 것도 아니고, 서로 다른 축에 대한 회전은 교환법칙이 성립하지 않으며(do not commute), "$(1,2,2)$를 지나는 축을 중심으로 37° 회전"의 행렬을 적는 일은 막막해 보인다.

이 문제는 임의의 축과 임의의 각에 대해 그 행렬을 외적(cross product)으로부터 만들어 낸다. 그 결과가 1840년에 Olinde Rodrigues가 발표한 **로드리게스 회전 공식**(*Rodrigues' rotation formula*)이다. 이 공식은 로봇 공학, 컴퓨터 그래픽스, 우주선 항법에서 매일 쓰이며, 아름다운 사실 하나를 드러낸다. $\mathbf{n}$과 외적하는 것은 "$\mathbf{n}$을 축으로 하는 90° 회전"이고, $\mathbf{n}$을 축으로 하는 모든 회전은 이것으로 만들어진다. 이는 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$가 i를 곱하는 것으로부터 만들어지는 것과 꼭 같다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\mathbf{r}$이 $\mathbf{n}$에 수직일 때 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$는 기하적으로 어떤 모습인가? 또 $\mathbf{r}$이 $\mathbf{n}$에 평행할 때는 어떤가?

$\mathbf{r} \parallel \mathbf{n}$이면 $\mathbf{n}\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$이다. $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$이면 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$는 $\mathbf{r}$과 길이가 같고($|\mathbf{n}| = 1$이고 사잇각이 90°이므로), 두 벡터 모두에 수직이며, 오른손 법칙(right-hand rule)에 따라 $\mathbf{r}$을 $\mathbf{n}$을 축으로 시계 반대 방향으로 90° 회전한 것이다($\mathbf{n}$의 끝에서 내려다볼 때). 따라서 f는 $\mathbf{r}$의 $\mathbf{n}$ 방향 성분(component)을 없애고, 수직 성분을 90° 회전시킨다. 이 그림이 문제 전체를 설명해 준다.

차근차근 풀기

1단계 두 번 외적하기

$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = (bz - cy,\ cx - az,\ ay - bx)$이다. 이것을 다시 $\mathbf{n} = (a, b, c)$와 외적하면 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$의 x성분은

$$b(ay - bx) - c(cx - az) = -x(b^2 + c^2) + aby + acz. \qquad \blacksquare$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$이므로 이는 $-x(1 - a^2) + aby + acz = a(ax + by + cz) - x$이고, 이것은 $(\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$의 x성분이다. 나머지 성분도 대칭성에 의해 마찬가지이므로 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$이다. $\blacksquare$

> **생각해 보기** $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$로 쓰자. 여기서 $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n}$은 $\mathbf{n}$ 방향의 성분이다. $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$를 이들로 나타내면 무엇인가?

$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r} = -\mathbf{r}_{\perp}$이다. f를 두 번 적용하면 평행 성분은 사라지고 수직 성분은 $\mathbf{n}$을 축으로 $180°$ 회전하는데, 이는 그 방향을 그저 뒤집는 것이다(그림 7.5.1). 이것이 $\mathrm{i}^2 = -1$에 해당하는 사실이다.

2단계 회전

> **생각해 보기** $\mathrm{g}(\mathbf{n})$을 계산하라. 그다음 $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$인 경우, 이러한 $\mathbf{r}$에 대해 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$임을 이용하여 $\mathrm{g}(\mathbf{r})$를 계산하라.

$\mathrm{f}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$이므로 $\mathrm{g}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$이다. 즉 축은 고정된다. $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$이면 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$이고

$$\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) - (1 - \cos\theta)\mathbf{r} = \cos\theta\,\mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$는 $\mathbf{r}$을 $\mathbf{n}$을 축으로 $90°$ 돌린 것이고 길이도 같으므로, 이것은 $\mathbf{r}$을 $\mathbf{n}$을 축으로 θ만큼 회전한 것이다. 평면에서의 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)z$와 똑같다. g는 선형(linear)이고 모든 벡터는 $\mathbf{n}$의 상수배와 $\mathbf{n}$에 수직인 벡터의 합으로 나타낼 수 있으므로, g는 **원점을 지나고 방향이 $\mathbf{n}$인 축을 중심으로 각 θ만큼 회전하는 변환**이다($\mathbf{n}$의 끝에서 볼 때 시계 반대 방향). $\blacksquare$

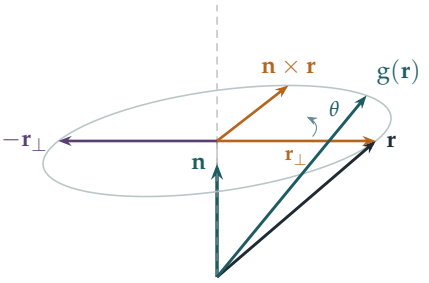


그림 7.5.1 로드리게스 공식. 벡터 $\mathbf{r}$은 축 $\mathbf{n}$ 방향의 성분과, 이에 수직이면서 원을 그리는 성분 $\mathbf{r}_\perp$로 나뉜다. $\mathbf{n}$과 외적하면 $\mathbf{r}_\perp$가 90° 회전하고(호박색), 두 번 외적하면 $-\mathbf{r}_\perp$가 된다(자주색). 회전된 벡터 $g(\mathbf{r})$는 $\mathbf{r}_\parallel + \cos\theta\,\mathbf{r}_\perp + \sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$이다.

3단계 반사

잠깐, 직접 해 보기 소문항 (i)의 결과를 이용하여 $h(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2f(f(\mathbf{s}))$를 간단히 하라. 이 변환은 $\mathbf{n}$ 방향의 벡터와 $\mathbf{n}$에 수직인 벡터를 각각 어떻게 바꾸는가?

$h(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2\big((\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n} - \mathbf{s}\big) = \mathbf{s} - 2(\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n}$이다. $\mathbf{n}$에 수직인 벡터는 변하지 않고, $h(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$이다. 따라서 h는 **원점을 지나고 $\mathbf{n}$에 수직인 평면에 대한 반사(reflection)**이다. ■

돌아보기

- **평행 성분과 수직 성분으로 분해하라.** $\mathbf{r}$을 $\mathbf{n}$ 방향의 성분과 이에 수직인 성분으로 나누자 모든 단계가 명확해졌다.
- **선형성이 일을 줄여 준다.** 선형사상(linear map)이 무엇인지 알아내려면, 잘 고른 몇 개의 벡터에 그것이 어떻게 작용하는지만 알면 충분하다.
- **복소수와의 유사성.** $\mathbf{n}$에 수직인 벡터에 대해 f는 i를 곱하는 것처럼 작용한다. 즉 $f^2 = -1$이고 $g = \cos\theta + \sin\theta\, f$이다.

숨은 수학

오일러의 회전 정리

원점을 고정하는 3차원 공간의 모든 회전은 원점을 지나는 어떤 축을 중심으로 한 회전이다. 오일러(Euler)는 1775년에 이를 증명하였다. 행렬의 언어로 말하면, 모든 3×3 회전 행렬은 고윳값(eigenvalue)이 1인 고유벡터(eigenvector)를 가지며, 그것이 바로 축이다.

로드리게스 공식은 그 역(converse)을 준다. 모든 축 $\mathbf{n}$과 각 θ에 대해 회전행렬은

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{K} + (1-\cos\theta)\,\mathbf{K}^2, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

이다. 여기서 $\mathbf{K}$는 $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$의 행렬이다. $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$이므로 지수 급수(exponential series) $e^{\theta\mathbf{K}} = \mathbf{I} + \theta\mathbf{K} + \frac{\theta^2}{2!}\mathbf{K}^2 + \cdots$는 정확히 이 공식으로 정리되며, 이것은 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$의 3차원 버전이다. 회전과 "무한소 회전" $\mathbf{K}$의 지수 사이의 이러한 연결은 **리 군**(*Lie groups*) 이론의 출발점이다.

회전은 교환법칙을 만족하지 않는다

책을 평평하게 들고, 수직축을 중심으로 90° 돌린 다음 수평축을 중심으로 90° 돌려 보자. 그다음 처음부터 다시 시작하여 두 회전을 반대 순서로 해 보자. 책은 서로 다른 위치에 놓이게 된다. 2차원과 달리 3차원에서는 회전의 합성에 대해 교환법칙이 성립하지 않는다. 이것이 Section 6.7의 사원수(quaternion)가 유용한 이유 중 하나이다. $\mathbf{n}$을 축으로 하는 θ만큼의 회전은 사원수 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k})$에 대응하고, 회전의 합성은 사원수의 곱셈이 되며, 비가환성도 그 안에 자연스럽게 담겨 있다. 로드리게스 자신도 1840년 논문에서, 해밀턴(Hamilton)이 사원수를 발명하기 3년 전에 이미 회전의 합성 공식을 찾아냈다.

사고 기술

불변(invariant)인 부분으로 나누기

변환을 이해하려면, 공간을 그 변환이 단순하게 다루는 조각들로 나누라. 여기서는 축(그대로 둔다)과 그에 수직인 평면(회전시킨다)이다.

이는 Section 7.2의 고유벡터와 같은 아이디어이다. 변환이 보존하는 부분공간(subspace)을 찾고, 각 조각 위에서 변환을 살펴보는 것이다.

더 도전하기

1 **평면에서의 회전.** STEP III 2017, 2번 문제 (`step.maths.org/questions/17-s3-q2`)를 풀어 보라. 이 문제는 복소수를 이용하여, 평면의 두 회전을 합성하면 한 가지 예외를 제외하고 회전이 됨을 보인다. 그 예외를 찾고, 그때 합성이 무엇이 되는지 구하라.

2 **특정한 회전.** $(1,1,1)$ 방향의 축을 중심으로 $120°$만큼 회전하는 변환의 행렬을 구하라. 이 변환이 좌표축들을 순환적으로 치환함을 보여라.

3 **$\mathbf{K}$의 거듭제곱.** $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$이고 $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$임을 보이고, 지수 급수로부터 로드리게스 공식을 유도하라.

4 **두 반사가 회전을 만든다.** 서로 각 α를 이루며 원점을 지나는 두 평면에 대해 차례로 반사하는 것은, 두 평면의 교선을 축으로 하는 2α만큼의 회전임을 보여라.

더 읽을거리

- **Simon Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*** (Dover). 3차원 회전에 관한 결정판 저서로, 로드리게스의 기여도 다룬다.
- **Simon Altmann, "Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal"**, *Mathematics Magazine* 62 (1989). 짧고 생생한 역사 이야기이다.
- **John Stillwell, *Naive Lie Theory*** (Springer). 학부생을 위한 회전, 사원수, 리 군 입문서이다.

7.6 쌍곡 회전과 상대성 이론

문제

STEP III 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/91-s3-q6`

도입

회전행렬(rotation matrix) $\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}$은 점을 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위에서 돌려 옮기고, u만큼 회전한 뒤 w만큼 회전하는 것은 $u + w$만큼 회전하는 것과 같다. 여기서 cos와 sin을 cosh와 sinh로 바꾸고 부호 하나를 조정하면 이 문제의 행렬을 얻는다. 이 행렬은 점을 원 대신 쌍곡선(hyperbola) $x^2 - y^2 = 1$을 따라 옮기며, 역시 "각"을 더한다. 이것이 **쌍곡회전**(*hyperbolic rotation*)이다.

이것은 단순한 호기심거리가 아니다. x를 시간, y를 거리로 보면(빛의 속력이 1이 되는 단위에서), 이 행렬은 **로렌츠 부스트**(*Lorentz boost*)가 된다. 즉 아인슈타인(Einstein)의 특수상대성이론(special relativity)에서 발견된, 서로에 대해 일정한 속도로 움직이는 두 관찰자의 측정값 사이의 변환이다. "쌍곡각(hyperbolic angle)" u는 **신속도**(*rapidity*)이며, 신속도가 더해진다는 사실이 Section 3.8에서 만난 기묘한 속도 덧셈 법칙을 설명해 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$에 대응하여 $\cosh u$와 $\sinh u$가 만족하는 항등식(identity)은 무엇인가? 또 $\cosh(u+v)$와 $\sinh(u+v)$의 덧셈정리(addition formula)는 무엇인가?

$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$이고,

$$\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v,$$
$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v.$$

이 식들은 정의 $\cosh u = \tfrac{1}{2}(e^u + e^{-u})$와 $\sinh u = \tfrac{1}{2}(e^u - e^{-u})$로부터 확인할 수 있다. $(\cos v, \sin v)$가 원 위에 있는 것과 마찬가지로, 점 $(\cosh v, \sinh v)$는 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위에 있다.

차근차근 풀기

1단계 쌍곡선은 불변이다

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (x\cosh u + y \sinh u)^2 - (x \sinh u + y \cosh u)^2 \\ &= (x^2 - y^2)(\cosh^2 u - \sinh^2 u) = x^2 - y^2, \end{aligned}$$

교차항 $2xy \cosh u \sinh u$가 서로 소거되기 때문이다. 따라서 T는 $x^2 - y^2$을 보존하며, 특히 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$을 자기 자신으로 보낸다. ■

> **생각해 보기** 원점을 지나는 직선 가운데 자기 자신으로 옮겨지는 것은 어느 것인가? (고유벡터(eigenvector)를 찾아보라.)

$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (\cosh u + \sinh u)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = e^u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$이고 $T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = e^{-u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$이다. 따라서 직선 $y = x$와 $y = -x$는 각각 자기 자신으로 옮겨진다. 하나는 e^u배로 늘어나고, 다른 하나는 e^{-u}배로 줄어든다. 이 두 직선은 쌍곡선의 점근선(asymptote)이다. ■

2단계 쌍곡각의 덧셈

기울기(gradient)가 $\tanh v$인 직선은 방향벡터(direction vector) $(\cosh v, \sinh v)$를 갖는다. 그 상의 방향은

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\ \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v\\ \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\ \sinh(u+v)\end{pmatrix},$$

이고, 이 벡터의 기울기는 $\tanh(u+v)$이다. 선형사상(linear map)은 평행한 직선을 평행한 직선으로 보내므로, 이 결과는 직선이 원점을 지나든 지나지 않든 성립한다. 따라서 $v' = v + u$이다. ■

3단계 각은 언제 보존되는가?

생각해 보기 기울기가 m_1, m_2인 두 직선 사이의 각 ψ는 $\tan\psi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$를 만족한다. $m_i = \tanh v_i$일 때 이 식을 간단히 하라. (**힌트**: 모든 것을 $\cosh v_1 \cosh v_2$를 분모로 하여 나타내라.)

$\tanh v_1 - \tanh v_2 = \dfrac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$와 $1 + \tanh v_1 \tanh v_2 = \dfrac{\cosh(v_1 + v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$를 이용하면

$$\tan\psi = \left|\frac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh(v_1 + v_2)}\right|.$$

변환 후 $v_1 - v_2$는 변하지 않고, $v_1 + v_2$는 $v_1 + v_2 + 2u$가 된다.

잠깐, 직접 해 보기 $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$는 언제 성립하는가?

두 직선이 평행하지 않다고($v_1 \neq v_2$) 가정하면, 두 각이 같을 필요충분조건은 $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$이다. cosh는 우함수(even function)이고 $[0, \infty)$에서 순증가하므로, 이는 $v_1 + v_2 = \pm(v_1 + v_2 + 2u)$를 뜻한다. 양의 부호이면 $u = 0$이 되는데 이는 제외되므로,

$$v_1 + v_2 = -u. \qquad \blacksquare$$

4단계 그림으로 보기

$v_1 + v_2 = -u$일 때, 변환된 각은 $v_1' = v_1 + u = -v_2$와 $v_2' = v_2 + u = -v_1$이다. 따라서 ℓ_1의 상은 기울기가 $-\tanh v_2$이다. 즉 ℓ_1의 상은 ℓ_2를 x축에 대하여 대칭이동한 것이고, ℓ_2의 상은 ℓ_1을 대칭이동한 것이다. 원점을 지나는 직선의 경우, 이 변환은 두 직선을 맞바꾸고 대칭이동하므로, 두 직선 사이의 각이 변하지 않는 이유가 설명된다(그림 7.6.1).

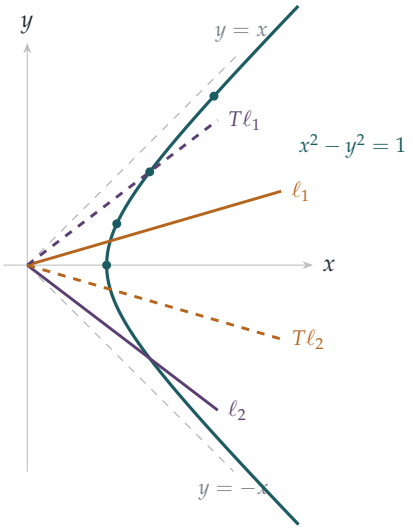


그림 7.6.1 $u = 0.7$인 쌍곡회전을 원점을 지나는 직선 ℓ_1, ℓ_2($v_1 = 0.3$, $v_2 = -1.0$)에 적용한 모습으로, $v_1 + v_2 = -u$가 성립한다. ℓ_1의 상(자주색 점선)은 ℓ_2의 거울상이고, ℓ_2의 상(호박색 점선)은 ℓ_1의 거울상이므로, 두 직선 사이의 각이 보존된다. 쌍곡선 위의 청록색 점들은 쌍곡각으로 같은 간격($v = 0, 0.5, 1, 1.5$)에 놓여 있으며, T는 각 점을 쌍곡선을 따라 0.7만큼 더 나아간 점으로 옮긴다.

돌아보기

- **불변 이차형식.** 회전이 $x^2 + y^2$을 보존하듯이, T는 $x^2 - y^2$을 보존한다. 이를 불변 이차형식(invariant quadratic form)이라 한다.
- **고유벡터는 점근선이다.** 변하지 않는 직선은 $y = \pm x$이며, 각각 $e^{\pm u}$배로 늘어나고 줄어든다.
- **쌍곡각은 더해진다.** 방향을 $\tanh v$로 매개화하자 T의 작용이 단순한 덧셈 $v \mapsto v + u$가 되었다.

숨은 수학

특수상대성이론

아인슈타인의 특수상대성이론(1905)에서, 서로에 대해 일정한 속도로 움직이는 관찰자들은 시간과 거리에 대해서는 서로 다른 값을 얻지만, 양 $t^2 - x^2$(빛의 속력 $c = 1$)에 대

해서는 모두 같은 값을 얻는다. 이 양을 **시공간 간격**(*spacetime interval*)이라 한다. 이것을 보존하는 변환이 **로렌츠 변환**(*Lorentz transformation*)이며, 공간이 1차원일 때 이 변환은 x를 시간, y를 거리로 볼 때 정확히 이 문제의 행렬들이다. 속도 $v = \tanh u$로 움직이는 관찰자는 우리 좌표와 이 행렬로 연결되는 좌표를 사용하며, 이때 $\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$은 시간 지연(time dilation)의 유명한 인자 γ이다. 1908년 민코프스키(Hermann Minkowski)는 이로써 시공간이 부호에 음수가 섞인 "거리"를 갖는 4차원 기하가 된다는 것을 간파했다. "이제부터 공간 그 자체와 시간 그 자체는 단순한 그림자로 사라질 운명이다."

문제의 물리적 의미

- **불변 직선** $y = \pm x$는 광선의 경로이다. 이 직선들은 모든 관찰자에게 같다. 빛의 속력이 누구에게나 같다는 것, 이것이 상대성이론의 기본 원리이다.
- **쌍곡선** $x^2 - y^2 = 1$은 가능한 모든 일정한 속도로 움직이는 관찰자들이 측정했을 때 원점으로부터 "고유시간(proper time)" 한 단위만큼 떨어진 사건들의 집합이다.
- **신속도의 덧셈.** 원점을 지나고 기울기가 $\tanh v$인 직선은 속도 $\tanh v$로 움직이는 물체의 경로이다. 신속도 u만큼 부스트하면 그 속도는 $\tanh(v+u) = \frac{\tanh v + \tanh u}{1 + \tanh v \tanh u}$로 바뀌는데, 이것이 바로 Section 3.8에서 본 아인슈타인의 속도 덧셈 공식이다. 속도는 더해지지 않지만, 신속도는 더해진다.

그리고 Section 5.8에서 우리는 같은 덧셈 공식을 푸앵카레 원판(Poincaré disc)의 거리 규칙으로 만났다. 상대성이론에서 가능한 속도들의 집합은 신속도로 측정하면 쌍곡공간(hyperbolic space)이 된다.

사고 기술

알맞은 매개화를 찾아라

변환이 단순해지는 매개변수로 대상을 나타내라.

방향을 기울기로 나타내면 T는 복잡한 식으로 작용하지만, 기울기가 $\tanh v$가 되도록 v로 나타내면 단순히 u를 더할 뿐이다. 같은 아이디어로 각을 쓰면 회전이 단순해졌고, Section 2.8에서는 사상 $x \mapsto x^2 - 2$가 단순해졌다. 이런 방법을 매개화(parametrisation)라 한다.

더 도전하기

1 **부스트의 합성.** $T(u)$가 문제의 행렬일 때 $T(u)T(w) = T(u+w)$임을 보여라. $T(u)^{-1}$은 무엇인가?

2 **시간 지연.** 우주선이 빛의 속력의 0.8배로 날아간다. 신속도 u와 $\cosh u$를 구하라. 지구에서 10년이 흐르면 우주선에서는 시간이 얼마나 흐르는가? ($t_{\text{우주선}} = t_{\text{지구}} / \cosh u$를 이용하라.)

3 **쌍곡 넓이.** 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$, x축, 그리고 원점에서 $(\cosh v, \sinh v)$까지의 선분으로 둘러싸인 넓이가 $\frac{v}{2}$임을 보여라. 이는 원에서 대응하는 넓이가 $\frac{\theta}{2}$인 것과 같다. T가 이러한 넓이를 보존해야 하는 이유는 무엇인가?

4 **압착.** 좌표를 $p = x + y$, $q = x - y$로 바꾸어라. T가 $p \mapsto e^{u}p$, $q \mapsto e^{-u}q$가 되고, 쌍곡선이 $pq = 1$이 됨을 보여라. 이 좌표에서 변환을 기하적으로 설명하라.

더 읽을거리

- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman). 신속도와 시공간 도표로 설명하는 특수상대성이론으로, A 레벨(A level, 영국의 대학 입학 자격 시험) 수학을 갖춘 학생을 대상으로 한다.
- **Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity*** (CRC Press). 상대성이론을 쌍곡 삼각법으로 다루며, 이 절의 정신과 꼭 맞는다.
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory*** (여러 판). 아인슈타인 자신이 쓴 대중 해설서로, 지금도 매우 읽기 쉽다.

7.7 결코 변하지 않는 양

문제

STEP III 2024, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

도입

물리학에서 가장 깊은 사실들 가운데 일부는 **보존 법칙**(*conservation laws*)이다. 운동이 아무리 복잡해도 에너지, 운동량, 각운동량은 변하지 않는다. 계에 보존량이 충분히 많으면 그 운동을 정확히 풀 수 있고, 너무 적으면 운동이 혼돈적일 수 있다.

이 문제는 보존량을 만들어 내는 놀라운 방법을 보여 준다. 행렬이 시간에 따라 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$에 따라 변하면, 성분들이 아무리 크게 요동쳐도 대각합(trace)과 행렬식(determinant), 따라서 고유값(eigenvalues)은 결코 변하지 않는다. 이러한 쌍 $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$을 **랙스 쌍**(*Lax pair*)이라 한다. 이 이름은 피터 랙스(Peter Lax)에게서 왔는데, 그는 서로를 통과한 뒤에도 모양이 변하지 않는 고립파인 **솔리톤**(*solitons*)의 놀라운 성질을 설명하기 위해 1968년에 이 아이디어를 도입하였다.

시작하기 전에

생각해 보기 식 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$을 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{N}$의 **교환자**(*commutator*)라 한다. 이것은 언제 0이 되는가? 소문항 (i)을 이용하면 그 대각합은 얼마인가?

교환자는 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{N}$이 교환 가능할 때, 그리고 그때에만 0이다. 또 소문항 (i)에 의해 그 대각합은 언제나 $\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) - \mathrm{tr}(\mathbf{NM}) = 0$이다. 이 하나의 사실이 이 문제에 나오는 모든 보존 법칙의 출발점이다.

차근차근 풀기

1단계 대각합

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 $\mathbf{MN}$의 대각 성분은 $ap + br$와 $cq + ds$이므로 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds$이다. $\mathbf{M}$과 $\mathbf{N}$의 역할을 바꾸면 $pa + qc + rb + sd$가 되어 같은 값이다. $\operatorname{tr}(\mathbf{M}+\mathbf{N}) = \operatorname{tr}\mathbf{M} + \operatorname{tr}\mathbf{N}$임은 분명하다. ■

2단계 행렬식의 도함수

생각해 보기 곱의 미분법(product rule)으로 $\det\mathbf{M} = ad - bc$를 미분하여라. 그 다음 $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$를 이용하여 $\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$와 그 대각합을 계산하여라.

도함수를 점으로 나타내면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \dot{a}d + a\dot{d} - \dot{b}c - b\dot{c}$이다. 또

$$\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix}$$

의 대각 성분은 $\frac{d\dot{a}-b\dot{c}}{\det\mathbf{M}}$와 $\frac{-c\dot{b}+a\dot{d}}{\det\mathbf{M}}$이다. 이 둘의 합은 $\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M}$이다. ■

3단계 세 가지 보존량

생각해 보기 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$의 대각합을 구하여라. 행렬식에 대해서는 소문항 (ii)를 이용하여라. $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})$은 무엇인가?

대각합: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}\mathbf{M} = \operatorname{tr}\dot{\mathbf{M}} = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$.

행렬식: 소문항 (ii)에 의해

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}\mathbf{N} = 0,$$

이다. 여기서 소문항 (i)을 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{NM})) = \operatorname{tr}((\mathbf{NM})\mathbf{M}^{-1}) = \operatorname{tr}\mathbf{N}$의 꼴로 이용하였다.

제곱의 대각합: $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = (\operatorname{tr}\mathbf{M})^2 - 2\det\mathbf{M}$이고(Section 7.4 참고), 두 항이 모두 상수이므로 이 값도 상수이다. ■

4단계 명시적인 해

잠깐, 직접 해 보기 $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$일 때 $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{E}$로 놓고 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$을 계산한 다음, a, b, c, d에 대한 미분방정식(differential equations)을 써라. 이를 c, 그다음 a와 d, 그다음 b의 순서로 풀어라.

$t\mathbf{I}$ 부분은 모든 행렬과 교환 가능하므로 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t(\mathbf{ME} - \mathbf{EM})$이다. 이제 $\mathbf{ME} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\mathbf{EM} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$$\dot{a} = -tc, \qquad \dot{b} = t(a - d), \qquad \dot{c} = 0, \qquad \dot{d} = tc.$$

따라서 $c = C$는 상수이다. 그러면 $a = A - \frac{1}{2}Ct^2$, $d = D + \frac{1}{2}Ct^2$이고, 이어서 $\dot{b} = t(A - D - Ct^2)$이므로 $b = B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4$이다. 그러므로

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{2}Ct^2 & B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4 \\ C & D + \frac{1}{2}Ct^2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

확인: 대각합은 $A + D$이고, 행렬식은 $(A - \frac{1}{2}Ct^2)(D + \frac{1}{2}Ct^2) - C\big(B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4\big) = AD - BC$로, 예상대로 상수이다(그림 7.7.1).

5단계 다른 방정식

생각해 보기 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$이면 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$이고, 소문항 (ii)에 의해 $\operatorname{tr}\mathbf{N}$은 $\det\mathbf{M}$의 로그 도함수(logarithmic derivative)이다. $\mathbf{M}$의 행렬식은 변하면서 대각합은 일정하게 유지될 수 있는가?

물론 가능하다. $|t| < 1$에 대하여 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$로 놓자(이때 $\det\mathbf{M} = 1 - t^2 \neq 0$). 그 대각합은 항상 2이다. $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$으로 정의하면 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$이고

$$\mathbf{N} = \frac{1}{1 - t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - t^2}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix},$$

이다. 이 행렬은 정칙(non-singular)이고, $t \neq 0$일 때 $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \frac{-2t}{1-t^2} \neq 0$이다. 따라서 답은 **아니다**. $\operatorname{tr}\mathbf{N}$이 반드시 0일 필요는 없다. $\blacksquare$

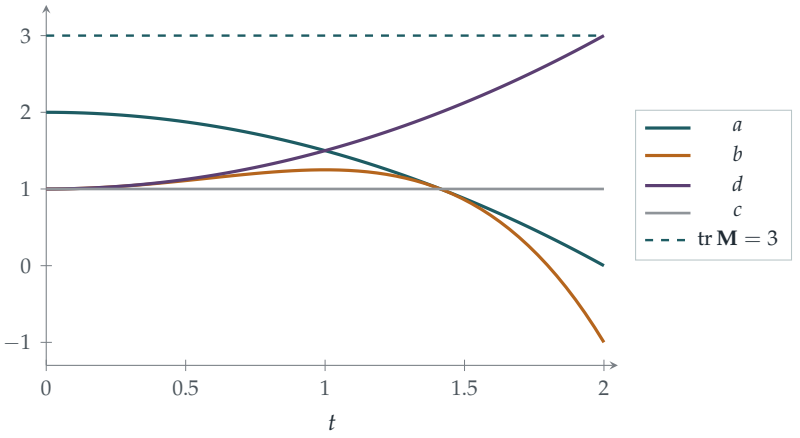


그림 7.7.1 단계 4에서 $A = 2, B = 1, C = 1, D = 1$로 둔 $\mathbf{M}(t)$의 성분들. 네 성분 가운데 c를 제외한 모든 성분이 변하지만, 대각합은 줄곧 3, 행렬식은 줄곧 1로 유지된다. 따라서 고유값 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$는 결코 변하지 않는다. 즉 이 흐름은 **등스펙트럼**(*isospectral*) 흐름이다.

돌아보기

- **교환자의 대각합은 0이다.** $\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{tr}(\mathbf{NM})$으로부터 모든 보존 법칙이 따라 나왔다.
- **로그 도함수.** 소문항 (ii)는 행렬식의 도함수를 대각합으로 바꾸어 주었는데, 대각합은 선형이어서 다루기 쉽다.
- **명시적인 해에서 보존을 확인한다.** $\mathbf{M}(t)$의 식은 그 대각합과 행렬식이 상수임을 확인하는 방법으로 검산하였다.

숨은 수학

솔리톤과 랙스 쌍

1834년 스코틀랜드의 공학자 John Scott Russell은 에든버러 근처의 유니언 운하(Union Canal)를 따라 나아가는 고립파 하나를 말을 타고 1마일 넘게 쫓아갔는데, 그 파동은 모양을 잃지 않았다. 이러한 파동은 **코르테베흐-드프리스**(*Korteweg–de Vries, KdV*) **방정식**으로 기술되며, 1960년대에 Norman Zabusky와 Martin Kruskal의 컴퓨터 실험은 이러한 "솔리톤" 두 개가 마치 입자처럼 충돌한 뒤에도 변하지 않은 채로 빠져나올 수 있음을 보여 주었다. 이를 설명하려면 무한히 많은 보존량이 필요했다. 피터 랙스는 1968년에 KdV 방정식을 한 쌍의 미분 연산자(differential operators) L과 P에 대하여 $\dot{L} = LP - PL$로 쓸 수

있음을 보였다. 그러면 이 문제에서와 똑같이 L의 고유값이 보존되고, 이 고유값들이 무한히 많은 보존 법칙을 준다. 랙스 쌍을 갖는 계를 **적분가능계**(*integrable*)라 하며, 이들은 정확히 풀 수 있는 몇 안 되는 비선형(nonlinear) 계에 속한다.

등스펙트럼 흐름

$\mathbf{M}$의 대각합과 행렬식이 그 특성다항식(characteristic polynomial) $\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\lambda + \det\mathbf{M}$을 결정하므로, $\mathbf{M}$의 고유값은 시간에 따라 변하지 않는다. 흐름 $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}]$은 $\mathbf{M}$을 고유값이 고정된 행렬들의 집합 안에서 움직인다. 실제로 해는 언제나 어떤 가역(invertible) 행렬 $\mathbf{S}(t)$에 대하여 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{M}(0)\mathbf{S}(t)$의 꼴이다. 즉 행렬은 처음 값과 계속 닮음(similar)이다. 같은 아이디어가 물리학 전반에 흐른다. 양자역학에서 관측가능량 $\mathbf{A}$는 $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$에 따라 변하는데, 여기서 $\mathbf{H}$는 에너지이므로 에너지와 교환 가능한 것은 무엇이든 보존된다.

야코비 공식

소문항 (ii)는 임의의 크기의 가역행렬에 대하여 성립하며, 이를 **야코비**(*Jacobi*) **공식**(*Jacobi's formula*)이라 한다. $\det\mathbf{M}$이 음수일 수도 있으므로 로그 없이 $\frac{d}{dt}\det\mathbf{M} = \det\mathbf{M}\,\operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$로 쓰는 것이 가장 안전하다. 로그 꼴 $\frac{d}{dt}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$은 $\det\mathbf{M} > 0$이어야 한다(일반적으로는 $\ln|\det\mathbf{M}|$을 쓴다). 그 결과 하나로, 상수 행렬 $\mathbf{A}$에 대하여 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$이면 $\det\mathbf{M}(t) = e^{t\operatorname{tr}\mathbf{A}}\det\mathbf{M}(0)$이다. 미분방정식 연구에서 이것은 위상 공간(phase space)의 부피가 어떻게 늘어나거나 줄어드는지 알려 준다. 고전역학의 방정식에서는 대각합이 0이어서 부피가 보존되는데, 이 결과를 **리우빌**(*Liouville*) **정리**(*Liouville's theorem*)라 한다.

사고 기술

> **변하지 않는 것을 찾아라**
>
> 무언가가 변해 갈 때, 그것으로 만든 양 가운데 일정하게 유지되는 것을 찾아라. 그러한 양은 운동을 제약하고, 종종 그 구조를 드러낸다.
>
> 여기서는 변화율이 교환자였기 때문에 대각합과 행렬식이 보존되었다. 역학에서 보존량은 대칭성에서 나오며(뇌터(Noether) 정리(Noether's theorem)), 이를 찾는 것이 종종 문제를 푸는 첫걸음이 된다.

더 도전하기

1 **해를 확인하기.** 단계 4의 행렬 $\mathbf{M}(t)$가 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$을 만족함을 미분하여 확인하여라.

2 **닮음.** $\mathbf{M}_0$이 상수이고 $\mathbf{S}(t)$가 $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{SN}$을 만족할 때 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S}$이면 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$임을 보여라. (힌트: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$.)

3 **부피의 증가.** $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$라 하자. $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$을 만족하는 $\mathbf{N}$을 구하고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\mathbf{N}$임을 확인하여라.

4 **더 높은 거듭제곱.** $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$일 때, 모든 양의 정수 k에 대하여 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = 0$임을 직접 보여라.

더 읽을거리

- **P. G. Drazin & R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*** (Cambridge University Press). 랙스 쌍을 포함하여 솔리톤을 다루는 대표적인 학부 입문서이다.
- **Thierry Dauxois & Michel Peyrard, *Physics of Solitons*** (Cambridge University Press). Scott Russell이 본 파동의 이야기가 실려 있다.
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem*** (Johns Hopkins University Press). 대칭성이 어떻게 보존 법칙을 낳는지 설명한다.

7.8 네 제곱수

문제

STEP III 1994, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/94-s3-q8`

도입

7은 두 제곱수(square)의 합으로도, 세 제곱수의 합으로도 나타낼 수 없다. 그러나 네 제곱수의 합으로는 나타낼 수 있다: $7 = 4 + 1 + 1 + 1$. 1770년 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange)는 모든 양의 정수가 네 제곱수의 합(0^2도 허용한다)임을 증명하였다. 이 정리는 1621년 바셰(Bachet)가 추측하였고, 페르마(Fermat)도 이를 주장하였지만 늘 그렇듯 증명을 남기지 않았다. 오일러(Euler)는 40년 동안 이 문제에 매달렸으나 끝내 완성하지 못하였다.

핵심 도구는 1748년 오일러가 발견한 것으로, 바로 이 문제에 담겨 있다. 네 제곱수의 합 두 개를 곱한 것은 다시 네 제곱수의 합이라는 사실이다. 따라서 라그랑주의 정리는 소수(prime)에 대해서만 증명하면 되고, 나머지는 곱셈으로 따라 나온다. 이 문제는 복소수(complex number) 행렬의 행렬식(determinant)으로부터 몇 줄 만에 이 항등식을 유도하는데, 이 행렬들은 사실 Section 6.7의 사원수(quaternion)가 모습을 바꾼 것이다.

시작하기 전에

생각해 보기 두 제곱수 버전을 떠올려 보자. 복소수 $z = a + bi$, $w = p + qi$에 대하여 $|z|^2|w|^2 = |zw|^2$이므로 $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2)$은 두 제곱수의 합이다. 행렬을 이용하면 이것을 어떻게 네 제곱수로 확장할 수 있을까?

아이디어는 네 실수로 만들어지는 일종의 "수"로서, 그 "크기의 제곱"이 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$이고 곱셈적(multiplicative)인 것을 찾는 것이다. 행렬은 행렬식에 대하여 곱셈적이다: $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$. 그러므로 a, b, c, d로 만든 행렬로서 행렬식이 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$이

고, 그러한 행렬끼리의 곱이 다시 같은 꼴이 되는 것을 찾으면 된다.

차근차근 풀기

1단계 행렬식은 네 제곱수의 합이다

생각해 보기 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$의 행렬식은 무엇인가? $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$이면 이를 a, b, c, d로 나타내면 어떻게 되는가?

$\det = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$이다. 마찬가지로 $z_3 = p + q\mathrm{i}$, $z_4 = r + s\mathrm{i}$로 두면 두 번째 행렬의 행렬식은 $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$이다.

2단계 곱도 같은 꼴이다

곱하면

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -z_4^* & z_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_3 - z_2 z_4^* & z_1 z_4 + z_2 z_3^* \\ -z_2^* z_3 - z_1^* z_4^* & -z_2^* z_4 + z_1^* z_3^* \end{pmatrix}.$$

$w_1 = z_1 z_3 - z_2 z_4^*$, $w_2 = z_1 z_4 + z_2 z_3^*$으로 두면 아래 행은 $(-w_2^*, w_1^*)$이므로, 곱은 $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2^* & w_1^* \end{pmatrix}$로 같은 꼴이다. 이 행렬의 행렬식은 $|w_1|^2 + |w_2|^2$이고, 행렬식은 곱에 대하여 곱해지므로

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = |w_1|^2 + |w_2|^2.$$

3단계 네 제곱수 읽어 내기

잠깐, 직접 해 보기 $w_1 = (a + b\mathrm{i})(p + q\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i})(r - s\mathrm{i})$와 $w_2 = (a + b\mathrm{i})(r + s\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i})(p - q\mathrm{i})$를 전개하여 실수부와 허수부로 나누어 보아라.

$$w_1 = (ap - bq - cr - ds) + \mathrm{i}(aq + bp + cs - dr),$$
$$w_2 = (ar - bs + cp + dq) + \mathrm{i}(as + br - cq + dp).$$

따라서

$$L_1 = ap - bq - cr - ds, \qquad L_2 = aq + bp + cs - dr,$$
$$L_3 = ar - bs + cp + dq, \qquad L_4 = as + br - cq + dp,$$

은 각각 a,b,c,d에 대해서도, p,q,r,s에 대해서도 일차식이며, $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)=L_1^2+L_2^2+L_3^2+L_4^2$이다. ■

예를 들어 $7=2^2+1^2+1^2+1^2$이고 $3=1^2+1^2+1^2+0^2$이다. $(a,b,c,d)=(2,1,1,1)$, $(p,q,r,s)=(1,1,1,0)$으로 두면 위 공식에서 $(L_1,L_2,L_3,L_4)=(0,2,4,1)$을 얻고, 실제로 $0^2+2^2+4^2+1^2=21=7\times 3$이다.

돌아보기

- **곱셈성이 일을 다 한다.** 이 항등식은 $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$에서 나왔으며, 이는 두 제곱수 항등식이 $|zw|=|z||w|$에서 나오는 것과 똑같다.
- **곱셈에 대하여 닫혀 있음(closure).** 특별한 꼴 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$은 곱해도 유지되며, 바로 이 때문에 결과가 다시 네 제곱수의 합이 된다.
- **꼼꼼한 계산이 중요하다.** 마지막 단계는 기계적이지만 실수하기 쉽다. 부호와 켤레(conjugate)를 주의해서 다루어야 한다.

숨은 수학

라그랑주의 네 제곱수 정리

라그랑주의 증명의 개요는 다음과 같다. 오일러의 항등식에 의해 모든 소수 p가 네 제곱수의 합임을 보이면 충분하다. 개수 세기 논법으로 $m<p$인 어떤 배수 mp가 네 제곱수의 합임을 보인다. 그다음 교묘한 "강하법(descent)"으로, $1<m<p$인 mp가 네 제곱수의 합이면 더 작은 어떤 m'에 대하여 $m'p$도 네 제곱수의 합임을 보인다. 이를 반복하면 $m=1$에 도달한다. (Section 1.5의 페르마의 강하법과 비교해 보아라.) 1834년 야코비(Jacobi)는 훨씬 더 나아가 n을 네 제곱수의 합으로 나타내는 방법의 정확한 개수를 구하였다. 그 개수는 n의 약수(divisor) 중 4의 배수가 아닌 것들의 합의 8배이다. 예를 들어 1은 8가지 방법으로 나타낼 수 있다(네 자리 중 어느 한 곳에 ± 1).

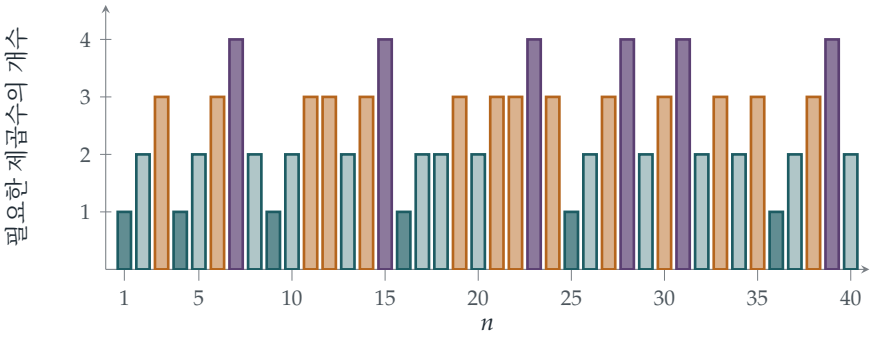


그림 7.8.1 1부터 40까지의 각 n을 만드는 데 필요한 제곱수의 최소 개수. 라그랑주의 정리에 의해 모든 수는 많아야 네 개면 된다. 네 개가 필요한 수(자주색)는 $7, 15, 23, 28, 31, 39, \ldots$이며, 르장드르(Legendre)와 가우스(Gauss)의 정리에 의해 정확히 $4^k(8m+7)$ 꼴의 수들이다.

둘, 셋, 넷

차원에 따른 양상은 미묘하다. 두 제곱수의 합은 복소수에서 나오며, 어떤 수가 두 제곱수의 합일 필요충분조건은 그 수의 $4k+3$ 꼴인 소인수가 모두 짝수 거듭제곱으로 나타나는 것이다(Section 1.6). 네 제곱수의 합은 사원수에서 나오며, 모든 수가 네 제곱수의 합이다. 그러나 세 제곱수의 합에는 곱셈 항등식이 전혀 없으며(크기가 곱셈적인 3차원 수 체계는 존재하지 않는다. 해밀턴(Hamilton)이 세 쌍으로 실패한 이유가 이것이다. Section 6.7 참고), 정리도 더 어렵다. 르장드르와 가우스는 $n = 4^k(8m+7)$이 아닌 한 n이 세 제곱수의 합임을 보였다(그림 7.8.1). 넷을 넘어서면 8차원의 팔원수(octonion)가 여덟 제곱수 항등식을 주는데, 이는 Degen과 Graves가 발견하였다. 후르비츠(Hurwitz)는 1898년에 이런 종류의 항등식이 1, 2, 4, 8개의 제곱수에 대해서만 존재함을 증명하였다.

워링의 문제

라그랑주의 정리는 1770년 워링(Edward Waring)이 제기한 질문의 첫 번째 경우이다. 각 k에 대하여, 모든 양의 정수가 많아야 $g(k)$개의 k제곱수의 합이 되는 수 $g(k)$가 존재하는가? 힐베르트(David Hilbert)는 1909년에 그러한 수가 존재함을 증명하였다. 오늘날 우리는 $g(2) = 4$, $g(3) = 9$(예를 들어 $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$은 세제곱수 아홉 개가 필요하다), $g(4) = 19$임을 알고 있다.

사고 기술

곱셈적인 구조를 찾아라

어떤 성질이 곱셈에 대하여 보존됨을 보이려면, 그 성질이 어떤 대상의 "크기"이고 그 크기가 곱셈적인 대수적 구조(복소수, 사원수, 행렬)를 찾아라.

그런 구조를 찾고 나면 곱셈 항등식은 저절로 얻어지고, 모든 수에 대한 문제가 소수에 대한 문제로 줄어든다.

더 도전하기

1 **계산 예제.** $(a,b,c,d) = (p,q,r,s) = (2,1,1,1)$로 두고 $L_1,\dots,L_4$의 공식을 이용하여 $49 = 7\times 7$을 네 제곱수의 합으로 나타내고, 답을 확인하여라. 이것은 자명한 $49 = 7^2+0^2+0^2+0^2$과 같은가?

2 **넷 속의 둘.** $c = d = r = s = 0$이면 이 항등식이 Section 1.6의 두 제곱수 항등식으로 줄어듦을 보여라.

3 **네 제곱수가 필요한 수.** 제곱수를 8로 나눈 나머지를 생각하여, $8m+7$ 꼴의 수는 세 제곱수의 합이 될 수 없음을 보여라.

4 **야코비의 공식.** 2를 네 제곱수의 합으로 나타내는 방법(순서와 부호를 구별한다)의 수를 세고, 그 답이 $8\times(1+2) = 24$임을 확인하여라.

더 읽을거리

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic*** (Cambridge University Press). 제 V장에서 라그랑주의 네 제곱수 정리를 증명한다.
- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions*** (A. K. Peters). 사원수의 산술을 다루며, 사원수 정수를 이용한 네 제곱수 정리의 증명도 담고 있다.
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***, "Representing numbers as sums of two squares" 장(수를 두 제곱수의 합으로 나타내기). 이 절과 짝을 이루는 두 제곱수 이야기이다.

7.9 정다면체는 다섯 개뿐이다

문제

STEP III 1999, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/99-s3-q4`

도입

정다각형(regular polygon)은 무한히 많다. 정삼각형, 정사각형, 정오각형처럼 변의 개수마다 하나씩 있다. 그렇다면 정다면체(regular polyhedron)도 무한히 많으리라 생각할 수 있다. 하지만 정다면체는 정확히 다섯 개뿐이다. 정사면체(tetrahedron), 정육면체(cube), 정팔면체(octahedron), 정십이면체(dodecahedron), 정이십면체(icosahedron)가 그것이다. 플라톤(Plato)은 이 중 넷을 원소(불, 흙, 공기, 물)에, 다섯 번째를 우주에 대응시켰다. 지금까지 쓰인 수학책 가운데 가장 큰 영향을 끼친 유클리드(Euclid)의 **원론**(Elements)은 이 밖에 다른 정다면체가 없다는 증명으로 끝맺는다. 케플러(Kepler)는 정다면체로 태양계의 모형을 만들기도 했다.

이 문제는 1750년에 오일러(Euler)가 발견한 놀라운 공식 하나로부터 이 분류를 단 몇 줄 만에 증명한다. 그 공식은 모든 볼록다면체(convex polyhedron)에 대하여 $V - E + F = 2$라는 것이다. 개수를 세는 공식이 도형에 관한 정리로 바뀌고, 수 2는 구의 지문과 같은 것으로 드러난다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 정육면체에서 오일러 공식을 확인해 보자. 꼭짓점, 모서리, 면은 각각 몇 개인가? 사각뿔에서는 어떠한가?

정육면체는 $V = 8$, $E = 12$, $F = 6$이고 $8 - 12 + 6 = 2$이다. 사각뿔은 꼭짓점 5개, 모서리 8개, 면 5개를 가지며 $5 - 8 + 5 = 2$이다. 이 공식은 구멍이 없는 다면체라면 아무리 불규칙하더라도 성립한다.

생각해 보기 정다면체에서 각 면은 m개의 모서리를 가지고, 각 모서리는 두 면에 접한다. 이로부터 E와 F 사이에 어떤 등식이 얻어지는가? 마찬가지로 E와 V 사이에는 어떠한가?

모서리와 면의 접속 관계를 두 가지 방법으로 세어 보자. F개의 면은 각각 m개의 모서리를 가지고, 각 모서리는 (두 면에서 한 번씩) 두 번 세어지므로 $mF = 2E$이다. 마찬가지로 각 꼭짓점에는 n개의 모서리가 모이고 각 모서리는 두 끝점을 가지므로 $nV = 2E$이다. 이처럼 "같은 것을 두 가지 방법으로 세는" 기법을 **이중 계산**(double counting)이라고 한다.

차근차근 풀기

1단계 F에 대한 공식

$mF = 2E$와 $nV = 2E$로부터 $E = \frac{mF}{2}$, $V = \frac{mF}{n}$이다. 이를 오일러 공식에 대입하면

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2 \quad\Longrightarrow\quad F\,\frac{2m - mn + 2n}{2n} = 2 \quad\Longrightarrow\quad F = \frac{4n}{2m + 2n - mn}.$$

또한 $4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn = h$이다. 따라서 $F = \frac{4n}{h}$이다. ■

2단계 m과 n은 어떤 값이 될 수 있는가?

생각해 보기 m(면의 변의 수)과 n(한 꼭짓점에 모이는 면의 수)의 가능한 최솟값은 각각 얼마인가? 또 $F > 0$이므로 h의 부호는 어떠해야 하는가?

다각형은 적어도 3개의 변이 필요하므로 $m \geq 3$이고, 입체의 각 꼭짓점에는 적어도 3개의 면이 모여야 하므로 $n \geq 3$이다. $F > 0$이므로 $h > 0$, 즉 $(n-2)(m-2) < 4$이어야 한다. 두 인수가 모두 1 이상이므로 $(m-2, n-2)$로 가능한 것은 $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$뿐이다.

잠깐, 직접 해 보기 다섯 가지 경우 각각에 대하여 h, F를 차례로 구하고, $E = \frac{mF}{2}$와 $V = \frac{mF}{n}$을 계산하라. 각각이 어떤 입체인지 확인하라.

m	n	h	F	E	V	입체
3	3	3	4	6	4	정사면체
3	4	2	8	12	6	정팔면체
4	3	2	6	12	8	정육면체
3	5	1	20	30	12	정이십면체
5	3	1	12	30	20	정십이면체

가능한 경우는 이것뿐이므로 정다면체는 많아야 다섯 개이다. 그리고 다섯 개 모두 실제로 존재한다(유클리드가 각각을 작도하는 방법을 보였다). ■

돌아보기

- **이중 계산.** 모서리와 면, 모서리와 꼭짓점의 접속 관계를 두 가지 방법으로 세어 $mF = 2E$와 $nV = 2E$를 얻었다.
- **양수 조건에서 나온 부등식.** $F > 0$이라는 단순한 조건이 무한히 많은 후보를 다섯 개로 줄였다.
- **존재성은 별개의 문제이다.** 이 논증은 정다면체가 *많아야* 다섯 개임을 보여 줄 뿐이다. 각각이 실제로 존재한다는 것은 직접 작도하여 확인해야 한다.

숨은 수학

오일러 공식과 위상수학

오일러는 1750년에 $V - E + F = 2$를 제시했지만 그의 증명에는 빈틈이 있었고, 이 공식에는 증명 시도와 반례와 수정이 이어진 흥미로운 역사가 있다. 가운데에 사각형 구멍이 뚫린 "액자" 모양 다면체는 $V - E + F = 0$이고, 두 정육면체를 한 꼭짓점에서 붙인 다면체는 $V - E + F = 3$이다. 임레 라카토슈(Imre Lakatos)는 이 역사를 바탕으로 수학적 개념이 반례를 통해 어떻게 다듬어지는지를 다룬 유명한 책 *Proofs and Refutations*(증명과 반박)를 썼다. 결론은 $V - E + F$가 위상수학의 느슨한 의미에서 곡면의 **모양**에만 의존한다는 것이다. 구로 변형할 수 있는 곡면에서는 2, 원환면(torus, 도넛 모양)에서는 0, 구멍이 g개인 곡면에서는 $2 - 2g$이다. 이 수, 곧 **오일러 지표**(Euler characteristic)는 늘이거나 구부려도 변하지 않는 성질을 연구하는 위상수학(topology)의 초창기 개념 가운데 하나였다.

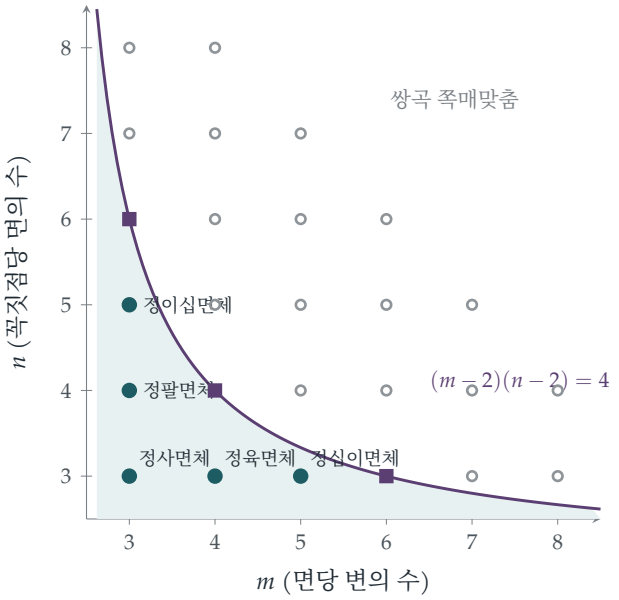


그림 7.9.1 $m, n \geq 3$인 가능한 순서쌍 (m, n). 곡선 $(m-2)(n-2) = 4$ 아래(색칠한 부분)에는 다섯 개의 플라톤 입체(청록색)가 있다. 곡선 위에는 평평한 평면의 세 가지 쪽매맞춤(자주색 사각형)이 있다. 정삼각형$(m = 3, n = 6)$, 정사각형$(4, 4)$, 정육각형$(6, 3)$에 의한 쪽매맞춤이다. 곡선보다 위에 있는 모든 점(속이 빈 원)은 쌍곡평면의 정규 쪽매맞춤을 준다.

구를 넘어서

$h = 0$이거나 $h < 0$이면 어떻게 될까? $(m-2)(n-2) = 4$일 때는 해가 $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 3)$의 세 개이다. 정삼각형 여섯 개, 정사각형 네 개, 또는 정육각형 세 개가 한 점에 모이면 각의 합이 정확히 360°가 된다. 이것이 평평한 평면의 세 가지 정규 쪽매맞춤(tiling)으로, 욕실 바닥이나 벌집에서 볼 수 있는 무늬이다. 그리고 $(m-2)(n-2) > 4$이면 한 꼭짓점에 모인 각의 합이 360°보다 **크다**. 이는 평평한 평면에서는 불가능하지만 Section 5.8의 쌍곡평면(hyperbolic plane)에서는 얼마든지 가능하다. 쌍곡평면의 정규 쪽매맞춤은 무한히 많으며, 그림 7.9.1에서 곡선보다 위에 있는 점마다 하나씩 있다. 에셔(Escher)의 *Circle Limit*(원의 극한) 목판화 연작은 그중 몇 가지를 그린 것이다. 그러므로 플라톤 입체의 분류는 사실 기하학 전체를 관통하는 삼분법(구, 평면, 쌍곡평면)의 첫 번째 경우인 셈이다.

대칭군

플라톤 입체의 대칭은 군(group)을 이룬다. 회전 대칭은 정사면체가 12개, 정육면체와 정팔면체가 24개(이 둘은 쌍대(dual)이다. 즉 면과 꼭짓점을 맞바꾸면, 곧 $m \leftrightarrow n$이면 서로 바뀐다), 정십이면체와 정이십면체가 60개이다. 위수가 60인 정이십면체군은 Section 6.4에서

언급했듯이 5차 방정식을 거듭제곱근(radical)으로 풀 수 없게 만드는 "단순(simple)" 군이다. 펠릭스 클라인(Felix Klein)은 정이십면체를 5차 방정식의 풀이와 연결한 책 *Lectures on the Icosahedron*(정이십면체에 관한 강의, 1884)을 한 권 통째로 썼다.

사고 기술

이중 계산

같은 대상을 서로 다른 두 가지 방법으로 세고, 그 결과를 같다고 놓는다.

여기서 센 대상은 모서리가 면 위에 있는 (모서리, 면) 쌍의 집합이었다. 이중 계산은 조합론에서 가장 강력한 도구 가운데 하나이며, 제9장 곳곳에서 다시 등장한다.

더 도전하기

1 **쌍대성.** m과 n을 맞바꾸면 V와 F가 맞바뀌고 E는 변하지 않음을 보여라. 어떤 플라톤 입체끼리 서로 쌍대인가? 자기 자신과 쌍대인 것은 어느 것인가?

2 **축구공.** 전통적인 축구공은 정오각형 12개와 정육각형 20개로 이루어지며, 각 꼭짓점에 세 면이 모인다. 이중 계산과 오일러 공식을 이용하여 $V - E + F = 2$임을 확인하라. 더 일반적으로, 오각형과 육각형으로 이루어지고 각 꼭짓점에 세 면이 모이는 다면체는 언제나 오각형을 정확히 12개 가짐을 보여라.

3 **원환면.** "액자" 모양 다면체(사각형 구멍이 뚫린 사각 블록)를 만들어 V, E, F를 세어라. $V - E + F = 0$임을 확인하라.

4 **꼭짓점에 모인 각.** 정m각형의 한 내각은 $180^\circ(1 - \frac{2}{m})$이다. 이러한 각 n개가 볼록 입체의 한 꼭짓점 둘레에 들어맞을(합이 360°보다 작을) 필요충분조건이 $(m-2)(n-2) < 4$임을 보여, 분류에 대한 두 번째 증명을 제시하라.

더 읽을거리

- **David Richeson, *Euler's Gem*** (Princeton University Press). $V - E + F = 2$의 역사와 그것이 어떻게 위상수학으로 이어졌는지를 다룬다. 식스폼(sixth form, 영국의 대학 진학 준비 과정) 학생에게 매우 좋은 책이다.
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*** (Cambridge University Press). 오일러 공식과 증명의 본성에 관한 대화편이다.

- **H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*** (Dover). 정다면체와 그 고차원 친척들을 다룬 고전이다.

우리가 배운 것

이 장은 행렬(matrix)이 그 자체로 생명을 지닌 공간의 변환(transformation)이라는 말로 시작했고, 세 가지 질문을 던졌다. 행렬은 수와 어떤 점에서 닮았고 어떤 점에서 다른가, 행렬은 실제로 무엇을 하는가, 그리고 무엇이 변하지 않는가. 이 장의 아홉 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 행렬은 수와 어떤 점에서 닮았고, 어떤 점에서 다른가?

행렬은 더하고 곱할 수 있지만, Section 7.1에서는 익숙한 규칙 가운데 어떤 것이 성립하지 않는지 살펴보았다. 곱셈은 교환법칙(commutative law)이 성립하지 않으므로 $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$가 반드시 $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$인 것은 아니다. 영인자(zero divisor)가 존재하므로 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$이라고 해서 $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$이 되는 것도 아니다. 또한 행렬에 대한 이차방정식은 근을 무수히 많이 가질 수 있다. 이러한 실패에는 저마다 행렬이 평면에 무엇을 하는지에 근거한 기하학적 설명이 있었다. 결정적으로 살아남는 성질은 행렬식(determinant)이 곱셈을 보존한다는 것, 곧 $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$이다. Section 7.3에서는 이 성질이 사실상 행렬식을 **규정한다**는 것을 보였고, Section 7.8에서는 이 성질을 이용해 오일러(Euler)의 네 제곱수 항등식(four-square identity)을 증명(proof)했다. 이 항등식은 모든 자연수가 네 제곱수의 합이라는 라그랑주(Lagrange)의 정리에서 핵심 단계이다.

2. 행렬은 실제로 무엇을 하는가?

여러 절에서 올바른 관점을 찾아 이 질문에 답했다.

- **고유벡터(eigenvector)**(Section 7.2)는 행렬이 방향을 돌리지 않는 벡터이다. 고유벡터를 좌표축으로 삼으면 대칭행렬(symmetric matrix)은 단순한 늘이기에 지나지 않으며, 원의 상은 타원(ellipse)이 되고 그 축과 넓이를 바로 읽어 낼 수 있다.
- **행렬식**(Section 7.3)은 부호가 있는 넓이 배율이다. 층밀림(shear)은 넓이를 보존하고, 두 축을 맞바꾸면 방향(orientation)이 뒤집히며, 특이행렬(singular matrix)은 평면을 납작하게 짓누른다.
- **대각합(trace)과 행렬식**(Section 7.4)은 케일리–해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)를 통해 행렬이 몇 단계 뒤에 항등행렬(identity matrix)로 돌아오는지를 결정한다. $\mathbf{M}^8=\mathbf{I}$인 행렬이 반드시 회전일 필요는 없다. 그것은 비스듬한 좌표에서 본 회전이다. 그리고 정수 행렬의 대각합은 정수이므로, 결정(crystal)은 5회 대칭을 가질 수 없다.

- **3차원 회전**(Section 7.5)은 로드리게스 공식(Rodrigues' formula)에 따라 외적(cross product)으로 만들어진다. 이 공식은 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$의 3차원 판이다.
- **쌍곡회전(hyperbolic rotation)**(Section 7.6)은 점을 쌍곡선을 따라 옮기며, 쌍곡각은 더해진다. 쌍곡회전은 특수상대성이론(special relativity)의 로런츠 부스트(Lorentz boost)이고, 그 불변직선은 빛의 경로이다.

3. 무엇이 변하지 않는가?

불변량(invariant)은 어디에나 있었다. 회전은 $x^2 + y^2$을 보존하고, 로런츠 부스트는 $x^2 - y^2$을 보존하며, 닮은 행렬(similar matrices)은 대각합과 행렬식이 같다. Section 7.7에서는 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$에 따라 변하는 행렬이 성분이 아무리 바뀌어도 대각합과 행렬식, 따라서 고유값(eigenvalue)을 일정하게 유지했다. 이것이 솔리톤(soliton)의 보존 법칙(conservation law) 뒤에 숨은 원리이다. 그리고 Section 7.9에서는 불변량이 하나의 수, $V - E + F = 2$였다. 이 식은 모든 볼록다면체(convex polyhedron)에서 성립하며, 정다면체를 단 다섯 개로 한정한다. 이 수, 곧 오일러 지표(Euler characteristic)는 위상수학(topology)의 최초의 불변량 가운데 하나였다.

4. 선형대수학의 도구 상자

방법	사용한 곳
기하학적 반례	성립하지 않는 규칙 (7.1)
자연스러운 축으로서의 고유벡터	타원 (7.2); 부스트 (7.6)
특수한 행렬로 탐색하기	행렬식 (7.3)
케일리–해밀턴 정리	유한 위수 (7.4)
평행 성분과 수직 성분으로 나누기	로드리게스 공식 (7.5)
알맞은 매개변수 고르기	라피디티(rapidity) (7.6)
$\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{tr}(\mathbf{NM})$	보존량 (7.7)
행렬식의 곱셈성	네 제곱수 (7.8)
이중 세기(double counting)	플라톤 입체(Platonic solids) (7.9)

다음으로

- Section 11.2에서는 고유값과 고유벡터가 용수철과 질점으로 이루어진 계의 진동을 지배한다.
- Section 13.7에서는 공분산 행렬(covariance matrix)의 고유벡터가 통계학에 등장한다.
- 미분방정식(differential equation)과 동역학계(dynamical system)는 8장의 주제이다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***(선형대수학의 본질): 행렬이 무엇을 하는지 보여 주는 무료 동영상 시리즈이다. 가장 먼저 보기를 권한다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***(선형대수학 입문): 이해와 응용을 강하게 강조하는 고전적인 입문 교재이다.
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***: 선형사상을 중심에 둔 좀 더 추상적인 접근이다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **David Richeson, *Euler's Gem***(오일러의 보석): 오일러 공식과 위상수학의 탄생을 다룬다.

Kaplansky는 자신과 Halmos가 좌표 없이 생각하지만, 닫힌 문 뒤에서는 행렬로 "미친 듯이" 계산한다고 농담한 적이 있다. 이 말은 이 장이 보여 주려 한 것을 잘 담고 있다. 행렬은 구체적이고 계산할 수 있지만, 모든 계산 뒤에는 기하(늘이기, 회전, 사영, 부스트)가 있고, 어떻게 적느냐에 따라 달라지지 않는 불변량이 있다. 이 두 관점 사이를 자유롭게 오가는 법을 익히는 것은 수학자가 지닐 수 있는 가장 값진 기술 가운데 하나이다.

더 도전하기 해답

아래는 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계만 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓰면 된다. 답을 보기 전에 각 문제를 제대로 풀어 보기 바란다.

7.1 행렬에서는 성립하지 않는 법칙

1. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 두고 $\mathbf{XP}$와 $\mathbf{PX}$를 비교하면 $c = 0$, $a = d$이어야 한다. 따라서 답은 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 꼴의 행렬(matrix)이다.

2. 케일리–해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)에 의해 $\mathbf{N}^2 = t\mathbf{N} - d\mathbf{I}$이므로 $t\mathbf{N} = d\mathbf{I}$이다. $t \neq 0$이면 $\mathbf{N}$은 $\mathbf{I}$의 상수배이고, $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$에서 $\mathbf{N} = \mathbf{0}$이 되어 $t \neq 0$에 모순이다. 따라서 $t = 0$이고, 그러면 $d = 0$이다. 답은 $a^2 + bc = 0$인 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$이다.

3. 제곱한 행렬의 대각성분(diagonal entries)은 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이고 대각성분이 아닌 성분은 0이다. 고정 벡터(fixed vector)는 $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$이므로, 이 변환은 원점을 지나고 각이 $\frac{\theta}{2}$인 직선에 대한 반사(reflection)이다.

4. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이면 $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$이다. 여기서 $(a+d)\mathbf{M}$을 빼고 $(ad - bc)\mathbf{I}$를 더하면 $\mathbf{0}$이 된다.

7.2 돌지 않고 늘어나기

1. $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$에 대하여 $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$이려면 $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$이어야 하고, 이것이 바로 그 이차방정식이다. 여기서 대각합(trace)은 6이고 행렬식(determinant)은 $\frac{4}{25}(54 - 4) = 8$이므로 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$이다. 따라서 고유값(eigenvalue)은 $\lambda = 2$($(1,2)$에 대응)와 4($(2,-1)$에 대응)이다.

2. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \lambda\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$이고, $\mathbf{M}$이 대칭(symmetric)이므로 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \mathbf{Mv} \cdot \mathbf{u} = \mu\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$이다. 따라서 $(\lambda - \mu)\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$이다.

3. 특성방정식(characteristic equation) $\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$의 판별식(discriminant)은 $-4\sin^2\theta$이고, θ가 π의 정수배가 아니면 음수이다. 고유값은 $e^{\pm i\theta}$이다.

4. $(1,0) = \frac{1}{5}(1,2) + \frac{2}{5}(2,-1)$이므로 $T^n(1,0) = \frac{2^n}{5}(1,2) + \frac{2\cdot 4^n}{5}(2,-1) = \frac{1}{5}\big(2^n + 4^{n+1},\ 2^{n+1} - 2\cdot 4^n\big)$이다. $n = 1$이면 이 값은 $(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5})$로, 예상대로이다.

7.3 행렬식을 행렬식이게 하는 것

1. $(\det \mathbf{MN})^3 = (\det \mathbf{M})^3 (\det \mathbf{N})^3$이고 $(\det \mathbf{J})^3 = -1 \neq 1$이다. 함수 $|\det \mathbf{M}|$은 곱셈적(multiplicative)이지만 $|\det \mathbf{J}| = 1$이다.
2. $\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이고, 두 번째 인수는 둘째 행이 첫째 행의 0배이므로 그 f 값은 0이다.
3. $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$이므로 그 값은 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{K}_k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$이다. 또한 $\mathbf{K}_k\mathbf{K}_l = \mathbf{K}_{kl}$이다.
4. 행 축약(row reduction)을 하면 모든 가역(invertible) 행렬을 기본행렬(elementary matrix)의 곱으로 나타낼 수 있다. 기본행렬은 행 교환($\mathbf{J}$), 행의 상수배($\mathbf{K}_k$ 또는 $\mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$), 전단(shear)($\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 또는 이것을 $\mathbf{J}$로 켤레(conjugate)시킨 것)이다. 전단은 $\mathrm{f} = 1$이다(소문항 (iv)에서처럼 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$를 이용한다). 또한 $\mathbf{J}$는 전단들과 $\mathbf{K}_{-1}$의 곱이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{K}_{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$이다. 따라서 $\mathrm{g}(k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$라 하면 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{g}(\det \mathbf{M})$이다. 특이(singular) 행렬 $\mathbf{M}$에 대해서는 소문항 (iii)에 의해 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = 0$이다.

7.4 제자리로 돌아오는 행렬

1. $|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|^2 = 2 + 2\cos\phi = 1$에서 $\phi = \pm\frac{2\pi}{3}$이므로 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$이다. $\mathbf{S}$의 고유값은 1의 세 제곱근이다. 두 고유값이 모두 1이라면, $x^3 - 1$의 근이 서로 다르므로 $\mathbf{S}$는 대각화 가능(diagonalisable)하고 $\mathbf{I}$와 같아진다. 실수 행렬의 허근 고유값은 켤레 쌍으로 나타나므로 고유값은 $\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}/3}$이다. 따라서 $\det \mathbf{S} = 1$, $\operatorname{tr} \mathbf{S} = -1$이다.
2. 고유값은 원시 6제곱근(primitive sixth root) $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$이어야 한다(6제곱근을 켤레와 짝지어 달리 고르면 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ 또는 $\mathbf{M}^3 = \mathbf{I}$가 된다). 따라서 $\operatorname{tr} \mathbf{M} = 1$, $\det \mathbf{M} = 1$이다.
3. 고유값은 곱이 1인 단위근(root of unity)이므로 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$(또는 둘 다 ± 1)이고, 대각합 $2\cos\theta$는 $[-2,2]$에 속하는 정수이다. 위수(order)가 6인 예: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $\mathbf{M}^3 = (t^2 - d)\mathbf{M} - td\mathbf{I}$이고 $\mathbf{M}^4 = (t^3 - 2td)\mathbf{M} - d(t^2 - d)\mathbf{I}$이다. $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$이려면($\mathbf{M}$은 $\mathbf{I}$의 상수배일 수 없으므로) $t(t^2 - 2d) = 0$이고 $d(t^2 - d) = 1$이어야 한다. $t = 0$이면 $-d^2 = 1$이 되어 불가능하다. 따라서 $t^2 = 2d$, $d^2 = 1$이고, $d = 1$, $t^2 = 2$이다.

7.5 3차원에서의 회전

1. $z \mapsto a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)$. 합성(composite)은 $k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$에 대하여 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + k$이다. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} \neq 1$이면 고정점(fixed point) $c = \frac{k}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}}$를 가진다. $\theta+\phi = 2\pi$이면 이것은 $(b-a)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$만큼의 평행이동(translation)이다.

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: 이 행렬은 $(1,1,1)$을 고정하고, 대각합이 $0 = 1 + 2\cos 120°$이며, $\mathbf{i} \to \mathbf{j} \to \mathbf{k} \to \mathbf{i}$로 보낸다.

3. $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$이고, 따라서 $\mathbf{K}^3\mathbf{r} = \mathbf{n} \times \big((\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}\big) = -\mathbf{K}\mathbf{r}$이다. 급수(series)에서 홀수 거듭제곱은 $(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots)\mathbf{K} = \sin\theta\,\mathbf{K}$를 주고, ($\mathbf{K}^2$부터의) 짝수 거듭제곱은 $(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \cdots)\mathbf{K}^2 = (1-\cos\theta)\mathbf{K}^2$를 준다.

4. 합성은 두 평면의 교선 위의 모든 점을 고정하고, 행렬식은 $(-1)^2 = 1$이다. 그 교선에 수직인 각 평면에서 이 합성은 사잇각이 α인 두 직선에 대한 반사의 곱이고, 이는 2α만큼의 회전(rotation)이다.

7.6 쌍곡 회전과 상대성 이론

1. $T(u)T(w)$의 성분은 $\cosh u\cosh w + \sinh u\sinh w = \cosh(u+w)$와 $\sinh u\cosh w + \cosh u\sinh w = \sinh(u+w)$이다. 따라서 $T(u)^{-1} = T(-u)$이다.

2. $\tanh u = 0.8$에서 $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1.8}{0.2} = \ln 3 \approx 1.099$이고 $\cosh u = \frac{1}{2}(3+\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$이다. 우주선 안에서는 $10 \times \frac{3}{5} = 6$년이 흐른다.

3. 넓이는 $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$이다. 직선 변은 아무것도 기여하지 않고, 쌍곡선(hyperbola)을 따라 $x = \cosh s$, $y = \sinh s$로 두면 피적분함수는 $(\cosh^2 s - \sinh^2 s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}s$이므로 넓이는 $\frac{v}{2}$이다. T의 행렬식은 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$이므로 T는 넓이를 보존한다. 또한 T는 쌍곡선을 자기 자신으로 보내고, 매개변수가 v인 점을 매개변수가 $v+u$인 점으로 옮긴다.

4. $x' + y' = (\cosh u + \sinh u)(x+y) = \mathrm{e}^u p$이고 $x' - y' = \mathrm{e}^{-u}q$이며, 또한 $x^2 - y^2 = pq$이다. 이 좌표에서 T는 스퀴즈(squeeze)이다. 즉 점근선(asymptote) $y = x$ 방향으로 e^u배 늘이고 $y = -x$ 방향으로 e^{-u}배 줄이는 변환이며, 각 쌍곡선 $pq =$ 상수를 따라 점들을 미끄러지게 한다.

7.7 결코 변하지 않는 양

1. $\dot{a} = -Ct = -tc$, $\dot{d} = Ct = tc$, $\dot{c} = 0$이고 $\dot{b} = (A-D)t - Ct^3 = t(a-d)$이므로 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t\begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$와 일치한다.

2. $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{N}$을 이용하면 $\dot{\mathbf{M}} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{N}\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{N}$이다.

3. $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이고 $\ln\det\mathbf{M} = 2t - t = t$이며, 그 도함수(derivative)는 $1 = \operatorname{tr}\mathbf{N}$이다.

4. 순환(cycling) 성질에 의해 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = \sum_j \operatorname{tr}(\mathbf{M}^j\dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{k-1-j}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\dot{\mathbf{M}})$이고, 다시 순환 성질에 의해 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}(\mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M})) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}^k\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\mathbf{N}\mathbf{M}) = 0$이다.

7.8 네 제곱수

1. $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1, 4, 4, 4)$이고 $1 + 16 + 16 + 16 = 49$이다. 이것은 $7^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$과는 다른 표현(representation)이다.

2. $c = d = r = s = 0$으로 두면 $L_1 = ap - bq$, $L_2 = aq + bp$, $L_3 = L_4 = 0$이 되고, 이는 $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap - bq)^2 + (aq + bp)^2$이다.

3. 제곱수는 8을 법(modulo)으로 0, 1 또는 4이다. 이 중 세 개의 합은 8을 법으로 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$이 되고, 7은 절대 되지 않는다.

4. $2 = (\pm1)^2 + (\pm1)^2 + 0^2 + 0^2$이다. 0이 아닌 두 자리를 고르고(6가지) 그 부호를 정하면(4가지) 24가지이다. 2는 4로 나누어떨어지지 않으므로 야코비(Jacobi)의 공식은 $8\sigma(2) = 8 \times 3 = 24$를 준다.

7.9 정다면체는 다섯 개뿐이다

1. $h = 2m + 2n - mn$으로 두면 $V = \frac{4m}{h}$, $E = \frac{2mn}{h}$, $F = \frac{4n}{h}$이다. m과 n을 바꾸면 V와 F가 바뀐다. 정육면체와 정팔면체는 서로 쌍대(dual)이고, 정십이면체와 정이십면체도 그러하며, 정사면체는 자기쌍대(self-dual)이다.

2. $F = 32$, $E = \frac{1}{2}(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) = 90$, $V = \frac{1}{3}(180) = 60$이고 $60 - 90 + 32 = 2$이다. 일반적으로 오각형이 P개, 육각형이 H개이면 $E = \frac{1}{2}(5P + 6H)$, $V = \frac{1}{3}(5P + 6H)$이므로 $V - E + F = -\frac{1}{6}(5P + 6H) + P + H = \frac{P}{6}$이다. 이 값이 2이므로 $P = 12$이다.

3. (구멍이 뚫린) 윗면과 아랫면을 각각 네 개의 사다리꼴(trapezium)로 나눈다. 그러면 $V = 16$, $F = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$, $E = 12 + 12 + 8 = 32$이므로 $V - E + F = 0$이다.

4. $180^\circ n(1 - \frac{2}{m}) < 360^\circ$는 $n(m-2) < 2m$, 즉 $mn - 2m - 2n < 0$, 곧 $(m-2)(n-2) < 4$이다. $m, n \geq 3$일 때 해는 $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$, $(5,3)$이다.

장

8

미분방정식과 동역학계

대부분의 미분방정식은 풀 수 없다. 그래도 이해하는 것, 그것이 기술이다.

이 장의 내용

8.1	해가 유일하지 않을 때	STEP III 1994
8.2	풀지 않고 범위 구하기	STEP III 2013
8.3	개체군 수확하기	STEP II 1995
8.4	원으로 감겨드는 나선	STEP III 2015
8.5	그레이하운드를 쫓는 그레이하운드	STEP III 1988
8.6	양자 진동자	STEP III 1988
8.7	풀 수 있는 혼돈	STEP I 2014
8.8	주기 3이면 혼돈이다	STEP III 2025
A	연습문제 해답	573쪽

변화의 규칙

자연은 적분의 어려움을 비웃는다.

— 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace)의 말로 전해짐

학교에서 미분방정식(differential equation)은 푸는 대상이다. 변수를 분리하거나, 적분인자(integrating factor)를 찾거나, $e^{\lambda x}$ 꼴의 해를 추측하면 마지막에 공식 하나를 얻는다. 교과서에 나오는 방정식들은 이 방법이 통하기 때문에 골라 놓은 것이다. 안타깝게도 현실 세계에서 나오는 미분방정식(세 행성의 운동, 날씨, 포식자와 피식자의 개체군, 진폭이 큰 진자의 흔들림) 거의 모두는 우리가 아는 함수로 적어 낼 수 있는 해를 갖지 않는다.

이 장은 그 대신 무엇을 할 것인가에 관한 것이다. "공식은 무엇인가?"라고 묻는 대신, 공식 없이도 답할 수 있는 질문을 던진다. 애초에 해가 존재하는가, 그리고 하나뿐인가? 해는 유계로 남는가? 정상 상태나 반복되는 순환으로 안착하는가, 아니면 끝없이 헤매는가? 오랜 시간이 지나면 어떻게 되는가? 푸는 것에서 이해하는 것으로의 이러한 관점 전환은 1880년대에 앙리 푸앵카레(Henri Poincaré)가 시작했으며, 오늘날 **동역학계**(dynamical systems)라고 부르는 분야를 탄생시켰다.

미분방정식이 중요한 이유

미분방정식은 과학의 언어이다. 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙은 미분방정식이며, 전자기학의 맥스웰(Maxwell) 방정식, 양자역학의 슈뢰딩거(Schrödinger) 방정식, 그리고 날씨를 예보하고 항공기를 설계하는 데 쓰이는 유체 흐름의 방정식도 마찬가지이다. 역학자는 질병의 확산을, 생태학자는 어류 자원의 개체 수를, 경제학자는 경제 성장을, 공학자는 온도 조절기에서 자동 조종 장치에 이르는 모든 제어 시스템의 반응을 미분방정식으로 모형화한다. 어떤 양이 현재 상태에 따라 정해지는 비율로 변할 때마다 그곳에는 미분방정식이 있으며, 대개는 아무도 정확히 풀 수 없는 방정식이다.

이러한 연속 모형과 나란히, 시간이 한 단계씩 나아가는 이산 모형도 있다. 올해의 개체 수가 내년의 개체 수를 결정하는 식이다. 이러한 **반복 사상**(iterated map)은 적어 내기는 더 간단하지만, 마지막 두 절에서 보듯이 그만큼 격렬하게 움직일 수 있다. 1970년대의 위대한 발견 중 하나는 아주 단순한 규칙이 **혼돈**(chaos), 곧 완전히 결정되어 있으면서도 실제로는 예측할 수 없는 행동을 만들어 낼 수 있다는 것이었다.

대학에서 만나게 될 것

대학 1학년 미분방정식 강좌는 표준적인 풀이법을 다루지만, 이 장의 질문들도 소개한다. 해가 언제 존재하는지, 그리고 언제 초깃값에 의해 결정되는지를 알려 주는 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)를 만나게 된다. 모든 해를 한꺼번에 나타낸 그림인 **상 초상**(phase portrait)을 그리는 법과, 선형화(linearisation)를 통해 평형점(equilibrium)을 안정 또는 불안정으로 분류하는 법을 배운다. 이후의 강좌는 훨씬 더 나아간다. **비선형 동역학**(nonlinear dynamics)은 극한 순환(limit cycle), 분기(bifurcation), 혼돈을 연구하고, **수리생물학**(mathematical biology)은 이를 개체군과 전염병에 적용하며, 편미분방정식(partial differential equation), 푸리에 급수(Fourier series), 직교 함수(orthogonal function)의 이론(Section 8.6에서 엿볼 수 있다)은 양자역학과 응용수학의 많은 부분을 떠받친다.

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **현재가 미래를 결정하는가?** 초깃값이 주어진 미분방정식은 언제 정확히 하나의 해를 갖는가?
2. **풀지 않고 무엇을 알 수 있는가?** 공식이 존재하지 않을 때, 어떻게 해의 범위를 제한하고, 해가 어디에 안착하는지 찾고, 해의 모양을 기술할 수 있는가?
3. **오랜 시간이 지나면 어떻게 되는가?** 해는 정상 상태로 안착하는가, 순환에 다가가는가, 아니면 혼돈스럽게 행동하는가? 그리고 이를 어떻게 알 수 있는가?

이 장은 유일성과 그것이 깨질 때 일어나는 일(Section 8.1)에서 시작하여, 방정식을 풀지 않고 이해하는 도구들을 발전시킨다. 증가할 수 없는 에너지 비슷한 양, 평형점과 그 안정성, 그리고 문제의 대칭성에 맞춘 좌표가 그것이다. 두 절에서는 이러한 아이디어를 물리 문제에 적용한다. 정사각형 위에서 서로를 쫓는 개들과 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)이다. 이 장은 이산 사상으로 끝을 맺는데, 여기서는 공식 하나가 혼돈을 드러내고, 길이 3인 순환 하나가 모든 길이의 순환을 강제한다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
8.1	유일성	포락선(envelope)과 특이해(singular solution); 이어 붙이기
8.2	에너지 방법	결코 증가하지 않는 양
8.3	개체군 모형	평형점, 안정성, 그리고 임계점(tipping point)
8.4	극한 순환	극좌표와 베르누이 치환(Bernoulli substitution)
8.5	추적 곡선(pursuit curve)	대칭성이 네 물체를 하나로 줄인다
8.6	직교 함수	론스키안(Wronskian)과 직교성
8.7	혼돈	변수 변환: 로지스틱 사상(logistic map)은 변장한 각의 두 배 사상이다
8.8	주기 궤도(periodic orbit)	구간 덮기; 샤르코프스키 정리(Sharkovskii's theorem)

이 장을 읽는 방법

무엇이든 풀기 전에 먼저 그려 보아라. 미분방정식 $y' = F(y)$에 대해서는 F가 양수, 음수, 0인 곳을 표시하고 y축 위에 화살표를 그린다. 사상 $x \mapsto f(x)$에 대해서는 직선 $y = x$와 함께 그래프를 그리고, 거미줄 방법(cobweb method)으로 수열 몇 개를 따라가 본다. 이런 그림은 1분이면 그릴 수 있고, 대수 계산을 시작하기도 전에 답이 어떤 모습이어야 하는지 대개 알려 줄 것이다.

8.1 해가 유일하지 않을 때

문제

STEP III 1994, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/94-s3-q4`

도입

미분방정식(differential equation)은 어떤 양이 어떻게 변하는지를 알려 주는 규칙이다. 뉴턴(Newton)의 법칙은 행성이 지금 어디에 있는지가 주어지면 그 행성이 어떻게 움직여야 하는지를 알려 준다. 고전 물리학의 세계관에 따르면 이것으로 충분하다. 지금 세계의 상태를 알면 법칙이 그 미래 전체를 결정한다. 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace)는 모든 위치와 속도를 아는 지성이라면 모든 것을 예측할 수 있으리라고 상상했다. 이 세계관은 하나의 수학적 가정에 기대고 있다. 미분방정식에 초기 조건이 주어지면 해가 **정확히 하나** 존재한다는 가정이다.

이 문제는 그 가정이 깨질 수 있음을 보여 준다. 겉보기에 순진한 방정식 $(y')^2 = 4y$에는 x축을 따라 달리다가 스스로 고른 순간에 축에서 떨어져 나가는 해들이 있다. 어떤 점들을 지나는 해는 무한히 많다. 현재를 안다고 해서 미래가 결정되지는 않는다. 유일성(uniqueness)이 정확히 언제 성립하는지 밝히는 것은 대학 미분방정식 강의에서 맨 처음 배우는 정리 가운데 하나이다.

시작하기 전에

생각해 보기 양변에 제곱근을 취하면 $y' = \pm 2\sqrt{y}$이다. $y = (x-c)^2$을 대입해 보자. 이것이 방정식을 만족하는가? 이보다 더 간단한 해가 있는가?

$y = (x-c)^2$이면 $y' = 2(x-c)$이고 $(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$이다. 따라서 모든 포물선 $y = (x-c)^2$은 모든 x에 대하여 해이다. 그리고 $y = 0$도 해이다. $(0)^2 = 4 \times 0$이기 때문이다. 이 마지막 해를 기억해 두자. 이것이 문제 전체의 열쇠이다.

차근차근 풀기

1단계 한 점을 지나는 해

생각해 보기 포물선 $y = (x-c)^2$ 가운데 (a, b^2)을 지나는 것은 무엇인가?

$(a-c)^2 = b^2$이어야 하므로 $a - c = \pm b$, 즉 $c = a - b$ 또는 $c = a + b$이다. $b \neq 0$이므로 이 둘은 서로 다르고, 다음 두 해를 얻는다.

$$y = (x - a + b)^2 \qquad \text{그리고} \qquad y = (x - a - b)^2. \qquad \blacksquare$$

(빠뜨린 해가 없는지도 확인해야 한다. $y > 0$인 영역에서는 부호가 고정된 채로 $y' = \pm 2\sqrt{y}$이고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{y} = \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \pm 1$이므로 $\sqrt{y} = \pm(x-c)$가 되어 위의 포물선들을 얻는다. 따라서 주어진 점 근처에서, 그리고 y가 양수로 남아 있는 동안에는 이 두 해가 유일한 해이다. 그러나 해가 일단 x축에 닿으면, 3단계에서 보겠지만 영 해(zero solution)와 이어 붙일 수 있고, 그렇게 하면 모든 x에서 정의된 해가 무한히 더 생긴다. 문제에서 말하는 "두 해"는 두 포물선이다.)

2단계 두 점과 공통인 해

원점을 지나는 해는 $y = x^2$($c = 0$인 포물선)이어야 한다. 이 해는 $x = 1$과 $x = -1$에서 높이 1을 지난다. 따라서 $(a_1, 1) = (1, 1)$, $(a_2, 1) = (-1, 1)$로 잡는다.

$(1, 1)$을 지나는 해($a = 1$, $b = \pm 1$)는 $y = x^2$과 $y = (x-2)^2$이다. $(-1, 1)$을 지나는 해는 $y = (x+2)^2$과 $y = x^2$이다. 원점을 지나는 해는 두 경우 모두 같은 곡선 $y = x^2$이다. $\blacksquare$

3단계 해의 족 전체와 공통접선

잠깐, 직접 해 보기 여러 c에 대하여 포물선 $y = (x-c)^2$을 몇 개 그려 보자. 이 모두에 접하는 직선은 무엇인가? 그 직선 자체도 해인가?

모든 포물선 $y = (x-c)^2$은 꼭짓점 $(c, 0)$에서 x축에 접하므로, x축은 이 족 전체의 공통접선(common tangent), 즉 **포락선**(envelope)이다(그림 8.1.1). 그리고 x축 $y = 0$은 그 자체로 미분방정식의 해이다. 이것은 포물선들 가운데 하나가 아니라 별개의 **특이해**(singular solution)이다.

4단계 이것이 중요한 이유

생각해 보기 원점에서 출발해 보자. 원점을 지나는 해는 무엇인가? 한동안 x축을 따라가다가 축을 떠나는 해를 만들 수 있는가?

원점을 지나는 해로는 $y = x^2$과 $y = 0$이 있다. 하지만 사실은 훨씬 더 많다. 각 포물선은 x축과 접하며 만나므로(만나는 점에서 둘 다 기울기가 0이다), 조각들을 매끄럽게 이어 붙일 수 있다. 임의의 $c_1 \le 0 \le c_2$에 대하여

$$y = \begin{cases} (x - c_1)^2 & x < c_1, \\ 0 & c_1 \le x \le c_2, \\ (x - c_2)^2 & x > c_2 \end{cases}$$

은 모든 곳에서 $(y')^2 = 4y$를 만족하는 미분가능한(differentiable) 함수이고, 원점을 지난다. x축 위의 모든 점을 지나는 해는 무한히 많다. 해는 원하는 만큼 $y = 0$에 머물다가 떠날 수 있다. 유일성이 무너지는 곳이 바로 공통접선이다. ■

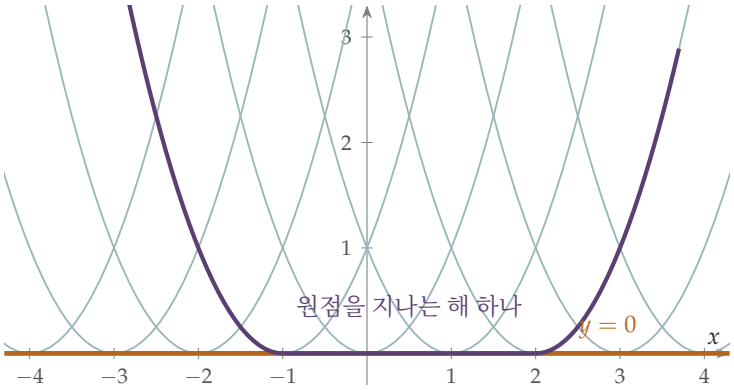


그림 8.1.1 $(y')^2 = 4y$의 해 $y = (x - c)^2$(청록색)은 모두 x축에 접한다. x축은 이들의 포락선이며 그 자체로 해이다(호박색). 조각들을 이어 붙이면 자주색 해와 같은 새로운 해들을 얻는다. 이 해는 포물선을 따라 축까지 내려온 뒤 축을 따라 달리다가 스스로 고른 때에 다시 떠난다. x축 위의 어느 점을 지나는 해든 무한히 많다.

돌아보기

- **간단한 해부터 찾아라.** $y = (x - c)^2$과 $y = 0$을 시도해 본 것만으로 전체 그림이 드러났다.
- **포락선은 특이해를 준다.** 해의 족에 대한 공통접선은 그 족에 속하지 않는 해가 될 수 있다.
- **이어 붙이기.** 두 해가 접하며 만나는 곳에서는 둘을 이어 새로운 미분가능한 해를 만들 수 있다. 비유일성은 이렇게 퍼져 나간다.

숨은 수학

해는 언제 유일한가?

피카르-린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)(1890–1894년 무렵 에밀 피카르(Émile Picard)와 에른스트 린델뢰프(Ernst Lindelöf)가 증명했다)에 따르면, F가 y에 대하여 **립시츠**(Lipschitz)이면, 즉 $|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$를 만족하는 상수 L이 있으면, $y(x_0)=y_0$인 방정식 $y'=F(x,y)$는 x_0 근처에서 해를 정확히 하나 가진다. 대략 말하면, y가 변할 때 F가 무한히 빠르게 변해서는 안 된다는 뜻이다. 우리 방정식은 $y'=\pm 2\sqrt{y}$이고, $\sqrt{y}$는 $y=0$에서 기울기가 무한대이다. 그곳에서 립시츠가 아니며, 바로 그곳에서 유일성이 깨진다. (주세페 페아노(Giuseppe Peano)는 1886년에 F가 연속이기만 하면 해가 **존재**함은 보장되지만 유일함은 보장되지 않는다는 것을 보였다.) 피카르-린델뢰프 정리의 증명에는 Section 2.2의 축약 사상 원리(contraction mapping principle)에 의해 수렴하는 반복법이 쓰인다.

새는 양동이

물리적인 예를 하나 보자. 바닥에 구멍이 난 양동이는 토리첼리(Torricelli)의 법칙에 따라 비워진다. 물의 높이 h는 $h'=-k\sqrt{h}$를 만족한다. 시간을 앞으로 흘려보내면 아무 문제가 없다. 양동이는 비워지고, 빈 채로 남는다. 그러나 시간을 거꾸로 돌려 보자. 빈 양동이를 발견했을 때, 방정식은 그것이 언제 비워졌는지 알려 주지 못한다. 모든 시간에 $h=0$인 해도, 어느 순간까지 가득 차 있다가 빠져나간 해들도 모두 "지금 비어 있음"과 모순되지 않는다. 비유일성은 과거에 관한 정보가 사라졌다는 사실이 수학에 드리운 그림자이다.

노턴의 돔

2003년에 철학자 John Norton은 마찰이 없는 돔을 하나 묘사했다. 그 모양이 특별해서, 꼭대기에 정확히 놓인 공은 $r''=\sqrt{r}$ 꼴의 뉴턴 법칙을 따른다. 한 가지 해는 공이 꼭대기에 영원히 머무르는 것이다. 그러나 다른 해들도 있다. 공이 아무 시간 동안 그곳에 머물다가 아무 원인 없이 저절로 아무 방향으로나 굴러 내려가는 해들이다. 이 예는 지금도 논쟁거리이다. 고전역학은 결국 결정론적(deterministic)인가? 수학적으로 보면 이것은 바로 이 문제에서 본 것과 같은 종류의 비유일성이다.

사고 기술

유일성을 가정하지 마라

해를 하나 찾았다고 그것이 유일한 해임이 보여진 것은 아니다. 다른 해가 있는지 물어라. 특히 방정식에 매끄럽지 않은 함수가 들어 있을 때 그렇다.

대학에서는 존재성과 유일성 정리가 어떤 조건이 필요한지 정확히 알려 준다. 여기서는 영에서 기울기가 무한대인 제곱근 하나만으로도 유일성이 깨졌다.

더 도전하기

1 **두 가지 증가율.** STEP II 2018, 8번 문제 (`step.maths.org/questions/18-s2-q8`)을 풀어 보자. 이 문제는 치환을 이용해 두 성장 방정식을 푼다. 그런 다음 왜 $y = 0$도 같은 초깃값을 갖는 해인지, 그리고 이것이 유일성에 관해 무엇을 말해 주는지 생각해 보자.

2 **새는 양동이.** $h(0) = h_0 > 0$일 때 $h' = -k\sqrt{h}$를 풀어라. 양동이는 언제 비는가? 어떤 T에 대하여 $h(T) = 0$이고 모든 $t \geq T$에 대하여 $h(t) = 0$인 서로 다른 두 해를 써라.

3 **되찾은 유일성.** $y(0) = 0$인 $y' = 2y$의 해는 $y = 0$뿐임을 보여라. (**힌트:** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$를 생각해 보아라.) $2\sqrt{y}$에는 없고 $2y$에는 있는 성질은 무엇인가?

4 **세제곱.** 원점을 지나는 $y' = 3y^{2/3}$의 해를 모두 구하여라.

더 읽을거리

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*** (Academic Press). 존재성과 유일성, 그리고 이 장의 나머지 내용 대부분을 다룬다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*** (CRC Press). 역사 이야기가 가득한 고전이다. 특이해와 포락선을 다룬다.
- **John Norton, "The dome: an unexpectedly simple failure of determinism"**, *Philosophy of Science* 75 (2008). 짧고 읽기 쉽다.

8.2 풀지 않고 범위 구하기

문제

STEP III 2013, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/13-s3-q7`

도입

대부분의 미분방정식(differential equation)은 풀 수 없다. $y'' + y^3 = 0$의 해를 익숙한 함수로 나타내는 공식은 없으며, 소문항 (iii)의 괴물 같은 방정식은 더 말할 것도 없다. 그런데도 해에 대해서는 많은 것을 말할 수 있다. 해가 유계(bounded)로 머문다는 것, 진동(oscillate)한다는 것, 어떤 상태로 안정된다는 것 등이다. 비결은 해와 그 도함수로 만든 양 가운데 절대 증가하지 않는 것을 찾는 것이다. 그러면 해는 그 안에 갇힌다.

물리학에서 그런 양은 대개 **에너지**(*energy*)이다. 그릇 안에서 구르는 공은 처음 높이보다 높이 올라갈 수 없다. 에너지가 보존되거나, 마찰이 있으면 감소하기 때문이다. 이 문제는 같은 추론을 세 방정식에 적용하는데, 마지막 방정식은 "에너지"를 스스로 만들어 내야 하도록 골라져 있다. 1892년 알렉산드르 랴푸노프(Aleksandr Lyapunov)가 고안한 이 방법은 미분방정식 연구에서 가장 중요한 도구 가운데 하나이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 소문항 (i)에서 y를 입자의 위치로, x를 시간으로 생각하자. 그러면 $y'' = -y^3$은 힘이 $-y^3$인 뉴턴(Newton)의 법칙이다. 운동 에너지(kinetic energy)와 위치 에너지(potential energy)는 무엇인가?

운동 에너지는 (질량을 1로 두면) $\frac{1}{2}(y')^2$이고, 힘은 $-V'(y)$이므로 힘 $-y^3$은 위치 에너지 $V(y) = \frac{1}{4}y^4$에서 나온다. 전체 에너지는 $\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{4}y^4$이고, 이는 E의 절반이다. 에너지 보존(conservation of energy)이 말하는 것이 바로 E가 상수라는 사실이다.

차근차근 풀기

1단계 보존

연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2y'y'' + 2y^3y' = 2y'(y'' + y^3) = 0.$$

따라서 E는 상수이고, $x = 0$에서의 값과 같다: $\mathrm{E} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. $(y')^2 \geq 0$이므로 $\frac{1}{2}y^4 \leq \frac{1}{2}$이고, 따라서 $y^4 \leq 1$, 즉 $|y| \leq 1$이다. ■

해는 -1과 1 사이에서 진동하며, (y, y') 평면에서 닫힌곡선 $(y')^2 + \frac{1}{2}y^4 = \frac{1}{2}$를 그린다(그림 8.2.1).

2단계 소산(dissipation)

> **생각해 보기** $\mathrm{E} = (v')^2 + 2\cosh v$를 미분하라. 미분방정식을 이용해 v''를 바꾸어 넣어라. 결과의 부호는 어떠한가?

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2v'v'' + 2\sinh v\, v' = 2v'(v'' + \sinh v) = 2v'(-xv') = -2x(v')^2 \leq 0 \quad \text{단, } x \geq 0.$$

항 xv'은 마찰(friction)처럼 작용하여 에너지를 없앤다. 따라서 $x \geq 0$에서 $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$이다. $x = 0$에서 $\cosh(\ln 3) = \frac{3+\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$이므로 $\mathrm{E}(0) = \frac{10}{3}$이다. 그러므로

$$2\cosh v \leq (v')^2 + 2\cosh v = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad \cosh v(x) \leq \tfrac{5}{3}.$$ ■

3단계 에너지 만들어 내기

소문항 (iii)에는 아무런 힌트가 없다. 증가하지 않는 함수 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$를 찾아야 한다.

> **생각해 보기** $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$이면 $\mathrm{E}' = 2w'w'' + F'(w)w'$이다. 방정식을 이용해 w''를 바꾸어 넣었을 때 $(w')^2$의 배수만 남으려면 $F'(w)$는 무엇이어야 하는가?

$\mathrm{E}' = 2w'\big(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\big)$이 되기를 원하므로 $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$가 필요하다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(w\sinh w) = \sinh w + w\cosh w$이므로 다음과 같이 잡을 수 있다.

$$F(w) = 2w\sinh w + 2\cosh w, \qquad \mathrm{E} = (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w.$$

그러면 방정식을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = -2(5\cosh x - 4\sinh x - 3)(w')^2.$$

잠깐, 직접 해 보기 모든 x에 대하여 $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$임을 보여라. ($e^x$로 나타낸 다음 완전제곱식(perfect square)을 찾아보라.) 그런 다음 논증을 마무리하라.

$5\cosh x - 4\sinh x - 3 = \frac{5}{2}(e^x + e^{-x}) - 2(e^x - e^{-x}) - 3 = \frac{1}{2}e^x - 3 + \frac{9}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\left(e^{x/2} - 3e^{-x/2}\right)^2 \geq 0$이다. 따라서 E는 절대 증가하지 않는다. $x = 0$에서 $\mathrm{E}(0) = \frac{1}{2} + 0 + 2 = \frac{5}{2}$이다. 모든 w에 대하여 $w\sinh w \geq 0$이므로(두 인수의 부호가 같다)

$$2\cosh w \leq (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \cosh w(x) \leq \tfrac{5}{4}. \quad \blacksquare$$

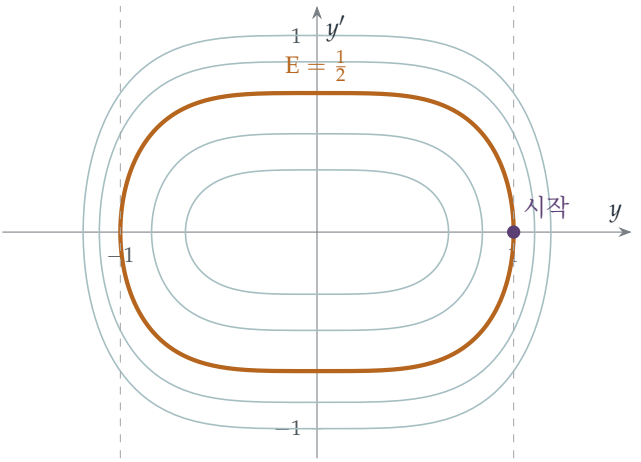


그림 8.2.1 (y, y') 평면에서 에너지 $\mathrm{E} = (y')^2 + \frac{1}{2}y^4$의 등위곡선(level curve). E가 상수이므로, $y = 1, y' = 0$에서 출발하는 소문항 (i)의 해는 영원히 곡선 $\mathrm{E} = \frac{1}{2}$(호박색) 위에 머물고, 따라서 띠 $|y| \leq 1$(점선)을 결코 벗어나지 않는다. y에 대한 공식을 전혀 구하지 않고도 이 사실을 알 수 있다.

돌아보기

- **y'을 곱하라.** 각 소문항에서 E′은 방정식 좌변의 $2y'$배에 남은 항을 더한 것이었다. 그 남은 항이 E가 보존되는지 감소하는지를 결정했다.
- **에너지가 위치를 제한한다.** 운동 에너지 부분 $(y')^2$이 음이 아니므로, E에 대한 한계는 곧 위치 에너지 부분에 대한 한계이고, 따라서 y에 대한 한계이다.
- **숨은 제곱을 찾아라.** 소문항 (iii)의 감쇠 계수(damping coefficient)는 부호가 바뀔 것처럼 보였지만, 실은 모습을 감춘 완전제곱식이었다.

숨은 수학

랴푸노프 함수

1892년 박사 학위 논문에서 랴푸노프는 운동의 **안정성**(*stability*)을 연구했다. 계를 평형(equilibrium)에서 살짝 흐트러뜨리면 다시 돌아오는가, 아니면 멀리 떠나가는가? 그의 "제2방법"은 평형에서 가장 작고 해를 따라 절대 증가하지 않는 함수, 오늘날 **랴푸노프 함수**(*Lyapunov function*)라고 부르는 함수를 찾는 것이었다. 그러면 평형 근처에서 출발한 해는 계속 그 근처에 머문다. 이 방법의 아름다움은 해의 공식이 전혀 필요 없고 미분방정식 자체만 있으면 된다는 데 있으며, 이 문제가 보여 주는 것이 바로 그 점이다. 오늘날 랴푸노프 함수는 항공기 제어 시스템에서 전력망, 생태계에 이르기까지 온갖 것의 안정성을 증명하는 데 쓰인다.

물리학과 공학에서의 에너지

소문항 (i)은 비선형 진동자(nonlinear oscillator)이다. 용수철과 비슷하지만, 복원력(restoring force)이 변위(displacement)의 세제곱에 비례한다. 단순 조화 진동자(simple harmonic oscillator)와 달리 주기(period)가 진폭(amplitude)에 따라 달라지지만(진동이 클수록 빠르다), 에너지 보존 때문에 여전히 갇혀 있다. 소문항 (ii)는 시간에 따라 커지는 감쇠(damping)를 더하며, 에너지가 빠져나간다. 공학에서는 구조물이 스스로 흔들려 부서지지 않는다는 것, 제어 시스템이 통제를 벗어나 진동하지 않는다는 것을 보이는 데 에너지 방법(energy method)이 쓰인다. 편미분방정식(partial differential equation) 이론에서는 이런 종류의 "에너지 추정(energy estimate)"이 해가 존재하고 잘 행동함을 증명하는 주된 도구이다. 유체 흐름 방정식에 관한 문제들, 그 가운데 밀레니엄 상 문제(Millennium Prize Problems)의 하나인 나비에–스토크스 문제(Navier–Stokes problem)도 결국 그러한 한계를 찾을 수 있느냐로 귀결된다.

사고 기술

증가할 수 없는 양을 찾아라

방정식을 풀 수 없다면, 해로 만든 양 가운데 도함수의 부호가 일정한 것을 찾아라. 그 양이 해의 범위를 제한해 줄 것이다.

이 탐색은 물리학("에너지는 무엇인가?")과 대수("도함수가 간단히 정리되려면 무엇을 더해야 하는가?")의 안내를 받는다. 소문항 (iii)은 기댈 물리적 직관이 없을 때

대수적인 길을 보여 준다.

더 도전하기

1 **단진동.** $y(0) = A$, $y'(0) = 0$인 $y'' + y = 0$에 대하여 보존되는 에너지를 구하고 $|y| \le A$임을 이끌어 내라. 정확한 해와 비교하여 확인하라.

2 **진자.** 진자(pendulum)의 각 θ는 (적당한 단위에서) $\theta'' + \sin\theta = 0$을 만족한다. $(\theta')^2 - 2\cos\theta$가 상수임을 보여라. 진자가 $|\theta_0| \le \pi$인 각 θ_0에서 정지 상태로 출발하면 $|\theta|$가 결코 $|\theta_0|$를 넘지 않음을 보여라. $|\theta_0| > \pi$이면 무엇이 잘못되는가?

3 **감쇠.** $k > 0$일 때 $y'' + 2ky' + y = 0$에 대하여 $(y')^2 + y^2$이 감소함을 보여라. 이 값은 반드시 0으로 수렴하는가?

4 **탈출.** $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$인 $y'' - y^3 = 0$에 대하여 보존량(conserved quantity)을 구하고, 그 보존량으로는 y를 유계로 묶을 수 없음을 보여라. 무엇이 잘못되는가?

더 읽을거리

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 제 6장과 제 7장에서 위상 평면(phase plane), 보존계(conservative system), 랴푸노프 함수를 다룬다.
- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*** (Oxford University Press). 에너지 방법의 예가 많이 실린 표준 학부 교재이다.
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems*** (Basic Books). 나비에–스토크스 문제에 대한 이해하기 쉬운 설명이 실려 있다.

8.3 개체군 수확하기

문제

STEP II 1995, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/95-s2-q8`

도입

먹이가 무한한 개체군은 지수적으로(exponentially) 증가한다. 하지만 실제 개체군은 공간이 부족해진다. 개체군이 환경이 감당할 수 있는 크기, 곧 **수용력**(*carrying capacity*)에 가까워질수록 증가가 느려진다. 이를 나타내는 가장 단순한 모형인 **로지스틱 방정식**(*logistic equation*)이 문제의 앞부분에 나오며, 이 방정식은 배양 접시 속 세균에서 새로운 기술의 확산에 이르기까지 온갖 현상을 설명한다.

문제의 뒷부분은 실용적으로 매우 중요한 질문을 던진다. 개체군을 일정한 비율로 수확(harvest)하면 어떻게 될까? 수확량이 어떤 문턱값보다 작으면 개체군은 더 낮은 새로운 평형(equilibrium)에 맞추어 자리를 잡는다. 그러나 수확량을 그 문턱값보다 조금이라도 늘리면 평형이 사라지고 개체군은 0으로 붕괴한다. 이것이 어장 붕괴 뒤에 숨은 수학이며, 어획 할당량이 존재하는 이유이다.

시작하기 전에

생각해 보기 무엇이든 풀기 전에, 증가율 $(2K - x)x$를 x의 함수(function)로 보고 그래프를 그려 보자. 어디에서 0이 되는가? 어디에서 양수인가? 이로부터 x가 어떻게 움직일지 알 수 있는가?

증가율은 $x = 0$과 $x = 2K$에서 0이고, 그 사이에서는 양수이며, $2K$보다 큰 곳에서는 음수이다. 따라서 0과 $2K$ 사이에서 출발한 개체군은 $2K$를 향해 증가하고, $2K$보다 큰 값에서 출발한 개체군은 그 값을 향해 감소한다. 수용력은 $2K$이고, 증가가 가장 빠른 곳은 $x = K$이며 이때 증가율은 K^2이다. 방정식을 풀지 않고도 장기적인 거동을 예측할 수 있다.

차근차근 풀기

1단계 로지스틱 방정식 풀기

생각해 보기 변수를 분리하자(separation of variables): $\displaystyle\int \frac{dx}{(2K-x)x} = \int dt$. 좌변을 부분분수(partial fractions)로 나누어 보자.

$\dfrac{1}{(2K-x)x} = \dfrac{1}{2K}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2K-x}\right)$이므로

$$\frac{1}{2K}\ln\frac{x}{2K-x} = t + C.$$

$t=0$일 때 $x=K$이므로 $\ln 1 = 0$이고 $C=0$이다. 그러면 $\frac{x}{2K-x} = e^{2Kt}$이고, 따라서

$$x = \frac{2Ke^{2Kt}}{1+e^{2Kt}} = \frac{2K}{1+e^{-2Kt}} = K + K\frac{1-e^{-2Kt}}{1+e^{-2Kt}}. \qquad \blacksquare$$

이 분수는 $\tanh(Kt)$이므로 $x = K + K\tanh Kt$이다. 이는 K에서 출발하여 $2K$를 향해 올라가는 S자 모양의 곡선이다. $t\to\infty$일 때 $e^{-2Kt}\to 0$이고 $x\to 2K$이다.

2단계 수확

세균을 비율 L로 제거하면

$$\frac{dx}{dt} = (2K-x)x - L.$$

생각해 보기 $(2K-x)x-L$을 완전제곱식으로 고쳐 보자(completing the square). 그 영점은 어디인가?

$(2K-x)x - L = K^2 - L - (x-K)^2 = \alpha^2 - (x-K)^2 = \big(\alpha-(x-K)\big)\big(\alpha+(x-K)\big)$이다. 평형점은 $x = K\pm\alpha$이다.

잠깐, 직접 해 보기 이제 $y = x - K + \alpha$로 치환(substitution)하자. y는 어떤 방정식을 만족하는가? 원래의 로지스틱 방정식과 비교해 보자.

$y = x-K+\alpha$로 두면 $x - K = y - \alpha$이므로 $\alpha + (x-K) = y$이고 $\alpha - (x-K) = 2\alpha - y$이다. 따라서

$$\frac{dy}{dt} = (2\alpha - y)y,$$

이는 K를 α로 바꾼 로지스틱 방정식 그대로이다. 처음 값은 $y(0) = K - K + \alpha = \alpha$로, 첫 부분의 $x(0)=K$와 정확히 같은 꼴이다. 그러므로 1단계에 의해(K 대신 α를 넣으면) $y(t) = \alpha + \alpha\tanh\alpha t \to 2\alpha$이고, 따라서

$$x(t) = K + \alpha\tanh\alpha t \to K+\alpha. \qquad \blacksquare$$

돌아보기

- **정성적 분석이 먼저이다.** 증가율의 부호만으로, 아무것도 풀기 전에 장기적인 거동을 예측할 수 있었다.
- **완전제곱식이 평형점을 드러낸다.** 수확이 있는 방정식의 평형점은 $K \pm \alpha$였다.
- **치환으로 새로운 문제를 이미 푼 문제로 바꾼다.** 변수를 평행이동하자 수확이 있는 방정식이 이미 풀어 본 로지스틱 방정식으로 바뀌었다.

숨은 수학

티핑 포인트

수확이 있는 방정식에는 두 평형점 $K + \alpha$와 $K - \alpha$가 있다. 위쪽 평형점은 **안정**(*stable*)하다. 개체군이 그보다 약간 크거나 작아도 다시 그 값으로 돌아온다. 아래쪽 평형점은 **불안정**(*unstable*)하다. $K - \alpha$보다 조금이라도 작은 개체군은 줄어들어 멸종한다. 수확률 L이 커지면 $\alpha = \sqrt{K^2 - L}$이 작아지고 두 평형점은 서로 가까워진다. $L = K^2$에서 두 평형점은 하나로 합쳐지고, $L > K^2$이면 평형점이 전혀 없어 모든 개체군이 붕괴한다(그림 8.3.1). 이것이 **안장-마디 분기**(*saddle-node bifurcation*)로, 가장 단순한 종류의 **티핑 포인트**(*tipping point*)이다. 무서운 점은 이를 미리 알려 주는 극적인 징후가 전혀 없다는 것이다. L이 K^2에 가까워지는 동안 평형 개체군은 완만하게 줄어들 뿐이다가, 갑자기 평형이 사라진다. 그 뒤에 수확량을 줄여도 소용이 없을 수 있는데, 개체군이 이미 불안정한 문턱값 아래로 내려갔을 수 있기 때문이다.

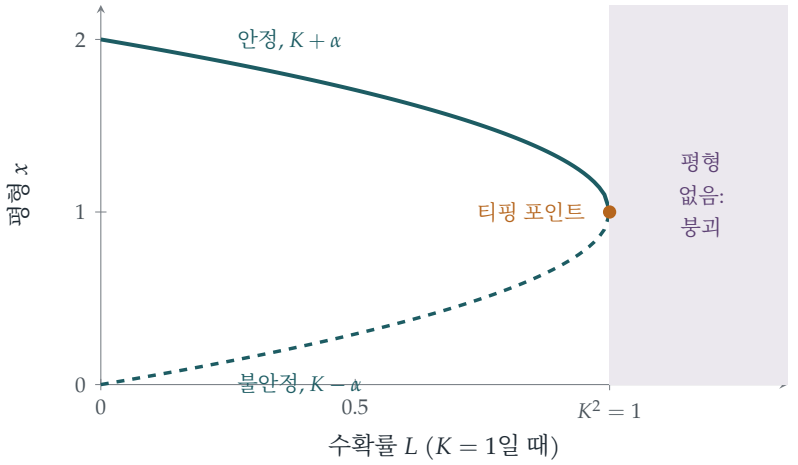


그림 8.3.1 $K=1$일 때 수확률 L에 따른 평형 개체군. 안정 평형점(실선)과 불안정한 문턱값(점선)은 L이 커질수록 서로 가까워지다가 $L=K^2$에서 만난다. 그보다 크면 평형점이 존재하지 않고, 개체군은 크기와 관계없이 붕괴한다.

최대 지속 가능 수확량

개체군이 지속적으로 감당할 수 있는 가장 큰 수확량은 얼마일까? 그것은 증가율 $(2K-x)x$의 최댓값인 $L=K^2$이며, 개체군을 수용력의 절반인 K로 유지할 때 얻어진다. 수산학은 20세기 중반에 이 "최대 지속 가능 수확량(maximum sustainable yield)"을 관리 목표로 채택했다. 그러나 정확히 최댓값만큼 수확하면 계는 정확히 티핑 포인트에 놓이게 되고, 그곳에서는 K를 아주 조금만 과대평가하거나 한 해만 흉년이 들어도 붕괴가 일어난다. 뉴펀들랜드(Newfoundland) 앞바다의 그랜드뱅크스(Grand Banks) 대구 어장은 500년 동안 세계에서 가장 풍요로운 어장 가운데 하나였지만 1990년대 초에 붕괴했고, 1992년 캐나다 정부는 조업 중단 조치(moratorium)를 내려 수만 명이 일자리를 잃었다. 어족 자원은 아직도 완전히 회복되지 않았다.

다른 곳의 로지스틱 성장

로지스틱 방정식은 1838년 페르휠스트(Pierre-François Verhulst)가 인구를 모형화하기 위해 제안했다. 같은 S자 곡선이 초기 단계의 전염병 확산, 신기술의 보급, 자기촉매 화학 반응, 종양의 성장을 설명한다. 이산 시간 버전인 로지스틱 **사상**(*map*)은 매우 다르게 행동한다. Section 8.7에서 보겠지만, 이 사상은 카오스적(chaotic)일 수 있다.

사고 기술

평형점과 그 안정성

방정식 $x' = f(x)$에서 평형점은 f의 영점이며, 평형점 사이에서 f의 부호를 보면 해가 어느 쪽으로 움직이는지 알 수 있다.

f가 양수에서 음수로 바뀌는 평형점은 안정하고, 음수에서 양수로 바뀌는 평형점은 불안정하다. f의 그래프를 그리면 아무것도 풀지 않고도 중요한 질문에 답할 수 있는 경우가 많다.

더 도전하기

1 **낮은 곳에서 출발하기.** 수확이 있고 $K^2 > L$일 때, $x(0) < K - \alpha$이면 개체군이 유한한 시간 안에 0에 도달함을 보여라. (힌트: $y(0) < 0$이면 y는 어떻게 되는가?)

2 **남획.** $L > K^2$이면 $\beta = \sqrt{L - K^2}$로 두자. $x(0) = 2K$일 때 $x' = -(x - K)^2 - \beta^2$을 풀고, 개체군이 0에 도달하는 시각을 구하여라.

3 **비례 수확.** 대신 개체군의 일정한 비율을 제거한다고 하자: $x' = (2K - x)x - hx$. 평형점을 구하고, 모든 $h < 2K$에 대하여 개체군이 살아남음을 보여라. 이 정책이 더 안전한 이유는 무엇인가?

4 **도달 시간.** 수확이 없는 경우, 개체군이 $\frac{3}{2}K$에 도달하는 시각을 구하여라.

더 읽을거리

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 비선형 동역학과 카오스. 3장은 분기를 다루며, 이 수확 모형이 연습문제로 나온다.
- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology*** (Springer). 학부생을 위한 개체군 모형.
- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World*** (Penguin). 대구 어업의 역사와 그 붕괴.

8.4 원으로 감겨드는 나선

문제

STEP III 2015, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/15-s3-q8`

도입

자연의 많은 계는 처음 상태와 상관없이 일정한 리듬에 자리 잡는다. 뛰는 심장, 우는 귀뚜라미, 고르게 활을 긋는 바이올린 현, 포식자와 피식자의 개체 수 순환이 그렇다. 이들을 조금 흔들어도 다시 같은 리듬으로 돌아온다. 미분방정식(differential equation)의 언어로 말하면, 이런 계의 해는 하나의 닫힌 고리에 다가가는데, 이 고리를 **극한 순환**(*limit cycle*)이라고 한다.

이 문제는 극한 순환을 하나 직접 만든다. 방정식은 x와 y로는 손댈 수 없어 보이지만, 극좌표(polar coordinates)로 바꾸면 풀 수 있는 꼴로 단순해지고, 해는 안쪽과 바깥쪽 모두에서 단위원으로 감겨 들어가는 나선임이 드러난다. 핵심이 되는 수, 즉 문제의 대칭성에 맞는 좌표를 고르는 일은 이 책 전체에서 거듭 써 온 방법이다.

시작하기 전에

생각해 보기 두 방정식에는 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$와 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$라는 조합이 숨어 있다. 이들을 극좌표로 나타내면 무엇인가?

$r^2 = x^2 + y^2$이므로 미분하면 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$이다. 또 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$이다(이것은 Section 4.9의 넓이 공식이다). 이 두 항등식 덕분에 변수 변환이 거의 수월해진다. 방정식을 이 조합들만 나타나도록 다시 쓰면 된다.

차근차근 풀기

1단계 극좌표로 본 소문항 (i)

방정식을 $(y+x)\,dy-(y-x)\,dx=0$으로 쓰고 정리하면 다음과 같다.

$$(x\,dx+y\,dy)+(x\,dy-y\,dx)=0.$$

생각해 보기 전개하여 이 정리가 맞는지 확인하라. 그다음 위의 두 항등식을 써라.

$(y+x)\,dy-(y-x)\,dx = y\,dy+x\,dy-y\,dx+x\,dx$이고, 이는 위의 식과 같다. 극좌표로 쓰면 $r\,dr+r^2\,d\theta=0$이며, ($r>0$에서) $r^2\,d\theta$로 나누면 다음을 얻는다.

$$\frac{dr}{d\theta}+r=0. \qquad \blacksquare$$

해는 $r=Ce^{-\theta}$이다. 이는 로그 나선(*logarithmic spiral*)으로, θ가 증가하면 원점을 향해 감겨 들어가고 θ가 감소하면 무한히 멀어진다.

2단계 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 새 방정식은 옛 방정식에 $x^2+y^2=r^2$이 들어간 항을 더한 것이다. 같은 방법으로 다시 쓰고 $\frac{dr}{d\theta}$를 구하라.

방정식은 $(y+x-xr^2)\,dy-(y-x-yr^2)\,dx=0$, 즉

$$\big[(y+x)\,dy-(y-x)\,dx\big]-r^2\big(x\,dy-y\,dx\big)=0.$$

첫째 괄호는 앞에서처럼 $r\,dr+r^2\,d\theta$이고, 둘째 괄호는 $r^2\,d\theta$이다. 따라서 $r\,dr+r^2(1-r^2)\,d\theta=0$이고, 다음을 얻는다.

$$\frac{dr}{d\theta}=r^3-r.$$

생각해 보기 이 식은 r에 대해 선형(linear)이 아니지만, $u=r^{-2}$에 대해서는 선형이 된다. u는 어떤 방정식을 만족하는가?

$u=r^{-2}$로 두면 $\frac{du}{d\theta}=-2r^{-3}\frac{dr}{d\theta}=-2r^{-3}(r^3-r)=-2+2u$이다. 따라서 $\frac{du}{d\theta}-2u=-2$이고, 그 해는 $u=1+Ae^{2\theta}$이다. 그러므로

$$r^2=\frac{1}{1+Ae^{2\theta}}. \qquad \blacksquare$$

3단계 세 종류의 해

- $A = 0$: $r = 1$. 단위원이 해이다.
- $A > 0$: 항상 $r < 1$이다. $\theta \to -\infty$일 때 $r \to 1$이고, $\theta \to +\infty$일 때 $r \to 0$이다. 곡선은 원과 원점 사이를 나선을 그리며 돈다.
- $A < 0$: $r > 1$이고, 이 공식은 $1 + Ae^{2\theta} > 0$, 즉 $\theta < \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{A}\right)$인 동안에만 뜻이 있다. $\theta \to -\infty$일 때 $r \to 1$이고, θ가 그 경계에 다가가면 $r \to \infty$이다. 곡선은 원과 무한 사이를 나선을 그리며 돈다.

따라서 모든 해곡선은 $\theta \to -\infty$일 때 안쪽 또는 바깥쪽에서 단위원에 다가간다(그림 8.4.1).

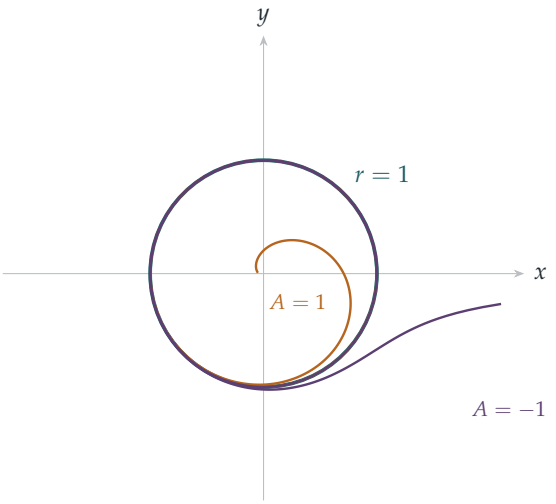


그림 8.4.1 소문항 (ii)의 해. 단위원(청록색)은 해이다. $A = 1$인 해(호박색)는 원의 안쪽에 있으며, ($\theta \to -\infty$일 때의) 원에서 출발해 원점을 향해 나선을 그린다. $A = -1$인 해(자두색)는 원의 바깥쪽에 있으며, 원에서 출발해 무한히 멀어지는 나선을 그린다. 반대 방향(θ가 감소하는 방향)으로 보면 모든 해가 원으로 감겨 들어간다. 이것이 극한 순환이다.

돌아보기

- **대칭성을 이용하라.** 방정식은 모든 방향을 똑같이 다루었고, 극좌표는 그 사실을 눈에 보이게 해 주었다.
- **표준적인 조합을 알아보라.** $x\,dx + y\,dy = r\,dr$와 $x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$가 일의 대부분을 해냈다.
- **치환으로 선형화한다.** 비선형 방정식 $r' = r^3 - r$은 $u = r^{-2}$에 대해 선형이 되었다(베르누이 방정식(*Bernoulli equation*)).

숨은 수학

극한 순환

앙리 푸앵카레(Henri Poincaré)는 1880년대에 평면 위 미분방정식의 정성적 거동을 연구하면서 극한 순환을 도입했다. 문제의 방정식을 평면 위를 움직이는 점의 경로를 나타내는 것으로 해석해 보자. 단위원은 고립된 닫힌 궤도(orbit)이고, 그 근처의 모든 궤도는 (시간의 방향에 따라) 단위원을 향해 감겨 들어가거나 단위원에서 멀어진다. 1926년 네덜란드의 공학자 발타사르 판데르폴(Balthasar van der Pol)은 진공관이 들어간 전기 회로에서 극한 순환을 발견했고, 비슷한 방정식이 심장 박동을 묘사한다고 제안했다. 극한 순환은 스스로 유지되는 안정된 리듬을 가진 모든 계의 모형이 된다. 일주기 생체 시계, 신경 자극, 포식자와 피식자 개체 수의 순환이 그 예이다.

평면에는 혼돈이 없다

푸앵카레–벤딕손 정리(*Poincaré–Bendixson theorem*)에 따르면, 평면 위의 매끄러운 계에서 유계인 영역에 머무르면서 평형점(equilibrium)에 다가가지 않는 궤도는 반드시 닫힌 궤도에 다가간다. 따라서 2차원에서 장기적인 거동은 평형점과 순환에 한정된다. 궤도끼리 교차할 수 없으므로 혼돈(chaos)이 생길 여지가 없다. 혼돈에는 적어도 3차원이 필요한데, 이는 1963년 에드워드 로렌즈(Edward Lorenz)가 대류를 나타내는 유명한 세 변수 모형("나비")으로 발견한 사실이다. 이산 시간에서는 Section 8.7에서 보듯이 1차원에서도 혼돈이 가능하다.

풀리지 않은 문제

1900년 다비트 힐베르트(David Hilbert)는 그의 열여섯 번째 문제의 일부로 다음을 물었다. P와 Q가 n차 다항식일 때, 계 $x' = P(x,y)$, $y' = Q(x,y)$가 가질 수 있는 극한 순환의 최대 개수는 얼마인가? 이는 $n = 2$일 때조차 아직 알려져 있지 않다. 이 경우 극한 순환이 네 개인 계는 알려져 있지만, 그보다 많을 수 있는지는 모른다. 이것은 힐베르트의 문제 가운데 완전히 미해결로 남아 있는 아주 드문 문제 중 하나이다.

사고 기술

대칭성에 맞게 좌표를 바꾸어라

문제가 회전 대칭을 가지면 극좌표를 쓰고, 다른 대칭을 가지면 그 대칭을 존중하는 좌표를 찾아라.

알맞은 좌표는 손댈 수 없던 방정식을 변수분리형(separable) 방정식으로 바꾸었고, 해의 기하(원과 나선)를 뚜렷하게 보여 주었다.

더 도전하기

1 **나선.** 소문항 (i)의 해 $r = e^{-\theta}$에 대하여, 이 곡선이 원점에서 나가는 모든 반직선과 같은 각 45°로 만남을 보여라. (로그 나선을 등각 나선(equiangular spiral)이라고 부르는 이유가 이것이다.)

2 **극좌표 항등식.** $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$와 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$를 증명하라.

3 **시간에 따른 계.** 계 $\dot r = r(1 - r^2)$, $\dot\theta = 1$을 생각하자. $r(0) > 0$인 모든 해가 $t \to \infty$일 때 단위원에 다가감을 보여라. 이 계를 x와 y로 나타내라.

4 **두 개의 순환.** $r = 1$과 $r = 2$에 극한 순환을 두 개 가지며, 하나는 끌어당기고 하나는 밀어내는, $\dot r = f(r)$, $\dot\theta = 1$ 꼴의 계를 찾아라.

더 읽을거리

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 7장에서 극한 순환과 푸앵카레–벤딕손 정리를 다룬다.
- **Steven Strogatz, *Sync*** (Hyperion). 자연의 리듬과 동기화를 다룬 교양서이다.
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science*** (Penguin). 로렌즈와 혼돈의 발견 이야기이다.

8.5 그레이하운드를 쫓는 그레이하운드

문제

STEP III 1988, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/88-s3-q10`

도입

정사각형 모양 들판의 네 꼭짓점에 개 네 마리가 서 있다. 각 개는 자기 왼쪽에 있는 개를 쫓아간다. 개들은 어디에서 만나고, 만나기까지 시간은 얼마나 걸리며, 어떤 경로를 따라갈까? 그 경로는 중심 둘레를 무한히 많이 감아 도는 아름다운 나선이다. 그런데도 각 개가 달리는 거리는 유한하며, 정확히 정사각형 한 변의 길이와 같다.

이것은 **추적 문제**(pursuit problem)로, 1732년 피에르 부게(Pierre Bouguer)가 해적선을 쫓는 배를 두고 처음 연구한 유형의 문제이다. 이 문제를 풀 수 있게 해 주는 비결은 대칭(symmetry)이다. 한 마리의 개에게 일어나는 일은 모든 개에게 똑같이 일어나므로, 네 마리 개는 언제나 정사각형을 이룬다. 이 점만 알아차리면 미분방정식(differential equation)은 거의 저절로 세워진다.

시작하기 전에

생각해 보기 대칭성에 따르면, 네 마리 개는 매 순간 어떤 도형을 이루는가? 그 도형의 중심은 어디인가?

이 상황은 정사각형의 중심에 대한 4분의 1 회전($A \to B \to C \to D \to A$로 옮기는 회전)으로 바뀌지 않으므로, 개들은 항상 같은 중심 O를 갖는 정사각형을 이룬다. 정사각형은 회전하면서 줄어들지만 계속 정사각형으로 남는다. 특히 A와 B는 항상 O로부터 같은 거리 r에 있고, OB는 항상 OA보다 4분의 1 회전만큼 앞서 있다.

차근차근 풀기

1단계 운동 방향

생각해 보기 A는 B를 향해 달린다. 삼각형 OAB에서 AB가 AO(중심을 향하는 방향)와 이루는 각은 얼마인가?

삼각형 OAB는 $OA = OB$이고 O에서의 각이 직각이므로, 나머지 두 각은 45°이다. 따라서 크기가 v인 A의 속도는 중심을 향하는 동경 방향과 45°를 이루며, B 쪽으로, 즉 θ가 증가하는 방향으로 기울어 있다(B가 A로부터 반시계 방향에 있도록 각을 정한 경우).

2단계 미분방정식

생각해 보기 A의 속도를 동경 성분과 횡 성분으로 나누어 보자. 극좌표(polar coordinates)에서 동경 방향 속도(radial velocity)는 $\dot{r}$이고 횡 방향 속도(transverse velocity)는 $r\dot{\theta}$이다.

(안쪽으로 향하는) 동경 성분은 $v\cos 45^\circ$이고 횡 성분은 $v\sin 45^\circ$이므로

$$\dot{r} = -\frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad r\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

두 식을 나누면 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -r$이므로 $r = \lambda e^{-\theta}$이다. 여기서 처음에 $\theta = 0$이라면 λ는 중심으로부터의 처음 거리이다. ■

3단계 개 n마리

잠깐, 직접 해 보기 정n각형에서 삼각형 OAB의 O에서의 각은 얼마인가? AB가 AO와 이루는 각은 얼마인가? 2단계를 반복해 보자.

O에서의 각은 $\frac{2\pi}{n}$이므로, 크기가 같은 두 밑각은 $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$이다. 속도는 안쪽을 향하는 반지름과 이 각을 이루므로

$$\dot{r} = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot{\theta} = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

따라서 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\dfrac{\pi}{n}$이고,

$$r = \lambda e^{-\theta\tan(\pi/n)}. \qquad ■$$

$n = 4$일 때 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$이므로 정사각형의 경우가 다시 얻어진다.

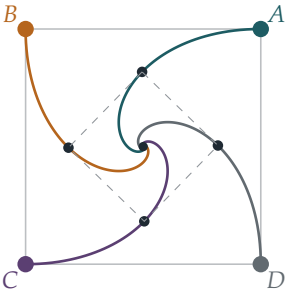


그림 8.5.1 정사각형의 꼭짓점에서 출발하여 서로를 쫓는 개 네 마리. 각 개는 (자신의 출발 방향을 기준으로) 로그 나선 $r = \lambda e^{-\theta}$를 따라가며 중심 둘레를 무한히 감아 돈다. 매 순간 개들은 정사각형(점선, 어느 한 중간 시각의 모습)을 이루며, 이 정사각형은 회전하고 줄어들다가 중심에서 만난다.

돌아보기

- **대칭은 여러 물체를 하나로 줄여 준다.** 배치가 계속 정사각형으로 유지되므로, 서로 영향을 주고받는 네 마리 개가 간단한 규칙을 따르는 하나의 입자로 바뀌었다.
- **중심 둘레의 운동에는 극좌표를.** 속도의 동경 성분과 횡 성분 $\dot{r}$과 $r\dot{\theta}$로부터 곧바로 방정식을 얻었다.
- **나누어서 시간을 소거하라.** 비 $\dot{r}/\dot{\theta}$를 이용하면 각 점에 언제 도달하는지 몰라도 경로의 모양을 알 수 있었다.

숨은 수학

무한히 많은 회전, 유한한 거리

동경 방향 속력 $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$은 일정하므로, 개들은 시간 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ 뒤에 중심에 도달하고, 각자 거리 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$를 달린다. 한 변의 길이가 s인 정n각형에서는 $r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$이므로, 각 개가 달리는 거리는

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

이다. 개가 네 마리일 때 이 값은 정확히 s이다. 즉 각 개는 정확히 한 변의 길이만큼 달린다. (이것을 깔끔하게 보는 방법이 있다. B의 속도는 항상 AB에 수직이므로 거리 AB를 바꾸지 않는다. 오직 AB를 따라 곧장 속력 v로 움직이는 A의 운동만이 간격을 좁히며, 처음 간격은 s이다.) 개가 세 마리일 때 거리는 $\frac{2}{3}s$이고, 여섯 마리일 때는 $2s$이다. 그런데도 모든 경우에 나선은 중심 둘레를 무한히 많이 감아 도는데, $r \to 0$일 때 $\theta \to \infty$이기 때문이다.

길이가 유한하면서 무한히 많이 회전하는 곡선은 역설이 아니다. 회전이 충분히 빠르게 작아지기 때문이다.

로그 나선

곡선 $r = \lambda e^{-k\theta}$를 **로그 나선**(logarithmic spiral) 또는 **등각 나선**(equiangular spiral)이라 한다. 이 곡선은 중심에서 뻗어 나가는 모든 반직선과 같은 각도로 만난다. 모양을 유지하는 성장이 이 곡선을 만들어 내므로, 앵무조개의 껍데기나 일부 은하의 나선팔처럼 자연에서도 나타난다. 야코프 베르누이(Jacob Bernoulli)는 이 곡선에 너무나 매료되어, 자신의 묘비에 *Eadem mutata resurgo*("변하여도 나는 같은 모습으로 다시 일어나리라")라는 문구와 함께 이 곡선을 새겨 달라고 부탁했다. 이 문구는 로그 나선이 어떤 배율에서 보아도 똑같아 보인다는 사실을 가리킨다. 그러나 석공은 그 대신 아르키메데스 나선(Archimedean spiral)을 새겼다.

실제 세계의 추적

항상 목표물을 곧장 향하는 "순수 추적"(pure pursuit)은 미사일이나 포식자에게 가장 단순한 유도 법칙이다. 하지만 최선은 아니다. 목표물이 **앞으로** 있을 곳을 향하는 방식("비례 항법"(proportional navigation))이 더 효율적이며, 현대의 미사일과 잠자리, 매 같은 일부 포식자가 실제로 쓰는 방식이 바로 이것이다. 추적과 회피의 수학은 20세기에 **미분 게임**(differential games)이라는 이름으로 독자적인 분야가 되었다.

사고 기술

대칭을 활용하여 다체 문제를 단순화하기

계가 대칭적이고 규칙이 그 대칭을 존중한다면, 대칭은 모든 시간 동안 유지되며 계의 한 부분만 따라가면 된다.

이 아이디어는 역학과 동역학의 많은 문제를 해결해 준다. 이는 대칭과 보존 사이의 깊은 관계를 보여 주는 간단한 예이다.

더 도전하기

1 **깔끔한 논증.** 개 네 마리 문제에서 거리 AB가 정확히 비율 v로 줄어드는 이유를 꼼꼼히 설명하고, 이로부터 개들이 시간 s/v 뒤에 만난다는 것을 유도하여라.

2 **개 세 마리.** 개 세 마리가 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 꼭짓점에서 출발한다. 각 경로의 방정식, 만날 때까지 걸리는 시간, 각 개가 달리는 거리를 구하여라.

3 **몇 바퀴일까?** 중심에서 100 m 떨어진 곳에서 출발한 개 네 마리는 한 바퀴를 완전히 돈 뒤 중심에 얼마나 가까워지는가? 몇 바퀴를 완전히 돌아야 중심으로부터 1 mm 이내에 들어오는가?

4 **개 두 마리.** $n = 2$(서로 마주 보는 개 두 마리)일 때는 어떻게 되는가? 공식이 여전히 의미가 있는가?

더 읽을거리

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*** (Princeton University Press). 추적과 회피의 수학. 부게에서 미사일까지, 추적 곡선에 관한 모든 것을 다룬다.
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number*** (Princeton University Press). 수 e의 이야기. 로그 나선과 베르누이의 묘비 이야기가 실려 있다.
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*** (Cambridge University Press). 성장과 형태에 관하여. 나선 성장을 포함하여 자연 속의 수학을 다룬 고전이다.

8.6 양자 진동자

문제

STEP III 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/88-s3-q7`

도입

용수철에 매달린 물체는 원하는 어떤 에너지로든 진동할 수 있다. 조금 당겼다 놓아도 되고 많이 당겼다 놓아도 된다. 그런데 1900년에 막스 플랑크(Max Planck)는 뜨거운 물체가 내는 빛의 색을 설명하려면 진동하는 원자가 일정한 크기의 계단 간격으로 떨어진 특정한 에너지만 가질 수 있어야 한다는 사실을 발견했다. 원자 규모에서 에너지는 **양자**(*quanta*) 단위로 주어진다. 그로부터 25년 뒤, 양자역학(quantum mechanics)이 그 이유를 설명했다.

이 문제에는 바로 그 설명이 담겨 있다. 문제의 미분방정식(differential equation)은 단위를 바꾸고 나면 용수철과 같은 퍼텐셜(potential) 안에 있는 양자 입자에 대한 슈뢰딩거 방정식(Schrödinger equation), 곧 **양자 조화 진동자**(*quantum harmonic oscillator*)의 방정식이 된다. 이 방정식은 특별한 에너지 값에서만 잘 행동하는 해, 즉 무한대에서 사라지는 해를 가진다. 이 에너지 값들은 $n = 0, 1, 2, \ldots$로 번호가 매겨지며 같은 간격으로 늘어서 있다. 또한 서로 다른 n에 대한 해들은 **직교**(*orthogonal*)한다. 즉 두 해의 곱의 적분이 0이며, 이는 푸리에 급수(Fourier series)에서 $\sin mx$와 $\sin nx$가 그러한 것과 똑같다. 양자 진동자는 분자, 고체, 빛의 물리학의 출발점이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $e^{-\lambda x^2}$ 같은 함수가 왜 그럴듯한 추측일까? $x \to \pm\infty$일 때 $e^{-\lambda x^2}$와 그 도함수는 어떻게 되는가?

$|x|$가 클 때 방정식은 $y'' \approx \omega^2 x^2 y$가 지배하며, 가우스 함수(Gaussian) $e^{-\lambda x^2}$는 큰 x에서 $y'' \approx 4\lambda^2 x^2 y$를 만족하므로 $4\lambda^2 = \omega^2$이면 서로 맞아떨어진다. $\lambda > 0$이면 가우스 함수

와 그 모든 도함수는 x의 어떤 거듭제곱보다도 빠르게 0으로 감소한다. 따라서 경계 조건(boundary conditions)은 저절로 만족되고, 해야 할 일은 방정식을 맞추는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 바닥 상태

> **생각해 보기** $y_0 = e^{-\lambda x^2}$를 두 번 미분하여 $n = 0$인 방정식에 대입하고, x^2의 계수와 상수항을 비교하라.

$y_0' = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$이고 $y_0'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)e^{-\lambda x^2}$이다. $n = 0$인 방정식이 성립하려면 모든 x에 대하여

$$4\lambda^2 x^2 - 2\lambda - \omega^2 x^2 = -\omega$$

이어야 한다. 계수를 비교하면 $4\lambda^2 = \omega^2$이고 $2\lambda = \omega$이다. 둘 다 $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$일 때 성립한다($y_0 \to 0$이 되도록 $\lambda > 0$을 택한다). 그리고 $x \to \pm\infty$일 때 $y_0, y_0' \to 0$이다. 이것이 바닥 상태(ground state)이다. ■

2단계 첫 번째 들뜬 상태

$y_1 = x e^{-\lambda x^2}$에 대하여 $y_1' = (1 - 2\lambda x^2)e^{-\lambda x^2}$이고 $y_1'' = (4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x)e^{-\lambda x^2}$이다. $n = 1$인 방정식이 성립하려면

$$4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x - \omega^2 x^3 = -3\omega x,$$

이어야 하는데, 이는 같은 $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$에서 성립한다. 이번에도 y_1과 y_1'은 $\pm\infty$에서 감소한다. 이것이 첫 번째 들뜬 상태(excited state)이다. ■

3단계 항등식

> **생각해 보기** 곱의 미분법(product rule)으로 $y_m y_n' - y_n y_m'$을 미분하라. 네 항 가운데 두 항이 소거된다. 그다음 미분방정식을 이용하여 y_n''과 y_m''을 바꾸어 넣어라.

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m' y_n' + y_m y_n'' - y_n' y_m' - y_n y_m'' = y_m y_n'' - y_n y_m''$이다. 방정식에서 $y_n'' = (\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega) y_n$이고, m에 대해서도 마찬가지이다. 따라서

$$y_m y_n'' - y_n y_m'' = y_m y_n[\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega - \omega^2 x^2 + (2m+1)\omega] = 2(m-n)\omega y_m y_n.$$ ■

4단계 직교성

잠깐, 직접 해 보기 이 항등식을 $-\infty$에서 ∞까지 적분하라. 좌변은 무엇이 되는가?

좌변을 적분하면 $\left[y_m y_n' - y_n y_m'\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0$이다. 각 y와 y'이 양 끝에서 0으로 가기 때문이다. 따라서 $2(m-n)\omega \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n \, dx = 0$이고, $m \neq n$이며 $\omega > 0$이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m(x) y_n(x) \, dx = 0. \qquad \blacksquare$$

y_0과 y_1의 경우에는 이를 직접 쉽게 알 수 있다. $y_0 y_1 = xe^{-\omega x^2}$은 기함수(odd function)이기 때문이다. 그러나 위의 항등식은 함수를 구체적으로 몰라도 모든 쌍에 대하여 이를 증명해 준다.

돌아보기

- **계수를 비교하라.** 추측한 꼴을 대입하고 방정식이 모든 x에 대하여 성립하도록 요구하여 λ를 결정했다.
- **론스키안 기법.** 조합 $y_m y_n' - y_n y_m'$의 도함수에서는 이계도함수를 방정식을 이용해 바꿔 넣을 수 있고, 그러면 간단한 식이 남는다. 이 조합을 론스키안(Wronskian)이라 한다.
- **경계 조건이 경계항을 없앤다.** 무한대에서의 감소 덕분에 적분한 좌변이 0이 되었고, 이로부터 직교성을 얻었다.

숨은 수학

슈뢰딩거 방정식

1926년에 에르빈 슈뢰딩거(Erwin Schrödinger)는 양자 입자가 **파동함수**(*wave function*) $\psi(x)$로 기술된다고 제안했다. 퍼텐셜 $V(x)$ 안에서 에너지가 E인 입자의 파동함수는

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

를 만족한다. 용수철의 경우 $V(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$이고, x의 척도를 바꾸면 이는 정확히 문제의 방정식이 되며, 이때 $E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\Omega$이다. ψ가 무한대에서 사라져야 한다는(그래야 입자가 어딘가에 존재한다는) 물리적 요구는 이 에너지들에서만 충족될 수 있다. 이것이 바로 수학에서 저절로 튀어나오는 **양자화**(*quantisation*)이다. 가장 낮은 에너지가 0이 아니라 $\frac{1}{2}\hbar\Omega$임에 주목하라. 양자 진동자는 결코 완전히 정지해 있을 수 없다. 이 **영점 에너지**(*zero-point energy*)는 실재하며 측정할 수 있다. 액체 헬륨이 보통 압력에서는 절대영도에서도 얼지 않는 것이 바로 이 때문이다.

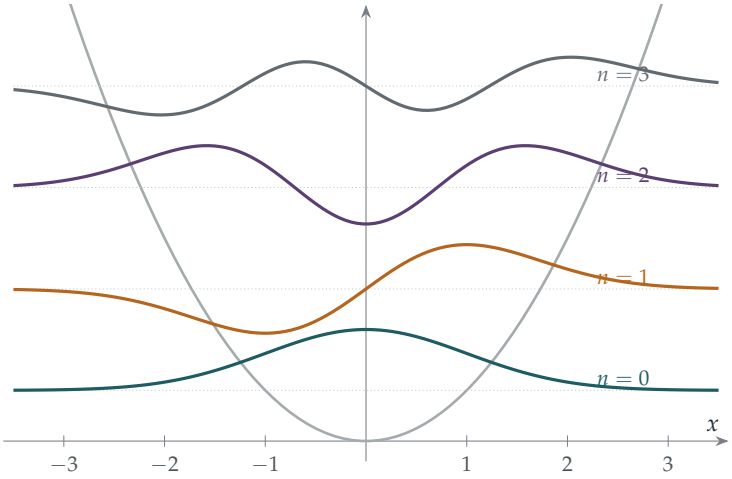


그림 8.6.1 양자 조화 진동자($\omega = 1$인 경우). 포물선은 퍼텐셜 에너지이다. 각 파동함수 y_n은 그 에너지 준위 $n + \frac{1}{2}$의 높이에 그려져 있다. 준위들은 같은 간격으로 놓여 있고, 가장 낮은 준위는 0보다 위에 있다. 함수 y_n은 n번 0을 지나며, 어느 두 함수도 서로 직교한다.

에르미트 함수와 스튀름–리우빌 이론

일반적인 해는 $y_n = H_n(\sqrt{\omega}x)e^{-\omega x^2/2}$이며, 여기서 H_n은 n차 다항식인 **에르미트 다항식**(*Hermite polynomial*)이다(그림 8.6.1). 직교성은 이 방정식에만 있는 특별한 성질이 아니다. 방정식을 적절한 경계 조건과 함께 $(py')' + qy = -\lambda wy$ 꼴로 쓸 수 있으면, 서로 다른 λ 값에 속하는 해들은 4단계와 똑같은 논증에 의해 직교한다. 이것이 **스튀름–리우빌 이론**(*Sturm–Liouville theory*)(1830년대)이며, 푸리에 급수의 사인 함수(Section 3.7), 북의 진동, 정전기학의 르장드르 다항식(Legendre polynomial), 수소 원자의 파동함수를 모두 아우른다. Section 4.7의 고유값 문제(eigenvalue problem)도 또 하나의 예이다. 거기서 구한 임계값들이 고유값 λ이고, 직교하는 함수들은 그 계의 자연스러운 "모드(mode)"이다.

사고 기술

항등식으로부터 직교성 얻기

서로 관련된 방정식의 두 해가 직교함을 보이려면, 경계 조건에 의해 적분이 0이 되면서 두 해의 곱의 상수배와 같은 완전 도함수를 찾아라.

이 방법은 적분을 직접 계산하는 것보다 훨씬 강력하다. 해를 구체적으로 쓸 수 없을 때에도 모든 쌍에 대하여 한꺼번에 통하기 때문이다.

더 도전하기

1 **다음 상태.** $\lambda = \frac{\omega}{2}$일 때 $y_2 = (4\lambda x^2 - 1)e^{-\lambda x^2}$이 $n = 2$인 방정식을 만족함을 보여라. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/\omega}$와 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega}$를 이용하여 $\int_{-\infty}^{\infty} y_0 y_2\,\mathrm{d}x = 0$임을 직접 확인하라.

2 **다른 에너지는 없다.** n을 일반적인 수 ν로 바꾼 방정식에 $y = e^{-\lambda x^2}$을 대입해 보라. 이것이 $\nu = 0$일 때만 성립함을 보여라. (사실 감소하는 해는 ν가 음이 아닌 정수일 때만 존재한다.)

3 **사인파.** $y(0) = y(\pi) = 0$인 $y'' = -n^2 y$에서 출발하여, 같은 방법으로 $m \neq n$일 때 $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$임을 보여라.

4 **사다리.** y_n이 방정식의 해이면 $y_{n+1} = \omega x y_n - y_n'$은 n 대신 $n+1$을 넣은 방정식의 해임을 보여라. 이를 이용하여 y_0으로부터 y_1과 y_2를 만들어라. (이것이 양자역학의 "올림 연산자(raising operator)"이다.)

더 읽을거리

- **David Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*** (Cambridge University Press). 『양자역학 입문』. 학부 물리학의 표준 교재로, 2장에서 조화 진동자를 다룬다.
- **리처드 파인만(Richard Feynman), *QED: The Strange Theory of Light and Matter*** (Princeton University Press). 『QED: 빛과 물질의 신기한 이론』. 양자역학의 대가 가운데 한 사람이 쓴 대중적인 해설서이다.
- **Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*** (Wiley). 『물리과학을 위한 수학적 방법』. 수학과 물리학을 공부하는 학생을 위해 에르미트 다항식과 스튀름–리우빌 이론을 다룬다.

8.7 풀 수 있는 혼돈

문제

STEP I 2014, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s1-q6`

도입

규칙 $u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$을 **로지스틱 사상**(logistic map)이라 한다. 이것은 자원이 제한된 개체군을 나타내는 가장 단순한 모형이다. u_n은 n번째 해의 개체 수를 환경이 감당할 수 있는 최대 개체 수에 대한 비율로 나타낸 것이고, k는 번식률이며, 인수 $1 - u_n$은 과밀의 효과를 나타낸다. 1976년 생물학자 로버트 메이(Robert May)는 *Nature*에 "Simple mathematical models with very complicated dynamics(매우 복잡한 동역학을 지닌 단순한 수학적 모형)"라는 짧은 논문을 발표했다. 그는 k가 4를 향해 커짐에 따라 이 한 줄짜리 규칙이 한 값으로 안정되는 상태에서 진동하는 상태로, 그리고 완전히 무작위처럼 보이는 상태로 바뀐다는 것을 보였다. 이것은 **혼돈**(chaos)의 기초가 된 대표적인 예 가운데 하나가 되었다.

혼돈계는 보통 풀 수 없다. u_n에 대한 공식이 없으므로 u_{100}을 구하는 유일한 방법은 그 앞의 모든 항을 계산하는 것이다. 이 문제는 그 예외를 찾아낸다. 가장 혼돈스러운 값인 $k = 4$에서는 공식이 **존재하며**, 그 공식은 수열이 왜 예측 불가능한지를 정확히 설명해 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 $s = \sin^2\theta$일 때 식 $4s(1 - s)$를 어디서 본 적이 있는가? $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\sin 2\theta$를 이어 주는 항등식(identity)은 무엇인가?

$s = \sin^2\theta$이면 $1 - s = \cos^2\theta$이므로 $4s(1 - s) = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta$이다. 사상 $s \mapsto 4s(1 - s)$는 모습을 바꾼 배각 공식(double-angle formula)이다.

차근차근 풀기

1단계 규칙 추측하기

$u_0 = \sin^2\theta$로 두면 위의 항등식으로부터

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2 2\theta, \qquad u_2 = 4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

> **생각해 보기** 각 단계에서 각은 어떻게 되는가? u_n에 대한 추측(conjecture)은 무엇인가?

각이 매번 두 배가 되므로 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$라고 추측한다.

2단계 증명하기

> **생각해 보기** 한 항에서 다음 항으로 가는 규칙으로 정의된 수열의 모든 항에 대한 명제에는 어떤 증명 방법이 알맞은가?

수학적 귀납법(induction)이다. $u_0 = \sin^2\theta = \sin^2(2^0\theta)$이므로 명제는 $n = 0$일 때 성립한다. 어떤 n에 대하여 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$라고 가정하자. 그러면

$$u_{n+1} = 4\sin^2(2^n\theta)(1-\sin^2(2^n\theta)) = (2\sin(2^n\theta)\cos(2^n\theta))^2 = \sin^2(2^{n+1}\theta),$$

이고, 이것은 $n+1$에 대한 명제이다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$이다. ■

$[0,1]$에 속하는 모든 시작값 u는 $\sin^2\theta$ 꼴로 쓸 수 있으므로($\theta = \arcsin\sqrt{u}$로 잡으면 된다), 이것으로 $[0,1]$의 모든 시작값에 대하여 $k=4$인 로지스틱 사상이 풀린다는 점에 주목하자.

3단계 변수 바꾸기

> **생각해 보기** $v_n = \alpha u_n + \beta$를 v_{n+1}에 대한 규칙에 대입하라. 그 결과가 $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$이 되어야 한다. 이로부터 조건이 몇 개 나오고, 미지수는 몇 개인가?

대입하면

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r,$$

이므로

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + q\beta + r - \beta}{\alpha}.$$

이것이 $4u_n - 4u_n^2$이 되려면 세 가지가 필요하다.

$$p\alpha = 4, \qquad q - 2p\beta = 4, \qquad -p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0.$$

앞의 두 식에서 $\alpha = 4/p$, $\beta = (q-4)/(2p)$로 정해진다. 남은 미지수가 없으므로 세 번째 식은 p, q, r에 대한 실질적인 조건이 된다. β를 대입하고 $4p$를 곱하면

$$-(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr = 0,$$

이고, 전개하면 $-(q^2 - 8q + 16) + (2q^2 - 10q + 8) + 4pr = 0$, 즉 $q^2 - 2q - 8 + 4pr = 0$, 다시 말해

$$4pr = 8 + 2q - q^2. \qquad \blacksquare$$

> **잠깐, 직접 해 보기** 식은 세 개인데 미지수는 두 개뿐이다. 조건이 나타나는 이유가 바로 이것이다. 계산하기 전에, 일반적인 이차 사상이 왜 항상 $(*)$와 동치일 수는 없는지 알 수 있겠는가? (일차 변수변환이 바꿀 수 있는 것과 바꿀 수 없는 것을 생각해 보라.)

4단계 예

$v_{n+1} = -v_n^2 + 2v_n + 2$에서는 $p = 1$, $q = 2$, $r = 2$이고 $4pr = 8 = 8 + 4 - 4$이므로 조건이 성립한다. 그러면 $\alpha = 4$, $\beta = -1$이므로 $v_n = 4u_n - 1$이고, u_n은 $(*)$를 만족한다. $v_0 = 1$이므로 $u_0 = \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$이고, 따라서

$$u_n = \sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right), \qquad v_n = 4\sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right) - 1 = 1 - 2\cos\!\left(\frac{2^n\pi}{2}\right).$$

이로부터 $v_0 = 1$, $v_1 = 3$이고 모든 $n \geq 2$에 대하여 $v_n = -1$이다. (직접 확인해 보자. $-1 + 2 + 2 = 3$, 다음으로 $-9 + 6 + 2 = -1$, 다음으로 $-1 - 2 + 2 = -1$이다.) $\blacksquare$

이 특별한 시작값은 각이 π의 배수에 떨어져 수열이 멈추도록 고른 것이다. 그 때문에 흥미로운 부분이 가려져 있는데, 그것이 다음에 이어진다.

돌아보기

- **변장을 알아보라.** 사상 $s \mapsto 4s(1-s)$는 $s = \sin^2\theta$로 쓰자마자 각을 두 배로 하는 사상이 되었다.
- **추측하고, 귀납법으로 증명하라.** 두 항이 규칙을 암시했고, 귀납법이 그것을 증명했다.
- **식과 미지수의 개수를 세라.** 일차 치환에는 자유로운 매개변수가 두 개, 이차식에는 계수가 세 개 있으므로 조건 하나가 남을 수밖에 없다.

숨은 수학

수열이 예측 불가능한 이유

공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$는 이야기의 끝처럼 보인다. 어떤 항이든 직접 계산할 수 있기 때문이다. 하지만 이 공식이 무엇을 말하는지 살펴보자. $\sin^2$의 주기는 π이므로 $2^n\theta$를 π로 나눈 나머지만 의미가 있다. $0 \le x < 1$인 x로 $\theta = \pi x$라 쓰고, x를 이진법(binary)으로 나타내자.

$$x = 0.b_1b_2b_3\ldots \quad (\text{밑}2).$$

2를 곱하면 소수점이 오른쪽으로 한 자리 이동하고, 그 결과를 1로 나눈 나머지를 취하면 소수점을 넘어간 자릿수가 버려진다. 따라서 u_n은 x의 이진 자릿수 가운데 b_{n+1} 이후의 것에만 의존한다. 로지스틱 사상의 각 단계는 시작값의 자릿수를 하나 더 읽고, 맨 앞의 자릿수 하나를 버린다.

이것이 혼돈의 결정적 특징인 **초기 조건에 대한 민감한 의존성**(sensitive dependence on initial conditions)이다. 이진법으로 20자리(십진법으로 약 여섯 자리)까지 일치하는 두 시작값은 대체로 약 20단계 동안 일치하는 수열을 만들고, 그 뒤에는 서로 아무 관계가 없어진다(그림 8.7.1). u_{100}을 예측하려면 u_0을 이진법으로 100자리까지 알아야 한다. 시작 각의 오차는 아무리 작더라도 매 단계 두 배가 된다. (개체 수 u 자체의 오차는 매번 정확히 같은 비율로 커지지는 않는다. 사상이 $[0,1]$의 어떤 부분은 다른 부분보다 더 많이 늘리기 때문이다. 그러나 평균적으로는 같은 비율로 커진다.) 공식이 도움이 되는 것은 아니다. 공식은 그저 그 메커니즘을 눈에 보이게 해 줄 뿐이다.

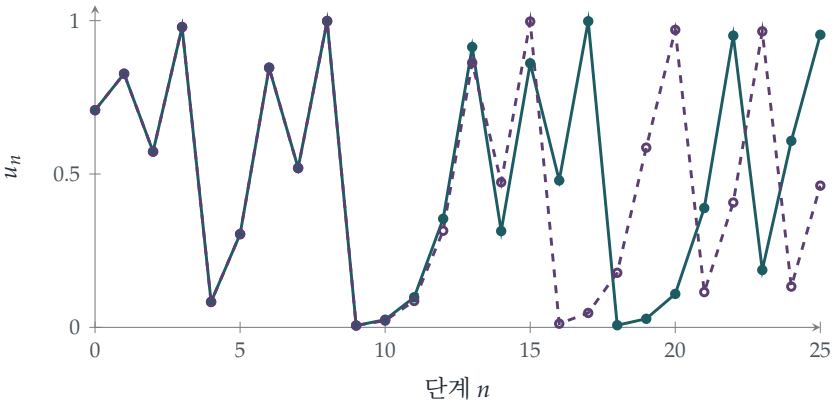


그림 8.7.1 $k = 4$인 로지스틱 사상에서 $\sin^2(1)$(청록색)과 $\sin^2(1.00001)$(자주색, 점선)로 시작하는 두 수열. 약 열 단계 동안은 구별할 수 없고, 12단계에서는 눈에 띄게 달라지며, 그 뒤로는 서로 무관하다. 12단계까지 각의 차이 10^{-5}는 열두 번 두 배가 되어 약 $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$가 된다.

어디에나 있는 주기점

이 공식으로 사상의 모든 순환도 찾을 수 있다. 수열이 N단계 뒤에 시작값으로 돌아오는 것은 정확히 $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$일 때, 즉 $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$일 때이다. 따라서

$\theta = m\pi/(2^N - 1)$ 또는 $\theta = m\pi/(2^N + 1)$은 주기가 N의 약수인 점을 준다. 예를 들어 $\theta = \pi/5$는 $4\theta \equiv -\theta$를 만족하므로 $\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$는 2-순환이다. 모든 주기의 주기점(periodic point)이 존재하며, 이들은 $[0,1]$에서 조밀(dense)하다. 즉 아무리 작은 구간에도 수열이 반복되는 시작값이 있다. 그런데도 오차가 두 배씩 커지므로 이들은 모두 불안정하다. 주변의 모든 것을 밀어내는 조밀한 주기점은 혼돈의 두 번째 특징이다.

혼돈에 이르는 길

k가 더 작으면 공식이 없고, 행동 양상은 k에 따라 극적으로 달라진다(그림 8.7.2). $1 < k < 3$이면 $(0,1)$에서 시작하는 모든 수열이 고정점(fixed point) $1 - 1/k$로 수렴한다. $k = 3$에서 고정점이 불안정해지고 2-순환이 그 자리를 차지한다(이것이 STEP II 2002 Q5의 주제이다. 연습문제를 보라). $k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$에서 2-순환은 4-순환에, 이어서 8-순환에 자리를 내주며, 주기 배가(period doubling)는 점점 더 빨리 일어나다가 $k \approx 3.5699$에서 순환의 길이가 무한대가 되고 혼돈이 시작된다. 혼돈 영역 안에는 질서의 창이 있다. 가장 뚜렷한 것은 $k = 3.83$ 근처에 있으며 3-순환을 포함하는데, 이것이 Section 8.8의 주제이다.

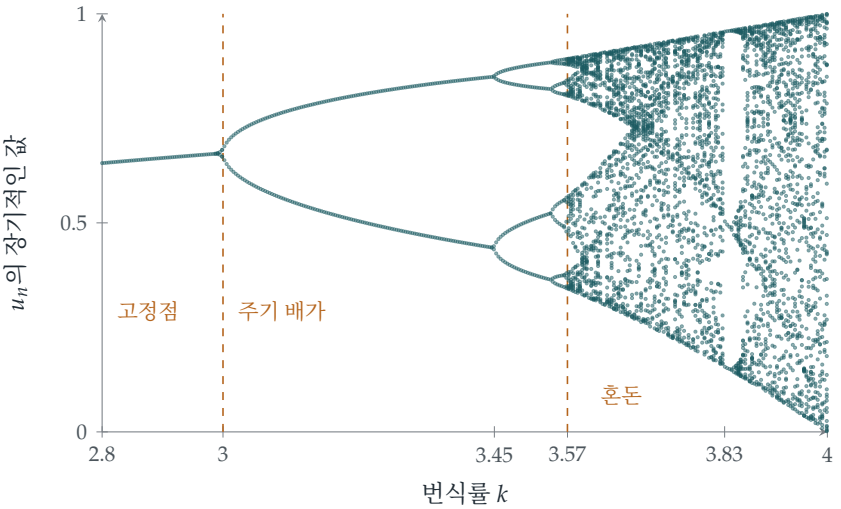


그림 8.7.2 로지스틱 사상의 분기 도표(bifurcation diagram). 각 k에 대하여 $u_0 = 0.31416$에서 시작해 사상을 300번 반복한 뒤 그다음 40개의 값을 찍었다. 하나의 고정점이 $k = 3$에서 2-순환으로 갈라지고, 이어서 4, 8, ...로 갈라지다가 $k = 3.57$ 근처에서 혼돈이 시작된다. $k = 3.83$ 근처의 옅은 세로 틈은 안정한 3-순환을 포함하는 창이다. $k = 4$에서는 값들이 $[0,1]$ 전체를 채운다.

파이겐바움 상수

1975년 로스앨러모스(Los Alamos)에서 일하던 미첼 파이겐바움(Mitchell Feigenbaum)은 프로그래밍이 가능한 휴대용 계산기로 주기가 두 배가 되는 k의 값 $k_1 = 3$, $k_2 \approx 3.4495$, $k_3 \approx 3.5441$, $k_4 \approx 3.5644$, ...를 측정했다. 그는 그 간격이 일정한 비율로 줄어든다는 것,

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

을 알아챘고, 놀랍게도 같은 수 $4.6692\ldots$가 $x \mapsto k\sin(\pi x)$에서도, 그리고 꼭대기가 포물선처럼 둥근 봉우리 하나를 가진(**이차 극대**(quadratic maximum)) 다른 모든 매끄러운 사상에서도 나타난다는 것을 발견했다. 이 상수는 그 부류 전체에 대하여 **보편적**(universal)이다. $-x^4$ 모양처럼 봉우리 꼭대기가 더 평평한 사상들은 저마다의 보편 상수를 가진다. 이 상수는 그 뒤 물방울이 떨어지는 수도꼭지, 가열된 유체, 전자 회로에 대한 실험에서도 측정되었다. 그 이유를 설명하려면 상전이 물리학에서 빌려 온 아이디어가 필요했고, 1982년에야 Oscar Lanford가 컴퓨터의 도움을 받아 엄밀하게 증명했다.

같은 기법, 세 번

소문항 (ii)의 치환은 **켤레**(conjugacy)의 한 예이다. 변수변환으로 한 사상을 다른 사상으로 바꿀 수 있으면 두 사상은 켤레라 하고, 이때 두 사상은 정확히 같은 동역학을 가진다. 이 문제는 조건을 만족하는 모든 이차 사상이 $k = 4$인 로지스틱 사상과 켤레임을 보여 주며, 로지스틱 사상은 다시 $u = \sin^2\theta$를 통해 모습을 바꾼 각 배가 사상이다. (엄밀히 말하면 이 마지막 연결은 **반켤레**(semiconjugacy)이다. θ와 $\pi - \theta$가 같은 u를 주므로 이 변수변환은 일대일(one-to-one)이 아니다. 로지스틱 사상은 $[0,1]$에서 일대일인 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$를 통해, $t \le \frac{1}{2}$일 때 $t \mapsto 2t$이고 $t \ge \frac{1}{2}$일 때 $t \mapsto 2 - 2t$인 **텐트 사상**(tent map)과 진정으로 켤레이다.) Section 2.8에서 만난 $x \mapsto x^2 - 2$는 $x = 2\cos\theta$로 풀렸고 각이 매 단계 두 배가 되었다. 이 사상도 조건을 만족한다(확인해 보라). 따라서 이것들은 모두 모습만 바꾼 같은 사상이다. Section 8.8에서는 이 가족의 세 번째 구성원, 즉 직선으로 만든 사상인 **텐트 사상**이 등장한다.

사고 기술

> **변수를 바꾸어 구조를 보라**
>
> 좋은 치환은 복잡한 규칙을 단순한 규칙으로 바꿀 수 있다. 문제를 이미 이해하고 있는 문제로 바꾸어 주는 변수변환을 찾아라.

여기서는 $u = \sin^2\theta$가 이차 사상을 각 배가 사상으로 바꾸었고, 일차 치환이 이차식의 한 가족 전체를 하나로 바꾸었다. 대학에서 켤레는 핵심적인 도구이다. 동역학계(dynamical systems)에서, 선형대수학(linear algebra)에서(행렬을 대각화(diagonalising)하는 것은 그 행렬이 단순해지는 좌표를 고르는 일이다), 그리고 군론(group theory)에서 쓰인다.

더 도전하기

1 **로지스틱 사상의 순환.** STEP II 2002, 5번 문제 (`step.maths.org/questions/02-s2-q5`)를 풀어 보라. 그런 다음 2-순환은 $k > 3$일 때에만 존재함을 보여라.

2 **제곱하고 2 빼기.** $v_{n+1} = v_n^2 - 2$가 소문항 (ii)의 조건을 만족함을 보여라($p = -1$로 두고 $-pv_n^2 + qv_n + r$ 꼴로 써라). α와 β를 구하고, 그 답이 $v_n = 2\cos(2^n\phi)$와 일치하는지 확인하라.

3 **3-순환.** 공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$를 이용하여 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$의 3-순환을 구하라. (힌트: $\theta = \pi/7$이나 $\theta = \pi/9$를 시도해 보라.) 주기가 정확히 3인 점은 몇 개인가?

4 **사라지는 자릿수.** 컴퓨터는 수를 이진법으로 약 53자리까지 저장한다. 컴퓨터로 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$을 반복하면 대략 몇 단계 뒤에 계산된 값이 참인 수열과 아무 관계가 없어지는가? 그렇다면 그때 계산된 수열은 쓸모없는가?

더 읽을거리

- **Robert May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics"**, *Nature* 261 (1976). 고전이며, 지금도 매우 읽기 쉽다.
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science*** (Penguin). 메이, 파이겐바움, 그리고 혼돈의 발견에 관한 이야기이다.
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press), 10장. 1차원 사상, 로지스틱 사상, 파이겐바움 상수를 대학 1학년 수준에서 다룬다.
- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?*** (Penguin). 혼돈을 대중적으로 소개하는 책으로, 로지스틱 사상에 관한 좋은 장이 있다.

8.8 주기 3이면 혼돈이다

문제

STEP III 2025, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

도입

1975년 Tien-Yien Li와 James Yorke는 *American Mathematical Monthly*에 논문 한 편을 발표했는데, 그 제목은 수학에서 가장 유명한 제목 가운데 하나가 되었다. 바로 "Period three implies chaos(주기 3이면 혼돈이다)"이다. 이들은 구간에서 그 구간 자신으로 가는 연속 함수(continuous function)가 주기(period) 3인 점(정확히 세 단계 뒤에 처음으로 되돌아오는 시작값)을 가지면, **모든** 주기의 점을 가진다는 것을 증명했다. 1, 2, 4, 5, 17, 1000, 그 무엇이든 말이다. 또한 이 논문은 "혼돈(chaos)"이라는 낱말을 수학에 들여왔다.

2025년에 출제된 이 문제는 그 정리를 직접 손으로 짚어 보는 여행이다. 함수 $f(x) = 7 - 2|x|$는 두 직선으로 이루어져 있으므로 모든 것을 정확히 계산할 수 있다. 이 함수의 2-순환(2-cycle)과 3-순환을 구하면서, 하나가 존재하면 나머지가 모두 존재할 수밖에 없는 이유를 보게 된다.

시작하기 전에

생각해 보기 $y = 7 - 2|x|$의 그래프는 어떤 모양인가? 이 그래프는 직선 $y = x$와 어디에서 만나는가? 이 함수는 구간 $[-7, 7]$을 어디로 보내는가?

그래프는 꼭짓점이 $(0, 7)$이고 기울기가 ± 2인, 뒤집힌 V자 모양이다. 이 그래프는 $x = 7 - 2x$ $(x \geq 0)$인 곳, 곧 $x = \frac{7}{3}$에서, 그리고 $x = 7 + 2x$ $(x < 0)$인 곳, 곧 $x = -7$에서 $y = x$와 만난다. 이것들이 **고정점**(fixed point)이다. 여기서 시작하면 수열은 전혀 움직이지 않는다. 또 $f(-7) = f(7) = -7$이고 $f(0) = 7$이므로, f는 $[-7, 7]$을 자기 자신 위로 보내는데, 이때 구간을 두 배 길이로 늘린 다음 반으로 접는다.

차근차근 풀기

1단계 $f \circ f$의 그래프

생각해 보기 x가 -7에서 7까지 움직일 때, $f(x)$는 -7에서 7까지 올라갔다가 다시 -7로 내려온다. 그러면 $f(f(x))$는 어떻게 움직이는가?

x가 -7에서 0까지 움직이는 동안 $f(x)$는 $[-7,7]$ 전체를 지나가므로, $f(f(x))$는 V자 하나를 온전히 그린다. 곧 -7에서 7까지 올라갔다가 다시 내려온다. x가 0에서 7까지 움직일 때도 마찬가지이다. 따라서 $[-7,7]$에서 $f \circ f$의 그래프는 뒤집힌 W자 모양이다. 기울기가 ± 4인 네 개의 선분으로 이루어지고, 각 선분은 높이 -7과 7 사이를 오가며, $x = \pm\frac{7}{2}$ ($f(x) = 0$인 곳)에서 꼭대기에 이르고 $x = 0$에서 -7까지 내려간다(그림 8.8.1). $[-7,7]$ 바깥에서는 두 그래프 모두 가파르게 떨어진다.

2단계 $f(f(x)) = x$ 풀기

생각해 보기 네 선분은 각각 대각선 $y = x$와 정확히 한 번씩 만난다. 그 가운데 두 교점은 이미 알고 있다. 왜 그런가? 중첩된 절댓값(absolute value)을 풀어 전개하지 않고 나머지 두 교점을 어떻게 구할 수 있을까?

고정점 $\frac{7}{3}$과 -7은 당연히 $f(f(x)) = x$를 만족한다. 그 밖의 해 p는 $q = f(p) \neq p$인 2-순환 $p \to q \to p$에 속한다. 부호를 따져 보자. p와 q가 모두 양수이면 $q = 7 - 2p$이고 $p = 7 - 2q$이므로 $p = q = \frac{7}{3}$일 수밖에 없다. 둘 다 음수이면 같은 논법으로 -7을 얻는다. 따라서 하나는 양수, 하나는 음수이다. $p > 0 > q$라 하면

$$q = 7 - 2p, \qquad p = 7 + 2q.$$

그러면 $p = 7 + 14 - 4p$이므로 $p = \frac{21}{5}$, $q = -\frac{7}{5}$이고, 실제로 $q < 0$이다.

$[-7,7]$ 바깥에는 해가 없다. $x > 7$이면 $f(f(x)) = 21 - 4x < x$이고, $x < -7$이면 $f(f(x)) = 21 + 4x < x$이기 때문이다. 따라서 네 해는

$$x = -7, \quad -\frac{7}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{21}{5}. \qquad \blacksquare$$

수열의 주기가 2인 것은 정확히 $a = \frac{21}{5}$ 또는 $a = -\frac{7}{5}$일 때이다. (고정점에서는 수열이 상수이고 주기는 1이다.)

3단계 늦게 순환에 들어서기

$a = \frac{28}{5}$이면 $u_1 = 7 - \frac{56}{5} = -\frac{21}{5}$, $u_2 = 7 - \frac{42}{5} = -\frac{7}{5}$, $u_3 = 7 - \frac{14}{5} = \frac{21}{5}$, $u_4 = -\frac{7}{5}$, 이런 식으로 계속된다. u_2부터는 수열이 2-순환이지만, $u_0 = \frac{28}{5}$과 $u_1 = -\frac{21}{5}$은 그 순환에 속하지 않는다. $\blacksquare$

생각해 보기 $\frac{28}{5}$를 스스로 찾아낼 수는 없었을까? 거꾸로 거슬러 올라가 보자. f가 $-\frac{7}{5}$로 보내는 수는 무엇인가?

$f(x) = -\frac{7}{5}$는 $|x| = \frac{21}{5}$, 곧 $x = \pm\frac{21}{5}$을 뜻한다. 이 가운데 하나는 순환 안에 있고, 다른 하나인 $-\frac{21}{5}$은 순환으로 들어가는 입구이다. 다시 $f(x) = -\frac{21}{5}$은 $|x| = \frac{28}{5}$을 뜻한다. f는 2대1 함수이므로 $(-7, 7)$의 모든 점은 원상(preimage)을 두 개 가지며, 따라서 모든 순환에는 그 순환으로 흘러 들어가는 시작값들이 나무 모양으로 달려 있다.

4단계 3-순환

잠깐, 직접 해 보기 $a = 1$과 $a = -\frac{7}{9}$에서 시작하는 수열을 계산하라.

$a = 1$에서 시작하면 $1 \to 5 \to -3 \to 1$이다. $a = -\frac{7}{9}$에서 시작하면 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$이다. 둘 다 3-순환이다.

생각해 보기 $f(f(f(x))) = x$는 해를 몇 개까지 가질 수 있는가? 1단계에서처럼 그래프의 모양을 생각해 보라.

1단계의 논법을 되풀이하면, f를 한 번 더 적용할 때마다 선분의 개수가 두 배가 된다. 따라서 $[-7, 7]$에서 $f \circ f \circ f$의 그래프는 기울기가 ± 8인 여덟 개의 선분으로 이루어진 지그재그이고, 각 선분은 -7에서 7까지 전체 높이를 지나간다(그림 8.8.2). 각 선분은 대각선과 정확히 한 번 만나므로 $[-7, 7]$에는 해가 정확히 여덟 개 있고, (앞에서처럼) 바깥에는 해가 없다. 우리는 이미 여덟 개를 찾았다. 두 고정점과 두 3-순환의 여섯 점이다. 따라서 해는

$$x = -7,\ \frac{7}{3},\ 1,\ 5,\ -3,\ -\frac{7}{9},\ \frac{49}{9},\ -\frac{35}{9}. \qquad \blacksquare$$

5단계 3-순환에 늦게 들어서기

순환 $1 \to 5 \to -3$에서 거꾸로 거슬러 올라가자. u_3은 순환 안에 있지만 u_2는 그렇지 않기를 바란다. 1의 원상은 $|x| = 3$, 곧 $x = \pm 3$을 만족한다. -3은 순환 안에 있으므로 $u_2 = 3$으로 잡는다. 3의 원상은 $|x| = 2$를 만족하므로 $u_1 = 2$로 잡는다. 2의 원상은 $|x| = \frac{5}{2}$를 만족하므로 $u_0 = \frac{5}{2}$로 잡는다. 그러면

$$\frac{5}{2} \to 2 \to 3 \to 1 \to 5 \to -3 \to 1 \to \cdots,$$

이고, $\frac{5}{2}, 2, 3$ 가운데 어느 것도 순환에 속하지 않는다. 따라서 $a = \frac{5}{2}$가 조건을 만족한다. $\blacksquare$

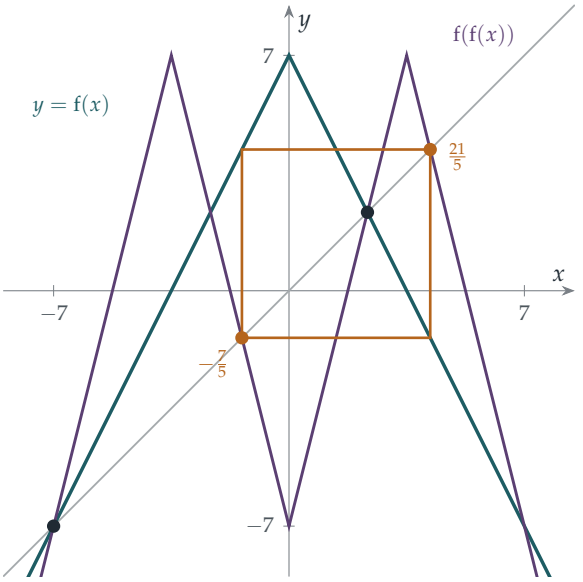


그림 8.8.1 $y = \mathrm{f}(x)$(청록색), $y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$(자주색), $y = x$(회색)의 그래프. 자주색 그래프는 대각선과 네 번 만난다. 고정점 -7과 $\frac{7}{3}$(검은색)에서, 그리고 2-순환 $\frac{21}{5} \leftrightarrow -\frac{7}{5}$(호박색)에서 만난다. 호박색 정사각형은 2-순환의 **거미줄 그림**(cobweb)이다. f의 그래프까지 세로로 간 다음 대각선까지 가로로 가고, 이를 되풀이한다.

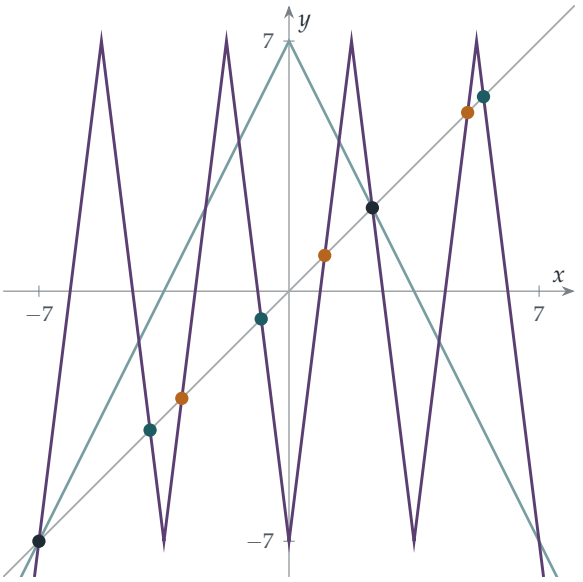


그림 8.8.2 $[-7, 7]$에서 $y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$의 그래프(자주색)는 기울기가 ± 8인 여덟 개의 선분으로 이루어진 지그재그이며, 각 선분은 대각선과 한 번씩 만난다. 여덟 교점은 두 고정점(검은색), 3-순환 $1 \to 5 \to -3$(호박색), 그리고 3-순환 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9}$(청록색)이다.

돌아보기

- **모양으로 세기.** 중첩된 절댓값을 전개하는 대신 그래프의 선분 개수를 셌다. 그 덕분에 해를 몇 개 찾아야 하는지, 그리고 언제 모두 찾았는지를 알 수 있었다.
- **순환의 구조 이용하기.** $f(f(x)) = x$의 해는 고정점이거나 둘씩 짝을 지어 나타나고, $f(f(f(x))) = x$의 해는 고정점이거나 셋씩 묶여 나타난다.
- **거꾸로 거슬러 올라가기.** (i)(d)와 (ii)(c)의 "늦게 들어서는 점"은 원상을 이용해 만들었다.

숨은 수학

모든 길이의 순환

4단계의 세기 방법은 단계 수가 몇이든 통한다. f를 n번 적용한 것을 f^n으로 쓰자. $[-7,7]$에서 f^n의 그래프는 각각 전체 높이를 지나가는 2^n개의 선분으로 이루어지므로, $f^n(x) = x$의 해는 정확히 2^n개이다. 그 가운데 일부는 n의 약수(divisor)인 더 짧은 주기 d를 가지지만, 각 d에 대해 그런 해는 많아야 2^d개이고,

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad (n\text{의 약수 가운데 } d < n\text{인 것에 대해 합한다})$$

이다. n보다 작은 약수는 모두 $n/2$ 이하이고, $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \le 2^n$이기 때문이다. 따라서 모든 n에 대해 주기가 정확히 n인 점이 존재한다. 이 함수는 모든 길이의 순환을 가진다.

주기 3이 모든 것을 강제하는 이유

Li와 Yorke의 정리는 이것이 우리 함수만의 특별한 성질이 아니라고 말한다. 구간에서 그 구간 자신으로 가는 연속함수 g가 3-순환을 가지면, 어떤 함수이든 모든 길이의 순환을 가진다. 증명에는 사잇값 정리(intermediate value theorem) 말고는 아무것도 쓰이지 않으며, 우리의 3-순환이 증명의 흐름을 잘 보여 준다.

> ? **생각해 보기** 순환 $1 \to 5 \to -3$의 점들 사이에 있는 두 구간을 $I_1 = [-3,1]$, $I_2 = [1,5]$라 하자. f는 각 구간을 어디로 보내는가?

I_2에서 f는 $f(1) = 5$에서 $f(5) = -3$까지 감소하므로 $f(I_2) = [-3,5] = I_1 \cup I_2$이다. I_1에서 f는 $f(-3) = 1$에서 $f(0) = 7$까지 올라갔다가 $f(1) = 5$로 내려오므로 $f(I_1) = [1,7]$이고, 이는 I_2를 포함한다. 여기서 순환의 세 점만 사용했다는 데 주목하자. $a < b < c$인 3-순환 $a \to b \to c$를 가지는 연속함수는 어느 것이나 같은 방식으로 구간들을 덮는다. 이를 어느

구간이 어느 구간을 덮는지 나타내는 도표로 요약할 수 있다(그림 8.8.3).

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

그러면 정리는 다음 두 사실에서 나오는데, 둘 다 사잇값 정리의 결과이다.

- $g(I) \supseteq I$이면 g는 I 안에 고정점을 가진다. ($g(x) - x$에 사잇값 정리를 적용한다.)
- $g(I) \supseteq J$이면 $g(I') = J$를 정확히 만족하는 더 작은 닫힌구간 $I' \subseteq I$가 존재한다.

주기 n인 점을 찾으려면 도표에서 고리 $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$를 따라가면 된다. I_2 안에서 $n-1$단계를 머물고, 한 단계 동안 I_1로 나갔다가 돌아오는 것이다. 두 번째 사실을 되풀이해 쓰면, I_2를 줄여서 그 점들의 궤도(orbit)가 이 경로(itinerary)를 따르는 시작점들의 구간을 얻을 수 있고, g^n은 그 구간을 I_2 전체 위로 보낸다. 첫 번째 사실에 따라 $g^n(x) = x$이면서 $n-1$번째 단계에서만 I_1을 방문하는 점 x가 존재한다. 그 주기는 n보다 작을 수 없다. 그렇다면 I_1 방문이 더 일찍 되풀이될 것이기 때문이다. (I_1과 I_2가 점 1을 공유하므로 미묘한 점이 하나 있는데, 이것이 문제를 일으키지 않음을 확인하는 것은 연습문제로 남긴다.)

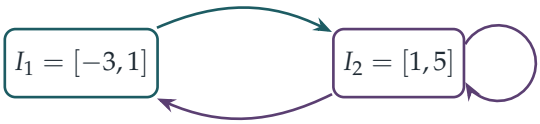


그림 8.8.3 3-순환의 덮개 도표(covering diagram). 한 구간에서 다른 구간으로 가는 화살표는 앞 구간의 상이 뒤 구간을 포함한다는 뜻이다. 도표의 모든 고리는 함수의 순환 하나를 준다. 고리 $I_2 \to I_2$는 고정점을, $I_1 \to I_2 \to I_1$은 2-순환을 주고, I_1을 방문하기 전에 I_2에서의 고리를 $n-1$번 돌면 길이 n인 순환을 얻는다.

샤르코우스키 정리

Li와 Yorke가 처음은 아니었다. 1964년 우크라이나 수학자 샤르코우스키(Oleksandr Sharkovskii)는 훨씬 더 완전한 결과를 증명했는데, 이 결과는 *Ukrainian Mathematical Journal*에 러시아어로 발표되어 서방에는 10년 동안 알려지지 않았다. 양의 정수를 다음과 같이 늘어놓자.

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ \ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \ldots,\ \ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \ldots,\ \ \ldots,\ \ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1:$$

먼저 3부터 시작하는 홀수, 다음으로 홀수의 두 배, 그다음 홀수의 네 배, 이런 식으로 이어지다가 마지막에 2의 거듭제곱이 내림차순으로 온다. 샤르코우스키 정리는 구간에서 정의된 연속함수가 길이 m인 순환을 가지면, 이 목록에서 m 뒤에 오는 모든 길이의 순환을 가진다고 말한다. 3이 맨 앞에 오므로 주기 3이면 모든 주기가 존재한다. 게다가 이 정리는 더 이상 개선할 수 없다. 모든 m에 대해 길이 m인 순환은 가지지만 목록에서 그보다 앞선 길이

의 순환은 가지지 않는 함수가 존재한다. 끝에 오는 2의 거듭제곱들은 바로 Section 8.7에 나오는 로지스틱 사상의 주기 배가 연쇄이며, 3-순환은 그곳에서 $k = 1 + \sqrt{8}$일 때 나타난다.

텐트 사상과 로지스틱 사상

$[0,1]$을 $[-7,7]$ 위로 보내는 치환 $x = 14y - 7$을 하자. 간단한 계산으로 f가 **텐트 사상**(tent map)

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \tfrac{1}{2}, \\ 2 - 2y & \tfrac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

이 됨을 알 수 있고, 여기에 치환 $u = \sin^2(\pi y/2)$를 한 번 더 하면 텐트 사상은 로지스틱 사상(logistic map) $u \mapsto 4u(1-u)$로 바뀐다. 따라서 이 문제의 함수는 Section 8.7의 혼돈 로지스틱 사상을 곧게 편 것이다. $f^3(x) = x$의 여덟 해는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$의 여덟 해에 대응한다.

사고 기술

사잇값 정리로 존재 보이기

해가 존재함을 보이려고 해를 꼭 구해야 하는 것은 아니다. 연속함수의 부호가 바뀐다는 것, 또는 어떤 구간이 자기 자신을 덮도록 보내진다는 것을 보이면 된다.

이 문제에서는 모든 해를 계산할 수 있었다. 그러나 Li와 Yorke의 정리는 전혀 계산할 수 없는 함수에도 적용되며, 사잇값 정리와 어느 구간이 어느 구간을 덮는지 나타내는 도표만으로 무한히 많은 순환의 존재를 증명한다. 대학에서는 이런 방식의 논증, 곧 구성하지 않고 존재를 보이는 논증이 해석학(analysis)(사잇값 정리 자체), 위상수학(topology)(고정점 정리), 그리고 동역학계(dynamical systems) 전반에 걸쳐 나타난다.

더 도전하기

1 **4-순환.** 덮개 도표를 이용하여 f의 4-순환이 어디에 있어야 하는지 예측하라(I_2에서 세 단계, I_1에서 한 단계). 그런 다음 그것을 정확히 구하라. (**힌트:** 이 순환은 양수인 점 세 개와 음수인 점 한 개로 이루어진다. 네 개의 일차방정식을 세워 보라.)

2 **미묘한 점.** 주기 3이면 주기 n이 존재한다는 증명에서, $n \geq 4$일 때 찾은 점 x가 점 1(또는 원래 3-순환의 어떤 점)일 수 없는 이유를 설명하라.

3 **주기 3 없이 주기 5.** $g(1) = 3, g(3) = 4, g(4) = 2, g(2) = 5, g(5) = 1$을 만족하고 이 점들을 선분으로 이은, $[1,5]$에서 정의된 연속함수의 그래프를 그려라. 구간 $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$에 대한 덮개 도표를 그려라. 길이 3인 고리를 찾을 수 있는가? (샤르코우스키 정리에 따르면 3-순환은 없다.)

4 **텐트 사상.** $x = 14y - 7$이 f를 텐트 사상으로 바꾼다는 것을 확인하라. 그런 다음 텐트 사상이 이진법(binary)으로 쓴 y를 두 배 하되, 맨 앞자리가 1일 때마다 모든 자릿수를 뒤집는다는 것을 보이고, 이를 이용하여 텐트 사상의 3-순환을 구하라.

더 읽을거리

- **Tien-Yien Li & James Yorke, "Period three implies chaos"**, *American Mathematical Monthly* 82 (1975). 짧고, 사잇값 정리만 알면 읽을 수 있다.
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press). 학부생을 위해 쓴 책으로, 텐트 사상, 로지스틱 사상, 샤르코우스키 정리를 완전한 증명과 함께 다룬다.
- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, "The Sharkovsky theorem: a natural direct proof"**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011). 덮개 도표를 이용한 현대적인 증명이다.

우리가 배운 것

우리는 대부분의 미분방정식(differential equation)은 풀 수 없으며, 그럼에도 그것을 이해하는 것이 바로 기술이라는 말로 이 장을 시작했다. 그리고 세 가지 질문을 던졌다. 현재는 미래를 결정하는가? 풀지 않고도 무엇을 알 수 있는가? 장기적으로는 어떤 일이 일어나는가? 이 장의 여덟 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 현재는 미래를 결정하는가?

대개는 그렇지만, 항상 그런 것은 아니다. Section 8.1에서 방정식 $(y')^2 = 4y$는 x축 위의 모든 점을 지나는 해(solution)를 무수히 많이 가졌다. 해는 원하는 만큼 $y = 0$에 머물다가 떠날 수 있었다. 원인은 제곱근이었다. 제곱근은 0에서 기울기가 무한대이므로 피카르-린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리의 립시츠 조건(Lipschitz condition)을 깨뜨린다. 같은 메커니즘으로, 물이 새는 양동이를 보고 그것이 언제 비었는지 알 수 없는 이유가 설명된다. 또한 고전역학의 결정론(determinism)에 관한 수수께끼인 노턴의 돔(Norton's dome)의 배경에도 이 메커니즘이 있다.

미래가 결정되어 있더라도 예측할 수 없을 수 있다. Section 8.7의 로지스틱 사상(logistic map)에는 정확한 공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$가 있지만, 매 단계마다 처음 각 θ의 오차가 두 배가 되고, 초깃값의 오차도 평균적으로 그만큼 빠르게 커진다. 원리상의 결정론이 곧 실제의 예측 가능성은 아니다.

2. 풀지 않고도 무엇을 알 수 있는가?

아주 많은 것을 알 수 있다.

- **에너지.** Section 8.2에서 방정식에 y'을 곱하자 증가할 수 없는 양이 나왔고, 이 양으로 아무도 풀 수 없는 방정식의 해가 유계(bounded)임을 보였다. 이런 양을 **랴푸노프 함수**(*Lyapunov function*)라고 하며, 이는 안정성(stability)을 증명하는 주된 도구이다.
- **평형점과 안정성.** Section 8.3에서 증가율의 부호로 물고기 개체군의 운명을 예측했고, 어떤 임계값을 넘어서 어획하면 갑작스러운 붕괴가 일어남을 보였다. 이때 평형점(equilibrium)이 핵심 역할을 했다.
- **알맞은 좌표.** Section 8.4에서 극좌표(polar coordinates)는 연립계를 r에 대한 하나의 방정식으로 바꾸어, 모든 해가 나선을 그리며 원에 다가감을 보여 주었다. Section 8.5에서

는 대칭성을 이용해 서로를 쫓는 네 마리의 개를 한 마리로 줄였고, 나눗셈으로 시간을 소거하여 그 경로의 모양을 얻었다.

- **항등식에서 얻는 구조.** Section 8.6에서 론스키안(Wronskian)은 방정식의 해들이 서로 직교(orthogonal)함을 보여 주었다. 그 해들 가운데 어느 하나도 적분하지 않고서 말이다.
- **세기와 덮기.** Section 8.8에서 그래프 조각의 개수를 세어 모든 순환(cycle)을 찾았고, 중간값 정리(intermediate value theorem)로 모든 길이의 순환이 존재함을 증명했다.

3. 장기적으로는 어떤 일이 일어나는가?

이 장에서는 온갖 종류의 장기적 거동을 만났다. 해는 안정 평형점에 자리 잡거나(Section 8.3), 반복되는 순환에 다가가거나(Section 8.4), 유한 시간 안에 나선을 그리며 한 점으로 모이거나(Section 8.5), 카오스(chaos)적으로 움직였다(Section 8.7). 로지스틱 사상에서는 매개변수 하나가 계를 이 모든 상태로 옮겨 간다. 고정점(fixed point), 파이겐바움(Feigenbaum)의 보편 상수가 지배하는 주기 배가(period doubling)의 연쇄, 그리고 마침내 카오스가 차례로 나타나며, 그 사이사이에 3-순환과 같은 질서의 창이 있다. 그리고 Section 8.8에서는 일단 3-순환이 나타나면 모든 길이의 순환이 존재해야 함을 보였다. 이는 정수에 대한 샤르코프스키(Sharkovskii) 순서의 첫걸음이다.

4. 미분방정식과 동역학을 위한 도구 모음

방법	사용한 곳
특이해(singular solution) 찾기	비유일성 (8.1)
증가할 수 없는 양	해의 범위 제한 (8.2)
증가율의 부호	어획 (8.3)
대칭에 맞는 좌표	극한 순환(limit cycle) (8.4); 추적 (8.5)
선형화(linearisation)를 위한 치환	베르누이 방정식(Bernoulli equation) (8.4)
론스키안	직교성 (8.6)
켤레(conjugacy)	로지스틱 사상 (8.7)
수학적 귀납법(induction)	$u_n = \sin^2(2^n\theta)$ (8.7)
그래프 조각 세기	f^n의 순환 (8.8)
중간값 정리	주기 3 (8.8)

다음으로

- 에너지와 보존 법칙(conservation law)은 Section 10.1부터 시작하는 역학에서 다시 등장한다.
- 미지수가 여러 개인 선형 미분방정식은 고유벡터(eigenvector)로 풀리며, Section 11.2에

서 진동계를 지배한다. 초등함수로 풀 수 없는 비선형 진자(pendulum)는 Section 11.3에서 다룬다.

- Section 12.15에서는 사상을 반복하여 고정점을 찾는 방법으로 어떤 성씨가 사라질지를 판정하며, 무작위 수열의 장기적 거동은 Section 12.16의 주제이다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***: 동역학계(dynamical system)에 관한 최고의 입문서로, 응용과 그림이 가득하다. 이 책을 바탕으로 한 Strogatz의 강의 녹화본이 온라인에 무료로 공개되어 있다.
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***: 카오스가 어떻게 발견되었는지에 대한 이야기이다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***: 역사 이야기가 풍부하게 담긴 고전적인 입문 교재이다.
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems***: 반복 사상을 증명과 함께 대학 1학년 수준에서 다룬다.

라플라스(Laplace)는 현재를 정확히 알면 미래 전체를 계산할 수 있다고 상상했다. 이 장은 그 꿈이 어디에서 멈추는지 보여 주었다. 유일성(uniqueness)은 성립하지 않을 수 있고, 성립하더라도 카오스가 아주 작은 불확실성을 증폭하여 예측을 불가능하게 만들 수 있다. 그러나 이 장은 공식 없이도 많은 것을 이해할 수 있음을 보여 주기도 했다. 해의 범위, 평형점, 순환과 그 안정성, 그리고 카오스 자체의 구조가 그렇다. "방정식을 풀어라"에서 "해를 이해하라"로 넘어가는 것은 대학 수학 과정이 여러분에게 요구하는 가장 중요한 사고의 전환 가운데 하나이다.

더 도전하기 해답

이 해답은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계만 제시하므로, 스스로 푼 것을 확인하는 데 쓰면 된다. 해답을 보기 전에 먼저 각 연습문제를 제대로 풀어 보도록 하자.

8.1 해가 유일하지 않을 때

1. $y = v^2$로 두면 $2vv' = \alpha v - \beta v^2$이므로 $v' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta v)$이고 $y_1 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/2}\right)^2$이다. $y = v^3$으로 두면 $v' = \frac{1}{3}(\alpha - \beta v)$이고 $y_1 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/3}\right)^3$이다. 상수 함수 $y = 0$도 양변을 모두 0으로 만든다. 유도 과정에서 v로 나눌 때 이 해가 버려진 것이다.

2. $2\sqrt{h} = 2\sqrt{h_0} - kt$이므로 $h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}kt\right)^2$이고, 양동이는 $T = \frac{2\sqrt{h_0}}{k}$에서 빈다. $h \equiv 0$과, $t \le T$에서 $h = \frac{k^2}{4}(T - t)^2$이고 $t \ge T$에서 $h = 0$인 함수는 모두 방정식을 만족하며 T 이후로 0이다. 빈 양동이를 보고는 언제 비었는지 알 수 없다.

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-2x}) = (y' - 2y)\mathrm{e}^{-2x} = 0$이므로 $y = C\mathrm{e}^{2x}$이고, $y(0) = 0$에서 $C = 0$이어야 한다. 함수 $2y$는 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지만(변화량이 많아야 $2|y_1 - y_2|$이다), $2\sqrt{y}$는 0에서 기울기가 무한대이다.

4. 임의의 $b \le 0 \le a$에 대하여($b = -\infty$ 또는 $a = \infty$도 허용한다) $x < b$에서 $y = (x - b)^3$, $b \le x \le a$에서 $y = 0$, $x > a$에서 $y = (x - a)^3$이다. $a = b = 0$인 경우가 $y = x^3$이다.

8.2 풀지 않고 범위 구하기

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = 0$이므로 $(y')^2 + y^2 = A^2$이고 $|y| \le A$이다. 정확한 해는 $A\cos x$이다.

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\theta')^2 - 2\cos\theta\right) = 2\theta'(\theta'' + \sin\theta) = 0$이다. 정지 상태에서 출발하면 $(\theta')^2 = 2(\cos\theta - \cos\theta_0) \ge 0$이므로 $\cos\theta \ge \cos\theta_0$이다. $|\theta_0| < \pi$이면 연속성(continuity)에 의해 θ는 $[-|\theta_0|, |\theta_0|]$ 안에 머물고, $|\theta_0| = \pi$이면 진자(pendulum)는 거꾸로 선 채 균형을 이루어 그대로 머문다. $|\theta_0| > \pi$이면, 예를 들어 $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$이면 $\theta''(0) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1 > 0$이므로 θ는 증가하면서 출발한다. 진자는 실제로는 각도 $\theta_0 - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$에 있으며, 그 위치를 기준으로 잰 $\pm\frac{\pi}{2}$ 사이에서 흔들린다.

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = -4k(y')^2 \le 0$이다. 실제로 0으로 수렴하지만, 단조성(monotonicity)만으로는 이를 보일 수 없다. 예를 들어 지수 $-k \pm \sqrt{k^2 - 1}$의 실수부가 음수인 명시적인 해가 필요하다.

4. $(y')^2 - \frac{1}{2}y^4$는 상수이고 그 값은 $-\frac{1}{2}$이다. 이로부터 $(y')^2 = \frac{1}{2}(y^4 - 1)$을 얻는데, 이것으로는 아무것도 유계로 만들 수 없다. "퍼텐셜(potential)" $-\frac{1}{2}y^4$에는 y를 가둘 우물이 없으며, 실제로 y는 유한 시간 안에 발산한다(blows up).

8.3 개체군 수확하기

1. 방정식은 $x' = \alpha^2 - (x - K)^2$이고, 이는 $y' = y(2\alpha - y)$가 된다. $w = \frac{1}{y}$로 두면 $w' = 1 - 2\alpha w$이므로 $w = \frac{1}{2\alpha} + Ce^{-2\alpha t}$이다. $y(0) < 0$이면 $w(0) < 0 < \frac{1}{2\alpha}$이므로 w는 유한 시간 안에 0을 지나고 $y \to -\infty$이다. x는 그 전에 0에 도달한다.

2. $z = x - K$로 두면 $z' = -(z^2 + \beta^2)$이므로 $\tan^{-1}\frac{z}{\beta} = \tan^{-1}\frac{K}{\beta} - \beta t$이다. 개체 수는 $t = \frac{2}{\beta}\tan^{-1}\frac{K}{\beta}$에서 0$(z = -K)$에 도달한다.

3. $x' = x(2K - h - x)$는 평형점(equilibrium) 0과 $2K - h$를 가진다. $h < 2K$이면 이는 양의 환경 수용력(carrying capacity)을 가진 로지스틱 방정식(logistic equation)이며, 모든 양의 해는 $2K - h$로 수렴한다. 개체 수가 줄면 어획량도 줄어들므로, 어획이 개체 수를 0으로 몰아갈 수는 없다.

4. $x = K + K\tanh Kt$이고, $\tanh Kt = \frac{1}{2}$에서 $t = \frac{1}{K}\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\ln 3}{2K}$이다.

8.4 원으로 감겨드는 나선

1. 곡선과 반지름 사이의 각 ψ는 $\tan\psi = \frac{r}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta} = -1$을 만족하며, 이 값은 모든 점에서 같다. 즉 곡선은 모든 반직선과 45°로 만난다.

2. $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2 + y^2) = r\,\mathrm{d}r$이다. 또한 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r\cos\theta(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = r^2\,\mathrm{d}\theta$이다.

3. $s = r^2$으로 두면 $\dot{s} = 2s(1 - s)$, 즉 로지스틱 방정식이므로 임의의 $s(0) > 0$에 대하여 $s \to 1$이다. 직교좌표(Cartesian) 형태로 쓰면 $\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y$, $\dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x$이다.

4. $\dot{r} = r(r - 1)(r - 2)$, $\dot{\theta} = 1$이다. 0과 1 사이에서는 $\dot{r} > 0$이고, 1과 2 사이에서는 $\dot{r} < 0$이며, 2보다 크면 $\dot{r} > 0$이다. 따라서 $r = 1$은 끌어당기고(attracting) $r = 2$는 밀어낸다(repelling).

8.5 그레이하운드를 쫓는 그레이하운드

1. 대칭성에 의해 개들은 항상 정사각형을 이룬다. A는 AB를 따라 속력 v로 달리므로 간격을 비율 v로 줄인다. B는 AB에 수직인 BC를 따라 달리므로 1차 근사에서 거리를 바꾸지 않는다. 따라서 AB는 정확히 비율 v로 s에서 0까지 줄어들고, 걸리는 시간은 $\frac{s}{v}$이다.

2. $r = \lambda e^{-\sqrt{3}\theta}$이다. 간격은 비율 $v - v\cos 120^\circ = \frac{3}{2}v$로 줄어들므로, 시간 $\frac{2s}{3v}$ 후에 만나며 각자 $\frac{2s}{3}$를 달린다(이는 $n = 3$일 때의 $\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}$와 일치한다).

3. 한 바퀴 돌 때마다 r에 $e^{-2\pi} \approx \frac{1}{535}$가 곱해진다. 한 바퀴 후에는 약 19 cm이고, 두 바퀴 후에는 약 0.35 mm이므로 두 바퀴면 충분하다.

4. 두 개는 서로를 향해 곧장 달려 시간 $\frac{s}{2v}$ 후에 가운데에서 만난다. 이때 공식은 성립하지 않는다. $\tan\frac{\pi}{2}$가 무한대인데, 이는 회전이 전혀 없다는 사실과 맞아떨어진다.

8.6 양자 진동자

1. (지루하기는 하지만) 직접 미분하면 된다. 또는 연습문제 4에서 따라 나온다. $2\lambda = \omega$이면 $\int y_0 y_2 = \int (2\omega x^2 - 1)e^{-\omega x^2}\,dx = 2\omega \cdot \frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} - \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} = 0$이다.

2. $y'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)y$이므로, 방정식이 성립하려면 $4\lambda^2 = \omega^2$이고 $2\lambda = (2\nu + 1)\omega$이어야 한다. (감쇠하려면) $\lambda = \frac{\omega}{2} > 0$이어야 하므로 $\nu = 0$이다.

3. $\frac{d}{dx}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m y_n'' - y_n y_m'' = (m^2 - n^2)y_m y_n$이다. 이를 0에서 π까지 적분한다. y_m과 y_n이 양 끝에서 0이므로 좌변은 0이 되고, $m^2 \neq n^2$이다.

4. $c = (2n+1)\omega$로 쓰면 $y_n'' = (\omega^2 x^2 - c)y_n$이다. $z = \omega x y_n - y_n'$을 두 번 미분하고 이 식(과 그 도함수)을 이용하면 $z'' - \omega^2 x^2 z = -(c + 2\omega)z$를 얻으며, $c + 2\omega = (2n + 3)\omega$이다. $y_0 = e^{-\omega x^2/2}$에서 출발하면 $2\omega x e^{-\omega x^2/2}$, 그다음 $2\omega(2\omega x^2 - 1)e^{-\omega x^2/2}$를 얻는데, 이들은 각각 y_1과 y_2의 상수배이다.

8.7 풀 수 있는 혼돈

1. (i) 수학적 귀납법(induction)으로 보인다. $0 < x < 1$이면 $0 < x(1-x) \leq \frac{1}{4}$이므로 $0 < kx(1-x) < 1$이다. (ii) $a = ka(1-a)$에서 $k = \frac{1}{1-a}$이다. (iii) $x_1 = ka(1-a) = ab$로 두면 조건 $x_2 = a$는 $kab(1-ab) = a$이다. $k = \frac{b}{1-a}$를 이용하면 이는 $ab^3 - b^2 + 1 - a = 0$이 된다. 근 $b = 1$은 고정점(fixed point)($x_1 = a$)에 해당하므로 이를 인수로 묶어 내면 $ab^2 + (a-1)b + (a-1) = 0$이다. 이를 b에 대해 풀면 $k = \frac{b}{1-a}$를 얻는다. 같은 말로, 2-순환(cycle)의 두 점은 $k^2x^2 - k(k+1)x + (k+1) = 0$의 근이며, 그 판별식(discriminant) $k^2(k+1)(k-3)$은 $k > 3$일 때에만 양수이다.

2. $p = -1$, $q = 0$, $r = -2$이면 $4pr = 8 = 8 + 2q - q^2$이다. 계수를 비교하면

$\alpha = \frac{4}{p} = -4$이고 $\beta = \frac{q-4}{2p} = 2$이므로 $v_n = 2 - 4\sin^2(2^n\theta) = 2\cos(2^{n+1}\theta)$이며, 이는 $\phi = 2\theta$일 때의 $2\cos(2^n\phi)$이다.

3. $u_3 = u_0$이려면 $\sin^2 8\theta = \sin^2\theta$이어야 하므로 $8\theta = \pm\theta + k\pi$이다. $\theta = \frac{\pi}{7}$이면 순환 $\sin^2\frac{\pi}{7} \to \sin^2\frac{2\pi}{7} \to \sin^2\frac{4\pi}{7} \to \sin^2\frac{8\pi}{7} = \sin^2\frac{\pi}{7}$이 생긴다. $\theta = \frac{\pi}{9}$이면 $\sin^2\frac{\pi}{9}$, $\sin^2\frac{2\pi}{9}$, $\sin^2\frac{4\pi}{9}$이다. 사상(map) $u \mapsto u_3$은 $2^3 = 8$개의 고정점을 가진다. 그중 두 개(0과 $\frac{3}{4}$)는 사상 자체의 고정점이므로, 정확히 주기(period) 3인 점 6개, 즉 3-순환 두 개가 남는다.

4. 각 단계에서 θ가 두 배가 되어 정확도가 이진(binary) 자릿수 하나만큼 줄어들므로, 대략 50단계 후에는 계산된 값이 참값과 아무 관계가 없어진다. 그렇다고 쓸모없는 것은 아니다. 계산된 수열은 약간 다른 출발점에서 시작한 참 궤도(orbit)에 가깝게 머물므로(**추적**(*shadowing*) 성질), 그 통계적 성질은 여전히 옳다.

8.8 주기 3이면 혼돈이다

1. $a, b, c > 0$이고 $d < 0$이면 $b = 7 - 2a$, $c = 7 - 2b$, $d = 7 - 2c$, $a = 7 + 2d$이다. 이를 풀면 $17a = 49$이므로 순환은 $\frac{49}{17} \to \frac{21}{17} \to \frac{77}{17} \to -\frac{35}{17} \to \frac{49}{17}$이고, 세 점은 $I_2 = [1, 5]$에, 한 점은 $I_1 = [-3, 1]$에 있다.

2. 찾은 점의 경로(itinerary)는 $I_2, I_2, \ldots, I_2, I_1$이다($I_2$에서 $n-1 \geq 3$단계). 순환 $1 \to 5 \to -3$은 이 경로를 따를 수 없다. -3은 I_2에 속하지 않으므로, 1(두 번째 상이 -3)도, 5(첫 번째 상이 -3)도, -3 자신도 그 점이 될 수 없다.

3. 덮음 그림(covering diagram)은 $[1,2] \to [3,4], [4,5]$; $[2,3] \to [4,5]$; $[3,4] \to [2,3], [3,4]$; $[4,5] \to [1,2]$이다. 길이 3인 고리는 $[3,4] \to [3,4] \to [3,4]$뿐이며, 이는 3-순환이 아니라 고정점을 준다.

4. $x = 14y - 7$로 두면 $\frac{f(x)+7}{14} = 1 - |2y - 1|$, 즉 텐트 사상(tent map)이다. 두 배를 하면 이진 자릿수가 왼쪽으로 한 칸 이동한다. 밀려 나간 자릿수가 1이면 결과는 $2 - 2y$이고, 이는 나머지 자릿수를 뒤집는다. 3-순환은 $\frac{2}{7} \to \frac{4}{7} \to \frac{6}{7}$과 $\frac{2}{9} \to \frac{4}{9} \to \frac{8}{9}$이며(즉 $x = -3, 1, 5$와 $x = -\frac{35}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{49}{9}$), 이진법으로 나타내면 $\frac{2}{7} = 0.\overline{010}$이고 $\frac{2}{9} = 0.\overline{001110}$이다.

장

9

세기와 확률

세기는 존재하는 수학 가운데 가장 오래된 것이다. 그것을 영리하게 해내는 일은 지금도 가장 어려운 일 가운데 하나다.

이 장의 내용

9.1	평면을 자르는 직선	STEP II 1990
9.2	축소판 램지 정리	STEP I 1989
9.3	울타리 기둥 색칠하기	STEP II 1995
9.4	함수로서의 수열	STEP I 2016
9.5	거스름돈 만들기	STEP I 1997
9.6	이상한 주사위	STEP I 1993
9.7	같은 거듭제곱의 합	STEP I 1992
9.8	아무도 자기 셔츠를 받지 못한다	STEP II 2016
9.9	생일 문제	STEP II 2007
9.10	언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록	STEP I 2011
9.11	한 세트 모두 모으기	STEP II 1994
9.12	무작위 부분집합	STEP III 2019
9.13	조작된 주사위	STEP I 1999
A	연습문제 해답	665쪽

세기의 기술

> 조합론은 위상수학의 빈민가이다.
>
> — J. H. C. 화이트헤드(Whitehead), 1950년대. 오늘날 이런 견해를 가진 사람은 아무도 없다.

누구나 셀 수 있다. 그러나 동전으로 £1을 만드는 방법이 몇 가지인지, 열 사람을 아무도 자기 자리에 앉지 않도록 앉히는 방법이 몇 가지인지, 지도를 네 가지 색으로 칠하는 방법이 몇 가지인지 물으면 단순한 세기는 금세 무너진다. 나열하기에는 경우가 너무 많고, 경우끼리 서로 겹친다. 세기와 배열의 수학인 **조합론**(combinatorics)은 이런 문제를 나열하지 않고도 풀 수 있도록 정리하는 기술이다.

화이트헤드의 말이 보여 주듯이, 오랫동안 조합론은 진지한 학문이라기보다 영리한 요령의 모음으로 여겨졌다. 이런 인식은 20세기 후반에 바뀌었다. 한편으로는 알고리즘이 거치는 단계의 수를 세는 일 자체가 조합론의 문제인 컴퓨터 과학이 그 변화를 이끌었고, 다른 한편으로는 대수학, 기하학, 확률(probability)과의 깊은 연관이 발견되었기 때문이다. 오늘날 조합론은 수학에서 가장 활발한 분야 가운데 하나다. 2022년 허준이(June Huh)는 수학 최고의 영예인 필즈상(Fields Medal)을 받았는데, 그 업적 가운데 하나가 Section 9.3의 채색 다항식(chromatic polynomial)에 관한 1968년의 추측(conjecture)을 대수기하학(algebraic geometry)의 아이디어로 증명한 것이었다.

세기가 중요한 이유

가장 단순한 형태의 확률은 곧 세기다. 모든 결과가 똑같이 일어날 법할 때, 어떤 사건의 확률은 유리한 결과의 수를 전체 결과의 수로 나눈 값이다. 그래서 카드, 주사위, 복권에 관한 모든 질문은 세기 문제이며, 바로 이 때문에 이 장의 후반부는 확률 문제에서 가져왔다. 그러나 세기는 게임을 훨씬 넘어서는 곳에서도 중요하다. 컴퓨터 과학자는 알고리즘에 필요한 연산의 수와 알고리즘이 실패할 수 있는 경우의 수를 센다. 화학자는 분자가 가질 수 있는 구조의 수를 센다. 생물학자는 DNA 가닥이 접힐 수 있는 방법의 수를 센다. 암호학자는 공격자가 시도해야 하는 키의 수를 세고, Section 9.9에서 보듯이 무언가 두 개가 일치하기까지 몇 개가 필요한지도 센다.

대학에서 만나게 될 것

대부분의 대학은 1학년이나 2학년에 조합론 또는 이산수학(discrete mathematics) 과목을 개설하며, 그 주제는 이 장의 주제와 같다. 기본적인 세기 원리(곱의 법칙(product rule), 전단사(bijection), 포함–배제의 원리(inclusion–exclusion), 비둘기집 원리(pigeonhole principle))를 배우고, 점화식(recurrence relation)을 세우고 푸는 방법을 배운다. 수열을 함수로, 세기를 대수로 바꾸어 주는 **생성함수**(generating function)를 만나게 된다. 채색에서 램지 이론(Ramsey theory)에 이르기까지 그래프(graph)를 공부하고, 부분집합 격자(lattice of subsets) 같은 부분순서집합(partially ordered set)을 공부한다. 그리고 확률 과목에서는 같은 도구를 기댓값의 선형성(linearity of expectation)과 함께 사용하여 무작위 구조를 분석한다. 더 나아가 조합론은 대수학(대칭함수(symmetric function), 표현론(representation theory)), 정수론(분할(partition), 덧셈 조합론(additive combinatorics)), 컴퓨터 과학(알고리즘 분석, 계산 복잡도 이론(complexity theory))과 연결된다.

이 장을 관통하는 질문

세 가지 큰 질문

1. **나열하지 않고 어떻게 셀 수 있는가?** 어떤 구조(점화식, 전단사, 생성함수)가 있어야 거대한 모임을 정확하게 셀 수 있는가?
2. **언제 반드시 무언가가 일어나는가?** 언제 크기만으로 어떤 패턴, 우연의 일치, 짝이 강제되는가?
3. **세기와 확률은 서로를 어떻게 돕는가?** 언제 확률은 세기로 구하는 것이 가장 좋고, 언제 개수는 확률로 구하는 것이 가장 좋은가?

이 장은 두 부분으로 이루어진다. 앞의 일곱 절은 순수수학 문제에서 가져왔다. 점화식(평면을 자르는 직선, 울타리 기둥 칠하기)과 비둘기집 원리(램지 정리)로 시작한 다음, 생성함수를 전개하고 이를 이용해 동전의 조합을 세고, 이상한 주사위를 설계하고, 수를 거듭제곱의 합이 같은 두 팀으로 나눈다. 뒤의 여섯 절은 확률 문제에서 가져온 고전적인 세기 문제들이다. 완전순열(derangement)과 $1/e$의 등장, 생일 문제(birthday problem), 투표 문제(ballot problem)와 그 반사 원리(reflection principle), 쿠폰 수집가 문제(coupon collector problem), 무작위 부분집합, 그리고 모든 합이 똑같은 확률로 나오도록 주사위를 조작하는 것이 불가능하다는 사실을 다룬다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
9.1	평면의 영역	하나를 더 추가하면 무엇이 바뀌는가
9.2	램지 이론	비둘기집 원리
9.3	그래프 채색	연립 점화식; 채색 다항식
9.4	생성함수	수열이 함수가 된다
9.5	분할	계수를 이용한 세기
9.6	시커먼 주사위(Sicherman dice)	다항식의 인수분해
9.7	투에–모스(Thue–Morse)	중근이 균형 잡힌 합을 준다
9.8	완전순열	포함–배제의 원리; $1/e$
9.9	우연의 일치	여사건(complement); 제곱근 법칙
9.10	투표 문제	반사 원리
9.11	쿠폰 수집가 문제	기댓값의 선형성; $n \ln n$
9.12	무작위 부분집합	한 번에 원소 하나씩
9.13	조작된 주사위	산술–기하 평균 부등식(AM–GM)에 의한 불가능성

이 장을 읽는 방법

언제나 작은 경우부터 시작하라. 직선 세 개를 그려 보고, 카드 세 장을 늘어놓는 여섯 가지 순서를 나열해 보고, 5p를 만드는 방법을 세어 보라. 작은 경우는 추측의 근거가 되는 자료를 주고, 마지막에는 공식을 검산해 준다. 그러나 이유를 찾기 전까지는 패턴을 믿지 마라. Section 9.1에는 $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$로 시작하지만 다음 항이 31인 유명한 수열이 나온다.

9.1 평면을 자르는 직선

문제

STEP II 1990, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/90-s2-q4`

도입

조각의 크기가 같지 않아도 된다면, 피자를 n번 곧게 잘라 최대 몇 조각으로 나눌 수 있을까? 한 번 자르면 2조각, 두 번이면 4조각, 세 번이면 7조각(8조각이 아니다. 직접 해 보라), 네 번이면 11조각이다. 수열 $1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots$은 **게으른 요리사 수열**(*lazy caterer's sequence*)이라고 불리며, 이 문제는 그 일반항을 구하라고 한다.

이 문제는 조합론(combinatorics) 전체에 걸쳐 쓰이는 기법의 첫 수업이다. 모든 것을 한꺼번에 세려고 하지 말라. 대신 대상을 하나 더 추가할 때 무엇이 바뀌는지 물어라. 그리고 그 답은 Section 7.9에서 정다면체(Platonic solids)와 함께 만났던 오일러(Euler) 공식 $V - E + F = 2$의 특수한 경우임이 밝혀진다.

시작하기 전에

잠깐, 직접 해 보기 직선들이 일반적 위치(general position)에 있도록(어느 두 직선도 평행하지 않고, 어느 세 직선도 한 점을 지나지 않도록) 하여 $n = 1, 2, 3, 4$인 경우를 조심스럽게 그려 보라. 각 경우에 선분과 영역의 개수를 세어 보라. 규칙을 추측할 수 있는가?

다음과 같은 결과를 얻을 것이다.

n	0	1	2	3	4
선분	0	1	4	9	16
영역	1	2	4	7	11

선분의 개수는 n^2인 것처럼 보인다. 영역의 개수는 $1, 2, 3, 4$씩 늘어난다. 즉 계차가 자연수이다.

차근차근 풀기

1단계 선분 세기

생각해 보기 직선 하나에만 집중하라. 다른 직선 중 몇 개가 이 직선과 만나고, 그 직선들은 이 직선을 몇 조각으로 자르는가?

각 직선은 나머지 $n-1$개의 직선 각각과 만나고(어느 것도 이 직선과 평행하지 않으므로), 그 교점은 서로 다른 $n-1$개의 점이다(어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않으므로). 이 $n-1$개의 점은 직선을 n개의 선분으로 자른다. 양 끝의 무한한 선분 두 개와 그 사이의 유한한 선분 $n-2$개이다. 직선이 n개이므로, 모두

$$n \times n = n^2\text{개의 선분.} \qquad \blacksquare$$

이 있다. 이것은 직접 센 것이며 수학적 귀납법(induction)이 필요하지 않다. 직선 하나씩 선분을 세었을 뿐이다.

2단계 직선을 하나 더하면 어떻게 되는가?

생각해 보기 $n-1$개의 직선이 그려져 있고, 여기에 n번째 직선을 더한다고 하자. 이 직선은 다른 직선들에 의해 n개의 선분으로 잘린다. 각 선분은 자신이 지나가는 영역에 어떤 일을 하는가?

새 직선을 그으면, 그 n개의 선분은 각각 기존 영역 중 하나를 지나가면서 그 영역을 둘로 나눈다(그림 9.1.1). 한 영역에서 다른 영역으로 넘어가려면 기존 직선을 지나야 하므로, 서로 다른 선분은 서로 다른 영역에 놓인다. 따라서 n번째 직선을 더하면 영역의 개수는 정확히 n만큼 늘어난다.

$$R(n) = R(n-1) + n.$$

3단계 점화식(recurrence relation) 풀기

$R(0) = 1$(직선이 없으면 영역은 하나)에서 시작하면

$$R(n) = 1 + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

이를 귀납법으로 제시하면 다음과 같다. $\frac{1}{2}(1+1+2) = 2$이므로 $n = 1$일 때 공식이 성립한다. 그리고 $R(n-1) = \frac{1}{2}\big((n-1)^2 + (n-1) + 2\big) = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$이면 $R(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) + n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$이다. $\blacksquare$

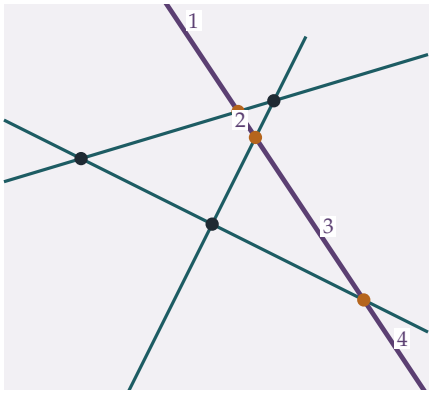


그림 9.1.1 세 직선(청록색)은 평면을 7개의 영역으로 나눈다. 네 번째 직선(자주색)은 호박색 점들에서 다른 세 직선과 만나며, 이 점들이 직선을 1부터 4까지 번호가 붙은 네 개의 선분으로 자른다. 각 선분은 영역 하나를 둘로 나누므로, 네 번째 직선은 영역을 4개 늘려 모두 11개가 된다.

돌아보기

- **한 번에 한 조각씩 세라.** 선분은 직선 하나씩 세었고, 영역은 새 직선 하나가 더하는 개수로 세었다.
- **기하학적 단계를 점화식으로 바꾸라.** "새 선분 하나가 영역 하나를 나눈다"는 관찰이 $R(n) = R(n-1) + n$이 되었다.
- **일반적 위치가 중요하다.** 평행한 직선이 있거나 세 직선이 한 점을 지나면 영역이 더 적어진다. 각 가정이 어디에서 쓰였는지 찾아보라.

숨은 수학

변장한 오일러 공식

여기 두 번째 증명이 있다. 이 증명은 답을 단지 유도하는 데 그치지 않고 설명해 준다. 직선들의 배치를 하나의 지도로 생각하자. 교점은 **꼭짓점**(*vertex*), 선분은 **변**(*edge*), 영역은 **면**(*face*)이다. 꼭짓점은 $V = \binom{n}{2}$개(직선 두 개의 쌍마다 하나), 변은 $E = n^2$개이다. 무한한 선분은 끝점이 하나뿐이므로, 이들이 모두 만나는 "무한대" 꼭짓점 하나를 추가한다. 그러면 이 그림은 구 위에 그려진 지도가 된다(평면으로 공을 감싸고 무한대가 꼭대기에 있다고 상상하라). Section 7.9의 오일러 공식 $V - E + F = 2$에 의해

$$\left(\binom{n}{2} + 1\right) - n^2 + F = 2, \qquad \text{따라서} \qquad F = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

완전히 다른 방향에서 같은 수가 나온다. 영역들은 종류별로도 깔끔하게 나뉜다. 그중 $2n$개는 유계가 아니고(이웃한 무한 반직선 쌍마다 하나), 나머지 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)-2n=\binom{n-1}{2}$개는 유계이다.

이항계수와 고차원

공식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2},$$

그리고 이것은 우연이 아니다. 어떤 직선도 수평이 되지 않도록 그림을 돌리자. 아래로 유계인 영역에는 가장 낮은 점이 있는데, 이 점은 교점이어야 하고, 각 교점은 정확히 한 영역(그 바로 위의 영역)의 가장 낮은 점이다. 이로써 직선 쌍마다 하나씩 $\binom{n}{2}$개의 영역을 얻는다. 나머지 영역은 모두 아래로 끝없이 뻗어 있으므로, 모든 교점보다 훨씬 아래에 그은 수평선과 만난다. n개의 직선은 그 수평선을 $n+1$개의 구간으로 자르고, 그러한 영역마다 구간이 하나씩 있다. 모두 합하면 $\binom{n}{2}+n+1$이다. 3차원에서는 일반적 위치에 있는 n개의 평면이 공간을

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

개의 조각(**케이크 수**(*cake numbers*) $1,2,4,8,15,26,\ldots$)으로 자르며, 이 규칙은 모든 차원에서 계속된다. 증명은 같은 귀납법이다. 새 평면은 다른 평면들에 의해 평면 위의 직선들처럼 배열된 영역들로 잘리고, 그 영역 각각이 공간의 한 조각을 둘로 나눈다.

슈타이너와 초평면 배열

직선과 평면으로 잘린 영역의 개수에 대한 공식은 1826년 슈타이너(Jakob Steiner)가 발견했다. 오늘날 이 공식은 **초평면 배열**(*hyperplane arrangements*) 이론의 출발점이다. 이 이론은 일반적 위치가 아닌 경우를 포함하여, 직선, 평면, 그리고 이들의 고차원 유사물을 임의로 모아 놓았을 때 생기는 영역의 개수를 센다. 1975년 Thomas Zaslavsky의 놀라운 정리는 어떤 초평면들이 만나는지를 담고 있는 다항식을 이용하여 임의의 배열의 영역 개수를 센다. 같은 아이디어가 기계 학습에도 나타난다. "ReLU" 단위로 만든 신경망은 입력 공간을 초평면으로 잘라 영역들로 나누며, 그 영역의 개수는 신경망이 나타낼 수 있는 함수가 얼마나 복잡한지를 가늠하는 척도가 된다.

사고 기술

하나를 더 추가하면 무엇이 바뀌는지 물어라

n개의 대상으로 이루어진 배치를 세려면, $n-1$개로 이루어진 배치와 비교하라. 변화량은 전체보다 훨씬 세기 쉬운 경우가 많다.

이것은 증명만을 위해서가 아니라 발견의 도구로 쓰이는 귀납법이다. 조합론에서 가장 흔한 수법 중 하나이며, 기하학적 질문을 풀 수 있는 점화식으로 바꾸어 준다.

더 도전하기

1 **원.** 어느 두 원도 두 점에서 만나고 어느 세 원도 한 점을 지나지 않는 n개의 원이 평면을 n^2-n+2개의 영역으로 나눔을 보여라.

2 **평행선.** n개의 직선 중 k개가 모두 서로 평행하다면(그 밖에는 일반적 위치), 영역은 몇 개인가?

3 **케이크 수.** 일반적 위치에 있는 n개의 평면이 공간을 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$개의 영역으로 나눔을 귀납법으로 증명하라.

4 **깨지는 규칙.** 원 위에 n개의 점을 놓고 모든 쌍을 현으로 잇되, 원 내부의 한 점을 세 현이 지나지 않도록 하라. $n=1,2,3,4,5$일 때 영역은 $1,2,4,8,16$개이다. $n=6$일 때 영역의 개수를 세어 보라. (**힌트:** 오일러 공식을 이용하라. 네 점의 집합마다 교점이 하나씩 생긴다.) 그 개수가 $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley), 1장. 바로 이 문제와 그 변형인 "피자" 문제, "지그(zig)" 문제로 시작한다.
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 친절한 입문 교재로, 귀납법, 그래프, 오일러 공식을 다루는 장이 있다.
- **Richard Guy, "The strong law of small numbers"**, *American Mathematical Monthly* 95 (1988). 당연해 보이지만 거짓으로 밝혀지는 여러 규칙을 소개하며, 연습 문제의 원 문제도 포함되어 있다.

9.2 축소판 램지 정리

문제

STEP I 1989, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/89-s1-q4`

도입

여섯 사람이 모인 파티에서는 언제나 서로 모두 아는 세 사람이 있거나, 서로 모두 모르는 세 사람이 있다. 여섯 사람이 누구이든 이것은 반드시 성립한다. 다섯 사람이라면 그렇지 않다. 이 작은 사실은 **램지 정리**(Ramsey's theorem)의 첫 번째 경우이며, 현대 조합론 전체를 관통하는 원리 하나를 담고 있다. 그것은 **완전한 무질서는 불가능하다**는 것이다. 충분히 큰 구조는 어떻게 색칠하거나 배열하든 반드시 고도로 질서 잡힌 부분을 포함한다.

증명은 네 줄이면 된다. 그러나 당연히 이어지는 질문(서로 모두 아는 네 사람이나 서로 모두 모르는 네 사람을 보장하려면 몇 명이 필요할까? 다섯 사람이라면?)은 수학에서 가장 어려운 미해결 문제 몇 가지로 이어진다.

시작하기 전에

생각해 보기 여섯 개의 점은 어떤 쌍이 어떤 색으로 이어져 있는지를 통해서만 의미를 가진다. 기하학적 배치는 주의를 흐트러뜨릴 뿐이다. 선분은 모두 몇 개이고, 각 점에서 나가는 선분은 몇 개인가?

선분은 $\binom{6}{2} = 15$개이고, 각 점에서 5개가 나간다. (일반적 위치(general position) 조건은 단지 어느 세 점이든 진짜 삼각형을 이루도록 보장할 뿐이다. 이 문제는 사실 꼭짓점이 여섯 개인 **완전 그래프**(complete graph) K_6의 변을 두 가지 색으로 칠하는 문제이다.)

차근차근 풀기

1단계 선분 다섯 개, 색 두 가지

> **생각해 보기** A에서 다섯 개의 선분이 나가고, 각각은 금색이거나 은색이다. 이들의 색에 대해 확실히 말할 수 있는 것은 무엇인가?

그중 적어도 세 개는 같은 색이다. 금색이 많아야 두 개이고 은색도 많아야 두 개라면, 선분은 많아야 네 개일 것이기 때문이다. 이것이 **비둘기집 원리**(pigeonhole principle)이다. 다섯 개의 물건을 두 상자에 넣으면 어느 한 상자에는 적어도 세 개가 들어간다. (필요하면 두 색의 이름을 서로 바꾸어) AB, AC, AD가 모두 금색이라고 하자.

2단계 반대쪽 끝을 보라

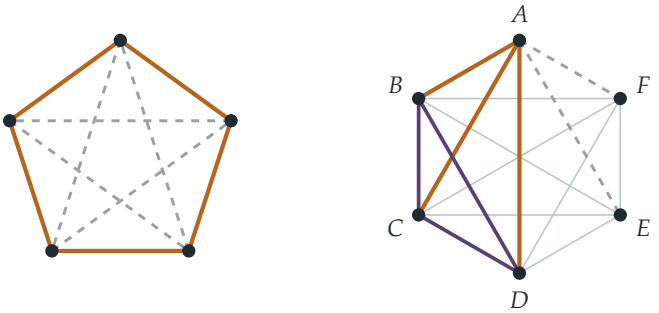
> **생각해 보기** 이제 삼각형 BCD를 보자. 이 삼각형의 변 중 하나라도 금색이면 어떻게 되는가? 하나도 금색이 아니면 어떻게 되는가?

삼각형 BCD의 변 중 하나, 예를 들어 BC가 금색이면 ABC는 세 변 AB, AC, BC가 모두 금색이다. BCD의 어느 변도 금색이 아니면 BC, CD, DB가 모두 은색이므로 BCD는 은색 삼각형이다. 어느 쪽이든 단색 삼각형이 존재한다(그림 9.2.1의 오른쪽). ■

3단계 다섯 점으로는 부족하다

> **생각해 보기** 점이 다섯 개이면 각 점에는 선분이 네 개뿐이다. 각 점마다 두 색이 정확히 두 개씩 되도록 어떻게 칠할 수 있을까?

다섯 점을 정오각형 모양으로 놓는다(일반적 위치를 원한다면 점들을 평면에서 살짝 들어 올린다). 오각형의 다섯 변을 금색으로, 다섯 대각선을 은색으로 칠한다(그림 9.2.1의 왼쪽). 금색 변들은 길이 5인 순환(cycle)을 이루므로 삼각형을 포함하지 않는다. 은색 변들은 오각별을 이루는데, 이것도 길이 5인 순환이므로 삼각형을 포함하지 않는다. 따라서 단색 삼각형은 없다. ■



다섯 점: 단색 삼각형 없음　　여섯 점: BCD를 보라

그림 9.2.1 왼쪽: 다섯 점에서 오각형을 금색(실선)으로, 오각별을 은색(점선)으로 칠하면 단색 삼각형이 없다. 오른쪽: 여섯 점에서는 A에서 나가는 다섯 선분 중 세 개가 같은 색이며, 이를테면 B, C, D로 가는 선분이 금색이다. 그러면 삼각형 BCD(자주색)가 결론을 정한다. 금색 변이 하나라도 있으면 A와 함께 금색 삼각형을 이루고, 금색 변이 없으면 BCD가 은색 삼각형이 된다.

돌아보기

- **관계없는 것을 걷어 내라.** 공간의 점들은 색칠된 그래프가 되었고, 중요한 것은 변의 색뿐이었다.
- **비둘기집.** 변 다섯 개와 색 두 가지가 같은 색 세 개를 강제했다.
- **알맞은 대상에 대한 경우 나누기.** 금색 변 세 개를 찾고 나자, 그 반대쪽 끝이 이루는 삼각형이 모든 것을 결정했다.
- **최선성.** 오각형은 여섯이라는 수를 더 줄일 수 없음을 보여 준다. 좋은 정리에는 그것이 최선임을 보여 주는 예가 함께 따른다.

숨은 수학

램지 수

램지 수(Ramsey number) $R(s,t)$는 K_N의 변을 금색과 은색으로 어떻게 칠하든 금색 K_s(s개의 점으로 이루어진 집합으로, 그 사이의 변이 모두 금색인 것)나 은색 K_t가 반드시 포함되도록 하는 가장 작은 N이다. 이 문제는 $R(3,3) = 6$임을 보였다. 여섯 점이면 언제나 성립하고, 오각형은 다섯 점으로는 성립하지 않음을 보여 준다.

프랭크 램지(Frank Ramsey)는 1928년에 이 수들이 항상 존재함을, 즉 모든 s와 t에 대해 조건을 만족하는 N이 있음을 증명했다. 그 증명은 위의 논증을 일반화한 귀납법(induction)이

며, $R(s,t) \le R(s-1,t) + R(s,t-1)$임을 보여 준다. 그러나 정확한 값을 구하는 것은 엄청나게 어렵다.

$$R(3,3) = 6, \qquad R(4,4) = 18, \qquad 43 \le R(5,5) \le 46.$$

$R(4,4)$의 값은 1955년에 밝혀졌다. 막대한 컴퓨터 탐색에도 불구하고 $R(5,5)$는 아직 알려지지 않았으며, 상계 46도 2024년에야 증명되었다. 컴퓨터로 K_{43}의 모든 색칠을 하나하나 확인할 수는 없다. 그런 색칠은 2^{903}가지로, 우주에 있는 원자의 수보다 훨씬 많다.

에르되시와 외계인

램지 이론을 발전시키는 데 누구보다 많은 일을 한 폴 에르되시(Paul Erdős)는 이런 이야기를 즐겨 했다. 외계인이 지구를 침공해, $R(5,5)$의 값을 알려 주지 않으면 지구를 파괴하겠다고 위협한다고 하자. 우리는 모든 컴퓨터와 수학자를 총동원해야 하며, 그러면 그 값을 찾아낼 수도 있다. 하지만 그들이 $R(6,6)$을 요구한다면, 우리는 외계인을 무찌르려고 해야 한다. 에르되시는 또한 1947년에 놀라운 방법으로 $R(k,k) > 2^{k/2}$임을 증명했다. 그는 점이 $2^{k/2}$개보다 적은 그래프를 **무작위로** 색칠하면 단색 K_k를 포함하지 않을 확률이 양수임을 보였다. 따라서 아무도 그것을 만드는 방법을 모르더라도 좋은 색칠은 반드시 존재한다. 이 **확률론적 방법**(probabilistic method)은 오늘날 조합론에서 가장 강력한 도구 가운데 하나이다.

혼돈 속의 질서

램지 정리에는 친척이 많으며, 모두 같은 생각, 즉 충분히 큰 구조는 질서를 피할 수 없다는 생각을 표현한다. **판 데르 베르던 정리**(van der Waerden's theorem)는 자연수를 유한 개의 색으로 칠하면 한 가지 색으로 이루어진 등차수열(arithmetic progression)이 얼마든지 긴 것이 존재한다고 말한다. **에르되시-세케레시 정리**(Erdős–Szekeres theorem)는 서로 다른 n^2+1개의 수로 이루어진 수열은 길이가 $n+1$인 증가하는 부분수열(subsequence)이나 감소하는 부분수열을 포함한다고 말한다. 그리고 램지 자신은 논리학의 질문에 관심이 있었다. 그는 논리적 명제의 참거짓을 판정하는 문제에 관한 논문에서 보조정리(lemma)로서 자신의 정리를 증명했다.

사고 기술

비둘기집 원리

kn개보다 많은 물건을 n개의 상자에 넣으면, 어떤 상자에는 k개보다 많은 물건이 들어 있다.

이 원리는 자명하지만, 잘 쓰는 것은 하나의 기술이다. 핵심은 무엇을 물건으로, 무엇을 상자로 삼을지 고르는 데 있다. 여기서는 한 점에서 나가는 다섯 변이 물건이었고, 두 가지 색이 상자였다. 대학에서 비둘기집 논법은 정수론(무리수를 분수로 근사하기), 해석학(볼차노-바이어슈트라스 정리(Bolzano–Weierstrass theorem)), 그리고 조합론 전반에 등장한다.

더 도전하기

1 **적어도 두 개.** K_6를 두 가지 색으로 어떻게 칠하든 사실은 단색 삼각형이 적어도 **두 개** 있음을 보여라. (**힌트:** "이색 각", 즉 한 꼭짓점을 공유하면서 색이 서로 다른 변의 쌍을 세어라. 금색 변 g개와 은색 변 $5-g$개를 가진 점은 그런 각 $g(5-g) \leq 6$개의 꼭짓점이다. 단색이 아닌 삼각형은 각각 그런 각을 정확히 두 개 포함한다.)

2 **세 가지 색.** K_{17}의 변을 세 가지 색으로 칠하면 단색 삼각형이 있음을 보여라. (**힌트:** 어떤 점에는 같은 색의 변이 적어도 여섯 개 있다.)

3 **셋 또는 넷.** $R(3,4) \leq 10$임을 보여라. 즉 K_{10}을 금색과 은색으로 어떻게 칠하든 금색 삼각형이나 은색 K_4가 있다. (**힌트:** 한 점에는 금색 변이 적어도 4개 있거나 은색 변이 적어도 6개 있다.) 실제로는 $R(3,4) = 9$이다.

4 **단조 부분수열.** $n = 2$일 때 에르되시-세케레시 정리를 증명하여라. 즉 서로 다른 5개의 수로 이루어진 수열은 길이가 3인 증가하는 부분수열이나 감소하는 부분수열을 포함한다. 둘 다 포함하지 않는, 길이가 4인 수열을 찾아라.

더 읽을거리

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 비둘기집 원리와 램지 이론을 다룬 장.
- **Ronald Graham & Joel Spencer, "Ramsey theory"**, *Scientific American* (1990년 7월). 두 선도적 연구자가 쓴 대중적인 입문 글.
- **Noga Alon & Joel Spencer, *The Probabilistic Method*** (Wiley). 에르되시의 방법을 다룬 표준 교재로, 첫 장은 읽기 쉽다.
- **Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers*** (Fourth Estate). 에르되시의 전기.

9.3 울타리 기둥 색칠하기

문제

STEP II 1995, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/95-s2-q2`

도입

일렬로 늘어선 기둥을 칠하는 것은 쉽다. 첫 번째 기둥은 3가지, 나머지 기둥은 각각 2가지(바로 앞 기둥의 색만 아니면 된다)를 고를 수 있으므로 $3 \times 2^{n-1}$가지이다. 그런데 이 줄을 구부려 원으로 만들면 문제는 뜻밖에 까다로워진다. 이제 마지막 기둥은 이웃한 기둥뿐 아니라 첫 번째 기둥과도 색이 달라야 하는데, 이 조건 때문에 배제되는 색이 하나인지 없는지는 앞에서 일어난 모든 일에 따라 달라지기 때문이다.

이 문제는 고전적인 기법으로 이 어려움을 피해 간다. 마지막 기둥의 색에 따라 경우를 나누어 세고, 각 경우가 서로 어떻게 이어지는지 찾는 것이다. 답 $2^n + 2(-1)^n$은 **채색 다항식**(chromatic polynomial)의 첫 번째 예로, 4색 정리(four colour theorem)의 바탕에 있는 수학의 일부이다.

시작하기 전에

잠깐, 직접 해 보기 원 모양으로 놓인 기둥 3개와 4개를 칠하는 방법의 수를 세어 보아라. $3 \times 2^{n-1}$은 실제보다 많이 세는가? 그렇다면 얼마나 많이 세는가?

원 모양으로 놓인 기둥 세 개는 모두 서로 이웃하므로 세 가지 색을 모두 다르게 써야 한다. 따라서 $3! = 6$가지이다. 원 모양으로 놓인 기둥 네 개는 18가지이다(마지막에 확인할 수 있다). 일렬로 놓인 경우의 $3 \times 2^2 = 12$, $3 \times 2^3 = 24$와 비교해 보라. 원에서는 마지막 기둥이 첫 번째 기둥과 같은 색인 칠하기가 빠진다.

차근차근 풀기

1단계 두 종류의 칠하기

생각해 보기 기둥 $n+1$개를 첫 번째와 마지막 기둥이 빨간색이 되도록 칠한 것을 하나 생각하자. 마지막 기둥을 없애면, 남은 처음 n개 기둥의 칠하기에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

기둥 n은 빨간색인 기둥 $n+1$과 이웃하므로, 기둥 n은 빨간색이 아니다. 기둥 $n+1$을 없애면 첫 번째 기둥은 빨간색이고 마지막 기둥은 빨간색이 아닌 n개 기둥의 칠하기, 곧 s_n가지 칠하기 중 하나가 남는다. 거꾸로, s_n가지 칠하기 중 어느 것이든 기둥 $n+1$을 빨간색으로 칠하는 단 한 가지 방법으로 확장할 수 있다. 따라서 두 집합은 정확히 일대일로 대응하고, $r_{n+1} = s_n$이다.

생각해 보기 $r_n + s_n$은 무엇인가?

첫 번째 기둥이 빨간색인 칠하기에서 마지막 기둥은 빨간색이거나 빨간색이 아니므로, $r_n + s_n$은 첫 번째 기둥이 빨간색인 n개 기둥의 칠하기 전체의 수이다. 첫 번째 기둥 다음의 각 기둥은 2가지씩 고를 수 있으므로 $r_n + s_n = 2^{n-1}$이다. 따라서

$$r_{n+1} + r_n = s_n + r_n = 2^{n-1}. \qquad \blacksquare$$

2단계 귀납법으로 구하는 공식

$n = 1$이면 기둥이 하나이고 빨간색으로 칠하므로 $r_1 = 1$이며, 공식도 $\frac{1}{3}(1+2) = 1$을 준다. 공식이 r_n에 대해 성립한다고 가정하자. 그러면

$$r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n = 2^{n-1} - \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} = \frac{2 \cdot 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1}}{3} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3},$$

이고, 이것은 r_{n+1}에 대한 공식이다. 따라서 수학적 귀납법(induction)에 의해 공식이 성립한다. $\blacksquare$

잠깐, 직접 해 보기 이 공식은 어디에서 나왔을까? 점화식(recurrence) $r_{n+1} + r_n = 2^{n-1}$은 미분방정식(differential equation)과 비슷하다. 즉 "특수해(particular solution)" $c \cdot 2^n$에 $r_{n+1} + r_n = 0$을 만족하는 "여함수(complementary function)" $A(-1)^n$을 더한 꼴이다. c와 A를 구하여라.

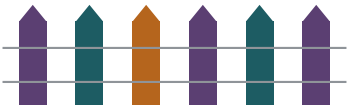
3단계 원

생각해 보기 n개의 기둥이 놓인 원에서 기둥 1의 색을 빨간색으로 고정하자. 이제 기둥 n과 기둥 1 사이에서 원을 끊어 일직선으로 펴자. 일렬로 놓인 기둥의 칠하기 중 어느 것이 올바른 원의 칠하기에 대응하는가?

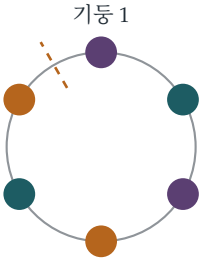
원을 펴면 빨간색으로 시작하는 n개 기둥의 줄이 되는데, 이때 마지막 기둥은 기둥 1과도 색이 달라야 한다. 즉 마지막 기둥은 빨간색이 아니다. 이것이 바로 s_n가지 칠하기이다. 기둥 1은 3가지 색 중 어느 것이든 될 수 있으므로, 원의 칠하기의 수는

$$3s_n = 3(2^{n-1} - r_n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} = 2^n + 2(-1)^n. \qquad \blacksquare$$

검산: $n = 3$이면 $8 - 2 = 6$이고, $n = 4$이면 $16 + 2 = 18$이다.



일렬로 놓인 기둥: $3 \times 2^{n-1}$



원 모양: $2^n + 2(-1)^n$

그림 9.3.1 왼쪽: 일렬로 놓인 경우, 첫 번째 다음의 각 기둥은 바로 앞 기둥과 색이 다르기만 하면 된다. 오른쪽: 원 모양인 경우, 마지막 기둥은 기둥 1과도 색이 달라야 한다. 점선에서 원을 끊으면 원의 칠하기는 첫 번째 기둥과 마지막 기둥의 색이 다른 일렬 칠하기, 곧 문제에서 센 s_n가지 칠하기 중 하나가 된다.

돌아보기

- **서로 이어지는 경우로 나누기.** 마지막 기둥이 빨간색인지를 기록하자 두 수열 r_n과 s_n이 생겼고, 이들은 간단한 점화식으로 연결되었다.
- **전단사(bijection).** $r_{n+1} = s_n$은 계산이 아니라 칠하기를 일대일로 짝지어 증명하였다.
- **원을 끊기.** 원형 문제가 양 끝에 조건이 붙은 일렬 문제로 바뀌었다.

숨은 수학

채색 다항식

기둥과 그 이웃 관계는 **그래프**(graph)를 이룬다. 일렬로 놓인 경우는 경로(path), 원 모양인 경우는 사이클(cycle)이다. **적절한 색칠**(proper colouring)이란 이웃한 꼭짓점에 서로

다른 색을 칠하는 것이다. k가지 색으로 하는 적절한 색칠의 수는 k에 대한 다항식이며, 이를 그래프의 **채색 다항식**이라 한다. 이 개념은 1912년 조지 버코프(George Birkhoff)가 도입하였다. 문제의 논증을 k가지 색으로 반복하면

$$\text{경로: } k(k-1)^{n-1}, \qquad \text{사이클: } (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

을 얻는다. $k=3$이면 사이클의 공식은 $2^n + 2(-1)^n$이다. 버코프는 모든 지도의 그래프의 채색 다항식이 $k=4$에서 양수임을 보여 4색 정리(모든 지도는 이웃한 나라끼리 색이 다르도록 네 가지 색으로 칠할 수 있다)를 증명하고자 했다. 이 접근법은 끝내 성공하지 못했고, 4색 정리는 1976년에 케네스 아펠(Kenneth Appel)과 볼프강 하켄(Wolfgang Haken)이 컴퓨터의 대대적인 도움을 받아 마침내 증명하였다. 채색 다항식은 지금도 활발한 연구 분야이며, 통계물리학과 놀라운 연관이 있는데, 그곳에서는 자성에 관한 **포츠 모형**(Potts model)으로 나타난다.

행렬로 같은 수 세기

7장의 선형대수를 이용하여 답을 보는 다른 방법도 있다. $\mathbf{M}$을 대각성분이 0이고 나머지 성분이 1인 3×3 행렬이라 하자. 즉 색 j가 색 i 다음에 올 수 있을 때 (i,j) 성분이 1이다. 그러면 $\mathbf{M}^{n-1}$의 (i,j) 성분은 색 i로 시작하여 색 j로 끝나는 일렬 칠하기의 수이므로, r_n은 $\mathbf{M}^{n-1}$의 대각성분이다. 원의 칠하기는 n걸음 후에 출발점으로 돌아오는 수열이므로, 원의 칠하기의 수는 $\mathbf{M}^n$의 **대각합**(trace)이다. 모든 성분이 1인 행렬 $\mathbf{J}$에 대해 $\mathbf{M} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$이므로, $\mathbf{M}$의 고유값(eigenvalue)은 $3-1=2$(고유벡터(eigenvector) $(1,1,1)$)와 -1(중복도 2)이고, $\mathbf{M}^n$의 대각합은 고유값의 n제곱의 합이다.

$$\operatorname{tr}\mathbf{M}^n = 2^n + (-1)^n + (-1)^n = 2^n + 2(-1)^n.$$

이 **전달 행렬**(transfer matrix) 방법은 한 단계씩 쌓아 올리는 배열의 수를 세는 데 조합론과 통계물리학 전반에서 쓰인다.

사고 기술

연립 점화식 세우기

하나의 수열만으로는 간단한 점화식을 만족하지 않을 때, 약간의 추가 정보(여기서는 마지막 기둥의 색)를 기록하고 각 경우를 연결하는 점화식을 찾는다.

이것이 **상태**(state)라는 개념이다. 다음 단계로 나아가는 데 꼭 필요한 정보만, 그 이상은 아무것도 기록하지 않는 것이다. 이는 컴퓨터 과학의 동적 계획법(dynamic programming), 확률론의 마르코프 연쇄(Markov chain)(Section 12.16), 그리고 전

달 행렬 방법의 기초이다.

더 도전하기

1 **k가지 색.** k가지 색으로 문제를 반복하여라. $r_{n+1} = s_n$이 여전히 성립하고 $r_{n+1} + r_n = (k-1)^{n-1}$임을 보이고, r_n을 구한 다음, 사이클의 채색 다항식 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$을 이끌어 내어라.

2 **빨간색끼리 이웃하지 않기.** 일렬로 놓인 n개의 기둥을 이웃한 두 기둥이 모두 빨간색이 되는 일이 없도록 빨간색 또는 흰색으로 칠하는 방법은 몇 가지인가? (피보나치 수(Fibonacci numbers)가 나올 것이다.)

3 **바퀴.** 원의 모든 기둥과 이웃하는 가운데 기둥을 하나 더하자("바퀴(wheel)"). 이것을 4가지 색으로 칠하는 방법은 몇 가지인가? (**힌트**: 가운데 기둥이 한 가지 색을 쓰고, 원은 나머지 세 가지 색을 써야 한다.)

4 **목걸이.** 원의 두 칠하기 중 하나가 다른 하나를 회전한 것일 때 같은 것으로 본다면, $n = 4$일 때 서로 다른 칠하기는 몇 가지인가? $n = 5$일 때는? (이것이 **번사이드 보조정리**(Burnside's lemma)의 출발점이다.)

더 읽을거리

- **Robin Wilson, *Introduction to Graph Theory*** (Pearson). 그래프 이론 입문. 표준적인 첫 강의 교재로, 색칠과 4색 문제를 다룬다.
- **Robin Wilson, *Four Colours Suffice*** (Penguin). 네 가지 색이면 충분하다. 일반 독자를 위한 4색 정리 이야기이다.
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (온라인 무료 공개). 생성함수론. 점화식과 그 풀이 방법을 다루며, 전달 행렬 방법도 포함한다.

9.4 함수로서의 수열

문제

STEP I 2016, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s1-q8`

도입

계산기로 $1/89$를 계산해 보자: $0.011235955\ldots$. 숫자들이 $0, 1, 1, 2, 3, 5$로 시작하는데, 이것은 피보나치 수(Fibonacci numbers)이다. 우연일까? 우연이 아니며, 이 문제가 그 이유를 설명해 준다.

이 아이디어는 조합론(combinatorics)에서 가장 강력한 것 가운데 하나이다. 무한수열(infinite sequence)을 하나 잡아, 그 항들을 멱급수(power series)의 계수로 사용하여 하나의 함수로 묶는다. 그러면 수열에 관한 사실이 함수에 관한 사실이 되고, 여기에 대수와 미적분을 사용할 수 있다. Herbert Wilf는 이를 인상적으로 표현했다: "생성함수(generating function)는 수열을 걸어 놓고 보여 주는 빨랫줄이다."

시작하기 전에

? **생각해 보기** 생성함수가 $\dfrac{1}{1-x}$인 수열은 무엇인가? $\dfrac{1}{1-2x}$는 어떤가? 생성함수에 x를 곱하면 수열은 어떻게 되는가?

등비급수(geometric series) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$는 $1, 1, 1, \ldots$의 생성함수이고, $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + \cdots$는 2의 거듭제곱들의 생성함수이다. x를 곱하면 모든 항이 한 자리씩 뒤로 밀린다: $x \cdot \frac{1}{1-x} = x + x^2 + \cdots$는 $0, 1, 1, 1, \ldots$의 생성함수이다.

차근차근 풀기

1단계 자연수와 삼각수

생각해 보기 이항급수(binomial series)로 $(1-x)^{-2}$를 전개하라. x^n의 계수는 무엇인가?

이항급수에 의해

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n,$$

이므로 $x(1-x)^{-2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \sum nx^n$이다. 이것이 $u_n = n$의 생성함수이다.

마찬가지로 $(1-x)^{-3}$에서 x^n의 계수는 $\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$이므로

$$x(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 1} \frac{n(n+1)}{2}\, x^n = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \cdots,$$

이고, 이것이 삼각수(triangle numbers) $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$의 생성함수이다.

생각해 보기 n^2을 n과 $\frac{1}{2}n(n+1)$로 어떻게 나타낼 수 있는가?

$n^2 = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n$이고, 생성함수는 수열과 똑같이 더해지므로

$$\sum n^2 x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}. \qquad \blacksquare$$

2단계 점화식이 방정식이 된다

생각해 보기 $u_n = ku_{n-1}$에 x^n을 곱하고 모든 $n \geq 1$에 대하여 더하라. 각 변을 f로 나타내면 무엇인가?

좌변은 $\sum_{n\geq 1} u_n x^n = \mathrm{f}(x) - u_0 = \mathrm{f}(x) - a$이다. 우변은 $kx\sum_{n\geq 1} u_{n-1}x^{n-1} = kx\,\mathrm{f}(x)$이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = a + kx\,\mathrm{f}(x)$이고,

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a}{1-kx}. \qquad \blacksquare$$

물론 $u_n = ak^n$이다. $\frac{a}{1-kx}$를 등비급수로 전개하면 이를 확인할 수 있다.

3단계 피보나치 수

$n \geq 2$에 대하여 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$에도 같은 일을 한다:

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = x\sum_{n\geq 2} u_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} u_{n-2}x^{n-2},$$

즉,

$$\mathrm{f}(x) - u_0 - u_1 x = x\big(\mathrm{f}(x) - u_0\big) + x^2\,\mathrm{f}(x).$$

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$이므로 이 식은 $\mathrm{f}(x) - x = x\,\mathrm{f}(x) + x^2\,\mathrm{f}(x)$가 되고, 따라서

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \qquad \blacksquare$$

4단계 $1/89$의 설명

> **잠깐, 직접 해 보기** 수렴(convergence)은 무시하고(여기서는 괜찮다: 이 급수는 $|x| < 0.618$에서 수렴한다), f에 $x = \frac{1}{10}$을 대입하라. 무엇을 얻는가?

$$\frac{1}{10}F_1 + \frac{1}{100}F_2 + \frac{1}{1000}F_3 + \cdots = \mathrm{f}\Big(\frac{1}{10}\Big) = \frac{1/10}{1 - 1/10 - 1/100} = \frac{10}{89}.$$

10으로 나누면 $\frac{1}{89} = \sum F_n/10^{n+1}$이다. 피보나치 수들이 소수점 아래 연속된 자리에 차례로 놓이고, 9보다 커지면 서로 겹친다(그림 9.4.1). $1/89$의 앞쪽 숫자들에는 피보나치 수가 보이지만, 뒤쪽 숫자들은 자리올림(carrying) 때문에 흐려진다.

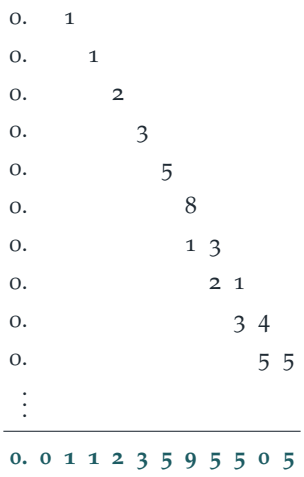


그림 9.4.1 $n = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여 $F_n/10^{n+1}$을 더한다. 각 피보나치 수는 앞의 것보다 소수점 아래 한 자리 더 오른쪽에서 끝난다. 두 자리 수가 되면 서로 겹치고, 자리올림 때문에 일곱째 자리부터 숫자가 바뀐다: $\frac{1}{89} = 0.01123595505\ldots$.

돌아보기

- **수열을 함수로 바꾼다.** 무한수열 전체가 하나의 유리함수(rational function)가 되었다.

- **점화식(recurrence)이 방정식이 된다.** x^n을 곱하고 더하면 규칙 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$가 대수로 풀 수 있는 f에 관한 방정식으로 바뀌었다.
- **옛것에서 새것을 만든다.** 생성함수를 더하고, 밀고, 미분하여 처음부터 다시 시작하지 않고도 새로운 생성함수를 얻었다.

숨은 수학

생성함수에서 공식으로

생성함수는 수열을 담아 두기만 하는 것이 아니라, 수열을 구해 낼 수도 있다. 분모는 $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$로 인수분해되는데, 여기서 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$와 $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$는 $t^2 = t + 1$의 근이다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x}\right),$$

이고, 각 분수를 등비급수로 전개하면

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

이것이 비네(*Binet*) 공식이다. $|\psi| < 1$이므로 둘째 항은 매우 작고, 따라서 F_n은 $\varphi^n/\sqrt{5}$에 가장 가까운 정수이며, 연속한 피보나치 수의 비는 황금비(golden ratio)로 수렴한다(Section 2.2의 주제이다). 같은 방법으로 상수계수 선형 점화식(linear recurrence with constant coefficients)을 모두 풀 수 있다. 연습문제에 STEP I 2004의 예가 있다.

생성함수가 그토록 쓸모 있는 이유

진짜 힘은 곱셈에서 드러난다. 곱 $f(x)g(x)$에서 x^n의 계수는 $\sum_k u_k v_{n-k}$인데, 이는 n을 두 부분으로 나누는 모든 방법에 대하여 더한 것이다. 두 조각으로 이루어진 것을 셀 때 정확히 필요한 것이 이것이다. 다음 두 절에서는 이를 이용하여 거스름돈을 만드는 방법의 수를 세고(Section 9.5), 보통 주사위와 합의 분포가 같은 이상한 눈의 주사위를 찾는다(Section 9.6). 확률에서는 같은 아이디어로 **확률생성함수**(*probability generating function*)를 얻는데, 이는 독립 확률변수(independent random variables)의 합을 곱으로 바꾼다.

드무아브르, 오일러, 라플라스

아브라함 드무아브르(Abraham de Moivre)는 1720년대에 생성함수를 사용하여 선형 점화식을 풀었는데, 본질적으로 위의 방법이었다. 레온하르트 오일러(Leonhard Euler)는 1748년에 자연수의 분할(partitions)을 연구하는 데 생성함수를 사용했고, 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace)는 생성함수를 그의 저서 *Théorie analytique des*

probabilités(확률의 해석적 이론, 1812)의 토대로 삼았다. 20세기에 생성함수는 조합론의 중심이 되었고, 오늘날에는 해석적 방법(생성함수를 복소변수(complex variable)의 함수로 연구하는 것)으로 정확히 풀기에는 너무 복잡한 세기 문제에 대해서도 정밀한 추정을 얻는다.

사고 기술

표현을 바꾸어라

수열에 관한 문제는 수열을 함수, 행렬, 또는 그림으로 바꾸면 쉬워질 수 있다.

생성함수는 점화식을 대수로, 세기를 곱셈으로 옮긴다. 대학에서는 이런 옮기기를 많이 만나게 된다: 푸리에 급수(Fourier series)는 함수를 수열로 바꾸고, 라플라스 변환(Laplace transform)은 미분방정식(differential equation)을 대수로 바꾸며, 행렬(matrix)은 기하를 산술로 바꾼다.

더 도전하기

1 **한 번에 두 자리씩.** STEP II 2022, 3번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`)을 풀어 보라. 이 문제는 $\frac{1}{89}$의 소수 전개가 왜 피보나치 수로 시작하는지 설명하고, 소수 표현에서 이 패턴이 두 자리씩 나타나는 분수를 구하게 한다.

2 **점화식 풀기.** STEP I 2004, 7번 문제 (`step.maths.org/questions/04-s1-q7`)을 풀어 보라. 이 문제는 생성함수와 부분분수로 선형 점화식을 푼 다음, 그 방법을 거꾸로 적용한다.

3 **수 세기.** $\frac{1}{9801} = 0.00\,01\,02\,03\,04\ldots$임을 보여라. 여기서 두 자리씩 끊은 묶음이 하나씩 커진다. 이 패턴은 어디에서 처음 깨지는가? 그 이유는 무엇인가?

4 **제곱의 합.** $\frac{1}{1-x}f(x)$가 부분합(partial sums) $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$의 생성함수인 이유를 설명하라. 이것과 소문항 (i)의 답을 이용하여 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$의 공식을 구하라.

더 읽을거리

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (A K Peters; 온라인 무료). 고전적인 입문서이다. 이 절을 읽은 뒤에는 1장이 안성맞춤이다.

- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley), 7장.
- **Philippe Flajolet & Robert Sedgewick, *Analytic Combinatorics*** (Cambridge University Press; 온라인 무료). 대학 1학년 수준을 훨씬 넘어서지만, 첫 몇 쪽에서 이 분야가 어디로 이어지는지 볼 수 있다.

9.5 거스름돈 만들기

문제

STEP I 1997, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/97-s1-q1`

도입

이 문제는 책 전체에서 가장 쉬운 문제처럼 보인다. 가능한 경우를 나열하기만 하면 되기 때문이다. 그러나 나열은 금세 감당할 수 없게 된다. 영국 사람들이 주머니에 넣고 다니는 동전으로 20p를 만드는 방법은 41가지, 50p를 만드는 방법은 451가지, £1을 만드는 방법은 4563가지나 된다. 이 문제가 실제로 요구하는 것은 하나의 **체계**, 즉 빠뜨리는 것도 없고 두 번 세는 것도 없도록 개수를 정리하는 방법이다.

그 체계 뒤에는 아름다운 수학이 숨어 있다. 각 동전은 하나의 등비급수(geometric series)에 대응하고, n펜스를 만드는 방법의 수는 이 급수들의 곱에서 나타나는 계수(coefficient)이다. 같은 아이디어를 모든 자연수에 한꺼번에 적용하면 정수론에서 가장 깊은 주제 가운데 하나인 오일러(Euler)의 **분할**(partition) 이론이 나온다.

시작하기 전에

생각해 보기 2p와 1p 동전만으로 n펜스를 만드는 방법은 몇 가지인가? 왜 그 답은 2p 동전을 몇 개 쓰는지에만 의존하는가?

2p 동전의 개수를 정하고 나면 나머지는 모두 1p 동전이어야 하므로, 가능한 2p 동전의 개수 $0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ 각각에 대하여 정확히 한 가지 방법이 있다. 따라서 방법은 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$가지이다. 이것을 $a(n)$이라 하자. 예를 들어 $a(10) = 6$이고 $a(5) = 3$이다.

차근차근 풀기

1단계 10펜스

생각해 보기 가장 큰 동전부터 기준으로 삼아 개수를 정리하라. 10p 동전은 몇 개 쓸 수 있는가? 그것이 정해졌을 때 5p 동전은 몇 개 쓸 수 있는가?

- 10p 동전 하나: 1가지.
- 10p 없이 5p 두 개: 1가지.
- 10p 없이 5p 하나: 나머지 5p를 2p와 1p로 만드는 방법은 $a(5) = 3$가지.
- 10p도 5p도 없이: 10p를 2p와 1p로 만드는 방법은 $a(10) = 6$가지.

합계는 $1 + 1 + 3 + 6 = 11$이다. ■

2단계 한 층씩 쌓아 올리기

생각해 보기 5p, 2p, 1p 동전으로 n펜스를 만드는 방법의 수를 $b(n)$이라 하자. 함수 a를 이용하여 $b(n)$을 어떻게 나타낼 수 있는가?

5p 동전의 개수 k를 정하면, 남은 $n - 5k$펜스는 2p와 1p 동전으로 만든다. 따라서

$$b(n) = a(n) + a(n-5) + a(n-10) + \cdots.$$

이로부터 다음을 얻는다.

n	0	5	10	15	20
$a(n)$	1	3	6	8	11
$b(n) = a(n) + b(n-5)$	1	4	10	18	29

마찬가지로 10p 동전까지 쓰는 방법의 수를 $c(n)$이라 하면 $c(n) = b(n) + b(n-10) + \cdots$이므로 $c(10) = 10 + 1 = 11$(1단계의 결과와 일치한다)이고 $c(20) = b(20) + b(10) + b(0) = 29 + 10 + 1 = 40$이다.

3단계 20펜스

마지막으로 20p 동전을 생각하자. 이 동전을 쓰거나(한 가지) 쓰지 않는다($c(20)$가지). 따라서 방법은

$$40 + 1 = 41\text{가지이다.} \quad ■$$

잠깐, 직접 해 보기 구조에 주목하라. 새 동전이 하나 추가될 때마다 층이 하나 더 해지고, 각 층은 바로 앞 층의 값을 새 동전의 액면가만큼의 간격으로 더한 것이다. 컴퓨터가 £1이나 £100에 대해 이 계산을 어떻게 수행할지 짐작할 수 있는가?

돌아보기

- **가장 큰 부분을 기준으로 정리하라.** 가장 큰 동전의 개수를 먼저 고정하자 개수 세기가 체계적으로 되었다.
- **표를 만들어라.** 새 동전이 추가될 때마다 바로 앞 행으로부터 새 행을 계산했다. 이것이 바로 **동적 계획법**(dynamic programming)으로, 컴퓨터가 이런 것을 셀 때 쓰는 표준적인 방법이다.
- **알려진 경우와 대조하라.** 표는 10p를 만드는 11가지 방법을 그대로 재현했다.

숨은 수학

등비급수로서의 동전

이 문제를 대수로 바꾸어 주는 아이디어는 다음과 같다. 사용하는 5p 동전의 개수는 $0, 1, 2, \ldots$일 수 있고, 이는 각각 $0, 5, 10, \ldots$펜스를 기여한다. 이것을 다음 급수로 기록한다.

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

각 동전에 대해 똑같이 한 다음 모두 곱한다.

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} = \sum_n w(n)x^n.$$

괄호를 전개하면 각 항 x^n은 각 괄호에서 항을 하나씩, 즉 각 동전의 개수를 하나씩 골라 총액이 n이 되게 할 때 생긴다. 따라서 x^n의 계수 $w(n)$은 정확히 n펜스를 만드는 방법의 수이다. 2단계의 표는 이 곱을 괄호 하나씩 전개한 것에 불과했다. 이것이 Section 9.4에서 다룬 생성함수(generating function)의 아이디어이며, 그 위력이 드러나는 곳이 바로 곱셈이다. 생성함수의 곱은 선택들의 조합을 센다.

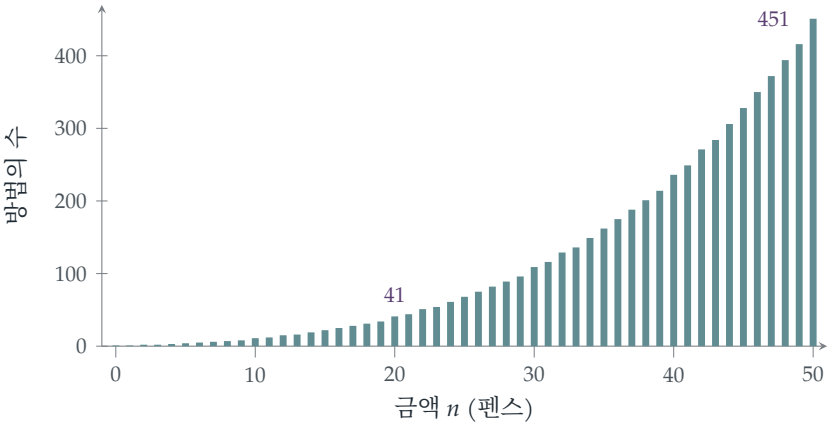


그림 9.5.1 1p, 2p, 5p, 10p, 20p, 50p 동전으로 n펜스를 만드는 방법의 수. 5와 10의 배수에서 생기는 도약은 새 동전을 처음 쓸 수 있게 되는 지점을 보여 준다. 동전이 여섯 종류일 때 방법의 수는 대략 n^5처럼 증가한다. 일반적으로는 차수가 동전 종류의 수보다 하나 작은 다항식처럼 증가한다.

분할

모든 자연수를 동전으로 쓸 수 있다면 어떻게 될까? 그러면 순서를 무시하고 n을 양의 정수들의 합으로 나타내는 방법의 수가 **분할수**(partition number) $p(n)$이다. 예를 들어 $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$이므로 $p(4) = 5$이다. 오일러는 1748년에

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots},$$

임을 알아내고, 이를 이용하여 놀라운 항등식들을 발견했다. 그 가운데 하나는 다음과 같다. n을 **서로 다른** 부분들의 합으로 나타내는 방법의 수는 **홀수인** 부분들의 합으로 나타내는 방법의 수와 같다. (생성함수를 쓰면 증명은 대수 계산 한 줄이다. 연습문제에서 직접 해 보라.)

하디, 라마누잔 그리고 $p(200)$

분할수는 빠르게 커진다. $p(10) = 42$, $p(100) = 190\,569\,292$이다. 1918년 하디(G. H. Hardy)와 라마누잔(Srinivasa Ramanujan)은 $p(n)$에 대한 놀라운 공식을 발견했는데, 이는 무한급수로서 그 첫째 항은 다음과 같다.

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

이 공식을 검증하기 위해 퍼시 맥마흔(Percy MacMahon)은 오일러의 항등식을 이용하여 손으로 $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$을 계산했다. 하디와 라마누잔의 급수에서 처음 몇 항만으로도 오차가 1보다 작은 정확한 답이 나왔다. 라마누잔은 또한 $p(5n+4)$는 항상 5로,

$p(7n+5)$는 7로, $p(11n+6)$은 11로 나누어떨어진다는 것도 발견했다. 이런 패턴이 더 이상 없는 이유를 설명하는 데에는 21세기까지 시간이 걸렸다.

사고 기술

계수를 통해 세기

어떤 대상이 서로 독립적인 선택들로 만들어질 때, 각 선택은 하나의 인수가 되고, 전체 크기가 n인 대상의 개수는 그 곱에서 x^n의 계수이다.

이 방법은 개수 세기를 대수로 바꾸어 준다. 대학에서는 이것이 열거 조합론(enumerative combinatorics)의 기초가 되며, 확률생성함수(probability generating function)가 독립 확률변수(independent random variables)의 합을 다루는 방식도 바로 이것이다.

더 도전하기

1 **두 종류의 6.** STEP II 2012, 1번 문제 (`step.maths.org/questions/12-s2-q1`)에 도전해 보라. 이 문제는 등비급수의 곱으로 개수를 센다. 마지막에, 그 계수들이 답이 되는 동전 세기 문제를 하나 설명해 보라.

2 **서로 다른 부분과 홀수 부분.** $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$이 서로 다른 부분들로의 분할에 대한 생성함수임을 보여라. $1+x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$를 이용하여 이것이 $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$와 같음을 보이고, 오일러의 정리를 이끌어 내라. $n=6$일 때 확인해 보라.

3 **공식.** 1p, 2p, 5p 동전만으로 n펜스를 만드는 방법의 수가 $\frac{(n+4)^2}{20}$에 가장 가까운 정수임을 보여라. (먼저 작은 n에 대해 확인해 보라.)

4 **순서가 중요할 때.** 순서를 고려하여 1p와 2p 동전을 투입구에 하나씩 넣어 n펜스를 만드는 방법은 몇 가지인가? (이 수열은 이전에 본 적이 있다.)

더 읽을거리

- **George Andrews & Kimmo Eriksson, *Integer Partitions*** (Cambridge University Press). 학부생을 위한 짧고 읽기 쉬운 입문서.
- **George Pólya, "On picture-writing"**, *American Mathematical Monthly* 63 (1956). 1달러를

바꾸는 문제(방법은 292가지이다)를 이용하여 생성함수를 설명한 포여(Pólya)의 고전적인 글.

- **Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity*** (Abacus). 라마누잔의 생애와 하디와의 협업을 다룬 책.

9.6 이상한 주사위

문제

STEP I 1993, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/93-s1-q1`

도입

육면체 주사위(dice) 두 개에 양의 정수를 적는 방법 가운데, 2부터 12까지의 모든 합이 보통 주사위와 정확히 같은 횟수만큼 나오도록 하는 다른 방법이 있을까? 1978년에 마틴 가드너(Martin Gardner)는 *Scientific American*에서 그런 방법이 정확히 하나 있다고 발표했다. $1,2,2,3,3,4$가 적힌 주사위와 $1,3,4,5,6,8$이 적힌 주사위이다. 이 주사위는 조지 시커먼(George Sicherman) 대령이 발견했으며, 지금은 **시커먼 주사위**(*Sicherman dice*)라는 이름으로 판매된다. 이 주사위로 모노폴리를 하면 보통 주사위로 하는 게임과 전혀 구별할 수 없을 것이다.

이 문제는 준비 운동이다. 합의 표로부터 두 주사위에 어떤 수가 적혀 있는지 추론하는 것이다. 이를 체계적으로 하는 방법과, 시커먼 주사위가 유일한 이상한 주사위 쌍이라는 증명은 모두 각 주사위를 다항식(polynomial)으로 바꾸는 데서 나온다.

시작하기 전에

생각해 보기 첫 번째 주사위에 i가 적힌 면이 p_i개 있고 두 번째 주사위에 j가 적힌 면이 q_j개 있다면, 합이 t가 되도록 던지는 방법은 몇 가지인가?

방법의 수는 $\sum_i p_i q_{t-i}$이다. 첫 번째 주사위의 수 i를 고르면 두 번째 주사위는 $t-i$를 보여야 하기 때문이다. 첫 번째 주사위 쌍의 경우, 합 6은 $1+5$($1\times$1가지), $2+4$($2\times$1가지), $3+3$($2\times$2가지)에서 나오고 그 밖에는 없다. 첫 번째 주사위에는 4나 5가 없고 두 번째 주사위에는 0이 없기 때문이다. 따라서 $1+2+4=7$가지이다. ■

차근차근 풀기

1단계 양 끝

두 주사위를 A와 B라 하고, 각 주사위에서 i가 적힌 면의 개수를 a_i, b_i라 하자.

> **생각해 보기** 합 2를 던지는 방법도, 합 12를 던지는 방법도 없다. 이것은 1과 6에 대해 무엇을 말해 주는가? 합 3을 던지는 방법은 두 가지 있다. 어느 주사위에 1이 있는가?

합 2가 나오지 않으므로 $a_1 b_1 = 0$이다. 즉 1이 적힌 면은 많아야 한 주사위에만 있다. 합 3은 $1+2$ 또는 $2+1$로만 나올 수 있고 그 방법이 두 가지이므로, 어떤 주사위에는 1이 실제로 있다. 그 주사위를 A라 하면 $b_1 = 0$이다. 그러면

$$\text{합3}: \quad a_1 b_2 = 2, \qquad \text{따라서} (a_1, b_2) = (2,1) \text{ 또는} (1,2).$$

마찬가지로 합 12가 나오지 않으므로 $a_6 b_6 = 0$이다.

2단계 위로 올라가기

> **생각해 보기** $b_1 = 0$임을 기억하면서 합 4에 대한 방정식을 써 보라. 두 경우 각각에서 이 방정식은 무엇을 말해 주는가?

합 4는 $1+3$ 또는 $2+2$이므로($b_1 = 0$이므로 $3+1$은 불가능하다) $a_1 b_3 + a_2 b_2 = 1$이다.

- **경우 (a)**, $a_1 = 2$, $b_2 = 1$: $2b_3 + a_2 = 1$이므로 $b_3 = 0$, $a_2 = 1$이다.
- **경우 (b)**, $a_1 = 1$, $b_2 = 2$: $b_3 + 2a_2 = 1$이므로 $a_2 = 0$, $b_3 = 1$이다.

합 5: $a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 1$.

- 경우 (a): $2b_4 + 0 + a_3 = 1$이므로 $b_4 = 0$, $a_3 = 1$이다. 지금까지 A에는 $1, 1, 2, 3$이 있고 B에는 2가 있다. B의 나머지 다섯 면은 5 또는 6이다.
- 경우 (b): $b_4 + 0 + 2a_3 = 1$이므로 $a_3 = 0$, $b_4 = 1$이다. 지금까지 A에는 1이 있고 B에는 $2, 2, 3, 4$가 있다. A의 나머지 다섯 면은 $4, 5, 6$ 중에서, B의 나머지 두 면은 $5, 6$ 중에서 나온다.

3단계 경우 (a)는 실패한다

> **생각해 보기** 경우 (a)에서 합 7에 대한 방정식을 쓰고 $b_5 + b_6 = 5$를 이용하라.

합 7: $a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2 = 2b_6 + b_5 + 0 + 0 + a_5 = 3$. $b_6 = 5 - b_5$를 대입하

면 $10 - b_5 + a_5 = 3$이므로 $b_5 = 7 + a_5 \geq 7$이다. 그러나 B의 면은 여섯 개뿐이다. 따라서 경우 (a)는 불가능하다.

4단계 경우 (b)는 성공한다

? **생각해 보기** 경우 (b)에서 합 6과 11, 그리고 $a_6 b_6 = 0$이라는 사실을 이용하라.

합 6: $a_1 b_5 + a_4 b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$이다(나머지 곱에는 $a_2 = a_3 = 0$ 또는 $b_1 = 0$이 들어 있다). $b_5 \leq 2$이고 $b_5 = 4 - 2a_4$는 짝수이므로, $b_5 = 0, a_4 = 2$이거나 $b_5 = 2, a_4 = 1$이다.

- $b_5 = 0$이면 B는 $2, 2, 3, 4, 6, 6$이므로 $a_6 = 0$이고 A는 $1, 4, 4, 5, 5, 5$이다. 그런데 그러면 합 7이 나오는 방법은 3가지가 아니라 $a_1 b_6 + a_4 b_3 + a_5 b_2 = 2 + 2 + 6 = 10$가지가 된다.
- $b_5 = 2$이면 B는 $2, 2, 3, 4, 5, 5$이고 $b_6 = 0$이며, A는 $1, 4$와 $5, 6$ 중에서 나온 네 면으로 이루어진다. 합 11: $a_6 b_5 = 2a_6 = 6$이므로 $a_6 = 3, a_5 = 1$이다.

가능한 것은 다음뿐이다.

$$A: \ 1, 4, 5, 6, 6, 6, \qquad B: \ 2, 2, 3, 4, 5, 5.$$

마지막으로, 지금까지 합의 일부만 사용했으므로 이 주사위가 표 전체를 만들어 내는지 확인해야 한다. 곱을 전개해 보면(또는 아래의 다항식을 이용하면) 모든 항목이 맞음을 확인할 수 있다. ■

돌아보기

- **양 끝에서 시작하라.** 가장 작은 합과 가장 큰 합에는 곱이 한두 개만 들어 있으므로 가장 강력한 정보를 준다.
- **경우를 나누고 하나씩 제거하라.** 각각의 합이 가능성을 줄여 나갔고, 결국 하나의 경우만 살아남았다.
- **충분성(sufficiency)을 확인하라.** 추론은 주사위가 반드시 어떠해야 하는지를 보여 주었고, 마지막 확인은 그 주사위가 실제로 조건을 만족함을 보여 주었다.

숨은 수학

다항식으로 나타낸 주사위

각 주사위를 다항식으로 나타내되, i가 적힌 면 하나마다 항 x^i를 하나씩 둔다. 보통 주사위는 $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$이고, 문제의 주사위는

$$A(x) = x + x^4 + x^5 + 3x^6, \qquad B(x) = 2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5.$$

이다. 곱하면 면의 각 쌍이 $x^i x^j = x^{i+j}$를 기여하므로, $A(x)B(x)$에서 x^t의 계수는 합 t를 던지는 방법의 수이다. 이것은 다시 한번 Section 9.4의 생성함수(generating function) 아이디어이다. 합의 표는 곱 $A(x)B(x)$일 뿐이며, 앞에서 경우를 나누어 한 추론은 이 곱을 인수분해(factorisation)하는 한 가지 방법이었다.

시커먼 주사위

보통 주사위 두 개의 경우 곱은 $(x + x^2 + \cdots + x^6)^2$이다. 같은 합의 분포를 갖는 주사위 쌍은 $P(x)Q(x) = (x + \cdots + x^6)^2$을 만족하는 다항식 $P(x)$, $Q(x)$를 가져야 한다. 이제 인수분해하면

$$x + x^2 + \cdots + x^6 = x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2),$$

이고, 이 인수들은 (정수 계수 다항식으로) 더 이상 분해할 수 없다. 따라서 P와 Q는 각각 인수 $x, 1+x, 1+x+x^2, 1-x+x^2$로 만들어져야 하며, 각 인수는 모두 합쳐 두 번씩 나타난다. 세 가지 조건이 선택의 폭을 좁힌다.

- 각 주사위는 면이 6개이므로 $P(1) = Q(1) = 6$이다. 각 인수는 $x = 1$에서 값 1, 2, 3, 1을 가지므로, 각 주사위는 $1+x$ 하나와 $1+x+x^2$ 하나를 갖는다.
- 0이 적힌 면은 없으므로 $P(0) = Q(0) = 0$이다. 즉 각 주사위는 인수 x를 하나씩 갖는다.
- 남은 자유는 $1-x+x^2$ 두 개를 어떻게 나누느냐뿐이다. 하나씩 나누면 보통 주사위가 된다. 둘 다 한 주사위에 주면

$$x(1+x)(1+x+x^2) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4,$$
$$x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8.$$

이것이 시커먼 주사위 1, 2, 2, 3, 3, 4와 1, 3, 4, 5, 6, 8이며(그림 9.6.1), 이 논증은 이것이 유일한 대안임을 증명한다. 핵심은 다항식도 정수처럼 기약(irreducible) 다항식으로 유일하게 인수분해된다는 사실이다. 정수론(number theory)과 조합론(combinatorics)이 여기서 만난다.

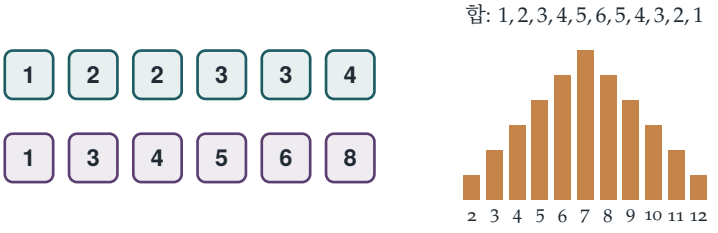


그림 9.6.1 시커먼 주사위. 함께 던지면 2부터 12까지의 모든 합이 보통 주사위 두 개와 정확히 같은 빈도로 나온다(오른쪽). 합 2가 나오는 방법은 한 가지, 합 3은 두 가지이고, 이렇게 계속하여 합 7은 여섯 가지이다.

확률생성함수

확률에서는 같은 아이디어가 **확률생성함수**(*probability generating function*)로 나타난다. 값 $0, 1, 2, \ldots$를 갖는 확률변수(random variable) X에 대하여 $G(t) = E(t^X) = \sum P(X = k)t^k$이고, 서로 독립(independent)인 X와 Y에 대하여 $E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y)$이다. 독립인 확률변수의 합은 생성함수의 곱에 대응한다. STEP III 2003 Q14(연습문제에 있다)는 이 방법으로 시커먼 주사위를 찾으며, Section 9.13에서는 이와 관련된 논증으로 두 주사위에 어떻게 무게를 실어도 모든 합이 같은 확률로 나오게 할 수 없음을 보인다.

사고 기술

세기 문제를 다항식으로 부호화하기

대상들이 그 값을 더하는 방식으로 결합될 때, 각 대상을 x에 대한 다항식으로 나타내라. 결합은 곱셈이 되고, 결합에 관한 질문은 인수분해에 관한 질문이 된다.

여기서는 주사위에 관한 질문이 다항식의 유일 인수분해 문제로 바뀌었다. 대학에서는 이런 부호화가 어디에나 있다. 조합론에서, 확률에서, 그리고 다항식을 정수와 비슷한 산술을 갖는 환(ring)으로서 그 자체로 연구하는 대수학에서도 그렇다.

더 도전하기

1 **사면체 주사위.** STEP III 2003, 14번 문제 (`step.maths.org/questions/03-s3-q14`)를 풀어 보라. 이 문제는 면이 네 개인 주사위에 대해 시커먼의 질문을 던진다. (**힌트:** $x + x^2 + x^3 + x^4 = x(1 + x)(1 + x^2)$.)

2 **표 확인하기.** $(x + x^4 + x^5 + 3x^6)(2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5)$를 전개하여 문제의 표와 맞는지 확인하라.

3 **주사위 세 개.** 모두 표준 주사위는 아니면서 양의 정수가 적힌 육면체 주사위 세 개로, 합의 분포가 표준 주사위 세 개와 같은 것이 있는가? (**힌트:** 이제 $(x + \cdots + x^6)^3$의 인수에는 $1 - x + x^2$가 세 개 들어 있다.)

4 **동전과 팔면체.** $1, \ldots, 8$이 적힌 팔면체 주사위와 1, 2가 적힌 이면 "주사위"(동전)가 있다. 같은 합의 분포를 유지하면서 수를 다르게 적을 수 있는가?

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*** (Mathematical Association of America). 시커먼 주사위에 관한 칼럼이 실려 있다.
- **Joseph Gallian & David Rusin, "Cyclotomic polynomials and nonstandard dice"**, *Discrete Mathematics* 27 (1979). 면의 개수가 임의인 주사위에 대한 일반 이론을 다룬다.
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (온라인에서 무료로 볼 수 있다), 1장.

9.7 같은 거듭제곱의 합

문제

STEP I 1992, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/92-s1-q5`

도입

1부터 16까지의 수를 여덟 개씩 두 팀으로 나누어 보자.

$$\{1,4,6,7,10,11,13,16\} \quad \text{그리고} \quad \{2,3,5,8,9,12,14,15\}.$$

두 팀의 합은 모두 68이다. 제곱의 합은 둘 다 748이다. 세제곱의 합은 둘 다 9248이다. 우연이 아니고서야 이럴 수 없을 것 같지만, 사실 이것은 끝없이 이어지는 패턴의 세 번째 단계일 뿐이다. 1부터 32까지를 올바르게 나누면 네제곱의 합까지 같아진다.

이렇게 나누는 방법은 1851년에 Eugène Prouhet가 발견했으며, 그 배후의 규칙인 **투에–모스 수열**(*Thue–Morse sequence*)은 놀라울 만큼 다양한 곳에 등장한다. 정수론, 계산 이론, 체스, 그리고 가장 공정하게 차례를 정하는 방법에서도 나타난다. 이 문제는 다항식(polynomial)과 그 도함수(derivative)를 통해 이 수열을 드러낸다.

시작하기 전에

생각해 보기 다항식 $\mathrm{p}(x) = \sum c_k x^k$가 $\mathrm{p}(1) = 0$을 만족하면 계수(coefficient)에 대해 무엇을 알 수 있는가? $\mathrm{p}'(1) = 0$이면 어떤가?

$\mathrm{p}(1) = \sum c_k$이므로 $\mathrm{p}(1) = 0$은 계수의 합이 0이라는 뜻이다. 또 $\mathrm{p}'(x) = \sum k c_k x^{k-1}$이므로 $\mathrm{p}'(1) = \sum k c_k$이다. 계수가 모두 ± 1이라면, 이 조건들은 $+1$이 놓인 위치와 -1이 놓인 위치의 개수가 같고, 그 위치들의 합도 같다는 뜻이다.

차근차근 풀기

1단계 삼중근

생각해 보기 $1-x^2$와 $1-x^4$를 인수분해(factorise)하라. $1-x$라는 인수가 몇 번 나타나는가?

$1-x^2=(1-x)(1+x)$이고 $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$이므로

$$\mathrm{p}_0(x)=(1-x)^3(1+x)^2(1+x^2),$$

따라서 $(1-x)^3$은 인수이다. ■

2단계 1에서의 도함수 값

생각해 보기 $(1-x)^3$이 p_0를 나누어떨어뜨리면, $(1-x)$의 몇 제곱이 p_0'를 나누어 떨어뜨리는가? 그렇다면 $\mathrm{p}_1=x\mathrm{p}_0'$와 p_1'는 어떤가?

$\mathrm{p}_0(x)=(1-x)^3\mathrm{q}(x)$로 쓰자. 곱의 미분법(product rule)에 의해 $\mathrm{p}_0'(x)=-3(1-x)^2\mathrm{q}(x)+(1-x)^3\mathrm{q}'(x)$이고, 이는 $(1-x)^2$을 인수로 가진다. 따라서 $\mathrm{p}_0'(1)=0$이다. 그러면 $\mathrm{p}_1(x)=x\mathrm{p}_0'(x)$도 $(1-x)^2$을 인수로 가지며, 같은 논증으로 p_1'가 $(1-x)$를 인수로 가짐을 알 수 있으므로 $\mathrm{p}_1'(1)=0$이다. ■

3단계 계수 읽어 내기

전개하면 $(1-x)(1-x^2)=1-x-x^2+x^3$이고, 이어서

$$\mathrm{p}_0(x)=1-x-x^2+x^3-x^4+x^5+x^6-x^7.$$

생각해 보기 $\mathrm{p}_0'(1)$과 $\mathrm{p}_1'(1)$을 계수 c_k로 나타내면 무엇인가?

$\mathrm{p}_1(x)=x\mathrm{p}_0'(x)=\sum kc_kx^k$이므로 $\mathrm{p}_1'(1)=\sum k^2c_k$이다. 계수는 $k=0,3,5,6$에서 $+1$이고 $k=1,2,4,7$에서 -1이다. 따라서 $\mathrm{p}_0'(1)=0$과 $\mathrm{p}_1'(1)=0$은

$$0+3+5+6=1+2+4+7\quad(=14),$$
$$0^2+3^2+5^2+6^2=1^2+2^2+4^2+7^2\quad(=70),$$

을 뜻하며, 여기서 0을 빼면 바로 요구된 항등식이다. ■

4단계 인수 하나 더

> **잠깐, 직접 해 보기** 세제곱의 합까지 같게 만들려면 $(1-x)$라는 인수가 네 번째로 필요하다. p_0 대신 어떤 다항식을 써야 할까?

$\mathrm{P}(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)$을 잡자. 이 다항식은 $(1-x)^4$을 인수로 가진다. 그 계수는 $\mathrm{p}_0(x) - x^8\mathrm{p}_0(x)$의 계수이다. 즉 0부터 7까지의 부호 패턴 다음에, 8부터 15까지 같은 패턴의 부호를 뒤집은 것이 이어진다.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_k	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+

2단계의 논증을 한 번 더 적용하면 $r = 0, 1, 2, 3$에 대해 $\sum c_k k^r = 0$임을 알 수 있다. $+$ 위치 $\{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$와 $-$ 위치 $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$를 잡자. $r = 1, 2, 3$일 때 0에서 오는 항은 0이므로 빼도 된다. 따라서 다음 순서

$$a_1, \ldots, a_8 = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, \qquad a_9, \ldots, a_{15} = 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15$$

가 조건을 만족한다. 두 부분의 합은 모두 60, 제곱의 합은 620, 세제곱의 합은 7200이다. ■

돌아보기

- **도함수는 중근을 찾아낸다.** 인수 $(1-x)^m$이 있으면 처음 $m-1$개의 도함수가 $x = 1$에서 모두 0이 된다.
- **미분하기 전에 x를 곱하면** $\sum kc_k$가 $\sum k^2 c_k$로 바뀌고, 같은 방식으로 더 높은 거듭제곱으로 나아간다.
- **두 배 늘리기.** 인수 $(1-x^{2^m})$을 하나 더할 때마다 길이가 두 배가 되고, 합이 같아지는 거듭제곱이 하나 늘어났다.

숨은 수학

투에–모스 수열

$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\cdots$의 계수의 부호는 **투에–모스 수열**을 이룬다. $+$를 0으로, $-$를 1로 쓰면 다음과 같다.

$$0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\ \ldots$$

이 수열은 서로 동치인 세 가지 방식으로 설명할 수 있다.

- **두 배 늘리기:** 0에서 시작하여, 지금까지 얻은 것의 보수(complement, 0과 1을 맞바꾼 것)를 계속 뒤에 붙인다: $0 \to 01 \to 0110 \to 01101001 \to \cdots$.

- **이진법 자릿수:** k번째 항은 k를 이진법(binary)으로 썼을 때 1의 개수가 짝수이면 0, 홀수이면 1이다. (그래서 x^k의 부호가 $(-1)^{\text{이진법으로 쓴 다음 수에 있는 1의 개수: } k}$인 것이다. 곱에서 x^k를 만들려면 k의 이진 표현을 이루는 인수 x^{2^m}들을 골라야 하고, 각 인수가 마이너스 부호를 하나씩 가져온다.)
- **다항식:** 문제에서처럼 $\prod_m (1 - x^{2^m})$의 계수이다.

$0, 1, \ldots, 2^N - 1$을 투에–모스 수열에 따라 나누면, 모든 $r < N$에 대해 r제곱의 합이 같은 두 집합을 얻는다(그림 9.7.1). 이것이 **프루에–태리–에스콧 문제**(*Prouhet–Tarry–Escott problem*)이다. 즉 $r = 1, \ldots, k$에 대해 r제곱의 합이 같은 서로 다른 두 정수 집합을 찾는 문제이다. Prouhet의 풀이는 2^{k+1}개의 수를 사용한다. 실제로 최소 몇 개의 수가 필요한지 알아내는 것은 유명한 미해결 문제이다.



$1 + 4 + 6 + 7 + 10 + 11 + 13 + 16 = 68$

$2 + 3 + 5 + 8 + 9 + 12 + 14 + 15 = 68$

제곱: $748 = 748$ 세제곱: $9248 = 9248$ 네제곱: $122\,692 \neq 121\,156$

그림 9.7.1 투에–모스 수열에 따라 나눈 1부터 16까지의 수. 두 집합은 합, 제곱의 합, 세제곱의 합이 각각 같지만 네제곱의 합은 같지 않다. 네제곱의 합까지 같게 하려면 1부터 32까지가 필요하다. 색을 왼쪽부터 읽으면 청록–자주–자주–청록, 자주–청록–청록–자주, ...의 패턴이 된다.

가장 공정하게 차례를 정하는 방법

두 아이가 사탕 더미에서 좋은 것부터 번갈아 고른다고 하자. $ABABAB\ldots$ 순서로 번갈아 고르면 A가 매 쌍에서 언제나 더 좋은 사탕을 가져가므로 체계적으로 유리하다. $ABBA$ 순서가 더 공정하고, $ABBABAAB$는 그보다 더 공정하다. 이것이 바로 투에–모스 수열이며, 거듭제곱의 합이 같다는 성질이 정확히 그 이유이다. 사탕의 가치가 위치에 대한 매끄러운 함수로 주어진다면, 그 함수를 다항식으로 전개해 보면 투에–모스 순서가 앞쪽의 주요 항들을 상쇄한다는 것을 알 수 있다. 같은 아이디어가 축구의 승부차기에도 제안되었으며(축구 규칙 제정 기구가 2017년부터 시험한 "$ABBA$" 순서), 테니스 타이브레이크의 서브 순서에도 쓰인다.

Thue, Morse, Euwe

이 수열은 여러 번 거듭 발견되었다. Prouhet가 1851년에 이 수열을 사용했다. Axel Thue는 1912년에 반복 패턴이 없는 수열을 연구하다가 이 수열을 다시 발견했다. 이 수열에는 같은 블록이 세 번 연달아 나타나는 일이 결코 없다("세제곱이 없는(cube-free)" 수열이다). Marston Morse는 1921년에 곡면 위의 측지선(geodesic)을 연구하다가 이 수열

을 또다시 발견했다. 그리고 체스 세계 챔피언 Max Euwe는 1929년에 이 수열을 이용하여, 당시 시행되던 반복에 의한 무승부 규칙으로는 무한히 긴 게임을 막을 수 없음을 보였다. 오늘날 이 수열은 **자동 수열**(*automatic sequence*), 즉 n의 이진법 자릿수를 읽는 간단한 기계로 계산되는 수열 이론의 핵심적인 예이다.

사고 기술

조합적 성질을 다항식으로 부호화하기

거듭제곱의 합이 같다는 것은 $+$ 부호와 $-$ 부호가 어디에 놓이느냐의 문제이다. 그 부호들을 계수로 하는 다항식을 만들면, 이 성질이 근(*root*)에 관한 명제로 바뀐다.

이 문제는 결코 일일이 찾아보라고 요구하지 않는다. $x = 1$에서의 중근(repeated root)이 모든 일을 해 준다. 조합적 대상을 시행착오로 찾는 대신 대수를 이용해 만들어 내는 것은 대학 조합론(combinatorics)에서 거듭 등장하는 아이디어이다.

더 도전하기

1 **평행이동.** STEP II 2025, 8번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`)에 도전해 보라. 합과 제곱의 합이 같아지도록 나눈 것에서, 한 목록을 평행이동하여 결합함으로써 세제곱의 합까지 같아지는 더 큰 분할을 만드는 방법을 보여 준다.

2 **제곱수의 제곱.** (이 문제도 STEP II, 2025에서 나왔다.) 집합 $A = \{1, 3, 4, 5, 9, 11\}$과 $B = \{2, 6, 7, 8, 10\}$은 합이 같고 제곱의 합도 같다. 모든 양의 정수 n에 대해 $\{n^2, (n+1)^2, \ldots, (n+11)^2\}$을 합이 같은 두 집합으로 나누어라. (**힌트:** 두 번째 집합에 0을 추가하라.)

3 **평행이동 불변성(translation invariance).** 두 수 집합이 $r = 0, 1, \ldots, k$에 대해 r제곱의 합이 같으면, 모든 원소에 같은 수 c를 더해 얻은 집합들도 그러함을 보여라. 이로부터 문제의 집합 $\{1, \ldots, 15\}$를 임의의 연속한 16개의 정수로 바꾸어도 된다는 것은 왜인가?

4 **공정한 사탕.** 사탕의 가치가 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$이다. $ABABABAB$ 순서와 $ABBABAAB$ 순서에서 A가 얻는 총합을 비교하라.

더 읽을거리

- **Jean-Paul Allouche & Jeffrey Shallit, "The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence"**, *Sequences and Their Applications* (Springer, 1999) 수록. 이 수열이 등장하는 수많은 곳을 개관한 글로, 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Matt Parker, *Things to Make and Do in the Fourth Dimension*** (Penguin). 거듭제곱의 합이 같은 집합을 비롯한 여러 수의 신기한 성질을 다룬다.
- **Joshua Cooper & Aaron Dutle, "Greedy Galois games"**, *American Mathematical Monthly* 120 (2013). 공정한 차례 정하기와 투에–모스 수열을 다룬다.

9.8 아무도 자기 셔츠를 받지 못한다

문제

STEP II 2016, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s2-q12`

도입

열한 명의 축구 선수가 급하게 옷을 갈아입느라 아무 셔츠나 집어 든다. 아무도 자기 셔츠를 입지 않게 될 확률(probability)은 얼마일까? 이번에는 선수단이 쉰 명이라고, 혹은 군중이 백만 명이라고 해 보자. 틀릴 사람이 더 많아지니 확률이 올라갈까? 아니면 운 좋게 맞힐 사람도 더 많아지니 내려갈까? 놀랍게도 확률은 거의 변하지 않는다. 다섯 명부터는 확률이 $1/e \approx 0.368$과 0.5퍼센트 이내로 차이 난다.

이것은 조합적 확률론에서 가장 오래된 문제로, 1708년 Pierre de Montmort가 *problème des rencontres*(만남의 문제)라는 이름으로 제기하였다. 이 문제는 겹치는 대상을 세는 도구인 **포함배제의 원리**(inclusion–exclusion principle)로 이 문제를 풀며, 그 답은 수학에서 e가 가장 뜻밖에 등장하는 사례 가운데 하나이다.

시작하기 전에

잠깐, 직접 해 보기 $n = 3$인 경우를 해 보자. 카드 $1, 2, 3$을 늘어놓는 여섯 가지 순서를 모두 적고, 어떤 카드도 제자리에 있지 않은 것이 몇 개인지 세어 보자. 인내심이 있다면 $n = 4$인 경우도 해 보자(24가지 순서가 있다).

$n = 3$일 때 어떤 카드도 제자리에 있지 않은 것은 231과 312뿐이므로 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$이다. $n = 4$일 때는 24가지 중 9가지가 그러하므로 확률은 $\frac{3}{8} = 0.375$이다. 제자리에 고정된 카드가 하나도 없는 배열을 **교란순열**(derangement)이라 한다.

차근차근 풀기

1단계 세 사건에 대한 포함배제

생각해 보기 두 사건에 대한 공식을 적용할 수 있도록 $A \cup B \cup C$를 두 사건의 합사건으로 나타내려면 어떻게 해야 할까?

$A \cup B$를 하나의 사건으로 보고, 이것과 C에 공식을 적용한다.

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}((A \cup B) \cap C).$$

이제 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$이고, 공식을 한 번 더 적용하면 $\mathrm{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$이다. $\mathrm{P}(A \cup B)$도 전개하여 항을 정리하면 결과를 얻는다. ■

네 사건에 대해서도 같은 패턴이 이어진다. 네 개의 단일 확률을 더하고, 여섯 개의 두 사건 교집합을 빼고, 네 개의 세 사건 교집합을 더한 다음, $\mathrm{P}(A \cap B \cap C \cap D)$를 뺀다.

2단계 확률 구하기

생각해 보기 카드 i가 i번째 자리에 있다면 나머지를 배열하는 방법은 몇 가지일까? 카드 i와 j가 모두 고정되어 있다면 어떨까?

일어날 가능성이 같은 순서가 $n!$가지 있다. 카드 i가 i번째 자리에 고정되면 나머지 $n-1$장의 카드는 어떤 순서로든 놓일 수 있으므로 $(n-1)!$가지이다. 따라서

$$\mathrm{P}(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{P}(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$
$$\mathrm{P}(E_i \cap E_j \cap E_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

일반적으로, 지정된 k장의 카드가 모두 제자리에 있을 확률은 $\frac{(n-k)!}{n!}$이다.

3단계 모두 더하기

생각해 보기 $\mathrm{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$에 대한 포함배제 공식에서 k개 사건의 교집합을 포함하는 항은 몇 개이며, 그 합은 얼마일까?

k개의 사건을 고르는 방법은 $\binom{n}{k}$가지이고, 각 교집합의 확률은 $\frac{(n-k)!}{n!}$이다. 따라서 k겹 항들의 합은

$$\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

$k!$를 제외한 모든 것이 약분된다. 부호를 번갈아 붙이면

$$\mathrm{P}(\text{적어도 한 장의 카드가 제자리에 있음}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}. \qquad \blacksquare$$

따라서 교란순열이 될 확률은

$$d_n = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

4단계 정확히 한 장

> **생각해 보기** 정확히 한 장의 카드만 제자리에 있으려면, 그 카드는 어느 것이고 나머지 카드는 어떠해야 할까?

제자리에 있을 카드를 고른다(n가지). 카드 i가 제자리에 있을 확률은 $\frac{1}{n}$이고, 그런 조건에서 나머지 $n-1$장의 카드는 자기들끼리 교란순열을 이루어야 하며, 그 확률은 d_{n-1}이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{정확히 한 장}) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot d_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}. \qquad \blacksquare$$

돌아보기

- **많이 센 다음 바로잡기.** $\mathrm{P}(E_i)$를 더하면 두 장의 카드가 고정된 배열이 두 번 세어진다. 두 사건의 교집합을 빼면 이것은 바로잡히지만 세 사건의 경우에는 너무 많이 빼게 되며, 이런 식으로 계속된다.
- **대칭성이 항들을 같게 만든다.** 모든 k겹 교집합의 확률이 같으므로, 공식의 각 층은 하나의 수에 이항계수를 곱한 것이 된다.
- **더 작은 경우로 환원하기.** "정확히 한 장"은 $n-1$장 카드의 교란순열 문제가 되었다.

숨은 수학

e는 어디서 오는가

급수(series) $\sum(-1)^k/k!$는 지수급수 $e^x = \sum x^k/k!$에 $x = -1$을 대입한 것이다. 따라서 $n \to \infty$일 때

$$d_n \to e^{-1} \approx 0.3679,$$

이고, 정확히 한 장이 일치할 확률도 같은 극한으로 간다. 수렴(convergence)은 놀라울 정도로 빠르다(그림 9.8.1). $1/n!$에서 멈출 때의 오차는 $1/(n+1)!$보다 작으므로, $n = 7$이면

이미 답이 소수점 아래 넷째 자리까지 $1/e$와 일치한다. 사실 n개 대상의 교란순열의 개수 $n!\,d_n$은 정확히 $n!/e$에 가장 가까운 정수이다.

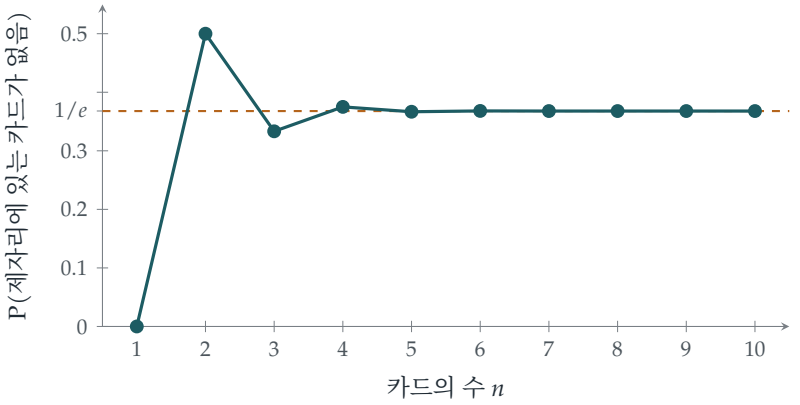


그림 9.8.1 n장의 카드를 무작위로 섞었을 때 어떤 카드도 제자리에 남지 않을 확률. 이 확률은 $1/e$의 위아래를 번갈아 오가며, $n = 6$부터는 이 척도에서 $1/e$와 구별할 수 없다.

일치하는 개수는 푸아송 분포를 따른다

더 많은 것이 성립한다. 제자리에 있는 카드의 수를 N이라 하자. 그러면 각 k에 대하여 $\mathrm{P}(N = k) \to \frac{e^{-1}}{k!}$이다. 즉 일치하는 개수는 극한에서 평균이 1인 **푸아송 분포**(Poisson distribution)를 따른다. 평균이 1인 이유는 계산 없이도 알 수 있다. N은 $E_1, \ldots, E_n$의 지시변수(indicator variable)들의 합이고, 각 지시변수의 기댓값(expectation)은 $\frac{1}{n}$이며, 사건들이 독립이 아니더라도 기댓값은 더할 수 있다. STEP III 2004 Q12(연습문제에 있다)는 분산(variance)도 1임을 보인다. 푸아송 분포는 일어날 가능성이 낮고 거의 독립인 사건이 많을 때마다 나타난다. 교란순열은 그 고전적인 예이며, 12장 Section 12.11의 주제이기도 하다.

Montmort의 *treize* 게임

프랑스 귀족 Pierre Rémond de Montmort는 *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*(1708)에서 운에 좌우되는 게임을 연구하였다. *treize*(열셋) 게임에서 한 사람이 "하나, 둘, 셋, ..."을 외치며 카드 열세 장을 한 장씩 나누어 주는데, 나누어 준 카드가 외친 수와 한 번이라도 일치하면 이긴다. Montmort는 이길 확률을 구하였고, 니콜라우스 베르누이(Nicolaus Bernoulli)와 주고받은 서신을 통해 1713년까지 일반 공식이 확립되었다. 오일러(Euler)는 1753년에 이를 다시 발견하였다. 포함배제의 원리는 나중에 드 무아브르(Abraham de Moivre)가, 그리고 일반적인 형태로는 19세기에 실베스터(James Joseph Sylvester)가 정식화하였다.

사고 기술

포함배제

서로 겹치는 집합들의 합집합의 크기를 세려면, 각 집합의 크기를 더하고, 두 집합씩 겹치는 부분을 빼고, 세 집합씩 겹치는 부분을 더하는 식으로 계속한다.

이 방법은 이 문제에서처럼 대칭성 덕분에 같은 크기의 겹침이 모두 같을 때 가장 강력하다. 대학에서는 조합론, 확률론, 그리고 정수론에서 나타난다. 정수론에서는 주어진 소수(prime)들 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 정수를 세는 데 쓰이며, 오일러 피 함수(Euler's totient function)와 뫼비우스 함수(Möbius function)로 이어진다.

더 도전하기

1 **셔츠.** STEP III 2004, 12번 문제 (`step.maths.org/questions/04-s3-q12`)를 풀어 보자. 이 문제는 자기 셔츠를 입은 선수의 수를 지시변수로 세고, 평균과 분산을 구한 다음, 그 결과를 푸아송 분포와 비교한다.

2 **점화식.** n개 대상의 교란순열의 개수를 D_n이라 하자. 카드 1이 어디로 가는지, 그리고 그 자리에 있던 카드가 1번째 자리로 가는지를 고려하여 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$임을 보여라. 이 식을 $D_3 = 2$, $D_4 = 9$와 대조하여 확인해 보자.

3 **정확히 k장.** 정확히 k장의 카드가 제자리에 있을 확률이 $\frac{1}{k!}d_{n-k}$이고, 이것이 $\frac{e^{-1}}{k!}$로 수렴함을 보여라.

4 **서로소인 정수.** 포함배제를 이용하여 1부터 30까지의 정수 중 2, 3, 5 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 것의 개수를 세어라. 그 답은 $30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$와 어떤 관계가 있는가?

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 포함배제와 일치 문제를 다루는 대학 1학년 교재이다.
- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley), Chapter IV. 일치 문제의 다양한 변형을 담은 고전이다.
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 포함배제에 관한 내용

이 있다.

9.9 생일 문제

문제

STEP II 2007, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/07-s2-q13`

도입

한 방에 몇 명이 있어야 그중 두 사람의 생일이 같을 확률이 같지 않을 확률보다 커질까? 대부분의 사람은 365의 절반인 180 근처라고 짐작한다. 답은 23이다. 서른 명인 학급에서는 생일이 같은 두 사람이 있을 확률이 70%이고, 쉰 명이 모인 파티에서는 97%이다.

이 놀라움은 서로 다른 두 질문을 혼동하는 데서 온다. 하나는 "누군가 **나와** 생일이 같은가?"(이 경우에는 실제로 약 253명이 필요하다)이고, 다른 하나는 "**어떤 두 사람이든** 생일이 같은가?"이다. 23명이 있으면 쌍이 $\binom{23}{2} = 253$개 생기고, 각 쌍이 모두 생일이 일치할 기회가 된다. 이 문제는 그 직관을 정확하게 만들어 주며, 같은 수학이 여러분의 은행 계좌를 보호하는 암호(cryptography)가 얼마나 안전한지를 결정한다.

시작하기 전에

생각해 보기 왜 어떤 두 손님도 생일이 같지 **않을** 확률을 계산하는 편이 더 쉬울까? 손님들을 한 줄로 세워 보자. 두 번째 손님이 첫 번째 손님의 생일을 피할 확률은 얼마인가? 세 번째 손님이 두 사람의 생일을 모두 피할 확률은?

"적어도 두 사람의 생일이 같다"는 서로 겹치는 많은 경우(두 사람이 같은 경우, 세 사람이 같은 경우, 서로 다른 두 쌍이 같은 경우, ...)를 포함한다. 그 여사건(complement)인 "모두 다르다"는 하나의 깔끔한 사건이다. 두 번째 손님은 확률 $\frac{364}{365}$로 첫 번째 손님의 생일을 피하고, 그렇다는 조건 아래에서 세 번째 손님은 확률 $\frac{363}{365}$로 두 사람의 생일을 모두 피한다. 이런 식으로 계속된다.

차근차근 풀기

1단계 유용한 근사

생각해 보기 $x=0$에서 $y=e^{-x}$의 접선(tangent line)은 무엇인가?

$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\cdots$이므로, x가 작을 때 $e^{-x}\approx 1-x$이다. $x=r/n$으로 두면

$$\frac{n-r}{n}=1-\frac{r}{n}\approx e^{-r/n}. \qquad \blacksquare$$

오차는 약 $\frac{r^2}{2n^2}$이며, r이 n보다 훨씬 작으면 작다.

2단계 생일이 같은 사람이 있을 확률

k명의 생일이 모두 다를 확률은

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{365-(k-1)}{365}=\prod_{r=0}^{k-1}\frac{365-r}{365}.$$

각 인수에 근사(approximation)를 적용하고, 지수함수를 곱하면 지수(exponent)가 더해진다는 사실을 이용하면

$$\prod_{r=0}^{k-1}e^{-r/365}=\exp\!\left(-\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{365}\right)=\exp\!\left(-\frac{k(k-1)}{730}\right).$$

따라서 생일이 같은 쌍이 적어도 하나 있을 확률은 근사적으로 $1-e^{-k(k-1)/730}$이다. $\blacksquare$

생각해 보기 지수를 살펴보자. $\frac{k(k-1)}{730}=\binom{k}{2}\Big/365$이다. 이것을 말로 하면 무슨 뜻인가?

이것은 손님 쌍의 개수에 주어진 한 쌍의 생일이 같을 확률 $\frac{1}{365}$를 곱한 것, 즉 생일이 같은 쌍의 개수의 기댓값(expected value)이다. 이 근사는 일치가 **하나도 없을** 확률이 $e^{-(\text{일치하는 쌍의 개수의 기댓값})}$이라고 말해 준다. Section 9.8에서처럼 여기서도 푸아송 분포(Poisson distribution)의 흔적이 보인다.

3단계 스물셋

$1-e^{-k(k-1)/730}\ge\frac{1}{2}$, 즉 $e^{-k(k-1)/730}\le\frac{1}{2}$이어야 하므로

$$\frac{k(k-1)}{730}\ge\ln 2\approx\frac{253}{365}, \qquad \text{즉} \qquad k(k-1)\ge 506.$$

$22\times 21=462$이고 $23\times 22=506$이므로 가장 작은 값은 $k=23$이다. $\blacksquare$

(23명일 때의 정확한 확률은 0.507이고 22명일 때는 0.476이므로, 근사로 올바른 답을 얻는다.)

4단계 주인과 생일이 같은 경우

> **생각해 보기** 각 손님에 대해, 파티 주인과 생일이 같지 **않을** 확률은 얼마인가? 이 점에서 손님들은 서로 독립(independent)인가?

각 손님은 독립적으로 확률 $\frac{364}{365} \approx e^{-1/365}$로 주인의 생일을 비켜 간다. 따라서 k명의 손님 중 아무도 주인과 생일이 같지 않을 확률은 $\left(\frac{364}{365}\right)^k \approx e^{-k/365}$이고, 다음이 성립해야 한다.

$$e^{-k/365} \le \frac{1}{2}, \qquad \text{즉} \qquad k \ge 365 \ln 2 \approx 253.$$

그러므로 손님이 253명 있어야 한다. ■

이 대비가 핵심이다. 특정한 한 사람과 일치하려면 손님이 253명 필요하지만, 어떤 쌍이 일치하는 데는 23명이면 충분하다. 23명이 253개의 쌍을 이루기 때문이다.

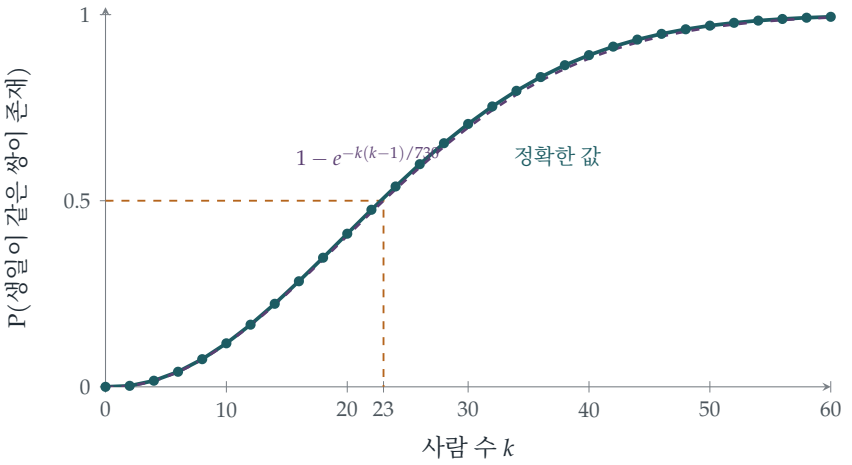


그림 9.9.1 k명 중 적어도 두 사람의 생일이 같을 확률: 정확한 값(청록색)과 근사 $1 - e^{-k(k-1)/730}$(자주색, 점선). 두 값은 매우 가깝고, 둘 다 $k = 22$와 $k = 23$ 사이에서 $\frac{1}{2}$를 넘는다.

돌아보기

- **여사건을 이용하라.** "모두 다르다"는 하나의 곱이었지만, "적어도 하나 일치한다"는 엉망이었다.
- **선형화한 다음 지수화하라.** 각 인수 $1 - x$를 e^{-x}로 바꾸자 곱이 합으로 바뀌었다.
- **쌍을 세어라.** 지수는 쌍의 개수에 한 쌍이 일치할 확률을 곱한 것이었다. $k(k-1)$ 속의 제

곱이 이 역설에 대한 설명의 전부이다.

숨은 수학

제곱근 법칙

365일 대신 똑같이 가능한 날이 n일 있다면, 같은 논증으로

$$\text{P}(\text{일치가 있을 확률, 인원}k) \approx 1 - e^{-k^2/(2n)},$$

을 얻는다. 따라서 k가 n이 아니라 $\sqrt{n}$ 정도만 되어도 일치가 일어날 가능성이 커진다. 더 정확히 말하면, 확률은 $k \approx 1.18\sqrt{n}$에서 $\frac{1}{2}$에 이르고, 처음으로 겹치는 사람이 나올 때까지 만나야 하는 사람 수의 기댓값은 약 $\sqrt{\pi n/2}$이다($n = 365$이면 약 24.6). 이 **제곱근 법칙**(square-root law)이 우연의 일치가 그토록 흔한 이유이다. 사건들을 크게 모아 놓으면, 특정한 일치 하나하나는 일어날 것 같지 않아도 어떤 쌍은 어떤 식으로든 일치할 가능성이 크다.

생일 공격

컴퓨터는 파일이 변조되지 않았는지 확인하기 위해 **해시**(hash)를 계산한다. 해시는 예컨대 $n = 2^{128}$가지의 값 중 하나를 갖는 지문과 같은 것이다. 해시가 같은 두 문서(무해한 계약서와 사기성 계약서)를 원하는 위조자는 2^{128}개의 문서를 시도할 필요가 없다. 생일 논증에 따르면 각 문서의 변형을 약 $\sqrt{2^{128}} = 2^{64}$개씩 만들어 내면 아마도 일치가 생길 것이다. 이 **생일 공격**(birthday attack) 때문에 현대의 해시 함수는 256비트 이상을 사용한다. 제곱근 법칙 때문에 비트의 절반을 잃기 때문이다. 비슷한 계산으로, 두 컴퓨터가 실수로 같은 식별자를 고르는 일이 결코 없도록 무작위 식별자의 길이를 얼마로 해야 하는지도 정한다.

처음 물은 사람은 누구인가?

생일 문제는 보통 1939년에 이 문제를 다룬 리하르트 폰 미제스(Richard von Mises)의 공으로 돌려지지만, 그 이전부터 퍼져 있었다. 해럴드 대븐포트(Harold Davenport)도 그보다 먼저 이 문제를 알고 있었으나 너무 단순해 보여서 발표하지 않았다고 전해진다. 워런 위버(Warren Weaver)가 전하는 이야기에 따르면, 그는 제2차 세계 대전 중 육군 장교들의 만찬에서 이 문제를 보여 주기를 좋아했다. 한번은 그 자리에 있던 스물두 명 중 두 사람의 생일이 같다는 데 내기를 걸었다가 졌는데, 그때 한 웨이트리스가 자신이 장교 중 한 명과 생일이 같다고 밝혔다.

사고 기술

여사건을 계산하고, 신중하게 근사하라

"적어도 하나"가 복잡할 때는 "하나도 없음"의 확률을 구하라. 곱이 다루기 까다로울 때는 각 인수를 지수함수로 근사하고 지수를 더하라.

두 방법 모두 대학에서 표준적으로 쓰인다. 두 번째 방법인 $1 - x \approx e^{-x}$는 푸아송 근사 이론의 출발점이며, 정확히 계산하기에는 너무 복잡한 양을 추정하는 데 쓰이는 점근적 방법(asymptotic methods)의 출발점이기도 하다.

더 도전하기

1 **첫 번째 반복.** STEP II 2014, 13번 문제 (`step.maths.org/questions/14-s2-q13`)에 도전해 보자. 이 문제는 난수 생성기에서 처음으로 반복되는 값을 다루는데, 이는 모습을 바꾼 생일 문제이며, 확률들을 놀라운 두 항등식으로 바꾸어 놓는다.

2 **세 사람의 생일이 같은 경우.** 어떤 세 사람의 생일이 같을 확률이 절반보다 커지려면 대략 몇 명이 필요한가? (힌트: 생일이 같은 세 사람 묶음의 개수의 기댓값은 $\binom{k}{3}/365^2$이다. 이 값을 약 $\ln 2$로 놓아라.) 실제 답은 88이다.

3 **아슬아슬한 경우.** 두 사람의 생일이 같은 날이거나 이웃한 날일 확률이 절반이 되려면 몇 명이 필요한가?

4 **고르지 않은 생일.** 실제 생일은 균등하게 분포하지 않는다. 각 날의 확률이 $p_1, \ldots, p_{365}$일 때 두 사람의 생일이 같을 확률은 $\sum p_i^2$이고, 이 값은 모든 p_i가 같을 때 가장 작음을 보여라. (따라서 분포가 고르지 않으면 일치가 오히려 더 일어나기 쉬워진다.)

더 읽을거리

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley), 제II장. 생일 문제와 그 근사.
- **Persi Diaconis & Frederick Mosteller, "Methods for studying coincidences"**, *Journal of the American Statistical Association* 84 (1989). 우연의 일치가 흔한 이유를 다루며, 매우 읽기 쉽다.
- **David Hand, *The Improbability Principle*** (Bantam). 제곱근 법칙을 비롯해, 일어날 것 같지 않은 일이 늘 일어나는 이유들을 다룬다.

9.10 언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록

문제

STEP I 2011, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/11-s1-q12`

도입

$\frac{m}{m+1}$, $\frac{m-1}{m+1}$, $\frac{m-2}{m+1}$라는 패턴은 그냥 지나치기 어렵다. £2 동전을 가진 사람이 n명이면 답은 분명 $\frac{m-n+1}{m+1}$일 것이다. 실제로 그렇다. 그리고 가장 매끄러운 증명은 조합론(combinatorics)에서 가장 우아한 아이디어 가운데 하나인 **반사 원리**(*reflection principle*)이다. 이 원리는 그림의 일부를 직선에 대하여 반사시켜, 세기 어려운 것(거스름돈이 한 번도 떨어지지 않는 줄)을 세기 쉬운 것으로 바꾸어 준다.

같은 문제는 여러 모습으로 나타난다. 개표하는 동안 당선자가 한 번도 뒤지지 않는 선거(1887년 베르트랑(Bertrand)의 투표 문제(ballot problem)), 끝내 파산하지 않는 도박꾼, 올바르게 짝지어진 괄호 등이 그 예이다. $m = n$일 때 이 개수는 **카탈랑 수**(*Catalan numbers*)가 되는데, 이것은 아마도 조합론에서 이항계수(binomial coefficients) 다음으로 자주 등장하는 수열일 것이다.

시작하기 전에

생각해 보기 £1 손님은 동전을 하나씩 주고, £2 손님은 (거스름돈으로) 동전을 하나씩 가져간다. 언제 막히게 되는가?

가지고 있는 £1 동전의 개수를 추적하자. 이 개수는 £1 손님마다 1씩 늘고, £2 손님마다 1씩 준다. 막히는 것은 정확히 동전이 하나도 없을 때 £2 손님이 오는 경우, 곧 개수가 -1이 되려는 경우이다. 따라서 성공할 필요충분조건은 줄의 모든 지점에서 그때까지의 £1 손님 수가 그때까지의 £2 손님 수 이상인 것이다.

차근차근 풀기

1단계 £2 동전이 하나일 때

$n = 1$이면 £2 손님이 맨 앞에 있을 때만 실패한다. £2 손님은 $m+1$개의 자리 중 어느 자리에나 같은 확률로 있을 수 있으므로

$$\mathrm{P}(\text{성공}) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}. \qquad \blacksquare$$

2단계 £2 동전이 둘일 때

> **생각해 보기** 첫 번째 사람은 반드시 £1 동전을 가지고 있어야 한다. 두 번째 사람에게는 어떤 일이 일어날 수 있으며, 각 경우에 어떤 상황에 놓이게 되는가?

첫 번째 사람이 £1 동전을 가지고 있을 확률은 $\frac{m}{m+2}$이고, 그렇지 않으면 곧바로 실패한다. 그러면 동전을 하나 가지게 되고, 남은 줄에는 £1을 가진 사람 $m-1$명과 £2를 가진 사람 2명이 있다.

- 두 번째 사람이 £1 동전을 가지고 있으면(확률 $\frac{m-1}{m+1}$), 동전이 두 개가 되어 £2 동전 두 개가 언제 오든 모두 거슬러 줄 수 있다. 성공이 확실하다.
- 두 번째 사람이 £2 동전을 가지고 있으면(확률 $\frac{2}{m+1}$), 다시 동전이 하나도 없는 상태가 되고, £1을 가진 사람 $m-1$명과 £2를 가진 사람 1명이 남는다. 소문항 (i)에서 m 대신 $m-1$을 쓰면 성공할 확률은 $\frac{m-1}{m}$이다.

따라서

$$\mathrm{P}(\text{성공}) = \frac{m}{m+2}\left(\frac{m-1}{m+1} + \frac{2}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m}\right) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{m+2}{m} = \frac{m-1}{m+1}. \qquad \blacksquare$$

> **잠깐, 직접 해 보기** $n = 3$일 때도 같은 방법을 시도해 보아라. 가능하기는 하지만 경우가 급격히 늘어난다. 성공하는 줄을 한꺼번에 셀 방법은 없을까?

3단계 줄을 경로로 보기

> **생각해 보기** 응대한 사람 수에 대하여 가지고 있는 동전의 개수를 그래프로 그려 보아라. 줄은 어떤 모양이 되는가? 성공하는 줄은 어떤 모양인가?

줄은 m개의 올라가는 걸음(£1)과 n개의 내려가는 걸음(£2)으로 이루어진 경로로, 높이 0에서 출발하여 높이 $m-n$에서 끝난다. 이런 경로는 $\binom{m+n}{n}$개이고, 모두 같은 확률로 일어난다.

줄이 성공하는 것은 정확히 그 경로가 한 번도 0 아래로 내려가지 않을 때이다. 따라서 높이 -1에 닿는 **나쁜** 경로의 개수를 세면 된다.

4단계 반사

생각해 보기 나쁜 경로를 하나 잡자. 그 경로가 처음으로 -1에 닿는 순간을 찾고, 그 순간 **이전**의 경로 부분을 직선 $y=-1$에 대하여 반사시켜라. 새 경로는 어디에서 출발하고 어디에서 끝나는가?

반사된 경로는 -2(직선 $y=-1$에 대한 0의 대칭점)에서 출발하고, 원래 경로와 같은 곳인 $m-n$에서 끝난다(그림 9.10.1). 거꾸로, -2에서 $m-n$으로 가는 모든 경로는 어딘가에서 반드시 $y=-1$을 지난다($m \geq n$이므로 아래에서 출발하여 위에서 끝나기 때문이다). 이 경로를 처음 $y=-1$에 닿기 전까지 반사시키면 0에서 출발하는 나쁜 경로를 되찾는다. 따라서 0에서 출발하는 나쁜 경로는 -2에서 $m-n$으로 가는 **모든** 경로와 정확히 대응한다.

$m+n$걸음 동안 -2에서 $m-n$으로 가는 경로는 $m-n+2$만큼 올라가므로, 올라가는 걸음이 $m+1$개, 내려가는 걸음이 $n-1$개이다. 이런 경로는 $\binom{m+n}{n-1}$개이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{실패}) = \frac{\binom{m+n}{n-1}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{n!\,m!}{(n-1)!\,(m+1)!} = \frac{n}{m+1},$$

이고

$$\mathrm{P}(\text{성공}) = 1 - \frac{n}{m+1} = \frac{m-n+1}{m+1}.$$

$n=3$이면 이 값은 $\frac{m-2}{m+1}$이다. ■

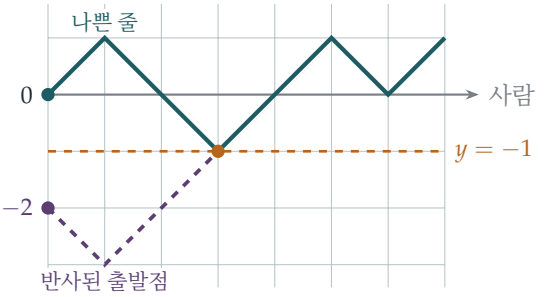


그림 9.10.1 £1 동전 $m=4$개와 £2 동전 $n=3$개로 이루어진 줄을 경로(청록색)로 나타낸 것이다. 이 경로는 세 번째 사람에서 처음으로 -1에 닿고(호박색), 이때 거스름돈을 줄 수 없다. 그 지점까지의 경로를 직선 $y=-1$에 대하여 반사시키면 -2에서 출발하여(자주색, 점선) 같은 끝점에 이르는 경로가 된다. 나쁜 줄과 -2에서 출발하는 경로 사이의 이 대응이 바로 반사 원리이다.

돌아보기

- **알맞은 상태를 찾아라.** 중요한 것은 가지고 있는 동전의 개수뿐이었고, 이것이 줄을 하나의 행보로 바꾸어 주었다.
- **처음 몇 걸음으로 조건을 나누어라.** 소문항 (i)과 (ii)는 처음 몇 사람이 무엇을 하는지 물어서 더 작은 경우로 줄여 풀었다.
- **전단사로 여사건을 세어라.** 나쁜 경로는 직접 세기 어려웠지만, 반사를 통해 세기 쉬운 집합과 짝지을 수 있었다. 이처럼 여사건(complement)을 전단사(bijection)로 세는 것이 핵심이었다.

숨은 수학

카탈랑 수

$m = n$일 때(£1 동전이 딱 필요한 만큼 있을 때), 성공하는 줄의 개수는

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

즉 n번째 **카탈랑 수** C_n: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$이다. Richard Stanley의 책 *Catalan Numbers*에는 이 수가 세는 서로 다른 대상이 이백 가지 넘게 실려 있다. 그 가운데 몇 가지를 들면, n쌍의 괄호를 올바르게 배열하는 방법의 수("(())()"는 되지만 "())(()"는 안 되는데, 이는 "("를 £1로, ")"를 £2로 보면 동전 논증과 정확히 같다), $n+2$각형을 서로 교차하지 않는 대각선으로 삼각형들로 나누는 방법의 수, $n+1$개 인수의 곱에 괄호를 치는 방법의 수가 있다.

무작위 행보

줄은 무작위 행보(random walk)이고, 반사 원리는 무작위 행보를 연구하는 기본 도구 가운데 하나이다. 예를 들어 이 원리를 쓰면 0에서 출발하는 공정한 무작위 행보는 언젠가 반드시 0으로 돌아오며, 처음 $2n$걸음 동안 줄곧 양수에 머물 확률이 $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}2^{-2n} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$임을 보일 수 있다. 연속인 경우에 같은 반사 논증을 **브라운 운동**(*Brownian motion*)에 적용하면 그 최댓값의 분포를 얻는다. 이것은 주가가 어떤 경계를 한 번이라도 넘는지에 따라 수익이 달라지는 특정 금융 옵션의 가격을 매기는 바탕이 된다.

베르트랑의 투표 문제

1887년 Joseph Bertrand는 다음과 같이 물었다. 후보 A가 a표를, B가 $b < a$표를 얻는 선거에서, 개표하는 내내 A가 엄격하게 앞서 있을 확률은 얼마인가? 답 $\frac{a-b}{a+b}$는 같은 해에

Désiré André가 증명하였고, 그의 논증은 흔히 반사 원리로 기억된다(다만 역사가들은 André의 실제 증명이 약간 다른 전단사를 썼다고 지적한다). 우리의 추첨권 문제는 동점을 허용하는 변형으로, 성공이란 £1의 개수가 한 번도 £2의 개수 **아래로** 떨어지지 않는 것을 뜻한다. 연습문제 하나에서 우리의 답으로부터 베르트랑의 답을 이끌어 낸다.

사고 기술

전단사를 이용한 세기

어떤 집합의 원소를 세려면, 셀 수 있는 집합과의 일대일 대응(*one-to-one correspondence*)을 찾아라.

반사는 나쁜 줄을 다른 출발점에서 시작하는 제한 없는 경로와 짝지어 주었다. 전단사는 조합론에서 가장 만족스러운 증명이다. 두 수가 같다는 것을 보이는 데 그치지 않고 왜 같은지를 설명해 주기 때문이다. 대학에서는 조합론 전반에 걸쳐 전단사 증명을 만나게 되고, 무작위 행보와 브라운 운동을 공부할 때 반사 원리를 다시 만나게 된다.

더 도전하기

1 **경우를 나누어 셋까지.** 소문항 (ii)에서처럼 줄의 처음 몇 사람으로 조건을 나누어 소문항 (iii)을 증명하고, 반사 원리가 얼마나 많은 수고를 덜어 주는지 확인하여라.

2 **베르트랑의 투표 문제.** 어떤 선거에서 A는 a표를, B는 $b < a$표를 얻는다. 개표하는 내내 A가 엄격하게 앞서 있을 확률이 $\frac{a-b}{a+b}$임을 보여라. (**힌트:** 첫 표는 반드시 A의 것이어야 한다. 그 뒤로 A는 B보다 ...넘게 뒤처져서는 안 된다.)

3 **괄호.** 세 쌍의 괄호를 올바르게 배열하는 5가지 방법과 오각형을 삼각형들로 나누는 5가지 방법을 모두 나열하여라. 둘 사이의 전단사를 찾을 수 있는가?

4 **£5 지폐.** 가격이 £1인 표를 사려는 줄에 £1 동전을 가진 사람 m명과 £5 지폐를 가진 사람 n명이 있다. 이 경우에는 왜 반사 원리로 간단한 답을 얻을 수 없는지 설명하여라. (이 일반화는 훨씬 어렵다.)

더 읽을거리

► **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley),

제III장. 무작위 행보와 반사 원리를 다룬 고전적인 책이다.

- **Richard Stanley, *Catalan Numbers*** (Cambridge University Press). 이백 가지가 넘는 해석과 연습문제가 실려 있다.
- **Marc Renault, "Lost (and found) in translation: André's actual method and its application to the generalized ballot problem"**, *American Mathematical Monthly* 115 (2008). 반사 원리의 역사를 다룬다.

9.11 한 세트 모두 모으기

문제

STEP II 1994, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/94-s2-q13`

도입

어떤 축구 스티커 앨범에는 모아야 할 스티커가 600장 있고, 스티커는 한 장씩 무작위로 판매된다. 앨범을 다 채우려면 스티커를 몇 장 사야 한다고 기대할 수 있을까? 처음 몇백 장은 금방 모인다. 거의 모든 스티커가 새것이기 때문이다. 그러나 앨범이 채워질수록 새 스티커는 점점 드물어지고, 마지막 한 장만 해도 평균 600번을 사야 나온다. 전체는 약 4200장으로, 앨범 크기의 일곱 배에 이른다.

이것이 **쿠폰 수집가 문제**(*coupon collector's problem*)이다. 그 답은 두 가지 아이디어를 결합한다. 하나는 성공할 때까지의 대기 시간이고, 다른 하나는 $\ln n$처럼 증가하는 조화급수(harmonic series) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$이다. 조화급수가 발산한다는 것은 Section 2.3에서 보았다. 여기서는 바로 그 느린 증가가 수집을 완성하는 데 치러야 하는 대가이다.

시작하기 전에

생각해 보기 각 봉지에서 독립적으로 확률 p로 새 카드가 나온다면, 첫 번째 새 카드가 나올 때까지(그 봉지 포함) 뜯는 봉지 수의 기댓값은 얼마인가?

봉지 수 X는 **기하분포**(*geometric distribution*) $\mathrm{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$를 따른다. 그 기댓값(expectation)은 $\frac{1}{p}$이다. (이를 빠르게 확인하는 방법 하나: 봉지 하나를 뜯고, 확률 $1-p$로 처음 상태로 돌아가므로 $\mathrm{E}(X) = 1 + (1-p)\mathrm{E}(X)$이다.) 새 카드가 세 번에 한 번꼴로 나온다면, 세 봉지를 기다릴 것으로 기대된다.

차근차근 풀기

1단계 새 카드 기다리기

이미 서로 다른 카드 r장을 가지고 있다면, 한 봉지에서 새 카드가 나올 확률은 이전 봉지들과 독립적으로 $\frac{n-r}{n}$이다. 따라서 다음 새 카드가 나올 때까지 뜯는 봉지 수의 기댓값은

$$\frac{1}{(n-r)/n} = \frac{n}{n-r}. \qquad \blacksquare$$

2단계 합과 적분 비교하기

> **생각해 보기** 구간 $r \le x \le r+1$에서 $\frac{1}{x}$는 어떤 두 값 사이에 있는가? 이것은 곡선 아래의 넓이에 대해 무엇을 말해 주는가?

$\frac{1}{x}$는 감소하므로 $[r, r+1]$에서 $\frac{1}{r+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{r}$이다. 길이가 1인 구간에서 적분하면

$$\frac{1}{r+1} \le \int_r^{r+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{r}. \qquad \blacksquare$$

그림으로 보면(그림 9.11.1) 곡선 아래의 넓이가 높이 $\frac{1}{r+1}$인 직사각형과 높이 $\frac{1}{r}$인 직사각형 사이에 끼어 있다. 이것을 $r=1$부터 $r=n-1$까지 더하면 적분들이 이어져 $\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$이 되고, 따라서

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \le \ln n \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}. \qquad \blacksquare$$

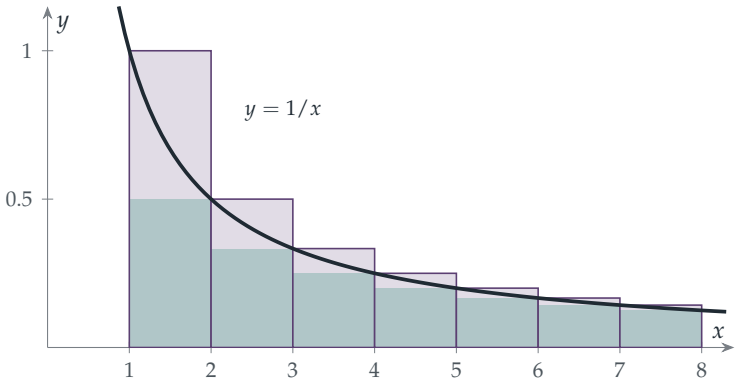


그림 9.11.1 각 구간 $[r, r+1]$에서 $y = 1/x$ 아래의 넓이는 청록색 직사각형(높이 $\frac{1}{r+1}$)과 그보다 큰 자주색 직사각형(높이 $\frac{1}{r}$) 사이에 있다. 이를 모두 더하면 $\ln n$은 $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$과 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$ 사이에 있다. 곡선과 자주색 직사각형 사이의 틈을 모두 더하면 유한한 값이 되는데, 이것이 오일러(Euler) 상수 $\gamma \approx 0.577$이다.

3단계 세트 완성하기

생각해 보기 전체 봉지 수는 첫 번째 카드, 두 번째 새 카드 등을 기다리는 대기 시간들의 합이다. 그 기댓값은 얼마인가?

서로 다른 카드 r장에서 $r+1$장이 되기까지 필요한 봉지 수를 X_r라 하자. 전체는 $X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$이고, 기댓값은 더해지므로

$$\mathrm{E}(\text{전체}) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n}{n-r} = n\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\Big) = nH_n,$$

이다. 여기서 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$은 n번째 **조화수**(*harmonic number*)이다. 2단계에서 $\ln n + \frac{1}{n} \le H_n \le \ln n + 1$이므로, n이 클 때 H_n은 대략 $\ln n$이고, 나는 대략

$$n \ln n \text{ 봉지.} \qquad \blacksquare$$

를 먹어야 한다고 예상해야 한다.

돌아보기

- **긴 기다림을 단계로 나누어라.** 전체 시간은 n개의 대기 시간으로 나뉘었고, 각각은 단순한 기하분포 형태였다.
- **기댓값은 더할 수 있다.** 전체의 분포는 전혀 필요하지 않았고, 각 조각의 기댓값만 있으면 되었다.
- **합을 적분과 비교하라.** 그림을 통해 계산할 수 없는 합을 오차가 최대 1인 로그로 바꾸었다.

숨은 수학

이 추정은 얼마나 정확한가?

비교를 더 정밀하게 할 수 있다. 그림 9.11.1에서 곡선과 위쪽 직사각형 사이의 색칠된 틈들은 넓이의 합이 유한하므로, $H_n - \ln n$은 어떤 극한으로 수렴(converge)한다.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = 0.5772156649\ldots,$$

이것이 **오일러 상수**(*Euler's constant*)이다. (γ가 유리수(rational)인지는 아무도 모른다.) 따라서 봉지 수의 기댓값은 $n \ln n + \gamma n + \frac{1}{2} + \cdots$이다. 스티커 600장짜리 앨범의 경우 $600 \times (\ln 600 + 0.577) \approx 4185$로, 도입에서 말한 수치가 바로 이것이다.

시간은 어디에 쓰이는가? 각 단계는 매우 불균등하다. 세트의 처음 절반을 모으는 데는 약 $n \ln 2 \approx 0.69n$봉지밖에 들지 않지만, 마지막 카드 하나에만 평균 n봉지가 든다. 노력의 대부분은 마지막 몇 장에 들어가며, 그래서 수집가들은 중복된 카드를 서로 교환한다.

집중

기댓값은 시작일 뿐이다. 전체는 얼마나 변동하는가? 전체의 분산(variance)은 $\sum nr/(n-r)^2$이고, 이는 약 $\frac{\pi^2}{6}n^2$이다(Section 2.4에서 나온 합 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$이 등장한다). 따라서 표준편차(standard deviation)는 약 $1.28n$으로, n이 클 때 평균 $n \ln n$보다 훨씬 작다. 즉 전체는 평균 주위에 **집중**(*concentrated*)되어 있다. 폴 에르되시(Paul Erdős)와 알프레드 레니(Alfréd Rényi)는 1961년에 더 정확하게, 전체에서 $n \ln n$을 빼고 n으로 나눈 값이 극한분포(limiting distribution)를 가지며, 그것이 **굼벨 분포**(*Gumbel distribution*)임을 보였다. 굼벨 분포는 많은 확률적인 양 가운데 가장 큰 값을 기술하는 분포이기도 하다(Section 12.25).

어디에나 있는 쿠폰

이 문제는 아브라암 드무아브르(Abraham de Moivre, 1712)와 라플라스(Laplace)까지 거슬러 올라간다. 오늘날 이 문제는 여러 모습으로 나타난다. 시스템의 모든 부품을 점검하려면 무작위 검사가 몇 번 필요한가? 네트워크 위의 랜덤 워크(random walk)가 모든 노드를 방문할 때까지 얼마나 걸리는가? 컴퓨터 해시 테이블(hash table)을 몇 번 탐색해야 하는가? 어느 경우든 답에는 $n \ln n$이 들어 있다. 생물학에서는 같은 계산으로 유전체 전체를 덮는 데 필요한 염기서열 분석 "리드(reads)"의 수를 추정한다.

사고 기술

기댓값의 선형성

합의 기댓값은 기댓값의 합이며, 이는 각 조각이 독립(*independent*)이든 아니든 성립한다. 복잡한 확률적인 양을 단순한 조각들로 나누어라.

이것은 확률에서 가장 유용한 사실 가운데 하나인 기댓값의 선형성(linearity of expectation)이다. 여기서는 쿠폰 수집가 문제를 n개의 기하분포 대기로 환원했고, Section 9.8에서는 아무 계산 없이 일치하는 개수의 기댓값을 구해 주었다. 대학에서는 같은 아이디어가 알고리즘 분석과 조합론(combinatorics)의 확률적 방법(probabilistic method)을 뒷받침한다.

더 도전하기

1 **세트의 절반.** (n이 짝수일 때) 서로 다른 카드 $\frac{n}{2}$장을 모으는 데 필요한 봉지 수의 기댓값이 $n(H_n - H_{n/2})$이고, 이것이 약 $n \ln 2$임을 보여라.

2 **서로 다른 카드.** k봉지를 뜯은 뒤 가지고 있는 서로 다른 카드 수의 기댓값이 $n\big(1-(1-\frac{1}{n})^k\big)$임을 보여라. (**힌트:** 각 카드에 대해 그 카드를 가지고 있을 확률을 구하고, 모두 더하라.) 대략 몇 봉지를 뜯으면 세트의 95%를 얻는가?

3 **두 수집가.** 두 아이가 같은 세트를 모으면서 봉지를 함께 나누어, 한 아이에게 중복인 카드가 다른 아이에게는 새 카드가 될 수 있다. 두 세트를 모두 완성하는 데 필요한 봉지 수의 기댓값이 약 $n(\ln n + \ln\ln n)$임을 보여라. (이 문제는 더 어렵다. 먼저 이것이 $2n\ln n$보다 훨씬 작다는 것을 납득해 보라.)

4 **더 정밀한 한계.** 직사각형 대신 사다리꼴 공식(trapezium rule)의 그림을 이용하여 $H_n - \ln n$이 감소하고 $H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$이 증가함을 보여라. 작은 n 값들로부터 $0.5 < \gamma < 0.7$을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *One Thousand Exercises in Probability*** (Oxford University Press). 쿠폰 수집가 문제의 다양한 변형이 많이 실려 있다.
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*** (Princeton University Press). γ와 조화급수에 관한 모든 것을 쉽게 읽을 수 있는 수준으로 다룬다.
- **Michael Mitzenmacher & Eli Upfal, *Probability and Computing*** (Cambridge University Press). 쿠폰 수집가 문제와 컴퓨터 과학에서의 활용을 다룬다.

9.12 무작위 부분집합

문제

STEP III 2019, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

도입

$\{1, 2, \ldots, 100\}$의 부분집합(subset) 두 개를 완전히 무작위로 고른다고 하자. 두 집합이 공통 원소를 하나도 갖지 않을 가능성은 얼마나 될까? 직관은 "꽤 높다. 대부분의 집합 쌍은 서로 다르니까"라고 말할지도 모른다. 그러나 실제 확률(probability)은 $\left(\frac{3}{4}\right)^{100}$, 즉 약 3×10^{-13}이다. 무작위 집합은 크기가 크고(전체의 약 절반), 그래서 거의 언제나 서로 겹친다.

문제는 짧지만, 그 안에 담긴 한 가지 아이디어는 강력하다. 집합을 통째로 생각하지 말고, 원소를 하나씩 생각하라는 것이다. 무작위 부분집합은 각 원소마다 한 번씩, 모두 n번의 독립적인 동전 던지기일 뿐이며, 무작위 부분집합에 관한 모든 질문은 이 동전 던지기에 관한 질문이 된다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\{1, \ldots, n\}$의 부분집합을 예/아니요 질문에 대한 n개의 답의 나열로 어떻게 나타낼 수 있을까?

각 원소 i에 대하여 "i가 집합에 속하는가?"라는 질문에 답한다. 부분집합이 정해지면 답이 정해지고, 답이 정해지면 부분집합이 정해진다. 원소마다 선택지가 2가지이므로 부분집합은 모두 2^n개이다. 부분집합을 균등하게 무작위로 고르는 것은 각 질문에 공정한 동전을 독립적으로 던져 답하는 것과 같다.

차근차근 풀기

1단계 원소 하나

동전 던지기 설명에 따르면 $\mathrm{P}(1 \in A_1) = \frac{1}{2}$이다. 실제로 2^n개의 부분집합 중 정확히 절반이 1을 포함한다. 1을 포함하지 않는 각 부분집합을, 거기에 1을 추가하여 얻은 부분집합과 짝지으면 된다.

2단계 서로소인 집합

> **생각해 보기** $A_1 \cap A_2 = \varnothing$이려면 각 원소 i에 대해 무엇이 성립해야 하는가? 원소 하나에 대해 그 확률은 얼마인가? 왜 원소들에 걸쳐 곱할 수 있는가?

A_1과 A_2는 두 집합 모두에 속하는 원소가 없을 때 정확히 서로소(disjoint)이다. 원소 i 하나에 대해서는 같은 확률로 일어나는 네 가지 경우가 있다. 어느 집합에도 속하지 않는 경우, A_1에만 속하는 경우, A_2에만 속하는 경우, 둘 다에 속하는 경우이다(그림 9.12.1의 왼쪽). 마지막 경우만 금지되므로, i가 두 집합 모두에 속하지 않을 확률은 $\frac{3}{4}$이다. 서로 다른 원소는 서로 다른 독립(independent)인 동전 던지기로 정해지므로

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 = \varnothing) = \left(\frac{3}{4}\right)^n. \qquad \blacksquare$$

집합이 세 개라면 원소 i가 세 집합 모두에 속할 확률은 $\frac{1}{8}$이므로 $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing) = \left(\frac{7}{8}\right)^n$이다. 일반적으로

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_m = \varnothing) = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^n. \qquad \blacksquare$$

3단계 부분집합

> **생각해 보기** $A_1 \subseteq A_2$이려면 원소에 대한 네 가지 경우 중 어느 것이 금지되는가?

$A_1 \subseteq A_2$는 어떤 원소가 A_1에는 속하지만 A_2에는 속하지 않을 때 정확히 성립하지 않는다. 이번에도 네 가지 패턴 중 하나가 금지되므로

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

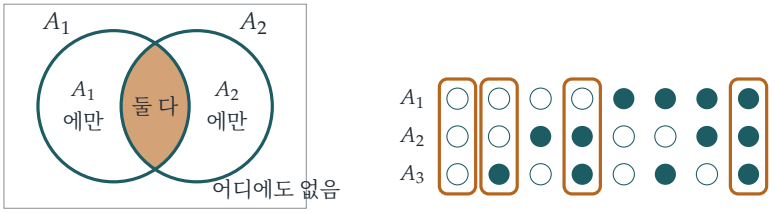
즉 서로소일 확률과 같다. 이것은 우연이 아니다. $A_1 \subseteq A_2$는 A_1이 A_2의 여집합(complement)과 서로소일 때 정확히 성립하며, 무작위 집합의 여집합은 또 다른 무작위 집합이다.

생각해 보기 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$이려면, 원소의 소속 패턴(각 집합에 속하는지 아닌지) 8가지 중 어느 것이 허용되는가?

사슬(chain) A_1, A_2, A_3을 따라가면서, 원소가 일단 들어오면 계속 들어 있어야 한다. 따라서 허용되는 패턴은 "밖, 밖, 밖", "밖, 밖, 안", "밖, 안, 안", "안, 안, 안"으로 8가지 중 4가지이다(그림 9.12.1의 오른쪽). 그러므로 $\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3) = \left(\frac{4}{8}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

집합 m개로 이루어진 사슬에서는, 허용되는 패턴이 원소가 처음 들어가는 집합($A_1, \ldots, A_m$ 중 하나, 또는 끝내 들어가지 않음)에 의해 결정되므로 2^m개의 패턴 중 $m+1$개가 허용된다.

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_m) = \left(\frac{m+1}{2^m}\right)^n. \qquad \blacksquare$$



각 원소: 같은 확률의 4가지 위치 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$에 허용되는 패턴: 8가지 중 4가지

그림 9.12.1 왼쪽: S의 원소는 A_1과 A_2에 대하여 네 가지 위치 중 하나에 있을 수 있으며, 각각의 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 서로소 조건은 "둘 다"(호박색)를 금지하고, $A_1 \subseteq A_2$는 "A_1에만"을 금지한다. 오른쪽: A_1, A_2, A_3에 대한 여덟 가지 소속 패턴(채워진 원은 "안"을 뜻한다). 사슬 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$은 상자로 표시한 네 패턴만 허용하는데, 이 패턴들에서는 원소가 일단 들어오면 계속 들어 있다.

돌아보기

- **원소별로 분해하기.** 집합 수준의 각 조건(서로소, 부분집합, 사슬)은 각 원소에 대한 개별 조건이었다.
- **원소 사이의 독립성.** 원소들은 독립적인 동전 던지기로 정해지므로 확률을 곱한다.
- **패턴 세기.** 각 답은 (허용되는 패턴 수 ÷ 전체 패턴 수)^{n}이었다.

숨은 수학

확률 없이 세기

선택의 가짓수를 곱하면 각 확률이 개수로 바뀐다. $A_1 \subseteq A_2$인 순서쌍 (A_1, A_2)의 개수는 $4^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3^n$이다. 이 쌍들을 직접 셀 수도 있다. A_2의 크기 k를 정하고, A_2 자체를 $\binom{n}{k}$가지 방법으로 고른 다음, A_1을 A_2의 2^k개 부분집합 중 하나로 고르면 된다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n,$$

이것은 $(1+2)^n$에 대한 이항정리(binomial theorem)이다. 같은 대상을 한 번은 원소별로, 한 번은 크기별로, 두 가지 방법으로 세어 항등식을 증명한 것이다. 이것이 **이중 계수**(*double counting*)라는 방법으로, Section 7.9에서 정다면체를 다룰 때 만난 적이 있다. 마찬가지로 사슬 $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_m$의 개수는 $(m+1)^n$이다.

부분집합의 격자

$\{1, \ldots, n\}$의 부분집합들은 포함 관계로 순서를 매기면 **불 격자**(*Boolean lattice*)라는 구조를 이룬다. 이것은 n차원 정육면체로 그려 볼 수 있다. 각 부분집합은 예/아니요 답의 나열로 이름 붙은 꼭짓점이고, 모서리를 따라 움직이는 것은 원소 하나를 추가하거나 제거하는 것이다. 사슬은 위로 올라가는 경로이다. 부분집합족에 조건이 주어졌을 때 그 족이 얼마나 클 수 있는지를 밝히는 깊은 결과들이 있다. **슈페르너 정리**(*Sperner's theorem*)(1928)는 어떤 집합도 다른 집합을 포함하지 않는 가장 큰 족이 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$개의 집합으로 이루어짐을 말하고, **에르되시–코–라도 정리**(*Erdős–Ko–Rado theorem*)(1961)는 어느 두 집합도 서로 겹치도록 k개 원소의 집합을 몇 개까지 고를 수 있는지를 말한다. 두 정리 모두 조합론(combinatorics) 입문 강의의 표준 내용이며, 부분집합을 동전 던지기로 보는 관점은 가장 매끄러운 증명 몇 가지를 제공한다.

불의 대수

조지 불(George Boole)의 *The Laws of Thought*("사고의 법칙", 1854)는 논리적 명제를 집합으로, "그리고", "또는", "아니다"를 각각 교집합, 합집합, 여집합으로 다루었다. 집합을 예/아니요 답의 문자열로 부호화하는 것은 바로 컴퓨터가 집합을 표현하는 방식이다. $\{1, \ldots, 64\}$의 부분집합은 하나의 64비트 수이고, 교집합은 "비트 AND" 명령이다. 원소 하나(비트 하나)씩 다루는 이 문제의 방법은 바로 그러한 연산을 분석하는 방법이다.

사고 기술

원소를 하나씩 생각하기

대상이 각 원소에 대한 독립적인 선택으로 만들어질 때, 모든 원소에 개별적으로 적용되는 조건의 확률은 곱과 같다.

이 방법은 2^n개의 부분집합에 관한 질문을 4개 또는 8개의 패턴에 관한 질문으로 바꾸었다. 대학에서는 조합론(집합과 중복집합(multiset)의 생성함수(generating function)), 확률론(독립인 좌표), 컴퓨터 과학(비트 단위 추론)에서 다시 등장한다.

더 도전하기

1 **덮기.** $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 = S)$와 $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = S)$를 구하여라.

2 **같은 크기.** $\mathrm{P}(|A_1| = |A_2|) = \binom{2n}{n}/4^n$임을 보여라. (힌트: $|A_1| = |A_2|$는 $|A_1| + |S \setminus A_2| = n$일 때 정확히 성립한다.) n이 클 때 이 값이 약 $1/\sqrt{\pi n}$임을 보여라.

3 **셋으로 분할하기.** S의 서로소인 부분집합의 순서쌍 (A, B)의 개수가 3^n임을 보이고, 서로소인 부분집합의 순서 없는 쌍 $\{A, B\}$의 개수를 구하여라.

4 **작은 n에 대한 슈페르너 정리.** $n = 3$과 $n = 4$에 대하여, 어떤 집합도 다른 집합을 포함하지 않는 $\{1, \ldots, n\}$의 부분집합족 중 가장 큰 것을 구하여라.

더 읽을거리

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 부분집합과 부분순서집합을 다루는 장들.
- **Béla Bollobás, *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability*** (Cambridge University Press). 슈페르너 정리에서 출발하여 부분집합족을 다루는 짧고 우아한 책.
- **Peter Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*** (Cambridge University Press). 두 가지 방법으로 세기를 특히 강조하는 입문서.

9.13 조작된 주사위

문제

STEP I 1999, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/99-s1-q12`

도입

공정한 주사위(fair dice) 두 개를 던지면 합이 7이 나올 가능성은 합이 2가 나올 가능성의 여섯 배이다. 보드게임 설계자들은 때때로 그렇지 않기를 바란다. 주사위를 조작하여(loaded, 어떤 면이 더 자주 나오도록 무게를 조절하여) 2부터 12까지의 모든 합이 같은 확률 $\frac{1}{11}$을 갖게 할 수 있을까? 열두 개의 확률을 자유롭게 정할 수 있으니 여지는 충분해 보인다.

답은 "불가능하다"이며, 그 증명은 보석 같다. 열한 가지 합 가운데 세 가지와 부등식 $x + \frac{1}{x} \geq 2$만을 사용한다. 이 증명은 어떤 것이 **불가능함**을 증명하는 방법의 모범이 되는데, 이런 증명은 어떤 것이 가능함을 보이는 것보다 더 어렵고 더 흥미로운 경우가 많다.

시작하기 전에

생각해 보기 $x > 0$일 때 $x + \frac{1}{x} \geq 2$를 어떻게 증명하겠는가? 등호는 언제 성립하는가?

양변에 $x > 0$을 곱하면 부등식은 $x^2 + 1 \geq 2x$, 즉 $(x-1)^2 \geq 0$이 되고, 이는 참이다. 등호는 $x = 1$일 때만 성립한다. (또는 $x + \frac{1}{x} - 2 = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2$을 이용해도 된다.) 이것은 가장 단순한 형태의 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이다. 즉 x와 $\frac{1}{x}$의 산술평균은 둘의 기하평균(geometric mean)인 1 이상이다.

차근차근 풀기

1단계 양 끝의 합

생각해 보기 합 2가 나오는 경우는 몇 가지인가? 합 12는? 그 확률을 q_i와 r_j로 나타내어 보아라.

합 2가 나오려면 두 주사위 모두 1이 나와야 하고, 12가 나오려면 둘 다 6이 나와야 하므로 $\mathrm{P}(2) = q_1 r_1$이고 $\mathrm{P}(12) = q_6 r_6$이다.

귀류법(proof by contradiction)을 쓰기 위해, 열한 가지 합이 모두 같은 가능성, 즉 각각 확률 $\frac{1}{11}$을 갖는다고 가정하자. 그러면

$$q_1 r_1 = \frac{1}{11}, \qquad q_6 r_6 = \frac{1}{11}.$$

특히 q_1, r_1, q_6, r_6 네 값은 모두 양수이다.

2단계 가운데 합

생각해 보기 합 7을 만드는 방법은 여섯 가지이다. 그중 면 1과 6만 관련된 두 가지는 무엇인가? 위의 식을 이용하여 그 확률을 나타내어 보아라.

합 7에는 결과 $(1, 6)$과 $(6, 1)$이 포함되므로

$$\mathrm{P}(7) \geq q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

이제 1단계의 식을 이용하여 비를 끌어들이자. $q_1 = \frac{1}{11 r_1}$이고 $q_6 = \frac{1}{11 r_6}$이므로

$$q_1 r_6 + q_6 r_1 = \frac{1}{11}\left(\frac{r_6}{r_1} + \frac{r_1}{r_6}\right) \geq \frac{1}{11} \times 2 = \frac{2}{11},$$

이다. 여기서 $x = r_6 / r_1 > 0$으로 두고 $x + \frac{1}{x} \geq 2$를 사용하였다. 따라서 $\mathrm{P}(7) \geq \frac{2}{11}$이고, 이는 $\mathrm{P}(7) = \frac{1}{11}$에 모순이다. 그러므로 모든 합이 같은 가능성을 가질 수는 없다. ■

잠깐, 직접 해 보기 증명이 성립하게 만든 것이 무엇인지 살펴보자. 2와 12가 7만큼 나올 가능성을 갖게 하려면 1과 6이 꽤 자주 나와야 하고, 그러면 "혼합된" 결과 $(1, 6)$과 $(6, 1)$만으로도 7이 너무 자주 나오게 된다. 그림 9.13.1에 관련된 칸들이 나타나 있다.



그림 9.13.1 두 주사위의 결과 36가지를 합으로 표시한 것이다. 증명에는 네 모서리 칸만 사용된다. 두 호박색 칸의 확률의 곱은 두 짙은 청록색 칸의 확률의 곱과 같고($q_1r_1q_6r_6 = q_1r_6 \cdot q_6r_1$), 산술-기하 평균 부등식에 의해 청록색 두 칸의 합은 호박색 두 칸의 기하평균의 두 배 이상이다.

3단계 주사위 하나를 두 번 던지기

생각해 보기 주사위 하나를 두 번 던질 때 두 수가 같을 확률을 q_j로 나타내면 무엇인가? 공정한 주사위라면 얼마인가?

두 번의 결과가 같을 확률은 $q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2$이다. 공정한 주사위라면 이 값은 $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$이고, 이미 $\frac{1}{36}$보다 훨씬 크다.

생각해 보기 주사위를 조작하여 $\sum q_j^2$을 $\frac{1}{6}$보다 작게 만들 수 있는가? $\sum q_j = 1$임을 알고 있다.

$q_j = \frac{1}{6} + e_j$로 쓰자. 여기서 편차(deviation) e_j들의 합은 0이다. 그러면

$$\sum q_j^2 = \sum\left(\frac{1}{36} + \frac{e_j}{3} + e_j^2\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\sum e_j + \sum e_j^2 = \frac{1}{6} + \sum e_j^2 \geq \frac{1}{6}.$$

따라서 같은 수가 반복될 확률은 항상 $\frac{1}{6}$ 이상이고, 등호는 공정한 주사위일 때만 성립한다. 이 확률이 $\frac{1}{36}$보다 작을 수는 결코 없다. ■

돌아보기

- **귀류법.** 모든 합이 같은 가능성을 갖는다고 가정하고 불가능한 결론을 이끌어 내었다.
- **필요한 것만 사용하라.** 열한 개의 식 가운데 세 개로 충분했다. 알맞은 식을 고르는 것이 핵심 단계였다.
- **부등식은 불가능성을 증명한다.** (i)에서는 산술-기하 평균 부등식이, (ii)에서는 "제곱의

합은 음이 아니다”라는 사실이 가능성의 모든 경우를 한꺼번에 배제하였다.

숨은 수학

다항식을 이용한 증명

이번에는 Section 9.6의 생성함수(generating function)를 이용한 완전히 다른 증명을 보자. $Q(x) = q_1 x + \cdots + q_6 x^6$, $R(x) = r_1 x + \cdots + r_6 x^6$이라 하자. 모든 합의 확률이 $\frac{1}{11}$이라면

$$Q(x)R(x) = \frac{x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}}{11} = \frac{x^2}{11}\bigl(1 + x + \cdots + x^{10}\bigr).$$

이다. 그런데 $Q(x)/x$는 실수 계수를 갖는 5차 다항식이고, 차수가 홀수인 실계수 다항식은 모두 실근을 갖는다(그래프가 $-\infty$에서 $+\infty$로, 또는 그 반대로 가기 때문이다). 따라서 좌변은 0이 아닌 실근을 갖는다. 하지만 $1 + x + \cdots + x^{10} = \frac{x^{11}-1}{x-1}$이고, 그 근은 1을 제외한 11차 단위근(roots of unity)이며, 그중 실수인 것은 없다. 모순이다. 같은 논증으로, $n - 1$이 홀수일 때, 즉 n이 짝수일 때 두 개의 n면체 주사위를 어떻게 조작해도 합들이 같은 가능성을 갖게 할 수 없음을 보일 수 있다. (n이 홀수이면 다항식 논증에 더 많은 작업이 필요하지만, 위의 산술-기하 평균 증명은 모든 $n \geq 2$에 대해 성립한다.)

충돌 확률

(ii)에 나온 양 $\sum q_j^2$, 즉 서로 독립인 두 번의 추출 결과가 같을 확률을 분포의 **충돌 확률**(collision probability)이라 한다. (ii)는 이 값이 균등분포(uniform distribution)에서 가장 작다는 것을 보여 준다. 충돌 확률은 분포가 얼마나 집중되어 있는지를 측정한다. 생태학에서 $\sum q_j^2$은 심프슨(Simpson)의 다양성 지수인데, 여기서 q_j는 서식지에서 종 j가 차지하는 비율이다. 경제학에서는 시장 집중도를 나타내는 Herfindahl 지수이고, 암호학에서는 비밀번호 분포를 얼마나 쉽게 추측할 수 있는지를 측정한다. 또한 이것은 Section 9.9 끝의 언급을 설명해 준다. 생일의 확률이 균등하지 않으면 생일이 같은 사람이 있을 가능성은 커질 수밖에 없다.

불가능성 증명

수학에서 가장 유명한 결과 가운데 일부는 어떤 것을 할 수 없다고 말한다. 제곱하여 2가 되는 분수는 없다. 자와 컴퍼스만으로 하는 작도(ruler-and-compass construction)로는 모든 각을 삼등분할 수 없다. 거듭제곱근(radicals)을 이용한 공식으로 모든 5차방정식(quintic)을 풀 수는 없다. 모든 수학적 명제를 판정하는 알고리즘은 없다. 이 결과들은 각각 그 분야를 바꾸어 놓았다. 어떤 방법도 통하지 **않음**을 증명하려면 가능한 방법 전체의 공간을 이해해야 하기 때문이다. 조작된 주사위 문제는 그 축소판이다. 모든 조작을 배제하기 위해 모든 조작이 따라야 하는 불변 성질(invariant, 산술-기하 평균 부등식)이 필

요했다.

사고 기술

귀류법과 부등식으로 불가능성을 증명하라

어떤 매개변수 선택도 통하지 않음을 보이려면, 통하는 선택이 있다고 가정하고, 서로 충돌하는 몇 가지 조건을 골라낸 뒤, 부등식을 이용하여 그 조건들이 동시에 성립할 수 없음을 보여라.

대학에서는 귀류법과 부등식의 결합이 대상의 존재하지 않음을 증명하는 표준적인 방법이다. 해석학(analysis), 조합론(combinatorics), 최적화(optimisation)에서 그러한데, 이 분야들에서는 산술-기하 평균 부등식이나 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality) 같은 부등식이 달성할 수 있는 것의 한계를 정한다.

더 도전하기

1 **코시-슈바르츠.** 코시-슈바르츠 부등식 $\left(\sum a_j b_j\right)^2 \le \sum a_j^2 \sum b_j^2$에 $a_j = q_j$, $b_j = 1$을 대입하여 (ii)를 한 줄로 증명하여라.

2 **서로 다른 두 주사위.** 서로 다른 조작된 주사위 두 개를 각각 한 번씩 던질 때, 두 주사위에서 같은 수가 나올 확률이 $\frac{1}{6}$보다 작을 수 있는가? 0이 될 수 있는가?

3 **다른 눈을 가진 주사위의 균등한 합.** 면에 다른 수를 적으면 두 주사위의 합이 같은 가능성을 가질 수 있음을 보여라. 한 주사위에는 $0, 1, 2, 3, 4, 5$를, 다른 주사위에는 $0, 6, 12, 18, 24, 30$을 적어 보아라. 어떤 합들이 나오는가? 이것이 왜 문제의 결론에 모순되지 않는가?

4 **주사위 세 개.** 면에 1부터 6까지 적힌 조작된 육면체 주사위 세 개로 3부터 18까지의 모든 합이 같은 가능성을 갖게 할 수 있는가? (**힌트:** 합 3, 8, 13, 18과 여섯 개의 수에 대한 산술-기하 평균 부등식을 이용하여라. 이번에는 다항식 증명이 왜 통하지 않는가?)

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 산술-기하 평균 부등식에서 출발하는 아름다운 부등식 입문서이다.

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 생성함수와 위와 같은 증명에서의 활용을 다룬다.
- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press)의 앞부분 장들. 가장 유명한 불가능성 증명인 5차방정식에 관한 증명을 다룬다.

우리가 배운 것

이 장을 시작하며 우리는 세는 일이 가장 오래된 수학이면서, 영리하게 세는 일은 여전히 가장 어려운 일 가운데 하나라고 말했다. 그리고 세 가지 질문을 던졌다. 하나하나 나열하지 않고 어떻게 셀 수 있는가? 어떤 일은 언제 반드시 일어나는가? 세기와 확률은 서로를 어떻게 돕는가? 이 장의 열세 문제가 보여 준 것은 다음과 같다.

1. 나열하지 않고 어떻게 셀 수 있는가?

이 장에서는 여러 도구를 차례로 갖추었다.

- **점화식(recurrence).** 평면에 직선을 하나 더 긋거나(Section 9.1) 울타리에 기둥을 하나 더 세우면(Section 9.3) 개수가 간단한 방식으로 바뀌었고, 이로부터 풀 수 있는 점화식을 얻었다. 마지막 기둥의 색처럼 약간의 정보를 더 기록해 두면 점화식이 닫힌 형태로 맞물렸다.
- **생성함수(generating function).** 수열을 멱급수(power series)로 묶어 놓으면 점화식이 대수 문제로 바뀌었고(Section 9.4), $1/89 = 0.01123\ldots$인 까닭이 설명되었으며, 조합의 개수를 세는 일이 다항식의 곱셈으로 바뀌었다. Section 9.5의 동전, Section 9.6의 주사위, 그리고 Section 9.7의 균형 잡힌 거듭제곱 합이 그 예이다. 마지막 예에서는 $x = 1$에서의 중근이 모든 일을 해냈다.
- **전단사(bijection).** 반사 원리(reflection principle)(Section 9.10)는 나쁜 줄을 제한 없는 경로와 짝지어 그 개수를 세었고, 무작위 집합의 여집합(complement)을 이용하면 부분집합이 서로소인 쌍으로 바뀌었다(Section 9.12).
- **포함–배제 원리(inclusion–exclusion).** 중복하여 센 뒤 바로잡는 방법으로 완전순열(derangement)의 개수를 구했다(Section 9.8).
- **이중 계산(double counting).** 오일러(Euler) 공식으로 영역을 세는 일(Section 9.1)과 부분집합의 쌍을 크기별로 세는 일(Section 9.12)은 서로 다른 길로 같은 답에 이르렀고, 그 과정에서 항등식을 증명해 주었다.

2. 어떤 일은 언제 반드시 일어나는가?

여러 절에서 크기만으로도 구조가 강제된다는 것을 보았다. 여섯 명 가운데에는 서로 모두 아는 세 사람이나 서로 모두 모르는 세 사람이 반드시 있다(Section 9.2). 이는 비둘기

집 원리(pigeonhole principle)로 보일 수 있으며, 다섯 명으로는 충분하지 않다. 스물세 명이 모이면 생일이 같은 사람이 있을 확률이 절반을 넘는다(Section 9.9). 쌍의 개수가 사람 수의 제곱처럼 커지기 때문이다. 큰 집합의 무작위 부분집합들은 거의 언제나 겹친다(Section 9.12). 그리고 아무리 애써도 **일어날 수 없는** 일도 있다. 두 주사위에 어떻게 무게를 실어도 모든 합이 같은 확률로 나오게 할 수는 없고(Section 9.13), Sicherman의 주사위를 빼면 어떤 눈의 배치도 보통 주사위의 합을 그대로 재현하지 못한다(Section 9.6).

3. 세기와 확률은 서로를 어떻게 돕는가?

이 장의 후반부에서는 세기를 통해 확률을 구했다. 완전순열은 포함–배제 원리로, 생일 문제는 곱으로, 투표 문제는 반사로 해결했다. 그러나 반대 방향의 흐름도 있었다. 기댓값의 선형성(linearity of expectation)은 아무것도 세지 않고 쿠폰 수집가 문제(coupon collector)의 nH_n(Section 9.11)과 카드를 섞었을 때 제자리에 오는 카드 수의 기댓값을 알려주었다. 무작위 부분집합을 동전 n번 던지기로 생각하면(Section 9.12) 3^n이나 $(m+1)^n$ 같은 개수가 한 줄짜리 계산이 되었다. 그리고 에르되시(Erdős)의 확률적 방법(probabilistic method)(Section 9.2)은 무작위 색칠이 양의 확률로 조건을 만족함을 보임으로써 좋은 색칠이 존재함을 증명했다. 두 상수가 난데없이 나타나기도 했다. 하나는 완전순열이 될 확률의 극한에 나타난 e이고, 다른 하나는 수집을 완성하는 데 드는 비용에 나타난 오일러 상수 γ이다.

4. 세기를 위한 도구 모음

방법	사용한 곳
하나를 더할 때 무엇이 바뀌는가	직선(9.1); 울타리 기둥(9.3)
비둘기집 원리	램지(Ramsey)(9.2)
연립 점화식	울타리 기둥(9.3)
생성함수	9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.13
양 끝에서 출발하는 경우 나누기	이상한 주사위(9.6); 무게 실린 주사위(9.13)
포함–배제 원리	완전순열(9.8)
여사건과 지수 근사	생일(9.9)
반사 원리	투표 문제(9.10)
기댓값의 선형성	쿠폰(9.11); 제자리 일치(9.8)
원소를 하나씩	무작위 부분집합(9.12)
산술–기하 평균 부등식(AM–GM)을 이용한 귀류법	무게 실린 주사위(9.13)

다음으로

- 완전순열의 푸아송(Poisson) 극한은 Section 12.11에서 다시 등장하고, 확률변수의 생성함수는 Section 12.15에서 가계도 연구를 이끈다.
- 연립 점화식은 Section 12.16에서 마르코프 연쇄(Markov chain)가 된다.
- 쿠폰 수집가 문제의 검벨 분포(Gumbel distribution)는 Section 12.25에서 수많은 확률적 양 가운데 가장 큰 값을 기술한다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***: 이 장의 거의 모든 아이디어를 다루는 친절한 입문서이다.
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***: 생성함수에 관한 고전으로, 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***: 합, 점화식, 생성함수를 재치 있게 다루며 연습문제가 많다.
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***: 대학 1학년 확률론의 세기 측면을 다룬다.

화이트헤드(Whitehead)는 조합론(combinatorics)을 "위상수학(topology)의 빈민가"라고 불렀다. 이 장은 오늘날 왜 아무도 그렇게 말하지 않는지를 보여 주려 했다. 영리한 세기 뒤에는 언제나 그것을 훨씬 넘어서는 아이디어가 있었다. 생성함수, 전단사, 점화식, 부등식이 그것이다. 이런 아이디어들은 세기를 대수학, 해석학, 확률론과 이어 주며, 요령 하나를 더 찾는 대신 이런 아이디어를 찾는 법을 배우는 것이야말로 세기를 수학으로 바꾸어 준다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 스스로 푼 결과를 확인할 수 있도록 결과와 핵심 단계만 제시한다. 답을 보기 전에 먼저 각 연습문제를 제대로 풀어 보도록 한다.

9.1 평면을 자르는 직선

1. 원 하나는 2개의 영역(region)을 만든다. n번째 원은 나머지 원들과 $2(n-1)$개의 점에서 만나고, 이 점들은 그 원을 $2(n-1)$개의 호(arc)로 나누며, 각 호는 한 영역을 둘로 가른다. 따라서 $R_n = R_{n-1} + 2(n-1)$이고, 이로부터 $n^2 - n + 2$를 얻는다.

2. 각 직선은 1에 그 직선 위의 교점 개수를 더한 만큼 영역을 늘리므로, 전체 영역의 수는 $1 + n +$ (교점의 개수)이다. k개의 평행선 때문에 교점이 $\binom{k}{2}$개 줄어든다: $1 + n + \binom{n}{2} - \binom{k}{2}$.

3. n번째 평면은 나머지 평면들에 의해 일반적 위치(general position)에 있는 $n-1$개의 직선으로 잘리고, 이 직선들은 평면을 $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$개의 조각으로 나누며, 각 조각은 공간의 한 영역을 둘로 가른다. 이를 $\frac{1}{6}\big((n-1)^3 + 5(n-1) + 6\big)$에 더하면 $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$을 얻는다.

4. $n = 6$이면 영역은 32개가 아니라 31개이다. 원 내부에서 그래프(graph)는 $V = n + \binom{n}{4}$개의 꼭짓점(vertex)(각 교점은 네 점에서 생긴다)과 $E = n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$개의 변(edge)(원의 호들과 현(chord)들이며, 교점 하나마다 조각이 두 개씩 늘어난다)을 가진다. 오일러(Euler) 공식 $V - E + F = 2$는 바깥 영역도 세므로, 영역의 개수는 $F - 1 = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$이다.

9.2 축소판 램지 정리

1. 이색(bichromatic) 각은 많아야 $6 \times 6 = 36$개이다. 한 가지 색이 아닌 삼각형은 각각 이런 각을 정확히 두 개 포함하므로, 그런 삼각형은 많아야 18개이다. $\binom{6}{3} = 20$이므로 적어도 2개의 삼각형은 한 가지 색이다.

2. 한 점에서 나가는 변은 16개이므로 적어도 6개는 같은 색, 예컨대 빨간색이고, 이 변들은 점 $P_1, \ldots, P_6$으로 간다. P_i들 사이의 변 중 하나라도 빨간색이면 빨간 삼각형이 생긴다. 그렇지 않으면 P_i들은 두 가지 색으로 칠해진 K_6을 이루고, 여기에는 한 가지 색 삼각형이 있다.

3. 점 v에는 변이 9개 있으므로 금색이 적어도 4개이거나 은색이 적어도 6개이다. 금색 이웃이 4개인 경우: 그들 사이에 금색 변이 있으면 v와 함께 금색 삼각형이 생기고, 그렇지 않으면 그들은 은색 K_4를 이룬다. 은색 이웃이 6개인 경우: 그들 사이에 한 가지 색 삼각형이 있다. 그 삼각형이 금색이면 끝이고, 은색이면 v와 함께 은색 K_4를 이룬다.

4. 각 항에 (i, d)라는 이름표를 붙인다. 이는 그 항에서 끝나는 가장 긴 증가 부분수열(subsequence)과 가장 긴 감소 부분수열의 길이이다. 두 항을 비교하면 뒤의 항은 i가 더 크거나 d가 더 크므로, 이름표는 모두 다르다. 길이 3인 부분수열이 없다면 5개의 항에 가능한 이름표는 4개뿐이다. 둘 다 없는 예: $2, 1, 4, 3$.

9.3 울타리 기둥 색칠하기

1. 앞에서와 같이 $r_{n+1} = s_n$이고(기둥 n이 빨간색이 아니므로 기둥 $n+1$은 빨간색일 수 있다), 첫 기둥 다음의 각 기둥은 $k-1$가지로 고를 수 있으므로 $r_n + s_n = (k-1)^{n-1}$이다. 따라서 $r_{n+1} + r_n = (k-1)^{n-1}$이고, $r_n = \frac{(k-1)^{n-1} + (k-1)(-1)^{n-1}}{k}$이다. 원형으로 놓인 경우: 기둥 1의 색을 k가지로 고른 다음, 같은 색으로 끝나는 $n+1$개 기둥의 일렬 배치를 생각하면 $kr_{n+1} = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$을 얻는다.

2. $2, 3, 5, 8, \ldots$: 경우의 수를 a_n이라 하면, 흰색으로 끝나는 배열은 길이 $n-1$인 아무 배열에나 이어 붙인 것이고, 빨간색으로 끝나는 배열은 흰색으로 끝나는 길이 $n-2$인 배열에 이어 붙인 것이므로 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$이다. 답은 F_{n+2}이다.

3. 가운데에 4가지 선택이 있고, 그다음 n-순환(cycle)을 3가지 색으로 칠한다: $4\big(2^n + 2(-1)^n\big)$.

4. $n = 4$이면 색칠은 18가지이다. 사분의 일 회전은 어느 것도 고정하지 않고, 반 회전은 마주 보는 기둥의 색이 같은 6가지를 고정하므로, 목걸이(necklace)는 $\frac{1}{4}(18 + 0 + 6 + 0) = 6$개이다. $n = 5$이면 색칠은 30가지이고 어떤 회전도 이들 중 어느 것도 고정하지 않으므로 6개이다.

9.4 함수로서의 수열

1. 꼬리 부분은 많아야 $F_7 \sum_{r \geq 7} 2^{r-7} 10^{-r} = \frac{13 \times 10^{-7}}{0.8} < 2 \times 10^{-6}$이다. $\sum F_r 10^{-r} = \frac{10}{89}$이고 처음 여섯 항의 합이 0.112358이므로, $\frac{10}{89}$는 0.112358과 0.112360 사이에 있고, 따라서 $\frac{1}{89} = 0.011235\ldots$이다. 두 자리씩 묶으면 $\sum F_r 100^{-r-1} = \frac{1}{9899}$이다.

2. 점화식(recurrence relation)을 모두 더하면 $f(x)(1 - 7x + 10x^2) = 2 - 7x$이고, $\frac{2-7x}{(1-2x)(1-5x)}$는 주어진 대로 분해된다. b_n의 경우: $10p + 5q = 40$과 $40p + 10q = 100$에서 $p = 1, q = 6$을 얻는다. $t^2 = t + 6$의 근은 3과 -2이고, $b_n = 4 \cdot 3^n + (-2)^n$이다.

3. $\sum n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$이고, $x = \frac{1}{100}$에서 이 값은 $\frac{100}{9801}$이므로 $\frac{1}{9801} = \sum n \cdot 100^{-n-1}$이다. 이

패턴은 98 블록에서 어긋난다: 100에 해당하는 블록이 99로 1을 올리고, 이것이 다시 98로 올라가므로, 전개는 $\ldots 96\,97\,99\,00\,01\ldots$와 같이 이어진다.

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$를 곱하면 x^n의 계수가 $u_0 + \cdots + u_n$이 된다. 제곱수의 생성함수(generating function)는 $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$이므로 부분합의 생성함수는 $\frac{x+x^2}{(1-x)^4}$이고, x^n의 계수는 $\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이다.

9.5 거스름돈 만들기

1. x^{24}의 계수는 $6a + 6b + 3c = 24$의 해의 개수를 센다: 0부터 4까지의 각 $s = a + b$에 대해 선택이 $s + 1$가지이므로 15이다. 일반적으로 x^n의 계수는 $n = 3m$이 아니면 0이고, $n = 3m$이면 $k = \lfloor m/2 \rfloor$에 대해 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$이다. 추가 인수를 곱하면 계수는 부분합이 된다: x^{24}, x^{25}, x^{66}에 대해 각각 55, 55, 650이다. 이는 1p, 3p 동전과 서로 다른 두 종류의 6p 동전으로 지불하는 방법의 수이다.

2. 각 부분 k는 한 번 쓰이거나 전혀 쓰이지 않는다. 곱은 연쇄적으로 소거된다(telescopes): $\prod \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$에서 분모의 지수가 짝수인 인수가 모두 소거되어 $\prod \frac{1}{1-x^{\text{홀수}}}$만 남는데, 이것은 홀수 부분으로의 분할(partition)의 생성함수이다. $n = 6$인 경우: 6, $5+1$, $4+2$, $3+2+1$, 그리고 $5+1$, $3+3$, $3+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1$: 각각 네 개씩이다.

3. $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대한 값은 $1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots$이고, $\frac{(n+4)^2}{20}$은 항상 이 값들과의 차이가 $\frac{1}{2}$ 이내이다($n = 60$까지 확인했다. 증명에는 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$의 부분분수(partial fractions)를 이용한다).

4. 마지막 동전은 1p 또는 2p이므로 $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$이다: 피보나치(Fibonacci) 수이며, $c_n = F_{n+1}$이다.

9.6 이상한 주사위

1. 각 주사위는 x에 인수 $1+x, 1+x, 1+x^2, 1+x^2$ 중 일부의 곱을 곱한 것이고 $x = 1$에서의 값이 4이므로, 그중 두 개를 가진다. 표준 쌍을 제외하면 가능한 것은 $x(1+x)^2$과 $x(1+x^2)^2$뿐이다: 면이 $1, 2, 2, 3$인 주사위와 $1, 3, 3, 5$인 주사위이다.

2. 곱은 $2x^3 + x^4 + x^5 + 4x^6 + 3x^7 + 8x^8 + 6x^9 + 5x^{10} + 6x^{11}$이고, 표와 일치한다.

3. 그렇다: Sicherman 쌍 $1, 2, 2, 3, 3, 4$와 $1, 3, 4, 5, 6, 8$에 표준 주사위 하나를 함께 쓰면 된다.

4. $(x + x^2)(x + \cdots + x^8) = x^2(1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)$이다. 동전에는 값이 2인 인수가 필요하다: 표준 선택 $x(1+x)$ 외에도 $x(1+x^2)$(면이 $1, 3$이고, 정팔면체(octahedron)는 $1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7$) 또는 $x(1+x^4)$(면이 $1, 5$이고, 정팔면체는 $1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5$)일 수 있다.

9.7 같은 거듭제곱의 합

1. $\sum(c+b_k)^3 - \sum(c+a_k)^3 = 3c^2\big(\sum b_k - \sum a_k\big) + 3c\big(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\big) + \sum b_k^3 - \sum a_k^3$이고, 처음 두 괄호는 0이 된다. $\{1,4,6,7\}$, $\{2,3,5,8\}$에서 $c = 8$로 시작하면 $\{1,4,6,7,10,11,13,16\}$과 $\{2,3,5,8,9,12,14,15\}$를 얻는다.

2. A와 $B\cup\{0\}$은 모두 원소가 6개이고, 합이 33, 제곱의 합이 253이다. 그러면 $\sum_{a\in A}(n+a)^2 = \sum_{b\in B\cup\{0\}}(n+b)^2$이므로, $\{n^2,\dots,(n+11)^2\}$이 둘로 나뉜다.

3. 이항정리(binomial theorem)로 $(x+c)^r$을 전개하면 r 이하의 거듭제곱만 나오고, 그 합들은 서로 같다. 문제의 집합들은 두 번째 집합에 0을 넣으면 $\{0,\dots,15\}$가 되고, 평행이동하면 연속한 정수 16개 어느 것이든 얻는다.

4. $ABABABAB$이면 A는 약 1.676, B는 약 1.042를 얻는다. $ABBABAAB$이면 A는 약 1.560, B는 약 1.158을 얻는다: 여전히 같지는 않지만 훨씬 가깝다.

9.8 아무도 자기 셔츠를 받지 못한다

1. $\mathrm{E}(C_1) = \frac{1}{m}$, $\mathrm{Var}(C_1) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}$이고, $\mathrm{Cov}(C_1,C_2) = \frac{1}{m(m-1)} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^2(m-1)}$이다. 그러면 $\mathrm{E}(N) = 1$이고 $\mathrm{Var}(N) = m\big(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}\big) + m(m-1)\frac{1}{m^2(m-1)} = 1$이다. $m = 4$이면 $\mathrm{P}(N=0) = \frac{9}{24} = 0.375$이고, 이는 $\mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$과 비교된다.

2. 카드 1은 어떤 위치 i로 간다($n-1$가지). 카드 i가 위치 1로 가면 나머지는 $n-2$개의 교란순열(derangement)이다. 그렇지 않으면 위치 1을 카드 i의 금지된 자리로 보면 $n-1$개의 교란순열이 된다. 확인: $D_3 = 2(1+0) = 2$, $D_4 = 3(2+1) = 9$.

3. 고정되는 카드 k장을 고르고 나머지를 교란하면 $\binom{n}{k}\frac{D_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{D_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{d_{n-k}}{k!}$이고, 이는 $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$로 수렴한다.

4. $30 - (15+10+6) + (5+3+2) - 1 = 8$이고, 이는 $30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$와 같다: 포함배제(inclusion–exclusion) 합이 인수분해되는 것이다(이것은 오일러의 $\varphi(30)$이다).

9.9 생일 문제

1. $\mathrm{P}(X=r) = \big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{r-2}{n}\big)\frac{r-1}{n}$이고, 이들의 합은 1이다. 기댓값(expectation)에 대해서는, $\mathrm{P}(Y=r)$이 $\mathrm{P}(Y\ge 1),\dots,\mathrm{P}(Y\ge r)$ 각각에서 한 번씩 세어진다. $Q_k = \mathrm{P}(X>k) = \prod_{j=1}^{k-1}\big(1-\frac{j}{n}\big)$라 하자. 그러면 $\mathrm{E}(X) = \sum(k+1)\frac{k}{n}Q_k$이고 또 $\mathrm{E}(X) = 1 + \sum Q_k$이다. $\sum\frac{k}{n}Q_k = 1$을 이용하여 빼면 $\sum Q_k\big(1-\frac{k^2}{n}\big) = 0$을 얻는다.

2. $\binom{k}{3} \approx 365^2\ln 2$에서 $k \approx 82$를 얻는다. 이 근사는 세 사람 묶음들 사이의 종속성을 무시한 것이며, 실제 답은 88이다.

3. 14명. (각 쌍이 "가까울" 확률은 $\frac{3}{365}$이고, $\binom{k}{2}\frac{3}{365} \approx \ln 2$에서 $k \approx 14$를 얻는다. 정확히 세면 14명일 때 확률은 약 0.537, 13명일 때 약 0.483이다.)

4. 두 사람이 날 i를 공유할 확률은 p_i^2이고, 이를 모두 더한다. 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식에 의해 $1 = \left(\sum p_i\right)^2 \leq 365 \sum p_i^2$이고, 등호는 모든 p_i가 같을 때만 성립한다.

9.10 언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록

1. 첫 번째 사람은 £1 동전을 가지고 있어야 한다. 다음 몇 사람에 대해 조건을 걸면 여러 경우(£2를 내는 손님이 지나갈 때마다 어떤 동전을 가지고 있는지)로 나뉘고, 각 경우는 소문항 (i)과 (ii)의 답으로 마무리된다. 이를 모으면 $\frac{m-2}{m+1}$을 얻는다. 반사 원리(reflection principle)를 쓰면 한 줄로 끝난다.

2. 첫 표는 A의 표여야 한다. A로 시작하는 개표 순서 중 나쁜 것(동점에 이르는 것)은, 첫 동점 이전 부분을 반사하면 B로 시작하는 개표 순서와 대응한다. 따라서 좋은 개표 순서의 수는 $\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}$이고, 이를 $\binom{a+b}{a}$로 나누면 $\frac{a-b}{a+b}$를 얻는다.

3. ((())), (()()), (())(), ()((()), ()()(). 전단사(bijection): 첫 번째 괄호 쌍은 수열을 그 안쪽 부분과 그 뒤 부분으로 나눈다. 이에 대응하여 고정된 변 위의 삼각형은 다각형을 두 개의 더 작은 다각형으로 나눈다. 양쪽에 같은 과정을 재귀적으로 적용한다.

4. £5를 내는 손님은 거스름돈으로 £1 동전 네 개가 필요하므로, 경로는 1만큼 올라가거나 4만큼 내려간다. 경로가 장벽에 닿지 않고 건너뛸 수 있으므로, 반사로는 더 이상 나쁜 경로들을 간단한 집합과 대응시킬 수 없다.

9.11 한 세트 모두 모으기

1. 기대 대기 시간의 합은 $\frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{n/2+1} = n(H_n - H_{n/2}) \approx n(\ln n - \ln \frac{n}{2}) = n \ln 2$이다.

2. 각 카드가 빠져 있을 확률은 $(1 - \frac{1}{n})^k$이고, 이를 n장의 카드에 대해 더한다. 95%의 경우, $(1 - \frac{1}{n})^k \approx \mathrm{e}^{-k/n} = 0.05$이므로 $k \approx n \ln 20 \approx 3n$이다.

3. 봉지 t개를 연 뒤, 주어진 카드가 두 번 미만으로 나왔을 확률은 약 $\mathrm{e}^{-t/n}(1 + \frac{t}{n})$이다. 두 아이는 그런 카드의 기대 개수 $n\mathrm{e}^{-t/n}(1 + \frac{t}{n})$이 약 1로 떨어질 무렵 대략 수집을 마치며, 이로부터 $\frac{t}{n} \approx \ln n + \ln \ln n$을 얻는데, 이는 $2 \ln n$보다 훨씬 작다.

4. $\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n}$($[n, n+1]$에서 $\frac{1}{x}$ 아래의 넓이)이므로 $H_n - \ln n$은 감소한다. 볼록성(convexity)에 의해 사다리꼴(trapezium)은 넓이를 과대평가한다: $\ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$이므로 $H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$은 증가한다. $n = 1$이면 $\gamma > \frac{1}{2}$이고, $n = 4$이면 $\gamma < H_4 - \ln 4 \approx 0.697$이다.

9.12 무작위 부분집합

1. 각 원소는 적어도 하나의 집합에 들어 있어야 한다: $\left(\frac{3}{4}\right)^n$이고, 일반적으로는 $\left(1-2^{-m}\right)^n$이다.

2. $|S \setminus A_2|$는 $|A_2|$와 같은 분포(distribution)를 가지고 A_1과 독립(independent)이므로, 구하는 확률은 $|A_1| + |S \setminus A_2| = n$일 확률과 같다. 쌍 $(A_1, S \setminus A_2)$는 원소가 $2n$개인 집합의 임의의 부분집합에 대응하며, 그 크기가 n일 확률은 $\binom{2n}{n}/4^n$이다. 스털링(Stirling) 공식(또는 월리스(Wallis) 공식, Section 4.4)에 의해 이 값은 $\approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$이다.

3. 각 원소는 A에 들어가거나, B에 들어가거나, 어느 쪽에도 들어가지 않는다: 3^n. $A = B$인 순서쌍은 $(\varnothing, \varnothing)$뿐이므로, 순서 없는 쌍은 $\frac{3^n-1}{2} + 1 = \frac{3^n+1}{2}$개이다.

4. $n = 3$이면 집합 3개(모든 한원소 집합, 또는 모든 두원소 집합). $n = 4$이면 집합 6개(모든 두원소 집합). 일반적으로 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$개이다(슈페르너(Sperner) 정리).

9.13 조작된 주사위

1. $1 = \left(\sum q_j\right)^2 \le 6\sum q_j^2$이므로 $\mathrm{P}(\text{같음}) = \sum q_j^2 \ge \frac{1}{6} > \frac{1}{36}$이다.

2. 둘 다 그렇다: 확률은 $\sum q_j r_j$이고, 예컨대 한 주사위는 항상 1, 다른 주사위는 항상 2가 나오면 이 값은 0이다.

3. 합은 $0, 1, \ldots, 35$이고 각각 정확히 한 번씩 나온다: 균등분포이다. 문제에서는 두 주사위 모두 1부터 6까지 번호가 매겨져 있어야 하는데, 여기서는 그렇지 않다.

4. 아니다. $\mathrm{P}(3) = q_1r_1s_1$, $\mathrm{P}(18) = q_6r_6s_6$이라 쓰면, 둘 다 $\frac{1}{16}$이다. $\mathrm{P}(8) + \mathrm{P}(13)$은 여섯 항 $q_1r_1s_6, \ldots, q_1r_6s_6$(1 두 개와 6 하나, 또는 6 두 개와 1 하나)을 포함하며, 이들의 곱은 $(\mathrm{P}(3)\mathrm{P}(18))^3$이다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $\mathrm{P}(8) + \mathrm{P}(13) \ge 6 \cdot \frac{1}{16} > \frac{2}{16}$이다. 주어진 다항식을 이용한 증명은 $1 + x + \cdots + x^{15}$가 실근(real root) -1을 **가지기** 때문에 실패한다. (이 증명은 살릴 수 있다: 세 개의 실계수 5차식(quintic)은 실근을 세 개 가져야 하는데, -1은 단순근(simple root)일 뿐이다.)

장

10

보존 법칙, 충돌, 그리고 중력

어떤 것들은 결코 변하지 않는다. 그것이 무엇인지 아는 것이 물리학의 절반이다.

이 장의 내용

10.1	뉴턴의 요람	STEP II 1990
10.2	포갠 공 효과	STEP II 2010
10.3	로켓과 대포	STEP III 2017
10.4	분자 하나와 피스톤	STEP I 2002
10.5	유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기	STEP III 2002
10.6	두 물체가 하나가 되다	STEP III 2004
10.7	구 껍질 안의 중력	STEP III 1999
10.8	삼각형을 이룬 세 별	STEP I 1999
A	연습문제 해답	731쪽

변하지 않는 것

> 지금까지 알려진 모든 자연 현상을 지배하는 사실, 원한다면 법칙이라 불러도 좋은 것이 하나 있다. 이 법칙에는 알려진 예외가 없다.
>
> — 리처드 파인만(Richard Feynman), 에너지 보존(conservation of energy)에 관하여, *The Feynman Lectures on Physics* (파인만의 물리학 강의, 1963)

학교에서 배우는 역학은 대개 힘의 문제이다. 그림을 그리고, 힘을 성분으로 분해하고, $F = ma$를 적용한다. 경사면 위의 물체라면 이것으로 충분하다. 그러나 천분의 일 초 동안 일어나는 충돌처럼 그 사이에 작용하는 힘이 매우 크고 알 수도 없는 경우, 날아가면서 질량이 변하는 로켓, 또는 세 별이 동시에 서로를 끌어당기는 경우에는 통하지 않는다. 이런 경우에는 힘에 대해 묻기를 멈추고, 대신 무엇이 **변할 수 없는지**를 물어야 길이 열린다.

운동량(momentum)은 외력이 작용하지 않으면 언제나 보존된다. 에너지는 탄성 충돌(elastic collision)에서 보존되고, 그 밖의 충돌에서는 손실된 양을 측정할 수 있다. 질량, 각운동량(angular momentum), 그리고 질량중심(centre of mass)의 운동도 비슷한 규칙을 따른다. 이 법칙들이 모든 것을 알려 주지는 않지만, 언제나 참이고, 자세히 분석하기에는 지나치게 복잡한 계에도 적용되며, 계산을 시작하기도 전에 대부분의 가능성을 배제해 주는 경우가 많다.

보존 법칙이 중요한 이유

보존 법칙(conservation law)은 물리학에서 가장 믿을 만한 도구이다. 베타 붕괴(beta decay)라 불리는 방사성 과정에서 방출되는 입자들의 에너지를 더하면 합이 맞지 않았다. 볼프강 파울리(Wolfgang Pauli)는 에너지 보존을 포기하는 대신, 1930년에 사라진 에너지를 운반하는 눈에 보이지 않는 입자를 예측했고, 중성미자(neutrino)는 26년 뒤에 검출되었다. 공학자들은 운동량과 에너지의 수지를 따져 충돌 방호벽, 에어백, 로켓을 설계한다. 천문학자들은 질량중심을 관찰하여 별의 질량을 재고 행성을 찾아낸다. 그리고 1918년 에미 뇌터(Emmy Noether)는 이 법칙들이 성립하는 이유를 설명했다. 각각의 보존 법칙은 자연이 지닌 어떤 대칭성(symmetry)의 그림자라는 것이다. 운동량이 보존되는 것은 물리 법칙이 어디에서나 같기 때문이고, 에너지가 보존되는 것은 물리 법칙이 언제나 같기 때문이다.

이 장의 두 번째 주제는 중력이다. 중력은 뉴턴(Newton)이 하늘과 땅을 하나로 통합하는 데 사용한 힘이며, 보존 법칙과 자연스럽게 짝을 이룬다. 궤도, 슬링샷(slingshot), 붕괴하는 구름은 모두 에너지와 운동량, 그리고 구에 관한 놀라운 사실 하나를 통해 이해된다.

대학에서 만나게 될 내용

대학 1학년 동역학 강의는 여기에서 시작한다. 입자계, 질량중심과 환산 질량(reduced mass), 서로 다른 기준틀(frame)에서 본 충돌, 로켓과 같은 가변 질량계(variable-mass system), 그리고 중력을 받는 물체의 운동, 즉 케플러(Kepler) 법칙, 궤도, 탈출 속도(escape velocity)를 배우게 된다. 이후의 강의에서는 역학을 라그랑주(Lagrange)와 해밀턴(Hamilton)의 언어로 다시 정식화하는데, 여기에서 뇌터 정리(Noether's theorem)는 정확한 명제가 되고, 보존 법칙은 하나의 함수가 지닌 대칭성으로부터 곧바로 읽어낼 수 있게 된다. 그 너머에는 천체역학(celestial mechanics)과 삼체 문제(three-body problem), 기체 분자 운동론(kinetic theory)과 통계역학(statistical mechanics)(여기에서 Section 10.4의 피스톤은 기체 이론이 된다), 그리고 아인슈타인(Einstein)의 중력 이론이 있다.

이 장을 관통하는 질문

세 가지 큰 질문

1. **보존 법칙만으로 무엇을 결정할 수 있는가?** 운동량과 에너지가 결과를 결정하는 것은 언제이고, 단지 일부 가능성을 배제하는 데 그치는 것은 언제인가?
2. **작은 단계들은 어떻게 쌓이는가?** 충돌이나 발사 같은 단순한 사건이 여러 번, 또는 무한히 반복되면 어떤 일이 일어나는가?
3. **여러 물체를 어떻게 다룰 것인가?** 어떤 좌표를 고르고 어떤 대칭성을 이용해야 서로 상호작용하는 여러 물체에 관한 문제를 풀 수 있는 문제로 바꿀 수 있는가?

이 장은 충돌로 시작한다. 뉴턴의 요람(Newton's cradle)이 할 수 있는 일과 할 수 없는 일(Section 10.1), 그리고 공을 줄지어 쌓으면 속력이 어떻게 몇 배로 늘어나는지(Section 10.2)를 살펴본다. 이어서 반복되는 과정을 따라간다. 트럭에서 발사하는 포와 로켓 방정식(rocket equation), 피스톤에 부딪히며 빨라지는 분자, 그리고 유한한 시간 동안 무한히 많이 튀어 오르는 퍽이 그것이다. 마지막 세 절에서는 서로 끌어당기거나 밀어내는 물체들을 다룬다. 질량중심과 환산 질량, 구 껍질의 중력, 그리고 라그랑주의 회전하는 별 삼각형이다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
10.1	뉴턴의 요람	제약 조건으로서의 보존 법칙
10.2	쌓아 올린 공	한 번의 충돌을 반복하기; 슬링샷
10.3	로켓	가변 질량; 로켓 방정식
10.4	기체 분자 운동론	단열 불변량(adiabatic invariant)
10.5	비탄성 충돌(inelastic collision)	유한한 시간 동안 무한히 많은 튀어 오름
10.6	이체 문제(two-body problem)	질량중심과 환산 질량
10.7	뉴턴 중력	껍질 정리(shell theorem); 자유 낙하 붕괴(free-fall collapse)
10.8	삼체 문제	라그랑주의 정삼각형 해

이 장을 읽는 방법

계산하기 전에 무엇이 보존되는지, 그리고 어느 기준틀에서 보존되는지를 먼저 적어 보라. 그런 다음 다른 곳에서 보면 문제가 더 간단해 보이지 않는지 물어보라. 질량중심에서, 움직이는 피스톤에서, 튀어 오르는 공에서 보는 것이다. 이 장의 많은 문제는 알맞은 기준틀에서 보면 거의 자명해지며, 역학에서 하는 일의 대부분은 바로 그 기준틀을 찾는 것이다.

10.1 뉴턴의 요람

문제

STEP II 1990, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/90-s2-q14`

도입

뉴턴의 요람(Newton's cradle)에서 공 하나를 당겼다 놓으면 반대쪽 끝에서 공 하나가 튀어 나간다. 두 개를 당겼다 놓으면 두 개가 튀어 나간다. 왜 그럴까? 왜 공 하나가 두 배의 속력으로 튀어 나가거나, 공 세 개가 3분의 2의 속력으로 튀어 나가지는 않을까? 두 경우 모두 운동량(momentum)은 올바르게 전달하는데 말이다.

답은 역학의 두 가지 큰 보존 법칙(conservation laws)에서 출발한다. 운동량과 에너지를 함께 쓰면 어느 한쪽만 쓸 때보다 훨씬 강한 제약이 생기고, 상상할 수 있는 결과 대부분이 배제된다. 이 문제는 보존 법칙을 제약 조건으로 사용한다. 무슨 일이 일어나는지 계산하는 것이 아니라, 무슨 일이 일어날 **수 있는지** 판단하는 것이다. 보존 법칙을 가능한 모든 결과가 따라야 하는 규칙으로 보는 이러한 사고방식은 물리학 전체에 걸쳐 나타난다.

시작하기 전에

생각해 보기 질량이 m이고 속력 u로 움직이는 구슬이 정지해 있는 질량 M의 구슬에 부딪히고, 운동 에너지(kinetic energy)가 보존된다. 충돌 후의 속도는 각각 얼마인가? $M = m$이면 어떻게 되는가?

충돌 후의 속도를 p와 q라 하자. 운동량 보존에서 $mp + Mq = mu$이고, 에너지 보존에서 $mp^2 + Mq^2 = mu^2$이다. 이 두 식을 $m(u-p) = Mq$와 $m(u-p)(u+p) = Mq^2$으로 쓰고 나누면 $u + p = q$를 얻는다. 따라서

$$p = \frac{m-M}{m+M}\,u, \qquad q = \frac{2m}{m+M}\,u.$$

$M = m$이면 첫 번째 구슬은 멈추고 두 번째 구슬이 속력 u로 움직인다. 즉 두 구슬은 속도를 그대로 맞바꾼다. 질량이 같은 구슬들이 줄을 따라 운동을 전달하는 것은 이 때문이다.

차근차근 풀기

1단계 마지막 두 구슬만 움직이는 경우

생각해 보기 충돌 후 A_n(속도 p)과 A_{n+1}(속도 q)만 움직인다고 하자. 보존 법칙을 식으로 써 보라. 어느 구슬의 운동이 p의 부호를 제약하는가?

운동량 보존과 에너지 보존에서

$$mp + \lambda m q = mu, \qquad \tfrac{1}{2}mp^2 + \tfrac{1}{2}\lambda m q^2 = \tfrac{1}{2}mu^2.$$

이는 질량 m인 구슬이 질량 λm인 구슬에 부딪힐 때의 방정식과 같으므로, (A_n이 A_{n+1}을 통과해야 하는 해 $p = u, q = 0$을 제외하면)

$$p = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,u, \qquad q = \frac{2}{1+\lambda}\,u.$$

$\lambda < 1$이면 두 값이 모두 양수이고 $p < q$이다. A_n은 A_{n+1}을 따라가지만 더 느리므로 둘은 멀어지고, 모든 것이 모순 없이 들어맞는다. $\lambda > 1$이면 $p < 0$이므로 A_n은 뒤로 움직인다. 그런데 A_{n-1}이 바로 뒤에 맞닿은 채 정지해 있고, A_n은 그것을 통과할 수 없다. 따라서 이러한 운동은 불가능하다. ■

2단계 세 구슬이 움직이는 경우

생각해 보기 이번에는 A_{n-1}, A_n, A_{n+1}만 각각 속도 a, b, c로 움직인다고 하자. 어느 구슬이 정지해 있고 어느 구슬이 어느 구슬 뒤에 있는지를 고려하면, a, b, c는 어떤 부등식을 만족해야 하는가?

구슬 A_{n-2}가 A_{n-1} 뒤에 정지해 있으므로($n \geq 3$이므로 이 구슬은 존재한다) $a \geq 0$이다. 또 어떤 구슬도 앞의 구슬을 추월할 수 없으므로 $a \leq b \leq c$이다. 이를 합치면 $0 \leq a \leq b \leq c$이다. 보존 법칙은

$$a + b + \lambda c = u, \qquad a^2 + b^2 + \lambda c^2 = u^2.$$

생각해 보기 운동량 방정식을 제곱하여 에너지 방정식과 비교해 보라. 무엇이 남는가?

제곱하면 $u^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 c^2 + 2ab + 2\lambda ac + 2\lambda bc$이다. 여기서 에너지 방정식을 빼면

$$0 = \lambda(\lambda - 1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a + b).$$

$\lambda > 1$이고 $a, b, c \geq 0$이므로 우변의 모든 항은 음이 아니고, 따라서 모든 항이 0이다. 특히 $c = 0$이고, 그러면 $0 \leq a \leq b \leq c$에 의해 $a = b = 0$이다. 그런데 그러면 전체 운동량이 mu가 아니라 0이 된다. 모순이므로 이러한 운동은 불가능하다. ■

잠깐, 직접 해 보기 논증의 구조에 주목하라. 운동량 방정식을 제곱하면 $2ab$와 같은 교차항이 생기지만, 에너지 방정식에는 그런 항이 없다. 그 차이는 운동이 얼마나 "퍼져 있는지"를 나타낸다. $\lambda > 1$일 때, 같은 논증으로 $A_k, \ldots, A_{n+1}$만 음이 아닌 속도로 움직이는 어떠한 결과도 배제된다는 것을 알 수 있겠는가?

3단계 움직일 수 있는 두 구슬

생각해 보기 앞으로 움직이는 구슬들이 모두 맨 끝에 있어야 하는데 그것이 불가능하다면, 어떤 구슬은 뒤로 움직일지도 모른다. 어느 구슬이 뒤로 움직일 수 있는가?

뒤에 아무것도 없는 구슬은 A_0뿐이다. A_0이 속도 p(음수일 수도 있다)로, A_{n+1}이 속도 q로 움직이고 나머지는 모두 정지해 있다고 해 보자. 보존 법칙은 다시 질량 m과 λm의 충돌에 대한 식과 같으므로

$$p = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\,u, \qquad q = \frac{2}{\lambda + 1}\,u.$$

A_0은 튕겨 나오고 A_{n+1}은 앞으로 움직이며 그 사이의 구슬들은 정지한 채로 남는데, 이 모두가 모순 없이 들어맞는다. 마치 A_0이 A_{n+1}에 직접 부딪힌 것과 똑같으며, 그 사이에 늘어선 같은 질량의 구슬들은 완벽한 전달자 역할을 한다. ■

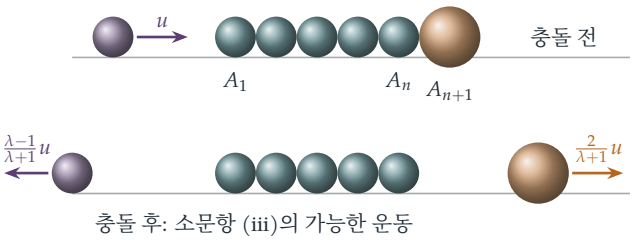


그림 10.1.1 같은 질량의 구슬들(청록색)이 한 줄로 늘어서 있고 끝에 더 무거운 구슬(주황색, $\lambda > 1$)이 있다. 충돌 후 A_0은 튕겨 나오고 무거운 구슬은 앞으로 움직이며, 그 사이의 모든 구슬은 정지한 채로 남는다. 마치 A_0이 A_{n+1}에 직접 부딪힌 것과 똑같다.

돌아보기

▶ **제약 조건으로서의 보존 법칙.** 우리는 충돌 과정을 하나하나 따라가지 않았다. 운동량, 에

너지, 기하학적 조건이 어떤 결과를 허용하는지를 물었을 뿐이다.

- **물리적 부등식이 중요하다.** "구슬은 서로를 통과할 수 없다"는 사실에서 부등식 $0 \le a \le b \le c$를 얻었고, 소문항 (i)과 (ii)의 경우를 배제한 것은 보존 법칙이 아니라 바로 이 부등식이었다.
- **제곱하고 빼기.** 운동량의 제곱을 에너지와 비교하면 0이 되어야 하는 교차항들의 합이 나온다.

숨은 수학

왜 공 하나가 튀어 나오는가

같은 공들로 이루어진 뉴턴의 요람에서 공 k개가 함께 속력 w로 떠난다고 하자. 운동량 보존에서 $kw = u$이고 에너지 보존에서 $kw^2 = u^2$이다. 나누면 $w = u$이고 $k = 1$이다. 따라서 떠나는 공들이 함께 움직이는 결과 중에서 두 법칙을 모두 만족하는 것은 "공 하나가 처음 속력으로 떠나는 것"뿐이다. 공 두 개가 절반의 속력으로 떠나면 운동량은 맞지만 에너지는 절반뿐이고, 공 하나가 두 배의 속력으로 떠나면서 운동량이 맞으려면 그 공이 반쪽짜리 공이어야 한다.

그러나 이것으로 문제가 해결되지는 않는다. 공이 n개이면 미지의 속도는 n개인데 보존 법칙은 두 개뿐이므로, 두 법칙을 모두 만족하는 결과는 무수히 많다(세 공이 서로 다른 속력으로 움직이는 결과를 하나 찾아보라). 실제로 어떤 결과가 일어나는지는 접촉하는 동안 공이 어떻게 변형되는지에 달려 있다. 1980년대 초 Frank Herrmann과 동료들은 우리에게 익숙한 현상이 충격이 **퍼지지 않고** 줄을 따라 전달되는 데 달려 있으며, 이는 단단한 강철 공들 사이에 아주 작은 틈이 있을 때 일어난다는 것을 보였다. 공이 무르거나 공들이 서로 꽉 눌려 있으면 요람은 덜 깔끔하게 움직이며, 정밀하게 측정해 보면 다른 공들도 늘 조금씩 움직인다.

보존 법칙과 대칭

보존 법칙은 어디에서 오는가? 1918년 에미 뇌터(Emmy Noether)는 현대 물리학의 토대 중 하나가 된 정리를 증명했다. 물리계의 모든 연속적인 대칭(symmetry)에는 보존되는 양이 하나씩 대응한다는 것이다. 물리 법칙이 여기에서나 1미터 왼쪽에서나 같다면(공간 평행이동에 대한 대칭) 운동량이 보존된다. 오늘이나 내일이나 같다면(시간 평행이동에 대한 대칭) 에너지가 보존된다. 모든 방향에서 같다면(회전 대칭) 각운동량(angular momentum)이 보존된다. 뇌터 정리는 대학 2학년의 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics) 과목에서 배우게 되며, 이 장에서는 그 결과를 곳곳에서 사용한다.

하위헌스, 렌, 윌리스

1668년 왕립학회(Royal Society)는 물체의 충돌 문제에 대한 해답을 공모했다. 존 윌리스(John Wallis)는 비탄성 충돌(inelastic collision)을 다루었고, 크리스토퍼 렌(Christopher Wren)과 크리스티안 하위헌스(Christiaan Huygens)는 각자 독립적으로 탄성 충돌의 경우를 풀었다. 하위헌스의 핵심 통찰은 기준틀을 바꾸는 것이었다. 질량중심(centre of mass)과 함께 움직이는 배 위에서 충돌을 바라보면, 같은 두 공은 속력이 그대로 반대 방향으로 바뀌어 튕겨 나갈 뿐이다. 그런 다음 다시 강가의 기준틀로 변환하면 된다. 그는 또한 어떤 양, 곧 질량과 속력의 제곱을 곱한 것의 합이 충돌 전후에 같다는 것도 알아차렸다. 다만 운동 에너지가 그 자체로 보존되는 양으로 인정받기까지는 그 후로 한 세기가 더 걸렸다.

사고 기술

보존되는 양을 이용해 가능성을 배제하라

과정이 너무 복잡해서 따라갈 수 없을 때는, 변할 수 없는 양들을 나열하고 그 양들이 어떤 결과를 허용하는지 살펴보라.

물리학자들은 입자 가속기 속 충돌을 바로 이렇게 추론한다. 세부적인 상호작용은 알 수 없지만 운동량, 에너지, 전하는 균형을 이루어야 한다. 여기에 부등식(이 문제에서는 구슬이 서로를 통과할 수 없다는 사실)을 결합하면 어떤 결과가 불가능하다는 것을 증명할 수 있다.

더 도전하기

1 **같은 문제 다시 보기.** STEP I 2006, 11번 문제 (`step.maths.org/questions/06-s1-q11`)을 풀어 보라. 홈통 안에 입자들이 한 줄로 놓여 있고 끝에 더 무거운 입자가 있다. 가능한 최종 상태는 무엇인가?

2 **충돌을 따라가기.** 소문항 (iii)의 충돌을 A_0이 A_1에 부딪히는 것으로 시작하는, 두 구슬 사이의 개별 충돌이 차례로 일어나는 과정으로 모형화하라. 이 과정을 끝까지 따라가서 소문항 (iii)에서 구한 운동으로 끝난다는 것을 보여라.

3 **두 공을 보내기.** 같은 공 다섯 개로 이루어진 요람에서 공 두 개를 함께 놓아 나머지 세 공에 속력 u로 부딪히게 한다. "공 두 개가 속력 u로 떠난다"는 결과가 두 보존 법칙을 모두 만족함을 보이고, 두 법칙을 만족하는 다른 결과를 하나 찾아라.

4 가벼운 끝. $\lambda < 1$일 때 두 구슬 사이의 충돌이 차례로 일어나는 과정을 따라가 보라. A_n과 A_{n+1} 이외의 구슬 중에 결국 움직이게 되는 것이 있는가?

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 5장. 운동량 보존과 에너지 보존을 다루며, 충돌에 관한 문제가 많이 실려 있다.
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle, "Simple explanation of a well-known collision experiment"**, *American Journal of Physics* 49 (1981). 뉴턴의 요람이 왜 그렇게 작동하는지 설명한다.
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem*** (Johns Hopkins University Press). 대칭과 보존 법칙 사이의 관계를 알기 쉽게 설명한다.

10.2 포갠 공 효과

문제

STEP II 2010, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/10-s2-q10`

도입

농구공 위에 테니스공을 올려놓고 함께 떨어뜨려 보자. 농구공이 바닥에서 튀어 오르면, 테니스공은 떨어뜨린 높이의 몇 배나 되는 높이로 솟구치며, 때로는 천장에 닿을 만큼 높이 올라간다. 실외에서 해 보기 바란다.

문제의 소문항 (i)은 한 번의 충돌(collision)에는 속도의 한계가 있음을 보여 준다. 즉 부딪히는 공이 아무리 무거워도, 정지해 있는 공을 들어오는 공의 속력의 두 배보다 빠르게 내보낼 수는 없다. 소문항 (ii)는 이 한계를 깨는 방법을 보여 준다. 점점 더 가벼워지는 공들의 사슬을 따라 운동을 전달하면, 단계마다 속력이 곱절로 불어난다. 같은 아이디어로 우주 탐사선을 외행성까지 보내며, 이것은 초신성(supernova)의 메커니즘의 일부로 제안되기도 했다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** Section 10.1에서: 속력 u로 움직이는 질량 M이 정지해 있는 질량 m과 탄성 충돌(elastic collision)하면, 충돌 후 m의 속력은 얼마인가?

그곳의 결과(두 질량의 역할을 바꾼 것)에 따르면 부딪힌 입자의 속력은 $\frac{2M}{M+m}u$이다. 다르게 기억하는 방법도 있다. 탄성 충돌에서는 **상대** 속도(relative velocity)가 반대로 뒤집힌다. 무거운 공이 거의 느려지지 않는다면, 가벼운 공은 무거운 공의 속력보다 약 u만큼 더 빠르게, 즉 약 $2u$로 떠나야 한다.

차근차근 풀기

1단계 속력의 한계

$M = bm$이면, 충돌 후 A의 속력은

$$v_A = \frac{2bm}{bm + m}\,u = \frac{2b}{b+1}\,u.$$

이다.

> **생각해 보기** $\frac{2b}{b+1}$는 2와 비교하여 어떠한가? $b \to \infty$이면 어떻게 되는가?

모든 b에 대하여 $\frac{2b}{b+1} = 2 - \frac{2}{b+1} < 2$이므로, B가 아무리 무거워도 A의 속력은 항상 $2u$보다 작다. $b \to \infty$이면 이 속력은 $2u$에 가까워진다. 무한히 무거운 공은 마치 움직이는 벽처럼 A를 튕겨 낼 것이다. ■

2단계 사슬을 따라 전달하기

> **생각해 보기** 소문항 (ii)에서 각 입자는 다음 입자보다 λ배 무겁다. 소문항 (i)은 사슬 속의 각 충돌에 대하여 무엇을 말해 주는가?

B_1(질량 $\lambda^n m$)이 λ배 가벼운 B_2(질량 $\lambda^{n-1}m$)에 부딪힌다. $b = \lambda$로 두고 소문항 (i)을 적용하면, B_2는 $\frac{2\lambda}{\lambda+1}u$로 움직이기 시작한다. 다음으로 B_2가 다시 λ배 가벼운 B_3에 부딪히고, B_3은 $(\frac{2\lambda}{\lambda+1})^2 u$로 움직이기 시작한다. 이러한 충돌이 n번 일어난 뒤, 즉 마지막으로 B_n이 A에 부딪힌 뒤에는

$$v_A = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^n u.$$

이다. (이후 B들 사이에서 일어나는 충돌은 A를 더 밀어 줄 수만 있을 뿐 느리게 할 수는 없다. 앞쪽에서 A에 부딪히는 것은 아무것도 없기 때문이다.)

> **생각해 보기** $\frac{2\lambda}{\lambda+1}$는 1보다 큰가, 작은가?

$\lambda > 1$이므로 $2\lambda > \lambda + 1$이고, 따라서 비 $r = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$는 1보다 크며, $n \to \infty$일 때 $r^n \to \infty$이다. 그러므로 n을 충분히 크게 잡으면 A를 원하는 만큼 빠르게 움직이게 할 수 있다. ■

3단계 스무 배 빠르게

$\lambda = 4$이면 $r = \frac{8}{5} = 1.6$이고, $1.6^n > 20$이어야 한다. 밑이 10인 로그(logarithm)를 취하면

$$\log_{10} 1.6 = \log_{10} 16 - 1 = 4\log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412, \qquad \log_{10} 20 = 1 + \log_{10} 2 \approx 1.30103,$$

이므로 $n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37$이어야 한다. 가장 작은 값은 $n = 7$이다. (실제로 $1.6^6 \approx 16.8$이고 $1.6^7 \approx 26.8$이다.) ■

돌아보기

- **하나의 결과를 반복 적용하기.** 소문항 (i)을 소문항 (ii)에서 n번 사용하여, 유계인 이득을 유계가 아닌 이득으로 바꾸었다.
- **결코 도달하지 않는 극한.** 상계 $2u$에는 가까워지기만 할 뿐 도달하지 않으므로, 올바른 명제는 등호가 없는 부등식(strict inequality)이다.
- **로그는 거듭제곱을 곱으로 바꾼다.** 몇 단계가 필요한가 하는 질문이 나눗셈 하나로 바뀌었다.

숨은 수학

농구공과 테니스공

두 공이 높이 H에서 함께 떨어져 속력 $U = \sqrt{2gH}$로 바닥에 닿는다고 하자. 모든 것이 완전 탄성이고 농구공이 훨씬 더 무겁다고 가정한다. 농구공은 바닥에서 위쪽으로 속력 U로 튀어 오르고, 곧바로 여전히 속력 U로 내려오고 있는 테니스공과 만난다. 농구공의 기준틀(frame of reference)에서 보면 테니스공은 $2U$로 다가오고, 매우 무거운 물체에 튕겨 $2U$로 떠난다. 다시 지면의 기준틀로 돌아오면 이는 위쪽으로 $2U + U = 3U$이다(그림 10.2.1). 올라가는 높이는 발사 속력의 제곱에 비례하므로, 테니스공은 $9H$까지 올라간다.

실제 공은 완전 탄성이 아니다. 반발 계수(coefficient of restitution)가 e이고 질량비가 M/m이면, 테니스공은 속력 $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$로 떠난다. 연습문제에 있는 STEP I 2014 Q10은 측정한 높이로부터 거꾸로 질량비를 구한다.

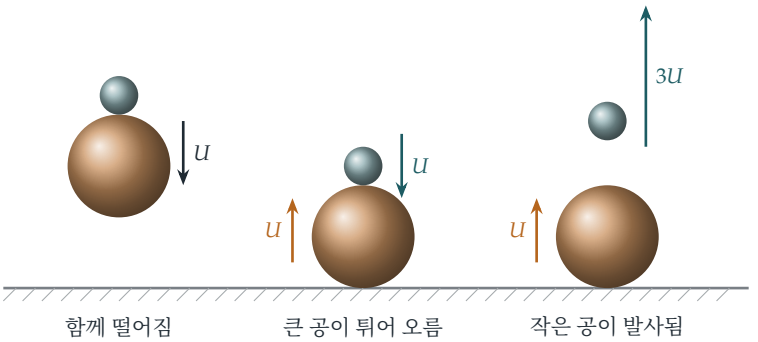


그림 10.2.1 아래쪽 공이 훨씬 무겁고 두 공이 완전 탄성일 때의 쌓인 공 효과. 큰 공은 속력 U로 튀어 올라, U로 내려오는 작은 공과 만난다. 큰 공에 대하여 작은 공은 $2U$로 도착하고 $2U$로 떠나므로, 지면의 기준틀에서는 $3U$로 떠나 처음 높이의 아홉 배에 이른다.

중력 새총 효과

행성 곁을 지나가는 우주 탐사선은 행성에 닿지 않지만, 중력은 매우 무거운 물체와의 아주 부드러운 탄성 충돌처럼 작용한다. 행성의 기준틀에서 탐사선은 행성 주위를 돌아 들어올 때와 같은 속력으로 떠난다. 행성이 속력 V로 탐사선을 향해 움직이고 있다면, 태양의 기준틀에서 탐사선은 테니스공과 꼭 마찬가지로 최대 $2V$만큼 속력을 얻을 수 있다. 1977년에 발사된 두 보이저(*Voyager*) 탐사선은 드물게 찾아온 외행성들의 정렬을 이용하여 목성에서 토성으로(보이저 2호는 다시 천왕성과 해왕성으로) 나아갔고, 만날 때마다 속력을 얻었다. 이러한 중력 도움(gravity assist)이 없었다면 해왕성까지의 여정은 12년이 아니라 약 30년이 걸렸을 것이다. 에너지는 행성에서 오며, 행성은 측정할 수 없을 만큼 아주 조금 느려진다.

슈퍼볼과 초신성

1968년 W. R. Mellen은 *American Journal of Physics*에서 크기가 점점 작아지는 공 여러 개를 쌓아 만든 "슈퍼볼 반동 발사체"를 소개하고, 맨 위의 공이 충돌 속력의 몇 배나 되는 속력으로 발사될 수 있음을 지적하였다. 천체물리학자들은 이것이 핵붕괴 초신성(core-collapse supernova)과 대략적으로 닮았다고 지적해 왔다. 별의 바깥층이 안쪽으로 떨어지다가 단단하고 밀도 높은 중심핵에 부딪혀 되튀고, 충격파(shock wave)가 운동량(momentum)을 점점 밀도가 낮아지는 물질 속으로 바깥쪽으로 실어 날라 그 물질을 엄청난 속력으로 가속한다. 쌓인 공 효과의 시연은 학생들에게 이 아이디어를 설명하는 데 쓰이지만, 실제 초신성에는 튀는 공보다 훨씬 많은 물리학이 관여하며, 중성미자(neutrino)도 그중 하나이다.

사고 기술

하나의 결과를 반복 적용하기

어떤 과정이 하나의 간단한 단계를 되풀이하는 것이라면, 그 단계를 한 번 풀고 그것을 합성하라.

단계마다의 이득 배율이 2보다 작더라도, 배율들이 곱해지므로 여러 단계를 거치면 유계가 아니게 된다. 대학에서는 이것이 전달 행렬(transfer matrix), 다단 증폭기, 다단 로켓(Section 10.3) 뒤에 있는 아이디어이다. 사슬 전체의 이득은 각 고리의 이득의 곱이다.

더 도전하기

1 **실제 상황.** STEP I 2014, 10번 문제 (`step.maths.org/questions/14-s1-q10`)을 풀어 보자. 실제 수치와 불완전한 튕김을 다루는 쌓인 공 문제이다.

2 **비탄성 사슬.** STEP I 2017, 10번 문제 (`step.maths.org/questions/17-s1-q10`)을 풀어 보자. 질량이 등비수열로 커지는 입자들의 사슬을 따라 충돌을 전달하는 문제이다. 각 입자가 정확히 두 번의 충돌에 관여하는 것은 언제인가?

3 **공 세 개.** 완전 탄성인 공 세 개를 쌓되, 각 공은 그 아래의 공보다 훨씬 가볍다. 맨 위의 공이 $7U$로 떠나 $49H$까지 올라감을 보여라. 공이 k개이면 맨 위의 공이 $(2^k - 1)U$로 떠남을 보여라.

4 **에너지는 어디에서 오는가?** 소문항 (ii)에서 A의 속력은 유계가 아니지만 전체 운동 에너지(kinetic energy)는 보존됨을 보여라. 무거운 입자들은 어떻게 되는가?

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 쌓인 공 문제가 실린 5장.
- **W. R. Mellen, "Superball rebound projectiles"**, *American Journal of Physics* 36 (1968). 짧고 재미있다.
- **Gary Flandro, "Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter"**, *Astronautica Acta* 12 (1966). 보이저의 "그랜드 투어"를 제안한 논문이다.

10.3 로켓과 대포

문제

STEP III 2017, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/17-s3-q11`

도입

우주 공간의 로켓에게는 밀어낼 대상이 없다. 로켓은 질량을 뒤로 던져서 앞으로 나아가고, 나머지는 운동량 보존(conservation of momentum)이 해결해 준다. 뒤쪽으로 대포를 쏘는 트럭은 조각으로 나뉜 로켓이다. 발사체 하나하나가 배기가스 한 덩어리인 셈이다.

그렇다면 대포는 한꺼번에 쏘아야 할까, 하나씩 차례로 쏘아야 할까? 이 문제는 분명한 답을 내놓지만, 무엇을 비교하는지 주의 깊게 살펴보아야 한다. 한꺼번에 쏘면 트럭이 더 빨라지지만 에너지도 더 많이 쓰므로, 두 경우에 대포가 하는 일은 같지 않다. 무엇을 고정하느냐를 바꾸면 답이 뒤집힌다. 이 점을 정리하다 보면 우주 비행에서 가장 중요한 방정식인 치올콥스키(Tsiolkovsky)의 **로켓 방정식**(*rocket equation*)에 이르고, 실제 로켓이 여러 단(stage)으로 이루어진 이유도 알게 된다.

시작하기 전에

생각해 보기 대포가 발사되기 전에 트럭은 V로 움직인다. 발사 후 발사체의 속도는 $V - v$이다(즉 뒤쪽으로 속력 $v - V$). **발사 전 트럭에 대한** 발사체의 상대 속도는 얼마인가?

그것은 $(V - v) - V = -v$이다. 따라서 각 대포는 발사 직전 트럭의 속도를 기준으로 발사체를 뒤쪽으로 속력 v로 던진다. 이것이 이 문제의 고정된 규칙이다. 답을 결정하는 것이 바로 이 규칙이므로 꼭 기억해 두자.

차근차근 풀기

1단계 한꺼번에 발사

계는 정지 상태에서 시작하므로 운동량은 0이다. 발사 후 트럭(질량 M)은 앞으로 u로 움직이고, n개의 발사체는 뒤쪽으로 속력 v로 움직인다(발사 전 $V=0$이므로). 따라서

$$Mu - nmv = 0, \qquad u = \frac{nmv}{M}.$$

증가한 운동 에너지(kinetic energy)는

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\Big(1 + \frac{nm}{M}\Big). \qquad \blacksquare$$

2단계 하나씩 발사

> **생각해 보기** r번째 대포가 발사되기 직전에, 남은 발사체를 실은 트럭의 질량은 얼마이고 속력은 얼마인가? r번째 발사에 대한 운동량 보존 식을 써 보아라.

r번째 발사 전에 트럭은 발사체 $n-r+1$개를 싣고 있으므로 질량은 $M+(n-r+1)m$이고 속력은 u_{r-1}이다. 발사 후 발사체 $n-r$개를 실은 트럭의 속력은 u_r이고, 발사된 발사체의 속도는 $u_{r-1}-v$이다. 운동량이 보존되므로

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

mu_{r-1} 항을 정리하면 $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$를 얻고, 이것이 $(*)$이다. $\blacksquare$

증가량을 모두 더하면

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m} = \frac{mv}{M} + \frac{mv}{M+m} + \cdots + \frac{mv}{M+(n-1)m}.$$

첫째 항 이후의 모든 항은 $\frac{mv}{M}$보다 작고 $n>1$이므로 $u_n < \frac{nmv}{M} = u$이다. $\blacksquare$

> **잠깐, 직접 해 보기** 여기서는 왜 하나씩 쏘는 쪽이 불리할까? 첫 번째 대포가 발사될 때는 트럭과 아직 발사되지 않은 발사체 $n-1$개를 함께 가속해야 하므로, 빈 트럭만 가속할 때보다 속력 증가가 작다.

3단계 에너지 비용

> **생각해 보기** r번째 발사에서 운동 에너지의 변화량을 써 보아라. $u_r^2 - u_{r-1}^2$이 들어 있는 항을 간단히 하는 데 $(*)$를 어떻게 이용할 수 있는가?

운동 에너지의 변화량은

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1} - v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r+1)m\big)u_{r-1}^2.$$

마지막 두 항을 합치면 $\tfrac{1}{2}m(v^2 - 2vu_{r-1}) - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_{r-1}^2$이 된다. 이제 제곱의 차(difference of squares)를 인수분해하고 $(*)$를 이용하면

$$\tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)(u_r^2 - u_{r-1}^2) = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}).$$

따라서

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r - u_{r-1}). \qquad \blacksquare$$

$r = 1$부터 n까지 더하면 증가량 $u_r - u_{r-1}$이 연쇄적으로 소거되어(telescoping) u_n만 남는다.

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n. \qquad \blacksquare$$

끝으로 $K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 \cdot \tfrac{nm}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu$이고 $u_n < u$이므로 $K_n < K$이다. $\blacksquare$

돌아보기

- **단계마다 운동량 보존.** 각 발사는 짐을 실은 트럭과 발사체 하나로 이루어진 작은 이체 문제였다.
- **망원 합.** 증가량 $(*)$와 에너지 증가량이 깔끔하게 더해졌다.
- **결론을 주의 깊게 읽기.** 한꺼번에 쏘면 속력은 더 얻지만 에너지가 더 든다. 이 문제는 하는 일의 양이 서로 다른 두 과정을 비교하고 있다.

숨은 수학

무엇을 고정해야 할까?

실제 대포나 로켓 엔진은 발사체가 떠난 직후에 잰, **자기 자신**에 대한 일정한 상대 속력으로 발사체를 던진다. 이 문제에서는 기준이 **발사 전** 트럭의 속력이다. 발사체가 작으면 그 차이는 아주 작지만, 발사체 n개를 한꺼번에 쏠 때는 차이가 매우 크다. 소문항 (i)에서는 무거운 발사체 더미가 마치 트럭에 반동(recoil)이 전혀 없는 것처럼 속력 v로 뒤로 던져지는데, 여기에는 많은 에너지가 필요하다.

대신 모든 발사체가 **발사 후** 트럭에 대해 속력 v로 떠난다고 하면 결론이 뒤집힌다. 한꺼번에 쏘면 $u = \frac{nmv}{M+nm}$이고, 하나씩 쏘면 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$인데, 각 항이 적어도 $\frac{mv}{M+nm}$이므로 이쪽이 더 크다. 이제는 하나씩 쏘는 쪽이 유리하다. 각 발사체는 이미 움직이고 있는 트럭을 밀어내고, 뒤에 발사되는 대포일수록 가속해야 할 질량이 적기 때문이다. (연습문제에서 확인해 보아라.)

로켓 방정식

이제 발사체들의 총질량 $\mu = nm$을 고정한 채 발사체를 아주 작고 아주 많게 하자. 이것은 연료를 연속적으로 태우는 로켓이다. u_n의 합은 적분(integral)이 된다(두 규약 모두 같은 극한(limit)을 준다).

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M+km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,ds}{M+s} = v \ln \frac{M+\mu}{M}.$$

이것이 **치올콥스키의 로켓 방정식**이다. 배기가스가 로켓에 대해 속력 v로 분출되는 로켓이 얻는 속력은

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{\text{처음}}}{m_{\text{나중}}}.$$

그림 10.3.1은 세 가지 답을 비교한다. 문제는 로그(logarithm)이다. 배기 속도(exhaust speed)가 약 4.5 km/s(좋은 화학 연료)일 때 약 7.8 km/s의 궤도 속도(orbital speed)에 도달하려면 질량비(mass ratio)가 $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$이어야 하고, 공기 저항과 중력까지 고려하면 10 이상에 가까워진다. 로켓의 거의 전부가 연료인 것이다.

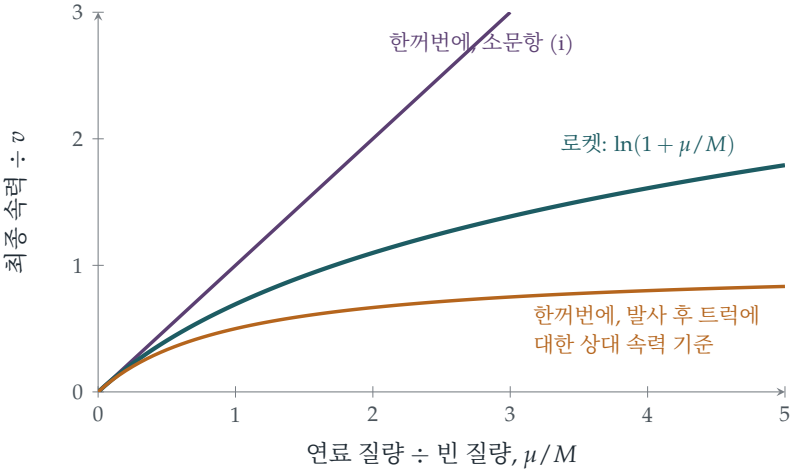


그림 10.3.1 연료 질량과 빈 질량의 비에 따른 최종 속력. 모든 것을 한꺼번에 쏘면 문제의 규약에서는 μ/M(자주색)이지만, 배기 속도를 반동하는 트럭에 대해 재면 $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$(주황색)에 불과하다. 연속적으로 분사하는 로켓은 그 사이인 $\ln(1+\mu/M)$(청록색)에 놓인다. 이 그림은 부등식 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$를 나타낸다.

로켓에 단이 있는 이유

로그는 단 분리(staging)도 설명해 준다. 올라가는 도중에 빈 연료 탱크를 떨어뜨리는 로켓은 더 이상 그 쓸모없는 질량을 가속할 필요가 없다. 연속된 단들이 얻는 속력은 (대포처럼) 더해지는 반면 각 단이 얻는 속력은 그 단의 질량의 비에 따라 정해지므로, 로켓을 여러 단으

로 나누면 같은 총질량의 단일 단 로켓으로는 낼 수 없는 속력에 도달할 수 있다. 우주 비행사들을 달에 데려간 새턴 V(Saturn V)는 3단 로켓이었고, 그 1단은 3분이 채 안 되는 동안 약 2000톤의 연료를 태웠다.

치올콥스키

러시아의 지방 도시 칼루가(Kaluga)에서 학교 교사로 일하던 청각 장애인 콘스탄틴 치올콥스키(Konstantin Tsiolkovsky)는 1903년 "반작용 장치를 이용한 우주 공간 탐사(Exploration of outer space by means of reaction devices)"라는 제목의 논문에서 로켓 방정식을 발표했다. 그는 다단 로켓, 액체 수소와 산소 연료, 우주 정거장을 그 어느 것도 실제로 만들 수 있게 되기 수십 년 전에 구상했다. 이 방정식은 그보다 앞서 덜 알려진 곳에 등장한 적이 있지만(William Moore가 1810년에 한 형태를 유도했다), 그것이 우주 비행에 어떤 의미를 갖는지 처음 알아본 사람은 치올콥스키였다. 그는 이렇게 썼다. "지구는 인류의 요람이다. 그러나 사람이 언제까지나 요람 속에서 살 수는 없다."

사고 기술

이산 과정에서 극한으로

연속적인 과정은 흔히 수많은 작은 이산 단계의 극한으로 이해할 수 있다. 이산 문제를 정확히 푼 다음 단계의 크기를 줄여 나가면, 합이 적분이 된다.

여기서는 대포 n문이 로켓이 되었고, 합이 로그가 되었다. 대학에서는 물리 법칙을 유도할 때마다 같은 방법을 보게 된다. 작은 요소 하나를 분석하고, 그 결과를 모아 적분이나 미분방정식(differential equation)으로 만드는 것이다.

더 도전하기

1 **다른 규약.** 각 발사체가 발사 후 트럭에 대해 속력 v로 떠난다고 가정하고 소문항 (i)과 (ii)를 다시 풀어 보아라. 이번에는 하나씩 쏘는 쪽이 더 큰 최종 속력을 준다는 것을 보여라.

2 **먼지 구름 속의 혜성.** STEP III 2009, 11번 문제 (`step.maths.org/questions/09-s3-q11`)에 도전해 보아라. 로켓과 같은 가변 질량(variable-mass) 문제이지만, 혜성은 질량을 잃는 대신 얻는다. 혜성의 속력이 어떤 값으로 다가가는지 눈여겨보아라.

3 **2단 로켓.** 배기 속도가 v이고 빈 질량이 M, 연료 질량이 $9M$인 로켓이 있다. 이 로켓의 최종 속력을 구하여라. 이제 이 로켓을 빈 질량이 각각 $\frac{1}{2}M$이고 연료가 각각 $4.5M$인 두

단으로 나누고, 1단은 연료가 바닥나면 떨어뜨린다고 하자. 두 최종 속력을 비교하여라.

4 **부등식.** 구간 $[0, x]$에서 $\frac{1}{1+s}$를 1 및 $\frac{1}{1+x}$와 비교하여, $x \geq 0$일 때 $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$임을 증명하여라.

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press), 4장. 운동량, 가변 질량, 로켓 방정식을 다룬다.
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements*** (Wiley). 표준적인 공학 교재로, 이 절을 공부한 뒤라면 앞부분의 장들을 읽을 수 있다.
- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight*** (NASA 번역본, 온라인에서 무료). 선구자가 직접 쓴 기록이다.

10.4 분자 하나와 피스톤

문제

STEP I 2002, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/02-s1-q10`

도입

자전거 타이어에 바람을 넣고 펌프를 만져 보면 뜨겁다. 기체를 압축하면 온도가 올라가는데, 이것은 디젤 엔진(압축만으로 연료에 불을 붙인다), 냉장고, 그리고 별이 생겨나는 과정의 바탕이 되는 원리이다. 그렇다면 압축은 왜 기체를 데우는가? 온도는 분자들의 평균 운동 에너지(kinetic energy)이므로, 질문은 이렇게 바뀐다. 분자들은 왜 빨라지는가?

이 문제는 분자 하나만으로 그 답을 보여 준다. 분자는 다가오는 피스톤에 부딪혀 튕겨 나올 때마다, 움직이는 라켓에 맞은 테니스공처럼 속력을 조금씩 더 얻는다. 충돌을 하나하나 정확히 따라가 보면 숨은 법칙이 드러난다. 분자의 속력과 실린더 길이의 곱이 거의 일정하게 유지된다는 것이다. 이러한 양을 **단열 불변량**(*adiabatic invariant*)이라 하며, 이것이 물리에서 배우는 기체 법칙의 미시적 기원이다.

시작하기 전에

생각해 보기 속력 w로 움직이는 공이 속력 u로 자신을 향해 다가오는 벽에 부딪혀 탄성적으로(elastically) 튕겨 나온다. 튕겨 나온 뒤 공의 속력은 얼마인가? (벽의 기준틀에서 생각해 보라.)

벽의 기준틀(frame)에서 공은 $w+u$로 다가오고, 매우 무거운 물체에 탄성적으로 튕겨 나오므로 $w+u$로 멀어진다. 다시 지면의 기준틀로 돌아오면 벽은 튕겨 나오는 공과 같은 방향으로 u로 움직이고 있으므로, 공의 속력은 $w+2u$이다. 다가오는 피스톤에 한 번 튕길 때마다 속력이 $2u$씩 늘어난다. (정지해 있는 실린더 끝에 튕기는 것은 아무것도 바꾸지 않는다.)

차근차근 풀기

1단계 n번 충돌한 뒤의 속력

입자는 속력 v로 출발한다. 피스톤과 한 번 충돌할 때마다 속력이 $2u$씩 늘고, 끝과의 충돌은 속력을 바꾸지 않는다. 따라서 피스톤과 n번 충돌한 뒤에는

$$v_n = v + 2nu. \qquad \blacksquare$$

2단계 길이에 대한 점화식

> **생각해 보기** n번째 충돌과 $(n+1)$번째 충돌 사이에 입자는 피스톤에서 끝까지 갔다가 되돌아온다. 입자는 얼마나 이동하는가? 피스톤은 얼마나 움직이는가?

시간 t_n 동안 피스톤은 ut_n만큼 움직이므로 $d_n - d_{n+1} = ut_n$이다. 그동안 입자는 속력 v_n으로 피스톤에서 끝까지(거리 d_n) 갔다가 다시 피스톤까지(거리 d_{n+1}) 돌아오므로 $d_n + d_{n+1} = v_n t_n$이다. 한 식을 다른 식으로 나누면 t_n이 소거된다.

$$\frac{d_n + d_{n+1}}{d_n - d_{n+1}} = \frac{v_n}{u}, \qquad \text{따라서} \qquad d_{n+1}(v_n + u) = d_n(v_n - u).$$

$v_n = v + 2nu$를 대입하면

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n. \qquad \blacksquare$$

3단계 망원 소거

> **생각해 보기** d_n을 d_1에 이런 분수 $n-1$개의 곱을 곱한 꼴로 써 보라. 무엇이 약분되는가?

$$d_n = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v+(2n-3)u}{v+(2n-1)u} = \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1. \qquad \blacksquare$$

각 분자가 바로 앞의 분모와 약분되어, 첫 분자와 마지막 분모만 남는다(망원 소거(telescoping)).

4단계 $v = u$인 경우

이때 $d_n = \frac{2u}{2nu} d_1 = \frac{d_1}{n}$이고,

$$ut_n = d_n - d_{n+1} = d_1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{d_1}{n(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

이것들을 모두 더하면 $u(t_1 + t_2 + \cdots) = d_1\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots\right) = d_1$이다. 즉 피스톤은 첫 충돌 후 시간 d_1/u에 실린더 끝에 도달하는데, 당연히 그래야 한다. 피스톤이 끝에 도달하기 전에 입자는 무한히 많이 튕긴다(그림 10.4.1).

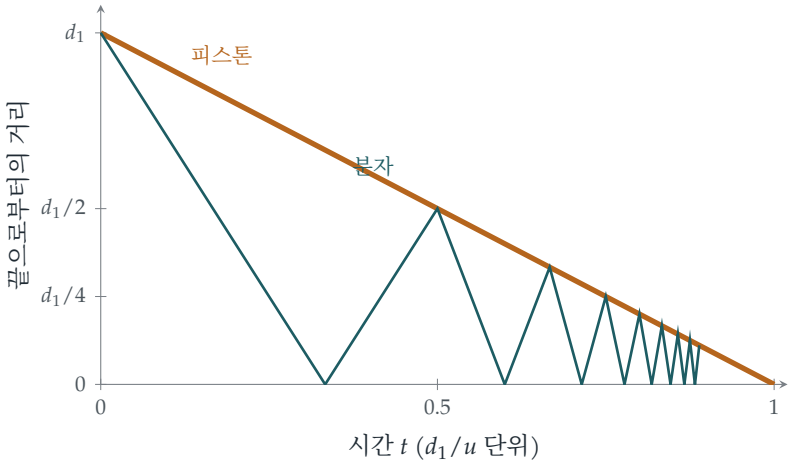


그림 10.4.1 $v = u$인 경우의 시공간 도표(space–time diagram): 시간에 따른 실린더 끝으로부터의 거리. 피스톤(호박색)은 일정하게 전진하고, 분자(청록색)는 피스톤과 끝 사이를 오가며 튕긴다. 지그재그는 점점 가팔라지고(빨라지고) 짧아진다. 피스톤과의 n번째 충돌은 거리 d_1/n에서 일어나므로, 분자의 속력은 대략 1/(길이)에 비례한다.

돌아보기

- **충돌은 기준틀을 바꾸어 본다.** 피스톤의 기준틀에서 보면 튕김은 자명하다.
- **두 식을 세워 미지수를 소거한다.** 같은 시간 동안 입자와 피스톤이 이동한 거리로부터 t_n이 없는 점화식(recurrence)을 얻었다.
- **망원 소거.** $\frac{1}{n(n+1)}$의 합이 그랬듯이, 곱도 한꺼번에 줄어들었다.

숨은 수학

단열 불변량

속력에 길이를 곱해 보자.

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v + u}{v + (2n-1)u}\, d_1 \approx (v + u) d_1$$

이 근사는 n이 크거나 u가 v보다 훨씬 작을 때 성립한다. 따라서

$$\text{속력} \times \text{길이} \approx \text{상수}.$$

피스톤이 분자에 비해 천천히 움직이면, 피스톤이 아무리 멀리 움직여도 곱 vd는 거의 변하지 않는다. 이처럼 계를 천천히 변화시킬 때 거의 일정하게 유지되는 양을 **단열 불변량**이라 한다. 일반적으로 왕복 운동의 단열 불변량은 $\oint p\,\mathrm{d}q$, 즉 운동량(momentum)을 한 주기 동안 적분한 값이다. 여기서는 그 값이 $mv \times 2d$이다.

분자 하나에서 기체로

$v \propto 1/d$이므로 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$은 $1/d^2$에 비례한다. 한 방향으로 움직이는 많은 분자로 이루어진 기체에서 온도는 평균 운동 에너지에 비례하므로 $T \propto 1/d^2$이다. 즉 길이를 절반으로 줄이면 온도는 네 배가 된다. 3차원에서는 에너지가 세 운동 방향에 나누어지며, 같은 논증(파인먼(Feynman)이 그의 **강의록**에서 제시한다)으로부터 단원자 기체(monatomic gas)의 단열 압축 법칙을 얻는다.

$$TV^{2/3} = \text{상수}, \qquad \text{또는 동치로} \qquad pV^{5/3} = \text{상수}.$$

지수 $\frac{5}{3}$은 단원자 기체의 유명한 비열비(ratio of specific heats) γ이다. 자전거 펌프 속 공기를 부피의 5분의 1로 압축하면, 빠르게 하여 열이 전혀 빠져나가지 않는다고 할 때 절대 온도가 $5^{0.4} \approx 1.9$배로 올라간다(공기 분자는 원자 두 개로 이루어져 있어 대신 $\gamma = 1.4$가 된다). 즉 20°C에서 약 280°C까지 오른다. 펌프가 그만큼 뜨거워지지 않는 것은 오로지 압축이 느리고 열이 새어 나가기 때문이다.

페르미의 우주선

1949년 엔리코 페르미(Enrico Fermi)는 우주에서 엄청난 에너지를 지니고 날아오는 입자인 우주선(cosmic rays)이 바로 이 문제의 분자와 똑같은 방식으로 가속된다고 제안하였다. 성간 기체 구름 속에서 움직이는 자기장에 거듭 튕기면서 매번 에너지를 조금씩 얻는다는 것이다. 오늘날 "페르미 가속(Fermi acceleration)"은 초신성 잔해의 충격파에서 일어나는 것으로 여겨지는데, 그곳에서 입자들은 피스톤과 벽 사이의 분자처럼 충격파를 앞뒤로 가로지른다. 단열 불변량은 양자역학의 탄생에도 한몫을 하였다. 1916년 파울 에렌페스트(Paul Ehrenfest)는 느린 변화로는 계가 양자 상태 사이를 건너뛸 수 없으므로, 양자화되는 양은 단열 불변량이어야 한다고 주장하였다.

사고 기술

물리적 과정에서 점화식을 세운다

과정이 반복될 때는 한 주기를 정확히 기술하고, 한 주기에서 다음 주기로 상태가 어떻게 바뀌는지 적는다.

여기서 상태는 각 충돌 때의 (속력, 길이) 쌍이었다. 점화식은 정확히 풀 수 있었고, 그 해는 근사적으로 보존되는 양을 드러냈다. 대학에서는 같은 접근(한 주기를 본 다음 점화식이나 "귀환 사상(return map)"을 세우는 것)을 궤도, 진동자, 그리고 Section 8.7의 반복 사상(iterated maps)에 사용한다.

더 도전하기

1 **정확한 불변량.** $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$임을 보이고, 이로부터 $n \to \infty$일 때 $v_n d_n \to (v+u)d_1$임을 유도하라.

2 **피스톤을 당겨 빼기.** 피스톤을 속력 $u < v$로 빼내는 경우에 대해 문제를 다시 풀어라. 입자가 느려짐을 보이고, $v_n d_n$을 구하라. (팽창하는 기체는 식는다.)

3 **에너지.** $v = u$인 경우, 피스톤이 끝에 가까워질수록 분자의 속력은 한없이 커진다. n번째 주기 동안 피스톤에 작용하는 평균 힘(운동량의 변화를 t_n으로 나눈 값)을 구하고, 그것이 n^3처럼 커짐을 보여라. 이것은 피스톤을 끝까지 밀어 넣는 데 필요한 일에 대해 무엇을 말해 주는가?

4 **튀는 공.** 중력 아래에서 공이 바닥에 탄성적으로 튀고, 바닥을 천천히 들어 올린다. 이 운동의 단열 불변량을 추측해 보라. (**힌트**: vd에 해당하는 것은 평균 속력과 튀어 오르는 높이의 곱, 또는 동치로 에너지와 튀는 사이의 시간의 곱이다.)

더 읽을거리

- **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I** (온라인 무료 공개), 39장 "The kinetic theory of gases"(기체 운동론). 같은 피스톤 논증을 3차원으로 확장한다.
- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics*** (Oxford University Press). 대학 1학년 수준에서 다루는 단열 과정과 기체 운동론.
- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics*** (Butterworth-Heinemann), §49. 단열 불변

량을 간결하게 다룬다. 나중을 위한 책이다.

10.5 유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기

문제

STEP III 2002, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/02-s3-q11`

도입

엘레아의 제논(Zeno of Elea)은 사람이 결코 벽에 닿을 수 없다고 주장했다. 먼저 거리의 절반을 가야 하고, 그다음에는 남은 거리의 절반을 가야 하며, 이런 일이 끝없이 이어지기 때문이다. 무한히 많은 단계가 유한한 총시간 안에 끝날 수 있다는 해결책은 바로 수렴하는(converge) 무한급수(infinite series)이다. 이 문제는 제논의 역설(Zeno's paradox)을 실제로 구현한 것이다. 쐐기의 꼭짓점을 향해 미끄러져 들어가는 퍽(puck)은 벽에 무한히 많이 부딪혀 튀지만, 유한한 시간 뒤에 꼭짓점에 도달한다.

자연에서도 이런 일이 일어난다. 반발계수(coefficient of restitution)가 1보다 작은 공을 바닥에 튀기면, 공은 유한한 시간 동안 무한히 많이 튄 뒤 멈춘다. 입상 물질(granular materials, 모래, 곡물, 눈 등)의 컴퓨터 시뮬레이션에서는 이러한 "비탄성 붕괴(inelastic collapse)"가 실제로 골칫거리이다. 컴퓨터가 유한한 시간 안에 무한히 많은 충돌을 처리해야 하기 때문이다.

시작하기 전에

생각해 보기 입자가 반발계수 e인 매끄러운 벽에 부딪힐 때, 속도의 벽 방향 성분은 어떻게 되는가? 벽에 수직인 성분은 어떻게 되는가?

매끄러운 벽은 벽 방향으로 힘을 작용하지 않으므로, 속도의 벽에 평행한 성분은 변하지 않는다. 수직 성분은 방향이 반대로 바뀌고 e배가 된다. 따라서 입자가 벽과 각 α를 이루며 들어와서 각 β를 이루며 나간다면

$$\tan\beta = e\tan\alpha,$$

이고, 평행 성분이 변하지 않으므로 (들어올 때의 속력)$\cos\alpha$ = (나갈 때의 속력)$\cos\beta$이다.

차근차근 풀기

1단계 튀어 나가는 각

생각해 보기 입자가 벽 OA와 각 θ를 이루며 M_1에 도달한다(각은 O에서 먼 쪽에서 잰다). 입자는 OA와 어떤 각 φ를 이루며 튀어 나가는가? 삼각형 OM_1N_1을 이용하여 φ를 θ로 나타내어라.

입자는 M_1에서 O 쪽을 향해 벽과 각 φ를 이루며 튀어 나가므로, 각 OM_1N_1은 φ이다. 삼각형 OM_1N_1에서 O에서의 각은 30°이다. N_1에서 각 M_1N_1B는 θ이고 O, N_1, B가 한 직선 위에 있으므로, 각 ON_1M_1은 $180^\circ-\theta$이다. 삼각형의 세 각의 합은 180°이므로

$$30^\circ+\varphi+(180^\circ-\theta)=180^\circ, \qquad \text{따라서} \qquad \varphi=\theta-30^\circ.$$

(특히 $\theta>30^\circ$이다.) 그러면 반발 법칙 $\tan\varphi=e\tan\theta$로부터

$$e=\frac{\tan(\theta-30^\circ)}{\tan\theta},$$

를 얻고, 평행 성분의 보존 $u_1\cos\theta=v_1\cos\varphi$로부터

$$\frac{v_1}{u_1}=\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}. \qquad \blacksquare$$

를 얻는다.

2단계 반복되는 패턴

생각해 보기 N_1에서 입자는 벽 OB와 각 θ를 이루며 도달하며, 이 각은 O에서 먼 쪽에서 잰 것이다. 이를 M_1에 도달할 때와 비교해 보아라. 그다음에는 어떤 일이 일어나는가?

N_1에서의 상황은 M_1에서의 상황을 거울에 비춘 것과 같다. 입자가 O에서 먼 쪽에서 각 θ를 이루며 벽에 부딪힌다. 따라서 입자는 각 $\theta-30^\circ$를 이루며 튀어 나가 다시 각 θ를 이루며 OA에 부딪히고, 이런 일이 끝없이 이어진다. 모든 튕김은 첫 번째 튕김을 확대·축소한 복사본이다. 각 삼각형 OM_kN_k, ON_kM_{k+1}, ... 는 바로 앞의 삼각형과 닮음(similar)이고(그림 10.5.1), 속력은 튕길 때마다 같은 비율로 곱해진다.

3단계 두 개의 비

생각해 보기 한 번 튕긴 뒤 다음에 튕길 때까지 O로부터의 거리는 어떤 비율 ρ로 줄어드는가? 속력은 어떤 비율 k로 줄어드는가? 그렇다면 각 구간을 지나는 데 걸리는 시간은 어떤 비율로 줄어드는가?

삼각형 OM_1N_1에서 사인법칙(sine rule)을 쓰면

$$\rho = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta}.$$

이다. 다음 삼각형의 모든 길이는 이 삼각형의 길이의 ρ배이므로, 경로의 각 구간의 길이는 앞 구간의 ρ배이다. 속력은 튕길 때마다 $k = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}$배가 된다. 시간은 길이를 속력으로 나눈 것이므로, 각 구간에 걸리는 시간은 앞 구간에 걸린 시간의

$$\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)\cos(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta - 60^\circ)}{\sin 2\theta}$$

배이다.

4단계 등비급수

총 시간은 $T_1(1 + r + r^2 + \cdots)$이다. 여기서 T_1은 첫 구간에 걸리는 시간이고 $r = \frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin 2\theta}$이다. 이 등비급수(geometric series)는 $0 < r < 1$이면 유한하다.

생각해 보기 $\sin(2\theta - 60^\circ) < \sin 2\theta$는 언제 성립하는가? 항등식 $\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X+Y)\sin\frac{1}{2}(X-Y)$를 이용하여라.

$$\sin 2\theta - \sin(2\theta - 60^\circ) = 2\cos(2\theta - 30^\circ)\sin 30^\circ = \cos(2\theta - 30^\circ),$$

이 값은 $2\theta - 30^\circ < 90^\circ$일 때, 즉 $\theta < 60^\circ$일 때 양수이다. 또 $\theta > 30^\circ$이므로 $r > 0$이다. 따라서 $30^\circ < \theta < 60^\circ$이면 급수가 수렴한다. 입자는 무한히 많이 튕기고, O로부터의 거리는 매번 비율 $\rho < 1$로 줄어들며, 유한한 시간 $\frac{T_1}{1-r}$ 뒤에 O에 도달한다. ■

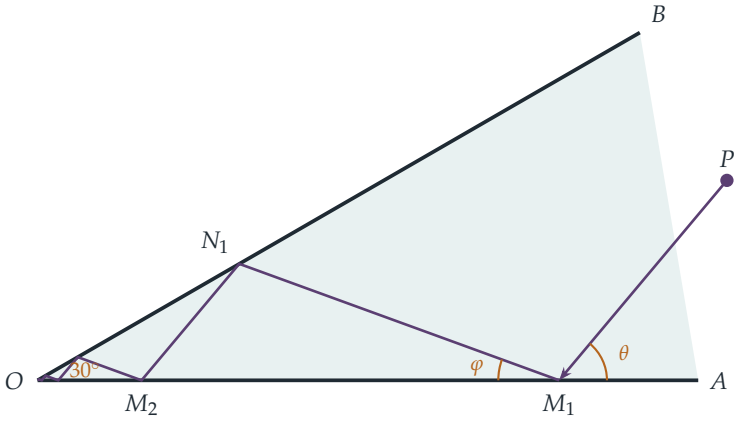


그림 10.5.1 $\theta = 50°$일 때 쐐기 안의 경로. 이때 $\varphi = 20°$이고 $e = \tan 20° / \tan 50° \approx 0.31$이다. 각 튕김은 앞의 튕김을 $\rho \approx 0.45$배로 축소한 복사본이고, 각 구간에 걸리는 시간은 앞 구간의 약 0.65배이다. 입자는 무한히 많이 튕긴 뒤 유한한 시간 안에 O에 도달한다.

돌아보기

- **자기 닮음(self-similarity).** 한 번의 튕김을 이해하고 나면 그 뒤의 모든 튕김은 축소된 복사본이므로, 무한한 과정 전체가 두 개의 비로 정리되었다.
- **비를 올바르게 결합하기.** 거리는 ρ배, 속력은 k배로 줄어들므로 시간은 ρ/k배로 줄어든다.
- **무한히 많은 사건, 유한한 합.** 공비가 1보다 작은 등비급수는 수렴한다.

숨은 수학

$\theta \geq 60°$일 때

$\theta = 60°$이면 비가 정확히 1이다. 모든 구간에 같은 시간이 걸리므로, 입자는 O에 한없이 가까워지기는 하지만 결코 도달하지 못한다. (속력과 구간의 길이가 같은 비율로 줄어들기 때문이다.) $\theta > 60°$이면 구간을 지나는 시간이 점점 길어진다. 어느 경우든 입자는 O에 가까워지며 무한히 많이 튕기지만, 유한한 시간 안에 도달하는 것은 $\theta < 60°$일 때뿐이다. 값 $e = \tan 30° / \tan 60° = \frac{1}{3}$이 그 경계이다.

튀는 공과 비탄성 붕괴

같은 현상의 가장 간단한 예는 다음과 같다. 바닥에 떨어뜨린 공은 높이 e^2H까지 올라가고, 그다음에는 e^4H까지 올라가며, 이런 식으로 계속된다. 튕김 사이의 시간은 각 튕김에서의 속력에 비례하고, 이 속력은 매번 e배로 줄어들므로 총시간은 등비급수가 된다. 첫 낙하에 걸리는 시간을 $T_0 = \sqrt{2H/g}$라 하면, 공은

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

뒤에 튀기를 멈춘다. 무한히 많이 튄 다음 정지하는 것이다. 1992년 Sean McNamara와 William Young은 한 직선 위에 놓인 많은 비탄성 입자의 시뮬레이션에서도 같은 일이 일어남을 보였다. 입자 무리가 유한한 시간 안에 무한히 많은 충돌을 겪을 수 있는데, 이것이 "비탄성 붕괴"이다. 모래와 입상 흐름의 시뮬레이션에는 이를 피하기 위한 특별한 규칙이 들어가야 하며, 이 현상은 입상 기체가 저절로 덩어리를 이루는 이유를 설명하는 데 도움이 된다.

제논과 수렴

기원전 450년 무렵에 나온 제논의 역설은 이천 년 동안 철학자들을 괴롭혔다. 무한한 합이 유한한 값을 가질 수 있다는 수학적 해결은 19세기에 이르러서야 엄밀해졌는데, 이때 코시(Cauchy), 바이어슈트라스(Weierstrass) 등이 극한(제2장의 주제)을 이용하여 수렴을 정의하였다. 이 문제의 놀라운 점은 과정이 **물리적으로** 무한하다는 것이다. 유한한 시간 안에 실제로 무한히 많은 충돌이 일어난다. 다각형 안의 당구(billiards)와 충돌하는 입자의 운동을 연구하는 수학자들은 이러한 거동을 **제논 현상**(*Zeno phenomenon*)이라 부르며, 이는 충돌하는 단단한 구들의 계가 모든 시간에 대해 잘 정의된 운동을 가진다는 것을 증명할 때 나타나는 미묘한 문제 가운데 하나이다.

사고 기술

무한한 과정을 합하기

과정이 일정한 배율로 반복될 때, 더할 수 있는 양(시간, 거리, 에너지)의 총합은 등비급수이다. 수렴 여부는 공비로 판단한다.

여기서 핵심은 올바른 비를 찾는 것이었다. 거리의 비도, 속력의 비도 아닌 시간의 비이다. 대학에서는 같은 추론이 반복법의 수렴, 프랙털 이론, 그리고 문제를 반복해서 절반으로 나누는 알고리즘의 분석을 지배한다.

더 도전하기

1 **총 이동 거리.** M_1에서 O까지 이동한 총거리가 30°와 90° 사이의 모든 θ에 대해 유한함을 보이고, 이를 OM_1과 θ로 나타내어라.

2 **다른 쐐기.** 30° 대신 각이 α인 쐐기에 대해 문제를 다시 풀어라. $\varphi = \theta - \alpha$임을 보이고, 입자가 유한한 시간 안에 O에 도달하기 위한 θ의 조건을 구하여라.

3 **완전 탄성 벽.** $e = 1$이면 입자가 O에 도달할 수 있는가? (**힌트**: 쐐기를 그 벽에 대해 거듭 대칭이동하여 경로가 직선이 되게 하여라. O 둘레에 30° 쐐기가 몇 개 들어가는가?)

4 **튀는 공.** 공을 높이 1 m에서 $e = 0.8$로 떨어뜨린다. 공은 얼마 동안 튀며, 총 얼마의 거리를 이동하는가? ($g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$로 하여라.)

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 5장. 튀는 공과 무한히 이어지는 충돌에 관한 문제가 여럿 실려 있다.
- **Sean McNamara & William Young, "Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium"**, *Physics of Fluids A* 4 (1992). (1차원 입상 매질에서의 비탄성 붕괴와 뭉침)
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards*** (American Mathematical Society; 온라인 무료 공개). 연습문제에 나온 펼치기 기법을 포함한 당구의 수학을 다룬다.

10.6 두 물체가 하나가 되다

문제

STEP III 2004, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/04-s3-q11`

도입

두 물체가 서로 끌어당기거나 밀어낸다. 지구와 달, 두 별, 양성자와 전자가 그렇다. 각 물체의 운동은 다른 물체의 위치에 따라 달라지므로 방정식들이 서로 얽혀(coupled) 있고, 두 운동을 한꺼번에 구해야 할 것처럼 보인다. 뉴턴(Newton)의 위대한 단순화는 변수를 바꾸는 것이었다. 두 위치 대신, 마치 아무 힘도 작용하지 않는 것처럼 움직이는 **질량중심**(centre of mass)과, 질량이 바뀐 하나의 입자처럼 움직이는 **상대 거리**(separation)를 쓰는 것이다. 어려운 문제 하나가 쉬운 문제 두 개가 된다.

이 문제는 직선 위의 두 입자에 대해 이 분리를 실행한다. 그 과정에서 작은 기적이 일어난다. 상대 거리가 t에 대한 이차식의 제곱근으로 밝혀지는데, 그 이유는 주어진 문제와는 아무 상관이 없고 오로지 평면 위의 운동과 관련이 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 각 입자에 대해 뉴턴의 제2법칙을 써 보라. 각 힘은 어느 방향으로 작용하는가?

힘은 척력이므로 (왼쪽에 있는) P는 왼쪽으로, (오른쪽에 있는) Q는 오른쪽으로 민다.

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad 1 \cdot \ddot{x}_2 = +\frac{2}{z^3}.$$

두 방정식은 모두 $z = x_2 - x_1$을 포함하므로 서로 얽혀 있다.

차근차근 풀기

1단계 상대 거리

생각해 보기 두 방정식을 어떻게 결합하면 z만 포함하게 되는가?

빼면 $\ddot{z} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3}$이다. ■

상대 거리는 힘 $\frac{2}{z^3}$에 의해 밀리는 질량 $\frac{2}{3}$인 하나의 입자처럼 행동한다. 수 $\frac{2}{3} = \frac{2\times 1}{2+1}$은 **환산 질량**(reduced mass) $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$이다.

2단계 상대 거리의 에너지

생각해 보기 $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$로 놓고 변수를 분리하여 적분(integrate)하라. z와 $v = \dot{z}$의 초깃값은 무엇인가?

$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3}$을 적분하면 $\frac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C$이다. 처음에 $z = 1$이고 $\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0 - 1 = -1$이므로 $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$, 즉 $C = 2$이다.

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}.$$

(이것은 상대 거리에 대한 에너지 보존(conservation of energy)이다. 환산질량 단위당 운동 에너지와 위치 에너지 $\frac{3}{2z^2}$의 합이 일정하다.)

3단계 놀랍도록 간단한 해

생각해 보기 보여야 할 답은 $z^2 = 4t^2 - 2t + 1$이다. 그러니 z 대신 $w = z^2$을 살펴보라. $\dot{w}^2$을 w로 나타내면 무엇인가?

$w = z^2$이면 $\dot{w} = 2z\dot{z}$이므로

$$\dot{w}^2 = 4z^2\dot{z}^2 = 4z^2\left(4 - \frac{3}{z^2}\right) = 16w - 12.$$

미분하면 $2\dot{w}\ddot{w} = 16\dot{w}$이므로 ($\dot{w} \neq 0$일 때마다) $\ddot{w} = 8$이다. 따라서 w는 t에 대한 이차식 $w = 4t^2 + \alpha t + \beta$이다. 처음에 $w = 1$이고 $\dot{w} = 2z\dot{z} = -2$이므로 $\beta = 1$, $\alpha = -2$이다.

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}. \quad ■$$

(직접 확인할 수도 있다. $\dot{w}^2 = (8t-2)^2 = 64t^2 - 32t + 4 = 16(4t^2 - 2t + 1) - 12$이다.) 두 입자는 $t = \frac{1}{4}$에서 $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$로 가장 가까워지고, 그 뒤로는 영원히 멀어진다.

4단계 질량중심

생각해 보기 $2x_1 + x_2$는 어떤 방정식을 만족하는가? 왜 이것이 살펴보기에 자연스러운 결합인가?

두 운동 방정식을 더하면 $2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0$이다. 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이므로(뉴턴의 제3법칙) 전체 운동량(momentum) $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$는 일정하다. 그 값은 처음에 $2 \times 1 + 0 = 2$이고, $2x_1 + x_2$는 처음에 1이므로

$$2x_1 + x_2 = 1 + 2t.$$

$\frac{2x_1+x_2}{3}$에 있는 질량중심은 속력 $\frac{2}{3}$으로 일정하게 움직인다. $x_2 - x_1 = z$와 결합하면

$$x_1 = \frac{1 + 2t - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{1 + 2t + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}. \qquad \blacksquare$$

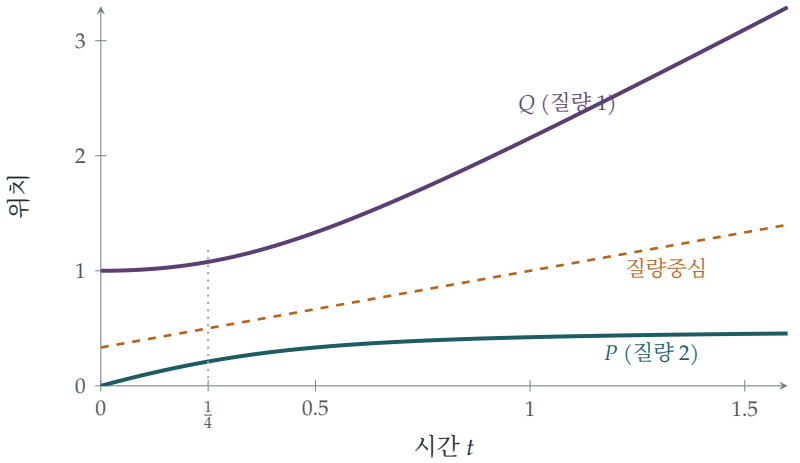


그림 10.6.1 시간에 따른 P(청록색)와 Q(자주색)의 위치. P는 Q를 향해 움직이다가 척력 때문에 느려지고 되돌아가 일정한 위치에 가까워지며, Q는 밀려난다. 두 입자는 $t = \frac{1}{4}$에서 가장 가깝다. 질량중심(호박색, 점선)은 내내 일정한 속력으로 움직인다.

돌아보기

- **변수를 바꾸어 얽힘을 푼다.** 방정식들의 차는 z만 포함했고, 가중합은 질량중심만 포함했다.
- **에너지 적분.** $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$로 쓰면 2계 방정식이 1계 방정식, 곧 에너지 보존으로 바뀌었다.
- **미지수를 바꾼다.** z에 대한 방정식은 다루기 어려웠지만 z^2에 대한 방정식은 아주 쉬웠다.

숨은 수학

z^2이 이차식인 이유

$\ddot{z} = k/z^3$ 꼴의 어떤 힘의 법칙에 대해서도, 같은 계산으로 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 상수를 얻는다. $\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$이 보존되는 에너지이기 때문이다. 따라서 z^2은 언제나 t에 대한 이차식이다. 왜 그럴까?

숨은 이유는 이렇다. **평면** 위에서 자유롭게, 즉 일정한 속력으로 직선을 따라 움직이는 입자를 생각하자. $r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$이므로 원점으로부터의 거리 r는 $r^2 =$ (이차식, 변수는t)를 만족한다. 그리고 극좌표(polar coordinates)에서 이 입자의 지름 방향 운동 방정식은 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$이다. 각운동량(angular momentum) $h = r^2\dot{\theta}$가 일정하므로 이 방정식은 다음이 된다.

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

역세제곱 척력은 정확히 숨은 회전 운동의 **원심**(centrifugal) 효과이다. 우리 문제에서 $z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$은 원점에서 거리 $\frac{\sqrt{3}}{2}$만큼 떨어져 지나가는 직선 위를 속력 2로 움직이는 점의, 원점으로부터의 거리의 제곱이다. 서로 밀어내는 일차원의 두 입자는 이차원 자유 운동의 그림자이다.

이체 문제

이 문제의 방법은 두 물체 사이의 힘이 상대 거리에만 의존하고 두 물체를 잇는 직선을 따라 작용하기만 하면, 일차원뿐 아니라 삼차원에서도 통한다. 질량중심은 등속으로 움직이고, 상대 위치 벡터(vector) $\mathbf{r}$는 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$에 대해 $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$를 따른다. 중력의 경우 이것이 뉴턴이 *Principia*에서 푼 **케플러 문제**(Kepler problem)이다. 상대 위치는 타원, 포물선 또는 쌍곡선을 그린다. 지구와 태양은 둘 다 공통의 질량중심 둘레를 도는데, 이 점은 태양 내부에 있다. 지구와 달은 지구 중심에서 약 4700 km 떨어진 점 둘레를 도는데, 이 점은 지구 내부에 있지만 중심에서 꽤 떨어져 있으며, 그래서 지구는 한 달 주기로 흔들린다. 천문학자들은 별에서 바로 이 흔들림을 검출하여 다른 별 둘레의 행성을 찾는다.

적분가능계

1969년 Francesco Calogero는 직선 위의 많은 입자가 역제곱 퍼텐셜(즉 역세제곱 힘)로 서로 밀어내는 계를 연구하여, 놀랍게도 이 계가 입자의 개수와 상관없이 정확히 풀린다는 것을 발견했다. 1975년 Jürgen Moser는 시간에 따라 변해도 고윳값(eigenvalue)이 일정하게 유지되는 행렬, 곧 Section 7.7의 **락스 쌍**(Lax pairs)을 이용하여 그 이유를 설명했다. *Calogero–Moser* **계**(Calogero–Moser system)는 이제 **적분가능계**(integrable system), 즉 완전히 풀 수 있을 만큼 보존량이 충분히 많은 계의 중심적인 예이며, 역학을 무작위 행렬, 양자장론, 솔리톤 이론과 연결한다.

사고 기술

얽힘을 푸는 좌표를 골라라

두 양이 서로 얽혀 있으면, 얽혀 있지 않은 결합을 찾아라. 알맞은 상수로 가중한 합과 차는 종종 문제를 독립적인 조각들로 나누어 준다.

질량중심과 상대 좌표가 첫 번째 예이다. 대학에서는 같은 아이디어가 행렬의 대각화(diagonalisation, 정규 모드(normal modes), Section 11.2), 편미분방정식의 변수분리법(separation of variables), 그리고 양자역학에서 나타난다.

더 도전하기

1 **끈으로 연결된 두 질량.** STEP III 2023, 9번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`)을 풀어 보라. 끈으로 연결된 두 입자를 따라가며, 질량중심을 이용해 운동을 분리한다. 한 입자가 언제 뒤로 움직이는지 살펴보라.

2 **인력.** 인력 $\frac{2}{z^3}$으로 이 문제를 다시 풀어 보라. z^2이 여전히 t에 대한 이차식임을 보이고, 두 입자가 언제 충돌하는지 구하라.

3 **숨은 평면.** 이 문제의 운동에 대해, 원점으로부터의 거리가 $z(t)$인 평면 위의 직선과 쓸고 지나간 각 $\theta(t)$를 구하라. $z^2\dot{\theta}$가 일정하고 $(z^2\dot{\theta})^2 = 3$임을 확인하라.

4 **케플러의 제3법칙.** 질량이 m_1, m_2인 두 별이 서로 거리 a만큼 떨어져 중력에 의해 질량중심 둘레를 원운동한다. 주기 T가 $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$을 만족함을 보여라.

더 읽을거리

- **John Taylor, *Classical Mechanics*** (University Science Books), 8장. 이체 문제, 환산질량, 궤도.
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press), 10장, 중심력에 관한 내용.
- **Francesco Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*** (Springer). 의욕 있는 독자를 위한 책으로, 정확히 풀리는 계의 세계를 다룬다.

10.7 구 껍질 안의 중력

문제

STEP III 1999, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/99-s3-q9`

도입

속이 빈 행성을 상상해 보자. 안에는 아무것도 없고 얇은 구 모양의 암석 껍질만 있는 행성이다. 그 안쪽, 벽 가까이에 서 있다면 가까운 암석 쪽으로 끌려갈 것이라고 예상할지도 모른다. 그러나 실제로는 둥둥 떠 있게 된다. 껍질 내부의 모든 곳에서 껍질이 작용하는 중력(gravitational pull)은 정확히 0이기 때문이다. 껍질의 가까운 쪽은 더 가깝지만 먼 쪽은 더 크고, 이 두 효과가 완벽하게 상쇄된다.

이것이 **뉴턴**(*Newton*)**의 껍질 정리**(*shell theorem*)이다. 뉴턴은 이 정리를 증명하는 데 여러 해가 걸렸고, 이 정리는 그의 중력 이론에 꼭 필요했다. 짝을 이루는 정리(구의 바깥에서는 모든 질량이 중심에 모여 있는 것처럼 끌어당긴다)와 함께, 이 정리는 지구와 태양을 점으로 취급하는 것을 정당화한다. 연습 문제와 숨은 수학 절에서는 이 정리를 이용하여 기체 구름이 붕괴하여 별이 되는 데 걸리는 시간을 계산한다.

시작하기 전에

생각해 보기 고리에서 지름의 양 끝에 서로 마주 보는 작은 두 조각을 생각하자. 이 두 조각이 입자에 작용하는 힘을 그려 보자. 어떤 성분은 상쇄되고, 어떤 성분은 더해지는가?

두 조각은 입자로부터 같은 거리에 있다. 두 조각이 끌어당기는 힘의 축 방향 성분은 크기가 같아서 더해지고, 축에 수직인 성분은 크기가 같고 방향이 반대여서 상쇄된다. 고리 전체를 이런 식으로 짝지으면 알짜힘은 축 방향, 즉 고리의 중심을 향한다.

차근차근 풀기

1단계 고리

고리의 모든 조각은 입자로부터 거리 $\sqrt{x^2+r^2}$에 있고, 입자에서 조각으로 그은 직선은 축과 각 ψ를 이룬다. 여기서 $\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$이다. 질량 δm인 조각은 크기 $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}$의 힘으로 끌어당기며, 그중 축 방향 성분은 $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$이다. 모든 조각의 거리와 각이 같으므로 이 성분들을 그냥 더하면

$$\frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$ ■

2단계 껍질을 고리로 자르기

> ? **생각해 보기** 껍질의 중심을 O에 두고, 입자를 축 위의 O로부터 거리 b인 곳에 두자. 껍질을 축에 수직인 얇은 고리들로 자르고, 각 고리를 그 고리 위의 한 점이 O에서 축과 이루는 각 ϕ로 나타내자. 고리의 반지름, 위치, 질량은 각각 무엇인가?

각 ϕ에 있는 고리의 반지름은 $a\sin\phi$이고, 그 중심은 축을 따라 O로부터 거리 $a\cos\phi$에 있으므로 입자로부터는 거리 $a\cos\phi - b$에 있다. 고리의 폭은 $a\,\delta\phi$이므로 넓이는 $2\pi a\sin\phi\cdot a\,\delta\phi$이고, 이는 껍질의 넓이 $4\pi a^2$의 $\frac{1}{2}\sin\phi\,\delta\phi$배이다. 따라서 고리의 질량은 $\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi$이다. 1단계에 의해 이 고리는 입자를 축을 따라 $\phi = 0$ 쪽 끝으로 다음 크기의 힘으로 끌어당긴다.

$$\frac{G\cdot\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi\,(a\cos\phi - b)}{\left((a\cos\phi-b)^2 + a^2\sin^2\phi\right)^{3/2}} = \frac{GM}{2}\cdot\frac{(a\cos\phi-b)\sin\phi\,\delta\phi}{(a^2-2ab\cos\phi+b^2)^{3/2}}.$$

(부호는 저절로 처리된다. $a\cos\phi > b$인, 입자 너머의 고리들은 한쪽으로 끌어당기고, 입자 뒤쪽의 고리들은 반대쪽으로 끌어당긴다.)

3단계 알맞은 변수

> ? **생각해 보기** 분모에는 $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$이 들어 있다. s는 기하학적으로 무엇을 나타내는가? $\mathrm{d}s$를 $\mathrm{d}\phi$로 나타내면 무엇인가?

코사인 법칙(cosine rule)에 의해 s는 입자에서 고리까지의 거리이다. 미분하면 $2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$이고, $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$을 $a\cos\phi$에 대하여 풀면 $a\cos\phi - b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}$이다. 따라서 전체 힘은

$$\frac{GM}{2}\int\frac{a^2-b^2-s^2}{2b\,s^3}\cdot\frac{s\,\mathrm{d}s}{ab} = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\right)\mathrm{d}s,$$

이다. 여기서 s는 $a-b$(가장 가까운 점, $\phi=0$)부터 $a+b$(가장 먼 점, $\phi=\pi$)까지 변한다.

4단계 **힘이 사라진다**

$$\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\,\mathrm{d}s = (a^2-b^2)\Big(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\Big) - 2b = (a^2-b^2)\cdot\frac{2b}{a^2-b^2} - 2b = 0.$$

껍질은 입자에 아무런 힘도 작용하지 않는다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** 입자가 껍질의 **바깥**, 즉 $b > a$인 곳에 있으면 무엇이 달라지는가? s의 범위의 끝값이 $b-a$와 $b+a$가 된다. 마지막 줄을 다시 계산하여, 힘이 중심을 향하고 크기가 $\frac{GM}{b^2}$임을, 즉 모든 질량이 중심에 모여 있는 것과 같음을 보여라.

돌아보기

- **대칭성을 먼저 보라.** 마주 보는 조각을 짝지어 보는 것만으로, 계산하기 전에 힘의 방향을 알 수 있었다.
- **더 간단한 도형에서부터 쌓아 올려라.** 점들이 모여 고리가 되고, 고리들이 모여 껍질이 되었다.
- **물리적 상황에 맞는 변수를 골라라.** 각 ϕ에서 거리 s로 변수를 바꾸자 까다로운 적분이 아주 쉬운 적분이 되었다.

숨은 수학

뉴턴의 원뿔 논증

뉴턴 자신의 증명(**프린키피아**, 제1권, 명제 70)에는 적분이 전혀 쓰이지 않는다. 입자를 꼭짓점으로 하는 좁은 이중 원뿔을 그리면, 이 원뿔은 껍질을 작은 두 조각으로 잘라 낸다(그림 10.7.1). 두 조각의 넓이는 입자로부터의 거리의 제곱 r_1^2과 r_2^2에 비례한다(현은 양 끝에서 원과 같은 각으로 만나므로, 두 조각은 원뿔과 같은 각을 이룬다). 따라서 두 조각의 질량은 r_1^2과 r_2^2에 비례하고, 질량을 거리의 제곱으로 나눈 값에 비례하는 두 조각의 인력은 크기가 같고 방향이 반대이다. 입자를 지나는 모든 이중 원뿔에서 힘이 상쇄되므로 전체 힘은 0이다. 바로 역제곱 법칙(inverse-square law) 덕분에 이러한 상쇄가 일어난다. 거리의 다른 거듭제곱을 따른다면 껍질은 입자를 밀거나 끌어당길 것이다.

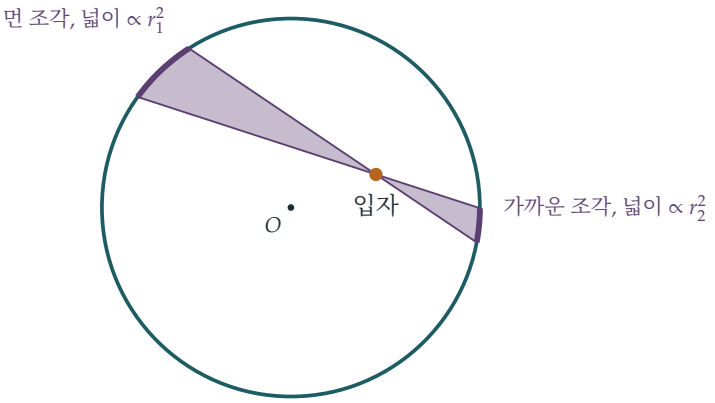


그림 10.7.1 뉴턴의 논증. 입자에서 뻗어 나간 가는 이중 원뿔이 껍질을 두 조각으로 잘라 낸다. 먼 조각은 거리의 제곱의 비만큼 더 크지만, 그 인력은 정확히 같은 비만큼 더 약하다. 두 인력은 상쇄되고, 다른 모든 쌍도 마찬가지이다. 껍질 내부에서 중력은 사라진다.

붕괴하는 구름

STEP III 1987 Q14는 이 정리를 반대 방향으로 이용한다. 균일한 구의 바깥에서, 표면에 있는 입자에 작용하는 인력은 전체 질량이 중심에 있는 것처럼 GMm/r^2이다. 이제 정지해 있는 반지름 R, 질량 M인 균일한 구 모양의 먼지 구름을 생각하고, 이 구름이 자체 중력으로 붕괴하게 하자. 표면의 입자는 자신보다 안쪽에 있는 질량만 느끼는데, 모든 것이 안쪽으로 떨어지므로 이 질량은 계속 M이다. 따라서 안쪽으로 향하는 속력 $v = -\dot{r}$는 다음을 만족한다.

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

$r = R\cos^2\alpha$로 치환하면(연습 문제 중 하나이다) 반지름 r에 이르기까지 걸리는 시간은 $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$이다. 구름 전체는 $\alpha = \frac{\pi}{2}$일 때 한 점으로 붕괴하며, 이는 다음 **자유 낙하 시간**(*free-fall time*)이 지난 뒤이다.

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

여기서 ρ는 밀도이다. 놀랍게도 이 시간은 밀도에만 의존하므로, 구름의 모든 껍질이 같은 순간에 중심에 도달한다(그림 10.7.2). 세제곱미터당 약 10^{-17} kg인 전형적인 성간 구름의 경우 t_{ff}는 약 700 000년이며, 이것이 별이 형성되는 시간 규모를 정한다.

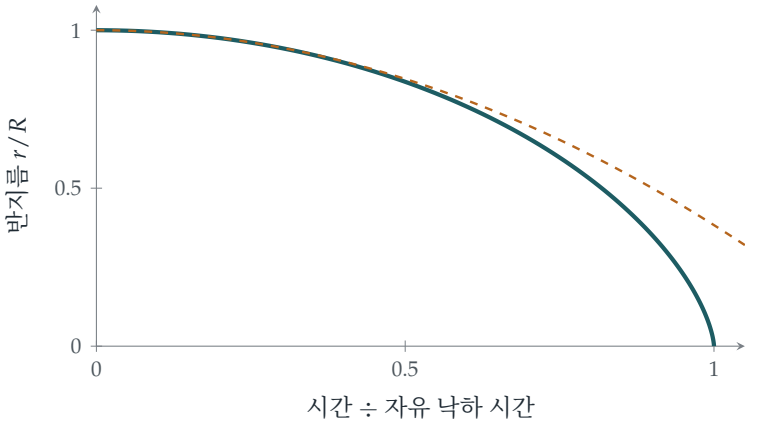


그림 10.7.2 붕괴하는 균일한 먼지 구름의 반지름을 시간에 대하여 나타낸 그래프(청록색). 처음에는 떨어뜨린 돌처럼 천천히 시작하고(호박색 점선 포물선은 등가속도 근사 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$이다), 그다음 급격히 빨라져서 $t = t_{\text{ff}}$일 때 0에 이른다. 이 곡선은 사이클로이드(cycloid)의 절반이다.

뉴턴의 지연과 가우스 법칙

뉴턴은 1660년대에 이미 역제곱 법칙을 알고 있었지만, 중력 이론은 1687년에야 발표했다. 일부 역사가들에 따르면 그 이유 중 하나는, 껍질 정리를 증명하기 전까지는 지구를 질점으로 취급하는 것을 정당화할 수 없었기 때문이다. 일단 증명하고 나자 **프린키피아**의 나머지 내용이 뒤따랐다. 오늘날 이 정리는 **가우스**(*Gauss*) **법칙**(*Gauss's law*)의 간단한 결과이다. 가우스 법칙은 임의의 닫힌곡면을 통해 바깥으로 흘러 나가는 중력장의 총량이 그 안의 질량에 비례한다는 법칙이다. 껍질 내부에 중심이 같은 구를 하나 잡자. 이 구는 질량을 하나도 둘러싸지 않으므로, 이 구를 통과하는 총 흐름은 0이다. 이것만으로 장이 0이 되지는 않지만(균일한 장은 한쪽으로 흘러 들어와 다른 쪽으로 흘러 나가므로, 어떤 닫힌곡면을 통과하는 총 흐름도 0이다), 여기서는 대칭성이 도움이 된다. 장은 중심을 곧장 향하거나 중심에서 곧장 멀어지는 방향이어야 하고, 구 위의 모든 곳에서 세기가 같아야 하므로, 총 흐름이 0이라는 것은 장이 0이라는 뜻이다. 같은 법칙이 전기장도 지배한다. 그래서 대전된 금속 껍질 내부에는 전기장이 없고, 자동차가 번개로부터 우리를 보호해 준다.

사고 기술

합으로서의 적분

연속적인 물체의 효과를 구하려면, 그 물체를 효과를 이미 아는 조각들로 자르고 그것들을 모두 더하라. 조각을 고를 때는 대칭성을 이용하라.

점들이 모여 고리가 되고, 고리들이 모여 껍질이 되며, 껍질들이 모여 속이 찬 구가 된다. 대학에서는 모든 장(중력장, 전기장, 자기장)을 이런 방식으로 그 원천으로부터 계산하며, 이는 가우스 정리와 스토크스(Stokes) 정리의 벡터 미적분학으로 이어진다.

더 도전하기

1 **껍질의 바깥.** 잠깐 생각하기 상자의 내용을 완성하라. 즉, 껍질의 바깥에서 힘이 $\frac{GM}{b^2}$임을 보여라. 이로부터 질량 M인 속이 찬 균일한 구가 바깥의 입자를, 질량이 모두 중심에 있는 것처럼 끌어당김을 이끌어 내라.

2 **붕괴 시간.** STEP III 1987, 14번 문제 (`step.maths.org/questions/87-s3-q14`)에 도전해 보라. 먼지 구름이 자체 중력으로 붕괴하는 데 걸리는 시간을 구하는 문제이며, 삼각치환으로 적분을 계산할 수 있다.

3 **지구를 관통하는 터널.** 속이 찬 균일한 구의 내부에서, 중심으로부터 거리 b인 곳의 힘이 b에 비례하는 $\frac{GMb}{a^3}$임을 보여라. 이로부터 지구 중심을 지나는 터널에 떨어뜨린 공이 주기 $2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$, 약 84분으로 진동함을 이끌어 내라. 이는 지표면을 스치듯 도는 인공위성의 주기와 같다.

4 **다른 힘의 법칙.** 중력이 역세제곱 법칙을 따른다면, 껍질 내부의 힘은 여전히 0일까? ($\frac{1}{s^2}$ 대신 $\frac{1}{s^3}$을 넣어 3단계를 다시 해 보라.)

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 껍질 정리를 포함한 중력에 관한 장들.
- **찬 드 라 세 카 르(Subrahmanyan Chandrasekhar), *Newton's Principia for the Common Reader*** (Oxford University Press). 명제 70과 71을 포함한 뉴턴의 증명들을 노벨상 수상자가 해설한 책.

- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box*** (Riverhead). 중력, 붕괴, 시뮬레이션이 우주의 구조를 어떻게 설명하는지 다룬 책.

10.8 삼각형을 이룬 세 별

문제

STEP I 1999, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/99-s1-q11`

도입

중력으로 서로 끌어당기는 두 물체의 운동은 뉴턴(Newton)이 보였고 Section 10.6에서 설명했듯이 완전히 풀 수 있다. 각 물체는 공통 질량중심(centre of mass)을 초점으로 하는 원뿔곡선(conic) 위를 움직이는데, 두 물체가 서로 묶여 있으면 타원(ellipse), 서로에게서 벗어날 만큼 에너지가 충분하면 포물선(parabola)이나 쌍곡선(hyperbola)을 그린다. 그런데 세 번째 물체를 더하면 모든 것이 달라진다. **삼체 문제**(three-body problem)는 익숙한 함수로 나타낼 수 있는 일반해가 없으며, 1890년 앙리 푸앵카레(Henri Poincaré)는 그 해가 혼돈(chaos)적일 수 있음을 발견했다. 이것이 수학에 혼돈이 처음 등장한 순간이다.

그러나 어떤 특수해는 아주 단순하다. 1772년 조제프루이 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange)는 정삼각형(equilateral triangle)의 세 꼭짓점에 놓인 세 물체가 삼각형 모양을 그대로 유지한 채 바퀴처럼 강체 회전할 수 있음을 발견했다. 이 문제는 질량이 같은 경우에 그 해를 구한다. 라그랑주의 삼각형은 단순한 호기심거리가 아니다. 태양, 목성, 그리고 수천 개의 "트로이(Trojan)" 소행성이 정확히 이런 배치를 이루고 있으며, 오늘날 우주 망원경들도 이와 비슷한 지점에 자리 잡고 있다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 별 하나가 반지름 R인 원 위를 각속도(angular velocity) ω로 움직이려면 그 별에 작용하는 힘의 합은 어떠해야 하는가?

그 크기는 $m\omega^2 R$이고 방향은 원의 중심을 향해야 한다. 따라서 각 별에 작용하는 중력의 합이 삼각형의 중심을 향하는지 확인하고, 그 크기가 알맞도록 하는 ω를 구하면 된다.

차근차근 풀기

1단계 기하

생각해 보기 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 각 꼭짓점에서 중심까지의 거리는 얼마인가?

중심은 각 중선(median) 위에 있으며, 꼭짓점에서부터 중선 길이의 3분의 2인 지점에 있다. 중선의 길이는 $a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로 각 꼭짓점에서 중심까지의 거리는

$$R = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

이다. 대칭성에 의해 삼각형의 중심은 질량이 같은 세 별의 질량중심이다.

2단계 별 하나에 작용하는 힘

생각해 보기 나머지 두 별은 각각 크기 $\frac{\gamma m^2}{a^2}$인 힘으로 끌어당긴다. 두 힘 사이의 각은 얼마인가? 두 힘의 합력(resultant)은 무엇이며, 어느 방향을 향하는가?

두 힘은 그 별에서 만나는 삼각형의 두 변을 따라 향하므로, 두 힘 사이의 각은 60°이다. 대칭성에 의해 합력은 이 각의 이등분선(bisector) 위에 놓이고, 이 이등분선은 중심을 지난다. 각 힘은 이등분선과 30°를 이루므로 합력의 크기는

$$2\cdot\frac{\gamma m^2}{a^2}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2},$$

이고 방향은 중심을 향한다(그림 10.8.1).

3단계 각속도

합력을 $m\omega^2 R$와 같게 놓으면

$$m\omega^2\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

이다. 이 각속도에서는 (대칭성에 의해) 같은 계산이 각 별에 똑같이 적용되므로, 세 별 모두 중심 둘레의 원 위를 움직이며 삼각형의 모양은 그대로 유지된다. ■

4단계 중심에 놓인 네 번째 별

생각해 보기 중심에 놓인 질량 λm인 별은 각 꼭짓점에서 거리 $\frac{a}{\sqrt{3}}$만큼 떨어져 있다. 이 별은 각 꼭짓점의 별에 어떤 힘을 추가로 가하는가? 질량중심은 움직이는

? 가? 중심의 별은 알짜힘을 받는가?

중심의 별은 질량중심을 바꾸지 않으며, 대칭성에 의해 그 별에 작용하는 세 힘은 서로 상쇄되므로 그 별은 정지해 있다. 이 별은 각 꼭짓점의 별을 크기 $\frac{\gamma\lambda m^2}{(a/\sqrt{3})^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2}$인 힘으로 중심 쪽으로 끌어당긴다. 이제 꼭짓점의 별에 안쪽으로 작용하는 힘의 합은 $(\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}$이므로

$$m\omega^2\frac{a}{\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}, \qquad \omega^2 = \frac{(3+3\sqrt{3}\,\lambda)\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}(1+\sqrt{3}\,\lambda). \qquad \blacksquare$$

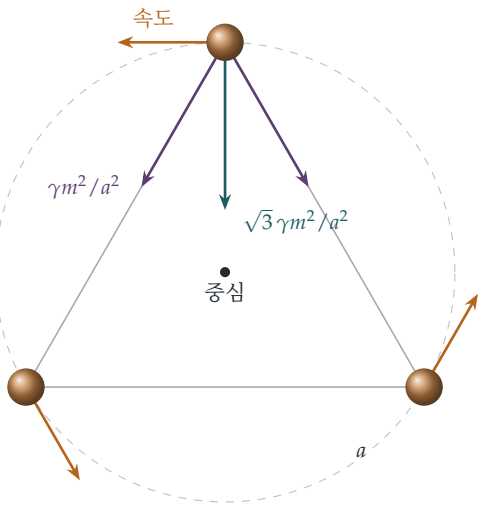


그림 10.8.1 정삼각형의 꼭짓점에 놓인 질량이 같은 세 별. 맨 위 별에 작용하는 두 힘(자주색)은 합쳐져 중심을 향하는 하나의 힘(청록색)이 된다. 각 별이 알맞은 속력(주황색)으로 점선 원 위를 움직이면 삼각형 전체가 모양을 유지한 채 회전한다. 이것이 삼체 문제에 대한 라그랑주의 정삼각형 해이다.

돌아보기

- **대칭적인 해를 추측하라.** 우리는 삼체 문제를 푼 것이 아니다. 대칭성이 높은 운동을 추측하고 뉴턴의 법칙이 그 운동을 허용함을 확인했을 뿐이다.
- **대칭성이 방향을 정해 준다.** 합력은 이등분선 위에 놓일 수밖에 없었으므로 그 크기만 계산하면 되었다.
- **모든 물체를 확인하라.** 대칭성에 의해 별 하나를 확인하면 세 별을 모두 확인한 것이 되었다. 중심의 별은 따로 (쉽게) 확인해야 했다.

숨은 수학

모습을 바꾼 케플러 법칙

답을 $\omega^2 a^3 = \gamma(3m)$로 써 보자. 거리 a만큼 떨어져 원 궤도를 도는 두 물체에 대해 케플러 제3법칙(Kepler's third law)(Section 10.6의 연습문제)은 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2)$, 즉 전체 질량을 준다. 세 별도 전체 질량을 $3m$으로 하여 같은 법칙을 따른다. 사실 라그랑주는 질량이 같은 경우뿐 아니라 **임의의** 세 질량에 대해서도 정삼각형 해가 존재함을 보였다. 이때 삼각형은 질량중심을 중심으로 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)$를 만족하며 회전한다. 오일러(Euler)는 그보다 몇 년 앞서 세 물체가 회전하는 한 직선 위에 놓이는 두 번째 해의 족을 발견했다. (이름 붙이는 방식의 차이를 무시하면) 이 다섯 가지 배치, 즉 공선(collinear) 배치 세 가지와 삼각형 배치 두 가지가 세 물체가 같은 모양을 유지하는 유일한 경우이다.

라그랑주 점

m_1을 태양, m_2를 행성, m_3을 아주 작은 소행성이라 하자. 정삼각형 해에 따르면 소행성은 태양 및 행성과 정삼각형을 이루는 세 번째 꼭짓점, 즉 궤도에서 행성보다 앞이나 뒤에 머무를 수 있다. 이 지점들이 **라그랑주 점**(Lagrange points) L_4와 L_5이며, 오일러의 공선 해는 L_1, L_2, L_3을 준다. 목성의 L_4와 L_5 점 주변에는 알려진 것만 만 개가 넘는 "트로이" 소행성이 모여 있다. 제임스 웹 우주 망원경은 태양–지구 L_2 점 근처, 지구 너머 1.5백만 km 떨어진 곳을 돌고 있으며, 그곳에서는 태양, 지구, 달을 모두 차광막 뒤쪽에 둘 수 있다.

안정성

별을 만드는 이들(Starmakers)의 삼각형은 오래 유지될까? 질량이 같으면 그렇지 않다. 아주 작은 교란도 점점 커져서 별들은 흩어지거나 충돌한다. 에드워드 라우스(Edward Routh)는 1875년 라그랑주의 삼각형이 한 질량이 압도적으로 클 때에만 안정(stable)하다는 것, 정확히는

$$27(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

일 때에만 안정하다는 것을 보였다. 태양과 목성에 대해서는 이 조건이 넉넉히 성립하며, 그래서 트로이 소행성들이 살아남는다. 질량이 같은 세 별에 대해서는 $27 \times 3m^2 > 9m^2$이므로 이 배치는 불안정하다.

푸앵카레의 실수와 8자 궤도

1887년 스웨덴 국왕 오스카르 2세(King Oscar II)는 다체 문제의 해에 상금을 걸었다. 앙리 푸앵카레는 1889년 삼체 문제에 관한 긴 논문으로 상을 받았지만, 논문이 인쇄되는 동안 한 편집자가 허점을 발견했다. 이를 바로잡는 과정에서 푸앵카레는 어떤 해들이 "너무나 놀랍도록 복잡해서 그려 볼 엄두조차 낼 수 없는" 거동을 보인다는 사실을 발견했다. 이

것이 혼돈을 처음 엿본 순간이다. 이미 인쇄된 사본들은 푸앵카레의 비용으로 회수되어 폐기되었다. 새로운 특수해는 지금도 발견되고 있다. 1993년 Cristopher Moore는 질량이 같은 세 물체가 8자 모양의 곡선을 따라 서로를 쫓아 돌 수 있음을 수치적으로 발견했고, 2000년 Alain Chenciner와 Richard Montgomery가 이를 증명했다. 그 뒤로 컴퓨터를 이용해 수천 개의 주기 궤도가 더 발견되었다.

사고 기술

대칭적인 해를 추측하고 검증하기

문제가 너무 어려워서 일반적으로 풀 수 없을 때에는 가능한 한 대칭성이 높은 해를 찾아라. 대칭적인 추측은 많은 미지수를 한두 개로 줄여 주며, 그것을 확인하는 일은 대개 쉽다.

이것은 수학과 물리학에서 강력한 전략이다. 대칭적인 평형, 정상 상태, 진행파, 모양을 유지하며 회전하는 배치 등은 흔히 가장 먼저 발견되는 해이며, 나머지 해를 연구하는 출발점이 된다. 그다음 질문은 언제나 그 대칭적인 해가 안정한가 하는 것이다.

더 도전하기

1 **정사각형을 이루는 네 별.** 질량 m인 네 별이 한 변의 길이가 a인 정사각형의 꼭짓점에 놓여 있다. 이 별들이 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$로 중심 둘레를 모양을 유지한 채 회전할 수 있음을 보여라.

2 **질량이 같은 두 별과 행성 하나.** 질량 M인 두 별이 거리 a만큼 떨어져 질량중심 둘레를 돈다. 질량을 무시할 수 있는 행성 하나가 중심에 놓여 있다. 이 행성은 평형(equilibrium) 상태인가? 두 별을 잇는 직선을 따른 작은 변위에 대해 안정한가? 그 직선에 수직인 방향의 변위에 대해서는 어떠한가?

3 **질량이 다른 경우.** 질량이 m_1, m_2, m_3인 세 별이 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 꼭짓점에 놓여 질량중심 G 둘레를 회전한다. m_1에 작용하는 중력이 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$임을 보여라. 여기서 P_1은 m_1의 위치이다. (*힌트:* 힘을 벡터로 쓰고 질량중심의 정의를 이용하라.) 이로부터 라그랑주의 결과를 이끌어 내라.

4 **n개의 별.** 질량이 같은 n개의 별이 반지름 R인 원에 내접하는 정n각형의 꼭짓점에 놓여 있다. 모양을 유지한 채 회전하기 위한 ω^2을 $\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$의 k에 대한 합으로 나타내라.

더 읽을거리

- **June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*** (American Mathematical Society). 상금 이야기와 푸앵카레가 혼돈을 발견한 과정을 다룬다.
- **Richard Montgomery, "A new solution to the three-body problem"**, *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001). 8자 궤도를 발견자 중 한 사람이 직접 설명한다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Florin Diacu & Philip Holmes, *Celestial Encounters*** (Princeton University Press). 삼체 문제와 혼돈의 역사를 다룬 대중서이다.

우리가 배운 것

우리는 어떤 것들은 결코 변하지 않으며, 그것이 무엇인지 아는 것이 물리학의 절반이라는 말로 시작했다. 그리고 세 가지 질문을 던졌다. 보존 법칙(conservation laws)만으로 무엇을 결정할 수 있는가, 작은 단계들은 어떻게 쌓이는가, 그리고 많은 물체를 어떻게 다룰 것인가. 이 장의 여덟 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 보존 법칙만으로 무엇을 결정할 수 있는가?

두 물체가 일직선 위에서 탄성 충돌(elastic collision)할 때에는 운동량(momentum)과 에너지가 결과를 완전히 결정하며, 우리는 이 하나의 결과를 거듭 사용했다. 그러나 물체가 더 많으면 그렇지 않다. Section 10.1에서 한 줄로 늘어선 구슬들은 두 법칙을 모두 만족하는 결과를 여러 개 가졌고, 그중 일부를 배제하려면 또 하나의 물리적 사실(구슬은 서로를 통과할 수 없다)이 필요했다. 운동량의 제곱에서 에너지를 빼면 반드시 0이 되어야 하는 교차항들의 합이 나왔고, 이 부등식(inequality) 논증으로 어떤 운동은 불가능함을 증명했다. 그리고 뉴턴(Newton)의 요람이 보이는 익숙한 움직임은 보존 법칙 너머의 세부 사항, 즉 충격이 공들을 따라 어떻게 전달되는가에 달려 있음이 드러났다.

보존 법칙은 숨은 가정을 드러내기도 했다. Section 10.3에서 대포를 한꺼번에 쏘는 쪽이 하나씩 쏘는 쪽보다 더 빠른 속력을 냈지만, 이는 오직 더 많은 에너지를 썼기 때문이었다. 올바른 양을 고정하자 결론이 뒤집혔다.

2. 작은 단계들은 어떻게 쌓이는가?

여러 절에서 하나의 간단한 단계를 되풀이했다. Section 10.2에서는 속력을 기껏해야 두 배로 만드는 충돌이, 점점 더 가벼워지는 공들의 사슬을 거치며 한없는 이득이 되었다. 이것이 농구공과 테니스공 실험, 그리고 중력 새총의 원리이다. Section 10.3에서는 수많은 작은 발사가 적분(integral)이 되었고, 그로부터 치올콥스키(Tsiolkovsky)의 로그가 나왔다. 이 로그는 로켓이 대부분 연료로 이루어진 까닭과 로켓에 단이 있는 까닭을 설명한다. Section 10.4에서는 움직이는 피스톤에 한 번 튕길 때마다 분자의 속력이 $2u$씩 늘었고, 정확한 점화식(recurrence)으로부터 속력과 길이의 곱이 거의 일정하게 유지됨이 드러났다. 이것이 단열 불변량(adiabatic invariant)이며, 압축된 기체가 뜨거워지는 이유이다. 그리고 Section 10.5에서는 무한히 많은 튕김이 유한한 시간 안에 일어났는데, 그 시간들이 수렴하는 등비급수(convergent geometric series)를 이루었기 때문이다.

3. 많은 물체를 어떻게 다룰 것인가?

좌표를 잘 고르고 대칭(symmetry)을 활용하면 된다. Section 10.6에서 질량 중심(centre of mass)은 등속으로 움직였고, 두 물체 사이의 변위는 환산 질량(reduced mass)을 가진 하나의 입자처럼 행동했다. 숨은 평면 하나가 변위의 제곱이 시간에 대한 이차식인 이유까지 설명해 주었다. Section 10.7에서는 대칭과 적분을 써서 구 껍질(spherical shell)이 내부에는 아무런 중력도 미치지 않고 외부에는 점질량처럼 작용함을 보였다. 덕분에 붕괴하는 먼지 구름을 하나의 방정식으로 다룰 수 있었고, 그로부터 별이 형성되는 속도를 정하는 자유 낙하 시간(free-fall time)을 얻었다. 그리고 Section 10.8에서는 대칭적인 추측 하나로 풀 수 없는 삼체 문제(three-body problem)의 특수한 경우를 풀었다. 이것이 라그랑주(Lagrange)의 회전하는 삼각형이며, 트로이 소행성군(Trojan asteroids)에서 실제로 나타난다.

4. 역학의 도구 상자

방법	사용한 곳
제약 조건으로서의 보존 법칙	뉴턴의 요람 (10.1)
기준계(frame) 바꾸기	충돌 (10.2); 피스톤 (10.4)
하나의 결과를 반복 적용하기	쌓아 올린 공 (10.2)
질량이 변하는 경우의 운동량	로켓 (10.3)
합에서 적분으로	로켓 방정식 (10.3); 구 껍질 (10.7)
점화식과 망원 합(telescoping)	피스톤 (10.4)
등비급수	쐐기 (10.5)
질량 중심과 환산 질량	두 물체 (10.6)
에너지 적분 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$	두 물체 (10.6); 붕괴 (10.7)
대칭적인 추측	세 별 (10.8)

다음으로

- 제11장에서는 보존에서 진동과 회전으로 넘어간다. 공명(resonance), 정규 모드(normal modes), 실제 진자, 그리고 가속하거나 회전하는 기준계에서의 운동을 다룬다.
- Section 8.2의 에너지 방법과 Section 8.4의 극한 순환(limit cycles)은 같은 아이디어를 미분방정식 쪽에서 본 것이다.
- 푸앵카레(Poincaré)가 삼체 문제에서 발견한 혼돈(chaos)은 Section 8.7의 주제이다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***: 대학 1학년 교재의 고전으로, 어렵지만 그만한 보람이 있다.
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***: 수백 개의 문제가 실려 있으며, 그중 상당수는 이 장의 문제들만큼이나 놀랍다.
- **Richard Feynman, *The Character of Physical Law***: 보존 법칙, 대칭, 중력에 관한 일반인 대상 강연집(『물리법칙의 특성』).
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***: 대칭이 왜 보존을 함의하는지 설명한다.

파인만(Feynman)은 에너지 보존에 대해 알려진 예외가 하나도 없다고 말했다. 이 장에서는 보존 법칙이 얼마나 많은 일을 할 수 있는지 보이고자 했다. 불가능한 결과를 배제하고, 숨은 불변량을 드러내고, 손쓸 수 없을 만큼 복잡한 계를 이해할 수 있는 계로 바꾸어 준다. 그러나 이 장은 그 한계도 보여 주었다. 보존 법칙은 제약을 가하지만 언제나 결과를 결정하지는 않는다. 보존 법칙이 멈추는 곳에서는 힘, 대칭, 기준계의 세부 사항이 그 뒤를 이어받아야 한다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 먼저 제대로 풀어 보아라.

10.1 뉴턴의 요람

1. 모든 충돌(collision)이 끝난 뒤에는 움직이는 입자 뒤를 더 느린 입자가 따라갈 수 없다. 따라서 정확히 하나만 움직인다면 그것은 A_n이고, $\lambda m v = m u$, $\lambda m v^2 = m u^2$는 $\lambda \neq 1$일 때 서로 모순이다. A_{n-1}과 A_n만 움직인다면 방정식은 m과 λm 사이의 충돌 방정식이 되고, 이로부터 A_{n-1}의 속도는 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u < 0$이다. 그러나 그러면 이 입자는 A_{n-2}와 부딪치게 된다. 세 입자가 움직이는 경우는 소문항 (ii)와 똑같은 방법으로 배제된다. 움직이는 두 입자는 뒤쪽으로 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$로 움직이는 A_0과, 앞쪽으로 $\frac{2u}{\lambda+1}$로 움직이는 A_n이다.

2. 질량이 같은 구슬끼리는 속도를 서로 맞바꾸므로 속력 u는 A_n까지 전달된다. 그다음 A_n이 A_{n+1}과 부딪친다. A_{n+1}은 $\frac{2u}{1+\lambda}$로 떠나고 A_n은 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$로 튕겨 나온다. 이 뒤쪽 방향의 속도는 줄을 따라 다시 A_0까지 전달되고, 이 구슬은 그 속력으로 뒤쪽으로 떠난다.

3. "두 개가 u로 튀어 나가는" 경우는 운동량(momentum) $2mu$와 에너지 mu^2를 가지며, 이는 처음과 같다. 더 이상의 충돌이 없는 또 다른 해도 있다. 마지막 세 공이 $\frac{u}{3}$, $\frac{u}{3}$, $\frac{4u}{3}$로 움직여 나가는 것이다(확인: 합계 $2u$, 제곱의 합 $2u^2$). 실제 요람 장치가 첫 번째 해를 택하는 것은 공들이 완전히 맞닿아 있지 않아서 충돌이 한 번에 한 쌍씩 일어나기 때문이다.

4. 속력은 A_n까지 전달되고, 이 구슬이 더 가벼운 A_{n+1}과 부딪친다. A_{n+1}은 $\frac{2u}{1+\lambda}$로 떠나고 A_n은 그보다 느린 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u$로 뒤따른다. 다른 것은 움직이지 않는다.

10.2 포갠 공 효과

1. 공은 $U = \sqrt{2gH}$의 속력으로 바닥에 닿고 eU로 튀어 올라 e^2H만큼 올라간다. 작은 공을 위에 올리면, eU로 올라가는 큰 공이 U로 내려오는 작은 공과 만난다. 운동량과 반발 법칙(restitution)으로부터 작은 공의 위쪽 속력은 $w = U\frac{Me(2+e)-m}{M+m}$이다. 작은 공의 중심은 $2R + r = 0.45$에서 출발하여 4.5까지 올라가므로 $\frac{w^2}{2g} = 4.05$이고

$\frac{w}{U} = \sqrt{\frac{4.05}{1.8}} = 1.5$이다. $e = \frac{2}{3}$이면 $\frac{16}{9}M - m = 1.5(M+m)$이므로 $M = 9m$이다.

2. 운동량과 반발 법칙으로부터 P_1의 속력은 $\frac{1+e}{1+\lambda}u$이다. 각 충돌은 같은 질량비로 이를 되풀이하므로 P_n은 $\left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u$로 움직인다. 속력이 s인 입자는 다음 입자와 충돌한 뒤 $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda}s$의 속력이 남고, 다음 입자는 그 자신의 다음 충돌로 $\frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}s$로 느려진다. $\lambda e < 1$일 때 첫 번째 입자가 두 번째 입자를 다시 따라잡는 것은 $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda} > \frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}$, 즉 $\lambda > e$일 때뿐이다. 따라서 $e > \lambda$이면 각 입자는 한 번 맞고 한 번 친다. $\lambda e = 1$이면 각 입자는 다음 입자와 충돌한 뒤 그 자리에 멈춘다.

3. 맨 아래 공은 U로 튀어 올라 (U로 내려오는) 가운데 공과 만난다. 상대 속력이 $2U$이므로 가운데 공은 $3U$로 떠난다. 맨 위 공은 상대 속력 $4U$로 이 공과 만나 $7U$로 떠나며, $49H$만큼 올라간다. 일반적으로 $u_{j+1} = 2u_j + U$이므로 $u_j + U = 2^j U$이다.

4. 탄성 충돌(elastic collision)은 운동에너지(kinetic energy)를 보존한다. A의 에너지는 $\frac{1}{2}m\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^{2n}u^2$이고 처음 에너지는 $\frac{1}{2}\lambda^n m u^2$이며, $\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} < 1$이므로 A는 원래 있던 것보다 더 많이 가져가지 않는다. 무거운 입자들은 각자 자기 속력의 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$만큼을 유지하며 계속 앞으로 움직이고, 나머지 에너지를 간직한다.

10.3 로켓과 대포

1. 한꺼번에 쏘면 $Mu = nm(v-u)$이므로 $u = \frac{nmv}{M+nm}$이다. 하나씩 쏘면 r번째 발사에서 $\big(M+(n-r+1)m\big)(u_r - u_{r-1}) = mv$이므로 $u_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{mv}{M+jm}$이고, 마지막 항을 제외한 모든 항이 $\frac{mv}{M+nm}$보다 크다. 따라서 $u_n > u$이다.

2. 운동량: $M(1+bx)v = MV$. 따라서 $(1+bx)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V$이므로 $x + \frac{1}{2}bx^2 = Vt$이고 $x = \frac{\sqrt{1+2bVt}-1}{b}$이다. 힘이 작용하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(M(1+bx)v\big) = Mf$로부터 $(1+bx)v = ft + V$를 얻는다. 속력이 일정한 값 c이려면 $x = ct$이고 $(1+bct)c = ft + V$이어야 하므로 $c = V$, $bV^2 = f$이다. 그렇지 않으면 $x + \frac{1}{2}bx^2 = \frac{1}{2}ft^2 + Vt$이므로 $x \sim t\sqrt{f/b}$이고 $v \to \sqrt{f/b}$이다.

3. 1단 로켓: $v\ln 10 \approx 2.30v$. 2단 로켓: $v\ln\frac{10}{5.5} + v\ln\frac{5}{0.5} \approx 0.60v + 2.30v = 2.90v$.

4. $0 \le s \le x$일 때 $\frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+s} \le 1$이다. 이를 $[0,x]$에서 적분(integrate)하면 된다.

10.4 분자 하나와 피스톤

1. 점화식(recurrence)은 연쇄적으로 소거되어 $d_n = \frac{(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$이 되므로 $v_n d_n = \frac{(v+2nu)(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$이고, 이는 $(v+u)d_1$보다 $\frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u} \to 0$만큼 크다.

2. u를 $-u$로 바꾼다. 물러나는 피스톤에서 한 번 튕길 때마다 $2u$를 잃으므로 (입자가 아직 피스톤을 따라잡을 수 있는 동안) $v_n = v - 2nu$이고, $d_n = \frac{(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$, $v_n d_n = \frac{(v-2nu)(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$이며, 이번에도 $(v-u)d_1$에 가깝다.

3. $v = u$이면 $v_n = (2n+1)u$이다. n번째 충돌에서 운동량은 $m(v_{n-1} + v_n) = 4nmu$만큼 변하고 $t_n = \frac{d_1}{un(n+1)}$이므로 평균 힘은 $\frac{4mu^2n^2(n+1)}{d_1}$로, n^3 정도의 크기이다. 각 주기에서 한 일은 대략 힘 $\times$ ut_n, 곧 약 $4nmu^2$이고, 이들을 모두 더하면 무한대가 된다. 피스톤을 끝까지 밀어 넣으려면 무한한 일이 필요하며, 이는 분자의 에너지 $\frac{1}{2}m(2n+1)^2u^2$이 한없이 커지는 것과 같다.

4. 불변량(invariant)은 $\oint p\,\mathrm{d}q = 2\int_0^h m\sqrt{2g(h-z)}\,\mathrm{d}z \propto h^{3/2}$이고, 여기서 h는 바닥으로부터 튀어 오르는 높이이다. 따라서 바닥이 천천히 올라갈 때 $h^{3/2}$(동치로 v^3, 또는 에너지와 주기의 곱)은 거의 일정하게 유지된다.

10.5 유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기

1. 사인 법칙(sine rule)에 의해 $M_1N_1 = \frac{OM_1 \sin 30^\circ}{\sin\theta}$이고, 이어지는 구간은 $\rho = \frac{\sin(\theta-30^\circ)}{\sin\theta} < 1$의 비율로 줄어든다. 전체 길이는 $\frac{M_1N_1}{1-\rho} = \frac{OM_1}{2\big(\sin\theta - \sin(\theta-30^\circ)\big)} = \frac{OM_1}{4\sin 15^\circ \cos(\theta-15^\circ)}$이다.

2. 삼각형 OM_1N_1의 각으로부터 $\varphi = \theta - \alpha$이다. 시간의 비는 $\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta-2\alpha)}{\sin 2\theta}$이고, 이 값은 정확히 $\alpha < \theta < 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$일 때 1보다 작다.

3. 쐐기를 그 벽에 대하여 반사시키면 경로가 펼쳐져 직선이 된다. 쐐기 열두 개가 O 둘레에 꼭 맞게 들어가고, O를 지나지 않는 직선은 그중 많아야 여섯 개를 가로지른다. 따라서 입자를 O 쪽으로 정확히 겨냥하지 않는 한, 입자는 유한 번만 튕긴 뒤 빠져나간다.

4. 공은 먼저 $t_0 = \sqrt{2/9.8} \approx 0.452\,\mathrm{s}$ 동안 떨어진다. 각 튀어 오름은 $2e^k t_0$ 동안 지속되므로 전체 시간은 $t_0\big(1 + \frac{2e}{1-e}\big) = 9t_0 \approx 4.07\,\mathrm{s}$이다. 이동 거리는 $1 + 2\sum_{k\ge1} e^{2k} = 1 + \frac{2(0.64)}{0.36} \approx 4.56\,\mathrm{m}$이다.

10.6 두 물체가 하나가 되다

1. 줄은 팽팽하게 유지되고 상대 속도는 줄에 수직이며 크기가 u로 일정하므로 $\theta = \frac{ut}{r}$이다. 운동량으로부터 $my + MY = mut$이다. $A = G - \frac{M}{m+M}\overrightarrow{AB}$이고 $\overrightarrow{AB} = r(\cos\theta, -\sin\theta)$이므로 $y = \frac{1}{m+M}\big(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\big)$이다. 그러면 $\dot y = \frac{u}{m+M}\big(m + M\cos\frac{ut}{r}\big)$이고, 이는 $\cos\frac{ut}{r} < -\frac{m}{M}$일 때 음수이며, 이런 일은 $M > m$이면 일어날 수 있다.

2. 이제 $\ddot z = -\frac{3}{z^3}$이므로 ($z = 1, \dot z = -1$을 이용하면) $\dot z^2 = \frac{3}{z^2} - 2$이다. $w = z^2$이라 하면 $\ddot w = 2\dot z^2 + 2z\ddot z = -4$이므로 $z^2 = 1 - 2t - 2t^2$이다. 두 물체는 $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$일 때 충돌한다.

3. $\mathbf{p} = (1,0)$, $\mathbf{q} = (-1, \sqrt{3})$이라 하면 $z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = |\mathbf{p} + \mathbf{q}t|^2$이다. 즉 $(1,0)$을 지나고 방향이 $(-1,\sqrt{3})$인 직선이며, $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}t}{1-t}$이다. 그러면 $z^2\dot\theta = |\mathbf{p}\times\mathbf{q}| = \sqrt{3}$이

다. 이 척력은 각운동량(angular momentum)이 $h = \sqrt{3}$인 평면 위 자유 운동의 "원심(centrifugal)" 항 $\frac{h^2}{z^3}$과 정확히 같다.

4. 두 별은 질량중심(centre of mass)으로부터 각각 $\frac{m_2 a}{m_1+m_2}$와 $\frac{m_1 a}{m_1+m_2}$만큼 떨어져 있다. 첫 번째 별에 대해 $\frac{G m_1 m_2}{a^2} = m_1 \omega^2 \frac{m_2 a}{m_1+m_2}$이므로 $\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}$이고 $T = \frac{2\pi}{\omega}$이다.

10.7 구 껍질 안의 중력

1. 바깥($b > a$)에서는 3단계와 같은 적분이 s에 대해 $b-a$에서 $b+a$까지 이루어지며, 그 결과는 $\frac{GM}{b^2}$이다. 속이 찬 구는 동심 구껍질들의 합집합이고, 각 껍질은 질량이 중심에 모여 있는 것처럼 작용한다.

2. $r = R\cos^2\alpha$라 하면 $\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{\tan^2\alpha}{R}$이므로 속력은 $\sqrt{2GM/R}\tan\alpha$이다. 그러면 $\mathrm{d}t = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2GM/R}\tan\alpha} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\,2\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$이다. 이를 적분한다.

3. (껍질 정리(shell theorem)에 의해) 반지름 b 안쪽의 질량, 즉 $M\frac{b^3}{a^3}$만 끌어당기므로 $\frac{GMb}{a^3}$을 얻는다. 이는 $\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$인 단진동(simple harmonic motion)이며, $a = 6.37\times10^6\,\mathrm{m}$, $GM = 3.99\times10^{14}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}}$일 때 주기는 $2\pi\sqrt{a^3/GM} \approx 84$분이다. 반지름 a에 있는 인공위성은 $\omega^2 a = \frac{GM}{a^2}$이므로 같은 ω를 가진다.

4. 그렇지 않다. $\frac{1}{s^3}$이면 피적분 함수가 더 이상 상수로 간단해지지 않고, 껍질의 가까운 쪽이 이긴다. 즉 입자는 껍질의 가장 가까운 부분 쪽으로 끌려간다. 역제곱 법칙(inverse-square law)만이 정확한 상쇄를 준다(껍질 조각의 넓이가 s^2처럼 커져서 힘의 감소를 정확히 상쇄한다).

10.8 삼각형을 이룬 세 별

1. 각 별은 중심에서 $\frac{a}{\sqrt{2}}$만큼 떨어져 있다. 이웃한 두 별은 중심 쪽으로 합계 성분 $\frac{2\gamma m^2}{a^2}\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}\gamma m^2}{a^2}$으로 끌어당기고, 맞은편 별은 $\frac{\gamma m^2}{2a^2}$으로 끌어당긴다. $\frac{\gamma m^2}{a^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = m\omega^2\frac{a}{\sqrt{2}}$로 놓으면 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$이다.

2. 중심에서는 인력들이 상쇄되므로 행성은 평형(equilibrium) 상태에 있다. 별들을 잇는 직선을 따라서는 불안정(unstable)하다. 한 별 쪽으로 거리 x만큼 움직이면 바깥쪽으로 약 $\frac{32\gamma M x}{a^3}$의 알짜힘이 생긴다. 궤도면에 수직인 방향으로는 안정(stable)하며, 복원력은 약 $\frac{16\gamma M z}{a^3}$이다. (궤도면 안에서 그 직선에 수직인 방향으로는 중력이 복원력으로 작용하지만, 회전 때문에 이 운동이 불안정한 방향과 결합된다.)

3. m_1에 작용하는 힘은 $\frac{\gamma m_1}{a^3}\big(m_2(P_2-P_1)+m_3(P_3-P_1)\big)$이다. $m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3 = (m_1+m_2+m_3)G$이므로 이 힘은 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}(G-P_1)$이다. 모든 별이 같은 상수로, G로부터의 거리에 비례하여 G 쪽으로 끌리므로, 모두가 $\omega^2 = \frac{\gamma(m_1+m_2+m_3)}{a^3}$으로 강체처럼 회전할 수 있다.

4. k칸 떨어진 별까지의 거리는 $2R\sin\frac{k\pi}{n}$이고, 그 인력은 중심 쪽으로 $\sin\frac{k\pi}{n}$의 비율만큼 성분을 가진다. 따라서 $m\omega^2 R = \frac{\gamma m^2}{4R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$이므로 $\omega^2 = \frac{\gamma m}{4R^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$이다. $n=3, R=\frac{a}{\sqrt{3}}$이면 이 값은 $\frac{3\gamma m}{a^3}$이다.

장

11

진동, 회전, 움직이는 기준틀

흔들리는 것, 도는 것, 그리고 움직이는 곳에서 바라본 것.

이 장의 내용

11.1	공명	STEP II 1991
11.2	기준 진동	STEP III 2014
11.3	실제 진자	STEP III 1998
11.4	등시 곡선	STEP III 1994
11.5	가속하는 기차 안의 중력	STEP II 2021
11.6	백스핀	STEP III 1997
11.7	막대 속의 심프슨 공식	STEP II 1989
11.8	기울어진 평형	STEP III 2025
11.9	안전 포물선	STEP II 2014
11.10	나에게로 되돌아오는 공	STEP II 2019
11.11	야수는 어떻게 공을 잡는가	STEP II 1998
11.12	고무줄 위의 개미	STEP II 2018
11.13	제설차 문제	STEP III 견본 시험지(Specimen paper)
11.14	현수선이 아니라 포물선	STEP I 1991
A	연습문제 해답	831쪽

운동을 또렷하게 보기

> 젊은 이론물리학자의 경력이란 조화 진동자를 점점 더 높은 수준의 추상화로 다루어 가는 과정이다.
>
> — Sidney Coleman의 말로 전해짐

앞 장에서는 보존 법칙(conservation law)을 이용해 충돌과 중력을 이해했다. 이 장에서는 역학 입문 과정의 또 다른 큰 주제들로 넘어간다. 진동(oscillation)하는 것, 회전(rotation)하는 것, 그리고 가장 쓸모 있는 관점에서 운동을 기술하는 기술이 그것이다.

진동은 어디에나 있다. 진자와 용수철이 교과서의 대표적인 예이지만, 똑같은 수학이 분자의 진동, 건물의 흔들림, 라디오 속 회로, 그리고 양자역학(quantum mechanics)에서는 빛 자체의 거동까지 기술한다. 그 까닭은 안정한 평형(equilibrium) 근처에 있는 거의 모든 것이 용수철처럼 행동하기 때문이다. 조금만 잡아당기면 복원력(restoring force)이 변위(displacement)에 비례한다. 그래서 단순 조화 진동자(simple harmonic oscillator)는 거의 모든 물리계의 첫 번째 근사이며, 물리학의 상당 부분은 이 근사가 딱 들어맞지 않을 때 어떤 일이 일어나는지를 이해하는 일이다.

왜 중요한가

공학자는 자신이 짓는 모든 구조물의 고유 진동수(natural frequency)를 알아야 하며, 그래야 그것을 바람, 교통, 지진의 진동수로부터 멀리 떨어뜨려 놓을 수 있다. 화학자는 분자를 그 진동으로 식별한다. 하위헌스(Huygens)의 진자시계에서 쿼츠 시계와 원자시계에 이르기까지, 시간 측정이란 완벽한 진동자를 만드는 기술이다. 회전은 당구공의 회전에서 인공위성의 안정성까지 모든 것을 지배한다. 그리고 어떤 기준틀(frame of reference)이 "자연스러운가"라는 질문은 중력과 가속도의 동등성을 거쳐 아인슈타인(Einstein)의 일반 상대성 이론(general relativity)으로 이어졌다.

이 장은 **뜻밖의 궤적**으로 묶은 여섯 문제로 끝난다. 직관이 예측하는 것과 다르게 움직이는 포물체, 개미, 야수, 제설차에 관한 문제들이다. 모두 짧고 우아한 문제이며, 각각의 중심에는 제대로 된 수학적 아이디어가 있다. 포락선(envelope), 단조성(monotonicity), 되먹임(feedback), 발산(divergence), 선형 미분방정식(linear differential equation), 그리고 포물선(parabola)과 현수선(catenary)의 차이가 그것이다.

대학에서 만나게 될 것

대학 1학년 역학 과정에서는 단순 조화 운동, 감쇠(damped) 조화 운동, 강제(forced) 조화 운동, 공명(resonance), 그리고 연성 진동자(coupled oscillators)와 그 기준 진동 모드(normal modes)를 다룬다(선형대수와 역학이 만나는 지점이다). 또한 강체(rigid body), 관성 모멘트(moment of inertia), 굴림 운동(rolling), 그리고 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)이 등장하는 가속 기준틀과 회전 기준틀에서의 운동을 다룬다. 이후의 과정에서는 이 모든 것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)과 해밀턴 역학(Hamiltonian mechanics)으로 발전하는데, 여기서는 좌표의 선택이 핵심 주제가 된다. 또 공간으로 퍼져 나간 진동인 파동(wave)의 이론으로도 발전한다. 진폭이 큰 진자와 같은 비선형 진동(nonlinear oscillation)은 타원 함수(elliptic function)와 8장의 동역학계(dynamical system)로 이어진다.

이 장을 관통하는 질문

세 가지 큰 질문

1. **운동은 언제 단순한가?** 계는 언제 하나의 고정된 진동수로 진동하며, 그렇지 않을 때는 어떤 일이 일어나는가?
2. **올바른 관점은 무엇인가?** 어떤 좌표, 어떤 변수, 어떤 기준틀을 택해야 문제가 쉬워지는가?
3. **직관을 믿을 수 있는가?** 운동에 관한 일상의 직관은 어디에서 틀리며, 수학은 그것을 어떻게 바로잡는가?

이 장은 진동에서 시작한다. 공명(Section 11.1), 기준 진동 모드, 실제 진자, 그리고 등시곡선(tautochrone)이다. 그다음 기준틀과 강체로 넘어간다. 가속하는 기차, 회전하는 구슬, 세 개의 입자처럼 행동하는 막대, 그리고 세 가지 서로 다른 기울기로 놓일 수 있는 입체가 등장한다. 마지막 여섯 절은 뜻밖의 궤적이다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
11.1	강제 진동	공명과 맥놀이(beats)
11.2	연성 진동자	기준 진동 모드는 고유벡터(eigenvector)이다
11.3	실제 진자	타원 적분(elliptic integral); 산술기하평균(AGM)
11.4	등시곡선	호의 길이(arc length)에 대한 단순 조화 운동
11.5	움직이는 기준틀	가상력(fictitious force); 등가 원리(equivalence principle)
11.6	굴림과 미끄러짐	보존되는 각운동량(angular momentum)
11.7	관성 모멘트	동역학적 동등성; 심프슨 공식(Simpson's rule)
11.8	안정성	질량중심(centre of mass)을 지나는 법선
11.9	포물체 운동	궤적들의 포락선
11.10	포물체 운동	거리가 꼭 증가하는 것은 아니다
11.11	공 잡기	되먹임 규칙
11.12	늘어나는 밧줄	비율과 조화급수(harmonic series)
11.13	제설차	거리의 함수로서의 시간
11.14	현수교	현수선이 아니라 포물선

Section 11.6과 Section 11.7의 두 절은 회전 동역학과 관성 모멘트를 사용하는데, 이 내용은 2019년에 STEP 출제 범위(specification)에서 빠졌다. 그래도 훌륭한 문제이기에 실었으며, 각 절에서 필요한 사실은 모두 제시한다.

이 장을 읽는 법

계산을 시작하기 전에 먼저 문제가 어떤 변수를 원하는지 물어보라. 등시곡선에서는 호의 길이, 연결된 용수철에서는 $x \pm y$, 개미 문제에서는 밧줄에 대한 비율, 제설차 문제에서는 거리의 함수로서의 시간이다. 어느 경우에나 올바른 선택이 어려운 문제를 익숙한 문제로 바꾸어 준다.

11.1 공명

문제

STEP II 1991, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/91-s2-q12`

도입

그네 탄 아이를 딱 알맞은 순간마다 밀어 주면 작은 힘이 쌓여 그네가 크게 흔들린다. 박자가 어긋나게 밀면 별일이 일어나지 않는다. 진동하는 계에는 모두 **고유진동수**(natural frequency)가 있고, 바로 그 진동수로 힘을 가하면 들인 노력에 비해 엄청나게 큰 반응이 나온다. 이것이 **공명**(resonance)이다. 가수가 와인 잔을 깨뜨릴 수 있는 것도, 군인들이 다리를 건널 때 발을 맞추지 않는 것도, 라디오가 수천 개의 방송국 가운데 하나를 골라낼 수 있는 것도 모두 공명 때문이다.

이 문제는 탄성 끈(elastic string)의 위쪽 끝을 흔들고, 끈이 언제 팽팽한(taut) 상태를 유지하는지 묻는다. 답에는 인수 $\frac{1}{n-p}$가 들어 있는데, 이 값은 구동 진동수 p가 고유진동수 n에 가까워질수록 한없이 커진다. 공명 근처에서는 살짝만 흔들어도 끈이 느슨해진다(slack).

시작하기 전에

생각해 보기 입자는 늘어난 길이(extension)가 c인 상태로 평형(equilibrium)을 이루며 매달려 있다. 끈의 탄성계수(modulus)가 λ이면 λ, a, c, m, g 사이에는 어떤 관계가 있는가? 위쪽 끝이 $b\sin pt$만큼, 입자가 x만큼 아래로 움직였을 때 늘어난 길이는 얼마인가?

평형 상태에서는 장력(tension)과 무게가 같으므로 $\frac{\lambda c}{a} = mg$이다. 위쪽 끝이 $b\sin pt$만큼, 입자가 x만큼 아래로 변위되면 끈의 길이는 $x - b\sin pt$만큼 늘어나므로, 늘어난 길이는 $c + x - b\sin pt$이다.

차근차근 풀기

1단계 운동 방정식

아래쪽을 양의 방향으로 잡으면, 입자에 작용하는 힘은 무게 mg와 위쪽으로 작용하는 장력 $\frac{\lambda}{a}(c+x-b\sin pt)$이다.

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{a}(c+x-b\sin pt) = -\frac{\lambda}{a}(x-b\sin pt),$$

여기서 $\frac{\lambda c}{a} = mg$를 이용하였다. $\frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2$이므로 이 식은 $\ddot{x} = -n^2(x-b\sin pt)$가 된다. ■

입자는 움직이는 점 $b\sin pt$ 쪽으로 용수철 같은 힘을 받는다. 구동이 없다면 입자는 각진동수(angular frequency) n, 즉 고유진동수로 진동할 것이다.

2단계 방정식 풀기

> ? **생각해 보기** 방정식은 $\ddot{x}+n^2x = n^2b\sin pt$이다. $x = C\sin pt$ 꼴의 특수해(particular solution)를 시도해 보자. 그런 다음 $\ddot{x}+n^2x=0$의 일반해(general solution)를 더한다. 입자는 어떤 초기조건(initial conditions)을 만족하는가?

$x = C\sin pt$를 대입하면 $(-p^2+n^2)C = n^2b$이므로 $C = \frac{n^2b}{n^2-p^2}$이다($p \neq n$이어야 한다). 여함수(complementary function)는 $D\cos nt + E\sin nt$이다. 입자는 평형 위치에서 정지 상태로 출발한다. $x(0)=0$에서 $D=0$이고, $\dot{x}(0)=0$에서 $Cp+En=0$이므로 $E = -\frac{nbp}{n^2-p^2}$이다. 이를 모두 합치면

$$x(t) = \frac{bn}{n^2-p^2}(n\sin pt - p\sin nt). \quad ■$$

3단계 팽팽함 유지하기

> ? **생각해 보기** 끈은 늘어난 길이가 양수일 때 정확히 팽팽하다. 늘어난 길이 $c+x-b\sin pt$를 t로 나타내어 보자.

$x(t)$에서 $b\sin pt$를 빼면

$$\begin{aligned} x - b\sin pt &= \frac{b}{n^2-p^2}\left(n^2\sin pt - np\sin nt - (n^2-p^2)\sin pt\right) \\ &= \frac{bp}{n^2-p^2}(p\sin pt - n\sin nt). \end{aligned}$$

따라서 끈이 줄곧 팽팽함을 유지할 필요충분조건은

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \qquad \text{모든} t \geq 0.$$

에 대하여 성립하는 것이다.

> **생각해 보기** $p \sin pt - n \sin nt$는 최대한 얼마나 작은 음수가 될 수 있는가?

$|\sin| \leq 1$이므로 $p \sin pt - n \sin nt \geq -(p+n)$이다. 따라서 늘어난 길이는 적어도

$$c - \frac{bp(n+p)}{n^2 - p^2} = c - \frac{bp}{n-p},$$

이고, 이 값은 $pb < (n-p)c$이면 양수이다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** p가 n에 가까워지면 이 조건은 어떻게 되는가? $p = 0.9n$일 때 흔드는 진폭 b는 얼마나 작아야 하는가? $p = 0.99n$일 때는?

돌아보기

- **평형 위치에서부터 잰다.** 평형 상태의 늘어난 길이 c를 이용하여 방정식에서 중력을 없앴다.
- **특수해와 여함수의 합.** 진동수 p의 강제 응답에 진동수 n의 자유 진동을 더하고, 상수는 초기조건으로 정했다.
- **풀지 말고 어림하라.** 늘어난 길이의 최솟값을 정확히 구하지 않았다. 사인에 대한 거친 어림만으로도 충분조건(sufficient condition)을 얻기에 충분했다.

숨은 수학

공명 극한

해에서 $p \to n$으로 보내 보자. 분자와 분모가 모두 0으로 수렴하는데, 극한 계산(또는 p에 대하여 미분하는 로피탈(l'Hôpital)의 정리)을 하면

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt \cos nt).$$

을 얻는다. 항 $nt \cos nt$는 한없이 커진다. 정확히 고유진동수로 구동하면 매번 미는 힘이 운동과 박자를 맞추어 더해지므로 진폭이 시간에 대해 선형으로 증가한다. 공명보다 조금 아래에서는 두 진동수가 박자가 맞았다 어긋났다 하면서 **맥놀이**(beats)가 생긴다. 진폭이 느

린 진동수 $n - p$로 커졌다 잦아들기를 반복하는 것이다(그림 11.1.1). 거의 같은 음으로 조율된 두 기타 줄에서도 같은 맥놀이가 들린다.

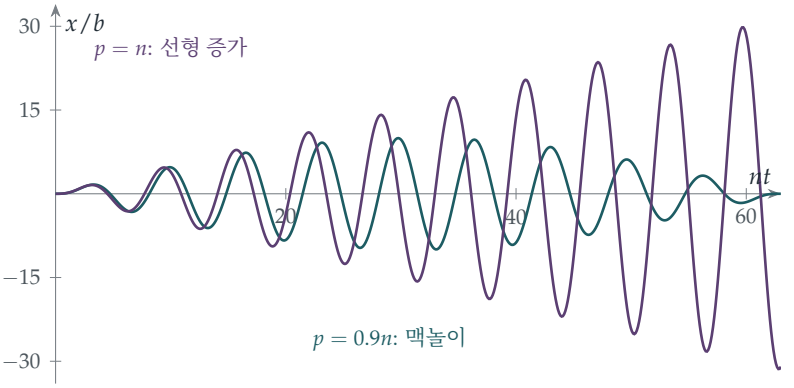


그림 11.1.1 입자의 응답(끈이 느슨해지는 것은 무시함)을 흔드는 진폭 b를 단위로 나타낸 그래프. $p = 0.9n$일 때(청록색) 응답은 b의 약 10배까지 커졌다가 다시 잦아들며, 맥놀이 주기는 $\frac{2\pi}{n-p}$이다. 정확한 공명 상태인 $p = n$일 때(자주색) 진폭은 한없이 커진다.

감쇠와 공명 곡선

실제 계는 마찰이나 공기 저항으로 에너지를 잃고, 이 때문에 진폭의 증가가 제한된다. 감쇠(damping)가 있으면 진동수 p의 구동력에 대한 정상 상태(steady-state) 응답의 진폭은 고유진동수 근처에서 최대가 된다. 봉우리가 뾰족할수록 감쇠가 작다. 공학자들은 이를 **품질 계수**(quality factor) Q로 나타낸다. 대략 말하면, 계가 에너지의 대부분을 잃기 전까지 진동하는 횟수이다. 와인 잔의 Q는 수천에 이르므로, 정확히 고유진동수의 음을 지속해서 내면 잔이 깨질 수 있다. 자동차의 서스펜션은 일부러 Q를 낮게 만들어 요철을 지나도 차가 계속 튀지 않게 한다.

움직이는 다리

1831년, 맨체스터 근처의 브로턴 현수교(Broughton Suspension Bridge)를 발맞추어 행진하던 군인들의 대열이 다리를 진동시켜 결국 무너뜨렸다. 그 뒤로 군대는 다리 위에서 발을 맞추지 말라는 명령을 받게 되었다. 2000년 6월에 개통한 런던 밀레니엄 브리지(Millennium Bridge)는 사람들이 건너자마자 옆으로 흔들리기 시작했다. 보행자들이 무의식적으로 흔들림에 발걸음을 맞추어 박자에 맞게 에너지를 공급했기 때문이며, 다리는 감쇠 장치를 설치하는 2년 동안 폐쇄되었다. 1940년의 유명한 타코마 내로스 다리(Tacoma Narrows Bridge) 붕괴는 흔히 공명으로 설명되지만, 실제로는 바람의 힘이 다리 자체의 운동에 따라 달라지는 다른 현상인 **공기탄성 플러터**(aeroelastic flutter)였다. 이를 분석하려면 자려 진동(self-excited oscillation)과 리밋 사이클(limit cycle)의 개념이

필요하다(Section 8.4).

사고 기술

강제 응답과 자유 응답을 중첩하라

주기적인 힘으로 구동되는 선형 방정식의 해는 구동 진동수의 응답에, 초기조건에 맞게 고른 고유진동수의 자유 진동을 더한 것이다.

이것이 가능한 이유는 선형성(linearity) 때문이다. 해들을 더할 수 있기 때문이다. 대학에서는 같은 원리를 여러 구동 진동수의 합에 적용하여 푸리에(Fourier) 해석, 공학의 전달 함수(transfer function), 물리학의 그린(Green) 함수로 나아간다.

더 도전하기

1 **떨어지는 엘리베이터.** STEP II 1996, 11번 문제 (`step.maths.org/questions/96-s2-q11`)에 도전해 보자. 가속하기 시작했다가 가속을 멈추는 엘리베이터 안에서 탄성 끈에 매달린 질량에 관한 문제이다. 최종 진폭이 가속 지속 시간에 따라 어떻게 달라지는지 살펴보자.

2 **공명 상태.** 특수해 $x = Ct\cos nt$를 시도하여, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$인 $\ddot{x} + n^2x = n^2b\sin nt$를 직접 풀어라. 그 결과가 위의 극한과 일치하는지 확인하여라.

3 **맥놀이.** $n\sin pt - p\sin nt$를 두 항의 합으로 쓸 수 있고, p가 n에 가까울 때 그중 한 항이 근사적으로 $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$임을 보여라. 이를 이용하여 맥놀이 주기 $\frac{2\pi}{n-p}$를 설명하여라.

4 **감쇠가 있는 공명.** 작은 $k > 0$에 대하여 $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2x = F\cos pt$의 정상 상태 진폭을 구하고, 이 진폭이 $p^2 = n^2 - 2k^2$일 때 최대임을 보여라.

더 읽을거리

- **A. P. French, *Vibrations and Waves*** (MIT Introductory Physics Series). 강제 진동과 공명을 다룬 4장은 고전적인 설명이다.
- **Steven Strogatz, *Sync*** (Penguin). 반딧불이에서 밀레니엄 브리지까지, 사물이 어떻게 박자를 맞추게 되는지를 다룬다.

- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human*** (Vintage). 역사 상자에 나온 다리들을 포함하여 공학의 실패 사례를 다룬다.

11.2 기준 진동

문제

STEP III 2014, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s3-q10`

도입

용수철에 매달린 질량 하나는 단순하고 규칙적으로 위아래로 진동한다. 그런데 두 질량을 용수철로 이어 붙이면 운동이 복잡해 보인다. 각 질량은 불규칙하게 움찔거리고, 에너지는 한쪽에서 다른 쪽으로 출렁이며 옮겨 다닌다. 하지만 이 복잡함 속에는 완벽하게 단순한 두 운동, 곧 **정규 모드**(*normal modes*)가 숨어 있다. 정규 모드에서는 두 질량이 함께 움직이거나 정확히 반대로 움직이며, 각 모드는 고유한 진동수(frequency)로 진동한다. 이 계의 모든 운동은 두 모드의 결합이다.

이 문제에서는 세 용수철 사이에 놓인 두 질량의 정규 모드를 구한 다음, 놀라운 사실 하나를 증명(proof)한다. 한 질량만 변위시킨 채 정지 상태에서 출발하면, 이 계는 출발 위치로 **결코** 돌아오지 않는다. 그 까닭은 두 진동수의 비가 $\sqrt{3}$이고, $\sqrt{3}$이 무리수(irrational number)이기 때문이다.

시작하기 전에

생각해 보기 X가 P로부터 거리 $a + x$에 있고 Y가 Q로부터 거리 $a + y$에 있을 때, 가운데 용수철 XY의 길이는 얼마인가? x와 y가 양수일 때 어느 용수철이 늘어나고 어느 용수철이 압축되는가?

세 길이의 합은 $3a$이므로 $XY = 3a - (a + x) - (a + y) = a - x - y$이다. $x, y > 0$일 때 바깥쪽 두 용수철은 (각각 x와 y만큼) 늘어나고, 가운데 용수철은 ($x + y$만큼) 압축된다.

차근차근 풀기

1단계 운동 방정식

x는 P에서 Q로 향하는 방향으로 잰다. 용수철 PX의 늘어난 길이는 x이므로, 그 장력(tension) $\frac{\lambda x}{a}$는 X를 P 쪽으로 끌어당긴다. 용수철 XY의 늘어난 길이는 $-(x+y)$이므로, 그 장력 $-\frac{\lambda(x+y)}{a}$는 X를 Y 쪽으로 끌어당긴다(음의 장력은 미는 힘이다). 따라서

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda x}{a} - \frac{\lambda(x+y)}{a} = -\frac{\lambda}{a}(2x+y). \qquad \blacksquare$$

대칭성에 의해(X와 Y, P와 Q의 역할을 서로 바꾸면)

$$m\ddot{y} = -\frac{\lambda}{a}(2y+x).$$

2단계 방정식 분리하기

> **생각해 보기** 각 방정식에는 x와 y가 모두 들어 있다. 두 방정식을 어떻게 결합하면 x와 y의 결합 하나만 들어 있는 식이 되는가?

두 식을 빼고 더하면

$$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -\frac{\lambda}{a}(x-y), \qquad m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -\frac{3\lambda}{a}(x+y).$$

각각은 단진동(simple harmonic motion)의 방정식이다. $x-y$는 $\omega^2 = \frac{\lambda}{ma}$로, $x+y$는 $3\omega^2$으로 진동한다.

3단계 초기 조건

처음에 $XP = a$이고 $YQ = \frac{1}{2}a$이므로 $x = 0, y = -\frac{1}{2}a$이며, 두 입자는 모두 정지해 있다. 따라서 $t = 0$에서 $x-y = \frac{1}{2}a$, $x+y = -\frac{1}{2}a$이고 변화율은 0이므로

$$x-y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t, \qquad x+y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

그러므로 $A = \frac{1}{2}a$, $B = 0$이다. $\blacksquare$

4단계 결코 돌아오지 않는다

> **생각해 보기** y를 t에 대한 식으로 나타내어라. Y가 처음 위치로 돌아오려면 $y = -\frac{1}{2}a$이어야 한다. 이때 두 코사인 값은 각각 얼마이어야 하는가?

두 식을 빼면 $y = \frac{1}{2}\big((x+y)-(x-y)\big) = -\frac{1}{4}a\big(\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t\big)$이다. $y = -\frac{1}{2}a$이려면 $\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t = 2$이어야 하고, 각 코사인 값은 1 이하이므로 둘 다 1이어야 한다. 즉

어떤 정수 k와 j에 대하여

$$\omega t = 2\pi k, \qquad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi j$$

이다. $t > 0$이면 $k \geq 1$이고, 두 식을 나누면 $\sqrt{3} = \frac{j}{k}$가 되는데, $\sqrt{3}$은 무리수이므로 이는 불가능하다. 따라서 Y는 결코 처음 위치로 돌아오지 않는다. ■

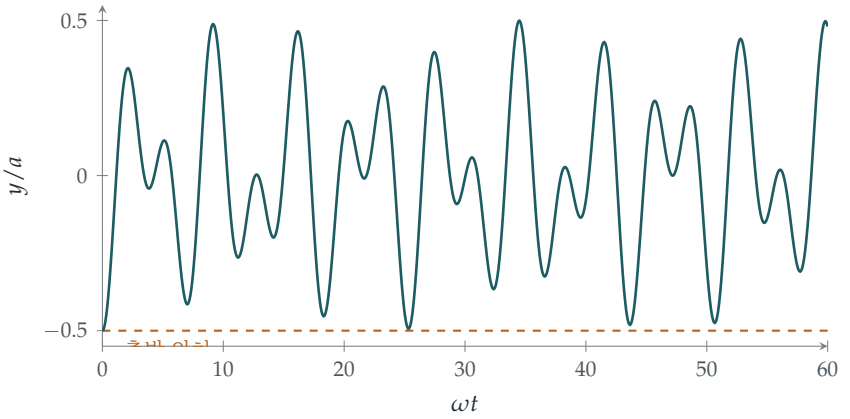


그림 11.2.1 입자 Y의 변위 y. 이는 진동수의 비가 $\sqrt{3}:1$인 두 진동의 합이므로 그 모양이 결코 반복되지 않는다. Y는 출발 위치(점선)에 거듭해서 가까이 다가가지만(예를 들어 $\omega t \approx 25$ 부근, 이때 $\omega t \approx 8\pi$이고 $\sqrt{3}\,\omega t \approx 14\pi$이다), 정확히 그 위치에 도달하지는 않는다.

돌아보기

- **방정식을 분리하는 결합을 찾아라.** $x - y$와 $x + y$는 각각 자기만의 방정식을 만족했다.
- **대칭성이 그 결합을 알려 준다.** 이 계는 양쪽을 서로 바꾸어도 변하지 않으므로, 대칭(symmetric) 결합과 반대칭(antisymmetric) 결합을 생각하는 것이 자연스럽다.
- **무리수라는 성질은 물리적 결과를 낳는다.** 진동수의 비가 무리수이기 때문에 이 운동은 주기적(periodic)이지 않다.

숨은 수학

정규 모드는 고유벡터이다

두 방정식을 행렬(matrix) 방정식으로 쓰면

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

방정식을 분리하는 결합은 이 행렬의 고유벡터(eigenvector)이다. 곧 고윳값(eigenvalue) 1에 대응하는 $(1,-1)$과 고윳값 3에 대응하는 $(1,1)$이다(Section 7.2). 첫 번째 모드에서는 $x=-y$이다. 두 입자는 직선을 따라 같은 방향으로 움직이고(x와 y는 서로 반대쪽 끝에서 잰다는 점을 기억하자), 가운데 용수철은 길이를 그대로 유지한다. 두 번째 모드에서는 $x=y$이다. 두 입자는 서로 반대 방향으로 움직이며 가운데 용수철을 압축하고 늘이므로 진동수가 더 높아진다. 진동수의 제곱은 고윳값에 $\frac{\lambda}{ma}$를 곱한 값이다.

이 방법은 질량과 용수철이 몇 개이든 통한다. 결합된(coupled) 진동자 N개로 이루어진 계는 정규 모드를 N개 가지며, 이들은 대칭행렬의 고유벡터로 주어진다. 스펙트럼 정리(spectral theorem)는 이 고유벡터들이 언제나 존재하고 서로 수직임을 보장한다. 분자는 정규 모드로 진동하며, 화학자들은 분자가 흡수하는 적외선을 통해 분자를 식별한다. 건물과 다리에도 정규 모드가 있으며, 공학자들은 이 진동수가 바람과 지진의 진동수와 겹치지 않도록 해야 한다. 그리고 질량의 개수가 무한대로 갈 때 정규 모드는 진동하는 현의 배음이 되는데, 이것이 바로 푸리에 해석(Fourier analysis)의 출발점이다.

도달하지 않고 가까이 다가가기

Y는 정확히 돌아오지는 않지만, 원하는 만큼 가까이 다가갈 수는 있다. 그 근거는 크로네커(Kronecker)의 정리이다. α가 무리수이면, 배수 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$를 1을 법으로 하여 취한 값들은 $[0,1]$의 모든 수에 얼마든지 가까이 다가간다. 따라서 ωt가 2π의 배수이면서 $\sqrt{3}\,\omega t$가 2π의 어떤 배수와 원하는 오차 이내로 가까운 시각을 찾을 수 있다. 이 운동은 **준주기적**(*quasi-periodic*)이다. 즉 토러스(torus)(각 모드마다 각 하나씩) 위를 감아 돌되 결코 닫히지 않는다. 진동수의 비가 유리수인가 무리수인가 하는 바로 이 구분이, 태양계의 안정성에 관한 KAM 정리의 핵심에 놓여 있다.

사고 기술

변수를 바꾸어 방정식을 분리하라

방정식들이 서로 얽혀 있으면, 독립적으로 변하는 변수들의 결합을 찾아라. 선형 문제에서는 그것이 고유벡터이다.

이는 Section 10.6의 질량중심(centre of mass) 좌표와 상대 좌표(relative coordinates)와 같은 아이디어이다. 대학에서는 이것이 대각화(diagonalisation)가 된다. 행렬이 대각행렬이 되는 기저를 고르면, 서로 얽힌 연립방정식이 독립적인 방정식들로 풀려 나온다.

더 도전하기

1 **에너지.** 전체 에너지 $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\lambda}{2a}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)$가 일정함을 보이고, 이것이 정규 모드마다 하나씩인 두 항의 합으로 나누어지며 각 항이 따로 일정함을 보여라.

2 **순수한 모드.** 운동이 주기 $\frac{2\pi}{\omega}$인 주기 운동이 되려면 입자들을 어떻게 출발시켜야 하는가? 주기가 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$이려면 어떻게 해야 하는가?

3 **더 단단한 가운데 용수철.** 가운데 용수철의 탄성 계수(modulus)가 λ 대신 μ이면, 두 정규 모드의 진동수를 구하여라. μ/λ가 어떤 값일 때 모든 운동이 주기적인가?

4 **세 질량.** 같은 질량 셋이 두 고정점 사이에서 똑같은 용수철 넷으로 한 줄로 연결되어 있다. 행렬과 그 고윳값$(2-\sqrt{2},\,2,\,2+\sqrt{2})$을 구하고, 세 정규 모드를 설명하여라.

더 읽을거리

- **A. P. French, *Vibrations and Waves*** (MIT Introductory Physics Series), 결합 진동자와 정규 모드를 다룬 5장.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge), 고윳값을 다룬 장. 용수철과 질량이 주요 예로 나온다.
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press), 토러스 위의 준주기 운동을 다룬 8장.

11.3 실제 진자

문제

STEP III 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/98-s3-q11`

도입

물리를 배우는 학생이라면 누구나 진자(pendulum)의 주기(period)가 흔들림의 크기와 상관없이 $2\pi\sqrt{l/g}$라고 배운다. 갈릴레이(Galileo)는 피사 대성당에서 흔들리는 등잔의 시간을 자기 맥박으로 재어 본 뒤 이 사실을 믿게 되었다고 전해지며, 진자시계가 작동하는 것도 바로 이 성질 덕분이다. 그러나 이것은 엄밀하게는 참이 아니다. 이 공식은 근사(approximation) $\sin\theta \approx \theta$에서 나온 것이며, 큰 호를 그리며 흔들리는 진자는 시간이 더 오래 걸린다. 90°에서는 주기가 18% 더 길고, 거의 거꾸로 선 위치에서 놓은 진자는 얼마든지 오래 걸릴 수 있다.

이 문제에서는 정확한 주기를 적분으로 구하고, 이어서 적당한 크기의 흔들림에 대한 첫 번째 보정 항을 구한다. 이 적분은 초등함수로 계산할 수 없다. 이것은 **타원적분**(*elliptic integral*)이며, 이러한 적분을 길들여 온 이야기는 가우스(Gauss)의 산술기하평균에서 시작하여 타원곡선 이론에까지 이른다.

시작하기 전에

생각해 보기 추는 반지름이 l인 원 위를 움직인다. θ와 $\dot{\theta}$로 나타내면 추의 속력과 (가장 낮은 점을 기준으로 한) 높이는 각각 얼마인가?

속력은 $l\dot{\theta}$이고, 가장 낮은 점으로부터의 높이는 $l(1-\cos\theta)$이다. 줄은 일을 하지 않으므로(장력이 항상 운동 방향에 수직이므로) 에너지는 보존된다.

차근차근 풀기

1단계 에너지

최대 각 γ에서 추는 순간적으로 정지한다. 에너지 보존(conservation of energy)에 의해

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\gamma),$$

이고, ml로 나누면 $\tfrac{1}{2}l\dot{\theta}^2 = g(\cos\theta - \cos\gamma)$이다. ■

2단계 적분으로 나타낸 주기

> **생각해 보기** $\cos\theta - \cos\gamma$를 반각으로 어떻게 나타낼 수 있는가? 또 $\theta = 0$에서 $\theta = \gamma$까지 가는 데 주기의 얼마만큼이 걸리는가?

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}$를 이용하면 $\cos\theta - \cos\gamma = 2(\sin^2\tfrac{\gamma}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2})$이므로

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}.$$

대칭성에 의해 0에서 γ까지 흔들리는 데 주기의 4분의 1이 걸리므로

$$P = 4\int_0^{\gamma}\frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\theta. \qquad ■$$

3단계 특이점 없애기

> **생각해 보기** 피적분함수는 $\theta = \gamma$에서 무한대가 된다. $k = \sin\tfrac{\gamma}{2}$로 두고 $\sin\tfrac{\theta}{2} = k\sin\phi$로 치환하자. $0 \le \theta \le \gamma$에 대응하는 ϕ의 범위는 무엇인가? 피적분함수는 어떻게 되는가?

θ가 0에서 γ까지 변할 때 ϕ는 0에서 $\tfrac{\pi}{2}$까지 변한다. 미분하면 $\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$이므로

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

한편 $\sin^2\tfrac{\gamma}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2} = k^2(1-\sin^2\phi) = k^2\cos^2\phi$이다. 성가신 인수들이 약분된다.

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

$k < 1$이므로 새 피적분함수는 아무 문제 없이 잘 정의된다. 이렇게 특이점(singularity)이 사라진다.

4단계 첫 번째 보정

> **생각해 보기** k가 작을 때 $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$를 이항정리(binomial theorem)로 전개하라. $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,d\phi$의 값은 얼마인가?

1차까지 $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\approx 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\phi$이고 $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,d\phi=\frac{\pi}{4}$이다. 따라서

$$P\approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right).$$

γ가 작으면 $k=\sin\frac{\gamma}{2}\approx\frac{\gamma}{2}$이므로 $k^2\approx\frac{\gamma^2}{4}$이고

$$P\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}\right). \qquad \blacksquare$$

20°의 흔들림($\gamma\approx 0.35$)에서는 보정이 1%보다 작고, 60°에서는 약 7%이다(그림 11.3.1).

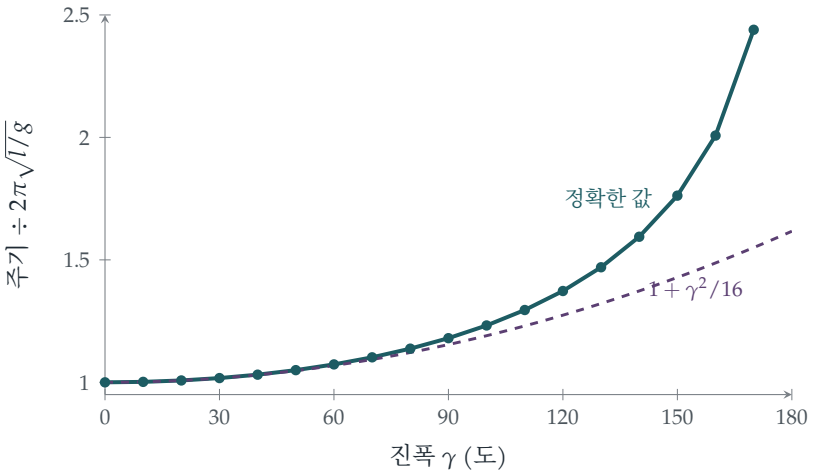


그림 11.3.1 진자의 정확한 주기(청록색)를 작은 각 근사값에 대한 비로 나타내어 진폭(amplitude)에 대해 그리고, 근사식 $1+\gamma^2/16$(자주색, 점선)과 비교한 그래프. 이 근사는 약 60°까지 매우 정확하다. $\gamma\to 180°$일 때 실제 주기는 무한대로 발산한다. 거꾸로 서서 균형을 이룬 진자는 떨어지는 데 영원히 걸린다.

돌아보기

- **에너지는 제1적분(first integral)을 준다.** 2계 방정식이 1계 방정식이 되었고, 주기는 적분이 되었다.
- **치환으로 특이점을 길들인다.** 피적분함수가 되돌아오는 점에서 발산했지만, 치환 $\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\phi$가 문제를 없앴다.

- **먼저 정확하게, 그다음에 근사로.** 정확한 공식을 구한 뒤 이를 전개했으며, 이를 통해 근사가 얼마나 좋은지도 알 수 있다.

숨은 수학

타원적분

적분

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

을 **제1종 완전타원적분**(*complete elliptic integral of the first kind*)이라 한다. 이런 이름이 붙은 것은 이와 가까운 적분이 타원의 둘레를 주기 때문이다. 정확한 주기는 $P = 4\sqrt{l/g}\,K\bigl(\sin\tfrac{\gamma}{2}\bigr)$이다. 피적분함수를 끝까지 전개하고 Section 4.4의 월리스 적분(Wallis integrals) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi$를 이용하여 항별로 적분하면

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Bigl(1 + \bigl(\tfrac{1}{2}\bigr)^2 k^2 + \bigl(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\bigr)^2 k^4 + \bigl(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\bigr)^2 k^6 + \cdots\Bigr).$$

을 얻는다. 익숙한 함수들을 유한 번 조합해서는 $K(k)$를 얻을 수 없다. 이것은 진정으로 새로운 함수이다.

가우스의 놀라운 공식

K를 계산하는 훨씬 더 좋은 방법이 있다. Section 2.6에서 **산술기하평균**(*arithmetic–geometric mean*)을 만났다. a와 b에서 시작하여, 이 둘을 산술평균과 기하평균으로 바꾸는 일을 되풀이하는 것이다. 가우스는 1799년에

$$K(k) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}\bigl(1, \sqrt{1 - k^2}\bigr)},$$

임을 발견했다. 따라서 진폭이 γ인 진자의 주기는 정확히

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}\bigl(1, \cos\tfrac{\gamma}{2}\bigr)}.$$

이다. AGM은 매우 빠르게 수렴(converge)하기 때문에, 약 160°까지의 흔들림에서는 서너 단계만으로 주기를 유효숫자 열 자리까지 얻을 수 있으며, 그림 11.3.1의 값들도 이 방법으로 계산했다. 180°에 더 가까워지면 두 출발값 1과 $\cos\frac{\gamma}{2}$가 멀리 떨어져 있어 한두 단계가 더 필요하지만, 179°에서도 다섯 단계면 충분하다. 가우스는 일기에 이 발견이 "해석학의 완전히 새로운 분야를 연다"고 적었고, 그의 말은 옳았다. 타원적분의 역함수를 생각한 아벨(Abel)과 야코비(Jacobi)는 **타원함수**(*elliptic functions*)에 이르렀고, 타원함수는 다시 **타원곡선**(*elliptic curves*)으로 이어졌다. 타원곡선은 오늘날 수론(number theory)의 중심에

있으며(페르마(Fermat)의 마지막 정리를 증명하는 열쇠였다), 인터넷의 보안을 지키는 암호(cryptography)에서도 핵심적인 역할을 한다.

갈릴레이의 등잔과 하위헌스의 시계

진자의 주기가 진폭에 의존하지 않는다는 갈릴레이의 주장은 1602년 무렵에 나온 것으로, 그가 연구한 작은 흔들림에서는 좋은 근사였다. 하위헌스(Christiaan Huygens)는 이것이 정확하지 않다는 것을 깨달았고, 1659년에 주기가 진짜로 진폭과 무관해지는 곡선을 찾아냈다. 그것이 바로 Section 11.4의 주제인 사이클로이드(cycloid)이다. 1656년부터 만들어진 그의 진자시계는 시간 측정의 오차를 하루 약 15분에서 약 15초로 줄였다. 바다에서 경도를 구하는 문제를 해결한 항해용 크로노미터는 훗날 진자를 아예 쓰지 않게 되었지만, 진자시계는 1920년대까지 세계에서 가장 정확한 시계로 남아 있었다.

사고 기술

정확한 적분에서 급수 근사로

어떤 양이 계산할 수 없는 적분으로 주어지면, 그 적분을 다루기 좋은 꼴로 변형한 다음 피적분함수를 전개하여 항별로 적분하라.

이것은 물리학자들이 이상화된 결과에 대한 보정을 구하는 방법이며, **섭동 이론**(*perturbation theory*)의 출발점이다. 대학에서는 항별 적분(term-by-term integration)이 언제 정당화되는지(균등수렴(uniform convergence)), 그리고 중간에 멈추었을 때 생기는 오차를 어떻게 추정하는지 배우게 된다.

더 도전하기

1 **줄에 매인 입자.** STEP III 2015, 9번 문제 (`step.maths.org/questions/15-s3-q9`)에 도전해 보라. 작은 진동에서도 주기가 진폭에 의존하는 진동자를 다룬다. 진자의 주기는 그렇지 않은데, 이 진동자의 주기는 왜 그런가?

2 **다음 항.** 이항 전개를 한 항 더 진행하여 $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}+\frac{11\gamma^4}{3072}\right)$임을 보여라.

3 **손으로 하는 AGM.** AGM을 세 단계 이용하여 진폭이 90°인 진자의 주기를 추정하고, 그림의 값 1.1803과 비교하라.

4 **시계.** 어떤 진자시계가 진폭 4°에서 정확한 시간을 가리키도록 맞추어져 있다. 진폭이 5°로 커지면 하루에 몇 초가 늦어지는가?

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 4장. 진폭이 큰 진자를 다룬다.
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). 가우스의 발견과 그 활용을 다루며, π를 계산하는 가장 빠른 방법들도 소개한다.
- **Dava Sobel, *Longitude*** (Fourth Estate). 진자를 넘어선, 바다 위에서의 시간 측정 이야기(경도).

11.4 등시 곡선

문제

STEP III 1994, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/94-s3-q9`

도입

그릇 안에서 구슬 두 개를 동시에 놓아 보자. 하나는 가장자리 근처에서, 다른 하나는 바닥 바로 위에서 놓는다. 어느 쪽이 먼저 바닥에 닿을까? 보통의 그릇에서는 대개 낮은 곳에서 출발한 구슬이 이긴다. 그런데 어디서 출발하든 두 구슬이 언제나 함께 도착하는 그릇이 있다. 그것이 바로 **등시곡선**(*tautochrone*)(그리스어로 "같은 시간"이라는 뜻)이며, 그 단면은 **사이클로이드**(*cycloid*), 즉 굴러가는 바퀴의 둘레 위 한 점이 그리는 곡선이다.

하위헌스(Huygens)는 1659년에 이 사실을 발견했고, 이를 이용해 진폭과 관계없이 주기가 일정한 진자시계를 설계하여 Section 11.3에서 발견한 결점을 바로잡았다. 이 문제는 올바른 변수, 즉 수평 위치 대신 곡선을 따라 잰 거리를 택함으로써 등시성을 단 몇 줄 만에 증명한다.

시작하기 전에

생각해 보기 그릇은 매끄럽다. 입자에 작용하는 힘은 무엇이며, 그중 어느 힘이 일을 하는가?

중력과 수직항력(normal reaction)이다. 수직항력은 곡면에 수직이고 따라서 운동 방향에도 수직이므로 일을 하지 않는다. 중력만 일을 하므로 에너지가 보존된다.

차근차근 풀기

1단계 곡선을 따른 에너지

s가 호의 길이(arc length)이므로, 곡면을 따른 입자의 속력은 $|\frac{ds}{dt}|$이다. 에너지 보존에 의해 $\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgy =$ 상수이므로 $\dot{s}^2 + 2gy$는 상수이다. ■

2단계 s에 대한 단진동

> **생각해 보기** $s = 2\sqrt{ky}$를 이용해 y를 s의 함수로 바꾸어라. 그 결과 얻는 방정식은 어떤 종류의 운동을 나타내는가?

$y = \frac{s^2}{4k}$이므로 에너지 방정식은

$$\dot{s}^2 + \frac{g}{2k}s^2 = \text{상수} = \frac{g}{2k}s_0^2,$$

이 된다. 여기서 $s_0 = 2\sqrt{kh}$는 출발점의 호의 길이이다(입자는 정지 상태에서 출발한다). 미분하면 $2\dot{s}\ddot{s} + \frac{g}{k}s\dot{s} = 0$이므로

$$\ddot{s} = -\frac{g}{2k}\,s.$$

이것은 변수 s에 대한 단진동(simple harmonic motion)이며, 진폭과 관계없이 $\omega^2 = \frac{g}{2k}$이다. 즉 $s = s_0\cos\omega t$이다.

3단계 바닥까지 걸리는 시간

입자는 주기의 4분의 1이 지난 후 V($s = 0$인 점)에 도달한다:

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

이 값은 h에 의존하지 않는다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** 왜 이렇게 될까? 곡선을 따른 "복원력"은 g에 기울기를 곱한 $g\frac{dy}{ds} = \frac{g}{2k}s$이다. 즉 곡선을 따라 잰 바닥으로부터의 거리에 정확히 비례한다. 이것이 바로 단진동의 정의적 성질이다. 더 높은 곳에서 출발한 입자는 가야 할 거리가 더 멀지만, 그에 비례하여 더 세게 밀린다.

4단계 두 입자

> **생각해 보기** 두 입자는 언제 V에 도달하며, 그때 속력은 얼마인가? 어느 쪽의 운동량이 더 큰가?

두 입자는 반대쪽에서 출발하여 같은 시각 $T = \pi\sqrt{k/(2g)}$에 V에 도달한다. V에서의 속력은 ω에 s의 진폭을 곱한 값이므로 $\sqrt{\text{높이}}$에 비례한다. 높이 h에서 놓은 무거운 입자의 V에서의 속력을 U라 하면, 높이 $\alpha^2 h$에서 놓은 가벼운 입자의 속력은 αU이다. 두 입자의 운동량(momentum)은 서로 반대 방향으로 $\alpha m \cdot U$와 $m \cdot \alpha U$이므로, 크기가 같고 방향이 반대이다. 충돌 순간의 전체 운동량은 0이다.

생각해 보기 전체 운동량이 0이고 반발 계수가 α일 때, 충돌 직후의 속도는 어떻게 되는가?

운동량은 계속 0이므로, 충돌 후에도 두 입자는 크기가 같은 운동량을 가지고 서로 반대 방향으로 움직이며, 상대 속력은 접근 속력 $\alpha U + U$의 α배이다(반발 계수(coefficient of restitution)의 정의). 가벼운 입자(질량 αm)의 속력을 w라 하면 무거운 입자(질량 m)의 속력은 αw이고, $w + \alpha w = \alpha(1+\alpha)U$이므로 $w = \alpha U$이다. 각 입자는 속력이 α배가 되어 튕겨 나간다. 질량 αm인 입자는 αU로, 질량 m인 입자는 $\alpha^2 U$로 떠난다.

5단계 전체 운동

이제 각 입자는 자기 쪽 곡면을 다시 올라가는데, 높이는 속력의 제곱에 비례하므로 도달 높이는 α^2배로 줄어든다. 질량 αm인 입자는 $\alpha^2 h$까지, 질량 m인 입자는 $\alpha^4 h$까지 올라간다. 등시성에 의해 두 입자는 시간 $2T$ 후 정확히 같은 순간에 V로 돌아오며, 운동량은 다시 크기가 같고 방향이 반대이다. 모든 속력이 α배가 된 채로 같은 충돌이 다시 일어난다. 따라서:

- 두 입자는 항상 V에서, 시각 $T, 3T, 5T, \ldots$에 충돌한다.
- n번째 충돌 후 두 입자는 높이 $\alpha^{2n} h$와 $\alpha^{2n+2} h$까지 올라간다.
- 운동은 등비적으로 잦아들지만 결코 멈추지 않는다. 충돌은 무한히 많이 일어나며 영원히 계속된다. ■

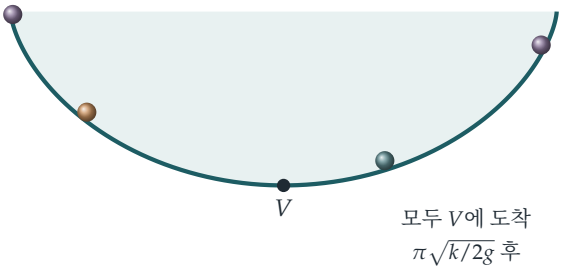


그림 11.4.1 등시곡선: 직선을 따라 굴러가는 바퀴의 둘레 위 한 점이 그리는 사이클로이드를 뒤집은 것이다. 이 곡선 위 어디에서든 정지 상태로 놓은 구슬은 같은 순간에 가장 낮은 점 V에 도달한다. 반지름 R인 바퀴가 만드는 사이클로이드에서 호의 길이와 높이는 $s^2 = 8Ry$를 만족하므로 $k = 2R$이다.

돌아보기

- **자연스러운 변수를 택하라.** 호의 길이 s로 나타내면 운동은 정확히 단진동이다. x나 y로 나타내면 엉망이 된다.
- **에너지가 방정식을 준다.** 에너지 방정식을 미분하여 운동 방정식을 곧바로 얻었다.
- **시간의 대칭성.** 바닥까지 가는 데 걸리는 시간이 언제나 같으므로, 두 입자는 영원히 박자가 맞았고 충돌은 정확히 반복되었다.

숨은 수학

왜 사이클로이드인가?

직선 아래에서 굴러가는 반지름 R인 바퀴는 사이클로이드 $x = R(t + \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$를 그린다. 그러면 $\frac{dx}{dt} = R(1 + \cos t)$이고 $\frac{dy}{dt} = R\sin t$이므로, 곡선을 따른 속력은 $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R\cos\frac{t}{2}$이다. 적분하면 바닥으로부터의 호의 길이는 $s = 4R\sin\frac{t}{2}$이고, 한편 $y = 2R\sin^2\frac{t}{2}$이다. 따라서 $s^2 = 8Ry$이다. 즉 사이클로이드는 정확히 $k = 2R$일 때 $s = 2\sqrt{ky}$를 만족하는 곡선이다. 역으로, 복원력이 s에 비례해야 한다는 조건은 곡선이 사이클로이드일 것을 강제한다.

최단강하곡선

1696년 요한 베르누이(Johann Bernoulli)는 유럽의 수학자들에게 문제를 냈다. 한 점에서 그보다 낮은(바로 아래는 아닌) 점까지 구슬이 **가장 짧은** 시간에 미끄러져 내려가는 곡선은 무엇인가? 그 답인 **최단강하곡선**(*brachistochrone*) 역시 사이클로이드이다. 뉴턴(Newton)은 문제를 받은 뒤 하룻저녁 만에 풀었다고 전해진다. 그는 풀이를 익명으로 발표했지만, 베르누이는 "발톱을 보고 사자를 알아보듯" 저자를 알아보았다. 이 문제는 Section 4.7에서 만난 **변분법**(*calculus of variations*), 즉 적분으로 정의된 양을 최소화하는 곡선을 찾는 분야의 출발점이 된 예이다.

하위헌스의 사이클로이드 시계

하위헌스는 단진자의 주기가 진폭에 의존하기 때문에 단진자가 시간을 정확히 맞추지 못한다는 것을 알고 있었다. 그는 『*Horologium Oscillatorium*』(1673)에서 추가 사이클로이드를 따라 움직이게 하는 방법을 보였다. 사이클로이드 모양으로 휜 두 개의 "볼판" 사이에 줄을 매달면, 줄이 볼판을 감으면서 추가 스스로 사이클로이드를 그리게 된다(사이클로이드의 **신개선**(*involute*)은 또 다른 사이클로이드이다). 실제로는 볼판이 마찰로 일으키는 오차가 없애는 오차보다 커서, 시계 제작자들은 대신 진폭을 작게 유지했다. 그러나 하

위헌스의 분석은 축폐선(evolute)과 신개선의 이론을 창시했고, 그의 책은 17세기 역학의 위대한 저작 가운데 하나가 되었다.

사고 기술

운동이 단순해지는 변수를 찾아라

곡선을 따른 운동은 곡선을 따라 잰 거리로 나타낼 때 가장 단순한 경우가 많다. 방정식을 선형으로 만드는 변수를 찾아라.

대학에서는 이것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 **일반화 좌표**(*generalised coordinates*)라는 개념이 된다. 계의 배치를 나타내는 변수라면 무엇이든 쓸 수 있으며, 변수를 잘 고르면 풀 수 없던 문제가 풀리기도 한다.

더 도전하기

1 **다른 높이.** 등시곡선 그릇에서 높이 h에서 입자를 놓는다. V에서의 속력이 에너지 보존에 따라 당연히 그래야 하듯 $\sqrt{2gh}$임을 보이고, 이것이 ωs_0와 일치하는지 확인하여라.

2 **보통의 그릇.** 반지름 R인 반구형 그릇에서, 낮은 높이에서 바닥까지 가는 시간과 가장자리에서 바닥까지 가는 시간을 비교하여라. 어느 쪽이 더 긴가? (Section 11.3의 결과를 이용하여라.)

3 **같은 질량.** 질량이 모두 m으로 같은 두 입자를 높이 h_1과 h_2에서 놓고 반발 계수가 e일 때, 문제의 둘째 부분을 다시 풀어라. 두 입자는 여전히 항상 V에서 충돌하는가?

4 **사이클로이드의 호의 길이.** 사이클로이드의 한 아치의 길이가 $8R$이고, 그 아래 넓이가 굴러가는 원 넓이의 세 배인 $3\pi R^2$임을 보여라.

더 읽을거리

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*** (CRC Press). 등시곡선과 최단강하곡선을 그 역사와 함께 다룬다.
- **E. A. Whitman, "Some historical notes on the cycloid"**, *American Mathematical Monthly* 50 (1943). 사이클로이드가 왜 "기하학자들의 헬레네"라고 불렸는지 설명한다.
- **Paul Nahin, *When Least Is Best*** (Princeton University Press). 최단강하곡선을 비롯한

최적화 문제들을 역사와 함께 들려준다.

11.5 가속하는 기차 안의 중력

문제

STEP II 2021, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

기차가 역을 출발할 때 우리는 몸이 좌석 뒤로 눌리는 것을 느낀다. 탁자 위 커피 잔의 수면은 기울어지고, 바닥에 놓인 공은 뒤쪽으로 굴러간다. 기차 안에서 보면 마치 중력이 기울어져서 아래쪽뿐 아니라 약간 뒤쪽으로도 향하는 것처럼 보인다. 아인슈타인(Einstein)은 이것이 단순한 비유 이상이라는 깨달음을 "내 생애 가장 행복한 생각"이라고 불렀다. 국소적으로는 중력과 가속도를 구별할 수 없다는 것이다.

이 문제에서는 가속하는 기차 안의 휘어진 철사에 구슬이 꿰어져 있다. 기차에서 보면 구슬은 탄젠트 값이 a/g인 각만큼 기울어진 중력장 속에 있는 것과 똑같이 행동한다. 철사의 맨 아래는 더 이상 가장 낮은 점이 아니며, 구슬은 새로운 평형점(equilibrium)을 중심으로 진동한다.

시작하기 전에

생각해 보기 기차가 서쪽(x의 음의 방향)으로 a의 가속도로 가속한다. 기차 안의 관찰자에게는 질량 m인 물체에 어떤 "가상의" 힘이 작용하는 것처럼 보이는가?

기차의 좌표계에서는 가상력(fictitious force) $-m \times$ (좌표계의 가속도)를 더하면 뉴턴(Newton)의 제2법칙이 성립한다. 좌표계는 x 방향으로 $-a$의 가속도를 가지므로, 가상력은 동쪽을 향하는 $+ma$이다. 중력과 합치면 구슬은 단위 질량당 $(a, -g)$의 유효 중력(effective gravity)을 받는다. 즉 중력이 동쪽으로 기울어진 것이다.

차근차근 풀기

1단계 원점에서는 정지할 수 없다

원점에서 철사 $ky = x^2$는 수평이다. 그곳에서 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이므로 동쪽을 향하는 가상력 ma를 상쇄할 수 없다. 철사 방향의 알짜힘은 $ma \neq 0$이므로, 구슬은 기차에 대해 정지해 있을 수 없다. ■

2단계 에너지 방정식

> **생각해 보기** 수직항력 $\mathbf{N}$을 포함하여 기차의 좌표계에서 뉴턴 법칙을 써 보자. 그 다음 속도 $(\dot{x}, \dot{y})$와 내적(dot product)을 취하라. 왜 $\mathbf{N}$이 사라지는가?

기차의 좌표계에서

$$m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \mathbf{N} + (ma, -mg).$$

철사가 매끄러우므로 $\mathbf{N}$은 철사에 수직이고, 따라서 철사 방향인 속도 $(\dot{x}, \dot{y})$에도 수직이다. 속도와 내적을 취하면 $\mathbf{N}$이 없어진다.

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} = ma\dot{x} - mg\dot{y}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{x}(\ddot{x} - a) + \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0. \quad ■$$

좌변은 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy$의 도함수(derivative)이므로, 이 양은 일정하다. ■

이것은 기차의 좌표계에서의 에너지 보존(conservation of energy)이며, 이때 단위 질량당 위치 에너지(potential energy) $-ax + gy$는 가상력을 포함한다.

3단계 얼마나 높이 올라가는가?

> **생각해 보기** 구슬이 원점에서 정지 상태로 출발하므로 상수는 0이다. 가장 높은 점에서 구슬은 순간적으로 정지한다. 이로부터 어떤 방정식을 얻는가?

정지해 있을 때 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$이므로 $ax = gy$이다. $y = \frac{x^2}{k}$를 대입하면 $ax = \frac{gx^2}{k}$이므로, (출발점 $x = 0$을 제외하면) $x = \frac{ak}{g}$이고

$$b = \frac{a^2 k}{g^2}. \quad ■$$

구슬은 철사를 따라 동쪽 위로 점 $\left(\frac{ak}{g}, \frac{a^2 k}{g^2}\right)$까지 올라갔다가 다시 원점으로 돌아오고, 이를 반복한다.

4단계 가장 빠른 점

생각해 보기 속력의 제곱을 x만의 함수로 나타내라. 어디에서 최대가 되는가?

속력의 제곱은 $2(ax - gy) = 2\left(ax - \frac{gx^2}{k}\right)$로 x에 대한 이차식이며, 두 반환점의 한가운데인 $x = \frac{ak}{2g}$에서 최대가 된다. 그곳에서 속력의 제곱은 $2\left(\frac{a^2k}{2g} - \frac{a^2k}{4g}\right) = \frac{a^2k}{2g}$이므로, 최대 속력은

$$a\sqrt{\frac{k}{2g}}. \qquad \blacksquare$$

생각해 보기 $x = \frac{ak}{2g}$에서 철사의 기울기를 구하라. 이것은 유효 중력 $(a, -g)$의 방향과 어떤 관계가 있는가?

기울기는 $\frac{2x}{k} = \frac{a}{g}$이다. 따라서 이 점에서 철사는 유효 중력에 수직이다. 즉 이 점이 기울어진 중력장에서 철사의 "가장 낮은" 점이며, 구슬은 이 점을 중심으로 진동한다(그림 11.5.1).

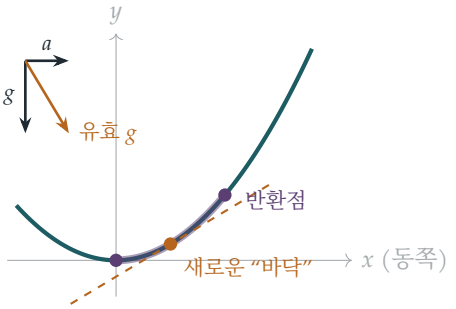


그림 11.5.1 기차의 좌표계에서 본 철사 $ky = x^2$(청록색, $k = 1, a/g = 0.6$). 유효 중력(호박색 화살표)은 탄젠트 값이 a/g인 각만큼 동쪽으로 기울어져 있다. 구슬은 원점과 $x = ak/g$ 사이에서(자주색) 진동하며, 진동의 중심은 철사가 유효 중력에 수직인 점으로, 이 점이 새로운 최저점 역할을 한다. 점선은 기울어진 중력장에서의 "수평"선이다.

돌아보기

- **편리한 좌표계에서 생각하고, 가상력을 더하라.** 기차의 좌표계에서는 철사가 고정되어 있으며, 그 대가는 일정한 힘 하나가 추가되는 것뿐이다.
- **속도와 내적을 취하라.** 이렇게 하면 구속력(constraint force)이 사라지고 에너지 방정식을 얻는다.
- **답을 해석하라.** 반환점과 가장 빠른 점에는 기하학적 의미가 있다. 유효 중력이 기울어져 있는 것이다.

숨은 수학

가상력

뉴턴 법칙은 **관성계**(inertial frame), 즉 가속하지 않는 좌표계에서 성립한다. 가속하는 좌표계에서는 가상력을 더하여 뉴턴 법칙을 되살릴 수 있다. 가속도가 $\mathbf{A}$인 좌표계에서는 $-m\mathbf{A}$를 더하고, 회전하는 좌표계에서는 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)을 더한다. 이 힘들은 어떤 물체도 작용하지 않으므로 가상력이라고 부르며, 좌표계 때문에 생겨나는 것이다. 그러나 그 좌표계 안에 있는 사람에게는 완벽하게 실재하는 힘이다. 원심력은 지구를 극 방향으로 납작하게 만들고, 코리올리 힘은 허리케인이 도는 방향(북반구에서는 시계 반대 방향)을 정하며 장거리 포탄의 경로를 휘게 한다.

등가 원리

일정한 가상력 $-m\mathbf{A}$는 중력과 똑같이 질량에 비례한다. 닫힌 상자 안에서 하는 어떤 실험으로도 상자가 행성 위에 놓여 있는지 빈 공간에서 가속하고 있는지 구별할 수 없다. 이것이 **등가 원리**(equivalence principle)이다. 아인슈타인은 이를 일반 상대성 이론(general relativity)의 출발점으로 삼았다. 가속하는 상자를 가로지르는 빛은 휘어 보이므로, 중력장에서도 빛은 휘어야 한다. 또 가속하는 로켓의 앞쪽과 뒤쪽에 있는 시계는 서로 다른 빠르기로 가므로, 중력장에서 높이가 다른 시계들도 그래야 한다. 두 예측은 모두 확인되었으며, 두 번째 효과는 모든 GPS 위성에서 보정해야 한다. 이 효과만으로도 위성의 시계는 지상의 시계보다 하루에 약 45마이크로초씩 빨리 가기 때문이다.

아인슈타인의 가장 행복한 생각

1907년, 베른의 특허청에서 일하던 아인슈타인은 특수 상대성 이론(special relativity)에 관한 총설 논문을 쓰고 있었다. 그때 훗날 그가 회상한 대로 "내 생애 가장 행복한 생각"이 떠올랐다. 지붕에서 자유 낙하하는 사람은 자신의 무게를 느끼지 못한다는 것이다. 낙하하는 좌표계를 택하면 중력을 "변환하여 없앨" 수 있다. 이 생각을 1915년의 일반 상대성 이론으로 완성하기까지는 8년의 시간과 많은 새로운 수학(가우스(Gauss)와 리만(Riemann)이 발전시킨 휘어진 공간의 미분기하학(differential geometry))이 더 필요했다.

사고 기술

움직이는 좌표계에서 보존량 찾기

가속도가 일정한 좌표계에서는 일정한 가상력이 작용한다. 이 힘은 위치 에너지에 포함시킬 수 있으며, 그 좌표계에서 에너지는 보존된다.

운동 방정식과 속도의 내적을 취하여 구속력을 없애는 기법은 어떤 좌표계에서나 통한다. 대학에서는 이것이 일반적인 원리가 된다. 방정식이 시간에 명시적으로 의존하지 않는 계에는 보존되는 에너지가 있다.

더 도전하기

1 **기차 안의 대포.** STEP I 2000, 9번 문제 (`step.maths.org/questions/00-s1-q9`) 문제를 풀어 보자. 가속하는 객차 안에서 발사한 포탄을 다루는데, 여기서 가속도는 중력이 기울어진 것처럼 작용한다.

2 **맞바람.** STEP II 2006, 11번 문제 (`step.maths.org/questions/06-s2-q11`) 문제를 풀어 보자. 일정한 맞바람을 받는 포물체를 다루는데, 바람 때문에 포물체가 땅에 떨어지기 전에 발사한 쪽으로 되밀려 올 수도 있다.

3 **기차 안의 커피.** 가속하는 기차 안에서 커피 잔의 수면은 수평면과 $\arctan(a/g)$의 각을 이루는 평면임을 보여라.

4 **작은 진동.** $x = \frac{ak}{2g}$를 중심으로 한 구슬의 작은 진동의 주기를 구하라. (**힌트:** 새로운 바닥 근처에서 철사는 반지름이 곡률 반지름(radius of curvature)과 같은 원으로 근사된다.)

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 비관성 좌표계와 가상력을 다룬 장.
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory*** (여러 판본). 가속하는 상자 이야기를 포함한, 아인슈타인이 직접 쓴 대중적인 해설서.
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory*** (Little, Brown). 일반 상대성 이론의 일대기.

11.6 백스핀

문제

STEP III 1997, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/97-s3-q10`

도입

구슬의 뒤쪽을 손가락으로 눌러서 구슬이 뒤로 회전하면서 앞으로 튀어 나가게 해 보자. 구슬은 손에서 멀어지며 미끄러지다가 느려지고, 멈춘 뒤, 마치 마음을 바꾼 것처럼 다시 굴러 돌아온다. 스누커(snooker) 선수들도 "스크루(screw)" 또는 "드로(draw)" 샷에서 같은 효과를 이용한다. 큐볼의 아래쪽을 쳐서 공이 뒤로 회전하게 하면, 공은 목적구에 부딪혀 멈춘 뒤 되돌아온다.

이 문제는 구슬을 그 자리에 딱 멈추게 하는 역회전(backspin)의 정확한 양과, 구슬이 처음 속력의 7분의 1로 되돌아오게 하는 역회전의 양을 묻는다. 계산에서는 선속도(linear velocity)와 각속도(angular velocity)라는 두 양을 추적하는데, 둘 다 같은 마찰력(frictional force)에 의해 변한다. 그 뒤에는 아름다운 지름길이 숨어 있다. 두 양의 어떤 조합은 마찰력에 의해 전혀 변하지 않는다.

교육과정에 관한 참고

회전 역학(rotational dynamics)은 2019년에 STEP 출제 범위에서 제외되었다. 여기서 필요한 것은 다음뿐이다. 질량 m, 반지름 a인 속이 찬 구의 지름에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $I = \frac{2}{5}ma^2$이고, 토크(torque) τ는 $I\dot{\omega} = \tau$에 따라 각속도를 바꾼다. 이것은 $m\dot{v} = F$의 회전 버전이다.

시작하기 전에

생각해 보기 구슬이 속도 v로 앞으로 움직이면서 각속도 ω로 뒤로 회전한다. 구슬의 가장 아래 점은 탁자 위에서 얼마나 빠르게 움직이는가? 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가?

가장 아래 점은 구슬 전체의 운동 때문에 v로 움직이고, 여기에 역회전 때문에 $a\omega$가 더해진다(역회전은 가장 아래 점을 앞으로 실어 나른다). 따라서 이 점은 $v + a\omega$로 앞으로 미끄러지고, 마찰력은 미끄러짐을 방해하는 방향인 뒤쪽으로 작용한다. 구슬은 $v + a\omega = 0$일 때에만 미끄러지지 않고 구른다(rolls without slipping).

차근차근 풀기

1단계 마찰력이 하는 일

생각해 보기 뒤쪽으로 작용하는 마찰력의 크기를 F라 하자. 이 힘은 v에 어떤 영향을 주는가? 중심에 대한 이 힘의 토크는 Fa이다. 이 토크는 역회전을 늘리는가, 줄이는가?

마찰력은 구슬을 감속시킨다. $m\dot{v} = -F$이므로 $v = v_0 - \frac{F}{m}t$이다. 마찰력은 구슬의 아래쪽에서 뒤쪽으로 작용하므로 역회전을 방해하는 토크 Fa도 가한다. $I\dot{\omega} = -Fa$이고 $I = \frac{2}{5}ma^2$이므로

$$\omega = \omega_0 - \frac{5F}{2ma}t.$$

구슬이 미끄러지는 동안 v와 ω는 모두 일정하게 감소한다.

2단계 딱 멈추기

생각해 보기 구슬이 완전히 멈추려면 v와 ω가 같은 순간에 0이 되어야 한다. 각각은 언제 0이 되는가?

$v = 0$이 되는 것은 $t = \frac{mv_0}{F}$일 때이고, $\omega = 0$이 되는 것은 $t = \frac{2ma\omega_0}{5F}$일 때이다. 두 값은 $v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0$일 때 같아지며, 즉

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}. \qquad \blacksquare$$

그 순간 구슬에는 선속도도 각속도도 없고, 마찰력(미끄러짐이 있을 때에만 작용한다)은 사라진다. 구슬은 그 자리에 머문다.

3단계 되돌아오기

생각해 보기 역회전이 더 크면 ω가 아직 양수일 때 v가 0에 도달한다. 가장 아래 점은 여전히 앞으로 미끄러지고 있으므로 마찰력은 여전히 뒤쪽으로 작용한다. 그다음에는 무슨 일이 일어나고, 미끄러짐은 언제 멈추는가?

마찰력이 계속 구슬을 뒤로 밀기 때문에 v는 음수가 되고, ω는 계속 감소한다. 미끄러짐은 $v + a\omega = 0$일 때 멈춘다.

$$v_0 + a\omega_0 - \left(\frac{F}{m} + \frac{5F}{2m}\right)t = 0, \qquad t^* = \frac{2m(v_0 + a\omega_0)}{7F}.$$

그 순간

$$v = v_0 - \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7} = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

이후 구슬은 미끄러지지 않고 구르며, 마찰력은 작용을 멈추고 v는 일정하게 유지된다. 구슬이 속력 $\frac{v_0}{7}$로 굴러 돌아오려면 $5v_0 - 2a\omega_0 = -v_0$이어야 하므로

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

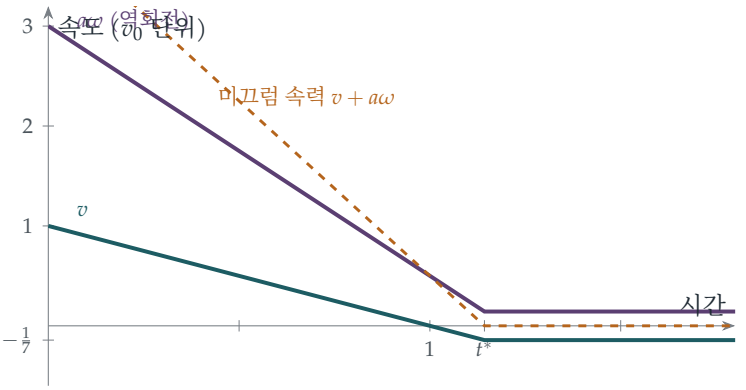


그림 11.6.1 $v_0/(a\omega_0) = \frac{1}{3}$인 경우로, 시간은 mv_0/F 단위이다. 마찰력은 앞쪽 속도 v(청록색)와 역회전 $a\omega$(자주색)를 일정한 비율로, 2 : 5의 비로 줄인다. 구슬은 $t = 1$에서 앞으로 나아가기를 멈추지만 아직 미끄러지고 있으므로, 미끄럼 속력(호박색)이 $t^* = \frac{8}{7}$에서 0이 될 때까지 뒤로 밀린다. 그 뒤 구슬은 $\frac{v_0}{7}$로 굴러 돌아온다.

돌아보기

- **두 양을 추적하라.** 마찰력은 v와 ω를 모두, 일정한 비를 이루는 비율로 바꾸었다.
- **힘이 언제 사라지는지 알아 두라.** 미끄럼 마찰력은 미끄러짐이 있을 때에만 작용한다. 구슬이 구르기 시작하면 마찰력은 사라진다.

- **미끄럼 속력이 핵심 변수이다.** 미끄럼 속력은 일차적으로 감소했고, 그것이 0이 되는 순간이 미끄러짐에서 구름으로 바뀌는 시점이었다.

숨은 수학

보존량

최종 속력에 더 빨리 도달하는 방법이 있다. 구슬이 탁자와 닿는 접촉점에 대한 구슬의 각운동량(angular momentum)을 생각하자. 마찰력은 바로 그 점에서 작용하므로 그 점에 대한 모멘트가 없고, 수직항력(normal reaction)과 중력은 모두 그 점을 지나는 연직선을 따라 작용한다. 따라서 구슬이 미끄러지는 동안 이 각운동량은 보존된다. 그 값은 mva(중심의 운동에서 오는 부분)에서 $I\omega$(역회전은 음으로 센다)를 뺀 것이다.

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

$a\omega = -V$인 상태로 속력 V로 구를 때 이 값은 $maV + \tfrac{2}{5}maV = \tfrac{7}{5}maV$이다. 이를 처음 값과 같게 놓으면

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

마찰력의 크기는 물론, 마찰력이 일정한지조차 언급하지 않고 같은 답을 얻는다. 최종 속력은 보존 법칙만으로 정해지며, 마찰력은 그 상태에 도달하는 데 걸리는 시간만을 결정한다.

스누커, 볼링, 테니스

같은 분석으로 많은 스포츠를 설명할 수 있다. 중심을 맞은 스누커 공은 처음에는 미끄러지다가 구르기 시작하며, 결국 처음 속력의 $\tfrac{5}{7}$로 굴러간다(공식에서 $\omega_0 = 0$으로 놓아라). 옆회전을 걸어 던진 텐핀 볼링공은 레인을 따라 미끄러지다가 구르기 시작할 때 "훅(hook)"을 그린다. 톱스핀을 걸어 친 테니스공은 급격히 떨어지는데, 이 경우 주된 효과는 공기역학적인 것이다. 회전하는 공이 주위의 공기를 휘게 하는 현상, 즉 **마그누스 효과**(*Magnus effect*)이다.

코리올리와 당구

오늘날 회전 좌표계(rotating frame)에서의 겉보기 힘(fictitious force)으로 기억되는 가스파르귀스타브 코리올리(Coriolis)(Section 11.5)는 1835년에 당구의 수학만을 다룬 책 *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*(당구 효과의 수학적 이론)를 썼다. 그는 여러 가지 가운데 특히, 회전을 걸어 친 공은 미끄러지는 동안 포물선(parabola)을 그리다가 이후 곧게 굴러간다는 것을 보였고, 바로 이 문제의 스크루 샷을 분석했다. 이 책은 지금도 당구를 연구하는 물리학자들에게 인용된다.

사고 기술

하나의 힘이 바꾸는 두 양을 추적하기

하나의 힘이 여러 양에 영향을 줄 때에는 그 힘이 각 양을 어떻게 바꾸는지 적고, 그 힘이 전혀 바꾸지 않는 조합을 찾아라.

여기서 마찰력은 v와 ω는 바꾸었지만 접촉점에 대한 각운동량은 바꾸지 않았다. 대학에서는 이런 조합을 찾는 일이 거듭 등장하는 주제이다. 미지의 힘이 사라지도록 모멘트를 잡을 점을 고르는 것은 좌표계를 고르는 일의 회전 버전이다.

더 도전하기

1 **톱스핀.** 구슬이 역회전 대신 앞쪽 회전 ω_0로 출발한다면 최종적으로 구르는 속력을 구하여라. $v_0/(a\omega_0)$가 어떤 값일 때 구슬이 빨라지는가?

2 **스누커 공.** 중심을 맞은 공이 회전 없이 v_0로 미끄러지기 시작한다. 공이 결국 $\frac{5}{7}v_0$로 구르게 됨을 보이고, 잃어버린 운동 에너지(kinetic energy)의 비율을 구하여라. (구르는 운동의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$이다.)

3 **고리.** $I = ma^2$인 얇은 고리가 자신의 평면 안에서 구르는 경우에 대해 문제를 다시 풀어라. 이제 어떤 비 $v_0/(a\omega_0)$일 때 고리가 $\frac{v_0}{7}$로 되돌아오는가?

4 **드로 샷.** 공이 처음부터 미끄러지지 않고 구르게 하려면 스누커 큐가 공의 어디를(중심보다 얼마나 높은 곳을, a로 나타내어) 쳐야 하는가? (**힌트:** 충격량(impulse)이 가해지는 동안 접촉점에 대한 각운동량을 생각하라.)

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 8장. 각운동량과 미끄러짐을 동반한 구름 운동을 다룬다.
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press), 강체(rigid body) 운동에 관한 장들.
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards*** (Sterling). 당구의 물리학을 많은 그림과 함께 설명한다.

11.7 막대 속의 심프슨 공식

문제

STEP II 1989, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/89-s2-q13`

도입

균일한 막대는 밀리고 회전할 때 어떻게 반응할까? 놀랍게도 역학의 모든 목적에서 막대는 세 개의 점질량과 정확히 똑같이 행동한다. 양 끝에 각각 질량의 6분의 1, 가운데에 3분의 2를 놓은 것이다. 막대에 무슨 일을 하든(밀든, 어떤 축을 중심으로 돌리든) 막대와 세 입자를 구별할 수 없다.

$\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$이라는 수는 낯익어 보일지도 모른다. 이 수들은 **심프슨 공식**(*Simpson's rule*) $\int_{-a}^{a} f \approx 2a(\frac{1}{6}f(-a) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{6}f(a))$의 가중치로, A 레벨(A level, 영국의 대학 입시 과정)에서 배웠을 수도 있는 수치 적분(numerical integration) 방법이다. 이것은 우연이 아니다. 동역학적으로 동등한(dynamically equivalent) 계와 수치 적분 공식은 같은 문제를 풀고 있는 것이다.

교육과정에 관한 참고

관성 모멘트(moment of inertia)는 2019년에 STEP 출제 범위에서 빠졌다. 어떤 축에 대한 물체의 관성 모멘트는 $\sum m_i d_i^2$, 즉 각 질량에 그 질량과 축 사이 거리의 제곱을 곱한 것의 합이다(연속인 물체라면 적분이 된다). 질량이 m이고 길이가 $2a$인 균일한 막대의 중심을 지나고 막대에 수직인 축에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{3}ma^2$이다. **평행축 정리**(*parallel axis theorem*)에 따르면, 임의의 축에 대한 관성 모멘트는 질량 중심을 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트에 md^2을 더한 것과 같다. 여기서 d는 두 축 사이의 거리이다.

시작하기 전에

생각해 보기 두 계의 질량이 같고, 질량 중심(centre of mass)이 같으며, 질량 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트가 같다고 하자. 그러면 왜 평행축 정리에 의해 다른 모든 축에 대한 관성 모멘트도 같아지는가?

임의의 축에 대하여 두 관성 모멘트는 모두 (O를 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트) $+md^2$과 같다. 첫째 항은 가정에 의해 같고, m과 d는 두 계에서 같다. ■

차근차근 풀기

1단계 막대

생각해 보기 양 끝에 질량 p를, 가운데에 질량 q를 놓자. 대칭성에 의해 질량 중심은 맞는다. 전체 질량과, 중심을 지나는 수직인 축에 대한 관성 모멘트로부터 어떤 조건이 필요한가?

$2p + q = m$이어야 하고, 가운데를 지나는 수직인 축에 대한 관성 모멘트가 $\frac{1}{3}ma^2$이어야 하므로 $2pa^2 = \frac{1}{3}ma^2$이다. 따라서 $p = \frac{1}{6}m$, $q = \frac{2}{3}m$이다.

생각해 보기 이것은 수직인 축뿐만 아니라 중심을 지나는 모든 축에 대해 성립하는가?

중심을 지나고 막대와 각 ψ를 이루는 축에 대하여, 막대를 따라 거리 r에 있는 점은 축에서 거리 $r\sin\psi$만큼 떨어져 있다. 따라서 (막대이든 입자들이든) 모든 관성 모멘트는 수직인 축에 대한 값의 $\sin^2\psi$배이고, 두 값은 모든 ψ에 대해 일치한다. (막대를 포함하는 평면 위에 있지 않은 축도 마찬가지이다. 중요한 것은 각 점과 축 사이의 거리뿐이고, O를 지나는 직선 위의 점에 대해서는 이 거리가 r에 비례한다.) 그러므로 막대는 질량 $\frac{1}{6}m$, $\frac{2}{3}m$, $\frac{1}{6}m$과 동역학적으로 동등하다. ■

2단계 직사각형

생각해 보기 얇은 판(lamina)을 한 변에 평행한 얇은 띠들로 자르자. 각 띠를 그와 동등한 세 입자로 바꾸자. 무엇을 얻게 되고, 그다음에는 무엇을 할 수 있는가?

각각의 얇은 띠는 막대이므로, 그 질량의 $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$을 왼쪽 변, 중심선, 오른쪽 변에 놓은 것과 동등하다. 모든 띠에 대해 더하면, 얇은 판은 질량이 $\frac{1}{6}M$, $\frac{2}{3}M$, $\frac{1}{6}M$인 세 개의 균일한 막대(왼쪽 변, 가운데, 오른쪽 변을 따라 놓인 막대)와 동등하다. 이제 이 막대들을 각각 같은

비율의 세 입자로 바꾸자. 각 점의 질량은 두 분수의 곱이 된다(그림 11.7.1).

$$\text{꼭짓점: } \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}, \qquad \text{변의 중점: } \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{9}, \qquad \text{중심: } \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{4}{9},$$

모두 M을 곱한 값이다. ■

(엄밀히 말하면, 각각의 대체는 얇은 판 전체의 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트를 보존해야 하며, 실제로 그렇다. 각 대체는 질량, 질량 중심, 그리고 그 조각의 질량 중심을 지나는 축들에 대한 관성 모멘트를 유지하고, 나머지는 평행축 정리가 해결해 준다.)

3단계 대각선에 대한 정사각형

한 변의 길이가 $2a$인 정사각형에서 대각선은 두 꼭짓점과 중심을 지나며, 이들은 관성 모멘트에 기여하지 않는다. 나머지 두 꼭짓점은 대각선에서 거리 $\sqrt{2}a$만큼, 네 변의 중점은 거리 $\frac{a}{\sqrt{2}}$만큼 떨어져 있다. 따라서

$$I = 2\cdot\tfrac{1}{36}M\cdot 2a^2 + 4\cdot\tfrac{1}{9}M\cdot\tfrac{a^2}{2} = \tfrac{1}{9}Ma^2+\tfrac{2}{9}Ma^2 = \tfrac{1}{3}Ma^2. \qquad ■$$

이것은 중심을 지나고 한 변에 평행한 축에 대한 관성 모멘트와 같다. (이것은 우연이 아니다. 정사각형에서는 중심을 지나고 그 평면 위에 있는 모든 축이 같은 답을 주며, 이는 연습문제에서 대칭성 논증으로 보인다.)

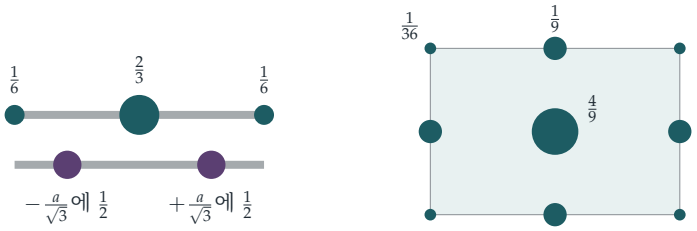
4단계 균일하지 않은 막대

> ? **생각해 보기** 막대의 길이가 L이고, 한쪽 끝에서 거리 x인 곳의 밀도가 $\frac{2mx}{L^2}$이라 하자. $x=0,\ \frac{L}{2},\ L$에 질량 p_0, p_1, p_2를 놓자. 전체 질량, 질량 중심, 끝점에 대한 관성 모멘트를 일치시키면 세 방정식을 얻는다. 그 방정식들은 무엇인가?

가벼운 쪽 끝에 대하여 막대의 전체 질량은 m, 1차 모멘트는 $\int_0^L x\cdot\frac{2mx}{L^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}mL$, 2차 모멘트는 $\int_0^L x^2\cdot\frac{2mx}{L^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mL^2$이다. 이들을 일치시키면

$$p_0+p_1+p_2=m, \qquad \tfrac{1}{2}Lp_1+Lp_2=\tfrac{2}{3}mL, \qquad \tfrac{1}{4}L^2p_1+L^2p_2=\tfrac{1}{2}mL^2.$$

둘째 식(L로 나눈 것)에서 셋째 식(L^2으로 나눈 것)을 빼면 $\frac{1}{4}p_1=\frac{1}{6}m$이므로 $p_1=\frac{2}{3}m$이고, 따라서 $p_2=\frac{1}{3}m$, $p_0=0$이다. 입자는 두 개만 있으면 된다. 중점에 $\frac{2}{3}m$, 무거운 쪽 끝에 $\frac{1}{3}m$이다. ■



두 가지 동등한 막대 얇은 판: $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$의 곱

그림 11.7.1 왼쪽 위: 균일한 막대는 양 끝과 중심에 놓인 (막대 질량에 대한 비율로) $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$의 질량과 동역학적으로 동등하며, 이는 심프슨 공식의 가중치이다. 왼쪽 아래: 막대는 중심에서 거리 $\frac{a}{\sqrt{3}}$에 놓인 두 개의 절반 질량과도 동등하며, 이는 2점 가우스 적분의 절점이다. 오른쪽: 직사각형 얇은 판은 아홉 개의 질량과 동등하며, 점의 넓이는 질량에 비례한다.

돌아보기

- **모멘트를 일치시킨다.** 동역학적 동등성이란 질량 분포의 0차, 1차, 2차 모멘트를 일치시키는 것이다.
- **차원을 하나씩 쌓아 올린다.** 직사각형은 막대들로 이루어진 막대이므로, 그 가중치는 곱이 된다.
- **방정식과 미지수의 개수를 센다.** 일치시켜야 할 모멘트가 세 개, 미지의 질량이 세 개이다. 그리고 때로는 해에 우연히 0이 나타나기도 한다.

숨은 수학

심프슨 공식

질량 분포의 모멘트를 일치시키는 것은 수치 적분 공식을 설계하는 것과 같은 문제이다. $f = 1, x, x^2$에 대해 정확한 공식 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$는

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -aw_0 + aw_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

을 만족해야 하며, 이는 막대에 대한 조건과 정확히 같다($f = 1, x, x^2$이 각각 질량, 1차 모멘트, 관성 모멘트의 역할을 한다). 해는 $w = 2a(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$, 즉 심프슨 공식이다. 대칭성 덕분에 덤도 생긴다. $f = x^3$에 대해서도 양변이 모두 0이 되므로 공식이 정확하다. 따라서 심프슨 공식은 삼차식을 정확하게 적분하며, 매끄러운 함수에 대한 오차는 4계 도함수에 비례한다. 그러므로 막대는 질량, 중심, 관성 모멘트뿐만 아니라 3차 모멘트까지도 세 입자와 일치한다.

가우스 구적법과 관성 텐서

질량뿐만 아니라 위치도 자유롭게 정할 수 있다면 입자 두 개로 충분하다. 점 $\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ 각각에 질량의 절반을 놓으면 된다. 확인해 보면 $2\cdot\frac{1}{2}m\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{1}{3}ma^2$이다. 이것이 2점 **가우스–르장드르 공식**(*Gauss–Legendre rule*) $\int_{-a}^{a} f \approx a\bigl(f(-\frac{a}{\sqrt{3}})+f(\frac{a}{\sqrt{3}})\bigr)$이며, 이 공식도 삼차식에 대해 정확하다. 가우스(Carl Friedrich Gauss)는 1814년에 교묘하게 배치한 n개의 점으로 $2n-1$차 다항식을 정확하게 적분할 수 있음을 보였고, 가우스 구적법(Gaussian quadrature)은 오늘날 수치해석의 표준적인 방법이다.

역학에서 물체의 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트는 3×3 대칭행렬 하나에 담기는데, 이를 **관성 텐서**(*inertia tensor*)라 한다. 질량, 질량 중심, 관성 텐서가 같은 두 물체는 모든 힘에 대해 똑같이 반응한다. 그래서 공학자들은 시뮬레이션에서 복잡한 부품을 몇 개의 점질량으로 바꿀 수 있다. 관성 텐서의 고유벡터(eigenvector)는 **주축**(*principal axes*)으로, 물체가 안정적으로 회전할 수 있는 축이다.

사고 기술

계를 동등한 계로 바꾸기

두 계가 문제에서 중요한 모든 양에서 일치한다면, 복잡한 계를 단순한 계로 바꾸어라.

여기서는 세 개의 모멘트만이 중요했으므로, 연속인 막대를 세 입자로 바꿀 수 있었다. 대학에서 이 아이디어는 가우스 구적법으로, 전자기학과 중력 이론의 다중극 전개(multipole expansion)로(멀리서는 전하 분포나 질량 분포의 몇몇 모멘트만이 중요하다), 그리고 통계학의 적률법(method of moments)으로 나타난다.

더 도전하기

1 **심프슨 공식.** 구간 하나로 심프슨 공식을 사용하여 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$의 값을 어림하고, $\frac{\pi}{4}$와 비교하여라. 이 공식이 $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$와 $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$에 대해서는 정확하지만 $\int_{-1}^{1} x^4\,dx$에 대해서는 그렇지 않음을 확인하여라.

2 **모든 축이 똑같다.** 정사각형 얇은 판의 중심을 지나고 그 평면 위에 있는 임의의 축에 대한 관성 모멘트가 $\frac{1}{3}Ma^2$임을 보여라. (**힌트:** 동등한 아홉 입자는 90° 회전에 대해 대칭이다. 이것은 $\cos\psi$와 $\sin\psi$에 대한 이차식에 관해 무엇을 말해 주는가?)

3 **삼각형.** 질량이 M인 균일한 삼각형 얇은 판이 세 변의 중점에 놓인 질량 $\frac{1}{3}M$인 세 입자와 동역학적으로 동등함을 보여라.

4 **속이 찬 정육면체.** 속이 찬 균일한 정육면체와 동역학적으로 동등한 27개 입자의 계를 찾고, 이를 이용하여 한 모서리의 길이가 $2a$인 정육면체의 한 모서리에 대한 관성 모멘트를 구하여라.

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 강체와 관성 모멘트를 다루는 장.
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*** (Cambridge University Press). 심프슨 공식과 가우스 구적법을 포함하여 수치 적분을 다루는 장들.
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*** (Dover). 고전적인 참고서.

11.8 기울어진 평형

문제

STEP III 2025, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

도입

럭비공을 탁자 위에 놓으면 옆으로 누운 채 자리를 잡는다. 끝을 아래로 하여 세워도 아주 조심스럽게 하면 그대로 균형을 잡지만, 살짝만 건드려도 넘어진다. 탁자 위에 놓인 모든 강체(rigid body)에는 몇 개의 평형 위치(equilibrium position)가 있으며, 어떤 것은 안정(stable)하고 어떤 것은 불안정(unstable)하다. 어떤 평형 위치가 존재하는지는 오직 물체의 모양과 무게중심(centre of mass)에 따라서만 정해진다. 물체는 평형 위치를 몇 개나 가질 수 있을까? 최소 몇 개일까?

이 문제에서는 위쪽 절반은 둥근 돔이고 아래쪽 절반은 뾰족한, 팽이 모양의 입체를 만들고, 이 입체가 똑바로 서거나 거꾸로 서는 것 말고도 서로 다른 세 가지 기울기로 놓일 수 있음을 보인다. 핵심 아이디어는 단 하나의 기하학적 조건이다. 물체가 표면의 한 점으로 정지해 있을 수 있는 것은 그 점에서 표면의 법선(normal)이 무게중심을 지날 때, 그리고 그때뿐이다. 그 배후에는 최근의 발견이 있다. 안정한 위치와 불안정한 위치를 하나씩만 가지는 볼록(convex) 도형인 괴뫼츠(Gömböc)이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 입체가 곡면 위의 한 점 X에서만 탁자에 닿은 채 놓여 있다. 이 입체에 작용하는 힘은 무게(무게중심 G에 작용한다)와 X에서의 수직항력(reaction)이다. 언제 이 힘들이 평형을 이루는가?

탁자는 X에서 표면에 접하고, 수직항력은 X에서 탁자에 수직으로, 즉 표면의 법선 방향으로 작용한다. 무게는 G를 지나 연직 방향으로 작용한다. 두 힘이 평형을 이루려면 같은 직선

위에서 작용해야 하므로, X를 지나는 연직선, 곧 X에서의 법선이 G를 지나야 한다. 따라서 물체가 X에서 닿은 채 정지할 수 있는 것은 X에서의 법선이 G를 지날 때, 그리고 그때뿐이다.

차근차근 풀기

1단계 무게중심

생각해 보기 입체를 반지름 x, 두께 δx, 높이 y인 얇은 원통 껍질(cylindrical shell)로 잘라 보자. 껍질 하나의 부피는 얼마이고, 그 무게중심은 어디에 있는가?

$y = \frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$일 때, 껍질 하나의 부피는 $2\pi x y\,\delta x$이고 무게중심은 높이 $\frac{y}{2}$에 있다. 따라서

$$V = \int_0^r 2\pi x y\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\pi r^3}{n+2},$$

이고, 밑면에 대한 모멘트(moment)는

$$\begin{aligned}\int_0^r 2\pi x \cdot \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{r^{2n-2}}\int_0^r x(r^n - x^n)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi r^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{n^2\pi r^4}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

이다. (괄호 안이 이렇게 간단해지는 것은 $(n+1)(n+2) - 4(n+1) + (n+2) = n^2$이기 때문이다.) 나누면

$$\bar{y} = \frac{nr}{2(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

이다. $n = 2$(회전 포물면(paraboloid))일 때 이 값은 $\frac{r}{3}$으로, 잘 알려진 결과이다. $n \to \infty$이면 입체는 원기둥이 되고 $\bar{y} \to \frac{r}{2}$이다.

2단계 법선이 축과 만나는 곳

$x = rp$에서 곡선의 기울기는 $-\frac{nx^{n-1}}{r^{n-1}} = -np^{n-1}$이므로, 법선의 기울기는 $\frac{1}{np^{n-1}}$이다. 법선을 따라 점 $(rp, r(1-p^n))$에서 y축까지 움직이면 x는 rp만큼, y는 $\frac{rp}{np^{n-1}} = \frac{r}{np^{n-2}}$만큼 줄어든다. 따라서

$$Y = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right). \qquad \blacksquare$$

생각해 보기 $n = 4$일 때 $Y = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4p^2}\right)$이다. 이 값은 어디에서 가장 큰가? $p \to 0$일 때와 $p = 1$일 때는 어떻게 되는가?

$p^6 = \frac{1}{8}$, 즉 $p^2 = \frac{1}{2}$일 때 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = 0$이다. 이때 $Y = r\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}r$이다. $\blacksquare$

$p \to 0$이면 $Y \to -\infty$이다(꼭대기 근처에서 돔은 매우 평평하여 법선이 거의 연직이므로, 축과 아주 아래쪽에서 만난다). $p = 1$에서는 $Y = -\frac{1}{4}r$이다. 따라서 p가 0에서 1까지 변할 때 Y는 $-\infty$에서 $\frac{1}{4}r$까지 증가했다가 다시 $-\frac{1}{4}r$로 감소한다.

3단계 팽이

생각해 보기 소문항 (iii)의 입체는 뒤집힌 회전 포물면($n = 2$) 위에 돔($n = 4$)을 얹은 것이다. 이 입체의 무게중심은 어디에 있는가?

1단계에 의해 돔의 부피는 $\frac{2\pi r^3}{3}$이고 무게중심은 $\frac{2r}{5}$에 있다. 회전 포물면의 부피는 $\frac{\pi r^3}{2}$이고, 거꾸로 놓여 있으므로 무게중심은 $-\frac{r}{3}$에 있다. 따라서

$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}\, r = \frac{\frac{4}{15} - \frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}\, r = \frac{3r}{35}.$$

이다. G는 $\left(0, \frac{3r}{35}\right)$에 있으며, 가장 넓은 부분보다 약간 위에 있다.

4단계 평형 위치의 개수 세기

생각해 보기 기울어진 평형 위치가 되려면 (A나 B가 아닌) 점 가운데 그 점의 법선이 G를 지나는 점이 있어야 한다. 표면의 각 부분에서, 법선이 높이 $\frac{3r}{35}$에서 축과 만나는 점은 몇 개인가?

돔. 돔의 법선이 축과 만나는 높이 Y는 $-\infty$에서 $\frac{1}{4}r$까지 증가했다가 $-\frac{1}{4}r$로 감소한다. $-\frac{1}{4}r < \frac{3r}{35} < \frac{1}{4}r$이므로, 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 값 $\frac{3r}{35}$은 증가하는 구간에서 한 번, 감소하는 구간에서 한 번 나타난다. 즉 두 점이다.

뾰족한 밑부분. $n = 2$인 경우의 소문항 (ii)의 결과를 x축에 대하여 대칭이동하면, 매개변수가 p인 점에서의 법선은 축과 $-r\left(1 - p^2 - \frac{1}{2}\right) = r\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)$에서 만나며, 이 값은 $-\frac{1}{2}r$에서 $\frac{1}{2}r$까지 증가한다. 이 값은 $p^2 = \frac{41}{70}$에서 정확히 한 번 $\frac{3r}{35}$과 같아진다.

이 세 점은 각각 하나의 평형 위치를 주며, 세 법선이 축과 이루는 각이 모두 다르므로 $\overrightarrow{AB}$는 연직선과 0이 아닌 서로 다른 세 각을 이룬다(그림 11.8.1). ■

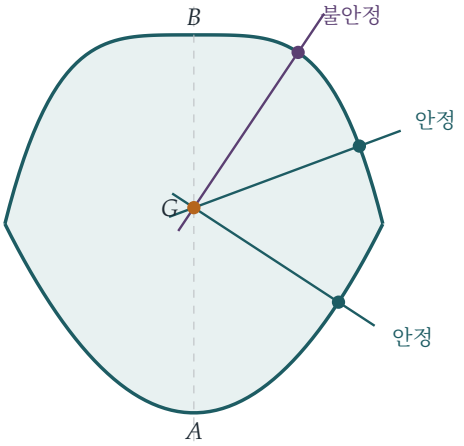


그림 11.8.1 소문항 (iii)의 입체의 단면과 그 무게중심 G(호박색). 표시된 세 점 각각에서 표면의 법선이 G를 지나므로, 입체는 그 점으로 정지해 있을 수 있다. 이 평형 위치 가운데 둘은 안정하고(그곳에서 표면이 국소적으로 G에 가장 가깝다) 하나는 불안정하다(국소적으로 가장 멀다).

돌아보기

- **물리적 조건을 기하로 바꾸기.** 평형 조건은 "법선이 G를 지난다"가 되었다.
- **풀지 않고 존재 보이기.** 우리는 끝내 각을 구하지 않았다. 함수 $Y(p)$의 모양과 함께 중간값 정리를 쓰면 그런 각이 몇 개인지 알 수 있었다.
- **일반적인 결과 다시 쓰기.** 일반적인 n에 대한 소문항 (ii)의 결과로 소문항 (iii)의 표면의 두 부분을 모두 다룰 수 있었다.

숨은 수학

임계점으로서의 평형 위치

입체가 점 X로 정지해 있을 때, 탁자로부터 G의 높이는 G에서 X에서의 접평면(tangent plane)까지의 거리이며, 볼록한 물체에서 GX가 법선 방향이면 이 거리는 $|GX|$이다. 일반적으로 평형 위치는 G에서 표면까지 거리의 **임계점**(*critical point*)이다. $|GX|$가 정상값을 가지는 점 X는 바로 그 점의 법선이 G를 지나는 점이다. 안정한 평형 위치는 이 거리의 극소점(local minimum)이고(G가 가능한 한 낮다), 불안정한 평형 위치는 극대점(local maximum)이나 안장점(saddle point)이다.

단면을 따라 A에서 B까지 돌아가면 G로부터의 거리는 다음과 같이 변한다. A에서는 크고(극대: 뾰족한 끝으로 균형을 잡고 있으므로 불안정), 밑부분의 기울어진 점에서는 더 작

고(극소, 안정), 테두리에서는 더 크고, 돔의 아래쪽 기울어진 점에서는 더 작고(안정), 위쪽 점에서는 더 크며(불안정), B에서는 더 작다(안정: 돔의 꼭대기로 놓여 있다). 그림에서 보듯이 극소와 극대는 번갈아 나타나야 한다. (사실 문제에서 세지 않는 평형 위치가 하나 더 있다. 입체는 표면의 법선이 하나로 정해지지 않는 날카로운 테두리 위에서도 불안정하게 균형을 잡을 수 있다.)

괴뫼츠

볼록한 물체는 최소 몇 개의 평형 위치를 가질 수 있을까? 어떤 물체든 적어도 하나의 안정한 위치와 하나의 불안정한 위치를 가진다. 바로 표면에서 G에 가장 가까운 점과 가장 먼 점이다. 밀도가 균일한 2차원 볼록 도형은 항상 적어도 네 개를 가진다(거리의 극소 둘과 극대 둘이 번갈아 나타난다). 1995년에 블라디미르 아르놀트(Vladimir Arnold)는 밀도가 균일한 3차원 볼록 물체가 단 두 개, 즉 안정한 위치 하나와 불안정한 위치 하나만 가질 수 있는지 물었다. 2006년에 Gábor Domokos와 Péter Várkonyi가 그런 물체를 만들어 냈는데, 이것이 **괴뫼츠**이다. 이 물체는 어떤 자세로 내려놓아도 구르고 흔들리다가 단 하나뿐인 안정한 위치에 이른다. 나중에 Domokos는 어떤 거북의 등딱지가 이 모양에 가깝다는 것을 알아차렸는데, 이 모양 덕분에 거북은 뒤집혔을 때 몸을 다시 바로 세우기가 쉬워진다.

아르키메데스와 물에 뜨는 물체

물체의 안정성에 대한 연구는 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라간다. 그는 **부체에 관하여**(On Floating Bodies)에서 물에 뜬 회전 포물면(배 선체의 모형)이 언제 똑바로 선 채 안정하고 언제 뒤집히는지를 그 모양과 밀도로 분석했다. 오직 기하만으로 얻어낸 그의 답에는 여기에서 쓴 것과 똑같은 종류의 무게중심과 법선 계산이 들어 있다. 조선 기술자들은 지금도 **메타센터**(*metacentre*)라는 형태로 그의 아이디어를 사용한다. 부력 중심(centre of buoyancy)을 지나는 연직선이 배의 축과 만나는 점이 무게중심보다 위에 있으면 배는 안정하다.

사고 기술

퍼텐셜 에너지 지형

평형 위치는 퍼텐셜 에너지(*potential energy*)의 정상점(*stationary point*)이고, 안정한 평형 위치는 그 극소점이다. 정상점을 직접 구하는 대신 그 개수를 세어라.

여기서 퍼텐셜 에너지는 G의 높이, 곧 G에서 표면까지의 거리에 비례했다. 대학에서는 이 관점이 역학, 화학(분자는 에너지의 극소점에 자리 잡는다), 그리고 위상수

학(topology)을 관통한다. 위상수학에서 **모스 이론**(*Morse theory*)은 곡면 위의 임의의 함수가 가지는 극소점, 극대점, 안장점의 개수가 곡면의 모양에 의해 제약됨을 보여 준다.

더 도전하기

1 **스스로 일어서는 장난감.** STEP II 1996, 9번 문제 (`step.maths.org/questions/96-s2-q9`)에 도전해 보라. 반구 위에 원뿔을 얹은 물체는 언제 스스로 바로 서는가? (**힌트:** G는 반구의 중심에 대하여 어디에 있어야 하는가?)

2 **구.** 밀도가 균일한 속이 찬 구에서는 모든 법선이 중심을 지난다. 이것은 구의 평형 위치에 대해 무엇을 말해 주는가? 구의 무게중심이 중심에서 약간 벗어나 있다면 어떻게 되는가?

3 **타원.** 직선 위에서 자신의 평면 안에서 구르는 타원판은 평형 위치를 정확히 네 개 가짐을 보이고, 그 가운데 어느 것이 안정한지 밝혀라.

4 **두 회전 포물면.** 소문항 (iii)의 돔을 회전 포물면 $ry = r^2 - x^2$로 바꾸어 입체가 x축에 대하여 대칭이 되게 하자. G가 원점에 있음을 보이고, 기울어진 평형 위치를 구하고, 이 평형 위치들이 왜 기울기가 같은 것끼리 쌍을 이루는지 설명하라.

더 읽을거리

- **Péter Várkonyi & Gábor Domokos, "Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem"**, *Journal of Nonlinear Science* 16 (2006). 괴뫼츠를 발표한 논문이다.
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 평형과 안정성을 다룬다.
- **Chris Rorres, "Completing Book II of Archimedes's *On Floating Bodies*"**, *Mathematical Intelligencer* 26 (2004). 아르키메데스의 안정성 분석을 현대적인 그림과 함께 소개한다.

11.9 안전 포물선

문제

STEP II 2014, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/14-s2-q10`

도입

분수대가 모든 방향으로 같은 속력으로 물을 뿜어 올린다. 물줄기들은 바깥 경계가 뚜렷한, 반짝이는 돔을 이룬다. 그 안쪽의 모든 점은 물이 지나가고, 바깥쪽에는 물이 전혀 닿지 않는다. 그 경계는 포물선이며 **안전 포물선**(parabola of safety)이라고 부른다. 주어진 포구 속력의 대포로는 어떤 각도로 쏘더라도 이 곡선 바깥에 있는 표적을 맞힐 수 없기 때문이다.

놀라운 점은 이 경계 자체가 궤적(trajectory) 가운데 하나가 아니라는 것이다. 그것은 궤적 전체로 이루어진 곡선족의 **포락선**(envelope), 즉 모든 궤적에 한 번씩 접하는 곡선이다. 이는 Section 8.1에서 직선 $y = 0$이 포물선족에 접했던 것과 똑같다. 이 문제는 이차식의 판별식(discriminant)만으로 이 곡선을 찾아낸다.

시작하기 전에

생각해 보기 x와 y를 t로 나타낸 다음 t를 소거하여라. $\sec^2\theta$를 $\lambda = \tan\theta$로 어떻게 나타낼 수 있는가?

$x = ut\cos\theta$, $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$에 $t = \frac{x}{u\cos\theta}$를 대입하면

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\lambda^2),$$

이다. 여기서 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하였다.

차근차근 풀기

1단계 x를 고정하고 각도를 바꾸기

> **생각해 보기** 고정된 $x > 0$에 대하여 y를 λ의 함수로 생각하자. 이것은 어떤 종류의 함수인가? λ가 모든 실수를 움직일 때 이 함수는 어떤 값들을 갖는가?

고정된 x에 대하여 y는 λ에 대한 이차식이고, 최고차항의 계수 $-\frac{gx^2}{2u^2}$는 음수이다. 즉 λ에 대하여 위로 볼록한 포물선이다. 따라서 최댓값을 가지며, $\lambda \to \pm\infty$일 때 $y \to -\infty$이다. 연속함수이므로 최댓값 이하의 모든 값을 갖는다. 최댓값은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = x - \frac{gx^2}{u^2}\lambda = 0$, 즉 $\lambda = \frac{u^2}{gx}$일 때이고, 이때

$$Y = \frac{u^2}{gx}\,x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \frac{u^4}{g^2x^2}\right) = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}. \qquad \blacksquare$$

(같은 말로, 점 (x, y)에 도달할 수 있는 것은 이차방정식 $\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \frac{gx^2}{2u^2} + y = 0$이 실근 λ를 가질 때와 정확히 같고, 판별식 조건에서 $y \le Y$를 얻는다.)

2단계 영역

곡선 $Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$는 꼭짓점이 $\left(0, \frac{u^2}{2g}\right)$인 위로 볼록한 포물선이다. 이 꼭짓점의 높이는 똑바로 위로 쏘았을 때 도달하는 높이이고, 이 곡선은 최대 사거리(maximum range)인 $x = \pm\frac{u^2}{g}$에서 지면과 만난다. 이 곡선 위 또는 아래에 있는(그리고 지면 위에 있는) 모든 점에는 도달할 수 있고, 곡선보다 위에 있는 점에는 도달할 수 없다(그림 11.9.1).

> **생각해 보기** 곡선보다 엄밀히 아래에 있는 점을 지나는 궤적은 몇 개인가? 곡선 위의 점은 어떠한가?

곡선 아래의 점은 λ에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우에 해당한다. 즉 발사각이 두 개, 높은 각 하나와 낮은 각 하나가 있다. 곡선 위의 점은 중근을 갖는 경우에 해당한다. 즉 궤적이 정확히 하나 있고, 그 궤적은 그 점에서 곡선에 접한다.

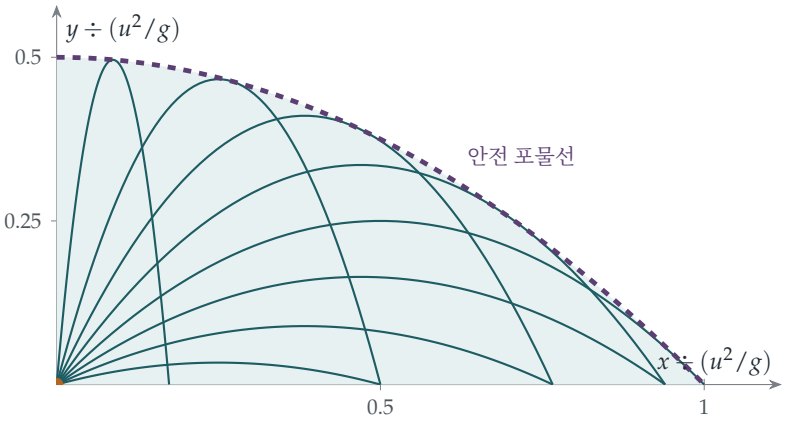


그림 11.9.1 고정된 속력 u와 각도 $15°, 25°, \ldots, 85°$에 대한 궤적들(청록색). 각 궤적은 점선으로 나타낸 안전 포물선 $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$에 정확히 한 번 접하며, 그 아래 영역(색칠한 부분)이 바로 도달할 수 있는 점들의 집합이다. 원점 O(호박색)는 안전 포물선의 초점이다.

3단계 가장 먼 점

생각해 보기 (지면 위 또는 그보다 위에서) O로부터 가장 먼, 도달 가능한 점은 경계 위에 있다. 거리의 제곱 $x^2 + Y^2$을 x^2의 함수로 나타내어라. 이 함수는 증가하는가, 감소하는가?

$X = x^2$이라 하자. 그러면

$$x^2 + Y^2 = X + \left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right)^2, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(x^2 + Y^2) = 1 - \frac{g}{u^2}\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{g^2 X}{2u^4} > 0.$$

따라서 경계를 따라 바깥으로 갈수록 거리가 증가하고, 가장 먼 점은 경계가 지면과 만나는 $x = \frac{u^2}{g}$인 점이다. 최대 거리는

$$\frac{u^2}{g},$$

이고, 이는 $45°$로 쏘는 보통의 최대 사거리 발사로 얻어진다. ■

돌아보기

- **질문을 뒤집어라.** 주어진 궤적이 어디로 가는지를 묻는 대신, 주어진 점을 지나는 궤적이 어떤 것들인지를 물어라.
- **매개변수에 대한 이차식.** 각 점에 대하여 $\lambda = \tan\theta$에 대한 방정식은 이차방정식이고, 그 판별식이 그 점에 도달할 수 있는지를 결정한다.

- **둘, 하나, 또는 없음.** 안쪽의 점에는 두 각도로, 경계 위의 점에는 한 각도로 도달하며, 바깥쪽의 점에는 어떤 각도로도 도달할 수 없다.

숨은 수학

포락선

일매개변수 곡선족(one-parameter family of curves) $F(x, y, \lambda) = 0$은 종종 **포락선**, 즉 곡선족의 모든 곡선에 접하는 곡선을 갖는다. 포락선은 $F = 0$과 $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$을 연립하여 풀면 구할 수 있는데, 이는 우리가 λ에 대하여 y를 최대화하면서 한 일과 정확히 같다. 포락선은 과학 곳곳에 나타난다. 커피 잔 표면에 보이는 밝은 빛의 곡선은 반사된 광선들의 포락선으로, **화선**(caustic)이라고 한다. 초음속 항공기의 소닉 붐은 항공기가 내는 음파들의 포락선인 **마하 원뿔**(Mach cone)을 따라 전달된다. 그리고 Section 8.1에서는 미분방정식의 해들로 이루어진 곡선족의 포락선이 그 자체로 해, 곧 "특이"해였다.

초점

안전 포물선에는 놀라운 성질이 있다. 그 초점(focus)이 발사점 O라는 것이다. (포물선 $y = c - \frac{x^2}{4c}$의 초점은 원점이며, 여기서는 $c = \frac{u^2}{2g}$이다.) 각 궤적 역시 포물선이고, 모든 궤적의 초점은 O를 중심으로 하는 반지름 $\frac{u^2}{2g}$인 원 위에 있다. 이는 에너지로 설명할 수 있다. 높이 y에서 발사체의 속력은 $\sqrt{u^2 - 2gy}$이고, 이 값은 준선(directrix)의 높이 $\frac{u^2}{2g}$에서 0이 된다. 그리고 준선이 같은 직선이면서 O를 지나는 포물선들은 그 초점이 이 원 위에 있다.

토리첼리의 포물선

갈릴레이(Galileo)는 1609년 무렵 발사체가 포물선을 따라 움직이며, 평지에서의 최대 사거리는 45°일 때 얻어진다는 것을 보였다. 그의 제자이자 기압계의 발명자로 더 잘 알려진 에반젤리스타 토리첼리(Evangelista Torricelli)는 1644년 *De motu gravium*에서 안전 포물선을 발견하였다. 포병들에게 이것은 실용적인 질문, 즉 애초에 어떤 표적들이 사정거리 안에 있는가에 대한 답이었다. 토리첼리는 또한 주어진 점을 지나는 궤적들이 쌍으로 나타나며, 그 각도들이 그 점의 방향과 연직 방향에 대하여 대칭임을 보였다. 이것이 바로 이 문제의 높은 발사와 낮은 발사이다.

사고 기술

곡선족의 포락선

곡선족이 덮는 영역의 경계를 찾으려면, 점 하나를 고정하고 어떤 매개변수 값에 대하여 곡선이 그 점을 지나는지 물어라. 경계는 해의 개수가 바뀌는 곳이다.

점이 움직일 때 해의 개수를 세는 이 같은 아이디어는 광학의 화선 연구, 동역학계(dynamical system)의 분기(bifurcation) 연구, 그리고 방정식의 해의 개수가 어떻게 바뀔 수 있는지를 분류하는 파국 이론(catastrophe theory)의 바탕이다.

더 도전하기

1 **폭발하는 불꽃놀이.** STEP II 2023, 10번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 시험지 묶음, `www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`)에 도전해 보아라. 이 문제는 폭발로 흩어지는 입자들을 중심이 자유낙하하는 구로 보고, 안전 포물면을 따라 움직이는 입자를 찾는다.

2 **비탈 위로 쏘기.** 경사각이 β인 비탈면 위쪽으로 속력 u로 쏜 발사체의 최대 사거리를 구하여라. (힌트: 직선 $y = x\tan\beta$는 안전 포물선과 어디에서 만나는가?) 최적의 발사 방향이 비탈면과 연직 방향 사이의 각을 이등분함을 보여라.

3 **두 각도.** 점 P에 도달하는 두 각도가 OP와 연직 방향 사이의 각의 이등분선에 대하여 대칭임을 보여라.

4 **초점들.** 각도가 θ인 궤적의 초점이 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$임을 보이고, 이로부터 초점들이 O를 중심으로 하는 원 위에 있음을 보여라.

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press, 고전역학 입문서), 3장. 궤적들의 포락선을 다룬다.
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, "On caustics of plane curves"**, *American Mathematical Monthly* 88 (1981). 기하학에서의 포락선과 화선.
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves*** (Cambridge University Press, 곡선에 관한 책). 포락선, 화선을 비롯한 여러 고전적인 곡선들을 작도법과 함께 다룬다.

11.10 나에게로 되돌아오는 공

문제

STEP II 2019, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

도입

공을 앞으로 던지면 공은 땅에 떨어질 때까지 던진 사람에게서 계속 멀어진다. 당연한 일이다. 공을 똑바로 위로 던지면 공은 다시 돌아온다. 그렇다면 그 사이 어딘가에서 무언가가 바뀌어야 한다. 즉 공이 멀어지다가 **가까워지고**, 땅에 떨어지기 전에 다시 멀어지는 각도가 있어야 한다. 이 문제는 그 정확한 경계값 $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 곧 약 $70.5°$를 찾는다.

이 결과는 수학에서 흔히 볼 수 있는 상황의 좋은 예이다. 모두가 단조(monotonic)라고 생각하는 양이 실제로는 단조가 아닌 경우이다. 또한 대학에서 늘 쓰이는 표준 기법도 보여 준다. 거리가 증가하는지 알아보려면 거리의 **제곱**을 미분(differentiate)하면 되는데, 이렇게 하면 제곱근을 피할 수 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 왜 OP보다 OP^2을 다루는 것이 더 쉬울까? "OP가 증가한다"는 것은 "OP^2이 증가한다"는 것과 같은가?

$OP^2 = x^2 + y^2$은 t에 대한 다항식(polynomial)이지만, OP에는 제곱근이 들어 있다. $OP \geq 0$이고 제곱하는 함수는 음이 아닌 수에서 증가하므로, OP는 OP^2이 증가할 때 정확히 그때에만 증가한다.

차근차근 풀기

1단계 거리의 제곱

$x = ut\cos\alpha$, $y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이므로

$$OP^2 = u^2t^2\cos^2\alpha + u^2t^2\sin^2\alpha - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 = u^2t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

> **생각해 보기** t에 대하여 미분해 보자. 인수 t를 묶어 내면 무엇이 남는가? 그것은 언제 모든 t에 대해 양수인가?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = 2u^2t - 3ugt^2\sin\alpha + g^2t^3 = t(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2).$$

$t > 0$일 때 부호는 이차식(quadratic) $g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2$의 부호와 같다. 이 이차식은 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이므로, 판별식(discriminant)이 음수이면 모든 t에 대해 양수이다.

$$9u^2g^2\sin^2\alpha - 8u^2g^2 < 0 \iff \sin^2\alpha < \frac{8}{9} \iff \sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

이 경우 OP는 비행하는 동안 내내 증가한다. ■

2단계 더 가파르게 던지기

> **생각해 보기** $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$이면 이차식은 서로 다른 두 실근을 가진다. 두 근은 양수인가? 작은 근은 입자가 땅에 떨어지기 전인가?

두 근의 합은 $\frac{3u\sin\alpha}{g} > 0$이고 곱은 $\frac{2u^2}{g^2} > 0$이므로 두 근은 모두 양수이며, 두 근 사이에서 이차식, 따라서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2$은 음수이다. 입자는 $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$에 땅에 떨어진다. 작은 근은

$$t_1 = \frac{u}{2g}(3\sin\alpha - \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}) < \frac{u}{2g}\cdot 3\sin\alpha < \frac{2u\sin\alpha}{g} = T.$$

따라서 t_1 직후(그리고 땅에 떨어지기 전)에 OP는 감소한다. ■

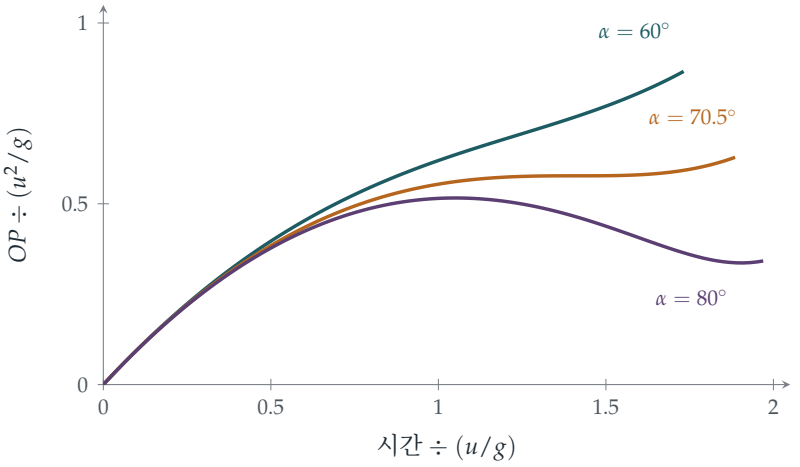


그림 11.10.1 세 가지 각도에 대하여, 땅에 떨어질 때까지 던진 사람으로부터의 거리를 시간에 따라 나타낸 그래프. $60°$(청록색)에서는 거리가 항상 증가한다. 임계각(critical angle) $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$(호박색)에서는 거리가 한순간 멈춘다. $80°$(자주색)에서는 공이 멀어지다가 한동안 던진 사람 쪽으로 돌아오고, 땅에 떨어지기 직전에 다시 멀어진다.

3단계 움직이는 관찰자

생각해 보기 Q는 지면을 따라 반대 방향으로 속력 v로 O에서 멀어진다. Q에서 재면 수평 거리는 $x + vt$이다. 이것은 계산에 어떤 영향을 주는가?

QP의 수평 성분은 $(u\cos\alpha + v)t$이고 수직 성분은 $ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이다. 따라서

$$QP^2 = \big((u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha\big)t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4,$$

이는 첫째 항의 u^2을 $w^2 = (u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha$로 바꾼 것 말고는 앞과 같다. 도함수(derivative)는 $t\big(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2w^2\big)$이고, 이것이 모든 $t > 0$에 대해 양수일 조건은 다음과 같다.

$$9u^2\sin^2\alpha < 8w^2 \quad\Longleftrightarrow\quad u^2\sin^2\alpha < 8(u\cos\alpha + v)^2,$$

여기서 둘째 부등식은 양변에서 $8u^2\sin^2\alpha$를 소거하여 얻는다. 제곱근을 취하면($u\sin\alpha$와 $u\cos\alpha + v$는 모두 양수이다) $u\sin\alpha < 2\sqrt{2}(u\cos\alpha + v)$이고, 이를 정리하면

$$2\sqrt{2}\,v > (\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha)u. \qquad \blacksquare$$

(이 조건이 성립하면 도함수가 모든 $t > 0$에 대해 양수이므로, 이는 QP가 비행하는 동안 내내 증가하기 위한 충분조건이다.)

돌아보기

- **제곱을 미분하라.** 거리의 제곱은 다항식이고, 그 도함수는 거리의 도함수와 부호가 같다.
- **항상 양수인 이차식.** "모든 시간에 대해 증가한다"는 조건이 판별식에 대한 조건이 되었다.
- **새 문제를 옛 문제로.** 움직이는 관찰자는 계수 하나만 바꾸었으므로, 앞의 분석을 그대로 적용할 수 있었다.

숨은 수학

기하학적 관점

OP는 P의 속도(velocity)가 "안쪽"을 향할 때, 즉 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 둔각(obtuse angle)을 이룰 때, 다시 말해 $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} < 0$일 때 정확히 그때에만 감소한다. 가파르게 던지면 비행의 꼭대기 근처에서 입자는 던진 사람의 높은 위쪽, 약간 앞에 있으며, 거의 수평으로 멀어지고 있지만 떨어지기 시작한다. $\overrightarrow{OP}$의 방향을 기준으로 속도의 아래쪽 성분이 바깥쪽 성분보다 커지면 입자는 가까워진다. 완만하게 던지면 입자는 항상 충분히 앞쪽에 있으므로 속도가 O 쪽을 향하는 일이 결코 없다. 임계 경우는 속도가 정확히 한순간 $\overrightarrow{OP}$에 수직(perpendicular)이 되는 경우이며, 이때가 그림 11.10.1에서 거리가 멈추는 순간이다.

단조성은 저절로 주어지지 않는다

"당연히" 증가할 것 같은 많은 양이 실제로는 그렇지 않다. 지구와 달 사이의 거리는 진동한다. 구불구불한 길 위의 두 자동차 사이의 거리는 한 차가 항상 앞서 있더라도 줄어들 수 있다. 먹이가 늘어나는 동안에도 포식자의 개체 수는 줄어들 수 있다. 어떤 양이 단조임을 증명한다는 것은 보통 도함수의 부호가 일정함을 보이는 것이고, 여기서 쓴 기법(다항식으로 바꾼 뒤 그 근이나 판별식을 확인하는 것)이 이를 위한 표준적인 방법이다. 해석학(analysis)에서 단조성은 수렴(convergence)을 증명하는 열쇠가 되는 경우가 많다. 2장에서 보았듯이, 유계(bounded)인 단조 수열(sequence)은 수렴한다.

사고 기술

도함수로 단조성 확인하기

어떤 양이 항상 증가하는지 판단하려면, 그 양(또는 그 제곱처럼 다루기 편한 그 양의 함수)을 미분하고, 도함수의 부호가 바뀔 수 있는지 물어보라.

대학에서는 이런 종류의 부호 논증을 부등식을 증명하고, 최댓값과 최솟값을 찾고, 미분방정식(differential equation) 해의 안정성(stability)을 연구하는 데 쓴다. 미분방정식에서는 항상 감소하는 양이(Section 8.2에서처럼) 계가 안정된 상태로 정착함을 증명해 준다.

더 도전하기

1 **얼마나 가까워지는가?** $\alpha = 80°$일 때 OP가 극대와 극소가 되는 시각과 그때의 거리를 u^2/g 단위로 구하라.

2 **경사면 위에서.** 수평면과 각 β를 이루는 경사면 위쪽으로 공을 던져 경사면에 떨어지는 경우에 대하여 (i)번 문항을 다시 풀어라. (경사면으로부터 잰) 임계각은 달라지는가?

3 **공기 저항이 있을 때.** 공이 속도에 비례하는 저항도 받는다고 하자. 계산하지 않고, 임계각이 $70.5°$보다 클 것이라고 예상하는가, 작을 것이라고 예상하는가? 그 이유는 무엇인가?

4 **높은 곳에서 던지기.** 공을 절벽 꼭대기에서 던져 훨씬 아래에 떨어진다면, 어떤 각도로 던지든 OP가 결국에는 증가함을 보이고, 어느 단계에서 OP가 감소하는 각도가 있는지 알아보라.

더 읽을거리

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics*** (Wiley). 일상에서 만나는 놀라운 물리 퍼즐 수백 개를 담고 있다.
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 3장. 포물체(projectile)를 다루며, 직관에 어긋나는 문제가 여러 개 있다.
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 어떤 것이 다른 것보다 항상 크다는 것을 증명하는 기술을 다룬다.

11.11 야수는 어떻게 공을 잡는가

문제

STEP II 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/98-s2-q11`

도입

공이 외야(outfield) 높이 날아간다. 뛰어난 수비수(fielder)는 즉시 출발하여 공이 떨어지는 바로 그 순간에 도착한다. 어떻게 그럴 수 있을까? 눈 깜짝할 사이에 포물체 운동(projectile motion)의 방정식을 머릿속으로 풀 수 있는 사람은 없으며, 게다가 수비수는 공의 속력이나 각도를 알지 못한다. 그런데도 수비수들은, 그리고 프리스비를 잡는 개들은, 이 일을 아무렇지 않게 해낸다.

1968년 물리학자 Seville Chapman이 하나의 답을 제안했고, 이 문제는 그것을 증명한다. 수비수가 공의 올려본각(angle of elevation) θ를 지켜보면서 $\tan\theta$가 **일정한 비율로** 증가하도록 움직이면, 수비수는 공이 떨어지는 곳에 정확히 도착한다. 물리학 지식은 전혀 필요 없고, 공이 일정한 속도보다 더 빠르게 올라가는 것처럼 보이는지 더 느리게 올라가는 것처럼 보이는지만 알아차릴 수 있으면 된다. 어려운 예측 문제가 단순한 피드백(feedback) 규칙으로 바뀌는 것이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 타자(batsman)를 원점에, 수비수를 거리 D인 곳에 둔다. 공이 (x, y)에 있을 때 $\tan\theta$는 무엇인가?

공은 수비수의 눈높이보다 y만큼 위에 있고, 수비수 앞쪽으로 수평 거리 $D - x$만큼 떨어져 있다(공은 수비수 쪽으로 다가오고 있다). 따라서 $\tan\theta = \frac{y}{D-x}$이다.

차근차근 풀기

1단계 완벽한 위치에 있는 수비수

생각해 보기 공의 수평 속력을 U, 처음 연직 속력을 W라 하고, 공이 시각 T에 (눈높이에) 떨어진다고 하자. x, y, D를 U, W, T, g, t로 나타내어라. y를 인수분해할 수 있는가?

$x = Ut$이고 $y = Wt - \frac{1}{2}gt^2$이며, 공은 $T = \frac{2W}{g}$에 눈높이로 돌아오는데, 그곳에 수비수가 있다: $D = UT$. $W = \frac{1}{2}gT$이므로

$$y = \tfrac{1}{2}gt(T - t), \qquad D - x = U(T - t).$$

인수 $T - t$가 약분된다:

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}\,t.$$

따라서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta = \frac{g}{2U}$로 상수이다. ■

2단계 달리는 수비수

생각해 보기 이제 수비수가 거리 D_0에서 출발하여 속력 v로 타자를 향해 달린다고 하자. 그러면 수비수의 위치는 $D_0 - vt$이다. 수비수는 시각 T에 공을 잡는다. D_0는 무엇인가? 같은 계산을 반복하여라.

시각 T에 공을 잡으려면 수비수는 공이 떨어지는 곳에 있어야 한다: $D_0 - vT = UT$이므로 $D_0 = (U+v)T$이다. 수비수와 공 사이의 수평 거리는 $D_0 - vt - Ut = (U+v)(T-t)$이고, 이번에도 인수가 약분된다:

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}\,t.$$

따라서 수비수가 알맞은 속력으로 달리고 있다면 $\tan\theta$는 일정한 비율로 증가한다.

생각해 보기 문제는 그 역(converse)을 묻는다: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta$가 일정하도록 달린다면, 수비수는 공을 잡을 수 있는가?

수비수가 속력 v로 달리고 $\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D_0-(U+v)t}$가 일정한 비율 c로 증가한다고 하자. 그러면 $\tan\theta = ct$이다($t = 0$에서 그 값은 0이다). 그러면

$$\tfrac{1}{2}g(T-t) = c(D_0 - (U+v)t) \quad \text{모든} t.$$

t의 계수와 상수항을 비교하면(comparing coefficients) $\frac{1}{2}g = c(U+v)$이고 $\frac{1}{2}gT = cD_0$이

다. 두 식을 나누면 $D_0 = (U+v)T$인데, 이는 정확히 시각 T에 낙하 지점에 있기 위한 조건이다. 따라서 수비수는 $\tan\theta$가 꾸준히 증가하도록 v를 고르면 되고, 그러면 공을 잡는다. ■

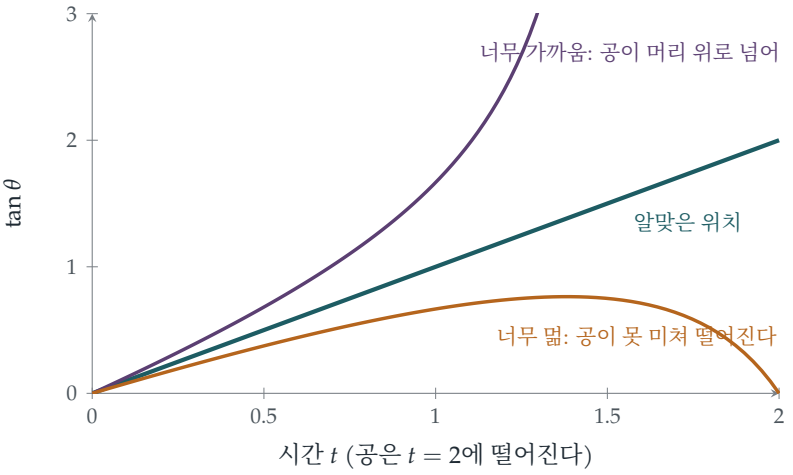


그림 11.11.1 거리 2인 곳에 떨어지는 공($g = 2$, 수평 속력 1)에 대하여 제자리에 서 있는 수비수가 보는 모습. 알맞은 위치에서는 $\tan\theta$가 직선으로 증가한다(청록색). 너무 가까이 서 있으면 $\tan\theta$가 가속하며 증가하고 공은 수비수의 머리 위로 넘어간다(자주색). 너무 뒤에 서 있으면 점점 더 느리게 증가하다가 감소한다(호박색). 규칙: 공의 상이 꾸준히 올라가도록 움직여라.

돌아보기

- **공통인수를 찾아라.** 높이와 수평 거리 모두 $T-t$를 포함하고 있었고, 이를 약분하자 $\tan\theta$가 일차식이 되었다.
- **역을 증명하라.** 규칙이 실제로 통한다는 것(공을 잡게 된다는 것)을 보이려면 계수를 비교하는 반대 방향의 논증이 필요했다.
- **지각하기 쉬운 불변량.** $\tan\theta$의 꾸준한 증가는 눈으로 판단할 수 있지만, 낙하 지점은 그럴 수 없다.

숨은 수학

광학적 가속도 상쇄

Chapman의 규칙은 오늘날 **광학적 가속도 상쇄**(optical acceleration cancellation)라 불린다. 수비수는 "광학적 가속도" $\frac{d^2}{dt^2}\tan\theta$를 0으로 유지하도록 움직인다. 공의 상이 위로 가속하면 공이 머리 위로 넘어갈 것이므로 뒤로 물러나고, 감속하면 공이 못 미쳐 떨어질 것이므

로 앞으로 달려 나간다(그림 11.11.1). 이 전략은 공이 어디에 떨어질지 알려 주지는 않지만, 수비수를 그곳으로 데려다 준다. 이것은 유도 미사일을 조종하는 것과 같은 피드백 제어 법칙(feedback control law)이다. 미사일은 **비례 항법**(proportional navigation)을 사용하여 목표물에 대한 시선각(line-of-sight angle)을 일정하게 유지하는데, 이는 같은 아이디어의 옆 방향 버전이다.

수비수가 실제로 하는 일

실제 수비수들은 Chapman의 규칙을 사용할까? 1990년대에 야구 외야수의 머리에 카메라를 달고 한 실험들은 엇갈린 결과를 보였다. Michael McBeath와 동료들은 1995년 *Science*에서, 한쪽 옆으로 날아가는 공의 경우 수비수가 공의 상이 시야를 가로질러 직선으로 움직이도록("선형 광학 궤적(linear optical trajectory)") 곡선 경로를 따라 달리며, 이 방법 역시 공을 잡게 해 준다고 주장했다. 이후의 연구는 두 전략과 그 혼합이 모두 사용되며, 수비수가 일정한 속력으로 달리지 않는 경우가 많다는 것을 시사했다. 2004년의 한 연구는 프리스비를 잡는 개들이 같은 광학적 규칙에 부합하는 경로를 따른다는 것을 발견했다. 세부 사항이 어떻든, 놀라운 결론은 변함없다: 공을 잡는 데에는 예측이 필요하지 않고, 올바른 피드백만 있으면 된다.

Chapman의 논문

1968년 *American Journal of Physics*에 실린 Seville Chapman의 "Catching a baseball"은 세 쪽 분량이며, 본질적으로 이 문제의 계산을 담고 있다. 그는 이 전략이 공기 저항(air resistance)이 없을 때에만 통하며, 실제 야구공의 궤적은 항력(drag)과 회전(spin) 때문에 왜곡되어 상황이 복잡해진다고 지적했다. 그럼에도 불구하고, 뇌가 복잡한 제어 문제를 풀기 위해 시야의 단순한 불변량(invariant)을 이용한다는 아이디어는 심리학과 로봇공학에서 중요해졌다.

사고 기술

관찰하기 쉬운 불변량을 찾아라

어떤 양을 예측하기 어려울 때에는, 직접 관찰할 수 있으면서 일이 제대로 진행될 때에 정확히 단순하게 행동하는 관련된 양을 찾아라.

여기서 낙하 지점은 예측하기 어려웠지만, $\tan\theta$의 변화율은 관찰하기 쉬웠다. 대학에서 이것은 피드백 제어의 아이디어이자, 필요한 정보를 담고 있는 관측량(observable)을 고르는 아이디어이다.

더 도전하기

1 **뒤로 달리기.** 공이 수비수의 출발 위치보다 뒤에 떨어질 경우, 수비수는 타자에게서 멀어지는 방향으로 달려야 하며 같은 규칙이 적용됨을 보여라.

2 θ **자체는 아니다.** 완벽한 위치에 있는 수비수에게 $\frac{d\theta}{dt}$는 상수가 아님을 보여라. 왜 $\tan\theta$가 지켜봐야 할 올바른 양인가?

3 **눈높이.** 공이 수비수의 눈높이보다 h만큼 낮은 높이에서 쳐진다면, 알맞은 위치에 있는 수비수에게 $\tan\theta$는 여전히 t의 일차식인가? (수비수는 눈높이에서 공을 잡는다고 가정한다.)

4 **공기 저항.** 선형 공기 저항이 있으면 수평 속도는 지수적으로 감소한다. 알맞은 위치에 있는 수비수에게 $\tan\theta$는 여전히 t의 일차식인가?

더 읽을거리

- **Seville Chapman, "Catching a baseball"**, *American Journal of Physics* 36 (1968). (야구공 잡기)
- **Michael McBeath, Dennis Shaffer & Mary Kaiser, "How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls"**, *Science* 268 (1995). (야구 외야수는 뜬공을 잡기 위해 어디로 달릴지 어떻게 결정하는가)
- **Dennis Shaffer et al., "How dogs navigate to catch Frisbees"**, *Psychological Science* 15 (2004). (개는 프리스비를 잡기 위해 어떻게 길을 찾는가)

11.12 고무줄 위의 개미

문제

STEP II 2018, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/18-s2-q10`

도입

개미 한 마리가 길이 1킬로미터인 고무 밧줄 위를 초속 1센티미터로 걸어가기 시작한다. 밧줄은 1초마다 1킬로미터씩 고르게 늘어난다. 먼 쪽 끝은 초속 1000미터로 멀어지니 개미보다 10만 배나 빠르다. 개미는 언젠가 끝에 도달할까?

놀랍게도 도달한다. 밧줄이 늘어나면서 개미도 함께 실려 가고, 밧줄 전체에 대한 **비율**로 본 개미의 전진은 점점 줄어들지만 그 비율들을 모두 더하면 조화급수(harmonic series)처럼 되는데, 조화급수는 발산(diverge)한다(Section 2.3). 그래서 개미는 결국 도착한다. 다만 우주의 나이가 하찮아 보일 만큼 긴 시간이 지난 뒤이다. 이 문제는 연속적인 경우를 정확히 풀어, 걸리는 시간이 두 속력의 비에 대해 지수적으로 커진다는 것을 보인다.

시작하기 전에

생각해 보기 줄은 고르게 늘어난다. 즉 줄의 모든 부분이 같은 배율로 늘어난다. 시각 t에서 줄의 길이는 $a+ut$이다. 말뚝으로부터 거리 x인 점이 전체의 $\frac{x}{a+ut}$만큼의 비율에 있다면, 이 점은 얼마나 빨리 움직이는가?

줄 위의 각 점은 길이에 대한 비율 f를 그대로 유지하므로, 말뚝으로부터의 거리는 $f(a+ut)$이고 속력은 $fu = \frac{ux}{a+ut}$이다. 말뚝 가까이의 점들은 거의 움직이지 않고, 먼 쪽 끝은 속력 u로 움직인다.

차근차근 풀기

1단계 개미의 방정식

개미는 줄에 대해 속력 v로 움직이고, 여기에 개미 아래에 있는 줄의 속력이 더해진다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

생각해 보기 몫의 미분법(quotient rule)으로 $\frac{x}{a+ut}$를 미분하고 $\dot{x}$에 대한 방정식을 이용하라.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = \frac{\dot{x}}{a+ut} - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut}. \qquad \blacksquare$$

개미가 지나온 줄의 비율은 $\frac{v}{a+ut}$의 비율로 증가한다. 이는 개미 자신의 속력을 현재 길이로 나눈 값이다. 늘어남은 어느 점의 비율도 바꾸지 않으므로 식에서 완전히 사라진다.

2단계 끝에 도달하기

생각해 보기 0부터 t까지 적분하라. 비율은 언제 1이 되는가?

개미는 말뚝에서 출발하므로

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v\,\mathrm{d}s}{a+us} = \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a}.$$

개미는 비율이 1일 때 끝에 도달한다. 즉 $\ln\frac{a+uT}{a} = \frac{u}{v} = k$이므로 $a+uT = ae^k$이고, 다시 말해

$$uT = a(e^k - 1). \qquad \blacksquare$$

로그는 한없이 커지므로, 밧줄이 아무리 빨리 늘어나도 개미는 반드시 도착한다.

3단계 돌아오는 길

생각해 보기 돌아올 때 줄에 대한 개미의 속력은 $-v$이다. 이제 비율의 변화율은 얼마인가? 개미는 시각 T에 비율 1에서 출발한다.

$-v$로 같은 계산을 하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}$이므로

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a+uT}.$$

비율은 $a+ut = (a+uT)e^k$일 때 0이 된다. $a+uT = ae^k$이므로 돌아오는 데 걸리는 시간은

$$t - T = \frac{(a+uT)(e^k-1)}{u} = \frac{ae^k \cdot uT/a}{u} = Te^k. \qquad \blacksquare$$

돌아오는 길은 가는 길보다 e^k배 오래 걸린다. 개미가 방향을 돌릴 때쯤에는 줄이 처음보다 e^k배 길어져 있기 때문이다.

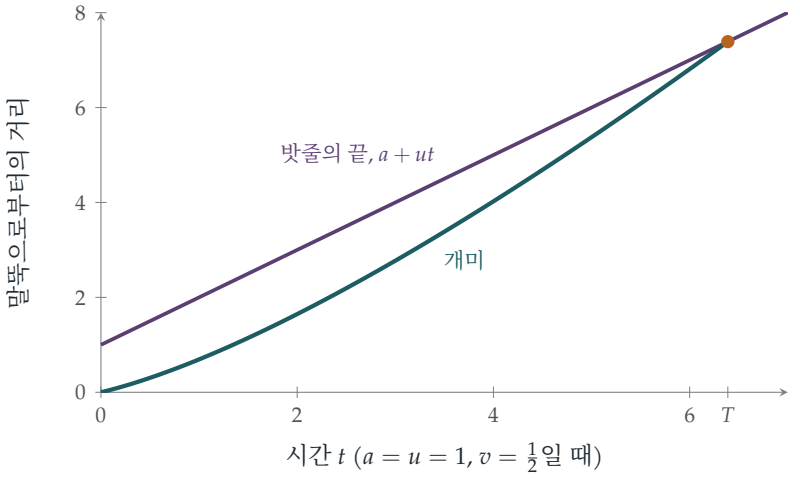


그림 11.12.1 끝(자주색)이 개미의 걷는 속력의 두 배로 움직이는 밧줄 위를 걷는 개미(청록색)($k = 2$). 개미는 늘어나는 밧줄에 실려 가며, 말뚝으로부터의 거리는 점점 더 빠르게 커진다. 개미는 $T = e^2 - 1 \approx 6.39$에 끝에 도달한다.

돌아보기

- **알맞은 변수를 쓴다.** 밧줄을 지나온 비율이 자연스러운 양이었다. 늘어남이 이 양을 바꾸지 않기 때문이다.
- **모습을 감춘 적분인자.** $\frac{1}{a+ut}$를 곱하자 선형 미분방정식(linear differential equation)이 완전한 도함수의 꼴이 되었다. 이것은 적분인자(integrating factor)의 방법이다.
- **발산은 속력을 이긴다.** 비율은 로그처럼 증가했고 로그는 유계가 아니므로, 개미는 반드시 도착한다.

숨은 수학

조화급수 버전

이 퍼즐은 보통 띄엄띄엄 늘어나는 형태로 소개된다. 밧줄의 길이는 1 km이고, 개미는 첫 1초 동안 1 cm를 걷는다. 그다음 밧줄이 1 km 늘어나고, 다시 개미가 1센티미터를 걷고, 이런 식으로 계속된다. n번째 초에 개미는 길이 n km인 밧줄에서 1 cm를 가므로, 비율로는

$\frac{1}{100\,000\,n}$만큼 간다. 늘어남은 비율을 바꾸지 않으므로 N초 뒤에 개미는 밧줄의

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

만큼을 지나왔다. 개미는 $H_N\approx 100\,000$일 때, 즉 약 $e^{100\,000}$초 뒤에 도착한다. 이 수는 43 000자리가 넘는다. (비교하자면 우주의 나이는 약 4×10^{17}초이다.) 연속 버전의 답도 이와 일치한다. $k=\frac{u}{v}=100\,000$이고 $T\approx\frac{a}{u}e^{k}$이다.

팽창하는 우주 속의 빛

밧줄 위의 개미는 팽창하는 우주를 가로지르는 빛의 모형이다. 먼 은하들은 공간 자체의 팽창에 실려 우리에게서 멀어지고, 그 은하에서 나온 빛은 개미가 늘어나는 밧줄 위를 걷듯이 팽창하는 공간을 **통과하여** 속력 c로 우리를 향해 온다. 먼 은하의 빛이 언젠가 우리에게 도달하는지는 팽창 속도가 시간에 따라 어떻게 변하는지에 달려 있다. 밧줄처럼 일정한 비율로 팽창하는 우주에서는 빛이 언젠가는 반드시 도착한다. 우리 우주처럼 팽창이 가속되는 것으로 보이는 우주에서는 빛이 결코 우리에게 도달하지 못하는 은하들이 있다. 즉 **우주의 사건 지평선**(cosmic event horizon)이 존재한다. 개미의 경우 이에 해당하는 것은 지수적으로 늘어나서 끝의 속력이 길이에 비례하여 커지는 밧줄이다(연습문제에서 직접 해 보라).

가드너의 개미

이 퍼즐은 1972년 프랑스 수학자 Denys Wilquin이 고무줄 위의 벌레 문제로 처음 고안한 것으로 보이며, 마틴 가드너(Martin Gardner)가 *Scientific American*의 칼럼과 그의 책 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*에서 소개하여 널리 알려졌다. 직관에 어긋나지만 증명은 쉬운 결과의 가장 잘 알려진 예 가운데 하나이며, 조화급수의 발산을 보여 주는 예로 즐겨 쓰인다.

사고 기술

복잡한 요소가 영향을 주지 않는 양을 찾아라

문제의 한 요소가 모든 것을 바꿔 놓을 때(여기서는 늘어남), 그 요소가 건드리지 않는 양을 찾아라.

늘어남은 모든 거리를 바꾸지만 비율은 하나도 바꾸지 않는다. 비율을 다루자 늘어남이 문제에서 사라졌다. 대학에서 이 아이디어는 우주론(cosmology)과 유체역학(fluid mechanics)의 **동행 좌표**(comoving coordinates)로 등장하며, 더 일반적으로는 변환에 대한 불변량(invariant)을 찾는 일로 나타난다.

더 도전하기

1 **절반 지점.** 개미는 언제 밧줄의 절반 지점에 있는가? 그것은 시각 $\frac{T}{2}$보다 이전인가, 이후인가?

2 **지수적으로 늘어나는 밧줄.** 이번에는 밧줄의 길이가 $ae^{\lambda t}$라고 하자. 개미가 끝에 도달하는 것은 $v > \lambda a$일 때뿐임을 보여라. (이것이 우주의 사건 지평선이다.)

3 **가속하는 밧줄.** 길이가 $a + \frac{1}{2}bt^2$이면 개미는 반드시 도착하는가?

4 **띄엄띄엄 늘어나는 퍼즐.** 띄엄띄엄 늘어나는 버전에서 개미가 밧줄의 1%를 지나는 데 몇 초가 필요한가? $H_N \approx \ln N + 0.577$을 이용하라.

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*** (W. H. Freeman). 고무 밧줄 위의 개미 이야기가 실려 있다.
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*** (Princeton University Press). 조화급수와 개미 이야기를 다룬다.
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology*** (Cambridge University Press). 팽창하는 공간, 지평선, 동행 좌표를 학부 수준에서 다룬다.

11.13 제설차 문제

문제

STEP III Specimen paper, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/spec-s3-q11`

도입

눈이 일정하게 내리고 있다. 제설차(snowplough) 한 대가 길을 따라 출발하는데, 만나는 눈이 깊어질수록 속도가 느려진다. 조금 뒤에 두 번째 제설차가 이미 치워진 길을 따라 뒤쫓아 간다. 두 번째 제설차는 첫 번째 제설차가 지나간 뒤에 쌓인 눈만 만나므로 눈이 더 얕고, 따라서 더 빨리 달리며 결국 앞차를 따라잡는다. 언제 따라잡을까?

이 문제는 Ralph Agnew가 1942년에 발표한 유명한 문제의 변형으로, 그 문제는 미분방정식(differential equation)에서 가장 잘 알려진 퍼즐 가운데 하나가 되었다. 이 문제의 묘미는 두 번째 제설차의 속도가 **첫 번째 제설차가 각 지점을 언제 지나갔는지**에 따라 달라진다는 데 있다. 그래서 소문항 (i)의 해가 소문항 (ii)의 방정식에 들어간다. 그리고 이 방정식은 "거꾸로", 즉 시간을 거리의 함수로 쓸 때 가장 깔끔해진다.

시작하기 전에

생각해 보기 첫 번째 제설차는 시각 t에 깊이 $h + kt$의 눈을 만난다. 이 제설차의 속력은 얼마인가? x를 t의 함수로 구하는 것과 t를 x의 함수로 구하는 것 가운데 어느 쪽이 더 쉬운가?

속력은 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}$이다. 이 식은 변수분리(separation of variables)가 깔끔하게 된다. 뒤집으면 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k}$가 되는데, 이는 t를 x의 함수로 보는 간단한 선형(linear) 방정식이다. 첫 번째 제설차에 대해서는 어느 방법이든 통하지만, 두 번째 제설차에 대해서는 뒤집은 형태가 꼭 필요하다.

차근차근 풀기

1단계 첫 번째 제설차

$\frac{dt}{dx} = \alpha(\frac{h}{k} + t)$로부터 양 $\frac{h}{k} + t$는 x에 대해 지수적으로 증가한다: $\frac{h}{k} + t = Ce^{\alpha x}$. $x = 0$일 때 $t = 0$이므로 $C = \frac{h}{k}$이고

$$t_1(x) = \frac{h}{k}(e^{\alpha x} - 1). \qquad \blacksquare$$

첫 번째 제설차는 지수적으로 느려진다. 같은 거리를 가는 데 걸리는 시간이 지수적으로 늘어난다.

2단계 두 번째 제설차의 방정식

생각해 보기 두 번째 제설차가 시각 t에 위치 y에 도달한다. 그곳의 눈 깊이는 얼마인가? (첫 번째 제설차가 지나간 직후의 깊이는 얼마였는가?)

첫 번째 제설차는 시각 $t_1(y)$에 위치 y의 눈을 모두 치웠다. 그 뒤로 눈이 비율 k로 쌓였으므로, 시각 t의 깊이는 $z = k\big(t - t_1(y)\big)$이다. 따라서 두 번째 제설차의 속력은

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{\alpha k\big(t - t_1(y)\big)} = \frac{1}{\alpha\big(t - t_1(y)\big)},$$

이고, 이를 뒤집으면

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dt}{dy} = t - \frac{h}{k}(e^{\alpha y} - 1). \qquad \blacksquare$$

3단계 풀기

생각해 보기 이 식은 t에 대해 선형이다: $\frac{dt}{dy} - \alpha t = -\frac{\alpha h}{k}(e^{\alpha y} - 1)$. 어떤 적분인자(integrating factor)를 쓰면 되는가? 초기 조건은 무엇인가?

$e^{-\alpha y}$를 곱하면

$$\frac{d}{dy}\big(te^{-\alpha y}\big) = -\frac{\alpha h}{k}\big(1 - e^{-\alpha y}\big), \qquad te^{-\alpha y} = -\frac{\alpha h}{k}y - \frac{h}{k}e^{-\alpha y} + C.$$

두 번째 제설차는 $t = T$에 $y = 0$에서 출발하므로 $T = -\frac{h}{k} + C$이고, 따라서 $C = T + \frac{h}{k}$이다. 다시 $e^{\alpha y}$를 곱하고 정리하면

$$t_2(y) = \frac{h}{k}(e^{\alpha y} - 1) + \Big(T - \frac{\alpha h y}{k}\Big)e^{\alpha y}. \qquad \blacksquare$$

(문제에서 요구하는 대로 확인하려면, 미분하여 대입하면 된다. 항들을 정리하면 $\alpha\big(t - t_1(y)\big)$가 된다.)

4단계 충돌

> **생각해 보기** 두 제설차는 같은 시각에 같은 지점에 도달할 때 충돌한다. $t_2(y)$와 $t_1(y)$를 비교해 보자.

차이 $t_2(y) - t_1(y) = \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)e^{\alpha y}$는 위치 y에서 두 제설차 사이의 시간 간격이다. 이 간격은

$$y = \frac{kT}{\alpha h}. \qquad \blacksquare$$

일 때 0으로 줄어든다. 그 지점에서 두 번째 제설차가 첫 번째 제설차에 도달한다. 그 앞의 눈 깊이는 0이고, 이 모형에서 속력은 무한대가 된다(그림 11.13.1).

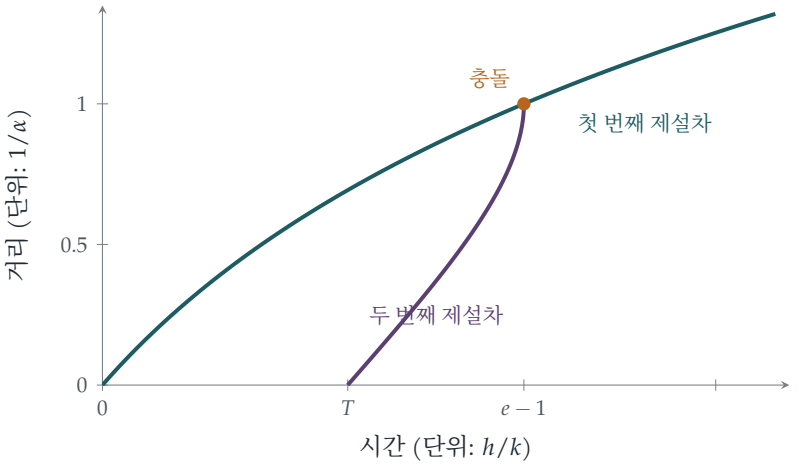


그림 11.13.1 $T = \frac{h}{k}$일 때(즉 눈 깊이가 두 배가 되었을 때 두 번째 제설차가 출발할 때) 두 제설차의 시간에 따른 거리. 첫 번째 제설차(청록색)는 눈이 깊어짐에 따라 느려진다. 두 번째 제설차(자주색)는 일부 치워진 길에서 늦게 출발하여 간격을 좁히면서 빨라지고, 거리 $\frac{kT}{\alpha h} = \frac{1}{\alpha}$, 시각 $(e-1)\frac{h}{k}$에서 첫 번째 제설차와 만난다.

돌아보기

- **방정식을 뒤집어라.** t를 위치의 함수로 보면 두 방정식이 모두 선형이었다.
- **한 해가 다음 문제에 쓰인다.** 첫 번째 제설차의 시간표 $t_1(y)$가 두 번째 제설차의 방정식에 나타났다.
- **두 번 풀지 말고 비교하라.** 충돌 조건은 간단한 인수를 가진 차이 $t_2 - t_1$에서 나왔다.

숨은 수학

Agnew의 제설차

Ralph Palmer Agnew의 1942년 교과서 *Differential Equations*에 실린 원래 문제는 이렇다. 어느 날 아침 눈이 일정하게 많이 내리기 시작한다. 제설차 한 대가 정오에 출발하여 첫 한 시간 동안 2마일, 두 번째 한 시간 동안 1마일을 간다. 눈은 언제 내리기 시작했는가? 제설차의 속력은 눈 깊이에 반비례하고, 눈 깊이는 눈이 내리기 시작한 뒤로 흐른 시간에 비례한다. 답(아래 연습문제)에는 황금비(golden ratio)가 나온다. 눈은 정오보다 약 37분 전에 내리기 시작했다. 이 문제처럼 제설차가 두 대인 변형은 그 뒤에 나왔다.

전달되는 정보

두 번째 제설차의 운동은 도로에 기록된 이력, 즉 각 지점이 마지막으로 치워진 시각에 따라 정해진다. 이는 **기억**(memory)을 가진 계의 간단한 예로, 한 장소의 상태가 그곳에서 앞서 일어난 일에 따라 달라진다. 교통 흐름, 빙하의 움직임, 산불의 확산이 모두 이런 성격을 띠며, 그 수학인 1계 편미분방정식(partial differential equation)과 그 **특성곡선**(characteristics)의 이론은 대학 2학년의 표준 주제이다. 시간을 위치의 함수로 쓰는 발상("전선이 이곳에 언제 도착하는가?")은 바로 이런 문제에 쓰이는 **도착 시간**(arrival times) 방법이다.

사고 기술

독립변수를 골라라

미분방정식은 변수의 역할을 바꾸면 훨씬 간단해질 수 있다. 변화율이 어떤 장소에서 무언가가 일어난 시각에 따라 달라진다면, 시간을 장소의 함수로 써라.

여기서 두 방정식은 모두 $t(y)$에 대해 쓰자 선형이 되었다. 대학에서는 어느 변수를 독립변수(independent variable)로 삼을지 고르는(그리고 편리할 때 바꾸는) 자유를 끊임없이 활용한다. 유체역학(fluid mechanics)의 호도그래프 방법(hodograph method)부터 기하학에서 호의 길이(arc length)를 매개변수(parameter)로 쓰는 것까지 그 예는 다양하다.

더 도전하기

1 **Agnew의 문제.** 정오 이전의 알 수 없는 시각에 눈이 일정한 비율로 내리기 시작한다. 속력이 눈 깊이에 반비례하는 제설차가 정오에 출발하여 첫 한 시간 동안 2마일, 두 번째 한 시간 동안 1마일을 간다. 눈이 정오보다 t_0시간 전에 내리기 시작했다면

$\left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3$임을 보이고, 이로부터 $\frac{1}{t_0}$이 황금비임을 이끌어 낸 뒤, 눈이 언제 내리기 시작했는지 구하여라.

2 **확인.** $t_2(y)$가 소문항 (ii)의 미분방정식을 만족함을 미분하여 확인하여라.

3 **시간 간격.** $kT > h$이면 시간 간격 $t_2(y) - t_1(y)$가 처음에는 증가하다가 감소하여 0이 됨을 보이고, 간격이 가장 큰 곳을 구하여라. $kT \le h$이면 어떻게 되는가? 이를 해석하여라.

4 **제설차 세 대.** 세 번째 제설차가 시각 $2T$에 출발한다. 그 운동의 방정식을 써라. 세 번째 제설차는 두 번째 제설차가 첫 번째 제설차를 따라잡기 전에 두 번째 제설차를 따라잡는가, 아니면 그 뒤에 따라잡는가?

더 읽을거리

- **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations*** (McGraw-Hill, 1942). 원래의 제설차 문제가 실린 책이다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*** (CRC Press). 여러 문제와 함께 제설차 문제를 다룬다.
- **Richard Haberman, *Mathematical Models*** (SIAM). 교통 흐름과 특성곡선을 쉽게 접근할 수 있는 수준으로 다룬다.

11.14 현수선이 아니라 포물선

문제

STEP I 1991, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/91-s1-q10`

도입

사슬의 양 끝을 잡고 늘어뜨리면 사슬은 **현수선**(catenary)이라는 곡선을 이룬다(이 이름은 사슬을 뜻하는 라틴어에서 왔다). 갈릴레이(Galileo)는 이 곡선이 포물선(parabola)이라고 생각했지만, 1646년에 십 대의 하위헌스(Huygens)가 보였듯이 그렇지 않다. 그러나 현수교(suspension bridge)처럼 무거운 도로를 같은 간격의 지지대로 사슬에 매달면, 사슬은 **정말로** 포물선을 이룬다. 차이는 무게가 분포하는 방식에 있다. 현수선에서는 무게가 굽은 사슬 자체를 따라 고르게 분포하고, 다리에서는 수평 방향으로 고르게 분포한다.

이 문제는 각 이음점에서 힘을 분해하는 것만으로 포물선임을 증명한다. 핵심은 장력(tension)의 수평 성분(component)이 사슬 전체에서 같다는 것이고, 따라서 각 구간의 기울기는 그 구간이 지탱하는 무게에 비례한다. 그 결과 아름다운 규칙이 나타난다. 연속한 이음점 사이의 낙차는 홀수 $1, 3, 5, 7, \ldots$의 순서로 커지고, 이 홀수들의 부분합(partial sum)은 완전제곱수이다.

시작하기 전에

생각해 보기 각 이음점 A_i에는 세 힘이 작용한다. 이웃한 두 구간의 장력, 그리고 지지대에 매달린 무게 w이다. 무게가 영향을 줄 수 없는 장력의 성분은 무엇인가?

무게는 연직 방향이므로, 각 이음점에서 두 장력의 수평 성분은 서로 평형을 이루어야 한다. 따라서 장력의 수평 성분을 H라 하면, H는 사슬의 모든 구간에서 같다.

차근차근 풀기

1단계 각 이음점에서의 방정식

구간 $A_{i-1}A_i$가 (A_{i-1}에서 가운데 쪽으로 갈 때) 수평선 아래로 각 ϕ_i를 이룬다고 하자. 그러면 이 구간의 장력 T_i의 수평 성분은 $T_i\cos\phi_i$, 연직 성분은 $T_i\sin\phi_i$이다. $1 \le i \le n$에 대하여 A_i에서 힘을 분해하면

$$T_i\cos\phi_i = T_{i+1}\cos\phi_{i+1} = H, \qquad T_i\sin\phi_i - T_{i+1}\sin\phi_{i+1} = w.$$

(바깥쪽 구간은 더 큰 연직 성분으로 위쪽과 바깥쪽으로 당기고, 안쪽 구간은 안쪽과 약간 아래쪽으로 당긴다. 그 차이가 지지대를 지탱한다.)

> **생각해 보기** 가운데 이음점 A_{n+1}에서는 어떻게 되는가? 다리의 대칭성(symmetry)을 이용하라.

대칭성에 의해 A_{n+1}에서 만나는 두 구간은 서로 거울상이므로, 각 구간이 지지대 무게의 절반을 지탱한다: $T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \frac{1}{2}w$.

2단계 무게에서 기울기로

가운데에서 바깥쪽으로 가면서 연직 성분을 구하면

$$T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w, \quad T_n\sin\phi_n = \tfrac{3}{2}w, \quad \dots, \quad T_1\sin\phi_1 = \tfrac{2n+1}{2}w.$$

이다. 각각을 H로 나누면 기울기는 $\tan\phi_i = \frac{(2(n+1-i)+1)w}{2H}$이다. 구간 $A_{i-1}A_i$의 기울기는 $\frac{y_{i-1}-y_i}{h}$이기도 하므로

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{h} = \frac{w}{2H}, \qquad \frac{y_{n-1}-y_n}{h} = \frac{3w}{2H}, \qquad \dots, \qquad \frac{y_0 - y_1}{h} = \frac{(2n+1)w}{2H}.$$

역수를 취하고 홀수를 곱하면, $\frac{h}{y_n-y_{n+1}}$, $\frac{3h}{y_{n-1}-y_n}$, ..., $\frac{(2n+1)h}{y_0-y_1}$는 모두 $\frac{2H}{w}$와 같다. ■

3단계 포물선

> **생각해 보기** 가운데에서 바깥쪽으로 이음점을 세는 번호를 j라 하여, A_{n+1-j}가 A_{n+1}로부터 수평 거리 jh인 곳에 있도록 하자. 이 점은 A_{n+1}보다 얼마나 높은가?

$c = \frac{wh}{2H}$로 두고 낙차를 더하면

$$y_{n+1-j} - y_{n+1} = c(1+3+5+\cdots+(2j-1)) = cj^2.$$

이다. 가운데에서부터 잰 x에 대하여 $x = jh$이므로, 가장 낮은 이음점으로부터의 높이는 $\frac{c}{h^2}x^2 = \frac{w}{2Hh}x^2$이다. 대칭성에 의해 반대쪽에서도 같은 식이 성립하고, 지지점($j = n+1$)도 같은 식을 만족한다. 따라서 모든 점은 포물선

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}(x - x_{n+1})^2. \qquad \blacksquare$$

위에 있다.

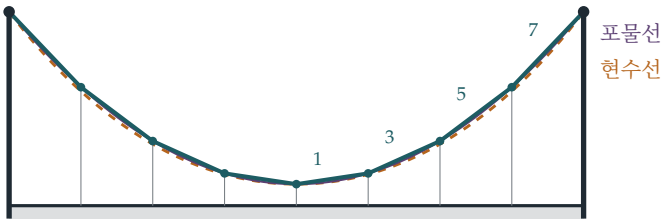


그림 11.14.1 같은 수평 간격마다 같은 하중을 받는 사슬(청록색). 이음점들은 포물선(자주색) 위에 놓이고, 가운데에서 바깥쪽으로 연속한 이음점 사이의 낙차는 $1:3:5:7$의 비를 이룬다. 양 끝과 가장 낮은 점이 같으면서 자기 무게만 받는 자유로운 사슬은 현수선(호박색, 점선)을 이루는데, 이 곡선은 바닥에서 더 평평하고 지지점 근처에서 더 가파르다.

돌아보기

- **일정한 것을 찾아라.** 연직 하중만 있으면 수평 장력은 어디서나 같다.
- **가운데에서부터 누적하라.** 각 구간은 자신과 가운데 사이의 모든 무게를 지탱하므로, 연직 성분은 w씩 커진다.
- **홀수의 합은 제곱수이다.** $1 + 3 + \cdots + (2j-1) = j^2$이라는 사실이 기울기의 목록을 포물선으로 바꾸었다.

숨은 수학

포물선인가, 현수선인가?

이 논증의 연속 버전이 두 곡선을 모두 설명한다. 일정한 수평 장력 H를 받는 사슬 $y(x)$에서 장력의 연직 성분은 Hy'이고, 짧은 구간에서 이 값은 그 구간이 받는 하중만큼 변한다: $H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$.

- 하중이 **수평 방향으로** 고르게 분포하면(도로의 단위 길이당 무게가 ρ인 무거운 도로), $Hy'' = \rho$이므로 y는 이차식, 곧 포물선이다.
- 하중이 사슬 자신의 무게로서 **사슬을 따라** 고르게 분포하면(사슬의 단위 길이당 ρ),

$Hy'' = \rho\sqrt{1+y'^2}$이고, 그 해는 $c = H/\rho$인 현수선 $y = c\cosh\frac{x}{c}$이다.

사슬이 거의 수평인 바닥 근처에서는 두 곡선이 거의 같다. 둘은 지지점 근처에서 달라지는데, 그곳에서는 사슬이 가팔라서 같은 수평 거리 안에 더 많은 사슬이 들어가기 때문이다. 상판이 케이블보다 훨씬 무거운 실제 현수교는 포물선에 매우 가깝다.

거꾸로 된 사슬과 아치

사슬은 순수한 인장 상태에 있다. 그 모양을 위아래로 뒤집으면 순수한 압축(compression) 상태의 아치(arch)가 되며, 이 아치는 휘려는 경향이 전혀 없다. 로버트 훅(Robert Hooke)은 1675년에 이 사실을 애너그램으로 발표했는데, 이를 풀면 다음과 같다: "유연한 줄이 매달린 그대로, 다만 뒤집으면 단단한 아치가 서리라." 크리스토퍼 렌(Christopher Wren)과 훅은 이 아이디어를 세인트폴 대성당(St Paul's Cathedral)의 돔에 이용했고, 안토니 가우디(Antoni Gaudí)는 천장에 추를 단 줄들을 매달고 그것을 거꾸로 사진 찍는 방법으로 바르셀로나의 사그라다 파밀리아(Sagrada Família)를 설계했다. 세인트루이스의 게이트웨이 아치(Gateway Arch)는 (무게가 가해진) 뒤집힌 현수선이다.

현수선 도전 문제

1690년 야코프 베르누이(Jakob Bernoulli)는 매달린 사슬의 모양을 구하라는 문제를 수학자들에게 냈다. 1년도 안 되어 그의 동생 요한(Johann), 라이프니츠(Leibniz), 그리고 하위헌스가 풀이를 발표했다. 요한 베르누이는 훗날, 문제를 낸 형이 정작 그 문제를 풀지 못했다고 고소해하며 회상했다. 현수선은 새로운 미적분학(calculus)이 거둔 첫 승리 가운데 하나였으며, 쌍곡선함수(hyperbolic functions) cosh와 sinh로 이어졌다. 이 함수들은 18세기에 Vincenzo Riccati와 람베르트(Johann Heinrich Lambert)가 체계적으로 연구했다.

사고 기술

모든 이음점에서 힘을 분해하라

이음점과 곧은 부재로 이루어진 구조물에서는 각 이음점에서 힘의 평형을 따져라. 일정한 성분과 누적되는 하중이 모양을 드러내 주는 경우가 많다.

대학에서는 이것이 공학의 트러스(truss)와 골조 해석이 되고, 연속 극한에서는 케이블, 보, 막의 미분방정식(differential equation)이 된다. 이산적인 사슬에서 연속적인 사슬로 넘어가는 것은 Section 10.3에서 본, 합에서 적분으로 넘어가는 것과 같은 방법이다.

더 도전하기

1 **짝수 개의 지지대.** 지지대가 $2n$개여서 사슬의 가장 낮은 부분이 가운데의 수평 구간이 되는 경우에 대해 문제를 다시 풀어라. 이음점들은 여전히 포물선 위에 있는가?

2 **장력.** 사슬에서 가장 큰 장력을 H, w, n으로 나타내어라. 그 장력은 어디에서 생기는가?

3 **현수선.** $y = c\cosh\frac{x}{c}$가 $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$을 만족함을 확인하라. $x = 0$에서 $x = X$까지 현수선의 길이가 $c\sinh\frac{X}{c}$임을 보여라.

4 **갈릴레이의 오류.** 길이가 $2L$인 사슬이 $2d$만큼 떨어진 두 지지점 사이에 매달려 있다. L이 d보다 조금만 클 때, 현수선의 처짐이 포물선의 처짐과 근사적으로 같음을 보여라. 갈릴레이의 실험에서 그 차이가 드러나지 않은 이유는 무엇인가?

더 읽을거리

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves*** (Cambridge University Press). 현수선, 포물선, 그리고 그 친척 곡선들을 다룬다.
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton*** (Cambridge University Press). 축의 사슬에서 시작하여, 석조 아치와 돔이 어떻게 서 있는지를 설명한다.
- **David Billington, *The Tower and the Bridge*** (Princeton University Press). 다리의 예술과 공학을 다룬다.

우리가 배운 것

우리는 흔들리는 것, 회전하는 것, 그리고 움직이는 곳에서 바라본 것에서 출발했다. 그리고 세 가지 질문을 던졌다. 운동은 언제 단순한가? 올바른 관점이란 무엇인가? 직관은 믿을 만한가? 이 장의 열네 문제가 보여 준 것을 정리하면 다음과 같다.

1. 운동은 언제 단순한가?

진폭과 무관한 하나의 진동수를 갖는 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이 이상적인 경우이다. 이것을 고유 진동수로 강제하면 공명(resonance)이 일어났다(Section 11.1). 공명에서 조금 벗어나면 맥놀이(beats)가 생기고, 정확히 공명할 때는 진폭이 한없이 커진다. 결합된 두 진동자(coupled oscillators)는 사실 서로 독립인 두 단순 진동자가 모습을 바꾼 것이었지만(Section 11.2), 진동수의 비가 무리수 $\sqrt{3}$이므로 합쳐진 운동은 결코 반복되지 않는다. 실제 진자는 전혀 단순하지 않다(Section 11.3). 그 주기는 진폭에 따라 커지며, 이는 타원 적분(elliptic integral)으로 표현되는데, 가우스(Gauss)의 산술-기하 평균(arithmetic–geometric mean)은 이 적분을 놀라운 속도로 계산해 낸다. 그리고 등시 곡선(tautochrone)(Section 11.4)은 궤도를 사이클로이드(cycloid)로 구부려서 운동을 다시 정확히 단순하게 만드는 방법을 보여 주었다.

2. 올바른 관점이란 무엇인가?

거의 모든 문제는 올바른 변수나 올바른 기준틀을 선택함으로써 풀렸다.

- **좌표.** 호의 길이(arc length)는 등시 곡선 문제를 단순하게 만들었고, 조합 $x \pm y$는 용수철들의 결합을 풀어 주었다. 밧줄에서 지나온 부분의 비율은 개미 문제에서 늘어남의 효과를 없애 주었고(Section 11.12), 시간을 거리의 함수로 쓰자 제설차의 방정식이 선형이 되었다(Section 11.13).
- **기준틀.** 가속하는 기차 안에서는(Section 11.5) 가상력(fictitious force)이 중력을 기울였고, 구슬은 새로운 최저점을 중심으로 진동했다. 아인슈타인(Einstein)은 이 관찰을 일반 상대성 이론(general relativity)으로 발전시켰다.
- **모멘트를 잡을 점.** 회전하는 구슬의 경우(Section 11.6), 마찰력이 접촉점에 작용하므로 접촉점에 대한 각운동량(angular momentum)이 보존되었고, 이 덕분에 마찰력을 몰라도 최종 속력을 구할 수 있었다.

- **동등한 계.** 막대는 심프슨 공식(Simpson's rule)의 가중치를 갖는 세 입자와 정확히 똑같이 행동한다(Section 11.7). 그리고 고체의 평형(equilibrium) 위치는 그 법선(normal)이 질량 중심(centre of mass)을 지나는 곳이다(Section 11.8).

3. 직관은 믿을 만한가?

대개는 그렇지 않다. 대포가 도달할 수 있는 영역의 경계는 하나의 궤적(trajectory)이 아니라 궤적들의 포락선(envelope)이다(Section 11.9). 충분히 가파르게 던진 공은 땅에 떨어지기 전에 던진 사람 쪽으로 되돌아온다(Section 11.10). 야수는 공의 상이 일정하게 올라가도록 유지하기만 하면, 공이 어디에 떨어질지 예측하지 않고도 공을 잡을 수 있다(Section 11.11). 개미가 밧줄 위를 천천히 걸어가는데 밧줄이 그보다 십만 배 빠르게 늘어나더라도 개미는 결국 끝에 도달한다(Section 11.12). 매달린 사슬은 포물선(parabola)이 아니지만, 다리를 떠받치는 사슬은 포물선이다(Section 11.14). 어느 경우든 짧은 계산 하나가 확신에 찼지만 틀린 직관을 정확한 명제로 바꾸어 주었고, 대개는 그 이유까지 설명해 주었다.

4. 진동과 기준틀을 위한 도구 모음

방법	사용한 곳
특수해(particular solution)와 여함수(complementary solution)의 합	공명 (11.1)
고유벡터(eigenvector)를 이용한 결합 풀기	기준 진동(normal modes) (11.2)
에너지 적분과 치환	진자 (11.3)
자연스러운 변수	등시 곡선 (11.4); 개미 (11.12)
가상력	기차 (11.5)
한 점에 대한 각운동량	백스핀 (11.6)
모멘트 맞추기	심프슨 막대 (11.7)
정류점(stationary point) 세기	기울어진 평형 (11.8)
판별식(discriminant)과 포락선	안전 포물선 (11.9)
도함수(derivative)의 부호	되돌아오는 공 (11.10)
계수 비교	야수 (11.11)
적분 인자(integrating factor)	개미 (11.12); 제설차 (11.13)
접합점에서 힘의 분해	다리 (11.14)

다음으로

- 다음 두 장에서는 Section 12.1을 시작으로 확률(probability)과 통계(statistics)를 다룬다.

- 기준 진동은 고유벡터이며(Section 7.2), Section 8.6의 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)는 이 장의 진동자를 양자역학에서 다룬 것이다.
- 한계 순환(limit cycle)(Section 8.4)은 스스로 유지되는 진동이고, 혼돈(chaos)(Section 8.7)은 비선형(nonlinear) 진동자를 강제했을 때 나타날 수 있는 현상이다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***: 진동, 공명, 기준 진동을 다루는 고전적인 입문서.
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***: 회전, 기준틀, 그리고 놀라운 문제가 많이 실려 있다.
- **Steven Strogatz, *Sync***: 반딧불이에서 다리에 이르기까지 진동자들이 어떻게 박자를 맞추게 되는지를 다룬다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***: 등시 곡선, 최단 강하 곡선, 제설차 문제를 그 역사와 함께 다룬다.

콜먼(Coleman)은 물리학자의 경력이란 조화 진동자를 점점 더 추상적인 방식으로 다루는 일로 이루어진다고 농담한 적이 있다. 이 장은 그 이유를 보여 주려 했다. 진동자는 존재하는 가장 단순한 운동이며, 올바른 관점을 고르기만 하면 거의 모든 것이 진동자처럼 보인다. 변수든, 기준틀이든, 조합이든 그 관점을 찾아내는 법을 익히는 것이야말로 역학이 가르쳐 주는 가장 쓸모 있는 기술이다.

더 도전하기 해답

여기 실린 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 먼저 각 연습문제를 제대로 풀어 보라.

11.1 공명

1. 엘리베이터(lift)의 기준틀(frame)에서는 중력이 실질적으로 $g - f$이고, 줄의 강성(stiffness)은 $\frac{mg}{a}$이다(mg의 힘을 받으면 a만큼 늘어나기 때문이다). 따라서 처음에 $y = a, \dot{y} = 0$이라는 조건 아래 $\ddot{y} + \frac{g}{a}y = g - f$이다. 새 평형(equilibrium) 위치는 $a - \frac{af}{g}$이므로 $y = a - \frac{af}{g}(1 - \cos \omega t)$이다. 진폭(amplitude)은 $\frac{af}{g}$이고, 가장 작은 늘어난 길이 $a(1 - \frac{2f}{g})$는 양수이다. 엘리베이터의 가속이 멈추면 평형 위치는 다시 a가 되고, 이때 입자의 변위는 $-\frac{af}{g}(1 - \cos \omega T)$, 속도는 $-\frac{af}{g}\omega \sin \omega T$이다. 새 진폭은 $\frac{af}{g}\sqrt{(1 - \cos \omega T)^2 + \sin^2 \omega T} = \frac{2af}{g}\left|\sin \frac{1}{2}\omega T\right|$이다.

2. $x = Ct \cos nt$로 두면 $\ddot{x} + n^2 x = -2Cn \sin nt$이므로 $C = -\frac{nb}{2}$이다. 초기 조건을 맞추기 위해 $\frac{b}{2}\sin nt$를 더하면 $x = \frac{b}{2}(\sin nt - nt \cos nt)$이다. 문제에 주어진 공식에 p에 대한 로피탈 정리(L'Hôpital's rule)를 적용하면 $p \to n$일 때 같은 결과를 얻는다.

3. $n \sin pt - p \sin nt = n(\sin pt - \sin nt) + (n - p)\sin nt = 2n \cos \frac{(n+p)t}{2} \sin \frac{(p-n)t}{2} + (n - p)\sin nt$이다. 두 번째 항은 작다. 첫 번째 항은 천천히 변하는 포락선(envelope) $\left|\sin \frac{(n-p)t}{2}\right|$ 안에서 일어나는 빠른 진동이며, 이 포락선은 $\frac{2\pi}{n-p}$마다 반복된다.

4. 진폭은 $\frac{F}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4k^2p^2}}$이다. 분모를 p^2에 대해 최소화하면 $-2(n^2 - p^2) + 4k^2 = 0$이므로 $p^2 = n^2 - 2k^2$이다.

11.2 기준 진동

1. 미분하면 에너지의 변화율은 $\dot{x}\left(m\ddot{x} + \frac{\lambda}{a}(2x + y)\right) + \dot{y}\left(m\ddot{y} + \frac{\lambda}{a}(x + 2y)\right) = 0$이다. $u = x - y, v = x + y$로 두면 에너지는 $\left(\frac{m}{4}\dot{u}^2 + \frac{\lambda}{4a}u^2\right) + \left(\frac{m}{4}\dot{v}^2 + \frac{3\lambda}{4a}v^2\right)$이고, 각 괄호는 단진동자(simple harmonic oscillator)의 에너지이므로 각각 일정하다.

2. 주기(period) $\frac{2\pi}{\omega}$: $x = -y, \dot{x} = -\dot{y}$에서 시작한다(그러면 $v \equiv 0$이다). 주기 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega}$: $x = y, \dot{x} = \dot{y}$에서 시작한다.

3. X에 작용하는 힘은 $-\frac{\lambda}{a}x - \frac{\mu}{a}(x+y)$이다. 기준 모드(normal mode) $x-y$는 여전히 $\omega^2 = \frac{\lambda}{ma}$를 갖고, $x+y$는 이제 $\frac{\lambda+2\mu}{ma}$를 갖는다. 진동수(frequency)의 비 $\sqrt{1+2\mu/\lambda}$가 유리수일 때, 그리고 그때에만 모든 운동이 주기적이다.

4. 행렬은 $\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$이고, 고윳값(eigenvalue) $2-\sqrt{2}$, 2, $2+\sqrt{2}$에 대한 고유벡터(eigenvector)는 각각 $(1,\sqrt{2},1)$, $(1,0,-1)$, $(1,-\sqrt{2},1)$이다. 모드는 다음과 같다. 셋이 모두 함께 흔들리되 가운데가 가장 크게 흔들리는 모드, 가운데는 정지한 채 바깥 둘이 서로 반대로 흔들리는 모드, 가운데가 바깥 둘과 반대로 흔들리는 모드이다.

11.3 실제 진자

1. 에너지: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2$이다. 최대 변위에서는 $\sqrt{x^2+a^2} = a + \frac{v}{k}$이므로 $x_{\max} = \sqrt{\frac{2av}{k} + \frac{v^2}{k^2}}$이다. v가 작으면 늘어난 길이는 약 $\frac{x^2}{2a}$이므로 $\dot{x}^2 \approx v^2 - \frac{k^2x^4}{4a^2}$이다. $x = Xu$, $X = \sqrt{2av/k}$로 두면 주기 $4\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}}$는 $\frac{4X}{v}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$가 된다. 복원력(restoring force)이 x가 아니라 x^3에 비례하므로($x=0$에서 줄이 정확히 자연 길이이다) 단진동 극한은 존재하지 않는다.

2. $m = \sin^2\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^4}{48}$일 때 $(1-m\sin^2\phi)^{-1/2} \approx 1 + \frac{m}{2}\sin^2\phi + \frac{3m^2}{8}\sin^4\phi$이다. ϕ에 대해 평균을 내면 $1 + \frac{m}{4} + \frac{9m^2}{64}$이고, γ^4 항은 $-\frac{1}{192} + \frac{9}{1024} = \frac{11}{3072}$이다.

3. 1과 $\cos 45^\circ = 0.70711$에서 시작하면 $(0.85355, 0.84090)$, 다음에 $(0.84722, 0.84720)$, 그다음에 0.847213을 얻는다. 주기 인자는 $\frac{1}{0.847213} = 1.18034$이다.

4. 주기 인자는 $\frac{1}{16}(\gamma_5^2 - \gamma_4^2) \approx 1.71\times10^{-4}$(라디안 단위)만큼 변하므로, 시계는 하루에 약 15초 늦어진다.

11.4 등시 곡선

1. $y = \frac{s^2}{4k}$이므로 $\ddot{s} = -g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -\frac{g}{2k}s$이다. 이는 $\omega^2 = \frac{g}{2k}$인 단진동(simple harmonic motion)이다. $s_0 = 2\sqrt{kh}$로부터 V에서의 속력은 $\omega s_0 = \sqrt{2gh}$이다.

2. 그릇은 길이 R인 진자(pendulum)이다. 낮은 높이에서 출발하면 바닥까지 걸리는 시간은 $\frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}$이다. 가장자리($\gamma = 90^\circ$)에서 출발하면 1.180배 더 걸려 약 $1.85\sqrt{R/g}$이다.

3. 그렇다. 두 입자 모두 4분의 1 주기 뒤에 V에 도달하여 그곳에서 충돌한다. 충돌 뒤 어떤 속도로 떠나든 각 입자는 같은 주기로 s에 대한 단진동을 하므로, 정확히 반주기 뒤에 V로 돌아와 다시 V에서 충돌한다. (V에 정지한 채 남은 입자는 그냥 그 자리에 머문다.)

4. $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1-\cos\theta)$이면 $\mathrm{d}s = 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$이므로, 아치 하나의 길이는 $\int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8R$이다. 넓이는 $\int y\,\mathrm{d}x = R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = 3\pi R^2$이다.

11.5 가속하는 기차 안의 중력

1. 객차의 기준틀에서는 단위 질량당 a의 힘이 뒤쪽(남쪽), 즉 발사 방향으로 작용한다. 비행 시간이 $\frac{2V\sin\theta}{g}$이므로 사거리(range)는 $\frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right)$이다. 그 도함수는 $\tan 2\theta = -\frac{g}{a}$일 때 0이 되므로 $2\theta \approx \frac{\pi}{2} + \frac{a}{g}$이다. 최댓값은 $\frac{V^2}{g}\left(\sqrt{1+a^2/g^2} + \frac{a}{g}\right) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2}$이다.

2. $x = ut\cos\theta - \frac{1}{2}ft^2$이고, $t = \frac{2u\sin\theta}{g}$에 $x = \frac{2u^2\sin\theta}{g^2}(g\cos\theta - f\sin\theta)$인 지점에 떨어진다. 수평 속도 $u\cos\theta - ft$는 $\tan\theta > \frac{g}{2f}$이면 착지 전에 음수가 되므로 $\alpha = \tan^{-1}\frac{g}{2f}$이다. $f = g$, $\theta = 45^\circ$이면 가속도가 처음 속도와 정확히 반대 방향이므로, 발사체는 직선 $y = x$를 따라 곧장 올라가 멈춘 뒤 곧장 O로 돌아온다.

3. 유효 중력(effective gravity)은 아래쪽 g와 뒤쪽 a를 합한 것이다. 자유 표면(free surface)은 이에 수직이므로 $\tan^{-1}\frac{a}{g}$만큼 기울어진다.

4. 유효 중력의 크기는 $\sqrt{g^2+a^2}$이고, $x = \frac{ak}{2g}$에서 기울기는 $\frac{a}{g}$, 곡률 반지름(radius of curvature)은 $\rho = \frac{k}{2}\left(1+\frac{a^2}{g^2}\right)^{3/2}$이다. 주기는 $2\pi\sqrt{\rho/\sqrt{g^2+a^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{k(g^2+a^2)}{2g^3}}$이고, $a = 0$이면 $2\pi\sqrt{\frac{k}{2g}}$가 된다.

11.6 백스핀

1. 마찰력은 접촉점에 작용하므로 그 점에 대한 각운동량(angular momentum)이 보존된다: $maV + \frac{2}{5}ma^2\frac{V}{a} = mav_0 + \frac{2}{5}ma^2\omega_0$. 따라서 $V = \frac{5v_0 + 2a\omega_0}{7}$이고, 이는 $\frac{v_0}{a\omega_0} < 1$일 때 v_0보다 크다.

2. $V = \frac{5}{7}v_0$이다. 최종 에너지는 $\frac{1}{2}m\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2\left(1+\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}mv_0^2$이므로, 에너지의 $\frac{2}{7}$을 잃는다.

3. $I = ma^2$으로 같은 논증을 하면 $V = \frac{1}{2}(v_0 - a\omega_0)$이다. $V = -\frac{v_0}{7}$로 두면 $\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{7}{9}$이다.

4. 중심에서 높이 h만큼 위에 충격량(impulse) J를 가하면 $mv = J$, $\frac{2}{5}ma^2\omega = Jh$이다. 구르려면 $v = a\omega$이어야 하므로 $h = \frac{2}{5}a$이다.

11.7 막대 속의 심프슨 공식

1. $\frac{1}{6}\left(1 + 4\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{47}{60} \approx 0.7833$이고, 이를 $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$와 비교할 수 있다. $\int_{-1}^{1}$에 대해 공식 $\frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(-1) + 4\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(1)\big)$은 x^3에 대해 0, x^2에 대해 $\frac{2}{3}$을 주지만(둘 다 정확하다),

적분값이 $\frac{2}{5}$인 x^4에 대해서도 $\frac{2}{3}$을 준다.

2. 각 ψ 방향의 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 이차 형식(quadratic form) $A\cos^2\psi + B\sin^2\psi + 2C\sin\psi\cos\psi$이다. $\psi \mapsto \psi + 90^\circ$에 대해 불변이어야 하므로 $A = B$, $C = 0$이고, 따라서 모든 축에 대해 같은 값, 즉 한 변에 평행한 축에 대한 값 $\frac{1}{3}Ma^2$이다.

3. 넓이의 $\frac{1}{3}$을 각 변의 중점에 놓으면 삼각형 위에서 모든 이차식을 정확히 적분할 수 있다(직각삼각형에서 $1, x, x^2, xy$로 확인해 보라). 따라서 세 입자는 얇은 판(lamina)과 질량, 질량중심(centre of mass), 이차 모멘트(second moment)가 모두 같다.

4. 각 방향으로 $-a$, 0, a에 놓인 막대 가중치 $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$의 곱을 취한다. 그러면 꼭짓점에 $\frac{M}{216}$, 모서리의 중점에 $\frac{M}{54}$, 면의 중심에 $\frac{2M}{27}$, 정육면체의 중심에 $\frac{8M}{27}$이 놓인다. 중심을 지나고 모서리에 평행한 축에 대해서는 $I = M\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2}{3}Ma^2$이다. 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해 모서리에 대해서는 $\frac{2}{3}Ma^2 + M(\sqrt{2}a)^2 = \frac{8}{3}Ma^2$이다.

11.8 기울어진 평형

1. 공통 면에서 원뿔 쪽으로 재면 G의 위치는 $\frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3a}{8} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{\lambda a}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{\lambda}{3}} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(2+\lambda)}$이다. 반구 위에서는 접촉점에서의 법선(normal)이 항상 면의 중심을 지나므로, G가 그 중심보다 아래에 있을 때, 즉 $\lambda < \sqrt{3}$일 때 장난감은 스스로 바로 선다. 옆으로 누우면 장난감은 원뿔의 모선(generator)과 가장자리에서 탁자에 닿고, G를 지나는 연직선이 꼭짓점과 가장자리 사이에 떨어지면 그 상태를 유지한다. 이를 위해서는 G의 높이가 적어도 $-\frac{a}{\lambda}$이어야 하며, 이는 $\lambda^3 + \lambda + 8 > 0$으로 정리되므로 항상 참이다.

2. 균일한 구에서는 모든 점이 평형이다(중립 평형(neutral equilibrium)). 질량중심이 중심에서 약간 벗어나 있으면 평형은 두 개뿐이다. G가 가장 낮은 경우(안정(stable))와 G가 가장 높은 경우(불안정(unstable))이다.

3. 평형은 법선이 중심을 지나는 곳, 즉 두 축의 네 끝점에서 생긴다. 단축(minor axis)의 끝으로 놓이면 안정이고(G가 가능한 한 낮다), 장축(major axis)의 끝으로 놓이면 불안정이다.

4. 대칭성에 의해 G는 원점에 있다. $n = 2$이면 $Y = r\left(\frac{1}{2} - p^2\right)$이고, 기울어진 평형이 되려면 법선이 G를 지나야 하므로 $Y = 0$, $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 그곳에서 기울기는 $-\sqrt{2}$이므로 $\overrightarrow{AB}$는 $\tan^{-1}\sqrt{2} \approx 54.7^\circ$만큼 기울어지고, 다른 포물면(paraboloid) 위에 놓이면 125.3°만큼 기울어진다. 두 경우는 x축에 대해 서로 대칭이며, 그래서 기울기가 짝을 이룬다.

11.9 안전 포물선

1. 각 입자는 $ut\,\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$에 있으므로, 중심이 $-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$이고 반지름이 ut인 구 위에 있다. $(0, \frac{u^2}{2g})$에서 수평으로 발사된 입자는 $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$을 따라가는데, 이것이 정확히 안전 포물선(parabola of safety)이다. 각 α로 발사된 입자는 시각 $\frac{u}{g\sin\alpha}$에 $x = \frac{u^2}{g\tan\alpha}$에서 이 포물선에 접한다. 수평으로 발사된 입자는 그곳까지 $\frac{x}{u}$의 시간이 걸리므로, 시각 $\frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha} = \frac{u}{g}\tan\frac{\alpha}{2}$에 발사되어야 한다(접점이 지면보다 위에 있으려면 $\alpha \geq 45°$이어야 한다).

2. 직선은 $R\sin\beta = \frac{u^2}{2g} - \frac{gR^2\cos^2\beta}{2u^2}$인 곳에서 안전 포물선과 만나므로 $R = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$이다. 최대일 때 연습문제 3의 두 각이 일치하므로, 가장 좋은 각은 이등분선(bisector) 방향인 $45° + \frac{1}{2}\beta$이다.

3. $\lambda = \tan\theta$로 두면 두 값은 $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2u^2}{gx}$, $\lambda_1\lambda_2 = 1 + \frac{2u^2y}{gx^2}$를 만족한다. 따라서 $\tan(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{x}{y}$이고 $\theta_1 + \theta_2 = 90° + \varphi$이다. 여기서 φ는 OP의 앙각(elevation)이다. OP와 연직선의 이등분선은 $\frac{1}{2}(90° + \varphi)$의 각을 이룬다.

4. 꼭짓점(vertex)은 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$이고 초점 거리(focal length)는 $\frac{u^2\cos^2\theta}{2g}$이므로, 초점의 높이는 $\frac{u^2}{2g}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$이다. O에서 초점까지의 거리는 θ에 관계없이 $\frac{u^2}{2g}$이다.

11.10 나에게로 되돌아오는 공

1. $u = g = 1$인 단위에서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = t(t^2 - 3t\sin\alpha + 2)$이고, 그 근은 $t \approx 1.050$(극대(local maximum), $OP \approx 0.516\frac{u^2}{g}$)과 $t \approx 1.904$(극소(local minimum), $OP \approx 0.336\frac{u^2}{g}$)이다. 공은 $t \approx 1.970$에 착지한다.

2. 평면에 나란한 방향과 수직인 방향으로 분해하면 $OP^2 = u^2t^2 - ugt^3\sin(\alpha' + \beta) + \frac{1}{4}g^2t^4$이다. 여기서 α'은 평면에서 잰 각이다. 이는 $\alpha = \alpha' + \beta$로 둔 평지에서의 공식과 같다. 따라서 조건 $\sin(\alpha' + \beta) > \frac{2\sqrt{2}}{3}$은 **수평면**에서 잰 각에 관한 것이며, 평면에서 재면 임계각은 $70.5° - \beta$로 줄어든다(공이 그 전에 이미 착지하지 않았다면).

3. 더 작아진다. 공기 저항(drag)은 수평 운동을 줄이고 하강을 더 가파르게 만들어 공이 더 연직에 가깝게 되돌아 떨어지게 하므로, OP가 줄어들기 쉬워진다.

4. OP^2의 공식에는 착지점이 들어 있지 않으므로, 앞에서와 마찬가지로 $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때, 그리고 그때에만 OP가 한동안 감소한다(비행 시간이 더 길므로 감소 구간은 항상 착지 전에 나타난다). 결국에는 낙하가 지배적이 되어 OP는 증가한다.

11.11 야수는 어떻게 공을 잡는가

1. 수비수가 D_0에 서 있다가 타자(batsman)에게서 멀어지는 방향으로 속도 v로 달린다면, 공은 수비수 앞으로 거리 $D_0 + vt - Ut$인 곳에 있다. 공을 잡으려면 $D_0 + vT = UT$이어야 하고, 그러면 거리는 $(U-v)(T-t)$이므로 $\tan\theta = \frac{gt}{2(U-v)}$로 역시 일차식이다. 공이 수비수 뒤에 떨어진다면 $UT > D_0$이고 $v > 0$이므로, 수비수는 뒤로 달린다.

2. $\theta = \tan^{-1}\frac{gt}{2U}$이므로 $\dot\theta = \frac{g/2U}{1+(gt/2U)^2}$이고, 이는 감소한다. $\tan\theta$가 일차식인 것은 높이 $\frac{1}{2}gt(T-t)$와 거리 $U(T-t)$가 인수 $T-t$를 공유하기 때문이다.

3. 그렇다. 수비수의 눈높이를 기준으로 한 높이는 공을 잡는 순간 0이 되는 이차식이므로 $(T-t)(c+dt)$로 인수분해된다. 이를 $U(T-t)$로 나누면 일차함수가 남는다(이 값은 처음에 음수이다. 즉 수비수는 처음에 아래를 내려다본다).

4. 아니다. 공기 저항이 있으면 수평 거리는 $\frac{U}{k}(\mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-kT})$이고, 높이는 이것에 t의 일차함수를 곱한 꼴이 아니므로 $\tan\theta$는 더 이상 일차식이 아니다.

11.12 고무줄 위의 개미

1. $\frac{x}{a+ut} = \frac{1}{k}\ln\frac{a+ut}{a}$이고, 이는 $t = \frac{a}{u}(\mathrm{e}^{k/2}-1)$일 때 $\frac{1}{2}$이다. $\frac{T}{2} = \frac{a}{2u}(\mathrm{e}^{k/2}-1)(\mathrm{e}^{k/2}+1)$이고 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{k/2}+1) > 1$이므로, 이는 $\frac{T}{2}$보다 앞선다.

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x}{L} = \frac{v}{L} = \frac{v}{a}\mathrm{e}^{-\lambda t}$이므로 $\frac{x}{L} = \frac{v}{a\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})$이고, 이는 $v > \lambda a$일 때에만 1에 도달한다.

3. $\frac{x}{L} = v\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a+\frac{1}{2}bs^2}$이고, 이는 $\frac{v\pi}{\sqrt{2ab}}$에 수렴(converge)한다. 따라서 개미는 $v > \frac{\sqrt{2ab}}{\pi}$일 때에만 도착한다.

4. $\frac{H_N}{100\,000} = \frac{1}{100}$이 되어야 하므로 $H_N = 1000$이고, $N \approx \mathrm{e}^{999.4} \approx 10^{434}$초이다.

11.13 제설차 문제

1. 정오에서 시간 t가 지난 뒤 눈의 깊이는 $t+t_0$에 비례하므로, 제설차(snowplough)가 이동한 거리는 $c\ln\frac{t+t_0}{t_0}$이다. 조건 $x(1)=2$, $x(2)=3$에서 $\left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3 = \left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2$을 얻는다. $u = \frac{1}{t_0}$로 두면 이는 $u^2-u-1=0$으로 정리되므로 $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이고 $t_0 \approx 0.618$시간이다. 즉 눈은 약 11시 23분에 내리기 시작했다.

2. $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} - \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} + \alpha\left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}$이고, $\alpha\left(t - (\mathrm{e}^{\alpha y}-1)\frac{h}{k}\right)$도 이와 같다.

3. 간격은 $\left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}$이고, 그 도함수는 $y = \frac{kT-h}{\alpha h}$에서 0이 된다. $kT > h$이면 간격은 그때까지 커지다가 $y = \frac{kT}{\alpha h}$에서 0으로 줄어든다. $kT \le h$이면 도함수 $\alpha\mathrm{e}^{\alpha y}\left(T - \frac{h}{k} - \frac{\alpha h y}{k}\right)$가 모든 $y > 0$에서 음수이므로 간격은 처음부터 줄어든다. 두 번째 제설차는 깊

이가 $k\times$ (간격)인 눈을 만나며, 이 깊이가 같은 지점에서 첫 번째 제설차가 만난 눈보다 깊은 동안에는 더 뒤처진다.

4. $\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t_3}{\mathrm{d}y} = t_3 - t_2(y)$이다. $t_3 = t_2 + g$로 쓰면 $g = \mathrm{e}^{\alpha y}\left(T - \alpha T y + \frac{\alpha^2 h y^2}{2k}\right)$이다. $kT \geq 2h$이면 이는 두 번째 제설차가 첫 번째를 따라잡기 전에 $y = \frac{k}{\alpha h}\left(T - \sqrt{T^2 - 2hT/k}\right)$에서 0이 된다. $kT < 2h$이면 두 번째 제설차가 첫 번째를 먼저 따라잡는다.

11.14 현수선이 아니라 포물선

1. 그렇다. 수평 장력(tension) H는 여전히 일정하고, 가운데 마디의 기울기는 0이며, 그다음부터 기울기가 $\frac{w}{H}$씩 증가한다. 수평 마디의 가운데에서 x를 재면, k번째 이음점은 $x = (k - \frac{1}{2})h$에 있고 가장 낮은 이음점들보다 $\frac{wh}{2H}k(k-1)$만큼 높다. 이는 $\frac{w}{2Hh}\left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right)$이므로 포물선이다.

2. 장력은 $\sqrt{H^2 + V^2}$이고, 연직 성분 V가 가장 큰 곳에서 가장 크다. 그곳은 끝 마디로, 여기서 V는 하중의 절반인 $\frac{(2n+1)w}{2}$를 지탱한다. 따라서 $T_{\max} = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}(2n+1)^2 w^2}$이다.

3. $y' = \sinh\frac{x}{c}$이고 $y'' = \frac{1}{c}\cosh\frac{x}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{1 + \sinh^2\frac{x}{c}}$이다. 길이는 $\int_0^X \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = c\sinh\frac{X}{c}$이다.

4. 처짐(sag)이 s인 얕은 곡선에서는 현수선(catenary)과 포물선 모두 길이가 약 $2d + \frac{4s^2}{3d}$이므로, 둘 다 $s \approx \sqrt{\frac{3}{2}d(L-d)}$를 주며 차이는 s^4 차수에서만 나타난다. 거의 팽팽한 사슬에서는 그 차이가 갈릴레이(Galileo)가 측정할 수 있었던 어떤 것보다도 훨씬 작다.

장

12

확률

불확실성도 정확하게 추론할 수 있다. 그러나 직관은 그렇지 못하다는 것이 드러난다.

이 장의 내용

12.1	조건을 정확하게 걸기	STEP I 2007
12.2	기저율 오류	STEP II 1998
12.3	"무작위"란 무슨 뜻인가?	STEP III 2022
12.4	둘씩은 독립이지만 한꺼번에는 독립이 아닌	STEP III 2021
12.5	마지막 승객의 좌석	STEP II 2021
12.6	동전 하나 더	STEP I 2016
12.7	토너먼트에서 누가 누구와 만나는가	STEP II 견본 문제지
12.8	페니의 게임	STEP III 2001
12.9	치우친 동전으로 공정하게 정하기	STEP I 2019
12.10	느슨한 끈 끝 묶기	STEP III 2008
12.11	우표, 컵, 그리고 e	STEP I 1996
12.12	언제 그만 찾아야 하는가	STEP I 2001
12.13	삼자 결투	STEP II 1995
12.14	혼합 전략	STEP I 1989
12.15	멸종인가 폭발인가	STEP II 2003
12.16	앞으로 보고 거꾸로 보는 마르코프 연쇄	STEP III 1996
12.17	바나흐의 성냥갑	STEP II 1992
12.18	무기억성	STEP III 2021
12.19	평면 위의 무작위 점	STEP II 2012
12.20	뷔퐁의 바늘	STEP I 1993
12.21	막대 부러뜨리기	STEP III 1990
12.22	평균이 없는 분포	STEP III 1995
12.23	확률로 얻는 스털링 공식	STEP II 2016
12.24	중심극한정리	STEP III 2008
12.25	여럿 가운데 가장 큰 값	STEP III 2025
A	연습문제 해답	995쪽

우연에 대해 추론하기

> 확률론은 계산으로 환원된 상식에 지나지 않는다.
>
> — 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace), *Théorie analytique des probabilités* (1812)

라플라스의 유명한 말은 절반만 옳다. 확률(probability)은 상식을 정밀하게 만든 것이다. 그러나 이 장에서 거듭 보게 되듯이, 상식을 그대로 내버려 두면 틀리고 만다. 사람들은 희귀병 검사에서 양성이 나오면 아마 그 병에 걸렸을 것이라고 생각한다. 비행기에 처음 탑승한 승객이 엉뚱한 자리에 앉으면 마지막 승객이 자기 자리에 앉을 가능성은 거의 없다고 생각한다. 동전 던지기에서 어떤 앞뒷면 배열이 같은 길이의 다른 배열을 이길 수는 없다고 생각한다. 많은 측정값의 평균은 언제나 어떤 값으로 안정된다고 생각한다. 이것들은 모두 거짓이며, 각각의 경우 짧은 계산 하나가 진실을, 더 나아가 그 이유까지 드러낸다.

확률론은 17세기에 블레즈 파스칼(Blaise Pascal)과 피에르 드 페르마(Pierre de Fermat)가 주고받은 편지 속에서 도박에 관한 질문들로부터 시작되었다. 확률론이 엄밀한 수학의 한 분야가 된 것은 1933년에 이르러서였는데, 이때 안드레이 콜모고로프(Andrey Kolmogorov)가 그 공리(axiom)를 제시하였다. 그 사이에, 그리고 그 이후로, 확률론은 수학에서 가장 널리 쓰이는 분야 가운데 하나로 성장하였다.

확률은 왜 중요한가

불확실성을 다루는 모든 분야는 확률을 사용한다. 의학(진단 검사와 임상 시험), 법학(증거의 무게), 금융(위험과 보험), 공학(신뢰성과 홍수), 컴퓨터 과학(무작위 알고리즘, 암호학, 기계 학습), 물리학(양자역학과 통계역학), 생물학(유전학과 전염병)이 모두 그렇다. 현대 인공지능은 상당 부분 응용 확률론이다. 언어 모델은 다음 단어가 나올 확률을 예측한다. 그리고 위험, 우연, 증거에 대해 올바르게 추론하는 능력은 교육받은 사람이라면 누구나 지닐 수 있는 가장 값진 능력 가운데 하나이다.

대학에서 만나게 될 내용

대학 1학년 확률론에서는 공리, 조건부 확률(conditional probability)과 베이즈 정리(Bayes' theorem), 독립(independence), 이산 확률변수와 연속 확률변수(random variable), 기댓값(expectation)과 분산(variance), 생성함수(generating function), 그리고 두 가지 위대한 극한 정리인 큰 수의 법칙(law of large numbers)과 중심극한정리(central limit theorem)를 다룬다. 이후의 과목에서는 확률과정(random process)(마르코프 연쇄(Markov chain), 푸

아송 과정(Poisson process), 무작위 행보(random walk), 분기 과정(branching process)), 측도론적 확률론(measure-theoretic probability)(극한과 연속분포를 튼튼한 기반 위에 올려놓는다), 마팅게일(martingale)을 공부하며, 확률론을 통계학, 해석학, 조합론, 물리학과 연결한다.

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **질문이 정확히 무엇인가?** 확률 실험은 무엇이고, 무엇을 조건으로 삼고 있으며, "무작위로"라는 말은 무슨 뜻인가?
2. **영리한 접근법은 무엇인가?** 언제 대칭(symmetry), 지시변수(indicator), 조건부화, 잘 고른 상태가 긴 계산을 대신할 수 있는가?
3. **장기적으로 무슨 일이 일어나는가?** 확률과정은 시간이 흐름에 따라 어떻게 행동하며, 많은 확률적인 양의 합, 평균, 최댓값은 어떤 모습인가?

이 장은 다섯 부분으로 이루어져 있다. **명료하게 생각하기**(Section 12.1에서 Section 12.4까지)에서는 함정들, 즉 조건부화, 기저율(base rate), "무작위"의 의미, 독립의 의미를 다룬다. **대칭과 영리한 논증**(Section 12.5에서 Section 12.9까지)에는 아름답고 짧은 풀이를 가진 문제들을 모았다. **기댓값, 게임, 멈추기**(Section 12.10에서 Section 12.14까지)에서는 평균과 의사 결정, 즉 언제 멈출지, 누구를 쏠지, 어떻게 무작위화할지로 눈을 돌린다. **확률과정**(Section 12.15에서 Section 12.19까지)에서는 시간과 공간 속에서 무작위성을 따라간다. 그리고 **극한과 연속 확률**(Section 12.20에서 Section 12.25까지)은 기하학적 확률(geometric probability)과 위대한 극한 정리들로 마무리한다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
12.1	조건부화	"특정한 하나" 대 "적어도 하나"
12.2	베이즈 정리	기저율과 자연 빈도(natural frequency)
12.3	베르트랑(Bertrand)의 역설	"무작위"에는 정의가 필요하다
12.4	독립	쌍별 독립(pairwise independence)은 상호 독립(mutual independence)이 아니다
12.5	비행기 좌석	두 좌석 사이의 대칭
12.6	동전 하나 더	서로 여사건인 대칭적 사건
12.7	토너먼트	경기와 쌍 세기
12.8	Penney의 게임	첫 걸음 분석(first-step analysis); 비추이성(non-transitivity)
12.9	공정한 동전	치우침에서 공정함 끌어내기
12.10	무작위 고리	무기억적인 지시변수의 합
12.11	컵과 e	계승(factorial)과 지수급수
12.12	최적 정지(optimal stopping)	$\frac{1}{e}$ 규칙
12.13	삼자 결투(truel)	전략적 약함
12.14	게임 이론(game theory)	무작위화 전략; 최소최대(minimax)
12.15	분기 과정	고정점(fixed point)으로서의 소멸
12.16	마르코프 연쇄	정상분포(stationary distribution); 시간 역전(reversal)
12.17	바나흐(Banach)의 성냥갑	음이항분포(negative binomial distribution)
12.18	지수분포(exponential distribution)	무기억성(memorylessness)과 독립
12.19	공간적 무작위성	최근접 이웃(nearest neighbour); 레일리(Rayleigh) 분포
12.20	뷔퐁(Buffon)의 바늘	기하학적 확률과 π
12.21	무작위 삼각형	넓이로서의 확률
12.22	코시(Cauchy) 분포	평균이 없는 분포
12.23	스털링(Stirling) 공식	정규곡선에서 얻는 계승
12.24	중심극한정리	적률생성함수(moment generating function)
12.25	극값(extreme value)	검벨 분포(Gumbel distribution)

Section 12.24 한 절은 적률생성함수를 사용하는데, 이 내용은 2019년에 STEP 출제 범위에서 빠졌다. 그 절에서는 필요한 내용을 직접 설명한다.

이 장을 읽는 방법

확률 문제가 헷갈릴 때에는 작은 경우에 대해 표본공간(sample space)을 적어 보고 세어 보라. 답이 수상할 만큼 간단하게 나오면 그것을 설명해 주는 대칭을 찾아보라. 그리고 직관과 계산이 어긋나면 계산을 믿고, 그다음에 직관이 왜 틀렸는지 알아내라. 바로 거기에서 배움이 일어난다.

12.1 조건을 정확하게 걸기

문제

STEP I 2007, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/07-s1-q13`

도입

확률(probability)에서 가장 위험한 말은 " 라는 조건에서"이다. 이 문제의 마지막 네 소문항은 거의 똑같이 들린다. 3번 원판이 처음에 뽑힌다, 3번 원판이 뽑힌다, 번호가 적힌 원판이 처음에 뽑힌다, 번호가 적힌 원판이 뽑힌다. 이 가운데 셋은 답이 $\frac{1}{2}$이다. 나머지 하나는 그렇지 않다.

이 차이는 유명한 "아들 딸" 퍼즐(어느 가족에 아이가 둘 있고, 적어도 한 명은 아들이다. 둘 다 아들일 확률은 얼마인가?)에 숨어 있는 바로 그 차이이다. 이 퍼즐은 여러 세대의 학생들은 물론이고 적지 않은 전문 수학자들까지 헷갈리게 했다. 여기서 얻을 교훈은, 조건(condition)이란 어떤 결과들이 여전히 가능한지에 대한 정확한 진술이며, 정보를 어떻게 얻었는지가 정보 그 자체만큼이나 중요하다는 것이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 원판 열한 개 가운데 네 개를 뽑는다. "네 개 모두 번호가 적혀 있다"는 사건에 뽑는 순서가 중요한가? 똑같이 가능한 네 원판의 집합은 몇 개인가?

네 원판으로 이루어진 모든 집합은 뽑힐 가능성이 똑같으므로 순서는 무시해도 된다. 똑같이 가능한 집합은 $\binom{11}{4} = 330$개이다.

차근차근 풀기

1단계 조건이 없을 때

번호가 적힌 원판 네 개로 이루어진 집합은 $\binom{5}{4} = 5$개이므로

$$\mathrm{P}(\text{네 개 모두 번호가 적혀 있음}) = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}.$$

2단계 3이 처음에 나올 때

생각해 보기 3번 원판이 처음에 뽑혔다면, 나머지 세 번의 뽑기는 어떻게 되는가?

나머지 세 원판은 남은 열 개(번호가 적힌 것 네 개, 빈 것 여섯 개)에서 무작위로 고른 세 개의 집합이고, $\binom{10}{3} = 120$개의 집합이 모두 똑같이 가능하다. 따라서

$$\text{(ii)}\quad \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}, \qquad \text{(iii)}\quad \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{120} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2},$$

이다. (iii)에서는 나머지 세 개 가운데 정확히 하나에 번호가 적혀 있어야 하기 때문이다.

3단계 3이 (어느 시점에) 뽑힐 때

생각해 보기 3번 원판이 언제 뽑혔는지가 중요한가? 네 개 가운데 3이 들어 있다는 조건에서, 나머지 세 개에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

대칭성(symmetry)에 의해, 네 원판의 집합이 3을 포함한다는 조건에서 나머지 세 원판은 2단계와 똑같이 남은 열 개에서 무작위로 고른 세 개의 집합이다. 따라서 (iv)도 $\frac{1}{2}$이다.

4단계 번호가 적힌 원판이 처음에 나올 때

첫 번째 원판에 번호가 적혀 있다는 조건에서(그 번호가 무엇이든), 나머지 세 개는 역시 남은 열 개의 원판에서 무작위로 고른 세 개의 집합이며, 그 열 개 가운데 네 개는 번호가 적혀 있고 여섯 개는 비어 있다. 따라서 (v)도 $\frac{1}{2}$이다.

5단계 번호가 적힌 원판이 뽑힐 때

생각해 보기 이제 조건은 "네 개 가운데 적어도 하나에 번호가 적혀 있다"이다. 이것은 앞의 조건들 가운데 어느 하나와 같은가? 330개의 집합 가운데 몇 개가 이 조건을 만족하는가?

이 조건은 다르다. 특정한 원판 하나를 지목하지 않기 때문이다. 번호가 적힌 원판이 하나도 없는 집합은 $\binom{6}{4} = 15$개뿐이므로, 315개가 조건을 만족한다. 이 가운데 번호가 적힌 원판을

정확히 두 개 포함하는 집합은 $\binom{5}{2}\binom{6}{2} = 10 \times 15 = 150$개이다. 따라서

$$\text{(vi)} \quad \frac{150}{315} = \frac{10}{21}. \qquad \blacksquare$$

> **잠깐, 직접 해 보기** (vi)은 왜 (v)와 다른가? (v)에서는 **어느** 원판에 번호가 적혀 있는지(첫 번째 원판) 알고, 나머지 세 개에는 아무런 제약이 없다. (vi)에서는 **어떤** 원판에 번호가 적혀 있다는 것만 안다. 번호가 적힌 원판이 세 개나 네 개인 집합은 "어떤 원판에 번호가 적혀 있다"를 더 여러 방식으로 만족하므로, (v)에서처럼 적게 반영되지 않는다.

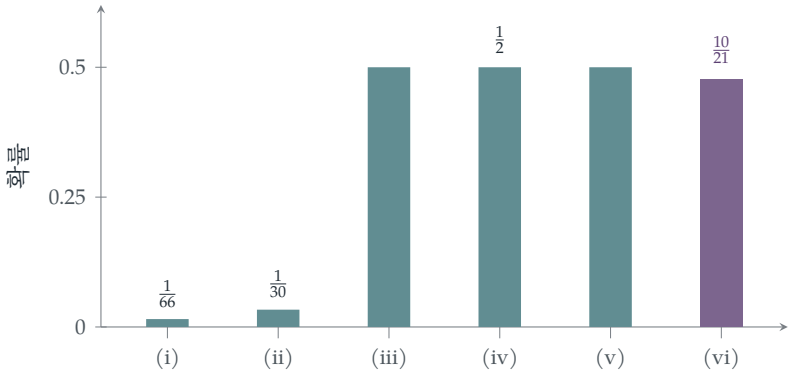


그림 12.1.1 여섯 개의 답. 소문항 (iii), (iv), (v)는 모두 **특정한** 원판에 번호가 적혀 있다는 조건을 걸며, 답은 $\frac{1}{2}$이다. 소문항 (vi)은 **어떤** 원판에 번호가 적혀 있다는 조건만 걸며, 답은 $\frac{10}{21}$이다.

돌아보기

- **조건은 표본공간(sample space)을 제한한다.** $\mathrm{P}(A \mid B)$는 B에 속하는 결과들 가운데 A에도 속하는 결과의 비율이다.
- **대칭성은 수고를 덜어 준다.** 3이 처음에 뽑혔는지 어느 시점에 뽑혔는지는 아무런 차이를 만들지 않았다. 모든 위치가 대등하기 때문이다.
- **"특정한 하나"는 "적어도 하나"가 아니다.** 비슷하게 들리는 조건도 상당히 다른 결과의 집합을 고를 수 있다.

숨은 수학

아들 딸 퍼즐

마틴 가드너(Martin Gardner)는 1959년에 다음 문제를 냈다. 스미스 씨에게는 아이가 둘 있고, 그 가운데 적어도 한 명은 아들이다. 둘 다 아들일 확률은 얼마인가? 똑같이 가능한 가족 구성 BB, BG, GB, GG를 나열하고 GG를 지우면 세 가지가 남고, 그 가운데 하나가 BB이다. 따라서 답은 $\frac{1}{3}$이다. 그러나 **첫째** 아이가 아들이라는 것을 안다면 답은 $\frac{1}{2}$이다. 이것은 우리 문제의 소문항 (vi)과 (v)의 축소판이다. 가드너는 나중에, 처음 낸 그대로의 문제가 모호했다고 인정했다. 답은 아들이 있다는 사실을 우리가 어떻게 알게 되었는지에 달려 있다. 아이들 가운데 한 명을 무작위로 만났는데 그 아이가 아들이었다면 답은 $\frac{1}{2}$이고, "아들이 적어도 한 명 있습니까?"라고 물어서 그렇다는 대답을 들었다면 답은 $\frac{1}{3}$이다. 확률은 정보 자체뿐 아니라 그 정보를 만들어 낸 과정에 따라 달라진다.

몬티 홀

확률에서 가장 많은 논쟁을 불러일으킨 퍼즐에도 같은 교훈이 깔려 있다. 어느 게임 쇼에서 세 개의 문 가운데 하나 뒤에 자동차가 있다. 당신은 1번 문을 고른다. 자동차가 어디 있는지 아는 진행자는 항상 나머지 두 문 가운데 하나를 열어 염소를 보여 주고, 항상 선택을 바꿀 기회를 준다. 자동차가 당신이 고른 문 뒤에 있어서 진행자가 고를 수 있는 경우에는, 나머지 두 문 가운데 하나를 무작위로 고른다. 진행자가 3번 문을 열고, 2번 문으로 바꾸겠느냐고 묻는다. 바꿔야 할까? 그렇다. 바꾸면 확률 $\frac{2}{3}$으로 이긴다. 진행자가 문을 고르는 것은 무작위가 아니다. 그것은 자동차가 어디 있는지에 따라 달라지며, 따라서 정보를 담고 있다. 정확한 규칙이 중요하다. 진행자가 가능할 때마다 항상 3번 문을 연다면, 3번 문이 열린 것을 보았을 때 1번 문과 2번 문은 똑같이 가능해지고, 바꾸어서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$에 불과하다. 그런데도 미리 항상 바꾸기로 정한 참가자는 여전히 $\frac{2}{3}$의 비율로 이긴다. 바꾸면 처음 선택이 틀렸을 때 정확히 이기기 때문이다. 1990년에 메릴린 보스 사반트(Marilyn vos Savant)가 잡지 칼럼에서 이 답을 내놓았을 때, 그녀는 틀렸다는 편지를 수천 통 받았고, 그 가운데에는 수학자들이 보낸 것도 있었다. 컴퓨터 시뮬레이션을 해 보거나 똑같이 가능한 경우를 꼼꼼히 나열해 보면 논란은 끝난다.

베이즈와 라플라스

조건부 확률(conditional probability)을 체계적인 토대 위에 올려놓은 사람은, 사후인 1763년에 논문이 출판된 토머스 베이즈(Thomas Bayes)와, 1774년에 오늘날 베이즈 정리(Bayes' theorem)라고 부르는 법칙을 일반적인 형태로 서술한 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace)이다. 오늘날 모든 대학 강의의 출발점인 안드레이 콜모고로프(Andrey Kolmogorov)의 1933년 공리(axioms)는 $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$로 정의하며, 확률론의 나머지 부분은 이 정의 위에 세워진다. 다음 절 Section 12.2에서는 베이즈 정리가 실제로 어떤 일을 하는지 보여 준다.

사고 기술

조건을 정확히 하라

조건부 확률을 계산하기 전에, 어떤 결과들이 조건을 만족하는지 정확히 적어 보라. 그 정보가 어떻게 얻어졌는지 물어보라.

대학에서 조건부 확률과 조건부 기댓값(conditional expectation)은 확률론과 통계학에서 가장 중요한 도구에 속하며, 동시에 가장 흔한 오류의 원천이기도 하다. 적어도 작은 경우에 대해서라도 표본공간을 직접 적어 보는 것이 가장 좋은 방어책이다.

더 도전하기

1 **일반화하기.** 빈 원판이 b개, 번호가 적힌 원판이 n개 있고 k개를 뽑을 때, (iv)와 (v)의 답이 항상 같음을 보이고, (vi)이 그것들과 같아지는 때를 구하여라.

2 **화요일에 태어난 아들.** 어느 가족에 아이가 둘 있고, 적어도 한 명은 화요일에 태어난 아들이다. 둘 다 아들일 확률이 $\frac{13}{27}$임을 보여라. (똑같이 가능한 14×14가지 경우를 나열하거나, 영리하게 세어 보라.)

3 **몬티 홀.** 결과를 나열하여 $\frac{2}{3}$을 확인하여라. 진행자가 자동차가 어디 있는지 모른 채 나머지 문 가운데 하나를 무작위로 열었는데, 우연히 염소가 나왔다면 어떻게 되는가?

4 **에이스 두 장.** 카드 13장으로 된 브리지 패에 에이스가 적어도 한 장 들어 있다. 에이스가 적어도 두 장 들어 있을 확률은 얼마인가? 스페이드 에이스가 들어 있다는 조건에서의 확률과 비교하여라.

더 읽을거리

- **Jason Rosenhouse, *The Monty Hall Problem*** (Oxford University Press). 이 퍼즐과 그 역사, 그리고 수많은 변형을 다룬다.
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press), 조건부 확률을 다룬 장들.
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability*** (CRC Press; 온라인 무료 공개). 조건부 확률을 훌륭하게 다루며, 역설도 많이 실려 있다.

12.2 기저율 오류

문제

STEP II 1998, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/98-s2-q12`

도입

어떤 질병 검사가 그 병에 걸린 사람에 대해서는 90% 정확하고, 잘못된 경보는 거의 내지 않는다고 하자. 프랭키가 양성 판정을 받았다. 프랭키는 얼마나 걱정해야 할까? 대부분의 사람들은, 그리고 여러 연구에 따르면 대부분의 의사들도, "약 90%"라고 답한다. 이 문제에서 참된 답은 $\frac{1}{11}$, 즉 약 9%이다. 열 배나 작다.

이런 실수는 **기저율**(*base rate*)을 무시하는 데서 나온다. 이 병은 드물기 때문에, 수많은 건강한 사람들 사이에서는 위양성(false positive) 비율이 작더라도 실제 환자 수보다 훨씬 많은 잘못된 경보가 나온다. 이러한 **기저율 오류**(*base-rate fallacy*)는 의학, 법률(법률에서는 검사의 오류(prosecutor's fallacy)라고 부른다), 보안 검색, 기계 학습에서 중요한 문제이다. 베이즈 정리(Bayes' theorem)가 그 처방이다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 1000명의 사람을 떠올려 보자. 그중 몇 명이 병에 걸렸는가? 그중 몇 명이 양성 판정을 받는가? 건강한 사람 중에서는 몇 명이 양성 판정을 받는가?

1000명 가운데 10명이 병에 걸렸고, 그중 9명이 양성 판정을 받는다. 건강한 990명 가운데 $\frac{1}{11}$이 양성 판정을 받으므로 위양성은 90명이다. 따라서 양성 판정을 받은 사람은 99명이고, 그중 실제로 아픈 사람은 9명뿐이다.

차근차근 풀기

1단계 베이즈 정리

생각해 보기 "프랭키가 병에 걸렸다"를 D, "AL 검사 결과가 양성이다"를 $+$로 나타내자. 우리는 $\mathrm{P}(+ \mid D)$를 알고 있고 $\mathrm{P}(D \mid +)$를 구하려 한다. 둘은 어떤 관계인가?

조건부확률(conditional probability)의 정의에 따라 $\mathrm{P}(D \mid +) = \frac{\mathrm{P}(D \cap +)}{\mathrm{P}(+)}$이고, $\mathrm{P}(+)$는 프랭키가 병에 걸렸는지 아닌지에 따라 나누어진다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D \mid +) &= \frac{\mathrm{P}(+ \mid D)\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(+ \mid D)\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(+ \mid \bar{D})\mathrm{P}(\bar{D})} \\ &= \frac{0.9 \times 0.01}{0.9 \times 0.01 + \frac{1}{11} \times 0.99} = \frac{0.009}{0.009 + 0.09} = \frac{1}{11}.\end{aligned}$$

■

이것이 바로 천 명의 사람에서 얻은 $\frac{9}{99}$이다.

2단계 두 번째 검사

생각해 보기 두 번째 검사는 AL에서 양성 판정을 받은 사람들에게만 실시한다. 그 집단에서 환자의 비율은 얼마인가? 그것을 새로운 "기저율"로 사용하라.

AL에서 양성인 사람들 가운데 $\frac{1}{11}$은 환자이고 $\frac{10}{11}$은 환자가 아니다. 이것을 사전확률(prior probability)로 삼아 베이즈 정리를 다시 적용하면

$$\mathrm{P}(D \mid \text{두 검사 모두 양성}) = \frac{0.9 \times \frac{1}{11}}{0.9 \times \frac{1}{11} + p \times \frac{10}{11}} = \frac{0.9}{0.9 + 10p}.$$

이 값을 $\frac{1}{2}$로 놓으면 $10p = 0.9$이므로 $p = 0.09$이다. ■

(문제에서 암묵적으로 가정하듯이, 프랭키가 아픈지 아닌지가 주어졌을 때 두 검사의 오류는 서로 독립(independent)이라고 가정한다.)

잠깐, 직접 해 보기 $p = 0.09$이면 STEP 검사의 위양성 비율은 AL과 거의 같은데도, 두 번째 양성 결과는 확률을 $\frac{1}{11}$에서 $\frac{1}{2}$로 끌어올린다. 똑같은 수준의 검사가 두 번째에는 왜 훨씬 큰 효과를 낼까?



그림 12.2.1 전형적인 백 명의 사람. 한 명은 병에 걸렸고(자주색), 열 번 중 아홉 번은 양성 판정을 받는다. 건강한 99명 가운데 약 9명은 잘못하여 양성 판정을 받는다(호박색). 양성 판정을 받은 사람들 가운데 건강한 사람이 아픈 사람보다 대략 열 배 많다.

돌아보기

- **자연 빈도(natural frequencies).** 1000명의 사람을 떠올리자 답이 분명해졌고 확인하기도 쉬웠다.
- **사전확률 곱하기 가능도.** 사후확률(posterior probability)은 검사의 정확도와 기저율 둘 다에 달려 있다.
- **단계별 갱신.** 어제의 사후확률이 오늘의 사전확률이다. 두 번째 검사는 $\frac{1}{100}$이 아니라 $\frac{1}{11}$에서 출발했다.

숨은 수학

오즈와 증거

베이즈 정리는 **오즈**(*odds*)로 나타낼 때 가장 명료하다. D의 오즈는 $\mathrm{P}(D) : \mathrm{P}(\bar{D})$이다. 하나의 증거 E는 오즈에 **가능도비**(*likelihood ratio*) $\frac{\mathrm{P}(E|D)}{\mathrm{P}(E|\bar{D})}$를 곱한다.

$$\text{사후 오즈} = \text{사전 오즈} \times \text{가능도비}.$$

여기서 사전 오즈는 $1 : 99$이고 AL의 가능도비는 $0.9 \div \frac{1}{11} = 9.9$이므로, 사후 오즈는 $9.9 : 99 = 1 : 10$, 즉 확률로는 $\frac{1}{11}$이다. 가능도비가 10인 두 번째 독립적인 검사($p = 0.09$인 STEP 검사가 그렇다)는 오즈를 $1 : 1$로 만든다. 로그(logarithm)를 취하면 증거는 **더해진**다. 즉 각각의 독립적인 검사는 자신의 가능도비의 로그만큼 기여한다. 앨런 튜링(Alan Turing)은 바로 이 방법을 사용해 증거를 "밴(ban)"과 "데시밴(deciban)" 단위로 측정하며 블레츨리 파크(Bletchley Park)에서 에니그마 암호문을 해독했다.

검사의 오류

1999년, 사무 변호사(solicitor) Sally Clark는 두 아기 아들을 살해한 혐의로 유죄 판결을 받았는데, 그 근거의 일부는 한 가정에서 영아 돌연사(cot death)가 두 번 일어날 확률이

"7300만분의 1"이라는 증거였다. 그 수치 자체의 오류(두 죽음이 독립이라고 가정하여 유전적·환경적 요인을 무시했다)는 제쳐 두더라도, 그 추론은 P(증거 | 무죄)와 P(무죄 | 증거)를 혼동했다. 어머니가 두 아이를 살해하는 일 역시 극히 드물며, 따져야 할 것은 두 설명 사이의 비교이다. 영국 왕립통계학회(Royal Statistical Society)는 공개 서한을 보내 이 오류를 지적했고, 그녀에 대한 유죄 판결은 2003년에 뒤집혔다. 그 수학은 바로 이 문제의 수학이다.

기거렌처와 자연 빈도

1990년대에 심리학자 게르트 기거렌처(Gerd Gigerenzer)는 검사 통계를 조건부확률의 형태로 제시받은 의사들이 이 문제와 같은 질문에서 대부분 크게 틀렸지만, 같은 정보를 자연 빈도의 형태("여성 1000명 가운데 10명이 유방암에 걸렸고, 그중 8명이 양성 판정을 받는다...")로 제시받으면 대부분 맞힌다는 것을 보였다. 그의 연구는 여러 나라에서 의학적 위험을 환자에게 전달하는 방식을 바꾸어 놓았다.

사고 기술

베이즈 정리로 조건을 뒤집기

$P(A \mid B)$와 $P(B \mid A)$는 서로 다른 수이다. 한쪽에서 다른 쪽으로 가려면 기저율 $P(A)$가 필요하다.

베이즈 추론, 즉 증거에 비추어 믿음을 갱신하는 것은 스팸 필터에서 의학적 진단에 이르기까지 현대 통계학과 기계 학습의 토대이다. 대학에서는 하나의 확률 대신 사전분포와 사후분포를 다루는 베이즈 추론(Bayesian inference)으로 이것을 만나게 된다.

더 도전하기

1 **냉장고 속 시체.** STEP II 1987, 16번 문제 (`step.maths.org/questions/87-s2-q16`)에 도전해 보자. 신뢰도가 서로 다른 두 목격자가 등장하는 베이즈 정리 문제로, STEP 문제 가운데서도 손꼽히게 기억에 남는 설정이다.

2 **얼마나 드물어야 할까?** 민감도(sensitivity)가 0.9이고 위양성 비율이 $\frac{1}{11}$인 검사에서, 양성 결과가 병에 걸렸을 가능성이 절반보다 크다는 뜻이 되려면 그 병은 얼마나 흔해야 하는가?

3 **검사를 반복하기.** AL 검사 자체를 반복하고, 그 사람의 실제 상태가 주어졌을 때 결과들이 서로 독립이라면, AL에서 두 번 양성 결과가 나온 뒤 병에 걸렸을 확률은 얼마인가? 세 번이라면?

4 **선별 검사.** 어떤 선별 검사 프로그램이 유병률(prevalence)이 10 000명 중 1명인 질환에 대해 백만 명을 검사한다. 사용하는 검사의 민감도는 99%이고 위양성 비율은 1%이다. 그 질환이 있을 수 있다는 통보를 받는 사람은 몇 명이며, 그중 실제로 질환이 있는 사람은 몇 명인가?

더 읽을거리

- **Gerd Gigerenzer, *Reckoning with Risk*** (Penguin). 자연 빈도, 의학 검사, 그리고 법정.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican). 의학적 선별 검사와 Sally Clark 사건을 다룬다.
- **Sharon Bertsch McGrayne, *The Theory That Would Not Die*** (Yale University Press). 튜링의 활용을 포함한 베이즈 정리의 역사.

12.3 "무작위"란 무슨 뜻인가?

문제

STEP III 2022, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

도입

"원의 현(chord)을 무작위로 하나 고른다. 그 길이의 기댓값(expected value)은 얼마인가?" 이 질문에는 답이 있을 것처럼 들린다. 그러나 "무작위로"가 무슨 뜻인지 정하기 전까지는 답이 없다. 원 위의 두 점을 무작위로 골라 이으면 길이의 기댓값은 $\frac{4a}{\pi} \approx 1.27a$이다. 원 내부의 한 점과 그 점을 지나는 방향을 무작위로 고르면 답은 $\frac{16a}{3\pi} \approx 1.70a$이다. 두 방법 모두 "무작위 현"을 고르는 지극히 타당한 방법이다.

이것이 **베르트랑의 역설**(*Bertrand's paradox*)로, 조제프 베르트랑(Joseph Bertrand)이 1889년에 일종의 경고로서 발표한 것이다. 확률은 무작위 시행이 구체적으로 정해진 뒤에야 비로소 잘 정의된다. 이 역설은 수학자들이 20세기에 확률론의 엄밀한 기초를 세우는 데 한몫했는데, 이 기초에서는 모든 확률이 정확하게 정의된 결과들의 공간 위에서 다루어진다.

시작하기 전에

생각해 보기 각 AOB가 θ일 때 현 AB의 길이는 얼마인가? (O에서 수선을 내려 보자.)

O에서 내린 수선은 현과 각을 모두 이등분하므로 $AB = 2a\sin\frac{\theta}{2}$이다.

차근차근 풀기

1단계 원 위의 두 점

$$\mathrm{E}(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\pi}\Big[-2\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{a}{\pi}\cdot 4 = \frac{4a}{\pi}. \qquad \blacksquare$$

2단계 내부의 무작위 점

> **생각해 보기** $0 \le r \le a$일 때 $\mathrm{P}(R \le r)$는 얼마인가? 이를 미분하여 확률밀도를 구하라.

$\mathrm{P}(R \le r)$는 반지름이 r인 원판의 넓이를 전체 원판의 넓이로 나눈 값, 즉 $\frac{r^2}{a^2}$이다. 따라서 R는 $[0,a]$에서 확률밀도(probability density) $\frac{2r}{a^2}$를 가진다. (중심에서 먼 곳일수록 넓이가 더 크므로, 점은 중심에서 멀리 있을 가능성이 더 크다.)

> **생각해 보기** C를 지나는 현이 OC와 각 t를 이룬다. 이 현은 O에서 얼마나 떨어져 있는가?

O에서 이 직선까지의 거리는 $R\sin t$이므로 현의 길이는 $2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2 t}$이다.

3단계 C에 대한 평균

$s = \sin t$라 하면

$$L(t) = \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2 s^2}\cdot\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4}{a^2}\Big[-\frac{(a^2 - r^2s^2)^{3/2}}{3s^2}\Big]_0^a$$
$$= \frac{4}{a^2}\cdot\frac{a^3 - a^3(1-s^2)^{3/2}}{3s^2} = \frac{4a(1-\cos^3 t)}{3\sin^2 t}. \qquad \blacksquare$$

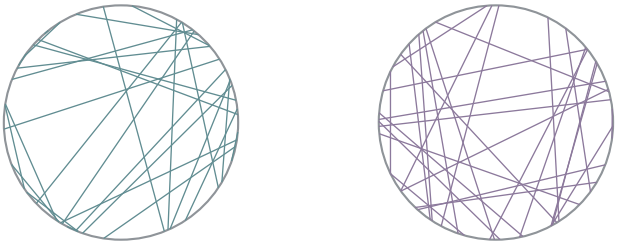
> **생각해 보기** $1-\cos^3 t$와 $\sin^2 t = 1-\cos^2 t$를 인수분해하라. 무엇이 약분되는가?

$c = \cos t$라 하면 $\frac{1-c^3}{1-c^2} = \frac{(1-c)(1+c+c^2)}{(1-c)(1+c)} = \frac{1+c+c^2}{1+c} = c + \frac{1}{1+c}$이고, $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$이다. 따라서

$$L(t) = \frac{4a}{3}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{t}{2}\Big). \qquad \blacksquare$$

4단계 방향도 무작위로

$$\mathrm{E}\big(L(T)\big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{4a}{3}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{t}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{8a}{3\pi}\Big[\sin t + \tan\tfrac{t}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{8a}{3\pi}(1+1) = \frac{16a}{3\pi}. \qquad \blacksquare$$



무작위 양 끝점
평균 길이 $\frac{4a}{\pi} \approx 1.27a$

원판 내부의 무작위 중점
평균 길이 $\frac{4a}{3} \approx 1.33a$

그림 12.3.1 서로 다른 두 방법으로 고른 28개의 "무작위 현". 왼쪽: 원 위에서 독립적으로 균등하게 고른 두 점. 오른쪽: 원판에서 균등하게 무작위로 고른 점을 현의 중점으로 삼은 경우. 오른쪽 방법에서는 가장자리 근처의 짧은 현이 더 적게 나온다. 방법이 다르면 분포가 다르고, 답도 다르다.

돌아보기

- **시행을 구체적으로 정하라.** 각 소문항에서 "무작위 현"은 정확한 절차가 되었고, 절차마다 다른 답이 나왔다.
- **넓이에서 확률밀도로.** $\mathrm{P}(R \le r)$는 기하에서 곧바로 나왔고, 이를 미분하여 확률밀도를 얻었다.
- **단계별로 평균하라.** 먼저 (t를 고정하고) C의 위치에 대해 평균하고, 그다음 t에 대해 평균했다.

숨은 수학

베르트랑의 세 가지 답

베르트랑이 원래 던진 질문은 다음과 같았다. 무작위 현이 원에 내접하는 정삼각형(inscribed equilateral triangle)의 한 변 $\sqrt{3}a$보다 길 확률은 얼마인가? 그는 세 가지 방법과 세 가지 답을 제시했다.

- 무작위 양 끝점: 한 끝점을 고정하면, 다른 끝점이 원의 가운데 3분의 1 부분에 있을 때 현이 길다. 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

- 무작위 반지름과 그 위의 무작위 점을 중점으로: 현이 O로부터 $\frac{a}{2}$보다 가까이 있으면 현이 길다. 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
- 원판 전체에서 고른 무작위 중점: 중점이 O로부터 $\frac{a}{2}$ 이내에 있으면 현이 길다. 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

각 방법은 현들의 집합 위에 주어진 서로 다른 확률분포이며, 여기에 모순은 없다. 세 방법은 서로 다른 질문에 답하고 있을 뿐이다. 교훈은 "균등하게 무작위로"라는 말이 어떤 매개화(parametrisation)를 택했는지에 상대적으로만 의미가 있으며, 연속적인 집합에서는 대개 유일하게 자연스러운 매개화가 존재하지 않는다는 것이다.

정답이 있을까?

1973년 물리학자 Edwin Jaynes는 원을 조금 옮기거나 크기를 조금 바꾸어도 답이 변하지 않아야 한다는 근거로 두 번째 방법이 "올바른" 방법이라고 주장했다. 무작위 현이란 바닥에 그린 원 위로 빨대를 던지는 것과 같아야 한다는 것이다. 중심으로부터의 거리가 균등한 분포만이 이러한 불변성(invariance)을 가지며, 빨대를 던지는 실험도 $\frac{1}{2}$를 확인해 준다. 올바른 분포란 상황의 대칭성을 존중하는 분포라는 같은 생각이 무작위 직선의 수학인 **적분기하학**(*integral geometry*)의 바탕에 깔려 있으며, 이것은 Section 12.20의 뷔퐁(Buffon)의 바늘 문제도 설명해 준다.

역설에서 공리로

베르트랑은 *Calcul des probabilités*(1889)에서 현의 역설을 발표했는데, 부분적으로는 그가 보기에 부주의한 "기하학적 확률"의 사용을 비꼬기 위해서였다. 푸앵카레(Henri Poincaré)도 이 역설을 논의했다. 1900년 힐베르트(David Hilbert)는 새 세기를 위한 유명한 문제 목록에 확률론의 공리화(axiomatisation)를 포함시켰고, 콜모고로프(Andrey Kolmogorov)가 1933년에 이를 해결했다. 확률은 결과들의 공간 위의 측도이며, "무작위" 대상에 관한 모든 질문은 먼저 어떤 공간과 어떤 측도를 쓰는지 밝혀야 한다. 베르트랑의 역설은 왜 이것이 필요한지를 보여 주는 대표적인 예이다.

사고 기술

무작위 시행을 정의하라

확률을 계산하기 전에 무작위 대상이 정확히 어떻게 생성되는지 기술하라. 기술 방식이 다르면 답도 달라질 수 있다.

대학에서는 모든 확률 계산이 표본공간(sample space)과 확률측도(probability measure)에서 출발한다. 통계학과 물리학에서는 흔히 대칭성을 이용해 올바른 무작위성 모형을 고르는 일이 작업의 큰 부분을 차지한다.

더 도전하기

1 **베르트랑의 확률.** 위의 세 확률 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$를 확인하라.

2 **또 하나의 평균.** 현의 중점을 원판에서 균등하게 고르면(오른쪽 그림) 길이의 기댓값이 $\frac{4a}{3}$임을 보여라. (**힌트:** 이것은 $L(\frac{\pi}{2})$이다. 왜 그런가?)

3 **무작위 거리.** O에서 현까지의 거리가 $[0, a]$에서 균등분포를 따르면 길이의 기댓값이 $\frac{\pi a}{2}$임을 보여라.

4 **세 방법, 세 분포.** 세 방법 각각에 대해 $[0, 2a]$에서 현의 길이 ℓ의 확률밀도를 구하라.

더 읽을거리

- **Edwin Jaynes, "The well-posed problem"**, *Foundations of Physics* 3 (1973). 불변성 논증을 담은 글로, 읽기 쉽고 도발적이다.
- **Gábor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*** (Reidel). 베르트랑의 역설을 비롯한 많은 역설을 다룬다.
- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability*** (Cambridge University Press). 적분기하학을 다룬 책으로, 나중에 읽어 볼 만하다.

12.4 둘씩은 독립이지만 한꺼번에는 독립이 아닌

문제

STEP III 2021, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

1번 참가자와 2번 참가자가 같은 수를 굴렸다. 이 사실이 2번과 3번 참가자가 같은 수를 굴리는지에 대해 무언가를 알려 줄까? 놀랍게도 그렇지 않다. 두 사건은 서로 독립(independent)이다. 1번과 3번 참가자에 대해서도 마찬가지이다. 그런데 1번이 2번과 같고 2번이 3번과 같다면, 1번은 반드시 3번과 같다. 세 사건 가운데 어느 두 사건도 서로 독립이지만, 세 사건 전체는 독립이 아닌 것이다.

쌍별 독립(*pairwise independence*)은 완전한 독립보다 약한 조건이며, 이 차이는 중요하다. 분산(variance)을 다룰 때에는 쌍별 독립만으로 충분하고, 이 문제는 바로 이 점을 이용한다. 그러나 다른 많은 목적에는 쌍별 독립으로는 부족하다. 컴퓨터 과학자들은 일부러 쌍별 독립인 난수를 사용하기도 하는데, 완전히 독립인 난수보다 훨씬 적은 비용으로 만들 수 있으면서도 많은 알고리즘에는 그것으로 충분하기 때문이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $\mathrm{P}(X_{12}=1)$은 얼마인가? $\mathrm{P}(X_{12}=1$ 이고$X_{23}=1)$은 얼마인가?

1번 참가자가 무엇을 굴리든, 2번 참가자가 그와 같은 수를 굴릴 확률(probability)은 $\frac{1}{6}$이다. $X_{12}=1$과 $X_{23}=1$이 동시에 성립한다는 것은 세 사람 모두 같은 수를 굴렸다는 뜻이므로, 그 확률은 $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$이다.

차근차근 풀기

1단계 쌍별 독립

$\mathrm{P}(X_{12}=1, X_{23}=1) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \mathrm{P}(X_{12}=1)\mathrm{P}(X_{23}=1)$이고 각 확률변수는 두 값만 가지므로, X_{12}와 X_{23}은 독립이다. (두 값만 가지는 확률변수에서는 결합 분포표(joint table)의 한 칸이 나머지 칸을 모두 결정한다. 연습문제 1에서 이를 엄밀하게 다룬다.) X_{12}와 X_{34}처럼 공통인 참가자가 없는 쌍은 당연히 독립이다. 따라서 모든 X_{ij}는 쌍별 독립이다.

2단계 점수의 평균과 분산

점수는 $S = \sum_{i<j} X_{ij}$로, $\binom{n}{2}$개의 확률변수의 합이며, 각 확률변수의 평균(mean)은 $\frac{1}{6}$, 분산은 $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$이다. 기댓값(expectation)은 언제나 더해지므로 $\mathrm{E}(S) = \frac{1}{6}\binom{n}{2}$이다.

> **생각해 보기** 합의 분산은 언제 분산의 합과 같은가?

합의 분산은 분산의 합에 공분산(covariance)의 합의 두 배를 더한 것이고, 독립인 쌍의 공분산은 0이다. 따라서 쌍별 독립이면 충분하다.

$$\mathrm{E}(S) = \frac{n(n-1)}{12}, \qquad \mathrm{Var}(S) = \frac{5}{36}\binom{n}{2} = \frac{5n(n-1)}{72}.$$

3단계 분산 공식

Y_i의 평균이 모두 0이면 $\mathrm{Var}(\sum Y_i) = \mathrm{E}((\sum Y_i)^2)$이고, 제곱을 전개하면 각 Y_i^2이 한 번씩, 각 곱 Y_iY_j $(i<j)$가 두 번씩 나온다. 여기에 기댓값을 취하면 공식을 얻는다. ■

4단계 홀짝 게임

> **생각해 보기** $\mathrm{E}(Z_{12})$는 얼마인가? $Z_{12}Z_{23}$은 어떤 값을 가질 수 있으며, 언제 0이 아닌가?

$Z_{12}=1$일 확률은 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$이고(둘 다 2, 둘 다 4, 또는 둘 다 6을 굴리는 경우), -1일 확률도 $\frac{1}{12}$이다. 따라서 $\mathrm{E}(Z_{12}) = 0$이고 $\mathrm{E}(Z_{12}^2) = \frac{1}{6}$이다.

$Z_{12}Z_{23} \neq 0$인 것은 세 참가자가 모두 같은 수를 굴릴 때뿐이며, 이때 $Z_{12} = Z_{23}$(둘 다 $+1$이거나 둘 다 -1)이므로 곱은 1이다. 따라서 $\mathrm{E}(Z_{12}Z_{23}) = \frac{1}{36}$이고, 이는 $\mathrm{E}(Z_{12})\mathrm{E}(Z_{23}) = 0$과 다르다. 즉 두 확률변수는 독립이 아니다. ■

(더 직접적으로는, 각 사건의 확률은 $\frac{1}{12}$인데 $\mathrm{P}(Z_{12}=1, Z_{23}=-1) = 0$이다.)

5단계 분산

총점 $T = \sum Z_{ij}$의 평균은 0이다. 소문항 (ii)에 의해 $\mathrm{Var}(T)$는 $\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{6}$에 쌍들의 쌍에 대한 $\mathrm{E}(Z_{ij}Z_{kl})$의 합의 두 배를 더한 것이다. 공통인 참가자가 없는 쌍들의 쌍은 0을 기여한다(서로 독립이고 각각의 평균이 0이기 때문이다). 정확히 한 명의 참가자를 공유하는 쌍들의 쌍은 각각 $\frac{1}{36}$을 기여하며, 그러한 쌍들의 쌍은 $n\binom{n-1}{2}$개 있다(공유하는 참가자를 고른 뒤 나머지 두 명을 고른다). 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(T) &= \frac{n(n-1)}{12} + 2 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{36}\bigl(3 + (n-2)\bigr) = \frac{n(n^2-1)}{36}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

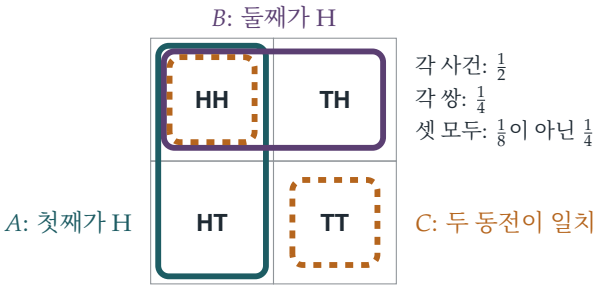


그림 12.4.1 베른시테인의 예: 공정한 동전 두 개. 사건 "첫째 동전이 앞면"(청록색), "둘째 동전이 앞면"(자주색), "두 동전이 일치"(호박색, 점선)의 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, 어느 두 사건도 확률 $\frac{1}{4}$인 한 칸에서만 겹치므로 쌍별 독립이다. 그러나 세 사건은 모두 HH에서 겹치고, 그 확률은 $\frac{1}{8}$이 아니라 $\frac{1}{4}$이다. 어느 두 사건이 나머지 한 사건을 결정하기 때문이다.

돌아보기

- **지시변수.** 점수를 지시변수(indicator variable)의 합으로 나타내자 모든 문제가 참가자 쌍에 대한 문제로 바뀌었다.
- **분산에는 쌍만 있으면 된다.** 합의 분산은 쌍별 공분산에만 의존하므로, 분산을 더하는 데에는 쌍별 독립으로 충분하다.
- **독립성은 가정하지 말고 확인하라.** 겉보기에 비슷한 두 게임이 서로 다른 종속 구조를 가지고 있었다.

숨은 수학

여러 사건의 독립

사건 $A_1, \ldots, A_n$이 **독립**이라는 것은, 이들 가운데 어떤 일부를 골라도 그 교집합의 확률이 각 확률의 곱과 같다는 뜻이다. 세 사건의 경우 이는 네 가지 조건, 곧 쌍에 대한 세 조건과 $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$를 뜻한다. 세르게이 베른시테인(Sergei Bernstein)은 1920년대에 그림 12.4.1의 예를 들어 쌍별 조건이 세 사건에 대한 조건을 함의하지 않음을 보였다. (거꾸로, 세 사건에 대한 조건만으로는 쌍별 조건도 함의되지 않는다.) 문제의 일치 사건 X_{12}, X_{23}, X_{13}은 베른시테인의 동전과 정확히 같은 구조이다.

상관없음은 독립이 아니다

공분산이 0이라는 것, 곧 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$는 독립보다 더욱 약한 조건이다. STEP III 2000 Q14(연습문제에 있다)는 두 값만 가지는 확률변수에서는 두 개념이 일치하지만, 세 값을 가지면 그렇지 않음을 보여 준다. 간단한 예를 들어 보자. X가 $\{-1, 0, 1\}$ 위의 균등분포를 따르고 $Y = X^2$이라 하자. 그러면 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X^3) = 0 = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$이지만, Y는 X에 의해 완전히 결정된다. 공분산은 선형적인 관계만을 측정한다.

값싼 무작위성

컴퓨터가 난수를 만드는 데에는 많은 비용이 든다. 1979년 Larry Carter와 Mark Wegman은 데이터를 유사 무작위 위치에 저장하는 **해싱**(*hashing*)을 비롯한 많은 알고리즘에서, 쌍별 독립인 무작위 선택이 완전히 독립인 선택만큼이나 좋다는 것을 보였다. 쌍별 독립인 값은 매우 적은 비용으로 만들 수 있다. 예를 들어 a와 b를 무작위로 고르고 $k = 0, 1, \ldots, p-1$에 대해 $a + bk \pmod{p}$를 계산하면, 어느 두 값도 서로 독립인 p개의 값을 얻는다. 이것이 잘 작동하는 이유가 바로 이 문제의 분산 계산이다. 체비쇼프 부등식(Chebyshev's inequality)에는 분산만 필요하고, 분산에는 쌍만 필요하다.

사고 기술

지시변수로 분해하기

어떤 개수의 평균과 분산을 구하려면, 셀 수 있는 대상마다 하나씩 지시변수를 두어 그 개수를 지시변수의 합으로 나타내라. 평균에는 지시변수 하나하나가 필요하고, 분산에는 쌍이 필요하다.

이것은 확률론에서 가장 유용한 기법 가운데 하나이며, 이미 Section 9.8에서도 등장했다. 대학에서는 무작위 그래프, 알고리즘, 통계적 검정의 분석에서 핵심 도구로 쓰인다.

더 도전하기

1 **두 값.** STEP III 2000, 14번 문제 (`step.maths.org/questions/00-s3-q14`)에 도전해 보라. 이 문제는 각각 두 값만 가지는 확률변수에서는 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$이면 반드시 독립임을 보이고, 세 값을 가지는 경우의 반례를 요구한다.

2 **더 큰 팀.** 소문항 (i)에서 $n = 7$일 때 점수의 평균과 표준편차(standard deviation)를 구하고, 예시로 나온 점수 7과 비교하라.

3 **다시 생일 문제.** 지시변수를 이용하여 k명 가운데 생일이 같은 쌍의 개수의 평균과 분산을 구하라(Section 9.9). 이 지시변수들은 쌍별 독립인가?

4 **세 사건 조건은 성립하지만 쌍별 독립은 아닌 경우.** 확률이 각각 $\frac{1}{2}$이고 $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$이지만 쌍별 독립은 아닌 세 사건을 찾아라.

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes*** (Oxford University Press). 독립성을 다루는 앞부분의 장들.
- **Michael Mitzenmacher & Eli Upfal, *Probability and Computing*** (Cambridge University Press). 쌍별 독립과 그 알고리즘에서의 활용.
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability*** (CRC Press, 온라인 무료 공개). 지시변수와 공분산에 관한 내용.

12.5 마지막 승객의 좌석

문제

STEP II 2021, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

승객 백 명이 만석인 비행기에 탑승한다. 첫 번째 승객은 탑승권을 잃어버려서 아무 자리에나 앉는다. 그 뒤의 승객은 각자 자기 자리가 비어 있으면 그 자리에 앉고, 그렇지 않으면 비어 있는 자리 중 하나를 무작위로 골라 앉는다. 마지막 승객이 자기 자리에 앉을 확률(probability)은 얼마일까? 혼란이 비행기 전체로 연쇄적으로 번질 수 있으니 확률이 작으리라 예상할 수도 있다. 아니면 대부분의 승객은 영향을 받지 않으니 1에 가까워야 한다고 생각할 수도 있다.

답은 승객 수와 상관없이 정확히 $\frac{1}{2}$이다. 이 문제는 점화식(recurrence)과 수학적 귀납법(induction)으로 이를 증명한다. 그런데 대칭(symmetry)을 이용한 아름다운 한 줄짜리 논증도 있다. 이 논증은 답이 왜 $\frac{1}{2}$인지 설명해 줄 뿐 아니라, 어느 승객에 대해서든 답을 곧바로 적을 수 있게 해 준다.

시작하기 전에

잠깐, 직접 해 보기 일어날 수 있는 경우를 모두 나열하여 P_2와 P_3을 구하여라.

좌석이 두 개이면 T_1은 S_1에 앉거나(그러면 T_2는 S_2에 앉는다) S_2에 앉으며, 각각의 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 $P_2 = \frac{1}{2}$이다. 좌석이 세 개일 때, T_1이 S_1에 앉으면(확률 $\frac{1}{3}$) 모두 문제가 없다. T_1이 S_3에 앉으면 T_3은 자기 자리를 잃는다. T_1이 S_2에 앉으면 T_2는 S_1과 S_3 중 하나를 무작위로 고르고, T_3은 T_2가 S_1을 고를 때만 자기 자리에 앉는다. 따라서 $P_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$이다.

차근차근 풀기

1단계 점화식

생각해 보기 T_1이 S_k에 앉는다고 하자. 단, $2 \le k \le n-1$이다. 승객 $T_2, \dots, T_{k-1}$에게는 어떤 일이 일어나는가? T_k가 도착했을 때 어느 좌석이 비어 있으며, 이 상황은 더 작은 열차의 경우와 어떻게 비교되는가?

승객 $T_2, \dots, T_{k-1}$은 자기 자리가 비어 있으므로 그 자리에 앉는다. T_k가 도착하면 빈 좌석은 S_1과 $S_{k+1}, \dots, S_n$이며, 모두 $n-k+1$개이다. T_k는 이 중 하나를 무작위로 고르고, 그 뒤로 각 승객은 자기 자리가 비어 있으면 그 자리에, 아니면 무작위로 고른 자리에 앉는다. 이는 좌석이 $n-k+1$개인 원래 문제와 정확히 같다. 여기서 T_k가 첫 번째 승객의 역할을 하고, S_1이 T_k의 "자기" 좌석(누군가 앉으면 모든 것이 정리되는 좌석)의 역할을 한다. 따라서 T_n이 S_n에 앉을 조건부 확률(conditional probability)은 P_{n-k+1}이다.

이제 각각 확률 $\frac{1}{n}$인 T_1의 좌석에 대하여 조건을 걸자. S_1이면 반드시 성공하고, S_n이면 반드시 실패하며, S_k이면 성공 확률이 P_{n-k+1}이다. 따라서

$$P_n = \frac{1}{n}\left(1 + 0 + \sum_{k=2}^{n-1} P_{n-k+1}\right) = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{r=2}^{n-1} P_r\right). \qquad \blacksquare$$

2단계 답

생각해 보기 $P_2 = P_3 = \frac{1}{2}$이다. P_n을 추측하고 강한 귀납법(strong induction)으로 증명하여라.

주장: 모든 $n \ge 2$에 대하여 $P_n = \frac{1}{2}$이다. $n = 2$일 때 성립한다. $2 \le r \le n-1$에 대하여 $P_r = \frac{1}{2}$이면

$$P_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-2}{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

3단계 끝에서 두 번째 승객

생각해 보기 더 간결한 논증을 찾아보아라. 마지막에 T_n에게 남는 좌석은 어느 것인가? S_2일 수 있을까?

마지막으로 T_n에게 남는 좌석은 S_1 아니면 S_n이다. $2 \le k \le n-1$인 S_k일 수는 없는데, T_k가 그 자리에 앉았을 것이기 때문이다. 그리고 그 전에 이루어지는 모든 무작위 선택은 S_1과 S_n을 대칭적으로 다룬다. 자리를 빼앗긴 승객이 좌석을 고를 때마다 S_1과 S_n이 선택될 가능성은 같다. 두 좌석 중 먼저 선택되는 쪽이 결과를 결정하므로, 각 좌석이 남는 좌석이 될 가능성은 같다. 따라서 $P_n = \frac{1}{2}$이다.

같은 논증은 $k \geq 2$인 임의의 승객 T_k에 대해서도 통한다. T_k는 앞선 어떤 승객이 자기 자리에 앉은 경우에만 자리를 잃는다. 자리 빼앗기는 누군가가 S_1을 고를 때까지 계속된다. 좌석 $S_1, S_k, S_{k+1}, \ldots, S_n$은 T_k가 도착하기 전에 좌석을 고르는 승객들에게 모두 똑같이 취급되므로, 이 중 가장 먼저 선택되는 좌석은 $n-k+2$개의 좌석 중 어느 것일 가능성이나 같고, T_k는 그것이 S_k일 때만 자리를 잃는다. 따라서

$$\mathrm{P}(T_k\text{가 앉는 좌석이}S_k) = \frac{n-k+1}{n-k+2}.$$

$k = n-1$일 때($n \geq 3$) 이로부터 $Q_n = \frac{2}{3}$을 얻는다. 또 $Q_2 = \frac{1}{2}$인데, 이때는 $T_{n-1} = T_1$이고 이 승객은 확률 $\frac{1}{2}$로 S_1에 앉기 때문이다. ■

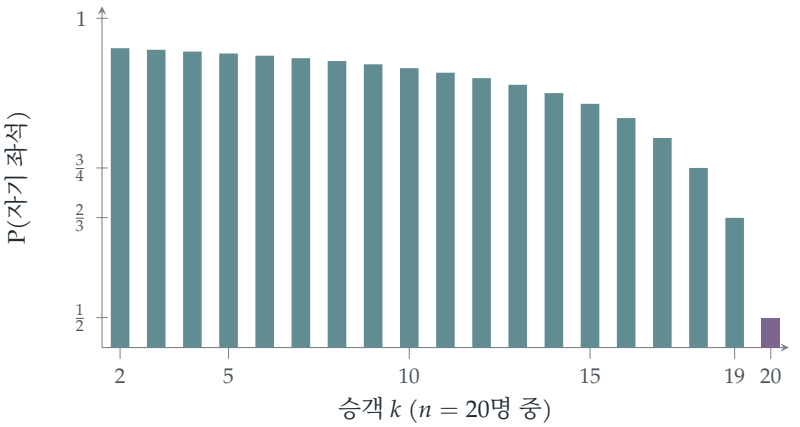


그림 12.5.1 $n = 20$인 열차에서 승객 k가 자기 자리에 앉을 확률. $2 \leq k \leq n$일 때 이 확률은 $\frac{n-k+1}{n-k+2}$이며, T_2의 $\frac{19}{20}$에서 T_{19}의 $\frac{2}{3}$까지 줄어들고, 마지막 승객은 $\frac{1}{2}$이다(자주색).

돌아보기

- **더 작은 복사본으로 줄이기.** T_1이 S_k에 앉은 뒤, 나머지 문제는 좌석 수가 더 적은 같은 문제였다.
- **강한 귀납법.** 점화식에 더 작은 경우가 모두 등장했으므로, 귀납 가정에서 그 모든 경우에 대하여 결과를 가정했다.
- **대칭 찾기.** 좌석 S_1과 S_n은 처음부터 끝까지 서로 바꿔도 차이가 없으며, 이 사실이 아무런 계산 없이 $\frac{1}{2}$를 설명해 준다.

숨은 수학

대칭 논증

두 번째 증명은 확률론의 강력한 아이디어의 한 예이다. 두 결과가 무작위 과정의 대칭으로 서로 연결되어 있으면 두 결과의 확률은 같다. 여기서의 과정은 S_1과 S_n 중 하나가 선택될 때까지 둘을 구별하지 않으므로, 둘이 끝까지 남을 가능성은 같아야 한다. 대칭 논증은 긴 계산을 단 하나의 관찰로 대신하는 경우가 많다. 다음 몇 절에도 이런 논증이 가득하다. Section 12.6의 동전 한 번 더 던지기, Section 12.7의 토너먼트 대진 추첨이 그렇다.

자리를 빼앗기는 승객은 몇 명인가?

자리를 빼앗기는 승객(자기 자리에 앉지 못하는 승객)의 수도 깔끔하게 다룰 수 있다. T_1은 S_1을 고르지 않는 한 자기 자리에 앉지 못하고, $T_k (k \geq 2)$는 확률 $\frac{1}{n-k+2}$로 자리를 빼앗긴다. 이를 더하면 자리를 빼앗기는 승객 수의 기댓값(expected value)은

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right) = H_n - \frac{1}{n},$$

으로, 대략 $\ln n$이다. 300명이 탄 비행기에서도 혼란은 평균적으로 겨우 여섯 명 정도에게만 영향을 미친다. 여기서도 조화수(harmonic number)가 등장한다(Section 9.11).

사고 기술

대칭을 찾아라

무작위 과정이 두 결과를 구별하지 못한다면, 두 결과의 가능성은 같다. 두 결과가 처음으로 구별되는 순간을 찾아라.

대학에서는 반사 원리(reflection principle, Section 9.10)에서부터 교환가능성(exchangeability)에 이르기까지 확률론 전반에 대칭 논증이 등장한다. 교환가능성은 확률변수(random variable)의 수열이 어떤 순서로 나열하든 같은 분포(distribution)를 갖는 성질로, 현대 통계학의 상당 부분의 토대가 된다.

더 도전하기

1 **건망증 있는 두 승객.** 처음 두 승객이 모두 무작위로 자리를 고른다면, 마지막 승객이 자기 자리에 앉을 확률은 얼마인가?

2 **자리를 빼앗기는 승객.** $n = 3$일 때 가능한 경우를 모두 나열하여 자리를 빼앗기는 승객 수의 기댓값을 확인하여라.

3 **우회로.** 점화식을 이용하여 $\sum_{r=2}^{n-1} P_r = \frac{n-2}{2}$가 대칭 논증과 모순되지 않음을 보여라.

4 **마지막 좌석.** 마지막 승객이 자기 자리에 앉지 못했다는 조건 아래에서, 마지막 승객이 S_1에 앉을 확률이 1임을 보여라. 왜 그런가?

더 읽을거리

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection*** (A K Peters). 수학 퍼즐 모음집. 비행기 좌석 퍼즐을 비롯하여 대칭으로 풀리는 여러 퍼즐이 실려 있다.
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability*** (Dover). 확률 문제 50선. 고전적인 문제 모음집이다.
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability*** (CRC Press; 온라인 무료 공개). 확률론 입문서.

12.6 동전 하나 더

문제

STEP I 2016, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s1-q12`

도입

밥은 앨리스보다 동전을 하나 더 던진다. 밥이 앞면을 더 많이 얻을 확률(probability)은 얼마일까? 밥이 유리하기는 하지만 앞면이 보장되는 것은 아니며, 비기는 경우는 밥에게 불리하게 처리된다. 처음 두 경우를 일일이 계산해 보면 두 번 모두 답이 $\frac{1}{2}$이다. 이것은 우연일까?

우연이 아니다. 밥은 앨리스보다 앞면을 더 많이 얻거나 뒷면을 더 많이 얻되 둘 다는 아니라는 사실을 알아차리기만 하면, 한 문장으로 끝나는 증명(proof)이 있다. 이 문제는 계산이 어떻게 패턴을 암시하고, 교묘한 대칭(symmetry)이 그 패턴을 어떻게 설명하는지를 보여 주는 모범적인 예이다.

시작하기 전에

생각해 보기 앨리스가 동전을 두 번 던질 때, 앨리스가 얻는 앞면의 개수의 분포(distribution)는 무엇인가? 밥이 세 번 던질 때는 어떠한가?

앨리스는 앞면을 $0, 1, 2$개 얻을 확률이 각각 $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$이고, 밥은 $0, 1, 2, 3$개 얻을 확률이 각각 $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$이다.

차근차근 풀기

1단계 직접 계산하기

소문항 (i)에서는 앨리스의 앞면 개수에 대하여 모두 더한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B > A) &= \tfrac{1}{4}\mathrm{P}(B \geq 1) + \tfrac{2}{4}\mathrm{P}(B \geq 2) + \tfrac{1}{4}\mathrm{P}(B = 3) \\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8} = \frac{7+8+1}{32} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

소문항 (ii)는 항이 더 많을 뿐 같은 계산이다. 같은 정도로 일어날 수 있는 $8 \times 16 = 128$가지 결과를 세어 보면 그중 64가지에서 밥이 앞서므로(그림 12.6.1), 이번에도 답은 $\frac{1}{2}$이다.

2단계 밥의 던지기를 나누기

생각해 보기 밥의 $n+1$번 던지기를 n번 던진 다음 한 번을 더 던지는 것으로 생각해 보자. 처음 n번을 던진 뒤 밥은 앨리스보다 앞서 있거나, 같거나, 뒤처져 있다. 각 경우에 어떤 일이 일어나는가?

둘 다 n번씩 던진 뒤, 밥이 앞서 있을 확률은 p_2, 같을 확률은 p_1, 뒤처져 있을 확률은 (앨리스와 밥 사이의 대칭에 의해) p_2이다. 밥이 앞서 있다면 계속 앞선다. 같다면 추가로 던진 동전으로 확률 $\frac{1}{2}$로 앞서게 된다. 뒤처져 있다면 앞면이 하나 더 나와도 기껏해야 같아질 뿐이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{밥이 앞면을 더 많이 얻음}) = p_2 + \tfrac{1}{2}p_1.$$

세 경우가 모든 경우를 포괄하므로 $2p_2 + p_1 = 1$이고, 따라서 $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}$이다. 동전이 하나 더 있으면, 모든 n에 대하여 밥이 앞면을 더 많이 얻을 확률은 정확히 $\frac{1}{2}$이다. ■

잠깐, 직접 해 보기 한 문장 증명은 다음과 같다. 밥은 $n+1$번 던지므로 앞면과 뒷면의 개수의 합이 $n+1$로, 앨리스보다 하나 많다. 밥이 앨리스보다 앞면을 더 많이 얻는 것은 밥이 앨리스보다 뒷면을 더 많이 얻지 **않는** 것과 필요충분조건임을 보여라. 앞면과 뒷면은 대칭이므로 이 두 사건의 확률은 같고, 따라서 각각 $\frac{1}{2}$이다.

실제로 $H_A + T_A = n$, $H_B + T_B = n+1$이라 쓰자. $H_B > H_A$이면 $H_B \geq H_A + 1$이므로 $T_B = n+1-H_B \leq n - H_A = T_A$이다. 역으로 $T_B \leq T_A$이면 $H_B \geq H_A + 1$이다. 따라서 "앞면이 더 많음"과 "뒷면이 더 많음"은 서로 여사건(complementary event)이고, 앞면과 뒷면을 맞바꾸면(동전이 공정하므로 확률은 변하지 않는다) 두 사건이 서로 맞바뀐다.



그림 12.6.1 소문항 (ii): 같은 정도로 일어날 수 있는 128가지 결과 중 각 앞면 개수 조합에 해당하는 결과의 수. 밥이 앞서는 칸은 색칠되어 있으며, 정확히 전체 결과의 절반을 담고 있다.

돌아보기

- **작은 경우를 계산하라.** 두 번의 계산이 답 $\frac{1}{2}$을 암시했다.
- **자연스러운 분할에 대해 조건을 걸어라(conditioning).** 밥의 추가 던지기를 따로 떼어 내자 문제가 대등한 승부에 동전 하나를 더한 것으로 줄어들었다.
- **서로 여사건인 쌍을 찾아라.** "앞면이 더 많음"과 "뒷면이 더 많음"은 서로 여사건이며, 대칭에 의해 서로 맞바뀐다.

숨은 수학

대칭과 여사건

이 깔끔한 증명은 두 가지 사실을 결합한다. 대칭에 의해 서로 맞바뀌는 두 사건은 확률이 같고, 서로 여사건인 두 사건은 확률의 합이 1이다. 두 조건이 모두 성립하면 각 사건의 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 같은 추론이 확률론 곳곳에 등장한다. 비행기 좌석 문제(Section 12.5)에서 S_1과 S_n은 대칭에 의해 맞바뀌었고, 마지막에 남는 것은 정확히 둘 중 하나였다. 헥스(Hex) 게임에서는 판의 대칭성과 반드시 정확히 한 명이 이긴다는 사실로부터 선수가 유리함을 보일 수 있지만, 큰 판에서의 필승 전략은 아무도 모른다.

비길 확률은 얼마나 될까?

던지는 횟수가 같을 때는 비길 확률 p_1이 중요하다. 앨리스와 밥은 앨리스의 앞면 수가 밥의 앞면 수와 같을 때 비기는데, 이는 (대칭에 의해 밥의 앞면 수를 뒷면 수로 바꾸면) 앨리스의

앞면 수와 밥의 앞면 수의 합이 n일 확률, 즉 $2n$번 던져서 앞면이 모두 n개 나올 확률과 같다. 따라서 스털링(Stirling) 근사(Section 12.23)를 이용하면

$$p_1 = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

이다. 비기는 일은 드물어지지만 그 속도는 느리다. 각자 100번씩 던져도 비길 확률은 여전히 약 5.6%이다.

사고 기술

> **계산하고, 추측하고, 그다음 설명하라**
>
> 계산 결과가 의심스러울 만큼 단순한 답을 내면, 그 이유를 찾아라. 단순한 답에는 대개 단순한 설명이 있다.
>
> 대학에서는 이 습관이 이해와 계산을 가른다. 여기서 첫 번째 증명은 답을 확인해 주고, 두 번째 증명은 답을 설명하며 곧바로 일반화된다(연습문제 2를 풀어 보라).

더 도전하기

1 **동전 두 개 더.** 밥이 동전을 $n+2$개, 앨리스가 n개 던질 때, H'을 밥의 처음 $n+1$번 던지기에서 나온 앞면의 개수라 하면 $\mathrm{P}(\text{밥이 앞면을 더 많이 얻음}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}(H' = H_A)$임을 증명하여라.

2 **편향된 동전.** 두 사람 모두 앞면이 나올 확률이 p인 동전을 사용한다면, 한 번 더 던질 때 답은 여전히 $\frac{1}{2}$인가? 깔끔한 증명의 어느 단계가 성립하지 않는가?

3 **비기기.** 본문의 요령을 이용하여 $p_1 = \binom{2n}{n}/4^n$임을 보이고, $n = 1, 2, 3$일 때 그 값을 계산하여라.

4 **주사위.** 앨리스는 주사위 n개를, 밥은 $n+1$개를 던진다. 밥이 6의 눈을 더 많이 얻을 확률은 $\frac{1}{2}$인가?

더 읽을거리

- **Peter Winkler, *Mathematical Mind-Benders*** (A K Peters). 대칭을 이용한 풀이가 있는 확률 퍼즐이 많이 실려 있다.
- **Gabor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*** (Reidel). 확

률론과 수리통계학의 역설.

- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability*** (Dover). 확률의 도전적인 문제 50선.

12.7 토너먼트에서 누가 누구와 만나는가

문제

STEP II Specimen paper, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/spec-s2-q16`

도입

윔블던(Wimbledon) 대회에는 128명의 선수가 대진표에 오른다. 두 선수를 무작위로 고를 때, 이들이 언젠가 맞붙을 확률(probability)은 얼마일까? 각 라운드에서 만날 확률을 모두 더해 볼 수도 있다. 각각은 살아남을 확률과 서로 대진이 짜일 확률의 곱이다. 이 방법도 통하지만 훨씬 좋은 방법이 있다. 경기 수를 세는 것이다. 모든 경기는 두 선수 사이에서 치러지고, 경기는 정확히 127번 열린다. 대칭성(symmetry)에 의해 모든 선수 쌍은 각 경기의 대진이 될 가능성이 똑같다. 따라서 구하는 확률은 127을 선수 쌍의 개수로 나눈 값이다.

이 문제는 올바른 대상을 세어서 확률 문제를 푸는 완벽한 예이다. 답 $\frac{1}{2^{n-1}}$은 단 한 줄로 나온다.

시작하기 전에

생각해 보기 2^n명의 선수가 참가하는 녹아웃 토너먼트(knockout tournament)에서는 몇 경기가 열리는가? (각 경기에서 선수 한 명이 탈락한다.)

각 경기에서 정확히 한 명이 탈락하고, 한 명을 제외한 모든 선수가 탈락하므로 경기는 $2^n - 1$번 열린다.

차근차근 풀기

1단계 첫 라운드

고른 두 선수를 X와 Y라 하자. 첫 라운드에서 X의 상대는 나머지 2^n-1명 중 누구든 될 가능성이 같으므로

$$\mathrm{P}(\text{만나는 라운드가 1}) = \frac{1}{2^n-1}.$$

2단계 핵심이 되는 대칭성

> **생각해 보기** 각 라운드의 대진 추첨은 무작위이고 모든 경기는 공정한 동전 던지기이다. 이 과정이 어떤 선수 쌍을 다른 쌍과 다르게 취급하는가?

그렇지 않다. 대진 추첨이 무작위이고 모든 경기가 50–50이므로, 선수들의 이름을 바꾸어 붙여도 어떤 확률도 달라지지 않는다. 따라서 특정한 경기(예를 들어 결승전)가 $\binom{2^n}{2}$개의 쌍 중 어느 쌍 사이에서 치러질 가능성도 모두 같다.

3단계 결승전

결승전은 특정한 한 경기이므로, 그 경기가 X와 Y 사이에서 치러질 확률은

$$\frac{1}{\binom{2^n}{2}} = \frac{2}{2^n(2^n-1)}.$$

(검산: 두 선수 모두 결승에 올라야 하므로, 서로 다른 절반에 배치되고 각자 $n-1$경기를 이겨야 한다.)

4단계 어느 단계에서든

> **생각해 보기** X와 Y는 많아야 한 번 만날 수 있다. 이 사실이 어떻게 경기별 확률을 더할 수 있게 해 주는가?

경기 m이 X와 Y 사이의 경기이면 1인 값을 I_m이라 하자. 2^n-1개의 경기 각각에 대해 $\mathrm{P}(I_m=1) = \binom{2^n}{2}^{-1}$이고, 이 사건들은 서로 배반(mutually exclusive)이므로(두 선수는 두 번 만날 수 없다)

$$\mathrm{P}(\text{만남}) = \frac{2^n-1}{\binom{2^n}{2}} = \frac{2(2^n-1)}{2^n(2^n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad \blacksquare$$

$n=7$인 윔블던의 경우, 주어진 두 선수가 만날 확률은 $\frac{1}{64}$이다. 검산으로, 첫 라운드에는 2^n-1개의 경기 중 2^{n-1}개가 들어 있으므로 $\frac{2^{n-1}}{\binom{2^n}{2}} = \frac{1}{2^n-1}$이 되어 단계 1의 결과와 일치한다.

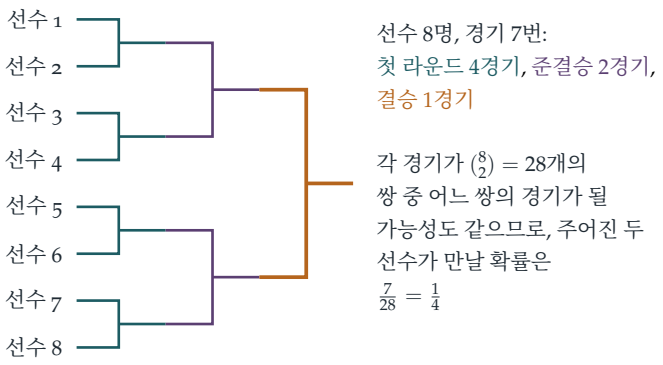


그림 12.7.1 $2^3 = 8$명의 선수가 참가하는 녹아웃 토너먼트(문제에서는 매 라운드 무작위로 대진을 다시 짜지만, 여기서는 고정된 대진표로 그렸다). 경기는 7번 열린다. 대칭성에 의해 각 경기가 28개의 쌍 중 어느 쌍의 경기가 될 가능성도 같으므로, 고른 두 선수가 만날 확률은 $\frac{7}{28} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n-1}}$이다.

돌아보기

- **경기 수를 센다.** 경기 수 $2^n - 1$이 핵심 사실이었다.
- **쌍 사이의 대칭성.** 모든 선수 쌍은 특정한 경기를 치를 가능성이 같다.
- **경기에 대한 선형성.** 두 선수는 많아야 한 번 만나므로, 만날 확률은 만나는 횟수의 기댓값이며 이는 경기에 대한 합이다.

숨은 수학

개수의 기댓값

단계 4의 논증은 사실 기댓값(expectation) 계산이다. X와 Y가 만나는 횟수는 경기마다 하나씩인 지시변수(indicator)들의 합이고, 그 기댓값(이 횟수는 0 또는 1이므로 만날 확률과 같다)은 지시변수들의 기댓값의 합이다. 이것이 기댓값의 선형성(linearity of expectation)이며, Section 9.11와 Section 12.4에서도 사용되었다. 이 방법의 큰 장점은 라운드 사이의 복잡한 종속 관계를 전혀 신경 쓰지 않아도 된다는 것이다.

시드가 배정된 토너먼트

실제 토너먼트에는 시드(*seed*)가 배정된다. 가장 강한 선수들은 후반 라운드가 되기 전에는 서로 만나지 않도록 배치된다. 또 실제 경기는 50–50이 아니다. 두 가지 모두 대칭성을 깨뜨리므로, 주어진 두 선수가 만날 확률을 구하는 일은 진짜 계산이 된다. 스포츠를 모형화하는 통계학자들은 선수들의 레이팅으로부터 각 경기의 확률을 추정하여 바로 이런 계산으로 토

너먼트 결과를 예측한다. 대칭적인 경우는 실제 효과를 측정하는 기준선이 된다.

사고 기술

올바른 대상을 세어라

올바른 대상을 고르기만 하면, 확률은 흔히 (유리한 대상의 개수) ÷ (가능성이 같은 대상의 개수)로 구할 수 있다. 여기서 그 대상은 경기와 쌍이었다.

무엇을 셀지 고르는 것이 조합적 확률(combinatorial probability)의 기술이다. 대학에서는 같은 아이디어가 **이중 세기**(*double counting*)(Section 7.9)로, 그리고 어떤 구조의 개수의 기댓값으로 그 구조의 존재를 증명(proof)하는 확률적 방법(probabilistic method)으로 나타난다.

더 도전하기

1 **라운드별로.** X와 Y가 라운드 k에서 만날 확률이 $\frac{2^{n-k}}{\binom{2^n}{2}}$임을 직접 보이고, 이를 모두 더하면 $\frac{1}{2^{n-1}}$이 됨을 확인하여라.

2 **고정된 대진표.** 대신 대진표를 (그림처럼) 미리 고정해 두고 모든 선수를 그 안에 무작위로 배치한다면 답이 달라지는가?

3 **강한 선수.** 선수 X가 모든 경기에서 이긴다고 하자. 이제 X가 Y를 만날 확률은 얼마인가?

4 **리그.** 모든 쌍이 한 번씩 맞붙는 $2n$개 팀의 리그(league)에서는 몇 경기가 열리는가? 이에 대응하는 "만날 확률"은 무엇인가?

더 읽을거리

- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability*** (Dover). 토너먼트 문제가 실려 있다.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican). 모형화와 예측에 관한 책이다.
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability*** (CRC Press; 온라인 무료 공개). 지시변수와 대칭성을 다룬다.

12.8 페니의 게임

문제

STEP III 2001, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/01-s3-q13`

도입

여러분과 친구가 각자 동전 세 번 던지기의 결과로 이루어진 수열을 하나씩 고르고, 둘 중 한 수열이 나타날 때까지 동전을 계속 던진다고 하자. 어느 순간에나 세 번 던지기의 모든 수열은 나타날 확률이 같으므로, 어떤 수열을 고르든 똑같이 유리하지 않을까? 전혀 그렇지 않다. 친구가 어떤 수열을 고르든, 여러분은 그것을 이기는 수열을 고를 수 있으며, 때로는 그 승산이 7 대 1에 이른다.

이것이 1969년 Walter Penney가 고안한 **페니 게임**(*Penney's game*)이다. 이 문제는 A가 B를 이기고, B가 C를 이기고, C가 D를 이기고, D가 A를 이긴다는 것을 보여 준다. 가위바위보처럼 순환이 생기는 것이다. "이긴다"는 관계는 추이적(transitive)이지 않다. 나중에 고르는 사람은 장기적으로 언제나 이길 수 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 지금까지 던진 결과가 TT로 끝났고 아직 아무도 이기지 않았다고 하자. THH가 TTH보다 먼저 나타날 수 있을까?

TT에서 T가 더 나올 때마다 마지막 두 결과는 계속 TT이고, 처음 나오는 H가 TTH를 완성한다. THH가 나타나려면 TH가 필요한데, 이는 T 다음에 H가 나올 때만 생기며, 그 H는 이미 TTH를 완성한다. 따라서 일단 TT가 나오면 A가 이긴다.

차근차근 풀기

1단계 상태

생각해 보기 두 번 던져서는 어느 수열도 완성될 수 없다. 두 번 던진 뒤, 각 상태에서 다음 한 번의 던지기는 어떤 결과를 가져오는가?

게임은 마지막 두 결과에만 의존하므로, 상태(state)(마지막 두 결과)를 추적하면 된다.

- TT에서: A가 이기므로(위에서 보였다) $p_{\mathrm{TT}} = 1$이다.
- HT에서: 다음 던지기에서 TH 또는 TT가 되므로 $p_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{TH}} + \frac{1}{2}p_{\mathrm{TT}}$이다.
- TH에서: H가 나오면 THH가 완성되고(B가 이긴다), T가 나오면 HT가 된다. 따라서 $p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$이다.
- HH에서: H가 나오면 다시 HH가 되고, T가 나오면 HT가 된다. 따라서 $p_{\mathrm{HH}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{HH}} + \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$이고, 이로부터 $p_{\mathrm{HH}} = p_{\mathrm{HT}}$를 얻는다.

2단계 풀기

$p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$를 HT에 대한 식에 대입하면 $p_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{4}p_{\mathrm{HT}} + \frac{1}{2}$이므로 $p_{\mathrm{HT}} = \frac{2}{3}$, $p_{\mathrm{HH}} = \frac{2}{3}$, $p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{3}$이다. 네 가지 시작 상태는 각각 확률이 $\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(A \text{ 가 이김}) = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + 1\right) = \tfrac{2}{3}. \qquad \blacksquare$$

3단계 B 대 C

생각해 보기 C는 HHT를, B는 THH를 원한다. C는 언제 이기는가? (처음 나오는 HH 바로 앞에 무엇이 와야 하는지 살펴보라.)

처음 두 결과가 HH이면, 그 뒤 처음 나오는 T가 THH가 나타나기 전에 HHT를 완성하므로 C가 이긴다. 그렇지 않으면 HH가 처음 나타나기 전 어딘가에 T가 있으므로, 처음 나오는 HH 바로 앞에는 T가 있다. 그 순간 THH가 나타나며, 이는 HHT(HH 뒤에 T가 필요하다)보다 먼저이다. 따라서 C는 게임이 HH로 시작할 때만 이긴다.

$$\mathrm{P}(B \text{ 가 이김}) = \tfrac{3}{4}. \qquad \blacksquare$$

4단계 순환

같은 방법(또는 "숨은 수학" 절의 지름길)을 쓰면, C(HHT)가 D(HTT)를 확률 $\frac{2}{3}$으로 이기고, D(HTT)가 A(TTH)를 확률 $\frac{3}{4}$로 이긴다는 것을 알 수 있다. 마지막 것은 앞면과 뒷면을

바꾼 3단계의 거울상이다. 따라서

A 는 다음을 이긴다: B, B 는 다음을 이긴다: C, C 는 다음을 이긴다: D, D 는 다음을 이긴다:

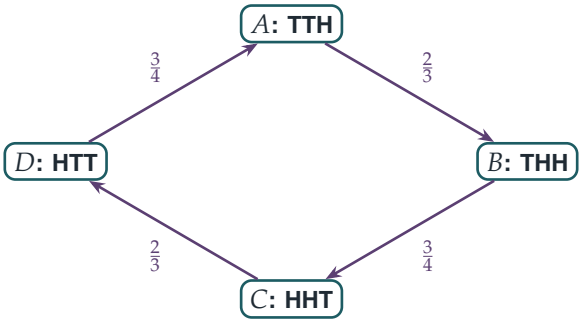


그림 12.8.1 페니의 순환. X에서 Y로 가는 화살표는 X의 수열이 Y의 수열을 표시된 확률로 이긴다는 뜻이다. 모든 수열은 다른 어떤 수열에게 지므로, 나중에 고르는 사람은 언제나 이기는 수열을 고를 수 있다.

돌아보기

- **알맞은 상태를 고른다.** 마지막 두 결과만 중요했으므로, 네 개의 상태와 네 개의 방정식으로 게임 전체를 나타낼 수 있었다.
- **첫걸음 분석.** 각 방정식은 다음 던지기를 조건으로 하였다. 한 상태에서의 확률은 다음 던지기가 이끄는 곳들에서의 확률의 평균이다.
- **결정적인 사건을 찾는다.** 3단계에서는 "처음 나오는 HH 앞에 T가 있다"는 사실이 방정식 없이 게임의 승부를 결정했다.

숨은 수학

어떤 수열이 더 유리한 이유

세 번 던지기의 모든 수열은 주어진 어느 위치에서나 나타날 확률이 같고, 각 수열이 나타날 때까지의 기대 대기 시간은 쉽게 계산할 수 있다. 그러나 대기 시간은 서로 다르다. TTH는 평균 8번, TTT는 평균 14번을 기다려야 하는데, 자기 자신과 겹치는 수열(TTT처럼, 아깝게 빗나간 TTH가 두 번 던지기만큼의 진행을 망쳐 버리는 경우)은 늦게 나타나기 때문이다. 그리고 두 수열의 경주에서 중요한 것은 각 수열이 **상대** 수열과 어떻게 겹치느냐이다. THH가 HHT를 이기는 까닭은, HHT가 나타날 때마다(맨 처음인 경우를 제외하고) 그 앞에 T가 있고, 이는 THH가 막 나타났다는 뜻이기 때문이다. 두 번째 선수의 비결은 언제나 같다. 상대 수열의 처음 두 기호를 가져와서, 그 앞에 상대 수열의 가운데 기호와 반대인 기

호를 붙이면 된다.

콘웨이의 공식

콘웨이(John Conway)는 승산에 대한 놀라운 공식을 발견했다. 길이가 n인 두 수열 X와 Y에 대하여 **상관**(*correlation*) XY를 n자리 이진수로 정의한다. 왼쪽부터 읽을 때, X의 i번째 기호에서 시작하는 부분이 같은 길이의 Y의 앞부분과 같으면 i번째 자리를 1로 둔다. 그러면 Y가 X보다 먼저 나타날 승산은

$$(XX - XY) : (YY - YX).$$

이다. $X = \text{HHT}$, $Y = \text{THH}$인 경우, $XX = 100_2 = 4$(HHT 전체만이 자기 자신과 일치한다), $XY = 001_2 = 1$(HHT의 마지막 T만이 THH의 앞부분과 일치한다), $YY = 100_2 = 4$, $YX = 011_2 = 3$(THH 끝의 HH와 H가 모두 HHT의 앞부분과 일치한다)이다. 따라서 THH가 먼저 나올 승산은 $(4-1) : (4-3) = 3 : 1$이고, 이것이 3단계의 $\frac{3}{4}$이다. 콘웨이의 공식은 길이와 알파벳에 관계없이 모든 수열에 대해 성립하며, 그 증명에는 **마팅게일**(*martingale*) 이론이 쓰인다. 도박꾼들이 수열이 나타나는 데 돈을 거는 카지노를 상상하고, 공정한 게임의 기대 이익은 0이라는 사실을 이용하는 것이다.

Penney와 가드너

Walter Penney는 1969년 *Journal of Recreational Mathematics*에 실린 짧은 글에서 이 게임을 소개했다. 마틴 가드너(Martin Gardner)는 1974년 *Scientific American*의 칼럼에서 이 게임을 널리 알렸는데, 여기에는 콘웨이가 발견했지만 발표하지 않았던 콘웨이의 공식도 포함되어 있었다. 이런 종류의 비추이적 관계(주사위 A가 B를, B가 C를, C가 D를, D가 A를 이기는 에프론(Efron)의 주사위도 그 예이다)는 거듭 놀라움을 주는 대상이며, 다수의 선호가 순환을 이룰 수 있는 투표 이론에서도 중요하다. 이것이 콩도르세(Condorcet)의 역설이다.

사고 기술

첫걸음 분석

상태 사이를 옮겨 다니는 과정에서 확률이나 기댓값을 구하려면 첫 단계를 조건으로 삼는다. 그러면 상태마다 일차방정식이 하나씩 생긴다.

이것은 마르코프 연쇄(Markov chain)의 기본 기법으로, Section 12.16에서, 그리고 대학 확률론 과정 전반에서 만나게 된다. 같은 방법으로 한 상태에 다른 상태보다 먼저 도달할 확률, 흡수될 때까지의 기대 시간, 도박 문제에서 파산할 확률을 구할 수

있다.

더 도전하기

1 **네 명이 함께.** STEP II 2015, 12번 문제 (`step.maths.org/questions/15-s2-q12`)에 도전해 보라. 네 명이 동시에 하는 페니 게임이다.

2 **대기 시간.** HH가 처음 나타날 때까지 던지는 횟수의 기댓값이 6이고, HT의 경우는 4임을 보여라. (첫걸음 분석을 이용하라.)

3 **최선의 응수.** 길이가 3인 여덟 개의 수열 각각에 대하여, 그것을 가장 큰 확률로 이기는 수열을 구하라. 어느 수열이 가장 쉽게 지는가?

4 **콘웨이의 공식.** 콘웨이의 공식을 이용하여 HHT가 HTT를 확률 $\frac{2}{3}$으로 이긴다는 것을 확인하라.

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*** (W. H. Freeman). 페니 게임과 콘웨이의 공식이 실려 있다.
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley), 8.4절. 생성함수를 이용한 페니 게임.
- **David Williams, *Probability with Martingales*** (Cambridge University Press). 마팅게일을 이용한 증명. 나중을 위한 책이다.

12.9 치우친 동전으로 공정하게 정하기

문제

STEP I 2019, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

도입

공정한 결정을 내려야 하는데, 쓸 수 있는 동전은 휘어진 것 하나뿐이고 얼마나 치우쳐 있는지도 모른다. 그래도 공정하게 고를 수 있을까? 1951년 존 폰 노이만(John von Neumann)이 내놓은 답은 이렇다. 동전을 두 번 던진다. HT가 나오면 호텔을, TH가 나오면 찻집을 고르고, HH나 TT가 나오면 다시 두 번 던진다. HT와 TH는 둘 다 확률(probability)이 pq이므로, p가 무엇이든 이 결정은 완벽하게 공정하다.

이 문제의 절차는 그 반대이다. HH와 TT에서 결정하므로 빠르지만 공정하지 않다(호텔을 고를 확률은 $\frac{p^2}{p^2+q^2}$이다). 문제는 어떤 동전을 쓰더라도 이 절차가 결코 오래 걸리지 않음을 보여 준다. 두 절차를 비교하면 무작위성을 만들어 낼 때의 기본적인 맞교환, 곧 속도와 공정성 사이의 맞교환이 드러난다.

시작하기 전에

생각해 보기 한 라운드에서 결정이 내려질 확률은 얼마인가? 결정이 내려지지 않을 확률은? $2pq$가 가질 수 있는 가장 큰 값은 얼마인가?

동전들이 일치하면 결정이 내려지며, 그 확률은 $p^2 + q^2$이다. 그렇지 않으면 확률 $2pq$로 계속 진행한다. $pq = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$이고(등호는 $p = \frac{1}{2}$일 때 성립한다), 따라서 $2pq \leq \frac{1}{2}$이다.

차근차근 풀기

1단계 n번째 라운드에서의 결정

각 라운드는 독립(independent)이다. n번째 라운드에서 결정이 내려지려면 $n-1$번의 라운드 동안 동전이 일치하지 않고, 그다음에 일치해야 한다.

$$\mathrm{P}(\text{결정이 일어나는 라운드} n) = (2pq)^{n-1}(p^2+q^2). \qquad \blacksquare$$

2단계 n번째 라운드까지의 결정

? **생각해 보기** 처음 n번의 라운드에서 결정이 내려지지 않을 확률은 얼마인가?

n번의 라운드 동안 결정이 내려지지 않을 확률은 $(2pq)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로, p가 무엇이든 n번째 라운드까지 결정이 내려질 확률은 적어도 $1-\frac{1}{2^n}$이다. $\blacksquare$

3단계 세 사람

? **생각해 보기** 첫 라운드에서 앞면이 둘, 뒷면이 하나 나온 뒤, 세 번째 사람이 뒷면을 앞면으로 뒤집어 놓는다. 둘째 라운드에서 결정이 내려지려면 무엇이 일어나야 하는가? 뒷면이 둘, 앞면이 하나 나온 경우에는 어떠한가?

첫 라운드에서 결정이 내려질 확률은 p^3+q^3이다. 그렇지 않으면 두 동전은 일치하고 하나는 다르다. 다수가 앞면이면(확률 $3p^2q$) 다른 동전 하나를 앞면으로 뒤집어 놓으므로, 둘째 라운드에서 결정이 내려지려면 나머지 두 사람이 앞면을 던져야 한다. 그 확률은 p^2이다(이제 모두 뒷면이 되는 것은 불가능하다). 마찬가지로 다수가 뒷면이면(확률 $3pq^2$) 결정이 내려지려면 뒷면이 두 번 나와야 하며, 그 확률은 q^2이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{결정, 늦어도 라운드2}) = p^3+q^3+3p^2q\cdot p^2+3pq^2\cdot q^2.$$

? **생각해 보기** 모든 것을 $s=pq$로 나타내어라. ($p+q=1$을 이용한다.)

$p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)=1-3s$이고 $3p^4q+3pq^4=3s(p^3+q^3)=3s(1-3s)$이다. 따라서 $s\le\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}=1-3s+3s-9s^2=1-9s^2\ge 1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16},$$

이다. $\blacksquare$

돌아보기

- **여사건(complement).** "n번째 라운드까지 적어도 한 번"은 1− ("n번의 라운드 동안 한 번도 없음")으로 계산하는 것이 가장 쉬웠다.
- **최악의 경우를 한정하기.** 알 수 없는 p는 부등식(inequality) $pq \leq \frac{1}{4}$로 처리했다.
- **대칭함수(symmetric function).** p와 q에 대하여 대칭인 식은 $p+q=1$과 pq로 나타내면 간단해진다.

숨은 수학

폰 노이만의 기법

문제의 절차는 빠르지만 치우쳐 있다. 폰 노이만의 절차는 공정하다. 두 번 던져서 HT나 TH이면 결정하고, HH나 TT이면 반복한다. 각 시도는 확률 $2pq$로 성공하므로 평균 $\frac{1}{2pq}$번의 시도가 필요하며, 동전이 매우 치우쳐 있으면 느리다(그림 12.9.1). 문제의 절차는 라운드마다 확률 $p^2+q^2 \geq \frac{1}{2}$로 결정을 내리지만, $p > \frac{1}{2}$이면 그 답은 호텔 쪽으로 기운다.

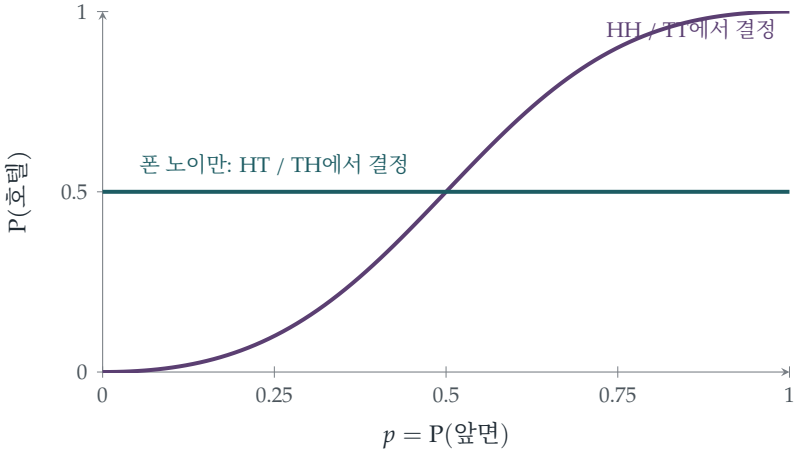


그림 12.9.1 동전의 치우침에 따른 호텔을 고를 확률. 동전들이 일치할 때 결정하는 방법(자주색)은 빠르지만 더 잘 나오는 면 쪽으로 기운다. 폰 노이만의 절차(청록색)는 모든 p에 대하여 정확히 공정하지만, 동전이 매우 치우쳐 있으면 시간이 더 오래 걸린다.

무작위성 추출

폰 노이만의 기법은 최초의 **무작위성 추출기**(*randomness extractor*), 곧 불완전한 무작위성을 완전한 무작위성으로 바꾸는 절차이다. 이 기법은 낭비가 많다(두 번 던질 때마다 공정

한 비트를 많아야 하나 얻고, 하나도 얻지 못할 때도 많다). 더 나은 방법들은 버려진 HH와 TT 쌍을 재활용하여 동전에 담긴 무작위성을 거의 전부 추출하는데, 그 양은 던질 때마다 엔트로피(*entropy*) $-p\log_2 p - q\log_2 q$비트로 측정된다. 추출기는 컴퓨터의 하드웨어 난수 생성기에 쓰인다. 이 생성기는 예측할 수 없지만 치우친 물리적 잡음을 모아서, 암호에 쓸 수 있도록 치우치지 않은 비트로 바꾸어야 한다.

폰 노이만과 난수

존 폰 노이만은 1951년 논문 "Various techniques used in connection with random digits"(난수와 관련하여 쓰이는 여러 기법)에서 이 기법을 설명했다. 이 논문은 그와 동료들이 핵무기 설계를 위해 최초의 컴퓨터 시뮬레이션 몇 가지("몬테카를로 방법(Monte Carlo method)")를 수행하던 시기에 쓰였다. 같은 논문에서 그는 산술로 난수를 만들어 내는 일에 대해 유명한 말을 남겼다. "산술적 방법으로 난수를 만들어 내려는 사람은 누구든, 당연히, 죄를 짓고 있는 상태이다."

사고 기술

대칭성을 이용하여 미지수를 소거하기

매개변수를 모를 때는 그 값과 상관없이 확률이 같은 사건을 찾아, 그 사건들을 바탕으로 결정하라.

HT와 TH는 확률이 pq로 같으므로, 둘을 비교하면 p가 완전히 사라진다. 대학에서는 같은 아이디어가 통계학의 **피벗량**(*pivotal quantity*)과, 무작위화(randomisation)와 대칭성으로 알 수 없는 효과를 상쇄하는 실험 설계(design of experiments)에서 나타난다.

더 도전하기

1 **라운드 수의 기댓값.** 소문항 (i)의 절차와 폰 노이만의 절차에 대하여 라운드 수의 기댓값(expected value)을 구하여라. 어떤 p에 대하여 폰 노이만의 절차가 더 느린가?

2 **공정한 셋 중 하나 고르기.** 치우친 동전을 사용하여 세 가지 선택지 가운데 하나를 각각 정확히 확률 $\frac{1}{3}$로 고르는 절차를 고안하여라.

3 **공정한 동전으로 만드는 치우친 동전.** 공정한 동전을 사용하여 앞면이 나올 확률이 정확히 $\frac{1}{3}$인 동전을 흉내 내는 절차를 고안하여라. 던지는 횟수의 기댓값은 얼마인가?

4 다시 세 사람. 소문항 (ii)에서 그들이 호텔에 갈 확률을 p의 함수로 나타내면 무엇인가? $p = \frac{1}{2}$일 때 이 절차는 공정한가?

더 읽을거리

- **John von Neumann, "Various techniques used in connection with random digits"**, *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series* 12 (1951). 짧고 유명한 논문이다.
- **Donald Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 2** (Addison-Wesley), 난수를 다룬 3장.
- **Michael Mitzenmacher & Eli Upfal, *Probability and Computing*** (Cambridge University Press), 무작위성 추출과 엔트로피를 다룬다.

12.10 느슨한 끈 끝 묶기

문제

STEP III 2008, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/08-s3-q13`

도입

끈 백 가닥을 주머니에 넣어 끝만 삐져나오게 한다. 끝 두 개를 무작위로 골라 묶고, 남은 끝이 없을 때까지 이것을 되풀이한다. 그러면 고리 여러 개가 뒤엉킨 덩어리가 남는다. 고리는 몇 개일까? 끈 백 가닥으로 원리상 작은 고리 백 개를 만들 수도 있고, 거대한 고리 하나를 만들 수도 있다. 놀랍게도 고리 개수의 기댓값(expected value)은 겨우 3.3 정도이고, 끈이 사만 가닥이어도 여전히 6 정도에 불과하다.

핵심 관찰 하나로 이 문제는 거의 자명해진다. 매듭을 하나 지을 때마다, 무슨 일이 일어났든 상자 안의 끈은 그저 한 가닥 줄어든다. 이 과정은 자신의 이력을 "잊어버리며", 고리의 개수는 확률이 바뀌어 가는 독립적인 동전 던지기들의 합이 된다.

시작하기 전에

생각해 보기 두 끝을 묶은 뒤에는 끈이 몇 가닥 남는가? (고리가 된 것은 더 이상 "가닥"으로 세지 않는다.) 이 개수는 고리가 만들어졌는지에 따라 달라지는가?

두 끝이 같은 끈에 속하면 그 끈은 고리가 되고 $n-1$가닥이 남는다. 서로 다른 끈에 속하면 두 끈은 더 긴 한 가닥이 되고, 역시 $n-1$가닥이 남는다. 어느 경우든 끝이 두 개씩인 끈 $n-1$가닥이 남는다.

차근차근 풀기

1단계 첫 번째 매듭

끝은 $2n$개이다. 하나를 고르면, 그 짝은 나머지 $2n-1$개의 끝 중 어느 것이든 같은 확률로 될 수 있고, 그중 정확히 하나가 같은 끈에 속한다. 따라서 첫 번째 매듭이 고리를 만들 확률은 $\frac{1}{2n-1}$이고, 첫 단계에서 만들어지는 고리 개수의 기댓값은 $\frac{1}{2n-1}$이다.

2단계 모든 매듭

생각해 보기 위의 관찰에 따르면, 두 번째 매듭을 짓기 전의 상황은 어떤가? 세 번째는? 끈이 k가닥 남았을 때 짓는 매듭에서 고리가 생기는지를 나타내는 지시확률변수(indicator)를 I_k라 하자. $\mathrm{E}(I_k)$는 각각 얼마인가?

각 매듭을 짓기 전에 상자에는 $k = n, n-1, \dots, 1$에 대해 k가닥의 끈이 있고, 그 매듭이 고리를 만들 확률은 $\frac{1}{2k-1}$이다. (한 가닥이 남았을 때 짓는 마지막 매듭은 항상 고리를 만든다.) 고리의 총 개수는 $R = I_n + I_{n-1} + \cdots + I_1$이므로

$$\mathrm{E}(R) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}. \qquad \blacksquare$$

3단계 분산

생각해 보기 지시확률변수 I_k들은 독립(independent)인가? (어떤 단계에서 고리가 생길 확률이 그 전에 일어난 일에 따라 달라지는가?)

각 단계에서 고리가 생길 확률은 그 전에 무슨 일이 있었든 $\frac{1}{2k-1}$이다. 상태가 언제나 "끈 k가닥"이기 때문이다. 따라서 I_k들은 독립이고, 분산(variance)은 더해진다.

$$\mathrm{Var}(R) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-2}{(2k-1)^2}. \qquad \blacksquare$$

4단계 끈 사만 가닥

생각해 보기 $2n-1$까지의 홀수의 역수의 합을 조화수(harmonic number)를 써서 나타내어라.

$2n$까지의 모든 수의 역수의 합에서 짝수의 역수의 합을 빼면

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \tfrac{1}{2}H_n \approx \ln(2n) - \tfrac{1}{2}\ln n = \tfrac{1}{2}\ln(4n).$$

$n = 40\,000$이면 $4n = 160\,000 = 20^4$이므로 $\mathrm{E}(R) \approx \frac{1}{2} \cdot 4 \ln 20 \approx 6$이다. ■(정확한 값은 6.28이다. 차이는 오일러(Euler) 상수(Euler's constant)에서 오는데, $H_n \approx \ln n + 0.577$이기 때문이다.)

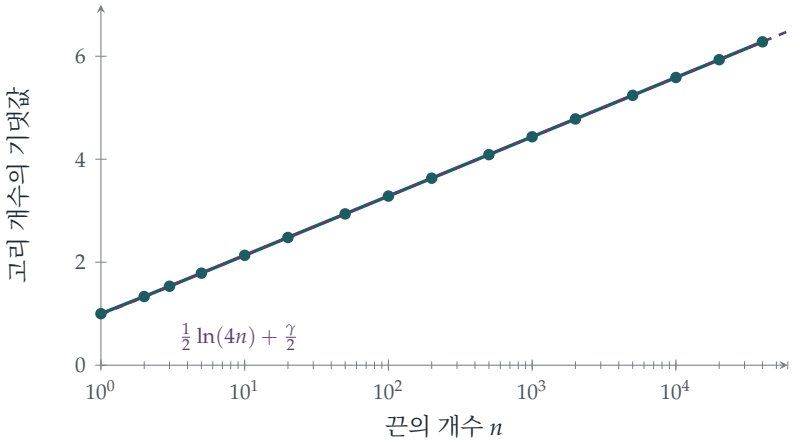


그림 12.10.1 끈의 개수에 대한 고리 개수의 기댓값을 로그 눈금으로 나타낸 그래프. 정확한 값(청록색)은 직선 $\frac{1}{2}\ln(4n) + \frac{\gamma}{2}$(자주색, 점선) 위에 놓인다. 여기서 $\gamma \approx 0.577$은 오일러 상수이다. 끈의 개수를 10배로 늘려도 고리는 약 1.15개만 늘어난다.

돌아보기

- **과정이 무엇을 잊어버리는지 찾는다.** 매듭을 지을 때마다 상자의 상태는 이력과 무관하게 "끈 k가닥"이었다.
- **다시 지시확률변수.** 고리의 개수는 매듭 하나에 하나씩 대응하는 지시확률변수들의 합이었다.
- **독립성이 분산을 준다.** 각 단계의 확률이 과거에 의존하지 않았으므로 지시확률변수들은 독립이었다.

숨은 수학

로그적 증가

고리 개수의 기댓값은 $\frac{1}{2}\ln n$처럼 증가하고, 분산은 평균에 가깝다(둘 다 작은 확률들의 합이다). 중심극한정리(central limit theorem, Section 12.24)에 따르면, n이 클 때 고리의 개수는 평균과 분산이 약 $\frac{1}{2}\ln(4n)$인 정규분포(normal distribution)를 근사적으로 따른다. 끈이 40 000가닥이면 고리는 대개 2개에서 11개 사이로 생긴다.

무작위 순열의 순환

같은 로그가 n개 대상의 무작위 순열(permutation)이 갖는 순환(cycle)의 개수에도 나타난다. 그 평균은 $H_n \approx \ln n$이다(끈 문제는 이와 가까운 친척으로, $\frac{1}{2}\ln n$이다). 무작위 순열은 순환이 적다. 대개 거대한 순환 하나가 원소 대부분을 포함하며, 가장 큰 순환에 속한 원소의 비율은 평균적으로 약 0.62로, 이것이 골롬–딕맨 상수(Golomb–Dickman constant)이다. 끈을 무작위로 엉키게 하는 것도 같은 방식으로 움직인다. 끈의 대부분은 긴 고리 한두 개에 들어간다. 이러한 사실들은 **무작위 조합 구조**(*random combinatorial structures*) 연구의 일부이며, 이 분야는 정수론(number theory)과도 연결되어 있다(무작위 정수의 소인수(prime factors)는 무작위 순열의 순환처럼 행동한다).

무작위 매듭과 고분자

끈 묶기 문제는 물리계의 장난감 모형이다. 용액 속의 긴 고분자(polymer) 분자들은 끝과 끝이 이어져 고리와 사슬을 이루며, 고리 형성의 통계는 비슷한 규칙을 따른다. 매듭 이론(knot theory)에서 수학자들은 무작위로 만든 닫힌 고리가 매듭지어져 있을 확률이 얼마인가라는 더 어려운 질문을 던진다. 긴 무작위 고리에 대해서는 그 답이 1로 수렴하며, 이 결과는 1988년 De Witt Sumners와 Stuart Whittington이 증명하였다.

사고 기술

무기억 구조를 찾아라

각 단계 뒤에 계의 상태가 지금까지 거친 단계의 수에만 의존한다면, 각 단계는 독립적으로 행동하고 기댓값과 분산은 그냥 더해진다.

이것이 쿠폰 수집가 문제(coupon collector, Section 9.11)의 바탕에 있는 아이디어로, 거기서는 각 단계가 새로운 기하분포(geometric distribution) 대기 시간이다. 이 아이디어는 현재 상태만이 중요한 마르코프 연쇄(Markov chain) 이론에서도 다시 나타난다.

더 도전하기

1 **작은 경우.** $n = 2$일 때 가능한 경우를 모두 나열하고, 고리 개수의 기댓값이 $\frac{4}{3}$임을 확인하여라.

2 **하나의 큰 고리.** 모든 끈을 포함하는 고리 하나로 과정이 끝날 확률이 $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)$임을 보이고, n이 클 때 이 값이 근사적으로 $\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$임을 보여라. (**힌트:** 이 곱을 $\binom{2n}{n}$과 관련지어라.)

3 **순열의 순환.** 순열을 원소 하나씩 만들어 가는 방법("중국 식당(Chinese restaurant)" 구성)으로, n개 대상의 무작위 순열이 갖는 순환 개수의 기댓값이 H_n임을 보여라.

4 **분산.** $\operatorname{Var}(R) = \mathrm{E}(R) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$임을 보이고, 빼는 합이 $\frac{\pi^2}{8}$로 수렴함을 보여라.

더 읽을거리

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection*** (A K Peters). 끈 묶기 퍼즐이 실려 있다.
- **Richard Arratia, Andrew Barbour & Simon Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures*** (European Mathematical Society). 순환, 소수, 무작위 구조를 다루며, 나중을 위한 책이다.
- **Colin Adams, *The Knot Book*** (American Mathematical Society). 무작위 매듭을 포함한 매듭 이론 입문서이다.

12.11 우표, 컵, 그리고 e

문제

STEP I 1996, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/96-s1-q13`

도입

우표를 파는 기묘한 방법이 있다. 사는 사람은 어느 컵 아래에 우표가 숨어 있는지 계속 맞혀야 하고, 한 판이 지날 때마다 컵이 하나씩 늘어난다. 그리고 처음으로 틀렸을 때 탁자 위에 놓인 컵 하나당 1파운드씩 낸다. 평균적으로 그가 내는 돈은 £e, 즉 약 £2.72이다.

수 e는 확률에서 묘할 정도로 자주 나타난다. 아무도 자기 셔츠를 돌려받지 못할 확률(Section 9.8), 비서 문제(secretary problem, Section 12.12), 포아송 분포(Poisson distribution)가 그 예이다. 이 문제는 e가 등장하는 사례 가운데 아마 가장 단순한 것이며, 놀랍게도 또 다른 유명한 퍼즐과 정확히 같은 분포를 가진다. 0과 1 사이의 난수를 몇 개 더해야 합이 1을 넘을까? 평균적으로 e개이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $N = 4$가 되려면 무슨 일이 일어나야 하는가? 그 확률은 얼마인가?

짐(Jim)은 컵이 2개일 때(확률 $\frac{1}{2}$)와 3개일 때($\frac{1}{3}$) 맞히고, 컵이 4개일 때 틀려야 한다($\frac{3}{4}$). 따라서 $\mathrm{P}(N = 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$이다.

차근차근 풀기

1단계 **분포**

$N = k$ ($k \geq 2$)가 되려면 짐은 컵이 $2, 3, \ldots, k-1$개일 때 맞히고 k개일 때 틀려야 한다.

$$\mathrm{P}(N = k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{k-1}{k!}.$$

(검산: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots = \sum_{k \geq 2} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = 1$이며, 이는 망원급수(telescoping sum)이다.)

2단계 기댓값

? **생각해 보기** $k \cdot \frac{k-1}{k!}$를 간단히 하여라. 어떤 급수가 나오는가?

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-2)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots = e. \qquad \blacksquare$$

3단계 분산

? **생각해 보기** $k^2 = k(k-1) + k$로 쓰거나 $\frac{k^2(k-1)}{k!}$를 직접 간단히 하여 $\mathrm{E}(N^2)$를 구하여라.

$$\mathrm{E}(N^2) = \sum_{k \geq 2} \frac{k^2(k-1)}{k!} = \sum_{k \geq 2} \frac{k}{(k-2)!} = \sum_{j \geq 0} \frac{j+2}{j!} = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(j-1)!} + 2 \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} = e + 2e = 3e.$$

따라서 분산(variance)은 $\mathrm{Var}(N) = 3e - e^2 = e(3-e) \approx 0.766$이다. $\blacksquare$

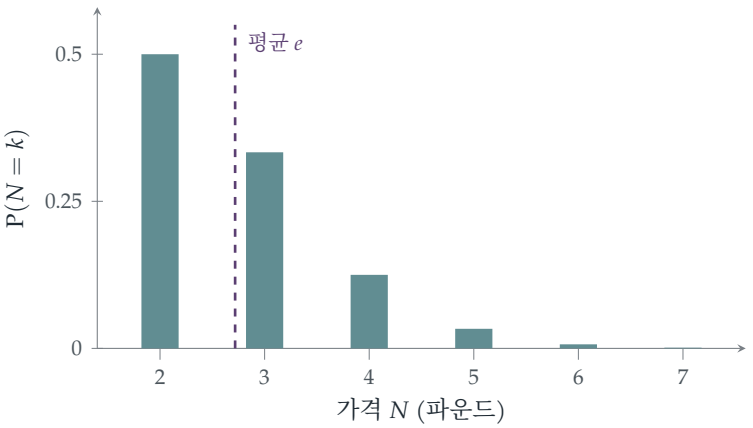


그림 12.11.1 가격의 분포 $\mathrm{P}(N = k) = \frac{k-1}{k!}$. 짐은 절반의 경우에 £2를 내지만, 길고 얇은 꼬리가 평균을 $£e \approx £2.72$까지 끌어올린다.

돌아보기

- **확률의 곱.** 독립(independent)인 성공이 이어지다가 실패로 끝나는 사건의 확률은 곱으로 주어지고, 이 곱은 $\frac{k-1}{k!}$로 간단히 정리되었다.
- **계승을 약분하기.** k나 k^2를 곱한 뒤 약분하자 합이 지수급수(exponential series)로 바뀌었다.
- **첨자 이동으로 구한** $\mathrm{E}(N^2)$**.** $j = k - 2$로 첨자를 바꾸자 합이 e 두 개로 나뉘었다.

숨은 수학

모습만 바꾼 같은 분포

난수 $U_1, U_2, \ldots$를 $[0,1]$에서 균등하게(uniformly) 뽑고, 그 합이 1을 넘는 데 필요한 개수를 M이라 하자. 처음 k개의 수를 더한 값이 1보다 작을 확률은 영역 $\{u_1 + \cdots + u_k < 1, u_i \geq 0\}$의 부피이며, 이 값은 $\frac{1}{k!}$이다(넓이가 $\frac{1}{2}$인 삼각형, 부피가 $\frac{1}{6}$인 사면체(tetrahedron) 등). 따라서

$$\mathrm{P}(M > k) = \frac{1}{k!}, \qquad \mathrm{P}(M = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!},$$

이고, 이는 N의 분포와 정확히 같다. 두 문제 모두에서 $\mathrm{P}(N > k) = \frac{1}{k!}$이다. 컵 문제에서 이것은 $k-1$번 연속으로 맞힐 확률이다. 공식 $\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(N > k)$(Section 9.9에서 나온 공식)를 쓰면 한 줄 만에 $\mathrm{E}(N) = \sum \frac{1}{k!} = e$를 얻는다.

e가 자꾸 나타나는 이유

k개의 대상이 특정한 순서로 놓이는 경우이든, 확률이 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$인 사건 k개가 연달아 일어나는 경우이든, 단체(simplex)의 부피이든, 확률에 $\frac{1}{k!}$이 들어 있으면 k에 대한 합은 지수급수가 된다. 교란순열(derangement, Section 9.8)에서는 $\sum \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$이 나왔고, 여기서는 $\sum \frac{1}{k!} = e$가 나왔다. 그리고 일어날 가능성이 낮은 독립 사건이 많이 있을 때 생기는 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$ 꼴의 극한은 비서 문제와 포아송 분포에 e가 나타나는 이유를 설명해 준다.

몬테카를로 방법으로 구하는 e

"합이 1을 넘는" 문제를 이용하면 실험으로 e를 추정할 수 있다. 난수를 만들어 1을 넘는 데 몇 개가 필요한지 세고, 이를 여러 번 반복하여 평균을 내면 된다. 이는 π를 추정하는 뷔퐁(Buffon)의 바늘(Section 12.20)과 사촌 격이다. 카지노의 이름을 딴 이러한 **몬테카를로**(Monte Carlo) 방법은 직접 계산하기 어려운 양을 무작위 표본추출로 추정한다. 오늘날 이 방법은 입자물리학에서 금융에 이르기까지 과학 전반에서 쓰이며, 주로 고차원 적분에 사용된다.

사고 기술

급수를 알아보기

기댓값이 계승을 포함한 합으로 주어지면, 표준적인 급수(지수급수, 기하급수, 이항급수)가 나타날 때까지 항을 간단히 하라.

대학에서는 생성함수(generating function)가 이 과정을 체계화한다. 확률생성함수(probability generating function) $\mathrm{E}(t^N)$는 분포 전체를 하나로 담고 있으며, $t = 1$에서의 도함수 값으로부터 평균과 분산을 얻는다.

더 도전하기

1 **생성함수.** $\mathrm{E}(t^N) = 1 + (t-1)e^t$임을 보이고, 이를 이용하여 $\mathrm{E}(N)$과 $\mathrm{E}(N(N-1))$을 구하여라.

2 **꼬리 공식.** 음이 아닌 정수 값을 갖는 확률변수(random variable)에 대하여 $\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(N > k)$임을 증명하고, 이를 이용하여 한 줄 만에 $\mathrm{E}(N)$을 구하여라.

3 **컵 하나로 시작하기.** 게임이 컵 하나(짐이 틀릴 수 없는 경우)로 시작한다면 분포는 어떻게 달라지는가? 가격의 기댓값은 얼마인가?

4 **단체.** $\{u_1 + u_2 + u_3 < 1, u_i \geq 0\}$의 부피가 $\frac{1}{6}$임을 보이고, 수학적 귀납법(induction)을 이용하여 k차원에서는 그 부피가 $\frac{1}{k!}$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number*** (Princeton University Press). 확률에서의 등장을 포함한 e의 역사를 다룬다.
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 생성함수를 다룬다.
- **Paul Nahin, *Digital Dice*** (Princeton University Press). 몬테카를로 시뮬레이션으로 푸는 확률 퍼즐 모음이다.

12.12 언제 그만 찾아야 하는가

문제

STEP I 2001, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/01-s1-q14`

도입

지원자를 한 명씩 면접하면서 그 자리에서 결정을 내려야 한다고 하자. 이 지원자를 합격시키고 멈추거나, 아니면 영원히 불합격시키고 다음 지원자를 본다. 목표는 단 한 명의 최고 지원자를 뽑는 것이다. 너무 일찍 합격시키면 더 나은 사람을 놓치기 쉽고, 너무 오래 기다리면 최고의 지원자는 이미 지나가 버렸기 쉽다. 어떻게 해야 할까?

그 답은 확률(probability)론에서 가장 유명한 결과 가운데 하나이다. 처음 37%의 지원자는 모두 불합격시키고, 그 뒤로는 앞선 모든 지원자보다 나은 첫 지원자를 합격시킨다. 이 방법은 약 37%의 확률로 성공하며, 37%는 바로 $\frac{1}{e}$이다. 이 문제에서는 기본적인 확률을 계산하고, 짝을 이루는 STEP II 2006의 문제(연습문제에 있다)에서는 이 전략의 가장 단순한 형태, 즉 첫 번째 지원자만 불합격시키는 전략을 분석한다.

시작하기 전에

생각해 보기 면접 순서가 무작위일 때, 전체에서 최고인 지원자가 처음 면접한 n명 안에 있을 확률은 얼마인가?

최고의 지원자는 N개의 자리 중 어느 자리에나 같은 확률로 있으므로, 구하는 확률은 $\frac{n}{N}$이다.

차근차근 풀기

1단계 처음 n명 중 최고가 전체 최고인 경우

처음 n명 중 최고인 사람이 전체 최고인 것은 전체 최고가 처음 n명 안에 있을 때이고, 그때뿐이다. 따라서 확률은 $\frac{n}{N}$이다. ■

2단계 최고 또는 두 번째

생각해 보기 처음 n명 중 최고인 사람이 전체에서 두 번째인 것은 두 번째 지원자가 처음 n명 안에 있고 최고의 지원자는 그 안에 없을 때이고, 그때뿐이다. 그 확률은 얼마인가?

두 번째 지원자가 처음 n명 안에 있을 확률은 $\frac{n}{N}$이다. 이 조건 아래에서 최고의 지원자는 나머지 $N-1$개의 자리 중 하나에 있고, 그중 $N-n$개가 처음 n명 뒤의 자리이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{최고 또는 두 번째}) = \frac{n}{N} + \frac{n}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}. \qquad \blacksquare$$

$N=4, n=2$이면 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$이다. 상위 두 지원자가 네 자리 중 어디에 오는지를 나열해 보면(순서를 고려한 12가지 배치가 모두 같은 확률이다), 상위 두 지원자가 모두 3번째와 4번째 자리에 오는 2가지 배치를 제외하면 처음 두 명 중 최고인 사람은 언제나 상위 두 명 중 하나이다. 따라서 확률은 $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$이다.

3단계 최적 전략

생각해 보기 전략(strategy): 처음 r명의 지원자를 불합격시키고, 그 뒤로는 앞선 r명 모두보다 나은 첫 지원자를 합격시킨다. 최고의 지원자가 $k>r$번째 자리에 있을 때, 이 전략이 그 사람을 뽑는 것은 언제인가?

이 전략이 k번째 자리에 있는 최고의 지원자를 뽑는 것은 $r+1,\dots,k-1$번째 자리의 어떤 지원자도 처음 r명 모두를 앞서지 못할 때, 즉 처음 $k-1$명 중 최고인 사람이 처음 r명 안에 있을 때이고, 그때뿐이다. 1단계에서 N을 $k-1$로 바꾸면 이 확률은 $\frac{r}{k-1}$이다. 각 자리 k의 확률은 $\frac{1}{N}$이므로

$$\mathrm{P}(\text{성공}) = \frac{1}{N}\sum_{k=r+1}^{N}\frac{r}{k-1} = \frac{r}{N}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{N-1}\right).$$

생각해 보기 N이 클 때 $x=\frac{r}{N}$이라 하자. 이 합은 근사적으로 $\ln\frac{N}{r}$이다. $x\ln\frac{1}{x}$를 최대로 하는 x의 값은 무엇인가?

성공 확률은 근사적으로 $x \ln \frac{1}{x}$이다. 미분(differentiation)하면 $x = \frac{1}{e}$일 때 $\ln \frac{1}{x} - 1 = 0$이고, 최댓값은 $\frac{1}{e} \approx 0.368$이다(그림 12.12.1).

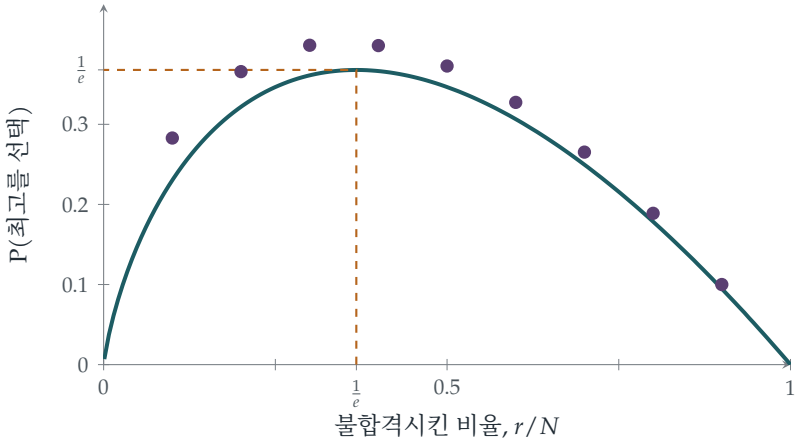


그림 12.12.1 처음 r/N 비율의 지원자를 불합격시킬 때 최고의 지원자를 뽑을 확률: 극한 곡선 $x \ln \frac{1}{x}$(청록색)와 $N = 10$일 때의 정확한 값(자주색). N이 아무리 커도, 최선의 전략은 지원자의 약 $\frac{1}{e} \approx 37\%$를 불합격시키고 약 $\frac{1}{e}$의 확률로 성공한다.

돌아보기

- **자리의 대칭성(symmetry).** 무작위 순서에서는 각 지원자가 어느 자리에나 같은 확률로 있으므로, $\frac{n}{N}$을 바로 얻었다.
- **최고의 지원자가 어디 있는지로 조건을 건다.** 전략의 성공 확률은 최고의 지원자의 자리에 대해 조건부(conditioning)로 나누어 계산했다.
- **합이 적분이 된다.** N이 클 때 조화합(harmonic sum)은 로그가 되었고, 최적화를 하여 $\frac{1}{e}$을 얻었다.

숨은 수학

최적 멈춤

비서 문제(secretary problem)는 **최적 멈춤**(*optimal stopping*)의 출발점이 된 예이다. 최적 멈춤이란 시간에 따라 들어오는 정보를 바탕으로, 기대 보상을 최대로 하도록 언제 행동할지를 결정하는 문제이다. ("r명을 불합격시키고, 그 뒤 지금까지의 최고가 나오면 뽑는다"는 전략만이 아니라) 모든 전략 가운데 이러한 문턱 규칙이 최적임을 마지막 지원자에서부터 거꾸로 따져 가는 논증으로 증명할 수 있다. 주식을 언제 팔지, 금융 옵션을 언제 행사할지, 주차 자리를 얼마나 오래 찾을지도 같은 수학이 지배한다. 놀라운 점은 극한에서 답이

N에 의존하지 않는다는 것이다. 지원자가 백 명이든 백만 명이든 $\frac{1}{e}$의 확률로 성공한다.

변형

상위 두 지원자 중 누구라도 만족한다면, 최선의 전략은 약 57%의 확률로 성공한다. 최고의 지원자를 뽑을 확률 대신 뽑힌 지원자의 기대 **순위**(expected rank)를 최적으로 하려 한다면, 최적 전략은 더 복잡해지고 기대 순위는 약 3.87로 수렴한다(Chow, Moriguti, Robbins, Samuels, 1964). 불합격시킨 지원자를 어떤 확률로 다시 부를 수 있거나, 지원자 점수의 분포를 알고 있다면("완전 정보" 문제) 답은 또 달라진다. 연습문제의 아이스크림 문제는 가장 단순한 경우이다. 한 명만 불합격시키고, 그다음에 더 나은 것이 나오면 택한다.

누가 풀었을까?

이 문제는 1950년대에 수학자들 사이에서 돌았고, 1960년에 마틴 가드너(Martin Gardner)가 "구골(googol) 게임"이라는 이름으로 널리 알렸다(종이쪽지에 수를 적으면, 상대가 한 장씩 뒤집어 보다가 가장 큰 수에서 멈춰야 한다). Thomas Ferguson의 글 "Who solved the secretary problem?"(1989)은 이 문제의 얽히고설킨 역사를 추적한다. 한 전승에 따르면 천문학자 요하네스 케플러(Johannes Kepler)는 1611년에 두 번째 아내를 고르면서 열한 명의 후보를 만났고, 결국 다섯 번째 후보에게 청혼했다고 한다.

사고 기술

전략을 매개변수로 나타내고 최적화하기

최선의 전략을 모를 때는 매개변수를 가진 자연스러운 전략의 모임을 생각하고, 성공 확률을 그 매개변수의 함수(*function*)로 계산한 뒤 최적화한다.

대학에서는 이 방법을 결정 이론(decision theory), 게임 이론(game theory), 통계학(statistics)에서 쓴다. 그 모임 안에서 최선인 전략이 전체에서도 최선임을 보이는 것은 더 어렵고 더 흥미로운 단계로, 흔히 **역진 귀납법**(*backward induction*)으로 해낸다.

더 도전하기

1 **아이스크림.** STEP II 2006, 13번 문제 (`step.maths.org/questions/06-s2-q13`)에 도전해 보라. 간단한 규칙을 쓰는 작은 비서 문제이다. 첫 번째 것을 거절하고, 그다음 그것보다 나은 첫 번째 것을 택한다.

2 **작은 N.** $N = 4$일 때 최선의 r의 값과 성공 확률을 구하라. 모든 경우를 나열하여 확인하라.

3 **최고 또는 두 번째.** 소문항 (ii)를 이용하여, "처음 n명 중 최고가 상위 두 명 중 하나이다"가 "처음 n명 중 최고가 전체 최고이다"보다 훨씬 일어나기 쉬움을 논증하라. 이것은 상위 두 명 중 하나를 뽑기 위한 전략에 대해 무엇을 시사하는가?

4 **정확한 최댓값.** $N = 10$일 때 그림에서 $r = 3$이 최적임을 확인하라. $N = 100$일 때 $r = 37$이 최적임을 보여라($r = 36, 37, 38$일 때의 성공 확률은 소수점 아래 넷째 자리까지 0.3710, 0.3710, 0.3708이다).

더 읽을거리

- **Thomas Ferguson, "Who solved the secretary problem?"**, *Statistical Science* 4 (1989). 역사와 여러 변형을 다룬다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Brian Christian & Tom Griffiths, *Algorithms to Live By*** (William Collins). 최적 멈춤을 비롯한 여러 알고리즘을 일상의 결정에 적용한다.
- **Martin Gardner, *New Mathematical Diversions*** (Mathematical Association of America). 구골 게임을 다룬다.

12.13 삼자 결투

문제

STEP II 1995, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/95-s2-q12`

도입

세 사람이 빵을 던지며 결투(duel)를 벌인다. 커스버트는 절대 빗맞히지 않고, 버티는 다섯 번에 세 번 맞히며, 가장 서툰 앨저넌은 다섯 번에 두 번밖에 맞히지 못한다. 앨저넌이 먼저 던진다. 그는 누구를 겨냥해야 할까? 놀랍게도 답은 "아무도 겨냥하지 않는다"이다. 그는 일부러 빵을 엉뚱한 곳으로 던져야 한다.

이유는 전략에 있다. 세 사람이 모두 남아 있는 동안에는 위험한 두 사수인 버티와 커스버트가 서로를 겨냥한다. 앨저넌이 둘 중 하나를 쓰러뜨리면 살아남은 쪽이 그를 노리게 된다. 일부러 빗맞히면 두 사람이 먼저 승부를 가리게 두고, 살아남은 사람에게 첫 번째로 던질 기회를 얻는다. 실제로 최선의 계획을 따르면 가장 서툰 사수가 승리할 가능성이 **가장** 높아진다. 이 "삼자 결투(truel)"는 약점이 어떻게 강점이 될 수 있는지 보여 주는, 게임 이론(game theory)에서 즐겨 쓰는 예이다.

시작하기 전에

생각해 보기 두 사람의 결투에서 퍼시가 먼저 던진다. 그가 곧바로 맞히거나, 아니면 둘 다 빗맞혀서 상황이 처음과 똑같이 되풀이된다. 퍼시가 이길 확률(probability)에 대한 방정식을 세워 보아라.

퍼시가 이길 확률을 P라 하자. 그는 확률 p로 곧바로 맞힌다. 그렇지 않으면(확률 $1-p$) 로드니가 던지는데, 로드니가 확률 $1-r$로 빗맞히면 처음 상황으로 돌아간다. 따라서 $P = p + (1-p)(1-r)P$이다.

차근차근 풀기

1단계 두 사람의 결투

이를 풀면 $P(1-(1-p)(1-r))=p$이고, $1-(1-p)(1-r)=p+r-pr$이므로

$$P=\frac{p}{p+r-pr}. \qquad \blacksquare$$

앨저넌($p=\frac{2}{5}$)과 버티($r=\frac{3}{5}$)가 결투하고 앨저넌이 먼저 던지면 이 값은 $\frac{2/5}{2/5+3/5-6/25}=\frac{10}{19}$이다. 버티가 먼저 던지면 앨저넌이 이길 확률은 $\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{10}{19}=\frac{4}{19}$이다.

2단계 앨저넌의 세 가지 선택

생각해 보기 각 경우에 누가 남고, 다음에 누가 던지는가?

(i) **앨저넌이 커스버트를 맞힌다.** 다음에는 버티가 앨저넌을 향해 던진다. 앨저넌은 버티가 먼저 던지는 결투에서 이겨야 하므로 확률은 $\frac{4}{19}$이다.

(ii) **앨저넌이 버티를 맞힌다.** 다음에는 커스버트가 앨저넌을 향해 던지는데, 커스버트는 절대 빗맞히지 않는다. 앨저넌의 승리 확률은 0이다.

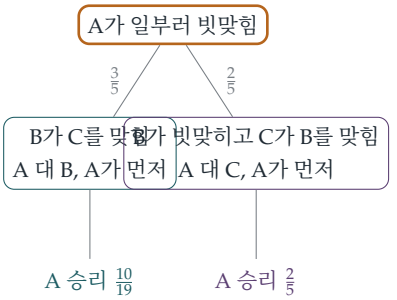
(iii) **앨저넌이 빗맞힌다.** 버티가 커스버트를 향해 던진다. 확률 $\frac{3}{5}$로 버티가 맞히면 앨저넌과 버티가 남고 앨저넌이 던질 차례이므로, 앨저넌은 확률 $\frac{10}{19}$로 이긴다. 확률 $\frac{2}{5}$로 버티가 빗맞히면 커스버트가 버티를 맞히고, 앨저넌은 단 한 번의 던지기로 커스버트와 맞선다. 그는 맞혀야만 이기므로 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 이를 모두 합하면

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{19}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{19}+\frac{4}{25}=\frac{150+76}{475}=\frac{226}{475}\approx 0.476.$$

3단계 조언

생각해 보기 앨저넌이 커스버트를 겨냥하면 맞힐 수도 있고(확률 $\frac{2}{5}$) 빗맞힐 수도 있다. 그의 전체 승리 확률은 얼마인가? 일부러 빗맞히는 경우와 비교해 보아라.

커스버트를 겨냥하면 승리 확률은 $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{19}+\frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475}=\frac{200+678}{2375}=\frac{878}{2375}\approx 0.370$이다. 버티를 겨냥하는 것은 이보다도 나쁘다. 일부러 빗맞히면 $\frac{226}{475}\approx 0.476$으로 가장 좋다. 따라서 앨저넌은 엉뚱한 곳으로 던져야 하고, 그러면 그가 이길 확률은 $\frac{226}{475}$이다. $\blacksquare$



이 계획을 따르면:
A 승리 $\frac{226}{475} \approx 0.48$
B 승리 $\frac{135}{475} \approx 0.28$
C 승리 $\frac{114}{475} \approx 0.24$

그림 12.13.1 앨저넌의 최선의 계획. 일부러 빗맞힘으로써 그는 더 강한 두 상대가 먼저 싸우게 하고, 살아남은 사람에게 첫 번째로 던질 기회를 확보한다. 가장 서툰 사수가 결국 승리할 가능성이 가장 높고, 완벽한 사수가 가장 낮다.

돌아보기

- **되풀이되는 상황은 방정식을 낳는다.** 결투는 두 번 빗맞힌 뒤 "다시 시작"되므로, 승리 확률에 대한 일차방정식(linear equation)을 얻는다.
- **상대의 대응을 생각하라.** 앨저넌의 선택 하나하나가 버티와 커스버트가 다음에 할 행동을 바꾼다.
- **아무것도 하지 않는 것까지 포함해 모든 선택을 비교하라.** 가장 나빠 보이던 수가 최선의 수였다.

숨은 수학

전략과 게임 이론

삼자 결투는 게임 이론의 핵심 아이디어를 보여 준다. 최선의 행동은 다른 참가자들이 어떻게 대응할지에 달려 있다는 것이다. 가장 위험한 상대인 커스버트를 맞히는 것이 뻔한 수이지만, 그 수는 앨저넌에게 불리한 방향으로 게임을 바꾼다. 이 문제에서는 버티와 커스버트의 전략(strategy)이 고정되어 있다(두 사람은 서로를 겨냥한다). 완전한 게임 이론적 분석에서는 각 참가자가 다른 참가자들도 똑같이 한다는 것을 알면서 자신의 전략을 스스로 고른다. 1944년 폰 노이만(John von Neumann)과 Oskar Morgenstern의 연구, 1950년 내시(John Nash)의 연구에서 시작된 이러한 분석은 오늘날 경제학, 진화생물학, 정치학의 토대를 이루고 있다.

약점이 되는 강점

삼자 결투에서 누가 이길까? 앨저넌이 최선의 계획을 따르면 승리 확률은 앨저넌이 $\frac{226}{475}$, 버티가 $\frac{135}{475}$, 커스버트가 $\frac{114}{475}$이다. 가장 뛰어난 사수가 살아남을 가능성이 가장 낮은데, 선택권이 있는 사람은 모두 그를 겨냥하기 때문이다. 같은 양상은 후보가 여럿인 선거, 기업 간 경쟁, 그리고 가장 강한 경쟁자가 첫 번째 표적이 될 수 있는 자연에서도 나타난다. 1950년대에 삼자 결투를 게임 이론에 도입한 Martin Shubik은 이를 이용해 가장 적합한 자가 반드시 살아남는가 하는 질문을 던졌다.

사고 기술

한 수 앞을 내다보라

행동을 고르기 전에, 그 행동이 다른 모든 사람의 상황을 어떻게 바꾸는지, 그리고 그들이 어떻게 대응할지 따져 보아라.

대학에서는 이것이 게임 이론의 역진 귀납법(backward induction)이 된다. 먼저 게임의 끝을 분석한 다음, 거꾸로 거슬러 올라가며 최선의 첫 수를 정하는 것이다.

더 도전하기

1 **버티와 커스버트.** 앨저넌이 일부러 빗맞힐 때, 버티가 이길 확률은 $\frac{135}{475}$이고 커스버트가 이길 확률은 $\frac{114}{475}$임을 확인하여라.

2 **더 나은 사수.** 앨저넌이 $\frac{2}{5}$ 대신 확률 a로 맞힌다면, a가 어떤 값일 때 일부러 빗맞히는 것이 여전히 그의 최선의 첫 수인가?

3 **버티는 커스버트를 겨냥해야 할까?** 앨저넌이 일부러 빗맞힌다고 할 때, 버티는 앨저넌보다 커스버트를 겨냥하는 것이 유리한가? (커스버트의 행동은 바뀌지 않는다고 가정한다.)

4 **던지는 횟수가 정해진 결투.** 각 참가자가 두 번씩만 던질 수 있는 결투에서 퍼시가 이길 확률을 구하고, 횟수 제한이 없는 결투와 비교하여라.

더 읽을거리

► **D. Marc Kilgour & Steven Brams, "The truel"**, *Mathematics Magazine* 70 (1997). 삼자 결투를 쉽게 개관한 글이다.

- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *Thinking Strategically*** (Norton). 일반 독자를 위한 게임 이론 책으로, 삼자 결투도 다룬다.
- **Ken Binmore, *Game Theory: A Very Short Introduction*** (Oxford University Press). 게임 이론 입문서이다.

12.14 혼합 전략

문제

STEP I 1989, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/89-s1-q16`

도입

가위바위보에서는 어떤 고정된 선택이든 상대에게 공략당할 수 있다. 매번 바위만 내면 상대는 곧 보를 내는 법을 익힌다. 유일하게 안전한 전략은 무작위화(randomisation)하는 것이다. 이 문제는 그보다 더 정교한 형태로, 보상이 서로 같지 않고 올바른 무작위화 방법도 분명하지 않다. 그런데 1, 2, 3을 각각 확률 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$로 고르면, 상대가 무엇을 하든 장기적으로 지지 않음을 보장할 수 있다는 사실이 밝혀진다.

이것은 게임 이론(game theory)의 출발점이 된 결과인, 1928년 존 폰 노이만(John von Neumann)의 **최소최대 정리**(*minimax theorem*)를 처음 엿보는 것이다. 이 정리에 따르면, 한 사람의 이득이 곧 다른 사람의 손실인 모든 2인 게임에서, 완벽하게 플레이하는 상대에 맞서 가능한 최선의 결과를 보장하는 무작위 전략이 각 플레이어에게 존재한다.

시작하기 전에

생각해 보기 두 사람이 말하는 수의 각 쌍에 대하여 B의 상금을 나타내는 표를 만들어 보라(B의 수는 세로로, A의 수는 가로로 놓는다).

규칙을 차례로 적용하면(예를 들어 B가 1을, A가 3을 말하면 두 수의 차가 2이므로 더 작은 수를 말한 B가 £2를 낸다) 다음 표를 얻는다.

B \ A	1	2	3
1	0	+1	−2
2	−1	0	+1
3	+2	−1	0

이 표는 **반대칭**(*antisymmetric*)이다(두 플레이어를 바꾸면 부호가 바뀐다). 따라서 어느 플레이어도 처음부터 유리하지 않다는 의미에서 이 게임은 공정하다.

차근차근 풀기

1단계 고정된 선택에 맞서기

A가 항상 1을 말하면, B는 3을 말하여 매 판 £2를 따야 한다. A가 항상 2를 말하면, B는 1을 말하여 £1을 딴다. A가 항상 3을 말하면, B는 2를 말하여 £1을 딴다. 어떤 고정된 선택이든 공략당할 수 있다.

2단계 균등한 무작위 선택에 맞서기

생각해 보기 A가 균등하게 무작위로 수를 고른다면, B가 j를 말할 때 B의 기대 이득(expected gain)은 얼마인가? (표의 j번째 행의 평균을 구하라.)

행의 평균은 $j=1$일 때 $\frac{1}{3}(0+1-2)=-\frac{1}{3}$, $j=2$일 때 0, $j=3$일 때 $\frac{1}{3}(2-1+0)=\frac{1}{3}$이다. 따라서 한 판당 B의 기대 상금은

$$-\tfrac{1}{3}b_1+0\cdot b_2+\tfrac{1}{3}b_3,$$

이고, 이것은 $b_3=1$일 때 최대가 된다. 즉 항상 3을 말하면 한 판에 평균 $\frac{1}{3}$파운드를 딴다. 균등한 무작위화는 A를 지켜 주지 못한다.

3단계 일반적인 경우

생각해 보기 이제 A가 확률 a_j로 j를 말한다고 하자. B의 기대 상금을 A가 말하는 수에 따라 묶어 보라. a_1의 계수(가중치 b_j를 둔 1열의 평균)는 무엇인가?

표의 열을 위에서 아래로 읽으면

$$\text{B의 기대 상금} = (-b_2+2b_3)a_1+(b_1-b_3)a_2+(-2b_1+b_2)a_3,$$

이므로 $X=-b_2+2b_3$, $Y=b_1-b_3$, $Z=-2b_1+b_2$이다.

생각해 보기 세 값을 모두 0으로 만들 수 있는가? (방정식은 세 개지만 서로 독립이 아니다. 왜 그런가?)

이 방정식들은 독립이 아니다. 항등적으로 $X+2Y+Z=0$이기 때문이다(확인해 보라). 따라서 $Y=0$에서 $b_1=b_3$을, $X=0$에서 $b_2=2b_3$을 얻으면 $Z=0$도 저절로 성립한다.

$b_1 + b_2 + b_3 = 1$과 함께 풀면

$$b_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad b_3 = \tfrac{1}{4},$$

이고, 이때 $X = Y = Z = 0$이다. 그러면 a_j가 무엇이든 B의 기대 상금은 0이고, B는 장기적으로 아무것도 잃지 않는다. ■

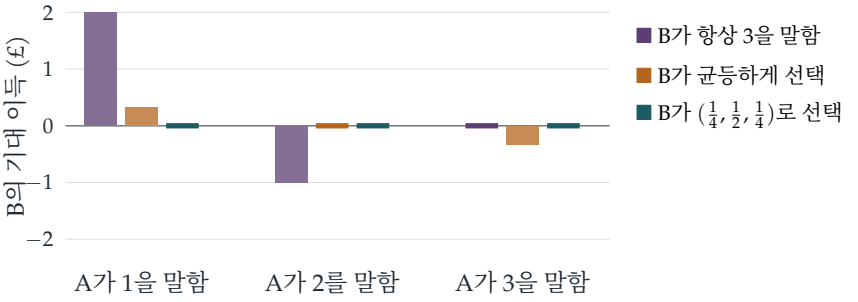


그림 12.14.1 B의 세 가지 전략에 대하여, A의 각 선택에 맞선 B의 기대 이득. 항상 3을 말하면 A의 1에는 이기지만 A의 2에는 진다. 균등한 선택은 A의 3에 진다. 전략 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$는 A가 무엇을 하든 정확히 0(가는 막대로 표시)을 주므로 결코 공략당하지 않는다.

돌아보기

- **보수표(payoff table)를 만들라.** 모든 추론은 3×3 행렬의 행과 열에 관한 것이었다.
- **순수 전략(pure strategy)은 공략당할 수 있다.** 어떤 고정된 선택에 대해서도, 심지어 균등한 무작위 선택에 대해서도 상대에게는 이익이 되는 대응이 있다.
- **균등하게 맞추라.** 안전한 전략은 상대가 어느 쪽을 골라도 차이가 없게 만든다. 즉 A의 모든 선택이 같은 기대 결과를 준다.

숨은 수학

최소최대 정리

보수 행렬 M으로 주어지는 **2인 영합**(*zero-sum*) 게임에서 B가 확률 $\mathbf{b}$를, A가 확률 $\mathbf{a}$를 고르면 B의 기대 상금은 $\mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}$이다. 폰 노이만의 최소최대 정리는

$$\max_{\mathbf{b}} \min_{\mathbf{a}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a} = \min_{\mathbf{a}} \max_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}.$$

임을 말한다. 말로 하면, B가 무작위 전략을 미리 공표하여 보장할 수 있는 금액은, A가 자신의 전략을 공표하여 B를 묶어 둘 수 있는 금액과 같다. 이 공통의 값을 게임의 **값**(*value*)이라

한다. 여기서는 반대칭성 때문에 값이 0이고, 전략 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$는 두 플레이어 모두에게 최적이다. 이 정리는 선형대수와 볼록성(convexity)을 이용하여 증명하며(선형 계획법(linear programming)의 쌍대 정리(duality theorem)와 동치이다), 이를 여러 플레이어로 일반화한 내시 균형(*Nash equilibrium*)으로 존 내시(John Nash)는 노벨 경제학상을 받았다.

왜 무작위화하는가?

여기서 무작위성은 운의 문제가 아니라 정보의 문제이다. B의 선택을 예측할 수 있다면 A는 그것을 공략할 수 있다. B는 올바른 확률로 무작위화함으로써 자신의 선택을 예측할 수 없게 만들 **뿐 아니라** 어떤 예측도 도움이 되지 않도록 한다. 실제 예로는 축구의 페널티킥이 있다. 프로 선수들을 연구한 결과, 키커와 골키퍼가 게임 이론의 최적값에 가까운 비율로 왼쪽과 오른쪽을 무작위로 선택한다는 사실이 밝혀졌다. 테니스의 서브도 또 다른 예이다.

폰 노이만의 1928년 논문

존 폰 노이만은 1928년 논문 "On the theory of games of strategy"(전략 게임 이론에 관하여)에서 최소최대 정리를 증명하였다. 이 연구의 동기는 포커였는데, 포커에서 블러핑은 무작위화의 한 형태이다. 1944년에 그는 경제학자 오스카어 모르겐슈테른(Oskar Morgenstern)과 함께 *Theory of Games and Economic Behavior*(게임 이론과 경제 행동)를 펴내어 게임 이론을 하나의 학문 분야로 세웠다. 폰 노이만은 훗날, 최소최대 정리를 핵심 결과로 여겼으며 이 정리가 없었다면 출판할 가치가 있는 게임 이론은 없었을 것이라고 회고하였다.

사고 기술

무작위화로 상대의 이점을 없애라

어떤 고정된 선택이든 공략당할 수 있을 때에는, 상대가 자신의 선택지들 사이에서 차이를 느끼지 못하게 만드는 확률로 무작위로 선택하라.

대학에서는 게임 이론, 선형 계획법, 알고리즘 이론이 모두 이 아이디어를 사용한다. 예를 들어 무작위 알고리즘(randomised algorithm)은 어떤 적대자도 예측할 수 없는 무작위 선택을 함으로써 최악의 입력으로부터 스스로를 보호한다.

더 도전하기

1 **A의 최선의 대응.** B가 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$를 사용하면 A의 모든 전략에 대해 기대 상금이 0임을 보여라. B가 대신 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$을 사용하면 A의 최선의 대응을 구하라.

2 **가위바위보.** 가위바위보의 보수 행렬을 쓰고 최적 전략을 구하라. 여기서는 왜 균등 전략이 최적이고, 이 문제에서는 그렇지 않은가?

3 **유일성.** 지지 않음을 보장하는 B의 전략은 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ **하나뿐**임을 보여라. (**힌트:** 그 전략은 X, Y, Z를 모두 음이 아니게 만들어야 한다. $X + 2Y + Z = 0$을 이용하라.)

4 **변형된 게임.** 차가 2일 때의 벌금이 £2가 아니라 £3이라면 최적 전략을 구하라.

더 읽을거리

- **Ken Binmore, *Playing for Real*** (Oxford University Press). 철저하면서도 친절한 게임 이론 입문서.
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *The Art of Strategy*** (Norton). 스포츠와 비즈니스의 예를 곁들인 게임 이론.
- **William Poundstone, *Prisoner's Dilemma*** (Anchor). 폰 노이만, 게임 이론, 그리고 냉전.

12.15 멸종인가 폭발인가

문제

STEP II 2003, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/03-s2-q12`

도입

1873년 골턴(Francis Galton)은 *Educational Times*에 다음과 같은 질문을 실었다. 왜 귀족 가문의 성(姓)은 그렇게 자주 사라지는가? 각 남자는 무작위 수의 아들을 두고, 아들 각각이 성을 물려준다. 각 남자가 평균적으로 한 명보다 많은 아들을 둔다고 해도, 그 성은 영원히 살아남을까? 이 질문에서 **분지 과정**(branching process)의 이론이 시작되었고, 오늘날 이 이론은 핵 연쇄 반응, 전염병의 확산, 세포 집단의 성장, 돌연변이의 생존을 모형화하는 데 쓰인다.

이 문제는 가장 단순한 모형을 다룬다. 각 입자는 0개, 1개 또는 2개의 입자로 갈라진다. 개체 수의 기댓값(expectation)은 기하급수적으로 늘어나거나 줄어든다. 그러나 기댓값이 이 이야기의 전부는 아니다. 개체 수의 기댓값이 폭발적으로 늘어날 때에도 혈통이 완전히 끊어질 확률은 양수이며, 아름다운 고정점(fixed point) 논증으로 이 확률을 구할 수 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 어떤 단계에서 입자가 두 개 있다면, 다음 단계의 입자 수는 어떤 분포(distribution)를 따르는가?

두 입자는 각각 독립적으로(independently) $\mathrm{B}(2, p)$를 따르는 수만큼 자손을 낳으므로, 그 합은 $\mathrm{B}(4, p)$를 따른다. 즉 각각 확률 p로 성공하는 독립적인 "기회"가 네 번 있는 것이다.

차근차근 풀기

1단계 둘, 그리고 다시 둘

$\mathrm{P}(X_1 = 2) = p^2$이고, 이어서 $\mathrm{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2) = \binom{4}{2}p^2q^2 = 6p^2q^2$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(X_1 = 2, X_2 = 2) = 6p^4q^2. \qquad \blacksquare$$

2단계 거꾸로 추론하기

> **생각해 보기** $X_2 = 2$가 일어나는 경우는 몇 가지인가? (X_1은 어떤 값일 수 있는가?)

$X_2 = 2$가 되려면 $X_1 = 1$(확률 $2pq$)이고 그 뒤 자손이 2개(p^2)이거나, $X_1 = 2$이고 그 뒤 $\mathrm{B}(4, p)$에서 2가 나와야 한다. ($X_1 = 0$이면 아무것도 남지 않는다.) 따라서 $\mathrm{P}(X_2 = 2) = 2p^3q + 6p^4q^2$이고,

$$\mathrm{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2) = \frac{6p^4q^2}{2p^3q + 6p^4q^2} = \frac{3pq}{1 + 3pq}.$$

이 값을 $\frac{9}{25}$와 같다고 놓으면 $75pq = 9 + 27pq$이므로 $pq = \frac{3}{16}$, 즉 $p(1-p) = \frac{3}{16}$이고, $p = \frac{1}{4}$ 또는 $p = \frac{3}{4}$를 얻는다. $\blacksquare$

3단계 개체 수의 기댓값

> **생각해 보기** $n-1$단계에 입자가 k개 있다면, n단계 입자 수의 기댓값은 얼마인가? 그다음 k에 대해 평균을 내어 보자.

각 입자는 평균 $\mathrm{E}(X) = 2p$개의 자손을 낳으므로, 입자 k개는 평균 $2pk$개의 자손을 낳는다. 즉 $\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1} = k) = 2pk$이다. k에 대해 평균을 내면 $\mathrm{E}(X_n) = 2p\,\mathrm{E}(X_{n-1})$이다. $\mathrm{E}(X_0) = 1$이므로

$$\mathrm{E}(X_n) = (2p)^n.$$

$p = \frac{1}{4}$이면 $(2p)^n = 2^{-n} \to 0$이고, $p = \frac{3}{4}$이면 $(2p)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$이다. $\blacksquare$

돌아보기

- **독립인 이항분포(binomial distribution)의 합.** 각각 $\mathrm{B}(2, p)$를 따르는 입자 k개의 자손 수를 모두 합하면 $\mathrm{B}(2k, p)$를 따른다.
- **시간을 거슬러 적용한 베이즈 정리(Bayes' theorem).** $\mathrm{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2)$는 나중의 관측으로부터 이전 상태를 거꾸로 추론한 것이다.

▶ **조건부 기댓값(conditional expectation).** 바로 앞 세대에 대해 조건을 걸었더니 기댓값이 기하수열(geometric sequence)이 되었다.

숨은 수학

멸종 확률

$p = \frac{3}{4}$일 때 개체 수의 기댓값은 한없이 커진다. 그렇다면 개체군은 살아남는가? 꼭 그렇지는 않다. 첫 입자가 자손을 하나도 낳지 않으면(확률 $q^2 = \frac{1}{16}$) 혈통은 곧바로 끊긴다. 결국 멸종할 확률(extinction probability)을 e라 하자. 첫 입자가 자손 k개를 낳으면, 그 자손들 각각의 혈통은 독립적으로 확률 e로 끊어지므로

$$e = q^2 + 2pq\,e + p^2e^2 = (q + pe)^2 = \mathrm{G}(e),$$

이다. 여기서 $\mathrm{G}(s) = (q + ps)^2$은 자손 수의 **확률생성함수**(probability generating function)이다. 멸종 확률은 G의 고정점이며, 사실은 음이 아닌 고정점 가운데 **가장 작은** 것이다. $p = \frac{3}{4}$일 때 $(1 + 3e)^2 = 16e$에서 $9e^2 - 10e + 1 = 0$이므로 $e = \frac{1}{9}$ 또는 1이고, 멸종 확률은 $\frac{1}{9}$이다. $p = \frac{1}{4}$일 때 $[0, 1]$에 있는 고정점은 $e = 1$뿐이므로, 멸종은 확실하다(그림 12.15.1).

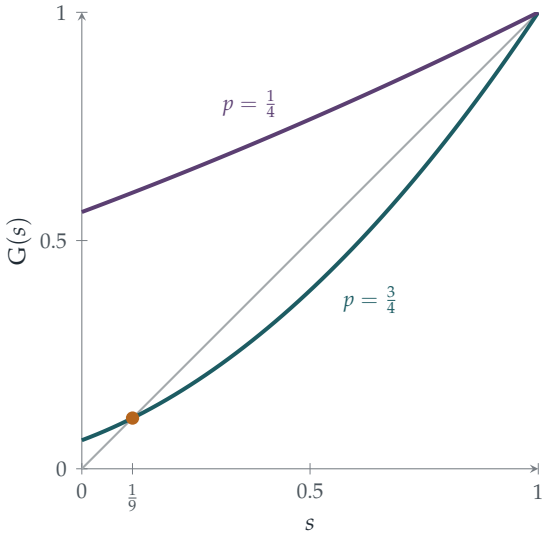


그림 12.15.1 자손 수의 생성함수 $\mathrm{G}(s) = (q + ps)^2$과 직선 $y = s$. 멸종 확률은 두 그래프가 만나는 가장 작은 점이다. $p = \frac{1}{4}$(자주색, 평균 $\frac{1}{2}$)이면 그 점은 $s = 1$이므로 멸종은 확실하다. $p = \frac{3}{4}$(청록색, 평균 $\frac{3}{2}$)이면 그 점은 $s = \frac{1}{9}$(호박색)이므로 개체군은 확률 $\frac{8}{9}$로 영원히 살아남는다.

임계 문턱

일반적으로 분지 과정은 자손 수의 평균이 1보다 작으면 확실히 멸종하고, 평균이 1과 같을 때에도 모든 개체가 정확히 한 명의 자손을 두는 자명한 경우(이때 혈통은 한 번에 한 명씩 그냥 영원히 이어진다)를 제외하면 확실히 멸종한다. 평균이 1보다 크면 양의 확률로 살아남는다. 자손 수의 평균은 역학(疫學)에서 말하는 **재생산수**(reproduction number) R이다. $R > 1$인 전염병은 크게 번질 수 있지만, 그런 경우에도 초기 발병이 우연히 사그라들 수 있으며, 그 확률은 바로 위의 고정점 방정식으로 주어진다. 핵물리학에서 연쇄 반응은 각 핵분열이 평균적으로 정확히 한 번의 핵분열을 더 일으킬 때 **임계**(critical) 상태라고 하며, 원자로를 운전하는 기술은 바로 그 상태를 유지하는 것이다.

골턴, 왓슨, 비에네메

골턴의 질문에는 1874년 Henry William Watson 목사가 답했지만, 그 답은 부분적으로 틀렸다. 그는 고정점 방정식을 찾아냈지만 두 번째 근을 놓치는 바람에 모든 성은 결국 사라진다고 결론지었다. 사실 올바른 분석은 이미 1845년에 프랑스의 통계학자 비에네메(Irénée-Jules Bienaymé)가 내놓았으나, 그의 연구는 1970년대까지 잊혀 있었다. 이 모형은 오늘날 **골턴–왓슨 과정**(Galton–Watson process)(때로는 비에네메–골턴–왓슨 과정)이라 불리며, 확률 과정을 다루는 모든 강의에서 핵심적인 예로 등장한다.

사고 기술

첫 세대에 대해 조건을 걸어라

스스로를 새롭게 반복하는 과정(각 자손이 전체 과정의 독립적인 복사본을 새로 시작하는 과정)은 첫 단계에 대해 조건을 걸어 얻은 방정식을 만족한다.

방정식 $e = \mathrm{G}(e)$는 고정점 문제이며, Section 2.2와 Section 8.7에서 만난 것과 같은 종류이다. 대학에서는 생성함수와 고정점이 분지 과정, 무작위 트리, 무작위 네트워크를 다루는 주요 도구이다.

더 도전하기

1 **일반적인 경우의 멸종.** 자손 수의 분포가 $\mathrm{B}(2, p)$일 때, 멸종 확률이 $p \le \frac{1}{2}$이면 1이고 $p > \frac{1}{2}$이면 $\left(\frac{q}{p}\right)^2$임을 보여라.

2 **분산.** $\mathrm{Var}(X_n)$이 $\mathrm{Var}(X_n) = (2p)^2\mathrm{Var}(X_{n-1}) + 2pq\,\mathrm{E}(X_{n-1})$을 만족함을 보이고, $p = \frac{1}{2}$일 때 분산(variance)을 구하여라.

3 **n세대까지의 멸종.** $e_n = \mathrm{P}(X_n = 0)$이라 하자. $e_n = \mathrm{G}(e_{n-1})$임을 보이고, $p = \frac{3}{4}$일 때 e_1, e_2, e_3을 계산하여라. 이 값들은 $\frac{1}{9}$에 가까워지는가?

4 **성씨.** 각 남자가 아들을 0명, 1명, 2명, 3명 둘 확률이 각각 $\frac{1}{4}$라면, 그의 성이 결국 사라질 확률은 얼마인가?

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes*** (Oxford University Press). 분지 과정을 다루는 절.
- **Adam Kucharski, *The Rules of Contagion*** (Profile). 일반 독자를 위한 재생산수와 감염병 발생 이야기.
- **David Kendall, "Branching processes since 1873"**, *Journal of the London Mathematical Society* 41 (1966). 비에네메를 포함한 분지 과정의 역사.

12.16 앞으로 보고 거꾸로 보는 마르코프 연쇄

문제

STEP III 1996, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/96-s3-q12`

도입

엑스(Ecks) 교수의 정리에는 일정한 규칙이 있다. 다음에 무엇을 증명할지는 바로 직전에 무엇을 증명했는지에만 달려 있다. 미래가 현재에는 의존하지만 과거에는 의존하지 않는 과정을 **마르코프 연쇄**(Markov chain)라고 하며, 마르코프 연쇄는 어디에나 있다. 날씨 모형에도, 보드게임 뱀과 사다리(Snakes and Ladders)에도, DNA 모형에도, 구글의 초기 페이지랭크(PageRank) 알고리즘에도, 그리고 통계학자들이 복잡한 확률분포를 시뮬레이션할 때 쓰는 방법에도 있다.

이 문제는 장기적으로 정리의 유형이 어떤 비율로 섞이는지, 즉 **정상분포**(stationary distribution)를 구한다. 장기적으로 엑스 교수의 정리 여섯 개 중 하나는 새롭고 옳은 정리이고, 절반은 거짓이다. 이어서 문제는 연쇄를 시간을 거슬러 거꾸로 돌려 보고, 오늘의 정리가 주어졌을 때 어제의 정리는 무엇이었는지를 묻는다.

시작하기 전에

생각해 보기 "각 행의 합이 1이다"라는 조건은 무슨 뜻인가? 각 열의 합도 1인가?

i행은 현재 유형이 i일 때 다음 유형이 될 확률들을 나열한 것이다. 세 유형 중 하나는 반드시 일어나므로 각 행의 합은 1이다. 열은 그럴 필요가 없다. 둘째 열의 합은 정확히 1이지만, 첫째 열의 합은 0.6이고 셋째 열의 합은 1.4이다.

차근차근 풀기

1단계 한 단계

현재 정리의 유형 i에 대해 조건을 걸고 전확률 법칙(law of total probability)을 쓰면

$$b_j = \sum_i \mathrm{P}(\text{현재}i)\,\mathrm{P}(\text{다음}j \mid \text{현재}i) = a_1 p_{1j} + a_2 p_{2j} + a_3 p_{3j}. \qquad \blacksquare$$

행렬로 쓰면 행벡터(row vector)로 $\mathbf{b} = \mathbf{a}P$이다.

2단계 정상분포

> **생각해 보기** $a_1 + a_2 + a_3 = 1$이면서 $\mathbf{a} = \mathbf{a}P$인 것을 찾고자 한다. 방정식을 모두 써 보아라. 어느 것이 가장 간단한가?

방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.3a_1 + 0.2a_2 + 0.1a_3, \\ a_2 &= 0.3a_1 + 0.4a_2 + 0.3a_3, \\ a_3 &= 0.4a_1 + 0.4a_2 + 0.6a_3. \end{aligned}$$

(이 방정식들은 독립이 아니다. 모두 더하면 양변이 모두 $a_1 + a_2 + a_3$이 된다.) 둘째 식에서 $0.6a_2 = 0.3(a_1 + a_3) = 0.3(1 - a_2)$이므로 $a_2 = \frac{1}{3}$이다. 첫째 식에서 $7a_1 = 2a_2 + a_3 = \frac{2}{3} + a_3$이고 $a_1 + a_3 = \frac{2}{3}$이므로 $8a_1 = \frac{4}{3}$, $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{2}$이다.

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right). \qquad \blacksquare$$

3단계 연쇄를 거꾸로 돌리기

> **생각해 보기** $q_{ij} = \mathrm{P}(\text{직전}i \mid \text{현재}j)$이다. 직전 정리와 현재 정리 모두에 정상분포를 적용하여 베이즈 정리(Bayes' theorem)를 써라.

베이즈 정리에 의해

$$q_{ij} = \frac{\mathrm{P}(\text{직전}i)\,\mathrm{P}(\text{현재}j \mid \text{직전}i)}{\mathrm{P}(\text{현재}j)} = \frac{a_i p_{ij}}{a_j}.$$

예를 들어 $q_{11} = \frac{\frac{1}{6}\times 0.3}{\frac{1}{6}} = 0.3$이고 $q_{21} = \frac{\frac{1}{3}\times 0.2}{\frac{1}{6}} = 0.4$이다. 모두 모으면 ($i$는 행, j는 열을 나타낸다)

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.15 & \frac{2}{15} \\ 0.4 & 0.4 & \frac{4}{15} \\ 0.3 & 0.45 & 0.6 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

이번에는 각 열의 합이 1이다. j열이 직전 정리가 될 수 있는 유형들을 나열하기 때문이다.

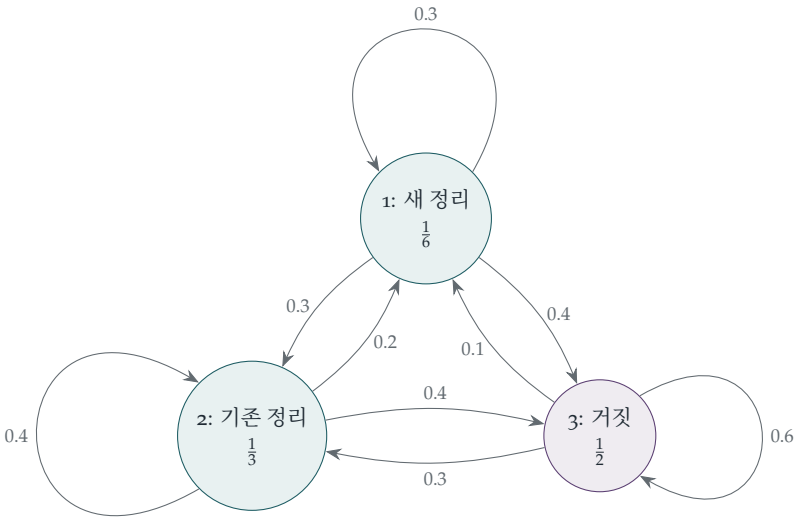


그림 12.16.1 마르코프 연쇄로 나타낸 엑스 교수의 정리. 화살표는 다음 정리가 각 유형일 확률을 나타낸다. 원 안의 분수는 정상분포이다. 장기적으로 정리 여섯 개 중 하나는 새롭고 옳으며, 세 개 중 하나는 이미 알려져 있고, 절반은 거짓이다.

돌아보기

- **행렬로 본 전확률 법칙.** 연쇄의 한 단계는 행벡터에 행렬 P를 곱하는 것이다.
- **정상성은 고유벡터이다.** $\mathbf{a} = \mathbf{a}P$는 $\mathbf{a}$가 고윳값(eigenvalue) 1에 대한 P의 좌고유벡터(left eigenvector)라는 뜻이다.
- **베이즈 정리로 거꾸로 돌리기.** 거꾸로 가는 확률들은 순방향 행렬과 정상분포로부터 만들어지는 또 하나의 확률행렬(stochastic matrix)을 이룬다.

숨은 수학

평형으로의 수렴

엑스 교수가 어떤 정리에서 출발하든, n개의 정리를 더 증명한 뒤 유형의 분포는 $\mathbf{a}_0 P^n$이다. 이 연쇄처럼 모든 유형 다음에 모든 유형이 올 수 있는 연쇄에서는, 출발점에 관계없이 P^n이 모든 행이 정상분포 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$와 같은 행렬로 수렴(converge)한다. 수렴 속도는 P의 나머지

고윳값들(여기서는 0.2와 0.1)이 결정하며, 이들의 거듭제곱은 기하급수적으로 줄어든다. 단 몇 개의 정리만 지나도 엑스 교수의 과거는 잊혀진다. 마르코프 연쇄에 대한 이 **에르고딕 정리**(ergodic theorem)는 대학 2학년 확률론 과정의 핵심 결과이며, 마르코프 연쇄 몬테카를로(Markov chain Monte Carlo) 방법이 작동하는 근거이다. 복잡한 분포에서 표본을 뽑으려면, 그 분포를 정상분포로 갖는 마르코프 연쇄를 설계하여 오랫동안 돌리면 된다.

가역성

거꾸로 가는 연쇄 (q_{ij})는 순방향 연쇄 (p_{ij})와 다르다. 엑스 교수의 정리를 오랫동안 기록한 것을 보면 시간의 방향을 알아낼 수 있다는 뜻이다. 거꾸로 가는 연쇄와 순방향 연쇄가 일치하는 연쇄, 즉 모든 i, j에 대해 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$인 연쇄를 **가역적**(reversible)이라고 한다. 네트워크 위의 무작위 행보(random walk)와 열평형 상태에 있는 물리계의 모형이 여기에 속한다. 가역성은 정상분포를 쉽게 찾게 해 주므로 강력한 성질이다.

마르코프와 푸시킨

안드레이 마르코프(Andrey Markov)는 1906년에 자신의 연쇄를 도입했는데, 큰 수의 법칙(law of large numbers)에 독립성(independence)이 꼭 필요하지는 않다는 것을 보이려는 것이 한 가지 이유였다. 이는 독립성이 필요하다고 주장한 수학자 Pavel Nekrasov와의 논쟁에서 나온 것이다. 1913년에 마르코프는 이 아이디어를 푸시킨(Pushkin)의 운문 소설 **예브게니 오네긴**(Eugene Onegin)의 처음 20 000개 글자에 적용했다. 그는 각 글자를 모음과 자음으로 분류하고, 각 글자의 유형이 바로 앞 글자의 유형에 의존하며 그 방식이 두 상태 연쇄로 잘 설명된다는 것을 보였다. 이것은 최초의 텍스트 통계 분석이었으며, 오늘날 모든 예측 입력 시스템의 조상이다.

사고 기술

확률은 벡터로, 전이는 행렬로

어떤 계가 고정된 확률로 상태 사이를 옮겨 다닐 때, 분포는 벡터로, 전이는 행렬로 써라. 그러면 장기적인 거동은 고유벡터에 관한 문제가 된다.

대학에서는 이를 통해 7장의 선형대수가 확률론으로 들어온다. 페론–프로베니우스 정리(Perron–Frobenius theorem)는 정상분포의 존재를 보장하고, 나머지 고윳값들은 그 분포에 얼마나 빨리 도달하는지를 잰다.

더 도전하기

1 **토끼 굴.** STEP III 2003, 13번 문제 (`step.maths.org/questions/03-s3-q13`)에 도전해 보아라. 각 꼭짓점에 출구가 있는 정사각형의 꼭짓점 위를 움직이는 무작위 행보를 첫 단계 방정식으로 푸는 문제이다.

2 **두 단계.** 엑스 교수의 마지막 정리가 새롭고 옳은 정리였다면, 그다음다음 정리가 세 유형 각각일 확률을 구하여라.

3 **고윳값.** P의 고윳값이 1, 0.2, 0.1임을 보여라.

4 **가역적인가?** 엑스 교수의 연쇄에 대해 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$가 성립하는지 확인하여라. 그 답은 무엇을 말해 주는가?

더 읽을거리

- **James Norris, *Markov Chains*** (Cambridge University Press). 학부 과정의 표준 교재이다.
- **Olle Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*** (Cambridge University Press). 짧으며, 마르코프 연쇄 몬테카를로를 잘 다룬다.
- **Brian Hayes, "First links in the Markov chain"**, *American Scientist* 101 (2013). 마르코프의 푸시킨 분석을 다시 들려준다.

12.17 바나흐의 성냥갑

문제

STEP II 1992, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/92-s2-q16`

도입

전해지는 이야기에 따르면 수학자 바나흐(Stefan Banach)는 담배를 몹시 많이 피웠는데, 양쪽 주머니에 성냥갑을 하나씩 넣고 다녔다. 성냥이 필요할 때마다 그는 주머니 하나를 무작위로 골랐다. 어느 날 그는 성냥갑 하나가 비어 있음을 알게 되었다. 다른 성냥갑에는 성냥이 몇 개 남아 있었을까? 이것이 바로 슈타인하우스(Hugo Steinhaus)가 바나흐를 기리며 고안한 **바나흐의 성냥갑 문제**이며, 이 문제는 성냥 대신 사탕이 등장하는 택시 운전사 버전이다.

미묘한 점은 "발견한다"라는 말에 있다. 운전사는 봉지에서 마지막 사탕을 꺼낼 때 봉지가 비었다는 것을 알아채지 못하고, 다음에 그 봉지에 손을 뻗을 때 비로소 알게 된다. 따라서 문제의 사건은 다음과 같다. 토피 봉지에 손을 뻗었는데, n개의 토피가 이미 모두 없어진 상태이다. 이런 일이 N번째 손을 뻗을 때 일어나는 경우의 수를 세는 것은 이항분포(binomial distribution)의 깔끔한 연습 문제이며, 바나흐 문제의 답에는 놀라운 특징이 있다. 다른 상자에 남은 성냥의 수로 가장 가능성이 높은 값은 0이다(1과 공동 1위이다).

시작하기 전에

생각해 보기 운전사가 N번째로 손을 뻗을 때 토피가 다 떨어졌음을 발견하려면, N번째에는 어느 봉지에 손을 뻗어야 하는가? 그 이전의 $N-1$번에는 무엇이 들어 있어야 하는가?

N번째에는 토피 봉지에 손을 뻗어야 하고, 그 이전의 $N-1$번에서는 정확히 n개의 토피(전부)와 $N-1-n$개의 박하사탕을 꺼냈어야 한다. 또한 그보다 먼저 박하사탕 봉지가 빈 것

을 발견하지 않았어야 한다.

차근차근 풀기

1단계 토피가 다 떨어졌음을 발견하기

> **생각해 보기** 처음 $N-1$번의 시행은 어떤 순서로 일어날 수 있는가? $N-1-n$에 대한 어떤 조건이 있어야 박하사탕 봉지가 빈 것을 한 번도 발견하지 않게 되는가?

토피를 꺼낸 n번은 처음 $N-1$번 가운데 어느 n번이어도 된다. 박하사탕을 최대 m개 꺼냈다면, 즉 $N-1-n \le m$이면, 박하사탕이 떨어진 뒤에 박하사탕 봉지에 손을 뻗은 적은 없다. 따라서 $n+1 \le N \le n+m+1$일 때

$$\mathrm{P}(T_N) = \binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n},$$

이다. 여기서 T_N은 "N번째로 손을 뻗을 때 토피가 다 떨어졌음을 발견한다"는 사건이다(인수 p^{n+1}에는 N번째 시행 자체가 포함되어 있다).

2단계 박하사탕이 다 떨어졌음을 발견하기

역할을 바꾸어 같은 논증을 하면, $m+1 \le N \le n+m+1$일 때

$$\mathrm{P}(M_N) = \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}.$$

3단계 조건부 확률

> **생각해 보기** N번째 시행에서 발견이 일어났다는 사실이 주어졌다. 그것이 토피였을 확률은 얼마인가?

사건 T_N과 M_N은 배반 사건(exclusive events)이므로

$$\mathrm{P}(\text{토피} \mid \text{발견 시점} N) = \frac{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n}}{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n} + \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}},$$

이다. 단, 이항계수(binomial coefficient)는 위의 범위 밖에서는 0으로 본다. ($N \le m$이면 토피만 떨어졌을 수 있으므로 확률은 1이다. 마찬가지로 $N \le n$이지만 $N > m$이면 확률은 0이다.) ■

잠깐, 직접 해 보기 $n = m$이고 $p = q = \frac{1}{2}$일 때 이 공식을 확인해 보아라. 대칭성에 의해 가능한 모든 N에 대해 답은 $\frac{1}{2}$이어야 한다. 실제로 그러한가?

돌아보기

- **사건을 정확히 읽는다.** "발견한다"는 마지막 사탕을 꺼내는 것이 아니라 빈 봉지에 손을 뻗는 것을 뜻했다.
- **마지막 단계를 고정하고 나머지를 센다.** N번째 시행을 고정했고, 처음 $N-1$번은 어떤 순서여도 되므로 이항계수가 나왔다.
- **경계를 확인한다.** 제약 조건 $N-1-n \le m$과 $N-1-m \le n$이 불가능한 진행 과정을 걸러 냈다.

숨은 수학

바나흐의 성냥갑

바나흐의 버전에서는 각 성냥갑에 처음에 성냥이 n개씩 들어 있고, 두 주머니가 선택될 가능성은 같다. 그가 처음으로 빈 성냥갑을 발견했을 때 다른 성냥갑에 남은 성냥의 수를 K라 하자. $K = k$이려면, 빈 성냥갑으로 한 번 더 손을 뻗기 전에 빈 성냥갑에서 n개, 다른 성냥갑에서 $n-k$개를 어떤 순서로든 꺼냈어야 한다. 또한 어느 성냥갑이든 빈 쪽이 될 수 있다. 따라서

$$\mathrm{P}(K=k) = 2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1} = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

이 확률들은 k가 커질수록 감소하는데, 다만 $\mathrm{P}(K=0) = \mathrm{P}(K=1)$이다(그림 12.17.1). 남은 성냥 수의 기댓값(expected value)은 약 $2\sqrt{n/\pi} - 1$이다. 각 성냥갑에 성냥이 50개씩 있으면 약 7이다. 여기서 $\sqrt{n}$은 $2n$번의 무작위 선택 뒤 두 성냥갑 사이에 생기는 불균형의 전형적인 크기로, 생일 문제(Section 9.9)와 무작위 행보(random walk)에서 나오는 것과 같은 제곱근 법칙이다.

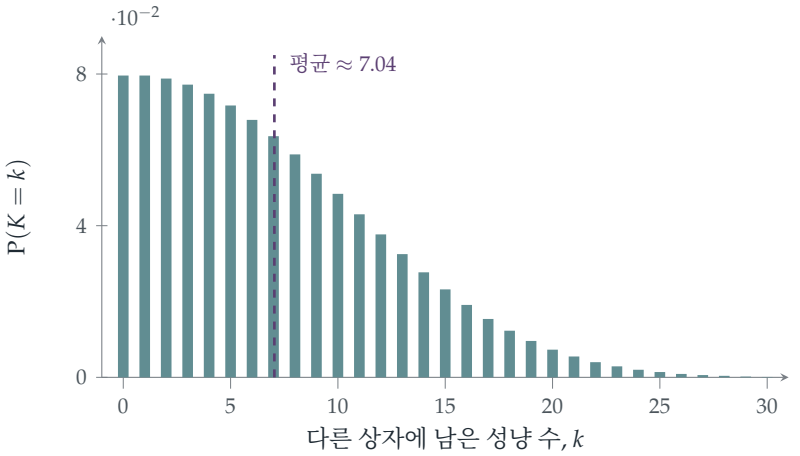


그림 12.17.1 각 상자에 성냥이 50개씩 있는 바나흐의 성냥갑 문제: 한 상자가 처음으로 빈 것이 발견되었을 때 다른 상자에 남은 성냥 수의 분포. 가장 가능성이 높은 값은 0과 1로 서로 같지만, 평균은 약 7이다.

음이항분포

각각 성공 확률이 p인 독립 시행에서 r번째 성공을 얻을 때까지 필요한 시행 횟수는 **음이항분포**(negative binomial distribution)를 따른다. 즉 $\mathrm{P}(N = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$이다. 택시 운전사 문제는 두 음이항 과정(토피와 박하사탕) 사이의 경주이며, 각 과정은 사탕 수보다 한 번 더 많은 "성공"을 필요로 한다. 음이항분포는 보험(청구 건수), 생태학(무리 지어 분포하는 동물의 개체 수), 유전학 등에 나타나며, 흔히 푸아송 분포(Poisson distribution)보다 유연한 대안으로 쓰인다.

바나흐와 스코틀랜드 카페

함수해석학(functional analysis)의 창시자 가운데 한 사람인 바나흐는 르부프(Lwów, 지금의 리비우(Lviv))의 스코틀랜드 카페에서 많은 수학 연구를 했다. 그곳에서 그와 동료들은 웨이터가 보관하던 공책인 **스코틀랜드 책**(Scottish Book)에 문제를 적어 두었고, 상품은 맥주 한 잔부터 살아 있는 거위 한 마리까지 다양했다. 바나흐의 스승인 슈타인하우스는 바나흐의 흡연을 기리는 연설을 위해 성냥갑 문제를 고안했다. 이 문제를 처음으로 출판물에서 분석한 사람은 펠러(William Feller)로, 1950년에 나온 그의 유명한 확률론 교과서에서였다.

사고 기술

마지막 사건을 고정하고, 그곳에 이르는 경로를 센다

어떤 과정이 특정한 시점에 특정한 방식으로 끝날 확률을 구하려면, 마지막 단계에서 일어나는 일을 고정하고 그곳에 이르는 진행 과정의 수를 센다.

대학에서 이것은 음이항분포, 무작위 행보의 첫 도달 시간(first-passage time), 그리고 Section 9.10의 반사 원리(reflection principle)의 기초가 된다.

더 도전하기

1 **작은 경우.** $n = m = 1$이고 $p = \frac{1}{2}$일 때 가능한 순서를 모두 나열하고 N의 분포를 구하여라.

2 **바나흐의 공식.** $n = 1$과 $n = 2$일 때 $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^{-(2n-k)} = 1$임을 확인하여라.

3 **같은 꼭대기.** 바나흐 문제에서 모든 n에 대해 $\mathrm{P}(K = 0) = \mathrm{P}(K = 1)$임을 보여라.

4 **어느 쪽이 먼저 떨어지는가?** 택시 운전사 문제에서 $n = m = 2$이고 $p = \frac{2}{3}$일 때, (언제든) 처음으로 빈 것이 발견되는 봉지가 토피 봉지일 확률을 구하여라.

더 읽을거리

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley), 제VI장. 바나흐 문제를 세상에 처음 소개한 책이다(확률론 입문과 그 응용).
- **R. Daniel Mauldin (ed.), *The Scottish Book*** (Birkhäuser). 스코틀랜드 카페의 문제들을 해설과 함께 실었다.
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 음이항분포를 다룬다(확률론 입문).

12.18 무기억성

문제

STEP III 2021, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

도입

어떤 방사성 원자가 백만 년 동안 붕괴하지 않은 채 실험실에 놓여 있었다고 하자. 이 원자는 이제 곧 붕괴할 "때가 된" 것일까? 그렇지 않다. 다음 1초 동안 이 원자가 붕괴할 확률(probability)은 방금 만들어진 원자의 경우와 정확히 같다. 방사성 원자는 나이를 먹지 않는다. 붕괴할 때까지의 대기 시간은 **지수분포**(*exponential distribution*)를 따르며, 이 분포를 규정하는 성질은 바로 기억이 없다는 것이다.

이 문제는 무기억성을 인상적인 형태로 보여 준다. 지수분포를 따르는 대기 시간을 정수 단위 부분과 소수 부분으로 나누어 보자. 놀랍게도 이 두 조각은 서로 **독립**(*independent*)이다. 즉 몇 시간을 꽉 채워 기다렸는지 안다고 해서 나머지 분에 대해 알 수 있는 것은 아무것도 없다. 또한 이 문제는 연습문제에서, 버스를 기다리는 시간이 왜 버스 사이의 간격보다 길게 느껴질 수 있는지도 설명해 준다.

시작하기 전에

생각해 보기 $x \geq 0$일 때 $\mathrm{P}(X > x)$는 무엇인가? $\mathrm{P}(X > s + t \mid X > s)$는 무엇인가?

$\mathrm{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = e^{-\lambda x}$이다. 따라서 $\mathrm{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathrm{P}(X > t)$이다. 즉 이미 s만큼 기다렸더라도, 남은 대기 시간은 처음부터 새로 기다리는 경우와 같은 분포를 따른다. 이것이 **무기억성**(*memoryless property*)이다.

차근차근 풀기

1단계 정수 부분

$Y = n$인 것은 정확히 $n \le X < n+1$일 때이다.

$$\mathrm{P}(Y = n) = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} = (1 - e^{-\lambda})e^{-n\lambda}. \qquad \blacksquare$$

따라서 Y는 기하분포(geometric distribution)를 따른다. 정수 단위 하나하나를 확률 $e^{-\lambda}$로 "버텨 내는" 셈이다.

2단계 소수 부분

> **생각해 보기** $Z < z$는 X가 구간 $[n, n+z)$ 중 하나에 놓인다는 뜻이다. 이 구간들의 확률을 모두 더하라.

$$\mathrm{P}(Z < z) = \sum_{n \ge 0} \left(e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+z)}\right) = (1 - e^{-\lambda z}) \sum_{n \ge 0} e^{-\lambda n} = \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}. \qquad \blacksquare$$

3단계 Z의 평균

> **생각해 보기** $[0,1]$에서 값을 갖는 확률변수에 대해 $\mathrm{E}(Z) = \int_0^1 \mathrm{P}(Z > z)\,dz$이다. 이를 이용하라.

$c = 1 - e^{-\lambda}$로 두면 $\mathrm{P}(Z > z) = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda z}}{c}$이므로

$$\mathrm{E}(Z) = 1 - \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}\right) = 1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^{\lambda} - 1}. \qquad \blacksquare$$

(λ가 작을 때, 즉 대기 시간이 길 때 이 값은 $\frac{1}{2}$에 가까워진다. 소수 부분이 거의 균등분포를 따르기 때문이다. λ가 클 때는 이 값이 $\frac{1}{\lambda}$에 가까운데, X가 거의 항상 1보다 작기 때문이다.)

4단계 독립성

$$\mathrm{P}(Y = n, z_1 < Z < z_2) = \mathrm{P}(n + z_1 < X < n + z_2) = e^{-\lambda n}\left(e^{-\lambda z_1} - e^{-\lambda z_2}\right).$$

> **생각해 보기** 소문항 (i)과 (ii)를 이용하여 $\mathrm{P}(Y = n)\,\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2)$와 비교하라.

(i)과 (ii)에서 $\mathrm{P}(Y = n)\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2) = (1 - e^{-\lambda})e^{-n\lambda} \cdot \frac{e^{-\lambda z_1} - e^{-\lambda z_2}}{1 - e^{-\lambda}}$이고, 이는 위의 값과 같다. 따라서 Y와 Z는 독립이다. $\blacksquare$

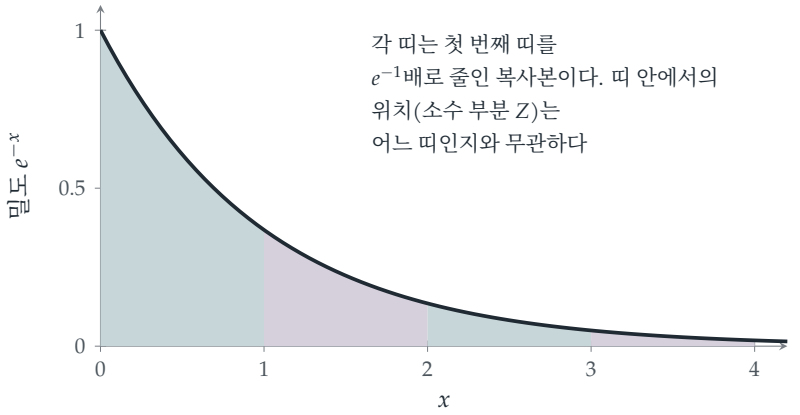


그림 12.18.1 $\lambda = 1$인 지수분포의 확률밀도함수를 폭이 1인 띠로 나눈 그림. $e^{-(n+z)} = e^{-n}e^{-z}$이므로 모든 띠는 같은 모양이다. X가 어느 띠에 떨어지는지(정수 부분 Y)와 그 띠 안의 어디에 떨어지는지(소수 부분 Z)는 서로 독립이다.

돌아보기

- **조각별로 더하기.** Z의 분포와 결합확률 모두 구간 $[n, n+1)$들에 대한 확률을 더해서 얻었다.
- **꼬리 공식.** $\mathrm{E}(Z) = \int \mathrm{P}(Z > z)\,\mathrm{d}z$를 이용하여 확률밀도함수를 구하지 않고 넘어갈 수 있었다.
- **인수분해는 곧 독립성.** 결합확률이 n의 함수와 z_1, z_2의 함수의 곱으로 분리되었다.

숨은 수학

지수분포가 특별한 이유

Y와 Z의 독립성은 $e^{-\lambda(n+z)} = e^{-\lambda n}e^{-\lambda z}$에서 곧바로 나오며, 이는 모습을 바꾼 무기억성이다. 사실 지수분포는 기억이 없는 **유일한** 연속분포이다. 모든 $s, t \geq 0$에 대해 $\mathrm{P}(X > s+t) = \mathrm{P}(X > s)\mathrm{P}(X > t)$이면, $g(t) = \ln \mathrm{P}(X > t)$는 $g(s+t) = g(s) + g(t)$를 만족하고, (g가 단조함수이면) 이로부터 반드시 $g(t) = -\lambda t$가 된다. 그래서 지수분포는 누적되는 것 없이 "무작위로" 일어나는 사건의 대기 시간을 모형화하는 데 쓰인다. 방사성 붕괴, 손님의 도착, 마모되지 않는 전자 부품의 고장이 그 예이다.

최솟값과 대기 시간의 역설

X_1과 X_2가 각각 비율 λ_1과 λ_2를 갖는 서로 독립인 지수분포 확률변수이면 $\mathrm{P}(\min > x) = e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x}$이므로, 최솟값은 비율 $\lambda_1 + \lambda_2$인 지수분포를 따른다. 서로 독립인 두 무작위 사건 중 먼저 일어나는 것을 기다리는 일은, 두 비율을 합친 비율로 일어나는 사건 하나를 기다리는 일과 같다(연습문제의 STEP III 2002 Q13). 무기억성은 **대기 시간의 역설**(*waiting-time paradox*)도 설명해 준다. 버스가 평균 간격 10분으로 무작위로 도착한다면, 무작위 시각에 도착한 승객은 평균 5분이 아니라 10분을 기다린다. 남은 대기 시간에는 기억이 없기 때문이다. 그리고 승객이 도착한 시점을 포함하는 간격의 길이는 평균 20분인데, 긴 간격일수록 그 안에 도착할 가능성이 크기 때문이다.

러더퍼드와 푸아송 과정

1910년에 어니스트 러더퍼드(Ernest Rutherford)와 한스 가이거(Hans Geiger)는 방사성 원천에서 방출되는 알파 입자의 수를 7.5초 간격으로 세었고, 그 개수가 푸아송(Poisson) 분포를 따른다는 것을 발견하였다. 수학자 Harry Bateman은 방출이 일정한 비율로 서로 독립적으로 일어난다면 바로 그렇게 되어야 함을 보였다. 이때 방출 사이의 시간 간격은 지수분포를 따른다. 지수분포를 따르는 간격으로 이어지는 사건들의 흐름인 **푸아송 과정**(*Poisson process*)은 오늘날 시간 속의 무작위성을 나타내는 기본 모형으로, 전화 통화, 보험금 청구, 신경세포의 발화 등에 쓰인다. 다음 절인 Section 12.19에서는 이를 공간으로 확장한다.

사고 기술

인수분해로 독립성 판정하기

두 확률변수의 결합확률이 한 변수의 함수와 다른 변수의 함수의 곱으로 인수분해되면 두 확률변수는 독립이다.

대학에서는 결합확률밀도함수의 인수분해가 독립성을 판정하는 표준적인 방법이며, 다변량 문제에서 독립인 성분을 알아보는 방법이기도 하다. 예를 들어 Section 12.22에서 정규분포를 따르는 점의 반지름과 각이 그러하다.

더 도전하기

1 **두 버스 노선.** STEP III 2002, 13번 문제 (`step.maths.org/questions/02-s3-q13`)에 도전해 보라. 두 지수분포 확률변수의 최솟값을 이용하여 다음 버스까지의 대기 시간을

구하는 문제이다.

2 **기억이 없는 이산분포.** 기하분포에 기억이 없음을, 즉 $\mathrm{P}(Y \geq m+n \mid Y \geq m) = \mathrm{P}(Y \geq n)$임을 보여라.

3 **대기 시간의 역설.** 버스가 비율 λ인 푸아송 과정으로 도착한다. (t가 클 때) 고정된 시각 t를 포함하는 간격의 기대 길이가 평균 간격의 두 배인 $\frac{2}{\lambda}$임을 보여라.

4 **Z의 확률밀도함수.** Z의 확률밀도함수를 구하고, $\lambda = 1$과 $\lambda = 5$일 때 그 그래프의 개형을 그려라.

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 지수분포와 푸아송 과정을 다룬다.
- **Sheldon Ross, *Introduction to Probability Models*** (Academic Press). 지수분포, 푸아송 과정, 대기행렬을 다룬다.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Uncertainty*** (Pelican). 일상생활 속의 무작위성과 기다림을 다룬다.

12.19 평면 위의 무작위 점

문제

STEP II 2012, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/12-s2-q13`

도입

슈퍼마켓, 나무, 별, 휴대전화 기지국이 어떤 영역에 "무작위로" 흩어져 있다면, 가장 가까운 것까지는 얼마나 가야 할까? 답은 오직 밀도(density) k(단위 넓이당 평균 개수)에만 의존하며, **레일리 분포**(Rayleigh distribution)라는 특징적인 모양을 갖는다. 가장 가까운 것까지의 거리는 평균 $\frac{1}{2\sqrt{k}}$이다. 제곱킬로미터당 슈퍼마켓이 하나라면 500미터이다.

이 모형은 **공간 푸아송 과정**(spatial Poisson process)으로, 시간에 따른 무작위 도착(Section 12.18)의 2차원판이다. 계산은 짧고 아름답지만, 진짜 흥미로운 점은 이것이 기준점 역할을 한다는 데 있다. 생태학자들은 실제 최근접 이웃 거리(nearest-neighbour distance)를 이 공식과 비교하여 나무나 둥지가 뭉쳐 있는지, 무작위로 흩어져 있는지, 아니면 일부러 간격을 두고 있는지 판단한다.

시작하기 전에

생각해 보기 평균이 μ인 푸아송 확률변수(Poisson random variable)가 값 0을 가질 확률은 얼마인가?

$\mathrm{P}(0) = e^{-\mu}$이다. 반지름이 y인 원의 넓이는 πy^2이므로, 그 안에 있는 슈퍼마켓 수의 평균은 $k\pi y^2$이다.

차근차근 풀기

1단계 가까이에 슈퍼마켓이 없을 확률

거리 y 이내에 슈퍼마켓이 하나도 없을 확률은 $e^{-\pi k y^2}$이다.

2단계 가장 가까운 거리의 분포

> **생각해 보기** $Y \geq y$는 거리 y 이내에 슈퍼마켓이 없다는 뜻이다. 그렇다면 $\mathrm{P}(Y < y)$는 무엇인가?

$\mathrm{P}(Y < y) = 1 - e^{-\pi k y^2}$이고, 이를 미분하면 확률밀도함수

$$\mathrm{f}(y) = 2\pi k y e^{-\pi k y^2}, \qquad y \geq 0. \qquad \blacksquare$$

를 얻는다.

3단계 평균

> **생각해 보기** $y\,\mathrm{f}(y)$를 부분적분(integration by parts)하거나, $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y$를 이용한다. 그런 다음 치환하여 주어진 가우스 적분(Gaussian integral)을 쓴다.

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty e^{-\pi k y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$x = y\sqrt{2\pi k}$로 치환하면 $\pi k y^2 = \frac{1}{2}x^2$이 되므로 $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}$이다. $\blacksquare$

4단계 분산

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \cdot 2\pi k y e^{-\pi k y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$u = \pi k y^2$로 치환하면($\mathrm{d}u = 2\pi k y\,\mathrm{d}y$) 이 값은 $\int_0^\infty \frac{u}{\pi k} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k}$이다. 따라서 분산(variance)은

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} = \frac{4-\pi}{4\pi k}. \qquad \blacksquare$$

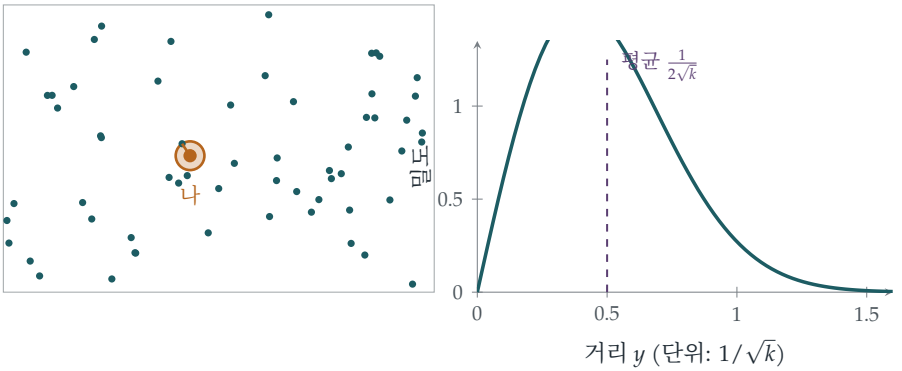


그림 12.19.1 왼쪽: 넓이가 24인 영역에 무작위로 흩어진 점 60개($k = 2.5$)와, 선택한 한 점에서 그중 가장 가까운 점까지의 거리(호박색). 오른쪽: 그 거리의 레일리 밀도 $2\pi k y e^{-\pi k y^2}$. 거리는 $1/\sqrt{k}$를 단위로 잰다. 평균은 $\frac{1}{2\sqrt{k}}$이다.

돌아보기

- **거리에 관한 질문을 개수에 관한 질문으로 바꾼다.** "가장 가까운 것이 y보다 멀다"는 "y 이내에 하나도 없다"와 같다.
- **누적분포함수를 먼저, 밀도는 나중에.** $\mathrm{P}(Y < y)$는 바로 구해졌고, 이를 미분하여 밀도를 얻었다.
- **알려진 적분으로 치환한다.** 각 적률(moment)은 가우스 적분이나 지수함수의 적분으로 귀결되었다.

숨은 수학

평면 위의 푸아송 과정

강도(intensity)가 k인 공간 푸아송 과정이란, 서로소인(disjoint) 영역들에 들어 있는 점의 개수가 서로 독립(independent)이고, 넓이가 A인 영역에 들어 있는 점의 개수가 평균 kA인 푸아송 분포를 따르는 무작위 점 배치이다. 이것은 매우 많은 점을 매우 넓은 영역에 독립적으로, 균일하게, 알맞은 평균 밀도로 떨어뜨렸을 때 얻어지는 것으로, 교란순열(derangement)(Section 9.8)을 설명하는 것과 같은 "희귀 사건의 법칙(law of rare events)"이다. 이는 완전한 공간적 무작위성을 나타내는 자연스러운 모형이며, 실제 패턴은 이것을 기준으로 평가된다. 두 생태학자가 1954년에 고안한 *Clark–Evans* **검정**(Clark–Evans test)은 관측된 평균 최근접 이웃 거리를 $\frac{1}{2\sqrt{k}}$와 비교한다. 이보다 훨씬 작으면 군집(씨앗이 어미 나무 근처에 떨어지는 경우)을, 훨씬 크면 규칙적인 간격(텃세를 부리는 새, 또는 식물들이 물을 두고 벌이는 경쟁)을 시사한다.

3차원에서

같은 계산을 3차원에서 하면, 가장 가까운 별, 분자, 은하까지의 거리에 대해 $\mathrm{P}(Y > y) = e^{-\frac{4}{3}\pi k y^3}$를 얻는다. 찬드라세카르(Subrahmanyan Chandrasekhar)는 1943년에 이를 이용하여 무작위로 배치된 이웃 별들이 한 별에 미치는 중력을 연구했고, 물리학자들은 이를 기체 분자의 평균 자유 행로(mean free path)에 사용한다.

레일리

밀도 $\frac{y}{\sigma^2} e^{-y^2/(2\sigma^2)}$는 레일리 경(Lord Rayleigh)의 이름을 딴 것이다. 그는 1880년에 소리의 이론에서 이 분포를 만났는데, 위상이 무작위인 많은 파동을 합한 것의 진폭을 나타낸다. 이 분포는 또한 두 좌표가 서로 독립인 정규확률변수(normal random variable)인 점과 원점 사이의 거리를 나타내기도 하는데, 이것이 이 분포가 여기에 나타나는 이유를 보는 또 다른 방법이다(연습문제 3). 오늘날에는 무작위 위상을 가진 여러 경로를 따라 수신기에 도달하는 휴대전화 신호의 페이딩(fading)을 모형화하는 데 쓰인다.

사고 기술

분포함수를 먼저 구하라

최솟값, 최댓값, 또는 가장 가까운 거리의 분포를 구할 때는 $\mathrm{P}(Y > y)$를 곧바로 적을 수 있는 경우가 많다. 이를 미분하여 밀도를 얻는다.

이 방법은 여러 무작위 수명 가운데 가장 긴 것을 다루는 Section 12.25에서 다시 등장한다. 대학에서는 모든 "순서통계량(order statistic)"을 다룰 때 표준적인 첫 단계이다.

더 도전하기

1 **중앙값.** 가장 가까운 슈퍼마켓까지 거리의 중앙값(median)을 구하고, 평균과 비교하여라.

2 **두 번째로 가까운 것.** 두 번째로 가까운 슈퍼마켓까지 거리의 분포를 구하여라. (힌트: $\mathrm{P}(Y_2 > y)$는 y 이내에 슈퍼마켓이 많아야 하나 있을 확률이다.)

3 **정규분포를 따르는 좌표.** U와 V가 서로 독립이고 $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$를 따르면, $\sqrt{U^2 + V^2}$의 밀도가 $\frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)}$임을 보여라. σ가 어떤 값일 때 슈퍼마켓 거리의 분포가 되는가?

4 Clark–Evans. 나무 400그루가 있는 1 km^2의 숲을 조사했더니, 나무에서 가장 가까운 이웃 나무까지의 평균 거리가 35 m였다. 이 결과는 완전한 공간적 무작위성과 부합하는가, 아니면 군집이나 규칙적인 간격을 시사하는가?

더 읽을거리

- **Peter Diggle, *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*** (Arnold). 공간 점 패턴의 통계적 분석에 관한 표준 참고서로, Clark–Evans 검정과 그 후속 방법들을 다룬다.
- **John Kingman, *Poisson Processes*** (Oxford University Press). 임의의 차원에서의 푸아송 과정을 다룬 아름다운 소책자이다.
- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes*** (Oxford University Press). 푸아송 과정에 관한 장을 보라.

12.20 뷔퐁의 바늘

문제

STEP I 1993, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/93-s1-q16`

도입

평행한 마룻널이 깔린 바닥에 바늘을 떨어뜨려 보자. 바늘이 널 사이의 틈에 걸칠 확률에는 π가 들어 있다. 어디에도 원은 보이지 않는데도 그렇다. 여러 번 던져서 교차한 횟수를 세면 실험으로 π를 추정할 수 있다. 이것이 **뷔퐁의 바늘**(*Buffon's needle*) 문제이다. 뷔퐁 백작 조르주루이 르클레르(Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon)가 1733년에 제기하고 1777년에 직접 풀었다. 이는 **기하학적 확률**(*geometric probability*)의 첫 번째 문제이며, 모든 몬테카를로 방법(Monte Carlo method)의 조상이다.

π는 각도에서 나온다. 바늘의 방향은 반 바퀴 위에서 균등하게 분포하며, 선들에 수직인 방향으로 드리운 바늘의 "그림자" 길이를 모든 방향에 대해 평균하면 $\frac{2}{\pi}$라는 인수가 나온다. 이 문제는 $\cos^{-1}$의 적분으로 이 계산을 수행한다.

시작하기 전에

생각해 보기 핀의 중심은 가장 가까운 선에서 거리 x만큼 떨어져 있고, 핀은 선들의 수선과 각 y를 이룬다. 핀은 선 쪽으로 얼마나 멀리 뻗어 있는가?

핀의 각 절반은 길이가 a이고, 선들에 수직인 성분은 $a\cos y$이다. 따라서 핀은 정확히 $a\cos y \geq x$일 때 가장 가까운 선과 교차한다. ($a < b$이므로 다른 선에는 닿을 수 없다.)

차근차근 풀기

1단계 적분

$t = \cos y$로 놓으면, t가 0에서 1까지 변할 때 $y = \cos^{-1} t$는 $\frac{\pi}{2}$에서 0까지 변하고, $\mathrm{d}t = -\sin y\,\mathrm{d}y$이다. 따라서

$$\int_0^1 \cos^{-1} t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} y \sin y\,\mathrm{d}y = \left[-y\cos y\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos y\,\mathrm{d}y = 0 + 1 = 1. \qquad \blacksquare$$

(또는 이렇게 볼 수도 있다. 이 적분은 $\cos^{-1}$의 그래프와 두 축 사이의 넓이이며, 이는 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 $y = \cos x$ 아래의 넓이를 $y = x$에 대해 대칭이동한 것과 같다.)

2단계 위치가 주어졌을 때

생각해 보기 x를 고정하면 어떤 각 y에서 교차가 일어나는가? 그 확률은 얼마인가?

$x \geq a$이면 핀은 선에 닿을 수 없다. $x < a$이면 교차하려면 $\cos y \geq \frac{x}{a}$, 즉 $y \leq \cos^{-1}\frac{x}{a}$이어야 한다. Y는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로

$$\mathrm{P}(\text{교차} \mid X = x) = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a} \qquad (0 \leq x < a). \qquad \blacksquare$$

3단계 위치에 대해 평균하기

X는 $[0, b]$에서 균등분포를 따르고 확률밀도(density)는 $\frac{1}{b}$이므로, $x = at$로 치환하면

$$\mathrm{P}(\text{교차}) = \frac{1}{b}\int_0^a \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi b}\int_0^1 \cos^{-1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi b}, \qquad \blacksquare$$

이다.

잠깐, 직접 해 보기 바늘의 길이가 간격의 절반의 두 배, 즉 간격과 정확히 같다면($a = \frac{b}{2}$이므로 바늘의 길이 $2a$가 b와 같다) 교차 확률은 $\frac{1}{\pi}$이다. π를 소수점 아래 둘째 자리까지 추정하려면 몇 번이나 던져야 할까?

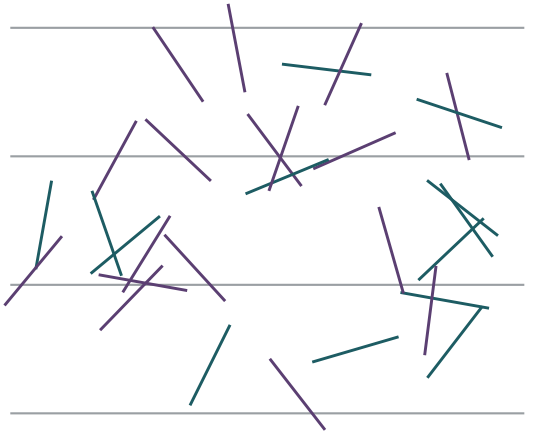


그림 12.20.1 간격이 $2b = 2$인 선들 위에 길이 $2a = 1.4$인 바늘 서른 개를 던졌다. 선과 교차하는 바늘은 자주색이다. 여기서는 기댓값 13.4개에 비해 17개가 교차했다. 표본이 작으면 추정이 거칠며, 뷔퐁의 바늘은 π를 계산하는 방법으로는 느리기로 유명하다.

돌아보기

- **두 개의 독립인 좌표.** 핀의 위치와 각도는 서로 독립(independent)이고 균등분포를 따르므로, 확률은 한 번에 한 변수씩 계산할 수 있는 이중적분(double integral)이었다.
- **조건을 걸고, 그다음 평균하기.** 먼저 x를 고정하고 각도에 대해 평균한 다음, x에 대해 평균한다.
- **치환이 상수를 드러낸다.** $x = at$로 척도를 바꾸자 답이 하나의 보편적인 적분으로 귀결되었다.

숨은 수학

뷔퐁의 국수

거의 계산 없이 답을 알아내는 방법이 있다. 바늘을 아무 모양으로나 구부려 "국수(noodle)"를 만들고, 그것이 선과 교차하는 횟수를 C라 하자. 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해 곡선의 교차 횟수의 기댓값은 그 작은 조각들의 기댓값의 합이므로 길이에 비례한다. 즉 어떤 상수 κ에 대해 $\mathrm{E}(C) = \kappa L$이다. κ를 구하기 위해 국수를 지름이 선의 간격 $2b$와 같은 원으로 잡자. 이 원은 항상 정확히 두 번 교차하고, 길이는 $2\pi b$이다. 따라서 $\kappa \cdot 2\pi b = 2$이고, $\kappa = \frac{1}{\pi b}$이다. 길이가 $2a < 2b$인 곧은 바늘은 많아야 한 번 교차하므로 $\mathrm{P}(\text{교차}) = \mathrm{E}(C) = \frac{2a}{\pi b}$이다. 이 논증은 Joseph-Émile Barbier(1860)가 제시한 것으로, 확률적 추론의 보석이라 할 만하다. π는 상수를 보정하기 위해 고른 원에서 나온다.

π 추정하기, 그리고 하지 말아야 할 방법

바늘 n개를 던져서 c개가 교차했다면 $\frac{c}{n} \approx \frac{2a}{\pi b}$이고 $\pi \approx \frac{2an}{bc}$이다. 오차는 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 정도로만 줄어들기 때문에, π를 소수점 아래 셋째 자리까지 구하려면 약 백만 번을 던져야 한다. 1901년 이탈리아의 수학자 Mario Lazzarini는 3408번 던져서 $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$(소수점 아래 여섯째 자리까지 정확)를 얻었다고 주장했다. 통계학자들은 이 결과가 믿기에는 지나치게 좋다고 지적했다. 3408번 던지고 바늘을 신중하게 고르면 $\frac{355}{113}$은 정확히 1808번의 교차에서 나오며, 적절한 순간에 실험을 멈추면 이 값을 만들어 낼 수 있다. 이는 선택적 보고에 관한 고전적인 교훈담이다.

뷔퐁

뷔퐁은 박물학자로, 파리 왕립 식물원의 원장이었고 36권짜리 박물지를 썼다. 그는 바늘 문제(그리고 정사각형 타일을 쓰는 변형인 "franc-carreau" 게임)를 1733년 과학 아카데미(Académie des Sciences)에 발표했고, 1777년에 그 풀이를 출판했다. 그의 목적은 산술뿐 아니라 기하학도 확률에 쓰일 수 있음을 보이는 것이었다. 여기에서 무작위 직선과 그것이 곡선 및 곡면과 만나는 교점을 다루는 이론인 적분기하학(integral geometry)이 자라났고, 이는 오늘날 2차원 단면으로부터 3차원 구조(예를 들어 조직 속의 세포)의 크기와 모양을 추정하는 학문인 입체해석학(stereology)에 쓰인다.

사고 기술

영역 위의 적분으로서의 확률

결과가 서로 독립인 여러 연속확률변수에 의존할 때, 어떤 사건의 확률은 그 사건이 일어나는 영역 위에서 결합확률밀도(*joint density*)를 적분한 것이다.

대학에서는 이것이 연속확률의 기초가 된다. 결합확률밀도, 주변분포(marginal distribution), 변수변환(change of variable)이 그것이며, 이들은 모두 Section 12.21과 Section 12.22에서 다시 등장한다.

더 도전하기

1 **긴 바늘.** $a > b$이면 바늘이 두 개 이상의 선과 교차할 수 있다. 이때도 교차 횟수의 기댓값이 여전히 $\frac{2a}{\pi b}$임을 보여라.

2 **국수.** 길이가 $2a$인 바늘을 직각으로 구부린다(두 팔의 길이는 각각 a). 교차 횟수의 기댓값은 얼마인가?

3 **정사각형 타일.** 반지름이 r인 동전을 한 변의 길이가 $s > 2r$인 정사각형 타일이 깔린 바닥에 던진다. 동전이 한 타일 안에 완전히 놓일 확률을 구하여라.

4 **Lazzarini의 바늘.** $a = \frac{5}{6}b$일 때($\frac{2a}{\pi b} = \frac{5}{3\pi}$이다), 3408번 던져서 1808번 교차하면 추정값 $\pi \approx \frac{355}{113}$을 얻음을 보여라.

더 읽을거리

- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability*** (Cambridge University Press). 뷔퐁의 바늘에서 출발하는 기하학적 확률 입문서이다.
- **Lee Badger, "Lazzarini's lucky approximation of π"**, *Mathematics Magazine* 67 (1994). 의심스러운 실험의 통계학을 다룬다.
- **Paul Nahin, *Digital Dice*** (Princeton University Press). 확률 문제를 위한 몬테카를로 방법을 다룬다.

12.21 막대 부러뜨리기

문제

STEP III 1990, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/90-s3-q16`

도입

막대를 무작위로 고른 두 점에서 부러뜨린다. 세 조각으로 삼각형을 만들 수 있을까? 잘 알려진 답은 확률(probability) $\frac{1}{4}$이다. 그렇다면 삼각형이 만들어질 때, 그 삼각형은 예각삼각형(acute triangle)일까, 둔각삼각형(obtuse triangle)일까? 대개는 둔각삼각형이다. 만들어지는 삼각형 가운데 예각삼각형은 약 3분의 1에 불과하다. 무작위 도형에 관한 이런 질문들은 19세기부터 확률론 연구자들을 즐겁게 해 왔으며, 연속 확률(continuous probability)을 다루는 연습에 안성맞춤이다. 영역 안의 무작위 점, 부분 영역을 정하는 조건, 그리고 그 넓이를 구하는 적분이 모두 등장하기 때문이다.

이 문제는 막대를 부러뜨리는 서로 다른 두 가지 방법을 제시하고, 각 경우에 둔각이 생길 확률을 묻는다. 답인 $3-2\sqrt{2}$와 $3-4\ln 2$는 간단한 기하에서 나오는 뜻밖의 수이다.

시작하기 전에

생각해 보기 세 길이로 삼각형을 만들 수 있을 필요충분조건은 각 길이가 나머지 두 길이의 합보다 작은 것이다. 세 길이의 합이 L이라면, 이 조건은 가장 긴 길이에 대해 무엇을 말해 주는가? 변 c의 대각은 언제 둔각인가?

$a+b+c=L$일 때 $c<a+b$는 $c<\frac{L}{2}$를 뜻한다. 따라서 세 조각으로 삼각형을 만들 수 있는 것은 정확히 모든 조각이 전체 길이의 절반보다 짧을 때이다. 코사인 법칙(cosine rule)에 따라, c의 대각이 둔각인 것은 정확히 $c^2>a^2+b^2$일 때이다.

차근차근 풀기

1단계 한 번 자른 뒤 이등분하기

조각은 X, $\frac{1-X}{2}$, $\frac{1-X}{2}$이다. 길이가 같은 두 조각은 항상 $\frac{1}{2}$보다 작으므로, 삼각형이 만들어질 필요충분조건은 $X < \frac{1}{2}$이다. 이 삼각형은 이등변삼각형(isosceles triangle)이고 두 밑각은 예각이므로, 둔각삼각형이 되는 것은 X의 대각이 둔각일 때뿐이다.

$$X^2 > 2\Big(\frac{1-X}{2}\Big)^2 = \frac{(1-X)^2}{2}, \qquad \text{즉} \qquad \sqrt{2}X > 1-X, \quad X > \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

$X < \frac{1}{2}$라는 조건 아래에서 X는 $[0, \frac{1}{2}]$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따르므로

$$\mathrm{P}(\text{둔각} \mid \text{삼각형}) = \frac{\frac{1}{2} - (\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.172. \qquad \blacksquare$$

2단계 두 번째 구성

> ? **생각해 보기** 꼭짓점이 $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$인 삼각형 안의 (x,y)에 대하여, 변의 길이가 x, y, $2-x-y$일 때 세 삼각부등식(triangle inequality)을 확인하라.

영역은 $\{x \le 1, y \le 1, x+y \ge 1\}$이다. 부등식은 $x+y \ge 2-x-y$, 즉 $x+y \ge 1$; $x+(2-x-y) \ge y$, 즉 $y \le 1$; 그리고 $y+(2-x-y) \ge x$, 즉 $x \le 1$이다. 이들은 모두 영역 안에서 성립한다(영역의 경계에서는 등호가 성립하며, 이때 삼각형은 퇴화(degenerate)한다). $\blacksquare$

> ? **생각해 보기** B에서의 각은 변 $CA = y$의 대각이다. 조건 $y^2 > x^2 + (2-x-y)^2$을 y에 대한 부등식으로 나타내라.

전개하면 $y^2 > x^2 + 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy$이므로 $4y - 2xy > 2x^2 - 4x + 4$, 즉 $2y(2-x) > 2(x^2 - 2x + 2)$이다. $2 - x > 0$이므로

$$\angle ABC\text{가 둔각} \iff y > \frac{x^2 - 2x + 2}{2 - x}. \qquad \blacksquare$$

3단계 넓이

> ? **생각해 보기** $x^2 - 2x + 2$를 $2 - x$로 나누어라. 그다음 영역 가운데 곡선 위쪽 부분의 넓이를 구하고, 이를 영역의 넓이 $\frac{1}{2}$로 나누어라.

$x^2 - 2x + 2 = -x(2-x) + 2$이므로 곡선은 $y = -x + \frac{2}{2-x}$이다. 이 곡선은 $(0,1)$에서 $(1,1)$까지 이어지며, $0 < x < 1$에서 직선 $y = 1 - x$보다 위에, $y = 1$보다 아래에 있다(그

림 12.21.1). 둔각 영역은 곡선과 $y = 1$ 사이에 있고, 그 넓이는

$$\int_0^1 \left(1 + x - \frac{2}{2-x}\right) \mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2} + \left[2\ln(2-x)\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

이를 $\frac{1}{2}$로 나누면 $\mathrm{P}(\angle ABC\text{가 둔각}) = 3 - 4\ln 2 \approx 0.227$이다. ■

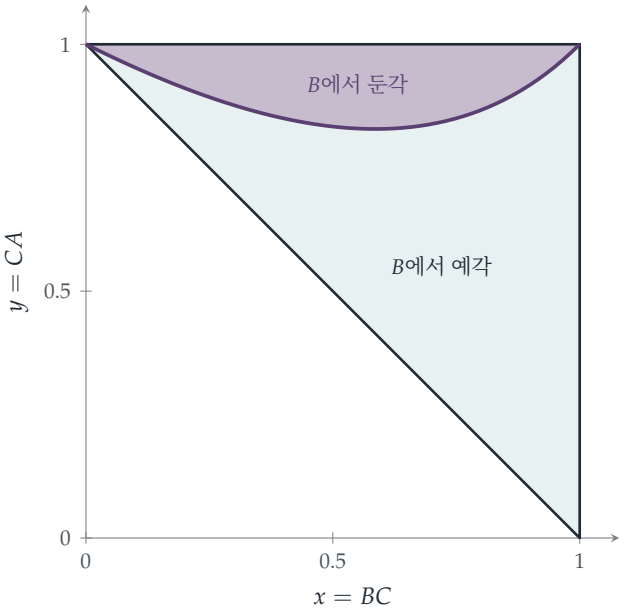


그림 12.21.1 소문항 (ii)에서 가능한 (x, y)가 이루는 삼각형. 곡선 $y = \frac{x^2-2x+2}{2-x}$ 위쪽(자주색 영역)에서 B에서의 각이 둔각이며, 이 영역은 삼각형의 $3 - 4\ln 2 \approx 0.23$만큼을 차지한다.

돌아보기

- **기하를 부등식으로 옮겨라.** "삼각형을 이룬다"와 "둔각이다"는 둘 다 길이 사이의 부등식이 되었다.
- **연속확률변수의 조건부 확률(conditional probability).** $X < \frac{1}{2}$라는 조건 아래에서 X는 더 작은 구간 위의 균등분포를 따랐다.
- **넓이의 비로서의 확률.** 영역 안에서 균등하게 고른 점에 대해, 확률은 넓이를 전체 넓이로 나눈 값이다.

숨은 수학

고전적인 부러진 막대 문제

막대를 서로 독립인 두 균등분포 점 U와 V에서 부러뜨린다. 순서쌍 (U, V)는 단위정사각형 위의 균등분포를 따르고, 세 조각이 삼각형을 이루는 것은 정확히 각 조각이 $\frac{1}{2}$보다 짧을 때이다. 이 조건은 넓이의 합이 $\frac{3}{4}$인 작은 삼각형 네 개를 잘라 내므로 확률은 $\frac{1}{4}$가 남는다. 삼각형이 만들어진다는 조건 아래에서 예각삼각형일 확률은 $\frac{1}{4}$ 가운데 $3\ln 2 - 2 \approx 0.079$, 즉 약 32%이다. 이 조각들은 **균등 무작위 분할**(*uniform random partition*)의 한 예이며, 그 결합분포는 **디리클레 분포**(*Dirichlet distribution*)이다. 디리클레 분포는 베이즈 통계학(Bayesian statistics)과 자원이 무작위로 나뉘는 방식을 다루는 모형에 등장한다.

막대를 부러뜨리는 방법이 중요하다

문제의 두 방법이 비슷하게 들리는 질문에 대해 서로 다른 답 $3 - 2\sqrt{2}$와 $3 - 4\ln 2$를 내며, 둘 다 고전적인 방법과도 다르다는 점에 주목하라. 베르트랑(Bertrand)의 현 문제(Section 12.3)에서처럼, 절차를 명시하기 전까지 "무작위"라는 말은 아무 의미가 없다.

무작위 삼각형

무작위 삼각형에 관한 문제는 빅토리아 시대에 인기 있던 퍼즐이었다. 루이스 캐럴(Lewis Carroll)의 *Pillow Problems*(1893)는 "무작위로" 고른 삼각형이 둔각삼각형일 확률을 묻는데, 그의 답도 이 절의 답들처럼 그가 택한 무작위성 모형에 전적으로 달려 있다. 무작위 삼각형에 관한 문제는 그 뒤로도 계속 놀라움을 낳았다. 예를 들어 정사각형 안에서 균등하게 고른 세 점이 둔각삼각형을 이룰 확률은 약 0.725인데, 이 값은 20세기에 들어서야 정확히 계산되었다.

사고 기술

표본공간(sample space)의 기하

무작위 결과를 영역 안의 점으로, 사건을 부분 영역으로 나타내고, 확률을 넓이의 비(또는 밀도(*density*)의 적분)로 계산하라.

대학에서 이 그림은 다변수 확률론(multivariate probability)의 토대이며, 좌표를 바꿀 때 밀도가 어떻게 변환되는지 알려 주는 변수변환 공식(change-of-variables formula)의 토대이기도 하다.

더 도전하기

1 **고전적인 문제.** 막대를 서로 독립인 두 균등분포 점에서 부러뜨릴 때, 조각들이 삼각형을 이룰 확률이 $\frac{1}{4}$임을 보여라.

2 **긴 조각을 부러뜨리기.** 막대를 균등분포 점에서 부러뜨린 다음, 더 긴 조각을 균등분포 점에서 부러뜨린다. 세 조각이 삼각형을 이룰 확률이 $2\ln 2 - 1 \approx 0.386$임을 보여라.

3 **예각인가 둔각인가.** 소문항 (ii)에서 삼각형 ABC가 C에서($AB = 2 - x - y$의 대각) 둔각을 가질 확률을 구하라. 이를 이용하여 삼각형이 어딘가에 둔각을 가질 확률을 구하라.

4 **가장 긴 조각의 기댓값.** 고전적인 부러진 막대 문제에서 가장 긴 조각의 길이의 기댓값(expected value)이 $\frac{11}{18}$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *The Colossal Book of Mathematics*** (Norton). 부러진 막대 문제가 실려 있다.
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability*** (Dover). 확률에 관한 도전적인 문제 50선.
- **Lewis Carroll, *Pillow Problems*** (Dover, *A Tangled Tale*과 합본). 무작위 삼각형을 포함한 빅토리아 시대의 퍼즐들.

12.22 평균이 없는 분포

문제

STEP III 1995, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/95-s3-q12`

도입

측정을 여러 번 하고 평균을 내면 무작위 오차는 서로 상쇄되어, 평균은 참값으로 안정된다. 이 **큰 수의 법칙**(*law of large numbers*)은 모든 통계학의 토대이다. 그러나 여기에는 숨은 가정이 있다. 측정값의 평균(mean)이 유한해야 한다는 것이다. 이 문제는 서로 독립(independent)인 두 표준정규(standard normal) 확률변수의 비라는, 지극히 자연스러운 확률변수(random variable)를 만드는데, 이 확률변수는 평균이 아예 없다. 그 평균들은 결코 안정되지 않는다. 사실 이러한 확률변수 백만 개의 평균은 하나의 확률변수와 정확히 같은 분포(distribution)를 가진다.

이것이 **코시 분포**(*Cauchy distribution*)이다. 그 밀도(density)는 무해한 종 모양처럼 보이지만, 꼬리(tail)가 너무 두꺼워서 이따금 나타나는 엄청나게 큰 값이 어떤 평균이든 좌우해 버린다. 이 문제는 아름다운 기하학적 논증으로 이 분포를 찾아낸다. 좌표의 비는 직선의 기울기이고, 방사 대칭성 때문에 그 직선의 각은 균등분포를 따른다.

시작하기 전에

생각해 보기 (U, V)가 원점으로부터의 거리에만 의존하는 밀도를 가진 무작위 점이라면, 원점에서 그 점까지 이은 선분이 한 축과 이루는 각 Θ에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

평면을 회전해도 밀도는 변하지 않으므로, 모든 방향이 똑같이 일어날 법하다. 즉 각 Θ는 $[0, 2\pi)$에서 균등분포를 따른다. 그리고 $\frac{U}{V}$는 거리가 아니라 방향에만 의존한다.

차근차근 풀기

1단계 결합 밀도

X와 Y가 독립이므로, 결합 밀도(joint density)는 각각의 밀도의 곱이다.

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

이 밀도는 원점으로부터의 거리의 제곱인 x^2+y^2를 통해서만 x와 y에 의존한다. 즉 원점을 중심으로 하는 원 위에서 밀도가 일정하다. 이것이 바로 "방사 대칭(radially symmetrical)"의 뜻이다.

2단계 대칭성 이용하기

> ? **생각해 보기** $\frac{U}{V} < k$는 V의 부호에 따라 두 가지 방식으로 일어난다. 180° 회전 $(u,v) \mapsto (-u,-v)$에 의해 이 둘은 어떻게 연결되는가?

$\frac{U}{V} < k$는 $V > 0$이고 $U < kV$이거나, $V < 0$이고 $U > kV$라는 뜻이다. 회전 $(u,v) \mapsto (-u,-v)$는 첫 번째 영역을 두 번째 영역으로 옮기고, 밀도를 보존한다. 따라서 두 영역의 확률은 같고,

$$P\left(\frac{U}{V} < k\right) = 2P(U < kV, V > 0). \qquad \blacksquare$$

3단계 각

> ? **생각해 보기** u를 가로축, v를 세로축으로 하는 평면에 영역 $\{V > 0, U < kV\}$를 그려 보자. 이것은 꼭짓점이 원점에 있는 쐐기 모양이다. 그 각은 얼마인가?

영역 $V > 0$은 위쪽 반평면이다. 원점을 지나는 직선 $u = kv$는 양의 v축과 $\arctan k$의 각을 이룬다($k > 0$일 때 양의 u 쪽으로 기운다). 위쪽 반평면 중 이 직선의 왼쪽 부분은 각이 $\frac{\pi}{2} + \arctan k$인 쐐기이다. 방사 대칭성에 의해 쐐기의 확률은 그 각을 2π로 나눈 값이므로,

$$P\left(\frac{U}{V} < k\right) = 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan k}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan k.$$

이를 k에 대해 미분하면 밀도

$$g(k) = \frac{1}{\pi(1+k^2)}. \qquad \blacksquare$$

를 얻는다.

돌아보기

- **독립인 정규분포는 방사 대칭이다.** 두 정규분포 밀도의 곱은 거리에만 의존한다.
- **비는 곧 방향이다.** $\frac{U}{V}$는 점의 각에만 의존하며, 그 각은 균등분포를 따른다.
- **쐐기의 확률.** 방사 대칭이 있으면 쐐기의 확률은 그 각에 비례한다.

숨은 수학

평균이 없다

코시 분포의 평균은 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi(1+k^2)}\,\mathrm{d}k$여야 하겠지만, $\int_0^K \frac{k}{1+k^2}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2}\ln(1+K^2) \to \infty$이다. 즉 이 적분은 수렴(converge)하지 않고, 평균은 존재하지 않는다. (대칭성 때문에 답이 0일 것 같지만, 양의 부분과 음의 부분이 모두 무한대이고 $\infty - \infty$는 값을 갖지 않는다.) 분산(variance)도 무한대이다.

더 나쁜 것은, 독립인 코시 확률변수 n개의 평균이 다시 정확히 같은 분포의 코시 분포를 따른다는 점이다. (이를 확인하는 한 가지 방법은 특성함수(characteristic function) $\mathrm{E}(e^{itX}) = e^{-|t|}$를 이용하는 것이다.) 따라서 평균을 내는 것은 전혀 도움이 되지 않는다. 백만 번 측정한 값의 평균이 한 번 측정한 값보다 조금도 더 믿을 만하지 않다. 그림 12.22.1는 무슨 일이 일어나는지 보여 준다. 정규분포 표본의 누적 평균(running average)은 안정되지만, 코시 분포 표본의 누적 평균은 이따금 나타나는 거대한 값에 흔들리며 끝없이 요동친다.

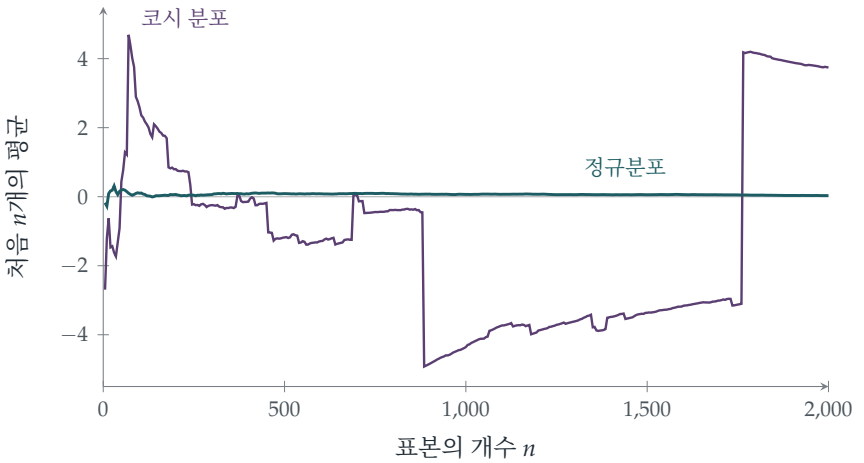


그림 12.22.1 독립인 표본 2000개의 누적 평균. 표준정규분포 표본(청록색)의 경우, 큰 수의 법칙이 예측하는 대로 평균이 0으로 안정된다. 코시 분포 표본(자주색)의 경우 평균은 결코 안정되지 않는다. 이따금 엄청나게 큰 값 하나가 평균을 새로운 곳으로 내던진다.

코시 확률변수는 어디에서 나오는가

균등하게 무작위인 방향을 향하도록 손전등을 벽에 비추면, 벽에 생기는 빛점의 위치는 코시 분포를 따른다. 물리학에서는 같은 밀도를 **로렌츠 분포**(*Lorentzian*)라고 부르며, 스펙트럼선과 공명 봉우리의 모양을 기술한다(Section 11.1와 비교해 보라). 금융에서는 정규분포 모형이 크게 과소평가하는 이따금의 폭락을 모형화하기 위해 코시 분포처럼 꼬리가 두꺼운(heavy-tailed) 분포를 사용한다. 통계학에 주는 교훈은 심각하다. 평균과 분산에 기반한 방법은 꼬리가 두꺼운 자료에서는 실패하며, 중앙값(median)을 사용하는 것과 같은 로버스트한(robust) 방법이 필요하다(코시 분포에서도 중앙값은 완벽하게 잘 정의되고 잘 작동한다).

푸아송, 코시, 그리고 논쟁

이 분포는 1824년 시메옹 드니 푸아송(Siméon Denis Poisson)이 연구했는데, 그는 이 분포가 큰 수의 법칙을 위반한다는 것을 알아차렸다. 오귀스탱루이 코시(Augustin-Louis Cauchy)는 1853년 최소제곱법(method of least squares)을 둘러싸고 Irénée-Jules Bienaymé와 공개 논쟁을 벌이던 중 이 분포를 만났다. 코시는 오차의 꼬리가 두꺼울 때 최소제곱법이 형편없는 방법일 수 있음을 보이는 데 이 분포를 사용했다. 이름은 코시에게 붙었는데, 이는 Stephen Stigler가 "스티글러의 명명 법칙(Stigler's law of eponymy)"이라고 부른 것의 한 예이다. 어떤 과학적 발견도 최초 발견자의 이름을 따서 불리지 않는다는 법칙이다.

사고 기술

기댓값이 존재하는지 확인하라

평균이나 분산을 사용하기 전에, 그것을 정의하는 적분이 수렴하는지 확인하라. 대칭성이 발산하는 적분을 0으로 만들어 주지는 않는다.

대학에서는 적분 가능성(integrability) 조건이 확률론의 모든 정리에 포함된다. 큰 수의 법칙에는 유한한 평균이, 중심극한정리(central limit theorem, Section 12.24)에는 유한한 분산이 필요하다. 코시 분포는 이러한 조건이 성립하지 않을 때의 표준적인 반례(counterexample)이다.

더 도전하기

1 **손전등.** 길고 곧은 벽에서 거리 1만큼 떨어진 손전등이 벽의 수선과 각 Θ를 이루는 방향을 가리킨다. 여기서 Θ는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 균등분포를 따른다. 빛점의 위치 $\tan\Theta$가 코시 분포를 따름을 보여라.

2 **역수.** C가 코시 분포를 따르면 $\frac{1}{C}$도 코시 분포를 따름을 보여라. (**힌트**: $\frac{U}{V}$와 $\frac{V}{U}$.)

3 **중앙값은 잘 작동한다.** 코시 분포의 중앙값이 0이고 사분위수(quartile)가 ± 1임을 보여라.

4 **반지름과 각.** X, Y가 독립인 표준정규 확률변수일 때, 극좌표(polar coordinates)로 바꾸어 $R^2 = X^2 + Y^2$가 평균이 2인 지수분포(exponential distribution)를 따르고 각과 독립임을 보여라. (이것이 정규분포 난수를 생성하는 Box–Muller 방법의 기초이다.)

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 확률변수의 변환을 다룬다.
- **Nassim Nicholas Taleb, *The Black Swan*** (Penguin). 일반 독자를 위해 두꺼운 꼬리와 그것이 왜 중요한지를 설명한다.
- **Stephen Stigler, *The History of Statistics*** (Harvard University Press). 코시와 Bienaymé의 논쟁을 담고 있다.

12.23 확률로 얻는 스털링 공식

문제

STEP II 2016, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/16-s2-q13`

도입

100!은 얼마나 큰 수일까? 직접 곱해 보면 시간이 꽤 걸리는데, 이 수는 158자리이다. **스털링 공식**(*Stirling's formula*) $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$을 쓰면 단 한 줄로 오차 0.1% 이내의 값을 얻는다. 이것은 수학에서 가장 유용한 근사(approximation) 가운데 하나로, 확률론, 통계물리학, 알고리즘 분석에서 늘 쓰인다.

이 공식의 증명은 여러 가지가 있는데, 적분을 이용하는 방법(Section 4.4)이나 오일러-매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)을 이용하는 방법이 있다. 이 문제는 그중 가장 놀라운 증명, 즉 확률을 이용한 증명을 보여 준다. 평균이 n인 푸아송 분포(Poisson distribution)는 근사적으로 정규분포(normal distribution)를 따르고, 봉우리에서 두 분포를 비교하면 $n!$의 값이 저절로 정해진다. 스털링 공식에 나오는 $\sqrt{2\pi}$는 말 그대로 정규분포의 확률밀도(density)에 나오는 바로 그 $\sqrt{2\pi}$이다.

시작하기 전에

생각해 보기 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 이산 확률변수(discrete random variable) X가 근사적으로 정규분포를 따른다면, $\mathrm{P}(X = \mu)$는 대략 얼마일까? (μ를 중심으로 하는 폭 1인 구간의 확률을 생각해 보자.)

정규근사(normal approximation)에서 $\mathrm{P}(X = \mu) \approx \mathrm{P}(\mu - \frac{1}{2} < X < \mu + \frac{1}{2})$이고, 이는 대략 폭 1에 봉우리에서의 확률밀도를 곱한 값, 곧 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$이다.

차근차근 풀기

1단계 동전 열여섯 개

$X \sim \mathrm{B}(16, \tfrac{1}{2})$의 평균(mean)은 8이고 분산(variance)은 $16 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 4$이므로 $\sigma = 2$이다. 정규근사에 의해

$$\mathrm{P}(X = 8) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \approx 0.1995.$$

정확한 값은 $\binom{16}{8}/2^{16} = \tfrac{12870}{65536} \approx 0.1964$이므로 오차는 2% 이내이다.

2단계 중심 이항계수

> **생각해 보기** $\mathrm{B}(2n, \tfrac{1}{2})$의 평균과 표준편차(standard deviation)는 무엇인가? $\mathrm{P}(X = n)$을 정확한 값과 근삿값으로 각각 써 보자.

평균은 n이고 분산은 $\tfrac{n}{2}$이므로 $\sigma = \sqrt{n/2}$이다. 정확한 값은 $\mathrm{P}(X = n) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$이고, 근삿값은 $\frac{1}{\sqrt{n/2}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$이다. 두 값을 같다고 놓으면

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2\,2^{2n}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \qquad (2n)! \approx \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n\pi}}. \qquad \blacksquare$$

3단계 스털링 공식

> **생각해 보기** 모수가 n인 푸아송 분포는 평균과 분산이 모두 n이다. $\mathrm{P}(X = n)$을 정확한 값과 근삿값으로 각각 써 보자.

정확한 값은 $\mathrm{P}(X = n) = e^{-n}\frac{n^n}{n!}$이다. n이 클 때 푸아송 분포는 근사적으로 정규분포를 따르고(서로 독립(independent)인 n개의 푸아송(1) 확률변수의 합이기 때문이다), $\sigma = \sqrt{n}$이므로 $\mathrm{P}(X = n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$이다. 두 값을 같다고 놓으면

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,e^{-n}n^n. \qquad \blacksquare$$

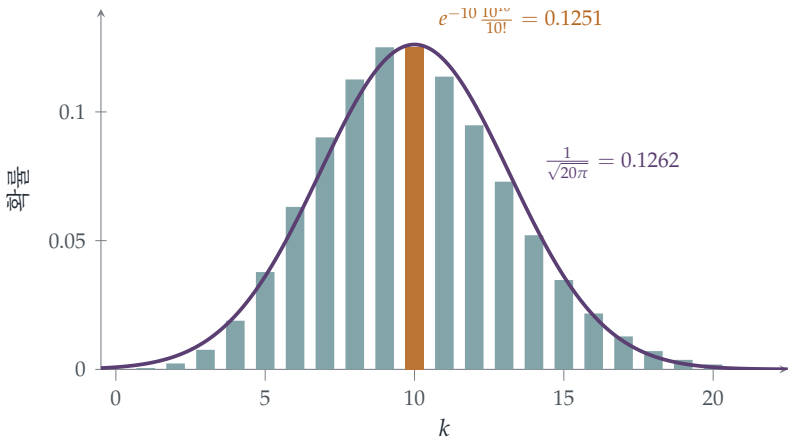


그림 12.23.1 평균이 10인 푸아송 분포(막대)와, 평균과 분산이 같은 정규분포의 확률밀도(자주색). 봉우리에서 푸아송 확률 $e^{-10}10^{10}/10!$(호박색)은 정규분포의 확률밀도 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 10}}$에 가깝다. 이 근사적 등식을 정리한 것이 바로 스털링 공식이다.

돌아보기

- **한 점의 확률 ≈ 확률밀도 곱하기 폭.** 격자 분포(lattice distribution)에서는 한 점에서의 정규분포 확률밀도가 그 점의 확률의 근삿값이 된다.
- **정확한 공식과 근사의 만남.** 이항분포(binomial distribution)와 푸아송 분포의 확률은 정확한 값이다. 이것을 정규근사와 같다고 놓아 계승(factorial)의 추정값을 얻었다.
- **공식에 맞는 분포를 고른다.** $\binom{2n}{n}$은 $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$를, $\frac{n^n}{n!}$은 푸아송(n)을 떠올리게 했다.

숨은 수학

근사는 얼마나 정확한가?

이 논증은 휴리스틱(heuristic)이다. 정규근사를 **한 점에서** 사용하는데, 보통의 중심극한정리(central limit theorem)는 이를 정당화해 주지 않는다. 이를 엄밀하게 다룬 **국소 중심극한정리**(*local central limit theorem*)가 바로 그 일을 해 주며, 이로써 이 논증은 진정한 증명이 된다. 사실 스털링 공식은 놀라울 만큼 정확하다. 비 $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}$은 대략 $1+\frac{1}{12n}$이므로, $n=1$일 때조차 1 대신 0.92를 주고, $n=10$일 때는 0.8%만큼 작다. 전체 급수 $1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\cdots$는 **점근급수**(*asymptotic series*)의 한 예이다. n이 클수록 점점 더 좋은 근삿값을 주지만, n을 고정하면 결국 발산(diverge)한다.

계승과 정규분포가 연결되는 이유

스털링 공식의 $\sqrt{2\pi}$와 정규분포의 확률밀도에 나오는 $\sqrt{2\pi}$는 같은 상수이다. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$이기 때문이다. 드무아브르(de Moivre)는 1733년에 바로 이런 방식으로 이항분포의 정규근사를 발견했는데, 그 과정에서 큰 n에 대한 $\binom{n}{k}$의 근삿값이 필요했다. 그는 $n! \approx Cn^{n+1/2}e^{-n}$ 꼴은 찾았지만 상수는 찾지 못했다. 스털링(James Stirling)이 $C = \sqrt{2\pi}$임을 보였다. 정규분포는 계승의 점근적 성질에서 태어난 것이다.

드무아브르와 스털링

드무아브르(Abraham de Moivre)는 런던으로 망명한 프랑스 개신교도로, 개인 교습과 도박꾼들에게 조언을 해 주며 생계를 꾸렸다. 그는 1718년에 *The Doctrine of Chances*(우연의 이론)를 출간했고, 1733년의 소책자에서 이항분포의 정규근사를 발견했는데, 이것이 정규곡선이 처음 등장한 곳이다. 스코틀랜드의 수학자 스털링은 *Methodus Differentialis*(차분법, 1730)에서 이 상수의 값을 발표했고, 드무아브르는 너그럽게 그의 공로를 인정했다. 계승의 근사는 지금도 활발히 연구되는 주제이다. 아주 큰 n에 대해 $n!$을 계산하는 일은 조합론과 암호학에서 필요하다.

사고 기술

확률과 무관한 것을 확률로 증명하기

정확한 확률을 근삿값과 비교하면 그 공식에 나오는 수들에 대한 정보를 얻을 수 있다.

이 "확률론적 방법(probabilistic method)"은 양방향으로 작동한다. 여기서는 확률이 계승의 추정값을 주었고, 에르되시(Erdős)는 이 방법으로 그래프(graph)의 존재를 증명했다(Section 9.2). 대학에서는 확률을 이용해 해석학, 정수론, 조합론의 정리를 증명하는 것을 보게 될 것이다.

더 도전하기

1 **공식 확인하기.** 스털링 공식으로 10!과 20!을 추정하고, 참값 3 628 800, 2 432 902 008 176 640 000과 비교하여라.

2 **(iii)에서 (ii)로.** 소문항 (iii)의 스털링 공식으로부터 소문항 (ii)의 근사가 나옴을 보여라.

3 **100!의 자릿수.** $\log_{10} n! \approx n\log_{10}\frac{n}{e} + \frac{1}{2}\log_{10}(2\pi n)$을 이용하여 100!이 158자리 수임을 보여라.

4 **동전 던지기에서의 동점.** 소문항 (ii)를 이용하여, 공정한 동전을 1000번 던질 때 앞면이 정확히 500번 나올 확률이 약 0.025임을 보여라.

더 읽을거리

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley), 제II장. 스털링 공식을 증명한다.
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley), 제9장. 점근적 방법을 다룬다.
- **Stephen Stigler, *The History of Statistics*** (Harvard University Press). 드무아브르와 정규곡선의 탄생을 다룬다.

12.24 중심극한정리

문제

STEP III 2008, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/08-s3-q12`

도입

서로 독립인 작은 무작위 효과를 많이 더하면, 각각이 어떤 분포를 따르든 그 합은 종 모양의 정규분포(normal distribution) 곡선을 따른다. 이것이 **중심극한정리**(*central limit theorem*)로, 아마도 확률론에서 가장 중요한 정리일 것이다. 이 정리는 키, 측정 오차, 시험 점수가 대체로 정규분포를 따르는 이유를 설명하고, 또 통계학자들이 바탕에 깔린 분포에 대해 아무것도 모르면서도 평균이 얼마나 믿을 만한지 말할 수 있는 이유를 설명한다. 단, 그 분포의 분산(variance)이 유한해야 한다(Section 12.22와 비교해 보라).

이 문제는 특수한 경우에 이 정리를 증명한다. 개구리 한 마리가 양쪽 지수분포(two-sided exponential distribution)를 따르는 무작위 점프를 한다. 이 분포의 밀도함수(density)는 뾰족한 봉우리를 가지며 종 모양과는 전혀 닮지 않았다. 그런데 점프를 많이 하고 나면 개구리의 전체 변위는 정규분포를 따른다. 여기서 쓰는 도구는 **적률생성함수**(*moment generating function*)로, 이 함수는 독립인 확률변수의 합을 곱으로 바꾸고, 로그를 취하면 곱은 다시 합으로 바뀐다.

출제 범위에 관한 참고

적률생성함수는 2019년에 STEP 출제 범위에서 빠졌다. 확률변수 X의 적률생성함수는 $\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(e^{\theta X})$이다. 이 함수의 0에서의 도함수들이 적률(moment)을 준다: $\mathrm{M}'(0) = \mathrm{E}(X)$, $\mathrm{M}''(0) = \mathrm{E}(X^2)$. 서로 독립인 X와 Y에 대하여 $\mathrm{M}_{X+Y} = \mathrm{M}_X \mathrm{M}_Y$이고, $\mathrm{M}_{cX}(\theta) = \mathrm{M}_X(c\theta)$이다. 적률생성함수들이 수렴하면 (적절한 의미에서) 분포들도 수렴한다.

시작하기 전에

생각해 보기 밀도함수 $\frac{1}{2}e^{-|x|}$는 대칭이다. 그래프는 어떤 모양인가? 평균은 얼마인가?

이 그래프는 0에서 높이 $\frac{1}{2}$인 뾰족한 봉우리를 가지고 양쪽으로 지수적으로 감소하는 천막 모양의 곡선이다(그림 12.24.1). 대칭성에 의해 평균은 0이다.

차근차근 풀기

1단계 적률생성함수

$|\theta| < 1$일 때, 적분을 0에서 나누면

$$\mathrm{M}_X(\theta) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(1+\theta)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(1-\theta)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\theta} + \frac{1}{1-\theta}\right) = \frac{1}{1-\theta^2}. \qquad \blacksquare$$

전개하면 $\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \theta^2 + \theta^4 + \cdots$이므로 $\mathrm{E}(X) = 0$이고 $\mathrm{E}(X^2) = 2$이다($\frac{\theta^2}{2!}$의 계수). 따라서 분산은 2이다.

2단계 개구리의 변위

생각해 보기 $Y = X_1 + \cdots + X_n$의 적률생성함수는 무엇인가? $Y/\sqrt{2n}$의 적률생성함수는?

독립성에 의해 $\mathrm{M}_Y(\theta) = (1-\theta^2)^{-n}$이고, 척도를 바꾸면

$$\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) = \mathrm{M}_Y\left(\frac{\theta}{\sqrt{2n}}\right) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right)^{-n}.$$

(Y의 표준편차(standard deviation)인 $\sqrt{2n}$으로 나누면 분산이 1이 된다.)

3단계 극한

생각해 보기 로그를 취하고, 작은 u에 대하여 $\ln(1-u) \approx -u$임을 이용하라.

$\ln \mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) = -n\ln\left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right) = -n\left(-\frac{\theta^2}{2n} - \frac{\theta^4}{8n^2} - \cdots\right) \to \frac{\theta^2}{2}$이므로

$$\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) \to e^{\theta^2/2}, \qquad \blacksquare$$

이고, 이것은 표준정규분포의 적률생성함수이다.

4단계 **개구리의 확률**

> **생각해 보기** n이 크면 Y는 근사적으로 $\mathrm{N}(0, 2n)$을 따른다. 언제 $\mathrm{P}(|Y| \geq 25) = 0.05$가 되는가?

표준정규분포를 따르는 Z에 대하여 $\mathrm{P}(|Z| \geq 1.96) = 0.05$이다. 따라서 $\frac{25}{\sqrt{2n}} = 1.96$이어야 하고, 이로부터 $2n = \left(\frac{25}{1.96}\right)^2 \approx 162.7$, 즉 $n \approx 81.3$을 얻는다. 멀리 떨어진 곳에 도착할 확률은 n이 커질수록 커지므로, 확률이 5% 이상이 되게 하는 최소 점프 횟수는 약 82이다. ■

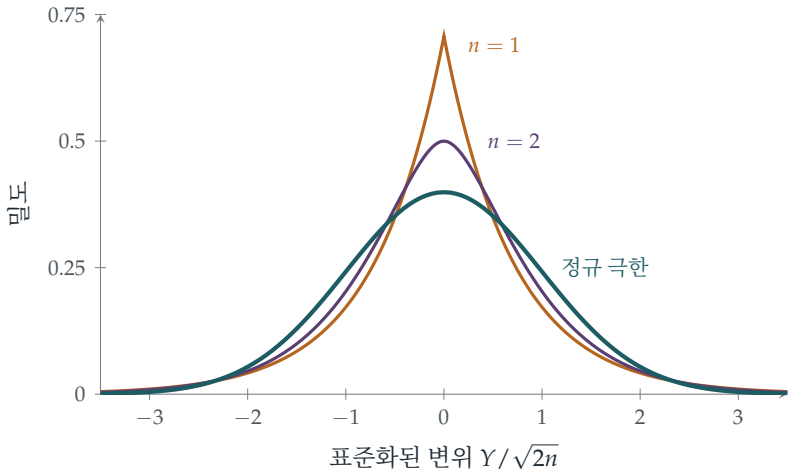


그림 12.24.1 $n = 1$번 점프한 뒤(호박색: 뾰족한 라플라스 봉우리)와 $n = 2$번 점프한 뒤(자주색) 개구리의 표준화된 변위의 밀도함수를 표준정규분포의 밀도함수(청록색)와 비교한 것. 점프를 두 번만 해도 봉우리가 이미 둥글게 다듬어진다. 중심극한정리에 따르면 $n \to \infty$일 때 이 곡선들은 정규분포로 수렴한다.

돌아보기

- **변환은 합을 곱으로 바꾼다.** 독립인 확률변수들의 합의 적률생성함수는 각 적률생성함수의 곱이다.
- **로그는 곱을 합으로 바꾼다.** $\ln\left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right)^{-n}$은 극한을 구하기 쉬운 합이 되었다.
- **표준화하라.** 표준편차 $\sqrt{2n}$으로 나누어 분산을 1로 유지했기 때문에 극한이 0도 무한대도 아니게 되었다.

숨은 수학

일반적인 정리

같은 논증은 평균이 0이고 분산 σ^2이 유한한 임의의 분포에 대해서도 성립한다(적률생성함수가 존재해야 하지만, 이 조건은 피할 수 있다). 이때 $\mathrm{M}(\theta) = 1 + \tfrac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + o(\theta^2)$이고,

$$\left(\mathrm{M}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^{\theta^2/2}.$$

극한에서 살아남는 것은 분산뿐이고, 원래 분포의 모양은 잊힌다. 정규분포가 보편적인 이유가 바로 이것이다. 대학에서는 항상 존재하는 **특성함수**(*characteristic function*) $\mathrm{E}(e^{i\theta X})$를 이용하여 이 정리를 증명하고, 분포의 수렴은 레비(Lévy)의 연속성 정리로 엄밀하게 다룬다.

얼마나 빠른가?

중심극한정리는 극한에서 무슨 일이 일어나는지 말해 줄 뿐, 얼마나 빨리 일어나는지는 말해 주지 않는다. **베리-에센 정리**(*Berry–Esseen theorem*)는 오차를 상수 곱하기 $\frac{\mathrm{E}|X|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$으로 제한한다. 개구리의 분포처럼 대칭인 분포에서는 수십 번만 점프해도 근사가 좋다. 치우친(skewed) 분포이거나 꼬리의 극단적인 부분에서는 n이 커도 근사가 나쁠 수 있다. 정규근사는 매우 드문 사건이 일어날 확률을 과소평가하며, 이 사실은 보험과 금융에 중대한 영향을 미친다.

드무아브르에서 린데베리까지

드무아브르(de Moivre)는 1733년에 이항분포의 정규근사를 발견했고(Section 12.23), 라플라스(Laplace)는 1810년에 이를 더 일반적인 확률변수들의 합으로 확장하면서 측정 오차가 많은 작은 효과의 합이라는 생각을 처음 내놓았다. 엄밀한 증명은 훨씬 뒤에 나왔다. 1901년에 알렉산드르 랴푸노프(Aleksandr Lyapunov)가, 그리고 1922년에 야를 린데베리(Jarl Lindeberg)가 증명했는데, 린데베리는 정리가 성립하는 본질적으로 가장 약한 조건을 찾아냈다. "중심극한정리"라는 이름은 1920년에 조지 포여(George Pólya)가 붙인 것으로, 이 정리가 확률론의 중심에 있다는 뜻이다.

사고 기술

변환하고, 단순화하고, 되돌려 변환하라

어려운 연산(독립인 확률변수를 더하는 것, 즉 밀도함수들의 합성곱(*convolution*)을 구하는 것)도 변환을 거치면 쉬운 연산(곱셈)이 된다. 그곳에서 계산을 하고, 그 결과를 해석하라.

같은 전략이 생성함수(Section 9.4), 해석학과 공학에서 쓰이는 푸리에(Fourier) 변환과 라플라스 변환, 그리고 곱셈을 덧셈으로 바꾸는 로그의 바탕에 깔려 있다.

더 도전하기

1 **점프 두 번의 정확한 분포.** $Y = X_1 + X_2$의 밀도함수가 $\frac{1}{4}(1 + |y|)e^{-|y|}$임을 보이고, 분산이 4임을 확인하라.

2 **이항분포에서 정규분포로.** 평균이 0이 되도록 평행이동한(즉 $\pm\frac{1}{2}$의 값을 갖는) $X \sim \mathrm{B}(1, \frac{1}{2})$에 대하여 $\mathrm{M}_X(\theta) = \cosh\frac{\theta}{2}$임을 구하고, 이러한 확률변수 n개의 합을 표준화한 것의 적률생성함수가 $e^{\theta^2/2}$로 수렴함을 보여라.

3 **개구리, 정확하게.** 컴퓨터를 이용하여(또는 검산용으로 $n = 2$일 때의 정확한 밀도함수를 이용하여) $n = 82$일 때 정규근사가 얼마나 정확한지 알아보라.

4 **코시 분포는 왜 안 되는가?** 코시 분포(Cauchy distribution)(Section 12.22)는 적률생성함수가 없다. 논증의 어느 단계가 실패하는가? 그리고 코시 분포를 따르는 확률변수 n개의 평균은 어떻게 되는가?

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press), 생성함수와 극한정리를 다룬 장.
- **Hans Fischer, *A History of the Central Limit Theorem*** (Springer). 라플라스부터 린데베리까지를 다룬다.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican), 정규분포가 어디에나 나타나는 이유를 다룬다.

12.25 여럿 가운데 가장 큰 값

문제

STEP III 2025, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

도입

다음 백 년 동안 일어날 가장 큰 홍수는 얼마나 높을까? 전구 천 개 가운데 가장 오래가는 전구는 얼마나 버틸까? n명이 뛰는 마라톤에서 가장 빠른 주자는 얼마나 빠를까? 여러 확률적 값 가운데 가장 큰 값이나 가장 작은 값, 곧 **극값**(*extremes*)에 관한 질문은 공학, 보험, 기후과학에서 매우 중요하며, 평균과는 전혀 다르게 움직인다.

이 문제에서는 지수분포(exponential distribution)를 따르는 수명 n개 가운데 가장 큰 값의 분포를 구한다. 그 전형적인 크기는 $\ln n$처럼 커진다. 느리지만 한없이 커진다. 그러나 그 퍼짐은 전혀 커지지 않는다. 수명 천 개의 최댓값은 수명 열 개의 최댓값과 대략 같은 정도로 예측 가능하다. 극한에서 그 분포의 모양은 **검벨 분포**(*Gumbel distribution*)이며, 이는 정규분포 곡선에 대응하는 극값의 분포이다.

시작하기 전에

생각해 보기 $X_1, \ldots, X_n$ 가운데 가장 큰 값이 y 이하인 것은 정확히 어떤 일이 일어날 때인가?

$Y \le y$인 것은 정확히 모든 $X_i \le y$일 때이다. 그러면 독립성(independence)에 의해 이것이 곱으로 바뀐다.

차근차근 풀기

1단계 **최댓값의 분포**

각 X_i는 $y \ge 0$에서 $\mathrm{F}(y) = 1 - e^{-\lambda y}$이고, 독립성에 의해

$$\mathrm{G}(y) = \mathrm{P}(X_1 \le y, \dots, X_n \le y) = (1 - e^{-\lambda y})^n. \qquad \blacksquare$$

2단계 **분위수**

> ? **생각해 보기** $\mathrm{G}(L) = \alpha$를 L에 대하여 풀어라. 그다음 $\mathrm{G}(U) = 1 - \alpha$를 풀어라.

$(1 - e^{-\lambda L})^n = \alpha$에서 $e^{-\lambda L} = 1 - \alpha^{1/n}$을 얻으므로

$$L(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\bigl(1 - \alpha^{1/n}\bigr), \qquad U(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\bigl(1 - (1-\alpha)^{1/n}\bigr). \qquad \blacksquare$$

3단계 **큰 n**

> ? **생각해 보기** $\alpha^{1/n} = e^{(\ln\alpha)/n}$으로 써라. n이 크면 지수가 작다. $1 - \alpha^{1/n}$은 근사적으로 얼마인가?

$\alpha^{1/n} = e^{(\ln\alpha)/n} \approx 1 + \frac{\ln\alpha}{n}$이므로 $1 - \alpha^{1/n} \approx \frac{-\ln\alpha}{n} = \frac{\ln(1/\alpha)}{n}$이다. 따라서

$$\lambda L(\alpha) \approx -\ln\frac{\ln(1/\alpha)}{n} = \ln n - \ln\Bigl(\ln\frac{1}{\alpha}\Bigr). \qquad \blacksquare$$

마찬가지로 $\lambda U(\alpha) \approx \ln n - \ln\bigl(\ln\frac{1}{1-\alpha}\bigr)$이다.

4단계 **증가와 퍼짐**

중앙값(median)은 $L(\frac{1}{2})$이고, $\lambda L(\frac{1}{2}) \approx \ln n - \ln\ln 2 \to \infty$이다. 그러나

$$\lambda\bigl(U(\alpha) - L(\alpha)\bigr) \approx \ln\Bigl(\ln\frac{1}{\alpha}\Bigr) - \ln\Bigl(\ln\frac{1}{1-\alpha}\Bigr),$$

이고, 여기서 $\ln n$ 항들은 서로 상쇄되었다. 즉 폭은 n에 의존하지 않는다. $\blacksquare$

5단계 **90% 구간**

> ? **생각해 보기** $\alpha = 0.05$로 놓아라. $\ln\frac{1}{\alpha} = \ln 20$과 $\ln\frac{1}{0.95}$는 근사적으로 얼마인가?

$\alpha = 0.05$일 때 $\ln 20 \approx 3$이므로 $\ln\ln\frac{1}{\alpha} \approx \ln 3$이다. 또 $\ln\frac{1}{0.95} = -\ln(1 - 0.05) \approx 0.05 = \frac{1}{20}$이므로 $\ln\ln\frac{1}{1-\alpha} \approx \ln\frac{1}{20} \approx -3$이다. 따라서 폭은 약 $\frac{1}{\lambda}(\ln 3 + 3) \approx \frac{4.1}{\lambda}$이고, Y는 확률 0.9로 폭이 약 $4\lambda^{-1}$인 구간 $[L(0.05), U(0.05)]$에 놓인다. $\blacksquare$

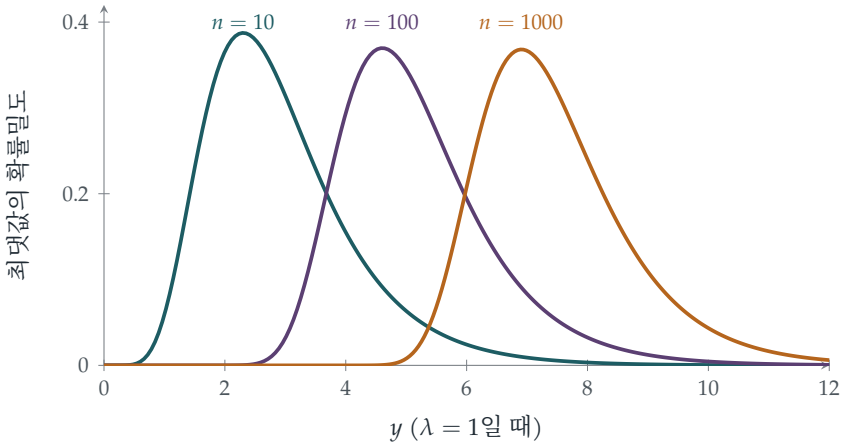


그림 12.25.1 $n = 10, 100, 1000$일 때 지수분포를 따르는 수명(평균 1) n개 가운데 가장 큰 값의 확률밀도. n이 10배가 될 때마다 곡선은 오른쪽으로 $\ln 10 \approx 2.3$만큼 이동하지만, 그 모양과 폭은 사실상 그대로이다. 이것이 $\ln n$만큼 평행이동한 검벨 분포이다.

돌아보기

- **최댓값이 y 이하인 것은 모두가 그럴 때이다.** 독립성 덕분에 최댓값의 분포가 거듭제곱이 되었다.
- **역으로 풀어 분위수 구하기.** $G(y) = \alpha$를 풀어 구간 양 끝의 정확한 공식을 얻었다.
- **근사한 다음 비교하기.** L과 U의 근사식에 모두 $\ln n$이 들어 있었고, 폭에서는 이것이 상쇄되었다.

숨은 수학

검벨 분포

$P(\lambda Y - \ln n \le x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \to \exp(-e^{-x})$이므로, 평행이동한 최댓값 $\lambda Y - \ln n$은 극한에서 분포함수(distribution function)가 $\exp(-e^{-x})$인 **검벨 분포**를 따른다. 그 평균은 오일러(Euler) 상수 $\gamma \approx 0.577$이다. 이 분포는 이미 만난 적이 있다. 쿠폰 n종을 모두 모으는 데 걸리는 시간(Section 9.11)은 (거의 독립인) 대기 시간 n개의 최댓값이며, 그래서 그 값이 약 $n \ln n + \gamma n$이고 n 정도 크기의 검벨 요동을 보이는 것이다.

극값 이론

피셔(Fisher), Tippett, 그네덴코(Gnedenko)의 놀라운 정리(1928–1943)에 따르면, 독립이고 동일한 분포를 따르는 많은 확률변수의 최댓값은 적절히 평행이동하고 축척을 조정하면 극한에서 가능한 모양이 세 가지뿐이다. 검벨 분포(지수분포나 정규분포처럼 꼬리가 가벼운 경우), 프레셰(Fréchet) 분포(코시(Cauchy) 분포처럼 꼬리가 무거운 경우), 바이불(Weibull) 분포(엄격한 상한이 있는 확률변수의 경우)이다. 이는 중심극한정리(central limit theorem)(Section 12.24)의 극값판이라 할 수 있다. 공학자들은 이를 이용해 "백 년 만의 파도"에 대비한 홍수 방어 시설과 해상 구조물을 설계하고, 보험사는 재해 보험료를 책정하며, 기후과학자들은 폭염이 어떻게 변하고 있는지를 추정한다.

검벨과 홍수

에밀 율리우스 검벨(Emil Julius Gumbel)은 독일의 통계학자로, 나치에 공공연히 반대하다가 1932년 대학 교수직에서 쫓겨났고 결국 미국으로 망명했다. 그는 1930년대와 1940년대에 극값 이론을 강의 범람에 적용했다. 그의 책 *Statistics of Extremes*(극값의 통계학, 1958)는 이 분야를 실용적인 도구로 만들었다. 1953년 북해 대홍수 이후 네덜란드를 보호하기 위해 건설된 델타 공사(Delta Works)는 약 10 000년에 한 번 일어날 것으로 예상되는 폭풍 해일을 견디도록 극값 통계를 이용해 설계되었다.

사고 기술

최댓값과 최솟값의 분포

독립인 확률변수들의 최댓값에 대해서는 $\mathrm{P}(\max \le y) = \prod \mathrm{P}(X_i \le y)$이고, 최솟값에 대해서는 $\mathrm{P}(\min > y) = \prod \mathrm{P}(X_i > y)$이다.

이 한 가지 아이디어로 가장 가까운 슈퍼마켓(Section 12.19), 가장 먼저 오는 버스(Section 12.18), 가장 오래가는 전구를 모두 다룰 수 있다. 대학에서는 이것이 순서통계량(order statistics)과 극값 이론의 출발점이 된다.

더 도전하기

1 **최댓값의 기댓값.** $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$임을 보여라. (힌트: 무기억성(memorylessness)에 의해, n개의 수명 가운데 첫 번째 것이 끝난 뒤 남은 $n-1$개는 새로 시작하는 것과 같다.)

2 **최솟값.** $X_1, \ldots, X_n$ 가운데 가장 작은 값이 모수 $n\lambda$인 지수분포를 따름을 보여라.

3 **정확한 중앙값.** Y의 정확한 중앙값을 구하고, $n = 10$일 때 이를 근삿값 $\frac{1}{\lambda}(\ln n - \ln\ln 2)$와 비교하여라.

4 **균등분포의 최댓값.** $X_1, \dots, X_n$이 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따를 때, 그 최댓값 M의 분포를 구하고, n이 클 때 $n(1-M)$이 근사적으로 지수분포를 따름을 보여라. 이는 세 가지 극값 모양 가운데 어느 것인가?

더 읽을거리

- **Stuart Coles, *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*** (Springer). 홍수와 해수면에 관한 실제 자료를 담은 표준 입문서이다.
- **Emil Julius Gumbel, *Statistics of Extremes*** (Dover). 고전이다.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Uncertainty*** (Pelican). 드문 사건과 그것을 어떻게 생각해야 하는지에 관한 책이다.

우리가 배운 것

이 장은 불확실성도 정확하게 추론할 수 있지만 직관으로는 그렇게 할 수 없다는 말로 시작했다. 그리고 세 가지 물음을 던졌다. 문제가 정확히 무엇을 묻는가, 기발한 접근법은 무엇인가, 그리고 장기적으로 어떤 일이 일어나는가? 이 장의 스물다섯 문제가 보여 준 것은 다음과 같다.

1. 문제가 정확히 무엇을 묻는가?

처음 네 절은 문제를 올바르게 이해하는 일에 관한 것이었다. "번호가 적힌 원판을 하나 뽑았다는 조건에서"와 "3번 원판을 뽑았다는 조건에서"는 서로 다른 답을 주었다(Section 12.1). 희귀병에 대한 정확도 90%의 검사에서 양성이 나온 환자가 실제로 병에 걸렸을 확률은 9%에 불과했는데, 이는 기저율(base rate)이 중요하기 때문이다(Section 12.2). "무작위로 그은 현"은 그것을 어떻게 고르는지 정하기 전까지는 기댓값(expected value)으로서의 길이를 갖지 않았고(Section 12.3), 부러진 막대 문제(Section 12.21)도 같은 점을 보여 주었다. 또 "독립(independent)"이라는 말에는 여러 의미가 있음이 드러났다. 사건들이 두 개씩은 독립이지만 전체로는 독립이 아닐 수 있고(Section 12.4), 상관관계가 없는(uncorrelated) 확률변수라고 해서 반드시 독립인 것은 아니다. 어느 경우든 해결책은 가능한 결과가 정확히 무엇이며 그것들이 어떻게 생겨나는지를 적어 보는 것이었다.

2. 기발한 접근법은 무엇인가?

많은 문제에는 긴 계산과 짧은 통찰이 함께 있었다.

- **대칭(symmetry).** 과정이 서로 구별할 수 없는 두 좌석(Section 12.5), 서로 여사건이 되는 거울상으로서의 "앞면이 더 많음"과 "뒷면이 더 많음"(Section 12.6), 어느 경기에서든 모든 선수 쌍이 맞붙을 가능성이 똑같다는 사실(Section 12.7), 어떤 동전이든 HT와 TH가 나올 가능성이 같다는 사실(Section 12.9), 그리고 방향이 균등하게 분포하는 원점 대칭인 점(Section 12.22)이 그 예이다.
- **지시변수(indicator)와 선형성(linearity).** 쌍(Section 12.4), 매듭(Section 12.10), 경기(Section 12.7)의 개수를 지시변수의 합으로 세면, 전체 분포를 구하지 않고도 평균과 분산을 얻을 수 있었다.
- **상태(state)와 첫걸음 분석(first-step analysis).** Penney의 게임(Section 12.8), 토끼 굴과 Ecks 교수(Section 12.16), 그리고 성씨의 소멸(Section 12.15)은 모두 다음 단계에 대한

조건부 확률을 이용해 풀었다.

- **전략(strategy).** 삼자 결투(truel)에서 사격 실력이 가장 나쁜 사람은 일부러 빗맞혀야 하고(Section 12.13), 무작위화 전략(randomised strategy)은 상대가 역이용할 수 없으며(Section 12.14), 후보자 중 처음 $\frac{1}{e}$를 거르는 것이 최적이다(Section 12.12).

3. 장기적으로 어떤 일이 일어나는가?

이 장의 마지막 부분에서는 시간에 따라, 그리고 수많은 시행에 걸쳐 무작위성이 어떻게 전개되는지 따라가 보았다. 분기 과정(branching process)은 소멸하거나 폭발적으로 커지며, 폭발적으로 커지는 과정도 우연히 소멸할 수 있다(Section 12.15). 마르코프(Markov) 연쇄(Markov chain)는 정상 분포(stationary distribution)에 안착하고 자신의 과거를 잊는다(Section 12.16). 지수분포를 따르는 대기 시간(exponential waiting time)은 기억이 전혀 없다(Section 12.18). 평균은 대개 일정한 값에 안정되지만, 평균이 존재하지 않는 코시(Cauchy) 분포(Cauchy distribution)는 예외이다(Section 12.22). 서로 독립인 수많은 효과의 합은 중심극한정리(central limit theorem)에 따라 정규분포가 되며(Section 12.24), 이 정규성 속에는 $n!$에 대한 스털링(Stirling) 공식(Stirling's formula)이 숨어 있다(Section 12.23). 최댓값은 또 다르게 행동한다. 최댓값은 $\ln n$처럼 커지지만 그 퍼진 정도는 전혀 커지지 않는다(Section 12.25). 그리고 상수 e, π, γ는 컵과 우표, 바늘과 고리에서 거듭 나타났다.

4. 확률을 위한 도구 모음

방법	사용한 곳
표본공간(sample space) 적기	조건부 확률(12.1); 베르트랑(Bertrand)(12.3)
베이즈(Bayes) 정리와 오즈(odds)	기저율(12.2); 마르코프 역전(12.16)
대칭	12.5, 12.6, 12.7, 12.22
지시변수와 선형성	12.4, 12.7, 12.10
첫걸음 분석	Penney(12.8); 토끼 굴(12.16); 분기 과정(12.15)
여사건(complement)과 부등식으로 범위 정하기	공정한 결정(12.9)
기댓값을 위한 급수	우표와 e(12.11)
매개변수화와 최적화	비서 문제(secretary problem)(12.12)
게임 이론적 추론	삼자 결투(12.13); 혼합 전략(mixed strategy)(12.14)
끝에 이르는 경로 세기	성냥갑(12.17)
분포함수(distribution function)부터 구하기	12.18, 12.19, 12.25
넓이나 적분으로서의 확률	뷔퐁(Buffon)(12.20); 부러진 막대(12.21)
정규근사(normal approximation)	스털링(12.23); 중심극한정리(12.24)

다음으로

- 13장에서는 확률에서 통계로 넘어가, Section 13.1부터 시작하여 데이터로부터 미지의 양을 추정하는 방법을 다룬다.
- Section 9.8, Section 9.9, Section 9.11의 세기 문제는 이 장의 조합론적 측면에 해당한다.
- 마르코프 연쇄는 7장의 선형대수를 이용하고, 분기 과정의 고정점은 Section 8.7의 동역학을 이용한다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***(확률론 입문): 훌륭한 첫 강좌로, 온라인에서 무료로 볼 수 있으며 동영상 강의도 있다.
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***(확률: 입문): 간결하고 엄밀하며, 대학 1학년 수준이다.
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***(확률의 도전적인 문제 50선): 완전한 풀이가 실린 고전적인 퍼즐 모음이다.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***(통계의 기술)와 ***The Art of Uncertainty***(불확실성의 기술): 현실 세계의 확률과 위험을 다룬다.

라플라스(Laplace)는 확률을 계산으로 환원된 상식이라고 불렀다. 이 장에서 보았듯이, 계산이 필요한 것은 바로 상식이 실패하는 경우가 많기 때문이며, 가장 좋은 계산은 숫자를 내놓는 데 그치지 않고 무엇인가를 설명해 준다. 대칭, 지시변수, 잘 고른 상태, 또는 극한 정리는 퍼즐을 통찰로 바꾸어 놓으며, 대학의 확률론 강좌는 바로 이러한 통찰 위에 세워진다.

더 도전하기 해답

여기에 실은 것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계만 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓰면 된다. 답을 보기 전에 각 문제를 제대로 풀어 보아야 한다.

12.1 조건을 정확하게 걸기

1. (iv)와 (v) 모두에서 나머지 $k-1$개의 원판은 남은 $b+n-1$개 가운데에서 무작위로 고른 것이고, 그중 $n-1$개에 번호가 적혀 있으므로 둘 다 $\frac{(n-1)\binom{b}{k-2}}{\binom{b+n-1}{k-1}}$와 같다. (vi)의 답은 $\frac{\binom{n}{2}\binom{b}{k-2}}{\binom{b+n}{k}-\binom{b}{k}}$이다. $N=b+n$이라 하면 두 값은 $(2N-nk)\binom{N-1}{k-1} = 2k\binom{b}{k}$일 때에만 일치한다. 이런 일은 $(b,n,k)=(2,4,3), (3,3,4), (6,11,3)$과 같은 특이한 경우나, $n=2$이고 모든 원판을 뽑는 자명한 경우에만 일어난다. 문제에서 주어진 값에서는 성립하지 않는다.

2. 두 아이에 대한 같은 정도로 가능한 $14^2 = 196$개의 (성별, 요일) 쌍 가운데 화요일에 태어난 남자아이가 적어도 한 명 있는 것은 $196 - 13^2 = 27$개이다. 그중 두 아이가 모두 남자아이인 것은 $7^2 - 6^2 = 13$개이다. 따라서 확률(probability)은 $\frac{13}{27}$이다.

3. 1번 문을 골랐다고 하자. 자동차가 1번 문 뒤에 있으면(확률 $\frac{1}{3}$) 바꾸면 진다. 자동차가 2번이나 3번 문 뒤에 있으면 진행자는 염소가 있는 나머지 문을 열 수밖에 없으므로 바꾸면 이긴다. 그 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 진행자가 문을 무작위로 열었는데 마침 염소가 나왔다면, 본 것이 주어졌을 때 "자동차가 내가 고른 문 뒤에 있다"와 "자동차가 닫힌 다른 문 뒤에 있다"는 두 결과는 같은 정도로 가능하므로 답은 $\frac{1}{2}$이다.

4. $\mathrm{P}(\geq 2 \mid \geq 1) = \frac{1-\mathrm{P}(0)-\mathrm{P}(1)}{1-\mathrm{P}(0)} \approx 0.370$이지만 $\mathrm{P}(\geq 2 \mid$ 스페이드 에이스$) = 1 - \binom{48}{12}/\binom{51}{12} \approx 0.561$이다. 어느 에이스인지 알면 두 번째 에이스가 있을 가능성이 더 커진다.

12.2 기저율 오류

1. 두 사람이 모두 "시신이 있다"고 말할 확률은 시신이 실제로 있으면 pq, 없으면 $(1-p)(1-q)$이다. 사전 오즈(prior odds)가 1 : 1이면 사후 확률(posterior probability)은 $\frac{pq}{pq+(1-p)(1-q)} = \frac{pq}{1-p-q+2pq}$이다. 두 번째 부분에서 "$A$에 있다"는 같은 정도로 가능한 세 경우 가운데 두 경우에서 참이므로 $\mathrm{P}($둘 다 $\mid$ 두 사람 모두 지목한 곳 $A) =$

$\frac{pq}{2pq+(1-p)(1-q)}$이다.

2. $0.9\pi > \frac{1}{11}(1-\pi)$, 즉 $\pi > \frac{10}{109} \approx 9.2\%$이어야 한다.

3. AL 검사에서 양성이 한 번 나올 때마다 오즈에 $\frac{0.9}{1/11} = 9.9$가 곱해진다. 사전 오즈 $\frac{1}{99}$에서 시작하면, 양성이 한 번 나온 뒤의 오즈는 0.1(확률 $\frac{1}{11}$), 두 번 나온 뒤에는 0.99(확률 약 0.497), 세 번 나온 뒤에는 9.8(확률 약 0.907)이다.

4. 그 질환이 있는 100명 가운데 99명이 양성 판정을 받고, 질환이 없는 999 900명 가운데 약 9999명이 양성 판정을 받는다. 따라서 약 10 100명이 질환이 있을 수 있다는 말을 듣지만, 그중 실제로 질환이 있는 사람은 99명(약 1%)뿐이다.

12.3 "무작위"란 무슨 뜻인가?

1. 현(chord)이 내접 정삼각형의 한 변 $\sqrt{3}a$보다 길어지는 경우는 다음과 같다. 먼 쪽 끝점이 가까운 쪽 끝점의 반대편에 있는 원의 삼분의 일 부분에 놓일 때($\frac{1}{3}$), O로부터의 거리가 $\frac{a}{2}$보다 작을 때($\frac{1}{2}$), 중점이 반지름 $\frac{a}{2}$인 원 안에 놓일 때($\frac{1}{4}$)이다.

2. 중점이 C인 현은 OC에 수직이므로, C를 지나고 각이 $t = \frac{\pi}{2}$인 현이다. 따라서 $L(\frac{\pi}{2}) = \frac{4a}{3}\left(0 + \frac{1}{2}\sec^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4a}{3}$이다.

3. 길이는 $2\sqrt{a^2-d^2}$이고, 그 평균은 $\frac{2}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-d^2}\,\mathrm{d}d = \frac{2}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a}{2}$이다.

4. 무작위 끝점: $\frac{2}{\pi\sqrt{4a^2-\ell^2}}$. 무작위 거리: $\frac{\ell}{2a\sqrt{4a^2-\ell^2}}$. 무작위 중점: $\frac{\ell}{2a^2}$.

12.4 둘씩은 독립이지만 한꺼번에는 독립이 아닌

1. 전개하면 $\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = (a-pq)(x_1-x_2)(y_1-y_2)$이므로 $a = pq$이다. 그러면 나머지 세 칸도 따라서 정해지고, 독립(independence)이 된다. 예: $(0,0)$에 확률 $\frac{1}{3}$을, $(\pm1,\pm1)$ 각각에 확률 $\frac{1}{6}$을 준다. 두 주변 분포(marginal distribution)는 모두 균등하고 $\mathrm{E}(AB) = 0$이지만 $\mathrm{P}(A=0, B=1) = 0 \neq \frac{1}{9}$이다.

2. 쌍은 21개이고, 각 쌍이 일치할 확률은 $\frac{1}{6}$이며, 지시변수(indicator)들은 쌍마다 독립(pairwise independent)이다. 따라서 평균은 3.5, 분산(variance)은 $21\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} \approx 2.92$, 표준편차(standard deviation)는 약 1.71이다. 점수 7은 평균보다 표준편차의 약 두 배만큼 높다.

3. 평균은 $\binom{k}{2}\frac{1}{365}$이다. 주사위의 경우와 똑같이 지시변수들이 쌍마다 독립이므로 분산은 $\binom{k}{2}\frac{1}{365}\cdot\frac{364}{365}$이다. (상호 독립(mutually independent)은 아니다. 1, 2와 2, 3이 일치하면 1, 3도 일치하기 때문이다.)

4. 같은 정도로 가능한 결과 여덟 개를 잡고 $A = B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{1,5,6,7\}$로 둔다. 그러면 $\mathrm{P}(A\cap B\cap C) = \frac{1}{8}$이지만 $\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$이다.

12.5 마지막 승객의 좌석

1. 모든 $n \geq 3$에 대하여 $\frac{1}{3}$이다. 이제 마지막 좌석은 S_1, S_2, S_n 가운데 하나이고, 모든 무작위 선택이 이 세 좌석을 대칭적으로 다룬다.

2. T_1이 S_1에 앉으면 아무도 자리를 빼앗기지 않는다. T_1이 S_3에 앉으면 T_1과 T_3이 자리를 빼앗긴다. T_1이 S_2에 앉으면 T_2가 고르는데, S_1을 고르면 2명, S_3을 고르면 3명이 자리를 빼앗긴다. 기댓값(expectation)은 $\frac{1}{3}\left(0+2+\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$이고, 이는 공식에서 얻은 $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$와 일치한다.

3. $r \geq 2$에 대하여 $P_r = \frac{1}{2}$이면 $\frac{1}{n}\left(1+\frac{n-2}{2}\right) = \frac{1}{2}$이므로, 점화식(recurrence)은 $P_n = \frac{1}{2}$와 모순되지 않는다.

4. 마지막으로 비어 있는 좌석은 항상 S_1 또는 S_n이다(다른 S_k는 늦어도 T_k가 탑승할 때에는 차 있다). 따라서 그것이 S_n이 아니면 S_1이다.

12.6 동전 하나 더

1. Bob이 처음 $n+1$번 던진 결과를 H', 마지막으로 던진 결과를 X라 하자. Bob은 $H' > H_A$이거나, $H' = H_A$이고 X가 앞면이면 이긴다. 따라서 확률은 $\mathrm{P}(H' > H_A) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(H' = H_A)$이고, 동전 하나를 더 던지는 경우의 결과에 의해 $\mathrm{P}(H' > H_A) = \frac{1}{2}$이다.

2. 아니다. $n = 0$이면 Bob이 이길 확률은 p이다. 간결한 증명은 앞면과 뒷면을 맞바꾸는데, 이는 공정한 동전일 때에만 대칭이 된다.

3. $H_A = H_B$인 것은 정확히 $H_A +$ (Bob의 뒷면 수) $= n$일 때이고, 이 좌변은 n과 같아지는 $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ 확률변수이다. 값은 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$이다.

4. 아니다. 6이 나오는 것은 $p = \frac{1}{6}$인 동전과 같다. $n = 0$일 때 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 일반적으로 $\frac{1}{2}$보다 작다.

12.7 토너먼트에서 누가 누구와 만나는가

1. k라운드에는 2^{n-k}개의 경기가 있고, 대칭성에 의해 각 경기는 $\binom{2^n}{2}$개의 쌍 가운데 어느 쌍이든 같은 정도로 치를 가능성이 있다. 토너먼트 전체의 $2^n - 1$개 경기에 대해 더하면 $\frac{2^n-1}{\binom{2^n}{2}} = \frac{2}{2^n}$이다.

2. 아니다. 고정된 대진표에 무작위로 배치해도 대칭성은 유지되므로 같은 셈이 적용된다.

3. X의 k라운드 상대는 2^{k-1}명으로 이루어진 한 조에서 나오고, 그 조의 각 선수가 조에서 이길 가능성은 같다. 따라서 Y가 그 상대일 확률은 $\frac{2^{k-1}}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^n-1}$이고, n개 라운드에 대한 합은 $\frac{n}{2^n-1}$이다.

4. 경기는 $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$개이고, 모든 쌍이 맞붙으므로 확률은 1이다.

12.8 페니의 게임

1. HHT는 처음 두 번이 HH일 때에만 이긴다. 그렇지 않으면 HH가 완성되기 전에 T가 나오고, 그러면 THH가 먼저 나타날 수밖에 없다. 따라서 HHT가 이길 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 네 명이 모두 참가하는 경우: HH 다음에는 HHT가 반드시 이기고, TT 다음에는 TTH가 반드시 이긴다. HT와 TH에서 HTT와 THH가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$과 $\frac{1}{3}$(또는 그 반대)이므로, 각 참가자가 이길 확률은 $\frac{1}{4}\cdot 1$ 또는 $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)$, 즉 $\frac{1}{4}$이다. TTH는 확률 $\frac{2}{3}$으로 THH를 이긴다(소문항 (i)).

2. HH의 경우: $e_0 = 1 + \frac{1}{2}e_{\mathrm{H}} + \frac{1}{2}e_0$이고 $e_{\mathrm{H}} = 1 + \frac{1}{2}e_0$이므로 $e_0 = 6$이다. HT의 경우: H가 한 번 나오면 T를 기다리면 되고(평균 두 번), 첫 H가 나오는 데에도 두 번이 걸리므로 4이다.

3. HHH와 TTT는 각각 THH와 HTT에게 확률 $\frac{7}{8}$로 지고, HHT와 TTH는 THH와 HTT에게 $\frac{3}{4}$로 지며, 나머지 네 개(HTH, HTT, THH, THT)는 각각 HHT, HHT, TTH, TTH에게 $\frac{2}{3}$으로 진다. HHH와 TTT가 가장 쉽게 진다.

4. $A = \mathrm{HTT}$, $B = \mathrm{HHT}$라 하면 상관값은 $AA = 4$, $AB = 0$, $BB = 4$, $BA = 2$이다. B가 이길 오즈는 $(AA - AB) : (BB - BA) = 4 : 2$, 즉 확률 $\frac{2}{3}$이다.

12.9 치우친 동전으로 공정하게 정하기

1. 라운드 수는 기하 분포(geometric distribution)를 따른다. 평균은 소문항 (i)에서 $\frac{1}{p^2+q^2}$이고, 폰 노이만(von Neumann)의 절차(HT 또는 TH)에서는 $\frac{1}{2pq}$이다. $p^2 + q^2 - 2pq = (p-q)^2$이므로 모든 $p \neq \frac{1}{2}$에 대해 폰 노이만의 방법이 더 느리다. 그러나 공정한 것은 이 방법이다.

2. 폰 노이만의 방법으로 공정한 비트를 만든다. 두 개씩 묶어서 00, 01, 10으로 세 가지 선택지를 정하고, 11이면 다시 시작한다.

3. 던진 결과를 하나씩 이진 전개 $\frac{1}{3} = 0.010101\ldots$와 비교한다(H는 1, T는 0으로 읽는다). 처음으로 다른 자리가 나왔을 때, 던진 결과가 그 자리의 숫자보다 **작으면**(T와 1) "앞면", 그렇지 않으면 "뒷면"이라고 선언한다. 이렇게 하면 앞면이 나올 확률이 정확히 $\frac{1}{3}$이 되고, 평균 2번 던진다.

4. 결정이 나지 않은 라운드 뒤에는 한 면이 두 개, 다른 면이 한 개이고, 이 과정은 이 두 상태 위의 마르코프 연쇄(Markov chain)이다. 이를 풀면 $\mathrm{P}(\text{호텔}) = \frac{p^3}{p^3+q^3}$이고, 이는 $p = \frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{2}$이다. 그때에는 공정하지만 다른 경우에는 공정하지 않다.

12.10 느슨한 끈 끝 묶기

1. 첫 번째 매듭이 고리를 만들 확률은 $\frac{1}{3}$이고(다른 세 끝 가운데 하나가 같은 끈의 끝이다), 마지막 매듭은 항상 고리를 만든다. 고리의 수는 확률 $\frac{1}{3}$으로 2, 확률 $\frac{2}{3}$으로 1이고, 평균은 $\frac{4}{3}$이다.

2. 끈이 k개 남았을 때 매듭이 고리를 만들지 않을 확률은 $1 - \frac{1}{2k-1}$이다. 곱 $\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-2}{2k-1}$는 $\frac{4^n}{2n\binom{2n}{n}}$과 같고, 이는 약 $\frac{\sqrt{\pi n}}{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$이다.

3. 원소 $1, 2, \ldots, n$을 차례로 끼워 넣는다. 원소 k는 새 순환(cycle)을 시작하거나(확률 $\frac{1}{k}$), 앞서 넣은 $k-1$개 원소 가운데 하나 뒤에 놓인다. 지시변수들을 더하면 H_n이다.

4. 연이은 매듭들의 고리 지시변수들은 확률이 $\frac{1}{2k-1}$인 독립 변수이므로 분산은 $\sum \frac{1}{2k-1}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)$이다. 그리고 $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$이다.

12.11 우표, 컵, 그리고 e

1. $\sum_{k\geq 2} \frac{k-1}{k!} t^k = te^t - (e^t - 1) = 1 + (t-1)e^t$이다. 미분(differentiation)하면 $\mathrm{E}(N) = \mathrm{G}'(1) = e$이고 $\mathrm{E}(N(N-1)) = \mathrm{G}''(1) = 2e$이므로 $\mathrm{Var}(N) = 3e - e^2$이다.

2. $\mathrm{P}(N = j)$는 $k = 0, \ldots, j-1$에 대한 $\mathrm{P}(N > k)$에 나타나므로 j번 나타난다. 여기서 $\mathrm{P}(N > k) = \frac{1}{k!}$이므로 $\mathrm{E}(N) = \sum \frac{1}{k!} = e$이다.

3. 전혀 달라지지 않는다. 컵이 하나 남으면 Jim은 반드시 올바르게 "추측"한다. 가격의 기댓값은 여전히 e이다.

4. $\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}$이다. 일반적으로 $u_k = u$에서의 단면은 $1-u$배로 축소한 $(k-1)$차원 단체(simplex)이므로 $V_k = V_{k-1}\int_0^1 (1-u)^{k-1}\,\mathrm{d}u = \frac{V_{k-1}}{k}$이다.

12.12 언제 그만 찾아야 하는가

1. 가장 큰 것이 $k \geq 2$번째 자리에 있으면, 첫 번째 아이스크림이 처음 $k-1$개 가운데 가장 클 때에만 그것을 얻으며, 그 확률은 $\frac{1}{k-1}$이다. k에 대해 평균하면 $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}$이고, $n = 4$이면 이는 $\frac{11}{24}$이다. 24가지 순서를 모두 나열하면 두 번째, 세 번째, 네 번째로 큰 것을 얻을 확률은 $\frac{7}{24}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$이다.

2. $r = 0, 1, 2, 3$명을 거절하면 확률은 $\frac{1}{4}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$이다. 따라서 한 명을 거절해야 하고, 성공 확률은 $\frac{11}{24}$이다.

3. 처음 n명 가운데 가장 나은 사람이 상위 두 명 안에 들 확률은 $\frac{n}{N} + \frac{n}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$이고, n이 작을 때 이는 $\frac{n}{N}$의 거의 두 배이다. 상위 두 명 가운데 한 명이면 된다면, 결정하기 전에 살펴볼 후보를 더 적게 잡아도 된다. (이 목표에 대한 최선의 전략은 약 0.57의 확률로 성공한다.)

4. $\mathrm{P}(r) = \frac{r}{N}\sum_{k=r}^{N-1}\frac{1}{k}$를 쓰면, $N = 10$일 때 $r = 2, 3, 4$에서 0.366, 0.399, 0.398이고, $N = 100$일 때 $r = 36, 37, 38$에서 0.3710, 0.3710, 0.3708이며 $r = 37$이 근소하게 앞선다.

12.13 삼자 결투

1. Algernon이 빗나가면 Bertie는 Cuthbert를 향해 던진다. Bertie가 맞히면($\frac{3}{5}$) Algernon이 먼저 던지는 Algernon 대 Bertie의 대결이 되고, Bertie가 이길 확률은 $1 - \frac{2/5}{2/5+3/5-6/25} = \frac{9}{19}$이다. Bertie가 빗나가면 Cuthbert가 Bertie를 맞히고, 그다음 Algernon이 먼저 맞히지 않는 한($\frac{3}{5}$) Cuthbert가 이긴다. 따라서 Bertie가 이길 확률은 $\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{19} = \frac{135}{475}$이고 Cuthbert가 이길 확률은 $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{114}{475}$이다.

2. 모든 $a < 1$에 대해서이다. 빗나가면 $\frac{3}{5}\cdot\frac{a}{a+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}a} + \frac{2}{5}a$이고, Cuthbert를 맞히면 $1 - \frac{3/5}{3/5+a-\frac{3}{5}a}$인데(그러면 Bertie가 먼저 Algernon을 향해 던진다) 이는 항상 더 작으며, Bertie를 맞히면 0이다.

3. 아니다. Bertie가 Algernon을 향해 던져 맞히면 그다음 Cuthbert가 Bertie를 맞히고, 빗나가도 Cuthbert가 어차피 Bertie를 맞힌다. 어느 쪽이든 Bertie는 아무것도 얻지 못하지만, Cuthbert를 향해 던지면 $\frac{27}{95}$을 얻는다.

4. $p + (1-p)(1-r)p$이고, 이는 기하급수(geometric series) 전체의 합인 $\frac{p}{p+r-pr}$보다 작다.

12.14 혼합 전략

1. $b = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$이면 $X = Y = Z = 0$이므로 B는 어떤 전략에 대해서든 0을 얻는다. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$에 대해서는 A가 1, 2, 3을 추측할 때의 기대 이득이 각각 $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$이므로 A는 항상 3을 추측해야 한다.

2. 이득 행렬(payoff matrix)은 대각선에 0, 나머지에 ± 1이 있고, 세 전략을 순환적으로 치환해도 변하지 않으므로 최적 전략은 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$이다. 문제에서는 차이가 1일 때와 2일 때의 벌점이 다르므로 전략들을 서로 바꿀 수 없다.

3. $X, Y, Z \geq 0$이고 $X + 2Y + Z = 0$이면 세 값이 모두 0이다. 그러면 $b_1 = b_3, b_2 = 2b_3$이어야 한다.

4. 이제 $X = -b_2 + 3b_3$, $Y = b_1 - b_3$, $Z = -3b_1 + b_2$이고 $X + 3Y + Z = 0$이다. 세 값을 모두 0으로 놓으면 $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$를 얻는다.

12.15 멸종인가 폭발인가

1. 소멸 확률(extinction probability)은 $s = (q + ps)^2$의 $[0,1]$에 있는 가장 작은 근이다. 근은 1과 $\left(\frac{q}{p}\right)^2$이고, 두 번째 근이 1보다 작은 것은 정확히 $p > \frac{1}{2}$일 때이다.

2. X_{n-1}이 주어졌을 때 X_n의 평균은 $2pX_{n-1}$, 분산은 $2pqX_{n-1}$이므로 $\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{E}(2pqX_{n-1}) + (2p)^2\mathrm{Var}(X_{n-1})$이다. $p = \frac{1}{2}$이면 $\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(X_{n-1}) + \frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{Var}(X_n) = \frac{n}{2}$이다.

3. n세대까지 소멸한다는 것은 첫 세대 각 입자의 계보가 $n-1$세대 안에 끊긴다는 뜻이다. $p = \frac{3}{4}$이면 $e_1 = 0.0625$, $e_2 \approx 0.0881$, $e_3 \approx 0.0999$이고, $\frac{1}{9} \approx 0.111$을 향해 증가한다.

4. $s = \frac{1}{4}(1 + s + s^2 + s^3)$은 $(s-1)(s^2 + 2s - 1) = 0$으로 인수분해되므로 소멸 확률은 $\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$이다.

12.16 앞으로 보고 거꾸로 보는 마르코프 연쇄

1. 대칭성에 의해 $p_B = p_D$이고, 또 $p_A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_B$, $p_B = \frac{1}{3}p_A + \frac{1}{3}p_C$, $p_C = \frac{2}{3}p_B$이다. 따라서 $p_A = \frac{7}{15}$이다. A에서 출발하여 C를 거치지 않고 A에서 떠나는 경우: $x_A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_B$, $x_B = \frac{1}{3}x_A$이므로 $x_A = \frac{3}{7}$이다. 조건부 확률(conditional probability)은 $\frac{3/7}{7/15} = \frac{45}{49}$이다.

2. 첫 번째 행에 P를 곱하면 $(0.19, 0.33, 0.48)$이다.

3. 대각합(trace)은 1.3, 행렬식(determinant)은 0.02이고, 1은 고윳값(eigenvalue)이다(각 행의 합이 1). 나머지 두 고윳값은 합이 0.3, 곱이 0.02이므로 0.2와 0.1이다.

4. $a_1 p_{12} = \frac{1}{20}$이지만 $a_2 p_{21} = \frac{1}{15}$이므로 이 연쇄는 가역(reversible)이 아니다. 거꾸로 돌리면 전이 확률(transition probability)이 달라진다(소문항 (iii)의 q_{ij}가 p_{ij}와 다르다).

12.17 바나흐의 성냥갑

1. 두 번째로 손을 뻗을 때 첫 번째와 같은 종류를 고르면 그때 봉지가 비었음을 알게 된다($N = 2$). 그렇지 않으면 다른 사탕을 꺼내고, 세 번째로 손을 뻗을 때 빈 봉지를 발견한다. 따라서 $N = 2$ 또는 3이고, 각각의 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

2. $n = 1$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. $n = 2$: $\frac{6}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = 1$.

3. $\binom{2n-1}{n}2^{-(2n-1)} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} \cdot 2 \cdot 4^{-n} = \binom{2n}{n}4^{-n}$.

4. 남은 토피와 민트의 개수에 대해 첫 단계 점화식을 세우면 $\frac{64}{81} \approx 0.79$를 얻는다.

12.18 무기억성

1. $\mathrm{P}(\min > t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$이다. 다음 버스를 기다리는 시간은 분당 비율이 $\frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10}$인 지수 분포(exponential distribution)를 따르므로, 그 중앙값(median)은 $10\ln 2 \approx 6.9$분이다.
2. $\mathrm{P}(Y \geq k) = (1-p)^k$이므로 비는 $(1-p)^n$이다.
3. t를 포함하는 간격은 직전 버스까지 거슬러 올라가는 시간과 다음 버스까지의 시간으로 이루어지며, (t가 클 때) 둘 다 평균이 $\frac{1}{\lambda}$인 지수 분포를 따르므로 그 길이의 기댓값은 $\frac{2}{\lambda}$이다. 긴 간격일수록 주어진 시각을 포함할 가능성이 크다.
4. $[0,1]$에서 $\frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$이다. $\lambda = 1$이면 약 1.58에서 0.58로 완만하게 감소하고, $\lambda = 5$이면 0 근처에 몰려 있으며 약 5.03에서 0.03으로 감소한다.

12.19 평면 위의 무작위 점

1. $1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2} = \frac{1}{2}$에서 중앙값 $\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi k}} \approx \frac{0.470}{\sqrt{k}}$를 얻는데, 이는 평균 $\frac{1}{2\sqrt{k}}$보다 조금 작다.
2. $\mathrm{P}(Y_2 > y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}(1 + \pi k y^2)$이므로 확률밀도(probability density)는 $2\pi^2 k^2 y^3 \mathrm{e}^{-\pi k y^2}$이다.
3. 극좌표(polar coordinates)에서 R의 확률밀도는 $\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/(2\sigma^2)} \cdot 2\pi r$이다. 이는 $\sigma^2 = \frac{1}{2\pi k}$일 때 슈퍼마켓 분포와 일치한다.
4. m^2당 $k = 4 \times 10^{-4}$이면 완전한 무작위성에서 예측되는 평균은 $\frac{1}{2\sqrt{k}} = 25\,\mathrm{m}$이다. 관측값 35 m는 이보다 크므로, 나무들이 모여 있다기보다는 (경쟁 때문에) 서로 떨어져 있음을 시사한다.

12.20 뷔퐁의 바늘

1. 바늘을 짧은 조각들로 자른다. 교차 횟수의 기댓값은 더할 수 있고, 각 짧은 조각은 길이에 비례하여 기여하므로, a가 무엇이든 전체는 $\frac{2a}{\pi b}$이다.
2. 같은 가법성(뷔퐁(Buffon)의 국수 문제)에 의해 여전히 $\frac{2a}{\pi b}$이다.
3. 중심이 모든 변에서 적어도 r만큼 떨어져 있어야 하므로 $\frac{(s-2r)^2}{s^2}$이다.
4. $\frac{1808}{3408} \approx \frac{5}{3\pi}$에서 $\pi \approx \frac{5\times 3408}{3\times 1808} = \frac{17040}{5424} = \frac{355}{113}$을 얻는다. 의심스러울 만큼 완벽하다.

12.21 막대 부러뜨리기

1. 삼각형이 되려면 모든 조각이 $\frac{1}{2}$보다 짧아야 한다. 부러지는 점들의 단위 정사각형에서 이 조건은 넓이가 $\frac{1}{4}$인 영역을 잘라 낸다.

2. 첫 번째로 부러지는 점이 $x < \frac{1}{2}$에 있고(다른 경우는 대칭이다), 더 긴 조각 $1-x$를 균등하게 부러뜨린다고 하자. 새로 생긴 두 조각이 모두 $\frac{1}{2}$보다 짧아야 하며, 그 확률은 $\frac{x}{1-x}$이다. 따라서 답은 $2\int_0^{1/2} \frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$이다.

3. C에서의 각이 둔각인 것은 $(2-x-y)^2 > x^2+y^2$, 즉 $y < \frac{2-2x}{2-x}$일 때이다. 이 곡선과 $x+y=1$ 사이의 넓이는 $\frac{3}{2} - 2\ln 2$이므로 확률은 $3-4\ln 2$이고, B에서와 같다. 이는 우연이 아니다. 세 변은 각각 1 이하이고 합이 2이며 균등하게 분포하므로 서로 바꿀 수 있다. 따라서 $\mathrm{P}(\text{둔각}) = 9 - 12\ln 2 \approx 0.68$이다.

4. 포함배제 원리(inclusion–exclusion principle)에 의해 가장 긴 조각 M은 $\mathrm{P}(M > m) = 3(1-m)^2 - 3(1-2m)_+^2 + (1-3m)_+^2$을 만족한다. 여기서 $x_+ = \max(x,0)$이다. $[0,1]$에서 적분(integration)하면 $\mathrm{E}(M) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$이다.

12.22 평균이 없는 분포

1. $\mathrm{P}(\tan\Theta \le k) = \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}k + \frac{\pi}{2}\right)$이고, 미분하면 $\frac{1}{\pi(1+k^2)}$이다.

2. U와 V를 맞바꾸어도 방사 대칭인 확률밀도는 보존되므로 $\frac{V}{U}$는 $\frac{U}{V}$와 같은 분포를 따른다.

3. 확률밀도가 대칭이므로 중앙값은 0이고, $\mathrm{P}(C \le 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}1 = \frac{3}{4}$이다.

4. $\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-r^2/2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$이고, $s = r^2$으로 놓으면 이는 $\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-s/2}\,\mathrm{d}s$이다. 즉 각은 균등 분포, R^2은 평균이 2인 지수 분포를 따르며, 둘은 독립이다.

12.23 확률로 얻는 스털링 공식

1. $\sqrt{20\pi}(10/\mathrm{e})^{10} \approx 3\,598\,696$(약 0.8% 작음)이고 $\sqrt{40\pi}(20/\mathrm{e})^{20} \approx 2.4228 \times 10^{18}$(약 0.4% 작음)이다.

2. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{\sqrt{4\pi n}(2n/\mathrm{e})^{2n}}{2\pi n(n/\mathrm{e})^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

3. $100\log_{10}\frac{100}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\log_{10}(200\pi) \approx 157.97$이므로 100!은 158자리 수이다.

4. $\binom{1000}{500}2^{-1000} \approx \frac{1}{\sqrt{500\pi}} \approx 0.0252$.

12.24 중심극한정리

1. 합성곱(convolution)을 하면 $\frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{-|x|-|y-x|}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(1+|y|)\mathrm{e}^{-|y|}$이다. 분산은 $2+2=4$이다.

2. $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\theta/2} + \mathrm{e}^{-\theta/2}) = \cosh\frac{\theta}{2}$이다. 표준화한 합 $\frac{2}{\sqrt{n}}\sum X_i$의 생성함수는 $\cosh^n\frac{\theta}{\sqrt{n}}$이고, 그 로그는 $n\ln\left(1 + \frac{\theta^2}{2n} + \cdots\right) \to \frac{\theta^2}{2}$이다.

3. Y를 서로 독립인 두 $\Gamma(82,1)$ 확률변수의 차로 쓰고 수치적으로 적분하면 $\mathrm{P}(|Y| \geq 25) \approx 0.051$을 얻는다. 정규 근사(normal approximation)가 매우 좋다.

4. 적률생성함수(moment generating function)가 없고, 평균조차 없다. 사실 서로 독립인 n개의 코시(Cauchy) 확률변수의 평균은 그 자체로 코시 분포를 따른다. 평균을 내도 전혀 한곳으로 모이지 않는다.

12.25 여럿 가운데 가장 큰 값

1. n개의 수명 가운데 첫 번째 수명은 평균 시간 $\frac{1}{n\lambda}$ 뒤에 끝나고, 그다음에는 $n-1$개가 남아 새로 시작하며, 이런 식으로 계속된다. 따라서 $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\right)$이다.

2. $\mathrm{P}(\min > t) = (\mathrm{e}^{-\lambda t})^n = \mathrm{e}^{-n\lambda t}$.

3. $(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})^n = \frac{1}{2}$에서 $\lambda y = -\ln(1-2^{-1/n})$을 얻는다. $n = 10$이면 이는 2.704이고, 근삿값은 $\ln 10 - \ln\ln 2 \approx 2.669$이다.

4. $\mathrm{P}(M \leq m) = m^n$이므로 $\mathrm{P}\big(n(1-M) > s\big) = \big(1 - \frac{s}{n}\big)^n \to \mathrm{e}^{-s}$이다. 이것은 와이블(Weibull) 유형이다. 확률변수들이 위로 유계(bounded above)이고, 최댓값이 그 상계 쪽으로 몰린다.

장

13

세상 속의 통계와 무작위성

확률은 모형에서 데이터로 나아간다. 통계는 데이터에서 다시 세상으로 거슬러 올라간다.

이 장의 내용

13.1 신문 머리기사 읽기 STEP I 1992

13.2 들쥐 세기 STEP II 2000

13.3 독일 전차 문제 STEP III 1998

13.4 평균인가, 중앙값인가? STEP II 2000

13.5 곤란한 질문 던지기 STEP II 2023

13.6 쌓이는 오차 STEP II 1993

13.7 상관관계 만들어 내기 STEP III 2010

A 연습문제 해답 1057쪽

데이터에서 배우기

> 모든 모형은 틀렸다. 그러나 그중 일부는 쓸모가 있다.
>
> — 조지 박스(George Box), 통계학자

확률(probability)에서는 주사위가 어떻게 조작되어 있는지 알고 앞으로 무슨 일이 일어날지를 묻는다. 통계학(statistics)에서는 무슨 일이 일어났는지를 보고 주사위가 어떻게 조작되어 있어야 하는지를 묻는다. 확률은 원인에서 결과로 추론하고, 통계학은 결과에서 원인으로 거슬러 올라가 추론한다. 개체 수에 대한 모든 추정값(estimate), 모든 여론조사, 모든 임상시험, 모든 과학적 측정은 통계적 추론(statistical inference)이다. 즉 제한되고 잡음이 섞인 데이터로부터 세상에 대해 이끌어 낸 결론이다.

통계학은 수학의 대부분의 분야에 비하면 젊은 학문이다. 오늘날의 모습은 20세기 초에 칼 피어슨(Karl Pearson), 로널드 피셔(Ronald Fisher), 예지 네이만(Jerzy Neyman) 등이 만들었으며, 그 동기는 흔히 실용적인 문제였다. 맥주 양조(t-검정은 기네스 양조장에서 발명되었다), 농작물 재배, 의약품 시험 같은 것들이다. 데이터가 폭발적으로 늘어난 오늘날, 통계학과 그 가까운 친척인 기계학습(machine learning)은 수학의 가장 중요한 응용 분야 가운데 하나이다.

통계학은 왜 중요한가

의약품, 공중보건, 경제 정책, 기후, 사법에 관한 결정은 모두 통계적 증거에 기반한다. 이 증거를 잘못 읽으면 실제로 대가를 치른다. 위양성(false positive) 결과에 겁을 먹은 환자(Section 12.2), 우연한 변동에 근거한 정책(Section 13.1), 작은 오차가 쌓여 가는 컴퓨터 시스템(Section 13.6)이 그 예이다. 데이터가 무엇을 말해 줄 수 있고 무엇을 말해 줄 수 없는지, 그리고 어떤 결론이든 얼마나 불확실한지를 이해하는 것은 깨어 있는 시민의 소양이며, 과학자, 의사, 공학자, 경제학자에게는 직업상 반드시 필요한 능력이다.

대학에서 만나게 될 내용

통계학 첫 강의에서는 추정(estimation: 알지 못하는 양의 좋은 추정값을 찾고 그것이 얼마나 정밀한지 밝히는 일), 가설 검정(hypothesis testing: 데이터가 어떤 가설과 부합하는지 판단하는 일), 신뢰구간(confidence interval), 회귀(regression: 한 변수를 다른 변수들과 관련짓는 일), 그리고 실험과 조사의 설계를 다룬다. 핵심 개념은 **표본분포**(sampling distribution: 추정값은 확률변수(random variable)이다), **편향**(bias)과 **분산**(variance), 그

리고 **가능도**(likelihood)이다. 이후의 강의에서는 베이즈 추론(Bayesian inference), 다변량 분석(multivariate analysis), 시계열(time series), 그리고 거대한 규모의 통계학이라 할 수 있는 기계학습의 방법들을 더 배운다.

이 장을 관통하는 질문들

세 가지 큰 질문

1. **실제 현상인가, 잡음인가?** 우연만으로 어느 정도의 변동을 예상해야 하며, 언제 변화를 진지하게 받아들여야 하는가?
2. **어떻게 추정해야 하는가?** 데이터가 주어졌을 때 알지 못하는 양의 가장 좋은 추정값은 무엇이며, 서로 다른 방법은 어떻게 비교하는가?
3. **무작위성은 어떻게 데이터에 들어오는가?** 데이터를 수집하고, 보호하고, 처리하는 방식은 우리의 결론에 어떤 영향을 미치는가?

이 장은 신문에 실린 통계를 비판적으로 읽는 것(Section 13.1)으로 시작하여 추정으로 넘어간다. 포획-재포획(capture–recapture)으로 들쥐의 수를 세고, 일련번호로부터 전체 개수를 추정하고, 평균(mean)과 중앙값(median)을 비교한다. 마지막으로 무작위성이 데이터에 들어오는 방식에 관한 세 가지 문제를 다룬다. 개인정보를 보호하는 무작위화된 조사, 쌓이거나 서로 상쇄되는 반올림 오차(rounding error), 그리고 정해진 상관(correlation)을 갖는 변수의 구성이다.

이 장의 아이디어

§	주제	아이디어
13.1	통계 읽기	비율, 자연 변동, 추세
13.2	포획-재포획	최대가능도(maximum likelihood)
13.3	일련번호	편향, 분산, 충분성(sufficiency)
13.4	중심 추정하기	효율성(efficiency)과 강건성(robustness)
13.5	무작위 응답(randomised response)	혼합(mixture)과 전체 분산(total variance)
13.6	반올림 오차	계통 오차(systematic error)와 우연 오차(random error)
13.7	상관	숄레스키(Cholesky) 구성

Section 13.7에서는 공분산(covariance)과 상관을 사용하는데, 이 둘은 2019년에 STEP 출제 범위(specification)에서 빠졌다. 필요한 내용은 그 절에서 설명한다.

이 장을 읽는 방법

모든 추정값은 확률변수라는 점을 기억하자. 데이터가 다르게 나왔다면 추정값도 달라졌을 것이다. 이 장의 각 방법에 대해, 여러 번 반복했을 때 그 추정값의 분포가 어떻게 될지 물어보자. 평균적으로 옳은가? 그리고 얼마나 변동하는가? 이 하나의 질문이 통계적 사고의 핵심이다.

13.1 신문 머리기사 읽기

문제

STEP I 1992, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/92-s1-q14`

도입

통계학(statistics)은 데이터로부터 배우는 학문이며, 그 첫 번째 교훈은 숫자가 스스로 말하지 않는다는 것이다. "여섯 배 더 안전하다", "놀라운 증가", "참사 증가": 날마다 신문 헤드라인은 숫자를 주장으로 바꾸고, 그 주장은 틀린 경우가 많다. 숫자가 거짓이어서가 아니라, 엉뚱한 대상과 비교하거나 평범한 무작위 변동을 추세로 착각하기 때문이다.

이 문제에는 공식이 전혀 없으며, 이는 STEP 문제로서는 드문 일이다. 이 문제는 통계학자처럼 생각하기를 요구한다. 각 헤드라인을 정당화하려면 무엇을 알아야 하는가? 그리고 순전히 우연만으로도 변동이 얼마나 클 것으로 예상되는가? 답에는 푸아송 분포(Poisson distribution)(Section 12.18)가 쓰이며, 여기서의 추론은 이 장의 나머지 부분의 토대가 된다.

시작하기 전에

생각해 보기 사망 사고가 일정한 비율로 서로 독립적이고 무작위로 일어난다면, 연간 총계는 얼마나 변동해야 하는가? 평균이 한 해에 1080이라면, 해마다 나타나는 전형적인 편차는 얼마인가?

서로 독립인 드문 사건의 개수는 근사적으로 푸아송 분포를 따르며, 평균이 μ인 푸아송 개수는 분산(variance)이 μ이고 표준편차(standard deviation)가 $\sqrt{\mu}$이다. $\mu = 1080$이면 표준편차는 약 33이다. 따라서 연간 총계가 약 1015에서 1145 사이라면 전혀 특별할 것이 없다.

차근차근 풀기

1단계 "걷는 것보다 비행기를 타는 것이 여섯 배 더 안전하다"

생각해 보기 보행자 사망자는 연간 1080명, 항공 사망자는 연간 180명이다. 정확히 무엇의 여섯 배인가?

이 헤드라인은 총 사망자 수를 비교하지만, 안전성은 **위험**(*risk*), 즉 노출(exposure) 단위당 사망자 수의 문제이다. 거의 모든 사람이 매일 걷는 반면, 비행기를 타는 사람은 비교적 적고 그마저도 가끔일 뿐이다. 공정한 비교를 하려면 이동한 킬로미터당, 이동 시간당, 또는 이동 1회당 사망자 수를 써야 하며, 이들은 매우 다른 답을 줄 수 있다(항공 여행은 킬로미터당으로는 극히 안전하지만, 이동 1회당으로는 그만큼 인상적이지 않다. 대부분의 항공 사망 사고가 이륙과 착륙 때 일어나기 때문이다). 주어진 수치로는 상대적 안전성에 대해 아무것도 "증명"할 수 없다. 또한 "도로 사고로 사망한 보행자"는 좁은 범주이며, 전체 도로 사망자 수는 훨씬 더 많다.

2단계 "하늘이 더 안전해졌다: 1990년 사망자 단 125명"

생각해 보기 항공 사망은 서로 독립인 드문 사건과 같은가? 연간 총계가 얼마나 변동할 것으로 예상하는가?

항공 사망은 무리 지어 일어난다. 추락 사고 한 번에 수백 명이 사망할 수 있다. 따라서 연간 총계는 주로 추락 사고의 횟수에 좌우되는데, 이 횟수는 작으며, 연간 총계는 해마다 극도로 크게 변동한다. 평균 180명에 비해 사망자가 125명인 해가 한 번 있었다는 것은 아무 변화도 없다는 것과 완전히 양립한다. 추락 사고가 한 번만 더 있었어도 수치는 완전히 달라졌을 것이다. 한 해의 데이터로는 추세를 보여 줄 수 없다.

3단계 "도로 참사 증가: 화요일에 7명 사망"

생각해 보기 평균적으로 하루에 보행자가 몇 명 사망하는가? 일일 사망자 수가 푸아송 분포를 따른다면, 하루에 7명 이상이 사망하는 경우를 얼마나 자주 보게 되는가?

평균은 하루에 보행자 사망자 $\frac{1080}{365} \approx 2.96$명이다. 일일 개수가 이 평균을 갖는 푸아송 분포를 따른다면 $\mathrm{P}(\geq 7) \approx 0.031$이다. 즉 순전히 우연만으로도 1년에 약 11일은 보행자 사망자가 7명 이상일 것이다. (게다가 "도로 참사"에는 아마 운전자와 승객도 포함될 것이므로, 하루에 도로 사망자가 7명인 것은 더욱 놀랄 일이 아니다.) 하루의 데이터로는 추세에 대해 아무것도 말할 수 없다. 이 헤드라인은 변동이 매우 큰 계열에서 극단적인 값 하나를 골라낸 것으로, 전형적인 오류이다.

4단계 "놀라운 증가: 1990년 보행자 1350명 사망"

> **생각해 보기** 1350을 푸아송 표준편차와 비교하라. 이것은 단지 우연인가? 아니라면 달리 무엇으로 설명할 수 있으며, 그것이 "놀라운 증가"를 정당화하는가?

이것이 이 문제의 핵심 부분이다. 일정한 푸아송 모형 아래에서 1350은 평균 1080보다 270만큼 크며, 이는 약 8 표준편차에 해당한다. 우연일 가능성은 극히 낮다. 따라서 무언가가 변했을 가능성이 크다. 그러나 이 헤드라인은 여전히 여러 면에서 지나치다.

- **평균에 가려진 추세.** 수치 1080은 16년간의 평균이다. 사망자 수가 1974년 약 900명에서 1989년 약 1260명으로 꾸준히 증가했더라도 평균은 여전히 1080이었을 것이고, 1990년의 1350은 갑작스러운 "놀라운" 증가가 아니라 기존 추세의 연속일 뿐이다(그림 13.1.1). 연도별 수치가 필요하다.
- **노출.** 인구 증가, 보행 증가, 교통량 증가, 또는 인구 고령화는 모두 이동 1회당 도로가 더 위험해지지 않아도 사망자 수를 늘릴 것이다. 1인당 비율, 또는 걸은 킬로미터당 비율이 올바른 척도이다.
- **정의.** 사망을 기록하거나 분류하는 방식의 변화(예를 들어 사고 후 얼마 동안 일어난 사망까지 집계하는지)만으로도 수치가 급등할 수 있다.
- **과대산포**(*over-dispersion*). 실제 연간 개수는 날씨나 경제 활동 같은 조건이 변하기 때문에 푸아송 모형이 시사하는 것보다 더 크게 변동한다. "8 표준편차"는 어느 정도 신중하게 받아들여야 한다.

증가는 아마 실제이겠지만, 그것이 놀라운 일인지, 그리고 무엇이 원인인지 알려면 더 많은 데이터가 필요하다.

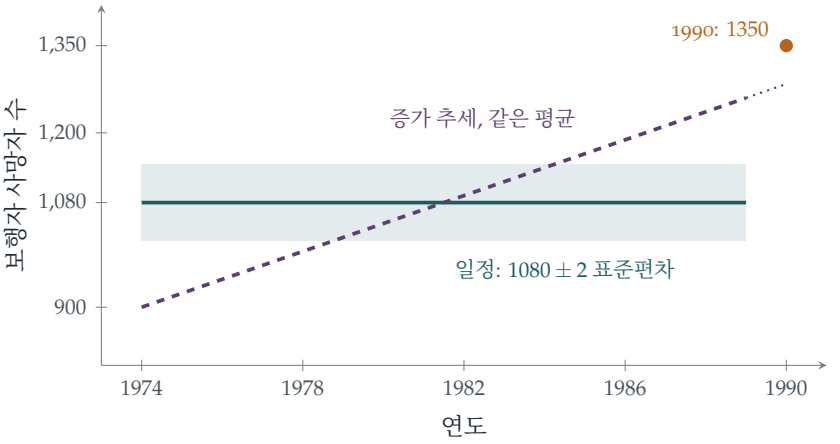


그림 13.1.1 16년 평균이 똑같이 1080인 매우 다른 두 역사. 사망자 수가 일정했다면(청록색, 전형적인 푸아송 변동의 띠와 함께), 1990년의 1350은 극적인 급등일 것이다. 꾸준히 증가해 왔다면(자주색), 1350은 추세보다 조금 높을 뿐이다. 평균만으로는 이 둘을 구별할 수 없다.

돌아보기

- **같은 것끼리 비교하라.** 위험에는 분모(denominator)가 필요하다. 1인당, 킬로미터당, 또는 이동 1회당 사망자 수이다.
- **자연스러운 변동을 알라.** 푸아송 변동성, 그리고 무리 지어 일어나는 사건의 훨씬 더 큰 변동성은 어떤 변화가 주목할 만한지 알려 준다.
- **평균은 추세를 가린다.** 요약 수치 하나로는 어떤 양이 시간에 따라 어떻게 변해 왔는지 설명할 수 없다.

숨은 수학

신호와 잡음

모든 통계적 질문은 근본적으로 **신호**(*signal*)(실제 효과나 추세)와 **잡음**(*noise*)(무작위 변동)을 분리하는 문제이다. 푸아송 모형은 서로 독립인 사건의 개수에 담긴 잡음을 재는 잣대, 곧 표준편차 $\sqrt{\mu}$를 준다. 드문 사건은 **상대적** 변동이 크다. 개수 9는 약 ± 3, 즉 그 크기의 3분의 1만큼 변동하지만, 개수 10 000은 약 1%만큼만 변동한다. 그래서 작은 수(하루의 사망자 수, 한 해의 추락 사고 수)가 그토록 자주 과잉 해석되며, 작은 마을의 암 "집단 발생"이 대개 우연으로 밝혀지는 것이다.

평균으로의 회귀

함정이 하나 더 있다. 도로 안전 카메라는 흔히 막 유난히 나쁜 한 해를 보낸 장소에 설치된다. 이듬해 사고가 줄어들면 카메라가 공을 인정받는다. 그러나 유난히 나쁜 해 다음에는 어차피 더 평범한 해가 올 가능성이 크다. 이것이 1880년대에 프랜시스 골턴(Francis Galton)이 처음 기술한 **평균으로의 회귀**(*regression to the mean*)이다. 카메라의 효과를 평균으로의 회귀와 분리하려면 카메라가 설치되지 않은 비슷한 장소와 비교해야 하며, 이것이 대조 실험(controlled experiment)의 바탕에 있는 생각이다.

플로렌스 나이팅게일의 통계

크림 전쟁의 간호사로 유명한 플로렌스 나이팅게일(Florence Nightingale)은 선구적인 통계학자이기도 했다. 1858년 그녀의 "장미 도표"는 부상보다 예방 가능한 질병으로 죽어 가는 병사가 훨씬 더 많다는 것을 보여 주었고, 정부가 군대의 위생을 개혁하도록 설득했다. 그녀는 원래의 총계가 아니라 비율(1년간 병사 천 명당 사망자 수)을 쓸 것과 같은 것끼리 비교할 것을 고집했는데, 바로 이 문제가 시험하는 점들이다. 그녀는 왕립통계학회(Royal Statistical Society)의 펠로로 선출된 최초의 여성이었다.

사고 기술

"무엇과 비교해서?"라고 물어라

통계적 주장을 받아들이기 전에, 무엇과 비교하는지, 분모가 무엇인지, 그리고 우연만으로 변동이 얼마나 클 것으로 예상되는지 물어라.

대학의 통계학 강좌에서는 이러한 질문을 정밀한 방법으로 바꾼다. 가설 검정(hypothesis test)은 관측값이 우연과 양립하는지를 묻고, 신뢰구간(confidence interval)은 어떤 양이 얼마나 정밀하게 측정되었는지 알려 주며, 실험 설계(design of experiments)는 비교가 공정하도록 보장한다.

더 도전하기

1 **푸아송 꼬리.** X가 평균이 2.96인 푸아송 분포를 따를 때 $\mathrm{P}(X \geq 7) \approx 0.031$임을 확인하라. 보행자 사망자가 9명 이상인 날은 1년에 며칠일 것으로 예상하는가?

2 **무리 지어 일어나는 사망.** 항공기 추락 사고가 연간 1.2회의 비율로 푸아송 과정(Poisson process)을 따라 일어나고, 사고마다 150명이 사망한다고 하자. 연간 항공 사망자 수의

평균과 표준편차를 구하라. 사망자가 125명 이하인 해는 이례적인가? 사망자가 정확히 125명인 해가 있을 수 있는가?

3 **유의한 증가?** 1974–1989년의 수치가 1080 ± 33으로 일정했다면, (정규 근사(normal approximation)를 이용하여) 한 해에 1350명 이상이 사망할 확률을 구하라.

4 **더 나은 헤드라인을 써라.** 네 헤드라인 각각에 대해, 데이터가 실제로 뒷받침하는 헤드라인을 써라.

더 읽을거리

- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican). 뉴스에서 가져온 많은 예와 함께, 데이터로부터 배우는 방법을 다룬다.
- **Tim Harford, *How to Make the World Add Up*** (Bridge Street). 언론에 나오는 숫자에 대해 생각하는 열 가지 규칙.
- **Darrell Huff, *How to Lie with Statistics*** (Penguin). 1954년에 나온 짧은 고전으로, 지금도 여전히 유효하다.

13.2 들쥐 세기

문제

STEP II 2000, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/00-s2-q13`

도입

어떤 섬에 들쥐는 몇 마리나 살고 있을까? 들쥐를 하나하나 세는 것은 불가능하다. 숨고, 돌아다니고, 서로 비슷하게 생겼기 때문이다. 하지만 몇 마리를 잡아 표시를 한 뒤 놓아주고, 다시 몇 마리를 잡을 수는 있다. 200마리에 표시를 했고, 두 번째로 잡은 200마리 가운데 11마리에 표시가 되어 있다면, 전체 개체 수의 대략 $\frac{11}{200}$에 표시가 되어 있는 셈이다. 따라서 개체 수는 약 $200 \times \frac{200}{11} \approx 3636$이다.

이러한 **포획–재포획**(*capture–recapture*) 방법은 물고기, 새, 고래의 개체 수를 추정하는 데 쓰이며, 마약 사용자, 노숙인, 전쟁 사상자처럼 전부 셀 수 없는 모든 집단의 규모를 추정하는 데에도 쓰인다. 이 문제는 직관적인 추정을 통계적 추정에서 가장 중요한 아이디어인 **최대 가능도**(*maximum likelihood*) 원리를 이용해 탄탄한 기반 위에 올려놓는다. 그 원리란, 관측된 자료가 나올 확률을 가장 크게 만드는 값을 미지수의 값으로 고르라는 것이다.

시작하기 전에

생각해 보기 들쥐가 모두 N마리이고, 그 가운데 200마리에 표시가 되어 있다. 200마리를 임의로 표본으로 뽑는다. 정확히 11마리에 표시가 되어 있을 확률은 얼마인가?

같은 가능성을 가진 $\binom{N}{200}$가지 표본 가운데에서, 표시된 들쥐 200마리 중 11마리를, 표시되지 않은 $N-200$마리 중 189마리를 고르면 되므로

$$p_N = \frac{\binom{200}{11}\binom{N-200}{189}}{\binom{N}{200}}.$$

이것이 **초기하분포**(*hypergeometric distribution*)이다.

차근차근 풀기

1단계 가능도

N이 들어 있는 이항계수(binomial coefficient)를 풀어 쓰면

$$\binom{N-200}{189} = \frac{(N-200)!}{189!\,(N-389)!}, \qquad \binom{N}{200} = \frac{N!}{200!\,(N-200)!},$$

이므로

$$p_N = \binom{200}{11}\frac{200!}{189!}\cdot\frac{((N-200)!)^2}{N!\,(N-389)!} = k\frac{((N-200)!)^2}{N!\,(N-389)!}. \quad \blacksquare$$

자료를 고정하고 미지수 N의 함수로 볼 때, p_N을 **가능도**(*likelihood*)라고 한다.

2단계 자연수 범위에서 최대화하기

> **생각해 보기** N은 자연수이므로 미분을 쓰기가 곤란하다. 대신 p_{N+1}과 p_N을 비교해 보자. 두 값의 비가 1보다 큰 것은 언제인가?

계승(factorial)은 대부분 약분된다.

$$\frac{p_{N+1}}{p_N} = \frac{(N-199)^2}{(N+1)(N-388)}.$$

이 값이 1보다 큰 것은 $(N-199)^2 > (N+1)(N-388)$일 때, 즉 $N^2 - 398N + 39601 > N^2 - 387N - 388$, 다시 말해 $11N < 39989$, $N < 3635.4$일 때이다. 따라서 p_N은 $N = 3636$까지 증가하고 그 뒤로 감소한다. 즉 최대가능도 추정값(maximum likelihood estimate)은

$$\hat{N} = 3636. \quad \blacksquare$$

이것은 직관적인 추정값 $\frac{200\times 200}{11} = 3636.4$의 정수 부분이다.

3단계 세 번째 표본

두 번째 표본을 뽑은 뒤 그 안에 있던 표시되지 않은 들쥐 189마리에도 표시를 하므로, 이제 표시된 들쥐는 389마리이다. $N = 3636$으로 놓으면 표시되지 않은 들쥐는 $3636 - 389 = 3247$마리이다. 200마리로 이루어진 세 번째 표본에 표시된 들쥐가 정확히 j마리 들어 있을 확률은

$$\frac{\binom{389}{j}\binom{3247}{200-j}}{\binom{3636}{200}}.$$

$j = 0, 1, \ldots, 200$에 대한 이 확률들의 합은 1이어야 하므로, 문제의 항등식을 얻는다. ■

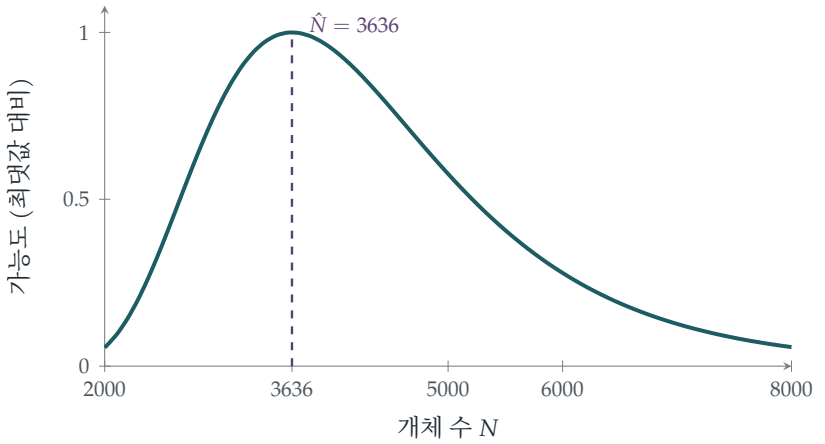


그림 13.2.1 두 번째 표본에서 표시된 들쥐가 11마리 나올 가능도 p_N을 개체 수 N의 함수로 나타낸 것으로, 최댓값이 1이 되도록 축척을 맞추었다. $N = 3636$에서 최대가 되지만, 폭이 넓고 한쪽으로 치우쳐 있다. 대략 2500에서 6500까지의 개체 수가 모두 자료와 상당히 잘 들어맞는다.

돌아보기

- **미지수의 함수로 본 자료의 확률.** 가능도는 보통의 관점을 뒤집는다. 자료는 고정되어 있고 모수(parameter)가 변한다.
- **이산적인 최대화에는 비를 이용한다.** 이웃한 항을 비교하여 정수를 변수로 하는 함수의 최댓값을 찾았다.
- **확률의 합은 1이다.** 모든 결과에 대해 분포를 더하여 조합론적 항등식(방데르몽드 항등식(Vandermonde's identity))을 증명했다.

숨은 수학

최대가능도

1910년대와 1920년대에 로널드 피셔(Ronald Fisher)가 발전시킨 **최대가능도** 원리는 다음과 같다. 미지의 모수를, 관측된 자료가 나올 확률을 가장 크게 만드는 값으로 추정하라. 이것은 단연 가장 널리 쓰이는 추정 방법으로, 자료에 곡선을 맞추는 일부터 기계 학습의 신경망을 훈련하는 일까지 두루 쓰인다. 신경망의 "손실 함수"는 대개 음의 로그 가능도이다. 피셔는 모형이 대부분의 일상적인 모형에서 성립하는 의미로 충분히 잘 정의되어 있다면, 표본이 클 때 최대가능도 추정값이 근사적으로 정규분포를 따르며 어떤 합리적인 추정량보다

도 뒤지지 않을 만큼 정밀하다는 것을 보였다. 중요한 예외도 있다. 다음 절(Section 13.3)에서는 미지수가 가능한 가장 큰 값, 즉 분포의 끝점인데, 이때 최대가능도 추정값은 사뭇 다르게 행동한다. 그 오차는 근사적으로 정규분포를 따르지 않으며, $\frac{1}{\sqrt{n}}$이 아니라 $\frac{1}{n}$처럼 줄어든다.

추정은 얼마나 정밀한가?

그림 13.2.1을 보면 가능도의 폭이 넓다. 11마리의 재포획은 그리 많은 정보가 아니다. 대략 계산해 보자. 두 번째 표본에 들어 있는 표시된 들쥐의 수는 평균이 $\frac{200\times 200}{N}$인 푸아송 분포(Poisson distribution)를 근사적으로 따르므로, 그 표준편차는 약 $\sqrt{11} \approx 3.3$이고, 상대오차는 약 30%이다. 이 오차는 N의 추정값에도 그대로 이어진다. N을 10% 이내로 추정하려면 생물학자들은 약 100마리를 재포획해야 한다. 통계학자들은 단순한 추정값의 작은 편향(bias)도 보정하는데, 이때 **채프먼 추정량**(*Chapman estimator*) $\frac{(M+1)(C+1)}{R+1} - 1$을 쓴다. 여기서 M과 C는 두 번 잡은 개체의 수이고, R은 재포획된 개체의 수이다.

라플라스, 프랑스 인구를 세다

라플라스(Laplace)는 1802년에 같은 아이디어를 이용하여 인구 조사 없이 프랑스의 인구를 추정했다. 그는 한 해 동안 나라 전체에 등록된 출생 수를 알고 있었고, 표본으로 고른 몇몇 코뮌(commune)에 대해서는 인구와 출생 수를 모두 알고 있었다. 인구와 출생 수의 비가 어디에서나 같다고 가정하여, 그는 프랑스의 인구를 약 28백만 명으로 추정했고, 불확실성의 척도까지 제시했다. 이 방법은 1890년대에 덴마크의 피오르에서 가자미에 표시를 한 C. G. J. Petersen과, 1930년대에 새 가락지를 이용한 Frederick Lincoln에 의해 동물 개체 수 추정에 다시 발견되었다. 그래서 지금도 흔히 **링컨–피터슨**(*Lincoln–Petersen*) 추정량이라고 부른다.

사고 기술

자료가 나올 가능성을 가장 크게 만드는 모수를 고르라

미지수를 추정하려면, 관측한 결과의 확률을 미지수의 함수로 쓰고 그것을 최대화하라.

대학에서 최대가능도는 통계적 추론의 뼈대이며, 추정값이 얼마나 정밀한지에 대한 이론(피셔 정보(Fisher information))과 경쟁하는 모형을 비교하는 방법(가능도비 검정(likelihood ratio test))이 그 위에 세워진다.

더 도전하기

1 **일반 공식.** M마리의 동물에 표시를 하고, C마리로 이루어진 두 번째 표본에 표시된 동물이 R마리 들어 있다면, N의 최대가능도 추정값이 $\frac{MC}{R}$의 정수 부분임을 보여라.

2 **방데르몽드.** 여자 a명과 남자 b명 가운데에서 c명으로 이루어진 위원회를 뽑는 방법의 수를 세어 $\sum_j \binom{a}{j}\binom{b}{c-j} = \binom{a+b}{c}$를 증명하여라.

3 **동전 던지기.** 앞면이 나올 확률 p를 모르는 동전을 n번 던져 앞면이 h번 나왔다. p의 최대가능도 추정값이 $\frac{h}{n}$임을 보여라.

4 **재포획이 없는 경우.** 두 번째 표본에 표시된 들쥐가 한 마리도 없다면 최대가능도 추정값은 어떻게 되는가? 이것은 이 방법에 대해 무엇을 말해 주는가?

더 읽을거리

- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican). 추정과 불확실성에 관한 책이다.
- **George Seber, *The Estimation of Animal Abundance*** (Blackburn). 포획–재포획에 관한 표준 참고서이다.
- **John Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis*** (Duxbury). 최대가능도를 포함한 수리통계학 입문 교재이다.

13.3 독일 전차 문제

문제

STEP III 1998, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/98-s3-q14`

도입

제2차 세계 대전 중에 연합군 정보부는 독일이 전차를 몇 대나 생산하고 있는지 알고 싶어 했다. 첩보원들의 보고에 따르면 한 달에 약 1400대였다. 통계학자들은 다른 방법을 택했다. 노획한 전차의 변속기와 여러 부품에는 일련번호가 새겨져 있었는데, 이 일련번호는 사실상 $1, 2, \ldots, N$에서 뽑은 무작위 표본이다. 통계학자들은 이 번호만으로 생산량을 한 달에 약 250대로 추정하였다. 흔히 인용되는 수치에 따르면, 전쟁이 끝난 뒤 조사한 독일 측 기록에는 245대로 나와 있었다. 통계학자들이 첩보원들보다 훨씬 정확했던 것이다.

이 문제는 일련번호로부터 N을 추정하는 두 가지 방법을 비교한다. 두 방법 모두 평균적으로는 옳다. 그러나 한쪽이 다른 쪽보다 자료를 훨씬 효율적으로 사용하며, 어느 쪽이 그런지 알아내다 보면 추정 이론(estimation theory)의 핵심 아이디어에 이르게 된다. 평균적으로 옳은 추정량(estimator)들 가운데에서는 가장 적게 변동하는 것을 택하라는 것이다.

시작하기 전에

생각해 보기 M이 $[0, N]$ 위의 서로 독립인 균등분포(uniform distribution) 값 n개 중 가장 큰 값이라면, $\mathrm{P}(M \le m)$은 무엇인가?

$M \le m$일 필요충분조건은 모든 $X_i \le m$인 것이므로, $0 \le m \le N$에 대하여 $\mathrm{P}(M \le m) = \left(\frac{m}{N}\right)^n$이다(Section 12.25와 비교해 보라). 이를 미분하면 M의 확률밀도함수(probability density function)는 $\frac{nm^{n-1}}{N^n}$이다.

차근차근 풀기

1단계 두 추정량 모두 불편추정량이다

M에 대하여

$$\mathrm{E}(M) = \int_0^N m \cdot \frac{n m^{n-1}}{N^n}\,\mathrm{d}m = \frac{n}{n+1}N, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{E}(Z_1) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}N = N.$$

평균에 대하여: 각 X_i의 평균은 $\frac{N}{2}$이므로 $\mathrm{E}(Z_2) = \frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{N}{2} = N$이다. ■

두 추정량 모두 **불편추정량**(unbiased estimator)이다. 즉, 평균적으로는 올바른 답을 준다. 인수 $\frac{n+1}{n}$은 관측된 가장 큰 일련번호가 언제나 N보다 조금 작다는 사실을 보정해 준다.

2단계 두 추정량의 분산

> **생각해 보기** $\mathrm{E}(M^2)$을 구하고, 이를 이용하여 $\mathrm{Var}(M)$을 구하라. Z_2의 경우, $[0, N]$ 위의 균등분포를 따르는 확률변수 하나의 분산은 무엇인가?

$\mathrm{E}(M^2) = \int_0^N m^2 \cdot \frac{n m^{n-1}}{N^n}\,\mathrm{d}m = \frac{n}{n+2}N^2$이므로

$$\mathrm{Var}(M) = \frac{n}{n+2}N^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}N^2 = \frac{nN^2}{(n+1)^2(n+2)},$$
$$\mathrm{Var}(Z_1) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\mathrm{Var}(M) = \frac{N^2}{n(n+2)}.$$

$[0, N]$ 위의 균등분포를 따르는 확률변수의 분산(variance)은 $\frac{N^2}{12}$이고 X_i들은 서로 독립이므로

$$\mathrm{Var}(Z_2) = \frac{4}{n^2}\cdot n\cdot\frac{N^2}{12} = \frac{N^2}{3n}.$$ ■

3단계 어느 쪽이 더 나은가?

> **생각해 보기** $\frac{1}{n(n+2)}$과 $\frac{1}{3n}$을 비교하라. n이 커질 때 각각 어떻게 변하는가?

두 분산의 비는 $\frac{\mathrm{Var}(Z_1)}{\mathrm{Var}(Z_2)} = \frac{3}{n+2}$이며, 이는 $n \geq 2$일 때 1보다 작다($n = 1$일 때는 두 추정량이 일치하므로 비가 1이다). 따라서 Z_1이 더 낫고, n이 클 때는 훨씬 더 낫다. Z_1의 표준편차(standard deviation)는 $\frac{1}{n}$처럼 줄어들지만, Z_2의 표준편차는 $\frac{1}{\sqrt{n}}$처럼 줄어들 뿐이다(그림 13.3.1). 일련번호가 $n = 10$개이면 Z_1의 표준편차는 N의 약 9%이고, Z_2는 약 18%이다.

Z_1을 택할 이유가 하나 더 있다. Z_2는 터무니없는 값을 줄 수 있다. 일련번호가 10, 20, 300이면 $Z_2 = \frac{2}{3}\cdot 330 = 220$인데, 이는 실제로 관측한 일련번호보다도 작다. 반면 $Z_1 = \frac{4}{3}\cdot 300 = 400$은 결코 가장 큰 관측값보다 작아질 수 없다. ■

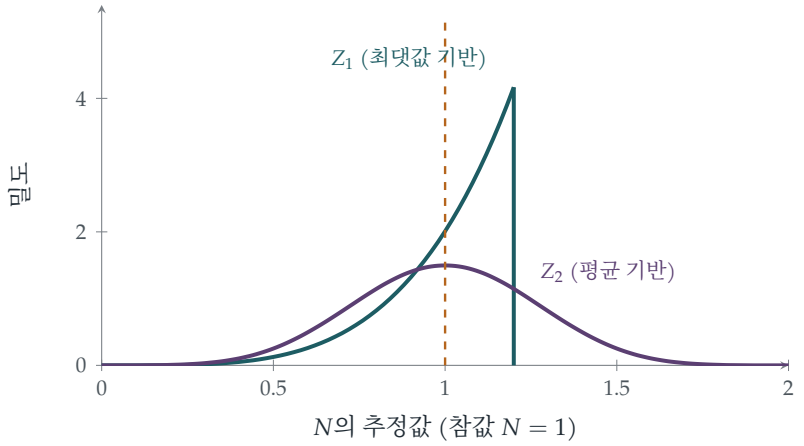


그림 13.3.1 일련번호가 $n = 5$개이고 참값이 $N = 1$일 때 두 추정량의 표본분포(sampling distribution). 둘 다 평균은 정확히 1이지만, Z_1(청록색)은 Z_2(자주색)보다 참값 근처에 훨씬 더 촘촘히 모여 있으며, 관측된 가장 큰 일련번호보다 작아지는 일이 결코 없다.

돌아보기

- **불편성.** 각 추정량은 기댓값이 정확히 N이 되도록 크기를 조정한 것이다.
- **분산을 비교하라.** 불편추정량들 가운데에서는 분산이 더 작은 것이 더 믿을 만하다.
- **가장 많은 정보를 담은 통계량을 사용하라.** 최댓값은 표본이 지닌 N에 관한 정보를 모두 담고 있지만, 평균은 그 정보의 상당 부분을 버린다.

숨은 수학

충분성

최댓값이 왜 이렇게 훨씬 나은가? 가장 큰 값 M이 주어지면, 나머지 값들은 N이 무엇이든 그저 $[0, M]$ 위의 균등분포를 따를 뿐이다. 즉, 나머지 값들은 N에 관해 더 이상 아무런 정보도 주지 않는다. 최댓값은 **충분통계량**(sufficient statistic)이다. C. R. Rao와 David Blackwell의 정리(1945–47)에 따르면, 어떤 불편추정량이든 충분통계량이 주어졌을 때의 조건부 기댓값으로 바꾸면 개선되거나, 적어도 나빠지지는 않는다. 여기서는 그렇게 하면 Z_2가 Z_1이 된다. 나아가 **레만–셰페 정리**(Lehmann–Scheffé theorem)를 쓰면 Z_1이 가능한 가장 작은 분산을 갖는 불편추정량임을 보일 수 있다. 또한 Z_1의 분산은 $\frac{1}{n^2}$처럼 줄어드는데, 이는 대부분의 추정량이 보이는 $\frac{1}{n}$보다 빠르다는 점에도 주목하라. 이런 일이 생기는 까닭은 N이 분포의 끝점이고, 자료가 그 끝점 쪽으로 몰려 쌓이기 때문이다.

이산적인 경우

실제 일련번호는 자연수 $1, 2, \dots, N$이며, 비복원추출(sampling without replacement)로 뽑힌다. 이때 가장 좋은 불편추정값은 $\hat{N} = m + \frac{m}{k} - 1$인데, 여기서 m은 관측한 일련번호 k개 중 가장 큰 값이다. 즉, 최댓값에 관측값 사이의 평균 간격을 더한 것이다. 주로 변속기와 바퀴의 일련번호에 바탕을 둔 이런 종류의 추정값을 써서, 연합군 통계학자들은 독일의 생산량을 한 달에 약 246대로 추정하였다. 나중에 독일 측 기록에서 확인된 수치는 245대였고, 첩보 보고가 제시한 수치는 1400대였다.

역사 속의 일련번호

이 방법은 그 뒤로도 여러 번 쓰였다. 예를 들어 분석가들은 처음 판매된 몇 개의 일련번호로부터 새로운 소비자 제품이 몇 개나 만들어졌는지를 추정하였다. 제조사들도 교훈을 얻어, 지금은 많은 제조사가 일련번호를 단순한 순서로 읽히지 않도록 암호화한다. Richard Ruggles와 Henry Brodie는 1947년 *Journal of the American Statistical Association*에 전시의 이 연구를 소개하였다.

사고 기술

추정량은 표본분포로 판단하라

추정량은 확률변수이다. 평균적으로 옳은지(편향)와 얼마나 변동하는지(분산)를 묻고, 오차가 더 작은 쪽을 택하라.

대학에서는 이것이 효율적 추정(efficient estimation) 이론으로 이어진다. 크라메르–라오 하한(Cramér–Rao bound)은 불편추정량의 분산이 얼마나 작아질 수 있는지를 알려 주고, 충분성은 그 하한에 어떻게 도달하는지를 설명해 준다.

더 도전하기

1 **평균제곱오차.** 편향추정량 M에 대하여 $\mathrm{E}(M-N)^2 = \mathrm{Var}(M) + \big(\mathrm{E}(M) - N\big)^2$이다. 이 평균제곱오차(mean squared error)를 계산하고 $\mathrm{Var}(Z_1)$과 비교하라. $\mathrm{E}(cM - N)^2$을 최소로 하는 상수 c를 구하라.

2 **최솟값도.** $(n+1)\min\{X_i\}$도 N의 불편추정량임을 보이고, 그 분산을 구하라. 이 추정량은 쓸 만한가?

3 **이산 공식.** 일련번호 $1, \dots, N$에서 k개를 비복원추출하고, 그 최댓값을 m이라 하자. $\mathrm{P}(\max \le m) = \binom{m}{k}/\binom{N}{k}$임을 보이고, $k = 1$일 때 $m + \frac{m}{k} - 1$이 불편추정량임을 확인하라.

4 **전차.** 노획한 전차 5대의 일련번호가 19, 40, 42, 60, 98이라면, 만들어진 전차의 수를 추정하라.

더 읽을거리

- **Richard Ruggles & Henry Brodie, "An empirical approach to economic intelligence in World War II"**, *Journal of the American Statistical Association* 42 (1947). 원래의 기록이다.
- **John Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis*** (Duxbury). 편향, 분산, 충분성을 다룬다.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican).

13.4 평균인가, 중앙값인가?

문제

STEP II 2000, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/00-s2-q14`

도입

측정값들의 중심을 추정할 때 평균(mean)을 쓸 수도 있고 중앙값(median)을 쓸 수도 있다. 어느 쪽이 더 나을까? 답은 데이터에 따라 달라진다. 가끔 터무니없는 오차가 섞이는 측정값이라면 중앙값이 훨씬 믿을 만하다. 엉뚱한 값 하나가 평균은 어디로든 끌고 갈 수 있지만 중앙값은 거의 움직이지 못한다. 반면 얌전한 데이터라면 대개 평균이 낫다. 이 문제는 균등분포(uniform distribution)를 따르는 데이터에서 평균이 얼마나 더 나은지를 측정한다. 중앙값의 분산(variance)은 평균의 분산의 세 배이므로, 중앙값이 평균만큼 정밀해지려면 관측값이 세 배 필요하다.

이 비교를 통해 통계적 방법을 고를 때의 주요 개념 가운데 하나인 **효율**(*efficiency*)과, Section 4.4에서도 나왔던 베타 적분(beta integral)을 소개한다.

시작하기 전에

? **생각해 보기** 중앙값의 확률밀도함수(density)가 왜 $y^n(1-y)^n$에 비례할까? (Y가 y 근처에 있으려면 $2n+1$개의 값 가운데 몇 개가 y보다 작아야 하고, 몇 개가 커야 할까?)

중앙값이 y에 있으려면 값 하나는 y에 있고, n개는 그보다 작고(각각 확률 y), n개는 그보다 커야 한다(각각 확률 $1-y$). 이로부터 인수 $y^n(1-y)^n$이 나온다. 상수는 어느 값이 어디에 속하는지를 고르는 방법의 수를 센 것이다.

차근차근 풀기

1단계 상수

밀도함수를 적분하면 1이 되어야 한다.

$$k\int_0^1 y^n(1-y)^n\,\mathrm{d}y = k\cdot\frac{n!\,n!}{(2n+1)!} = 1, \qquad k = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}. \qquad \blacksquare$$

2단계 평균과 분산

밀도함수는 $\frac{1}{2}$에 대하여 대칭(symmetric)이므로(y를 $1-y$로 바꾸어 보라) $\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}$이다.

> **생각해 보기** 베타 적분을 이용하여 $\mathrm{E}(Y^2) = k\int_0^1 y^{n+2}(1-y)^n\,\mathrm{d}y$를 계산하고 계승을 정리하라.

$$\mathrm{E}(Y^2) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{(n+2)!\,n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}.$$

따라서

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n+2)-(2n+3)}{4(2n+3)} = \frac{1}{4(2n+3)}. \qquad \blacksquare$$

3단계 평균과 비교하기

> **생각해 보기** 서로 독립인 균등분포 확률변수 $2n+1$개의 평균 $\bar{X}$의 평균과 분산은 무엇인가?

각 X_i의 평균은 $\frac{1}{2}$, 분산은 $\frac{1}{12}$이므로 $\mathrm{E}(\bar{X})=\frac{1}{2}$이고 $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{12(2n+1)}$이다. n이 클 때

$$\mathrm{Var}(Y) \approx \frac{1}{8n}, \qquad \mathrm{Var}(\bar{X}) \approx \frac{1}{24n}.$$

> **생각해 보기** Y와 $\bar{X}$가 평균이 $\frac{1}{2}$이고 표준편차(standard deviation)가 각각 σ_Y, $\sigma_{\bar{X}}$인 정규분포를 따른다면, 두 확률을 표준정규분포함수(standard normal distribution function) Φ로 나타내라.

$\mathrm{P}\left(|Y-\frac{1}{2}| < \frac{d}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{n}\,\sigma_Y}\right) - 1$이고 $\sqrt{n}\,\sigma_Y \to \frac{1}{\sqrt{8}}$이다. $\bar{X}$도 마찬가지로 $\sqrt{n}\,\sigma_{\bar{X}} \to \frac{1}{\sqrt{24}}$이다. 따라서 두 확률은 각각 $2\Phi(d\sqrt{8})-1$과 $2\Phi(d\sqrt{24})-1$에 수렴한다. Φ는 증가함수이고 $\sqrt{24} > \sqrt{8}$이므로 두 번째 값이 더 크고, 따라서 충분히 큰 모든 n에 대하여 부등식이 성립한다. ■평균이 참 중심에 가까이 있을 가능성이 더 크다.

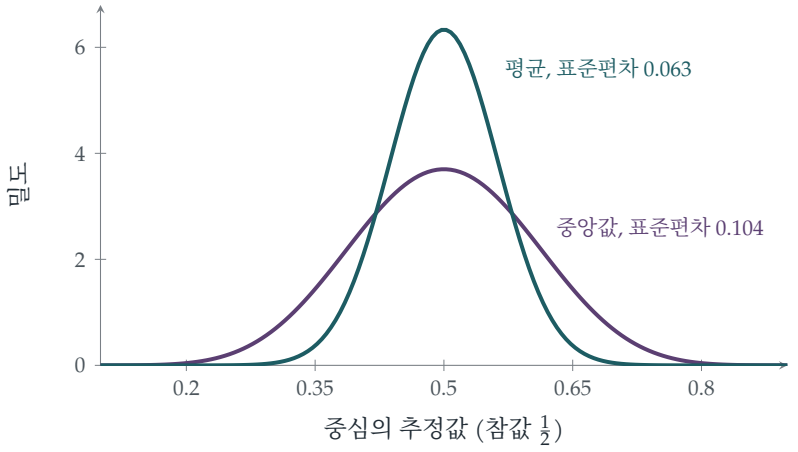


그림 13.4.1 서로 독립인 균등분포 관측값 21개의 중앙값(자주색)과 평균(청록색)의 표본분포. 둘 다 참값 $\frac{1}{2}$를 중심으로 하지만 평균이 더 촘촘하게 모여 있다. 평균의 분산은 중앙값의 분산의 약 3분의 1이다.

돌아보기

- **베타 적분.** $\int_0^1 y^r(1-y)^s\,\mathrm{d}y$ 하나의 공식으로 정규화 상수(normalising constant)와 적률(moments)을 모두 구했다.
- **대칭성으로 평균을 구했다.** $\mathrm{E}(Y)$를 구하는 데 적분이 필요 없었다.
- **퍼짐 정도는 알맞은 척도에서 비교한다.** 표준편차에 $\sqrt{n}$을 곱하자 비교가 n에 의존하지 않게 되었다.

숨은 수학

효율

두 불편추정량(unbiased estimator)의 **상대 효율**(*relative efficiency*)은 두 분산의 비이다. 이는 한 추정량이 다른 추정량과 같은 정밀도를 얻으려면 관측값이 몇 배 필요한지를 말해 준다. 균등분포 데이터에서 중앙값의 평균에 대한 효율은 $\frac{1}{3}$이다. 정규분포 데이터에서는 $\frac{2}{\pi} \approx 0.64$로, 중앙값은 관측값이 약 57% 더 필요하다. 그러나 꼬리가 두꺼운(heavy-tailed) 데이터에서는 상황이 뒤바뀐다. 코시 분포(Cauchy distribution, Section 12.22)에서는 관측값 n개의 평균이 관측값 하나보다 나을 것이 없으므로 평균은 쓸모가 없지만, 중앙값은 잘 작동한다. 라플라스 분포(Laplace distribution, Section 12.24)에서는 중앙값이 평균보다 두 배 효율적이다.

로버스트 통계

중앙값은 **로버스트**(*robust*)하다. 데이터의 거의 절반을 임의의 값으로 바꾸어도 중앙값은 크게 움직이지 않는다. 평균에는 이런 보호 장치가 없어서 잘못된 값 하나만으로도 망가질 수 있다. 1960년대와 1970년대에 존 튜키(John Tukey), Peter Huber 등은 **로버스트 통계**(*robust statistics*)를 발전시켰다. 이는 깨끗한 데이터에서는 평균에 거의 버금가는 효율을 보이면서도 이상값(outlier)에 잘 견디는 추정량들로, 예를 들어 **절사평균**(*trimmed mean*)(가장 큰 값과 가장 작은 값 10%씩을 버리고 나머지를 평균한 것)이 있다. 절사평균은 다이빙이나 체조 같은 스포츠의 채점에 쓰인다.

라플라스와 중앙값

라플라스(Laplace)는 1774년에 오차가 이중지수분포(라플라스 분포)를 따르면 참값의 가장 좋은 추정값은 중앙값임을 보였다. 가우스(Gauss)는 1809년에 오차가 정규분포를 따르면 가장 좋은 추정값은 평균임을 보였고, 이로부터 최소제곱법(method of least squares)에 이르렀다. 어느 쪽이 옳은지는 오차가 어떻게 행동하는지에 달려 있으며, 통계학자들은 새로운 종류의 데이터가 나올 때마다 여전히 이 문제를 논쟁한다.

사고 기술

방법을 변동성으로 비교하기

두 방법이 모두 평균적으로는 옳을 수 있다. 그 답이 얼마나 흔들리는지, 그리고 데이터가 많아질수록 그 흔들림이 얼마나 빨리 줄어드는지를 비교하라.

대학에서는 큰 표본에서 분산을 비교하는 점근적 효율(asymptotic efficiency)이, 모형이 틀렸을 수 있는 경우를 위한 로버스트성과 함께, 통계적 방법을 고르는 표준 도구로 쓰인다.

더 도전하기

1 **중앙값의 밀도함수.** 값 하나는 $[y, y+\delta y]$에, n개는 그 아래에, n개는 그 위에 있는 경우를 세어 밀도함수 $\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} y^n (1-y)^n$을 유도하라.

2 **관측값 세 개.** $n = 1$(균등분포 관측값 세 개)일 때 $\mathrm{Var}(Y)$와 $\mathrm{Var}(\bar{X})$를 정확히 구하라. 어느 쪽이 더 작은가?

3 **중간범위.** 중심의 또 다른 추정량으로 중간범위(midrange) $\frac{1}{2}(\max + \min)$가 있다. 관측값이 $m = 2n + 1$개인 균등분포 데이터에서 그 분산이 $\frac{1}{2(m+1)(m+2)}$임을 보여라. 평균과 비교하면 어떠한가? (Section 13.3와 비교해 보라.)

4 **이상값.** 측정값 열한 개가 9.8, 9.9, 10.0, 10.0, 10.1, 10.1, 10.2, 10.2, 10.3, 10.4, 104(입력 실수)이다. 평균과 중앙값을 비교하라.

더 읽을거리

- **John Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis*** (Duxbury). 순서통계량(order statistics)과 효율을 다룬다.
- **Rand Wilcox, *Fundamentals of Modern Statistical Methods*** (Springer). 로버스트 방법이 왜 중요한지를 비전문가에게 설명한다.
- **Stephen Stigler, *The Seven Pillars of Statistical Wisdom*** (Harvard University Press). 자료의 집계, 평균과 중앙값을 역사적 관점에서 살펴본다.

13.5 곤란한 질문 던지기

문제

STEP II 2023, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

도입

시험에서 부정행위를 한 학생이 몇 분의 몇인지, 혹은 직장에서 물건을 훔친 직원이 몇 분의 몇인지 어떻게 알아낼 수 있을까? 직접 물어보면 많은 사람이 거짓말을 할 것이다. 1965년 통계학자 Stanley Warner는 기발한 해결책인 **확률화 응답**(*randomised response*)을 고안했다. 각 사람은 몰래 동전을 던지거나 주사위를 굴리고, 그 결과에 따라 민감한 질문에 사실대로 답할지, 아니면 그 반대 질문에 답할지가 정해진다. 면접자는 어느 쪽인지 결코 알 수 없으므로 어떤 개인의 답도 그 사람에게 불리한 증거가 되지 않는다. 그런데도 확률화에 쓰인 확률을 알고 있으므로 전체 비율은 여전히 추정할 수 있다.

이 문제는 그 뒤에 숨은 수학을 탐구한다. 각 사람을 **독립적으로**(*independently*) 확률화하면(소문항 (ii)) 비율을 정확히 짚어 내는 잘 행동하는 합계를 얻는다. 반면 모든 사람을 **단 한 번의** 동전 던지기로 확률화하면(소문항 (iii)) 평균은 같지만 봉우리가 두 개인 전혀 다른 분포의 합계가 나오고, 이것은 우리에게 거의 아무것도 알려 주지 않는다. 무작위성을 어디에 두느냐가 중요하다.

시작하기 전에

생각해 보기 Y는 확률 p로 X_1이고 확률 q로 X_2이다. $\mathrm{E}(Y)$는 무엇인가? $\mathrm{E}(Y^2)$는 무엇인가?

어느 변수가 선택되는지에 대해 조건화(conditioning)하면 $\mathrm{E}(Y) = p\mu_1 + q\mu_2$이고, $\mathrm{E}(Y^2) = p\,\mathrm{E}(X_1^2) + q\,\mathrm{E}(X_2^2) = p(\sigma_1^2 + \mu_1^2) + q(\sigma_2^2 + \mu_2^2)$이다.

차근차근 풀기

1단계 혼합분포의 분산

$$\mathrm{Var}(Y) = p(\sigma_1^2 + \mu_1^2) + q(\sigma_2^2 + \mu_2^2) - (p\mu_1 + q\mu_2)^2.$$

$p - p^2 = pq$와 $q - q^2 = pq$를 이용하면 μ가 들어간 항은 $p\mu_1^2 + q\mu_2^2 - p^2\mu_1^2 - 2pq\mu_1\mu_2 - q^2\mu_2^2 = pq\mu_1^2 + pq\mu_2^2 - 2pq\mu_1\mu_2$이다. 따라서

$$\mathrm{Var}(Y) = p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + pq(\mu_1 - \mu_2)^2. \qquad \blacksquare$$

혼합분포(mixture)의 분산(variance)은 각 성분 내부 분산의 평균에 성분들의 평균 사이의 분산을 더한 것이다.

2단계 독립적인 확률화

> ? **생각해 보기** $\mathrm{P}(B = 1)$은 무엇인가? B의 n개 값은 서로 독립인가?

$\mathrm{P}(B = 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{2}$이다. n개의 값은 서로 독립이고 각각의 성공 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 $Z_1 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$이며, 평균은 $\frac{n}{2}$, 표준편차(standard deviation)는 $\frac{\sqrt{n}}{2}$이다.

평균의 10% 이내라는 것은 $|Z_1 - \frac{n}{2}| < \frac{n}{20}$이라는 뜻이다. 표준화한 단위로는 $|Z| < \frac{n/20}{\sqrt{n}/2} = \frac{\sqrt{n}}{10}$이고, 이 값은 무한대로 발산하므로 확률은 1로 수렴한다. $\blacksquare$

3단계 모두를 위한 동전 하나

> ? **생각해 보기** 이제 동전 던지기 한 번이 n개의 주사위 전부에 대해 결정한다. 앞면이 나왔을 때 Z_2의 분포는 무엇인가? 뒷면이 나왔을 때는? 소문항 (i)을 이용하라.

앞면이 나오면 $Z_2 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{6})$이고, 평균은 $\frac{n}{6}$, 분산은 $\frac{5n}{36}$이다. 뒷면이 나오면 $Z_2 \sim \mathrm{B}(n, \frac{5}{6})$이고, 평균은 $\frac{5n}{6}$, 분산은 $\frac{5n}{36}$이다. $p = q = \frac{1}{2}$로 소문항 (i)을 적용하면

$$\mathrm{E}(Z_2) = \frac{n}{2}, \qquad \mathrm{Var}(Z_2) = \frac{5n}{36} + \frac{1}{4}\left(\frac{4n}{6}\right)^2 = \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{9}.$$

> ? **생각해 보기** 확률의 대부분은 어디에 있는가? 평균 $\frac{n}{2}$ 근처에 확률이 많이 있는가?

Z_2는 $\frac{n}{6}$과 $\frac{5n}{6}$ 근처에 폭이 대략 $\sqrt{n}$인 봉우리 두 개를 가지며(그림 13.5.1), 그 사이에는 거의 아무것도 없다. 평균과 분산이 같은 정규분포(normal distribution)라면 $\frac{n}{2}$를 중심으로 하는 봉우리 하나일 텐데, 그곳은 바로 Z_2가 거의 놓이지 않는 자리이다. Z_2가 $\frac{n}{2}$의 10% 이내에

있으려면 $\mathrm{B}(n, \frac{1}{6})$ 또는 $\mathrm{B}(n, \frac{5}{6})$ 확률변수가 $[0.45n, 0.55n]$에 놓여야 한다. $\mathrm{B}(n, \frac{1}{6})$의 경우 이는 평균보다 적어도 $0.28n$만큼 위에 있다는 뜻이고, 이는 표준편차로 약 $\frac{0.28n}{0.37\sqrt{n}} \approx 0.75\sqrt{n}$배에 해당하므로 확률은 0으로 수렴한다. $\mathrm{B}(n, \frac{5}{6})$도 마찬가지이다. ■

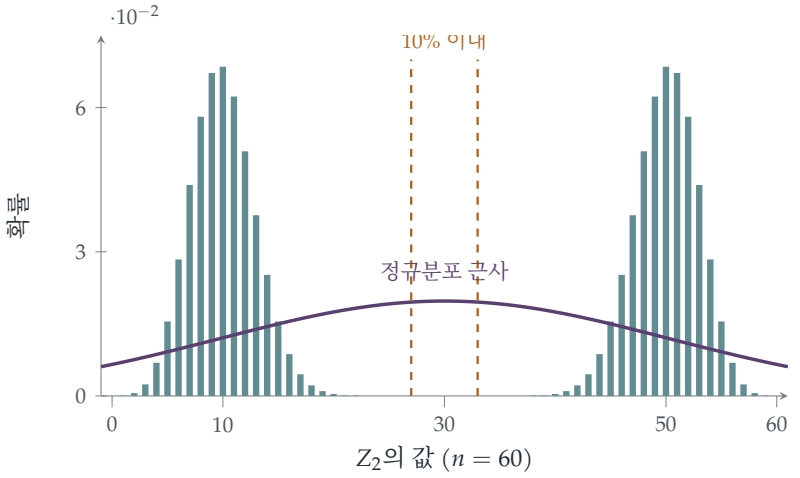


그림 13.5.1 주사위 $n = 60$개에 대한 Z_2의 분포(막대): 한 번의 동전 던지기에서 나올 수 있는 두 결과 때문에 10과 50에 봉우리가 두 개 생긴다. 평균(30)과 분산이 같은 정규분포(자주색)는 잘 맞지 않으며, 평균의 10% 이내(호박색 선 사이)에는 확률이 거의 없다.

돌아보기

- **숨겨진 선택에 대해 조건화하라.** 혼합분포의 평균과 분산은 어느 성분이 선택되었는지에 대해 조건화하여 얻었다.
- **내부 분산 더하기 사이 분산.** 추가된 항 $pq(\mu_1 - \mu_2)^2$은 두 성분 사이의 퍼짐을 측정했다.
- **평균과 분산이 전부는 아니다.** Z_2는 Z_1과 평균이 같았지만 모양은 전혀 달랐다.

숨은 수학

확률화 응답

Warner의 방식에서 각 응답자는 남몰래 선택하여, 확률 p로 "당신은 집단 A에 속합니까?"에 답하고, 확률 $1 - p$로 "당신은 집단 A에 속하지 **않습니까**?"에 답한다. 비율 π만큼의 사람이 A에 속한다면 "예"라고 답할 확률은

$$\lambda = p\pi + (1 - p)(1 - \pi),$$

이므로, 관측된 "예"의 비율 $\hat{\lambda}$로부터 $\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-p)}{2p-1}$로 추정할 수 있다(단, $p \neq \frac{1}{2}$). 문제의 소문항 (ii)가 바로 이것이며, 각자의 주사위가 결정을 내린다. 프라이버시의 대가는 정밀도이다. $2p-1$로 나누면 분산이 커지므로, 확률화된 조사는 직접 조사보다 더 많은 응답자가 필요하다. 하지만 각 사람이 독립적으로 확률화하므로 큰수의 법칙(law of large numbers)이 작동한다. 소문항 (iii)은 확률화를 공유하면 무엇이 잘못되는지 보여 준다. 단 하나의 동전에 대한 불확실성은 결코 평균화되어 사라지지 않는다.

차분 프라이버시

확률화 응답은 **차분 프라이버시**(*differential privacy*)의 조상이다. 차분 프라이버시는 2006년 Cynthia Dwork와 동료들이 도입한 프라이버시의 수학적 정의로, 어떤 한 사람의 데이터를 추가하거나 제거해도 모든 출력의 확률이 기껏해야 작은 배수만큼만 변한다면 그 절차는 프라이버시를 보장한다고 한다. 기술 기업들은 이를 이용해 사용 통계를 수집하며, 미국 인구조사국(United States Census Bureau)은 2020년 인구조사에서 이를 사용하여 공개되는 수치에 신중하게 보정한 무작위 잡음을 더함으로써 어떤 개인의 응답도 재구성할 수 없게 했다.

전분산 법칙

소문항 (i)의 항등식은 **전분산 법칙**(*law of total variance*)의 특수한 경우이다. 즉 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{Var}(Y \mid C)\big) + \mathrm{Var}\big(\mathrm{E}(Y \mid C)\big)$이며, 여기서 C는 숨겨진 선택이다. 이 법칙은 **분산분석**(*analysis of variance*)(ANOVA)의 바탕이 된다. 분산분석은 1920년대에 피셔(Ronald Fisher)가 로섬스테드(Rothamsted)에서의 농업 실험을 위해 도입한 것으로, 작물 수확량의 변동을 비료나 품종으로 설명되는 부분과 설명되지 않고 남는 부분으로 나눈다.

사고 기술

요약값만 보지 말고 분포 전체를 보라

평균과 분산은 봉우리가 하나인 분포는 잘 설명하지만, 혼합분포에 대해서는 심하게 오해를 불러일으킬 수 있다. 확률이 실제로 어디에 있는지 물어라.

대학에서는 여러 집단으로 이루어진 모집단을 설명하는 데 혼합 모형(mixture model)을 사용하며, 전분산 법칙은 조사 설계에서 계층적 모형(hierarchical model)에 이르기까지 통계학의 표준 도구이다.

더 도전하기

1 **쌍둥이.** STEP II 2005, 12번 문제 (`step.maths.org/questions/05-s2-q12`)를 풀어 보라. 이것은 겉모습만 바꾼 확률화 응답 퍼즐이다. 어떤 답이 동전에 대해 아무것도 알려 주지 않는 것은 언제인가?

2 π **추정하기.** $p = \frac{3}{4}$인 Warner 조사에서 400명이 응답했고 160명이 "예"라고 답했다. 집단 A의 비율 π를 추정하고, 그 추정값의 근사적인 표준오차(standard error)를 구하라.

3 **전분산.** 여러 값을 갖는 이산 숨은 변수 C에 대해 전분산 법칙을 증명하라.

4 **공유된 동전.** 소문항 (iii)에서 $Z_2 > \frac{n}{2}$일 확률은 얼마인가? Z_2가 $\frac{n}{2}$에 가까운 경우는 거의 없는데도, n이 클 때 이 확률이 $\frac{1}{2}$에 가까운 이유를 설명하라.

더 읽을거리

- **Stanley Warner, "Randomized response: a survey technique for eliminating evasive answer bias"**, *Journal of the American Statistical Association* 60 (1965).
- **Cynthia Dwork & Aaron Roth, *The Algorithmic Foundations of Differential Privacy*** (온라인 무료 공개). 현대 이론을 다루며, 앞부분의 장들은 쉽게 읽을 수 있다.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican). 조사와 그 함정을 다룬다.

13.6 쌓이는 오차

문제

STEP II 1993, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/93-s2-q15`

도입

1982년 밴쿠버 증권거래소는 1000에서 출발하는 새로운 지수를 도입했다. 주가가 바뀔 때마다 지수를 다시 계산하고 소수점 아래 셋째 자리까지만 남기고 **버림**(truncation)했다. 한 번 버릴 때마다 평균적으로 0.0005를 잃었는데, 이는 무시해도 될 만큼 작아 보인다. 그러나 재계산은 하루에 약 3000번 이루어졌고, 22개월이 지나자 시장은 올랐는데도 지수는 520 근처에 머물러 있었다. 지수를 올바르게 다시 계산하자 하룻밤 사이에 약 1100으로 뛰어올랐다.

이 문제는 무슨 일이 일어났는지 설명해 준다. 버림 오차는 모두 같은 방향을 향하므로 연산 횟수에 비례하여 꾸준히 쌓인다. 반올림(rounding) 오차는 양쪽 방향을 모두 향하므로 대부분 서로 상쇄된다. 반올림 오차는 연산 횟수의 제곱근에 비례하여 커질 뿐인데, 이것이 바로 중심극한정리(central limit theorem, Section 12.24)가 예측하는 확률보행(random walk)의 행동이다.

시작하기 전에

생각해 보기 어떤 수의 소수 부분 U가 $[0,1)$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다면, 그 수를 버림할 때 오차는 무엇인가? 반올림할 때는 어떠한가? 각각의 평균과 분산(variance)은 무엇인가?

버림은 a를 $\lfloor a \rfloor$로 바꾸며, 이때 오차(참값에서 근삿값을 뺀 값)는 U로서 $[0,1)$에서 균등분포를 따른다. 평균은 $\frac{1}{2}$, 분산은 $\frac{1}{12}$이다. 반올림의 오차는 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$에서 균등분포를 따르며, 평균은 0, 분산은 $\frac{1}{12}$이다.

차근차근 풀기

1단계 전체 오차

1500개의 수를 더한 뒤의 전체 오차는 1500개의 독립적인 오차의 합이며, 중심극한정리에 의해 근사적으로 정규분포(normal distribution)를 따른다.

- LEP(반올림): 평균 0, 분산 $\frac{1500}{12} = 125$, 표준편차(standard deviation) $\sqrt{125} \approx 11.18$.
- VOZ(버림): 평균 $\frac{1500}{2} = 750$, 표준편차는 똑같이 11.18.

2단계 큰 오차가 생길 확률

> **생각해 보기** LEP의 경우 $E \sim \mathrm{N}(0, 125)$일 때 $\mathrm{P}(|E| > 15)$는 얼마인가? VOZ의 경우 오차는 거의 확실하게 어디에 있는가?

LEP의 경우 $\frac{15}{11.18} \approx 1.342$이므로

$$\mathrm{P}(|E| > 15) \approx 2\big(1 - \Phi(1.342)\big) \approx 2 \times 0.090 = 0.18.$$

VOZ의 경우 오차는 약 750 ± 11이다. 오차의 크기가 15보다 작을 확률은 사실상 영이므로 $\mathrm{P}(|E| > 15) \approx 1$이다. ■

3단계 덧셈을 몇 번 할 수 있는가?

> **생각해 보기** n번 더한 뒤 LEP의 오차의 표준편차는 $\sqrt{n/12}$이다. 언제 $\mathrm{P}(|E| < 10) \geq 0.9$가 성립하는가?

$\mathrm{P}(|Z| < 1.645) = 0.9$이므로 $\frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.645$이어야 한다. 즉 $\frac{n}{12} \leq \left(\frac{10}{1.645}\right)^2 \approx 36.95$이므로 $n \leq 443$이다. LEP는 약 443번의 덧셈을 할 수 있다. ■

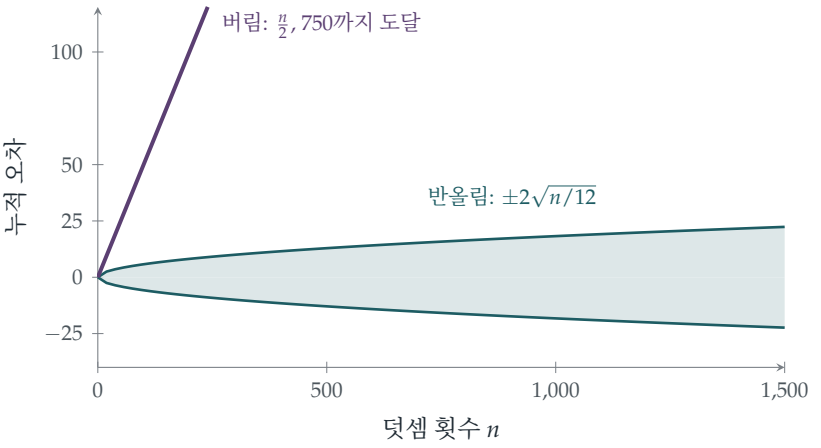


그림 13.6.1 오차가 쌓이는 방식. 버림 오차(자주색)는 모두 부호가 같으며 n에 비례하여 커진다. 1500번 더한 뒤 그 합은 약 750이다. 반올림 오차(청록색 띠, 영을 중심으로 양쪽으로 표준편차의 두 배)는 평균적으로 상쇄되어 $\sqrt{n}$에 비례하여 커질 뿐이다. 1500번 더한 뒤에도 대개 약 ± 22 이내에 있다.

돌아보기

- **각 오차를 모형화한다.** 소수 부분이 균등분포를 따른다는 가정 덕분에 각 오차의 분포가 간단해졌다.
- **평균과 분산을 더한다.** 평균은 더해지며(그 결과 편향 $\frac{n}{2}$가 생긴다), 독립인 오차라면 분산도 더해진다.
- **정규 근사.** 중심극한정리를 이용하여 1500개의 균등분포 오차의 합을 정규분포로 바꾸었다.

숨은 수학

편향과 분산

버림은 **편향**(biased)되어 있다. 즉 버림 오차의 평균은 영이 아니며, 편향은 선형으로 쌓인다. 반올림은 **비편향**(unbiased)이며, 그 오차는 확률보행처럼 행동하여 $\sqrt{n}$에 비례하여 커진다. 연산을 백만 번 하고 나면 그 차이는 500 000 정도의 오차와 300 정도의 오차 사이의 차이가 된다. 이는 실험에서 계통 오차(systematic error, 예를 들어 잘못 보정된 측정 기구)와 무작위 측정 오차(random error)를 구별하는 것과 같다. 측정을 여러 번 하여 평균을 내면 무작위 오차는 줄어들지만 계통 오차는 전혀 줄어들지 않는다.

부동소수점

모든 컴퓨터는 실수를 제한된 정밀도로 저장하며, 모든 산술 연산은 그 결과를 반올림한다. 현대 컴퓨터는 IEEE 754 표준을 따르는데, 이 표준은 표현 가능한 가장 가까운 수로 반올림하고, 두 수의 한가운데인 경우에는 마지막 자릿수가 짝수가 되는 쪽으로 정한다. 바로 이렇게 해야 반올림이 평균적으로 비편향이 되기 때문이다. 그렇더라도 많은 수를 부주의하게 더하면 정확도를 잃을 수 있다. William Kahan의 **보정 합산**(compensated summation) 알고리즘(1965년)은 잃어버린 하위 자릿수를 추적하여 다시 더해 준다. 1991년 걸프 전쟁에서 한 패트리엇 미사일 포대는 날아오는 미사일을 요격하는 데 실패했는데, 그 포대의 시계가 시간을 10분의 1초 단위로 셌기 때문이다. 10분의 1은 이진법으로 정확하게 저장할 수 없는 수이다. 100시간 동안 작동한 뒤 버림 오차는 약 3분의 1초로 커져 있었고, 이는 목표물의 위치를 반 킬로미터 넘게 잘못 판단하기에 충분했다.

밴쿠버 지수

밴쿠버 증권거래소 지수는 1982년 1월 1000.000의 값으로 만들어졌다. 1983년 11월이 되자 시장이 전반적으로 상승했는데도 지수는 약 524까지 떨어져 있었다. 자문가들은 지수가 하루에 수천 번 다시 계산되었고 그때마다 소수점 아래 셋째 자리까지 (반올림이 아니라) 버림되었다는 사실을 알아냈다. 주말 동안 올바르게 다시 계산한 지수는 약 1098에서 다시 시작했다. 이 일화는 수치 계산 강의에서 빠지지 않는 경고 사례이다.

사고 기술

계통 오차와 무작위 오차를 구별하라

부호가 일정한 오차는 선형으로 쌓이고, 평균이 영인 독립적인 오차는 제곱근처럼 쌓인다. 지금 다루는 오차가 어느 종류인지 파악하라.

대학에서 수치해석(numerical analysis)은 계산 과정에서 오차가 어떻게 전파되는지 연구하며, 통계학은 편향과 분산을 구별한다. "편향-분산 트레이드오프(bias–variance trade-off)"는 현대 기계학습(machine learning)의 핵심이다.

더 도전하기

1 **보정된 VOZ.** VOZ가 마지막에 답에 $\frac{n}{2}$를 더한다면 그 오차는 어떤 분포를 따르는가? 이제 LEP만큼 좋아졌는가?

2 **소수점 아래 첫째 자리로 반올림하기.** 수를 소수점 아래 첫째 자리로 반올림하고, 버려지는 자릿수가 균등분포를 따른다고 하자. 10 000개의 수를 더할 때 전체 오차의 표준편차를 구하라.

3 **밴쿠버 지수.** 지수를 하루에 3000번 다시 계산하고 한 번 버릴 때마다 평균 0.0005를 잃었다면, 거래일이 250일인 1년 동안 지수는 얼마나 줄어들겠는가?

4 **정확한 분포.** 두 반올림 오차의 합의 정확한 확률밀도함수(삼각형 모양)를 구하라. 세 개의 합에 대해서는 그 개형을 그려 보라. 얼마나 빨리 정규분포처럼 보이기 시작하는가?

더 읽을거리

- **Nicholas Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*** (SIAM). 반올림 오차에 관한 권위 있는 책으로, 첫 장은 읽기 쉽다.
- **David Goldberg, "What every computer scientist should know about floating-point arithmetic"**, *ACM Computing Surveys* 23 (1991). 고전적인 글로, 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Tim Harford, *How to Make the World Add Up*** (Bridge Street). 데이터 속 계통 오차를 다룬다.

13.7 상관관계 만들어 내기

문제

STEP III 2010, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

`step.maths.org/questions/10-s3-q13`

도입

은행은 주식 포트폴리오(portfolio)에서 손실을 볼 가능성이 얼마나 되는지 알고 싶어 한다. 주가는 함께 움직인다. 한 주식이 떨어지면 다른 주식들도 떨어지는 경향이 있다. 가능한 미래를 수천 가지 모의실험(simulation)하려면, 은행은 정확히 알맞은 방식으로 상관된 난수를 만들어 내야 한다. 독립(independent)인 확률변수에서 출발하여, 미리 정한 상관계수(correlation)를 갖는 확률변수를 어떻게 만들어 낼 수 있을까?

이 문제는 세 변수에 대해 그 방법을 한 단계씩 알려 준다. 새로운 변수는 각각 앞서 쓴 독립인 재료들의 결합에, 분산(variance)을 채우기 위한 새로운 독립인 재료를 하나 더 한 것이다. 이 구성은 모습을 감춘 유명한 선형대수의 한 부분, 곧 **숄레스키 분해**(*Cholesky decomposition*)이다. 또한 이 구성은 숨어 있는 제약도 드러낸다. 모든 상관계수의 조합이 가능한 것은 아니다.

출제 범위에 관한 참고

공분산(covariance)과 상관계수는 2019년에 STEP 출제 범위(specification)에서 빠졌다. 공분산은 $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)$이다. 독립인 변수에 대해서는 공분산이 0이고, 공분산은 각 인수에 대해 선형(linear)이다: $\mathrm{Cov}(aU+bV,W) = a\,\mathrm{Cov}(U,W) + b\,\mathrm{Cov}(V,W)$. 또한 $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Cov}(U,U)$이다. 상관계수는 항상 -1과 1 사이에 있다.

시작하기 전에

생각해 보기 Z_1과 Z_2는 독립이다. 둘의 공분산은 얼마이고, 따라서 상관계수는 얼마인가?

독립인 변수는 $\mathrm{E}(Z_1Z_2) = \mathrm{E}(Z_1)\,\mathrm{E}(Z_2)$를 만족한다. 따라서 공분산은 0이고, $\mathrm{Corr}(Z_1, Z_2) = 0$이다.

차근차근 풀기

1단계 두 변수

$\mathrm{E}(Y_2) = 0$이다. Z_1과 Z_2는 분산이 1인 독립인 변수이므로

$$\mathrm{Var}(Y_2) = \rho_{12}^2 + (1-\rho_{12}^2) = 1, \qquad \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Cov}(Z_1, \rho_{12}Z_1 + \sqrt{1-\rho_{12}^2}\,Z_2) = \rho_{12}.$$

두 분산이 모두 1이므로 $\mathrm{Corr}(Y_1, Y_2) = \rho_{12}$이다. ■

생각해 보기 Z_1과 Z_2를 서로 수직인 단위벡터(unit vector)로 생각해 보자. Y_2는 어디에 있는가? Y_1과 Y_2 사이의 각의 코사인은 얼마인가?

$Y_2 = \rho_{12}Z_1 + \sqrt{1-\rho_{12}^2}\,Z_2$는 $Z_1 = Y_1$과 각 θ를 이루는 단위벡터이고, 여기서 $\cos\theta = \rho_{12}$이다. 상관계수는 변수들을 벡터로 보았을 때 그 사이 각의 코사인이다(그림 13.7.1).

2단계 세 번째 변수

생각해 보기 세 조건 $\mathrm{Var}(Y_3) = 1$, $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_3) = \rho_{13}$, $\mathrm{Cov}(Y_2, Y_3) = \rho_{23}$을 a, b, c로 나타내어라.

선형성과 독립성을 이용하면

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad a = \rho_{13}, \qquad \rho_{12}a + \sqrt{1-\rho_{12}^2}\,b = \rho_{23}.$$

따라서

$$a = \rho_{13}, \qquad b = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}, \qquad c = \sqrt{1 - \rho_{13}^2 - \frac{(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2}{1-\rho_{12}^2}}.$$ ■

($c \geq 0$이므로 음이 아닌 제곱근을 택한다.)

3단계 임의의 평균과 분산

크기를 바꾸거나 평행이동해도 상관계수는 변하지 않으므로

$$X_i = \mu_i + \sigma_i Y_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

는 평균(mean) μ_i, 분산 σ_i^2, 상관계수 ρ_{ij}를 갖는다. ■

> **잠깐, 직접 해 보기** c에 대한 공식이 성립하려면 제곱근 안의 값이 음이 아니어야 한다. $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = -0.6$을 넣어 보아라. 무엇이 잘못되는가? 또 세 변수가 서로 모두 강한 음의 상관관계를 가질 수 없다는 것은 왜 이치에 맞는가?

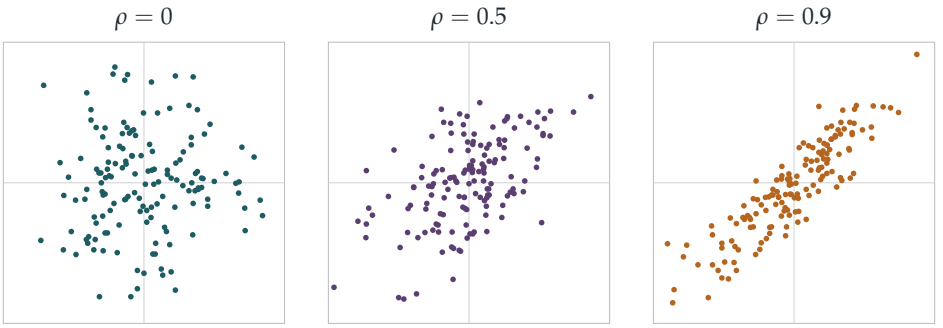


그림 13.7.1 독립인 표준정규(standard normal) 확률변수 Z_1, Z_2로부터 $Y_1 = Z_1$, $Y_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_2$라는 방법으로 만든 (Y_1, Y_2)의 표본으로, $\rho = 0$, 0.5, 0.9인 경우이다. 같은 독립인 재료로 우리가 원하는 어떤 상관계수든 만들어 낼 수 있다.

돌아보기

- **한 번에 한 변수씩 쌓아 올린다.** 새 변수는 각각 앞선 재료를 알맞은 양만큼 가져오고, 새로운 독립인 재료를 하나 더했다.
- **공분산은 선형이다.** 모든 조건이 계수에 대한 간단한 방정식이 되었다.
- **상관계수는 코사인이다.** 표준화된 변수를 단위벡터로 생각하면 상관계수가 각이 된다.

숨은 수학

숄레스키 분해

행렬 형태로 쓰면, 이 구성은 **하삼각**(*lower triangular*) 행렬

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_{12} & \sqrt{1-\rho_{12}^2} & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

에 대해 $\mathbf{Y} = L\mathbf{Z}$라는 것이고, $\mathbf{Y}$의 상관행렬(correlation matrix)은 $R = LL^{\mathsf{T}}$이다. 대칭행렬을 LL^{T} 꼴로 나타내는 것이 **숄레스키 분해**이다. 이 분해는 프랑스의 군사 기술자 앙드레루이 숄레스키(André-Louis Cholesky)가 1910년 무렵 측지 측량의 방정식을 풀기 위해 찾아냈다(그가 제1차 세계대전에서 사망한 뒤에 발표되었다). 이 분해는 R가 **양의 정부호**(*positive definite*)이면 언제나 가능하며, 그 계산은 우리가 손으로 한 것과 정확히 같다. 각 행을 차례로 풀면 된다. 이것은 금융, 공학, 기후 모델링에서 상관된 변수를 모의실험하는 표준적인 방법이다.

어떤 상관계수가 가능한가?

c의 제곱근 안에 있는 수는 음이 아니어야 한다. 전개하면 그 조건은

$$1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} \geq 0,$$

이고, 이는 상관행렬의 행렬식(determinant)이 음이 아니라는 조건이다. 기하학적으로 보면, 두 개씩 이루는 각이 θ_{ij}(여기서 $\cos\theta_{ij} = \rho_{ij}$)인 세 단위벡터가 실제로 공간 안에 함께 놓일 수 있어야 한다는 뜻이다. $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = -0.6$이면 각은 모두 약 127°이고, 서로 127°를 이루는 세 벡터는 각의 합이 360°보다 커야 하므로 불가능하다. 일반적으로 어떤 행렬이 상관행렬이 될 수 있으려면 양의 준정부호(positive semi-definite), 즉 모든 고윳값(eigenvalue)이 음이 아니어야 한다(Section 7.2). 불완전한 자료로부터 상관계수를 하나하나 따로 추정하면 이 조건이 깨질 수 있으며, 그러면 통계학자는 가장 가까운 유효한 상관행렬을 찾아야 한다. 이 문제는 2002년에 Nicholas Higham이 해결했다.

골턴, 피어슨, 그리고 상관

프랜시스 골턴(Francis Galton)은 1888년 부모와 자녀의 키가 어떻게 관련되는지를 연구하면서 상관이라는 개념을 도입했고, 칼 피어슨(Karl Pearson)은 1896년 이 문제에서 사용한 적률 공식(product moment formula)을 제시했다. 골턴은 평균으로의 회귀(regression to the mean)도 발견했다(Section 13.1). 피어슨은 1911년 유니버시티 칼리지 런던(University College London)에 세계 최초의 대학 통계학과를 세웠다. "상관관계는 인과관계(causation)를 뜻하지 않는다"라는 경고는 상관이라는 개념 자체만큼이나 오래되었다.

사고 기술

새로운 독립인 재료를 써서 한 단계씩 구성하기

미리 정한 관계를 갖는 대상들을 만들려면 하나씩 추가하되, 각각을 앞서 나온 것들의 결합에 새롭고 독립인 무언가를 더한 것으로 만든다.

이것은 선형대수의 그람–슈미트 과정(Gram–Schmidt process)을 거꾸로 돌린 것이며, 곧 숄레스키 분해이다. 대학에서는 최소제곱법(least squares), 다변량 정규분포(multivariate normal distribution) 이론, 확률과정(random process)의 모의실험에서 나타난다.

더 도전하기

1 **불가능한 상관계수.** 세 확률변수의 두 개씩의 상관계수가 모두 ρ이려면 $\rho \geq -\frac{1}{2}$이어야 함을 보여라. n개의 변수에 대해서는 이에 대응하는 명제가 무엇인가?

2 **행렬식 확인하기.** R가 3×3 상관행렬일 때, $1 - \rho_{13}^2 - b^2 \geq 0$이 $\det R \geq 0$과 동치임을 보여라.

3 **포트폴리오 위험.** 두 주식의 수익률의 표준편차(standard deviation)가 $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$이고 상관계수가 ρ이다. 두 주식에 절반씩 투자한 포트폴리오의 표준편차를 $\rho = -1, 0, 1$일 때 각각 구하여라. 분산투자(diversification)는 어떤 효과를 내는가?

4 **재료 되찾기.** 문제에서와 같이 Y_1, Y_2가 주어졌을 때, Z_2를 Y_1과 Y_2로 나타내어라. (이것이 그람–슈미트 단계이다.)

더 읽을거리

- **길버트 스트랭(Gilbert Strang),** ***Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 양의 정부호 행렬과 숄레스키 분해를 다룬다.
- **Paul Glasserman,** ***Monte Carlo Methods in Financial Engineering*** (Springer). 상관된 변수를 실제로 모의실험하는 방법을 다룬다. 수준이 높지만 앞부분의 장들은 읽을 만하다.
- **Theodore Porter,** ***Karl Pearson: The Scientific Life in a Statistical Age*** (Princeton University Press).

우리가 배운 것

이 장의 첫머리에서 확률(probability)은 모형에서 데이터로 나아가고, 통계학(statistics)은 데이터에서 다시 세계로 돌아간다고 말하였다. 그리고 세 가지 질문을 던졌다. 그것은 실제인가, 아니면 잡음인가? 어떻게 추정해야 하는가? 무작위성은 어떻게 데이터에 들어오는가? 이 장의 일곱 문제가 보여 준 내용은 다음과 같다.

1. 실제인가, 잡음인가?

Section 13.1에서는 네 개의 신문 헤드라인이 숫자를 주장으로 바꾸어 놓았다. 분모 없이 총계를 비교하는 것, 한 해나 하루의 수치에서 추세를 읽어 내는 것, 평균 속에 추세를 감추는 것은 모두 오류였고, 푸아송 모형(Poisson model)은 개수의 자연스러운 변동을 재는 잣대가 되었다. 표준편차(standard deviation)의 8배에 이르는 증가는 거의 확실히 실제였고, 어느 화요일의 사망자 일곱 명은 거의 확실히 그렇지 않았다. 평균으로의 회귀(regression to the mean)와 공정한 비교의 필요성이 이 그림을 완성하였다.

2. 어떻게 추정해야 하는가?

세 문제를 통해 추정 이론을 전개하였다.

- **최대가능도(maximum likelihood)** (Section 13.2): 관측된 데이터가 나올 확률을 가장 크게 하는 미지수의 값을 고른다. 포획-재포획(capture–recapture)에서는 자연스러운 추정값 $\frac{200\times 200}{11} \approx 3636$을 얻었고, 넓게 퍼진 가능도(likelihood)는 이 추정값이 얼마나 불확실한지를 보여 주었다.
- **편향과 분산** (Section 13.3): 잠수함의 수에 대한 두 불편추정량(unbiased estimator)을 살펴보았는데, 하나는 최댓값에, 다른 하나는 평균에 바탕을 둔 것이었다. 충분통계량(sufficient statistic)인 최댓값이 훨씬 더 정밀하였으며, 그 분산(variance)은 $\frac{1}{n}$이 아니라 $\frac{1}{n^2}$처럼 줄어들었다. 같은 추론으로 전쟁 중 독일 전차에 관한 정보기관의 판단을 앞지를 수 있었다.
- **효율과 강건성** (Section 13.4): 균등분포를 따르는 데이터에서는 평균이 중앙값(median)보다 효율(efficiency)이 세 배 높지만, 꼬리가 두꺼운(heavy-tailed) 데이터에서는 중앙값이 이기며, 중앙값은 터무니없는 오차에 대해 강건(robust)하다.

3. 무작위성은 어떻게 데이터에 들어오는가?

무작위성은 의도적으로 더할 수 있다. 확률화 응답(randomised response) (Section 13.5)은 각 사람이 독립적으로 무작위화하기만 하면 응답자 개개인의 사생활을 보호하면서도 모집단을 추정할 수 있게 해 준다. 모두가 동전 하나를 함께 쓴다면 봉우리가 두 개인 혼합분포(mixture)가 생겨 거의 아무것도 알려 주지 못한다. 무작위성은 처리 과정에서도 들어온다. 반올림(rounding) 오차는 서로 상쇄되어 $\sqrt{n}$처럼 커지지만, 밴쿠버 증권거래소(Vancouver Stock Exchange)가 알게 되었듯이 버림(truncation) 오차는 선형으로 누적된다(Section 13.6). 또 무작위성은 설계할 수도 있다. 독립적인 재료들을 숄레스키 구성(Cholesky construction)으로 조합하면 타당한 상관계수의 집합이라면 어떤 것이든 그것을 갖는 변수들을 만들 수 있다(Section 13.7). 다만 모든 상관(correlation)계수의 집합이 타당한 것은 아니다.

4. 통계학 도구 상자

방법	사용한 곳
푸아송 변동	헤드라인 (13.1)
가능도와 그 최댓값	들쥐 (13.2)
불편성과 분산	일련번호 (13.3); 중앙값 (13.4)
충분통계량	일련번호 (13.3)
정규근사(normal approximation)	13.4, 13.5, 13.6
전분산 법칙(law of total variance)	확률화 응답 (13.5)
편향 대 무작위 오차	반올림 (13.6)
공분산의 선형성(linearity of covariance)	상관 (13.7)

다음으로

- 베이즈 정리(Bayes' theorem) (Section 12.2)는 이 장의 방법들에 대한 주된 대안인 베이즈 통계학의 바탕이다.
- 중심극한정리(central limit theorem) (Section 12.24)는 이 장 전체에서 사용한 정규근사를 정당화하며, 코시 분포(Cauchy distribution) (Section 12.22)는 정규근사가 언제 실패하는지를 보여 준다.
- 상관행렬은 양의 준정부호(positive semi-definite) 행렬이며, Section 7.2의 고유벡터(eigenvector)를 이용하여 연구한다.

대학에 가기 전에 더 나아가고 싶다면

- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***: 일반 독자를 위한 통계적 사고 입문서 가운데 최고이다.
- **Tim Harford, *How to Make the World Add Up***: 뉴스 속 숫자를 읽는 법을 다룬다.
- **John Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis***: 수리통계학의 대학 첫 강좌 교재이다.
- **Stephen Stigler, *The Seven Pillars of Statistical Wisdom***: 통계학의 큰 아이디어들과 그 기원을 다룬다.

조지 박스(George Box)는 모든 모형은 틀렸지만 그중 일부는 쓸모가 있다고 말하였다. 이 장은 모형을 쓸모 있게 만드는 방법을 보여 주려 하였다. 얼마만큼의 변동을 예상해야 하는지 아는 것, 방법을 여러 번 되풀이했을 때 어떻게 작동하는지로 판단하는 것, 그리고 데이터가 어떻게 생겨났는지 생각하는 것이 그것이다. 이것이 숫자를 지식으로 바꾸는 습관이다.

맺음말

이것으로 이 책은 끝난다. 열세 개의 장에 걸쳐 우리는 STEP 문제를 대학 첫 강좌의 수학으로 들어가는 문으로 삼았다. 정수론과 해석학, 미적분학과 복소수, 대수학과 선형대수학, 미분방정식과 동역학, 조합론, 역학, 확률과 통계가 그것이다. 각 문제는 그 뒤에 무엇이 있는지 묻도록 하는 초대였고, 거의 매번 그 답은 하나의 학문 분야 전체였다. 연필을 손에 들고 여백의 질문을 던지며 끝에 있는 문제를 풀어 보면서 이 절들 가운데 몇 개만이라도 끝까지 공부했다면, 여러분은 이미 수학자처럼 생각하기 시작한 것이다. 나머지 여정은 여러분의 몫이다.

더 도전하기 해답

이것은 완전한 풀이가 아니라 간단한 답과 힌트이다. 결과와 핵심 단계를 제시하므로 자신의 풀이를 확인하는 데 쓸 수 있다. 답을 보기 전에 각 연습문제를 제대로 풀어 보아라.

13.1 신문 머리기사 읽기

1. $1 - \sum_{k=0}^{6} \mathrm{e}^{-2.96} \frac{2.96^k}{k!} \approx 0.0315$이므로, 사망자가 일곱 명 이상인 날은 1년에 약 11일이다. $\mathrm{P}(X \geq 9) \approx 0.0035$이므로 이런 날은 1년에 약 하루이다.

2. 사망자 수는 $150K$이고, K는 평균(mean)이 1.2인 포아송(Poisson) 분포를 따른다. 평균은 180, 분산(variance)은 $150^2 \times 1.2 = 27\,000$, 표준편차(standard deviation)는 약 164이다. 사망자가 125명 이하인 해는 추락 사고가 한 번도 없는 해이고, 그 확률은 $e^{-1.2} \approx 0.30$이므로 전혀 이상할 것이 없다. 그러나 이 모형에서 사망자가 정확히 125명인 것은 불가능하다. 사망자는 150의 배수로만 생기기 때문이다. 평균과 표준편차로는 이 사실이 드러나지 않는다. 군집(clustering) 때문에 분포가 울퉁불퉁해져서, 모든 확률이 0, 150, 300 등에 몰려 있다.

3. $z = \frac{1349.5 - 1080}{33} \approx 8.2$이므로 확률은 10^{-16} 정도이다. 일정한 비율로는 1350을 설명할 수 없다. 무언가가 실제로 바뀌었다(또는 사망자를 세는 방식이 바뀌었다).

4. 예를 들면 다음과 같다. (i) "총계만으로는 비행기와 걷기 중 어느 쪽이 더 안전한지 알 수 없다"; (ii) "1990년 항공 사고 사망자, 정상 범위 안"; (iii) "화요일 보행자 사망 7명: 나쁜 날이지만 1년에 약 열한 번 있는 일"; (iv) "1990년 보행자 사망 급증: 원인 조사 필요".

13.2 들쥐 세기

1. $\frac{p_N}{p_{N-1}} = \frac{(N-M)(N-C)}{N(N-M-C+R)}$이고, 이 값은 $NR \leq MC$일 때 그리고 그때에만 1 이상이다. 따라서 p_N은 $N = \frac{MC}{R}$까지 증가하다가 그 뒤로 감소하며, 최댓값은 이 값의 정수 부분에서 나온다.

2. a명의 여자와 b명의 남자 중에서 c명으로 이루어진 위원회의 수를 여자의 수 j에 따라 나누어 센다. 각 j에 대하여 $\binom{a}{j}\binom{b}{c-j}$가지이다.

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\big(h \ln p + (n-h)\ln(1-p)\big) = \frac{h}{p} - \frac{n-h}{1-p} = 0$에서 $p = \frac{h}{n}$을 얻는다.

4. $R = 0$이면 p_N은 끝없이 증가하고, 추정값(estimate)은 무한대가 된다. 이 방법은 두

번째 표본에 표지된 동물이 충분히 들어 있을 때에만 통한다. 다시 잡힌 개체가 적으면 추정값이 매우 불안정하다.

13.3 독일 전차 문제

1. 최댓값을 M이라 하면 $\mathrm{E}(M) = \frac{nN}{n+1}$, $\mathrm{Var}(M) = \frac{nN^2}{(n+1)^2(n+2)}$이므로 $\mathrm{E}(M-N)^2 = \frac{2N^2}{(n+1)(n+2)}$이다. 이것은 $\mathrm{Var}(Z_1) = \frac{N^2}{n(n+2)}$의 $\frac{2n}{n+1}$배이므로 더 나쁘다. 가장 좋은 배수는 $c = \frac{\mathrm{NE}(M)}{\mathrm{E}(M^2)} = \frac{n+2}{n+1}$이고, 이때 평균제곱오차(mean squared error)는 $\frac{N^2}{(n+1)^2}$로 Z_1보다 약간 더 좋다.

2. $\mathrm{E}(\min) = \frac{N}{n+1}$이고 min의 분산은 M의 분산과 같으므로 $\mathrm{Var}\big((n+1)\min\big) = \frac{nN^2}{n+2}$이다. 이 값은 n이 커져도 줄어들지 않으므로, 좋지 않은 추정량(estimator)이다.

3. 최댓값이 m 이하인 것은 k개의 수가 모두 $\{1,\dots,m\}$에서 나올 때 그리고 그때에만이다. $k=1$이면 추정량은 $2X-1$이고, 그 평균은 $2\cdot\frac{N+1}{2}-1 = N$이다.

4. $98 + \frac{98}{5} - 1 = 116.6$이므로 탱크는 약 117대이다.

13.4 평균인가, 중앙값인가?

1. 어느 값이 중앙값(median)인지 고르고($2n+1$가지), 나머지 중 어느 n개가 그보다 작은지 고른다($\binom{2n}{n}$가지). 따라서 확률은 $(2n+1)\binom{2n}{n}y^n(1-y)^n\,\delta y = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}y^n(1-y)^n\,\delta y$이다.

2. $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{4(2n+3)} = \frac{1}{20}$이고 $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{12(2n+1)} = \frac{1}{36}$이다. 평균이 더 좋다.

3. $\mathrm{Var}(\max) = \mathrm{Var}(\min) = \frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$이고 $\mathrm{Cov}(\max,\min) = \frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$이므로 $\frac{1}{2(m+1)(m+2)}$를 얻는다. 이 값은 $\frac{1}{m^2}$처럼 줄어들어, 평균의 $\frac{1}{12m}$보다 훨씬 빠르게 작아진다. 균등분포(uniform distribution)를 따르는 자료에서는 탱크 문제에서처럼 양 끝값이 정보를 담고 있다.

4. 평균은 약 18.6으로, 오타 하나 때문에 망가진다. 중앙값은 10.1로, 영향을 받지 않는다.

13.5 곤란한 질문 던지기

1. 참인 답을 할 확률을 $t = ap + bq$라 하자. "예"라고 답할 확률은 $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(1-t) = \frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(\text{앞면} \mid \text{예}) = t$이고, 이것은 $2t=1$일 때 그리고 그때에만 $\frac{1}{2}$이다. 같은 쌍둥이가 두 번 답하면, "예" 다음에 "아니요"라고 답할 확률은 동전이 앞면이든 뒷면이든 $pa(1-a)+qb(1-b)$이므로 사후확률(posterior probability)은 $\frac{1}{2}$이다. 두 번 모두 "예"라고 답할 확률은 pa^2+qb^2(앞면)와 $p(1-a)^2+q(1-b)^2$(뒷면)이고, 이 둘은 $2(ap+bq)=1$일 때 그리고 그때에만 같다.

2. $\mathrm{P}(\text{예}) = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}(1-\pi)$이므로 $\hat{\pi} = \frac{0.4-0.25}{0.5} = 0.3$이다. 표준오차(standard error)는 $\frac{\sqrt{0.4\times 0.6/400}}{0.5} \approx 0.049$이다.

3. $\mathrm{E}(Y^2) = \sum_c \mathrm{P}(C=c)\big(\mathrm{Var}(Y \mid c) + \mathrm{E}(Y \mid c)^2\big)$이다. 여기서 $\mathrm{E}(Y)^2 = \big(\sum_c \mathrm{P}(C=c)\mathrm{E}(Y \mid c)\big)^2$을 빼면 $\mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y \mid C)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y \mid C))$를 얻는다.

4. Z_2는 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 $\frac{n}{6}$(앞면) 또는 $\frac{5n}{6}$(뒷면)에 가깝다. 따라서 Z_2가 $\frac{n}{2}$ 근처에 있는 일은 거의 없는데도 $\mathrm{P}(Z_2 > \frac{n}{2}) \to \frac{1}{2}$이다.

13.6 쌓이는 오차

1. 각 버림 오차(truncation error)는 $(-1, 0]$에서 균등분포를 따른다. 각각에 $\frac{1}{2}$를 더하면 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$에서 균등분포를 따르게 되어, 반올림(rounding)과 똑같아진다. 따라서 보정한 VOZ는 LEP만큼 좋다.

2. 각 오차는 $(-0.05, 0.05)$에서 균등분포를 따르고 분산은 $\frac{0.1^2}{12}$이므로, 합의 표준편차는 $\sqrt{10\,000 \times 0.01/12} \approx 2.9$이다.

3. $3000 \times 250 \times 0.0005 = 375$점이다.

4. 오차가 두 개이면 $[-1, 1]$에서 $1 - |x|$이다. 세 개이면 $|x| \le \frac{1}{2}$에서 $\frac{3}{4} - x^2$이고 $\frac{1}{2} \le |x| \le \frac{3}{2}$에서 $\frac{1}{2}\big(\frac{3}{2} - |x|\big)^2$이며, 이미 정규분포(normal distribution) 곡선에 가깝다.

13.7 상관관계 만들어 내기

1. 표준화된(standardised) 변수에 대하여 $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3) = 3 + 6\rho \ge 0$이므로 $\rho \ge -\frac{1}{2}$이다. n개의 변수에 대해서는 $n + n(n-1)\rho \ge 0$에서 $\rho \ge -\frac{1}{n-1}$을 얻는다.

2. $b = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}$라 하면 $(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2-b^2) = 1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} = \det R$이다. $1 - \rho_{12}^2 > 0$이므로 두 조건은 동치이다.

3. $\mathrm{Var} = \frac{1}{4}(0.04 + 0.09 + 0.12\rho)$이므로, $\rho = -1, 0, 1$일 때 표준편차는 각각 0.05, 0.18, 0.25이다. 두 주식이 완전한 상관관계(perfectly correlated)에 있지 않은 한, 두 주식을 섞어 보유하는 것은 두 위험의 평균(0.25)보다 덜 위험하다.

4. $Z_2 = \dfrac{Y_2 - \rho_{12}Y_1}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}$.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수 수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

