解答例

STEP III 見本問題、第 9 問

純粋数学 ・ 行列の群

> **STEP III 見本問題、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q9

鍵となる考え方

すべては一つの計算から導かれる。この形をした一般の行列を二つ掛け合わせ、何が得られるかを見ればよい。積は再び同じ形になり、その成分は簡単な式で与えられる。そしてその式から、閉性（closure）、単位元（identity）、逆元（inverse）、整数部分群、可換となる条件が、ほとんど労せずに得られる。次のようにおく。

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix}.$$

解答

G は群である

積の公式。行と列を掛け合わせると、

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+x & 1 & 0 \\ b+cx+y & c+z & 1 \end{pmatrix},$$

すなわち

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z) = M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z). \qquad (*)$$

である。

閉性。成分 $a+x$、$b+cx+y$、$c+z$ はいずれも実数であるから、積は G に属する。

結合法則（associativity）。行列の積については、これを仮定してよい。

単位元。単位行列は $I = M(0,0,0)$ であり、これは G に属する。また、任意の行列 M に対して $IM = MI = M$ が成り立つ。

逆元。$M(a,b,c)$ が与えられたとき、積が $M(0,0,0)$ となる $M(x,y,z)$ を探す。$(*)$ より $a+x=0$、$c+z=0$、$b+cx+y=0$ が必要であるから、$x=-a$、$z=-c$、$y=-b-cx=ac-b$ となる。行列の積は可換ではないので、逆の順序も確かめておく。

$$M(-a,\, ac-b,\, -c)\, M(a,b,c) = M(0,\ (ac-b)+(-c)a+b,\ 0) = M(0,0,0).$$

よって $M(a,b,c)^{-1} = M(-a,\, ac-b,\, -c)$ であり、これは G に属する。

群の四つの公理がすべて成り立つので、G は行列の積に関して群（group）である。

整数成分の行列

$x,y,z \in \mathbb{Z}$ である $M(x,y,z)$ 全体の集合を H とする。これは G の部分集合であり、$I = M(0,0,0)$ を含む。a,b,c,x,y,z が整数ならば $a+x$、$b+cx+y$、$c+z$ も整数であるから、$(*)$ より H は積について閉じている。逆元 $M(-a,\, ac-b,\, -c)$ も整数成分をもつので、H は逆元をとる操作についても閉じている。結合法則は G から引き継がれる。したがって答えは**イエス**であり、H は G の部分群（subgroup）である。

> **考えてみよう** 積について閉じていることだけでは、なぜ十分でないのだろうか？

無限部分集合の場合、それだけでは部分群にならないことがある。たとえば x,y,z が**非負**整数である行列 $M(x,y,z)$ 全体は積について閉じているが、$M(1,0,0)$ の逆元は $M(-1,0,0)$ であり、これはその集合に属さない。ここでは逆元の公式によって整数の範囲にとどまることが保証されており、それこそが H を部分群にしているのである。

すべての元と可換な元

$A = M(a,b,c)$ と一般の $B = M(x,y,z)$ をとる。$(*)$ を両方の順序で用いると、

$$AB = M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z), \qquad BA = M(x+a,\ y+za+b,\ z+c).$$

第一成分と第三成分は常に一致するので、

$$AB = BA \iff cx = az.$$

である。（特に G は非可換（non-abelian）である。実際、$M(1,0,0)$ と $M(0,0,1)$ は可換でない。）

A が**すべての** B と可換（commute）であるためには、すべての実数 x、z に対して $cx = az$ が成り立つ必要がある。$x=1$、$z=0$ とすると $c=0$ が、$x=0$、$z=1$ とする

と $a = 0$ が得られる。逆に $a = c = 0$ ならば、すべての x, z に対して $cx = 0 = az$ となる。よって G のすべての元と可換な元は、ちょうど次の形のものである：

$$A = M(0,b,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

したがって答えは**イエス**であり、そのような A は存在する。$b \neq 0$ であれば $A \neq I$ となり、たとえば $A = M(0,1,0)$ がそうである。$(*)$ より、G の任意の $B = M(x,y,z)$ に対して $M(0,1,0)\,M(x,y,z) = M(x,\,1+y,\,z) = M(x,y,z)\,M(0,1,0)$ が成り立つ。

検算

- G の各行列は対角成分がすべて 1 の下三角行列（lower triangular matrix）であるから、その行列式（determinant）は 1 であり、確かに逆行列をもつ。したがって求めた逆元は必ず存在し、しかも再び同じ形をしている。
- 数値による確認：$A = M(2,3,5)$、$B = M(1,0,0)$ とすると、$(*)$ より $AB = M(3,8,5)$ であるが $BA = M(3,3,5)$ となる。よって A は B と可換でなく、これは $cx = 5 \neq 0 = az$ から予想されるとおりである。さらに、積と逆元の公式、および可換となる条件を、数千個のランダムな行列について分数を用いて厳密に確かめた。

よくある間違い

- 逆元を片側からしか確かめないこと。非可換な状況では両方の積を確認しておく価値がある（あるいは、正方行列では片側逆行列は自動的に両側逆行列になることに触れてもよい）。
- 最後の小問に「G は非可換なので、存在しない」と答えること。非可換群であっても、単位元以外にすべての元と可換な元をもつことはあり、この群はまさにそうである。
- 逆の確認を忘れること。$a = c = 0$ が必要であることを示したら、そのような A が実際にすべての B と可換であることも確かめなければならない。

STEP のその先へ

これは**ハイゼンベルク群**（Heisenberg group）であり、すべての元と可換な元の全体はその**中心**（centre）$Z(G)$ をなす。ここではそれは行列 $M(0,b,0)$ の全体であり、加法に関する実数全体と同じ構造をもつ。整数版の H は離散ハイゼンベルク群であり、

群論（group theory）や幾何学で好んで用いられる例である。また、ハイゼンベルク群そのものは、位置と運動量の交換関係（commutation relations）を通じて量子力学（quantum mechanics）に現れる。群、部分群、中心については Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。