解答例

STEP III 見本問題、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルとコーシー・シュワルツの不等式

> **STEP III 見本問題、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q8

鍵となる考え方

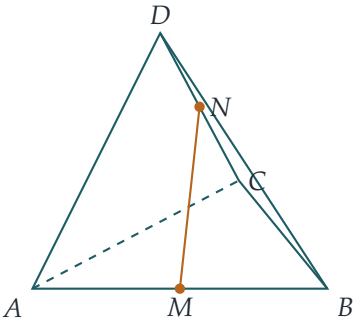
小問 (i) では、4 つの頂点に位置ベクトル（position vector）を与える。必要な長さはすべて、それらの簡単な組合せの大きさ（modulus）であり、長さの 2 乗は展開できる内積（dot product）である。すると両辺は同じ式になり、計算の整理の大部分は対称性が引き受けてくれる。小問 (ii) では、左辺は固定されたベクトル $(3,2,6)$ との内積のように見え、しかもこのベクトルの長さは整数である。これはまさにコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）が活躍する場面である。

解答

小問 (i)

四面体（tetrahedron）を $ABCD$ とし、任意の原点に関する位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ とする。6 本の辺は、対辺（opposite edges、共通の頂点をもたない辺）の 3 組に分かれる：

$$AB \text{ と} CD, \qquad AC \text{ と} BD, \qquad AD \text{ と} BC.$$



組 AB, CD について、中点（midpoint）は $M = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ と $N = \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$ であるから

$$MN^2 = \tfrac{1}{4}\,|\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.$$

残り 2 本の中点を結ぶ線分も同様に求まるので、3 本の中点連結線分の長さの 2 乗の和の 4 倍は

$$S = |-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}|^2.$$

である。$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ を用いて各項を展開する。各項は $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2$ と、交差項 $\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ を与える。交差項の符号は、その項の中で $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の符号が同じとき正である。

考えてみよう 3 つの項にわたって、交差項はどのように足し合わされるだろうか？

任意の頂点の組、たとえば $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ をとる。これらは第 1 項では同じ符号、他の 2 項では異なる符号をもつので、交差項の合計は $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ となる。どの組についても同じことが成り立つ。実際、3 つの項はそれぞれ 4 つの頂点を 2 組（ある頂点の組とその反対側の組）に分け、どの頂点の組も 3 つの項のうちちょうど 1 つでだけ符号が一致する。したがって

$$S = 3(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2) - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}).$$

次に辺について考える。たとえば $AB^2 = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ である。6 本の辺すべてについて和をとると、各頂点は 3 本の辺に属するので、各 $|\mathbf{a}|^2$ は 3 回現れ、各組は $-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ を 1 つずつ与える：

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2 = 3\sum|\mathbf{a}|^2 - 2\sum_{\text{組}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = S.$$

よって、辺の長さの 2 乗の和は、対辺の中点を結ぶ 3 本の線分の長さの 2 乗の和の 4 倍に等しい。これで示された。

小問 (ii)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{よって} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3x + 2y + 6,$$

とおく。このとき $|\mathbf{a}| = \sqrt{9+4+36} = 7$、$|\mathbf{b}| = \sqrt{x^2+y^2+1}$ である。任意の実数はその絶対値以下であるから

$$3x + 2y + 6 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| = 7\sqrt{x^2+y^2+1},$$

となり、これが求める不等式である。

等号成立条件。両方の段階で等号が成り立つ必要がある。

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ であり $|\cos\theta| = 1$ が必要なので、$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ が成り立つのは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行なときに限る。$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ であるから、これはある λ に対して $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ となることを意味する。第 3 成分から $1 = 6\lambda$ なので $\lambda = \frac{1}{6}$ であり、$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ となる。
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ には $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \ge 0$ が必要である。ここでは $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lambda|\mathbf{a}|^2 = \frac{49}{6} > 0$ なので、これも成り立つ。

直接確かめると、$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ のとき左辺は $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 6 = \frac{49}{6}$、右辺は $7\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+1} = 7\cdot\frac{7}{6} = \frac{49}{6}$ である。よって等号が成り立つのは

$$x = \tfrac{1}{2}, \qquad y = \tfrac{1}{3}.$$

のとき、かつそのときに限る。

検算

- 1 辺の長さ 1 の正四面体（regular tetrahedron）では、6 本の辺の長さの 2 乗の和は 6 である。これを 1 辺 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の立方体の 1 つおきの頂点に置くと、各中点連結線分は向かい合う面の中心を結ぶので長さは $\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、$4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$ となる。
- 10^4 個のランダムな四面体で数値実験を行ったところ、丸め誤差の範囲で恒等式と一致した。(ii) については、$7\sqrt{x^2+y^2+1} - (3x+2y+6)$ は 2×10^5 個のランダムな点で正であり、細かい格子上での最小値は $(0.5,\, 0.335)$ でとられた。これは値が 0 となる点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ に近い。

よくある間違い

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ の段階を忘れる、あるいは等号成立条件の議論でこれを無視する。ここでは $\lambda > 0$ なので問題は生じないが、確認は必要である。$\lambda < 0$ であれば両辺の符号が異なってしまう。
- $(3,2,6)$ と $(x,y,1)$ を用いながら、$|\mathbf{a}|$ を 7 以外の値にしてしまう。この問題は $3^2+2^2+6^2$ が平方数になるように作られている。

STEP のその先へ

小問 (i) は、平行四辺形の法則（parallelogram law）$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{v}|^2$ の 3 次元版の親戚である。実は、3 本の中点連結線分は重心（centroid）で交わり、互いに他を 2 等分する。小問 (ii) はコーシー・シュワルツの不等式そのものであり、これは任意の内積空間（inner-product space）で成り立つ。関数の空間も含まれ、そこでは積分を評価する道具となる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これら 2 つの考え方をより広い枠組みで眺めるのに良い本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。