解答例

STEP III 見本問題、第 7 問

純粋数学 ・ 階数低下法

STEP III 見本問題、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q7

鍵となる考え方

2 階線形微分方程式（second-order linear differential equation）に x^2y''、xy'、y が含まれているときは、x のべきを試すのが自然である。そうすると各項は x^α の定数倍となり、方程式は α に関する条件に帰着する。解 y_1 が一つわかれば、$y = y_1 v$ とおくのが**階数低下法**（reduction of order）である。v そのものを含む項は打ち消し合い、v' に関する 1 階の方程式が残る。

解答

べき関数の解

$y = x^\alpha$ を試す（任意の実数 α に対して x^α が意味をもつように $x > 0$ とする）。このとき $y' = \alpha x^{\alpha-1}$、$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ であるから、

$$xy' - y = (\alpha - 1)x^\alpha, \qquad x^2y'' = \alpha(\alpha-1)x^\alpha.$$

これを代入すると、

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = [\alpha(\alpha-1) + (x-2)(\alpha-1)]x^\alpha = (\alpha-1)(\alpha+x-2)\,x^\alpha.$$

これが**すべての** x に対して 0 となるためには、括弧の中が恒等的に 0 でなければならない。因数 $\alpha + x - 2$ は x に依存するので恒等的に 0 にはなりえない。よって $\alpha = 1$ である。

したがって $y = x$ は解であり、このことは直接確かめることもできる。実際、$y'' = 0$ かつ $xy' - y = x - x = 0$ である。さらにその定数倍 $y = Ax$ も解であり、これが「解は x^α に比例する」という意味である。

一般解

ヒントに従い、x の関数 v を用いて $y = xv$ とおく。すると

$$y' = v + xv', \qquad y'' = 2v' + xv'',$$

であり、方程式に現れる組合せはきれいに簡単になる：

$$xy' - y = xv + x^2v' - xv = x^2v'.$$

これを方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(2v' + xv'') + (x-2)x^2v' \\ &= x^2(xv'' + 2v' + xv' - 2v') \\ &= x^3\,(v'' + v'). \end{aligned}$$

考えてみよう （微分を含まない）v そのものを含む項がすべて消えたのはなぜか？

それは $y = x$ が解だからである。v が定数ならば $y = xv$ は x の定数倍となり、左辺は 0 になる。したがって残りうるのは v' と v'' だけである。これこそが階数低下法がうまくいく理由であり、計算の検算としても役に立つ。

0 を含まない任意の区間では x^3 で割ることができ、

$$v'' + v' = 0.$$

を得る。これは $w = v'$ についての 1 階の方程式 $w' = -w$ であり、定数 B を用いて $w = Be^{-x}$ となる。もう一度積分すると（符号は定数に含めて）、

$$v = A + Be^{-x}.$$

したがって一般解（general solution）は

$$\boxed{y = Ax + Bxe^{-x}}$$

である。ただし A、B は任意定数である。2 階線形微分方程式の一般解がそうでなければならないように、これは 2 つの任意定数を含み、しかも 2 つの部分 x と xe^{-x} は互いに定数倍の関係にない。

新しく得た部分を直接確かめておく。$y = xe^{-x}$ とすると $y' = (1-x)e^{-x}$、$y'' = (x-2)e^{-x}$ であるから、

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = (x-2)e^{-x}[x^2 + x(1-x) - x] = 0.$$

$x = 0$ についての注意。 y'' の係数は $x = 0$ で 0 になる。x^3 で割るのを 0 から離れたところに限ったのはこのためである。原理的には $x > 0$ と $x < 0$ で異なる定数をとることもできる。しかし、そのような関数はどれも $y(0) = 0$、$y'(0^{\pm}) = A_{\pm} + B_{\pm}$、$y''(0^{\pm}) = -2B_{\pm}$ をみたすので、y が 0 で 2 回微分可能であるためには $B_+ = B_-$ が必要であり、そのとき $A_+ = A_-$ となる。よって $y = Ax + Bxe^{-x}$ は実数全体においても一般解である。

検算

- 上で行ったように、$y = x$ と $y = xe^{-x}$ をそれぞれ方程式に代入し直すと、いずれも 0 になる。
- 数値的な確認：$x = 1$ から $y(1) = y_0$、$y'(1) = y_1$ として方程式を一歩ずつ数値的に解く場合、公式からは $A = y_1$、$B = (y_0 - y_1)e$ と予想される。$y_0 = 2$、$y_1 = 1$ とすると $y(4) = 4 + 4e^{-3} \approx 4.199$ となり、いくつかのランダムな初期値に対して、4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）による数値積分と 10^{-8} より高い精度で一致する。

よくある間違い

- 因数 $(\alpha + x - 2)$ から $\alpha = 2 - x$ と結論してしまう。α は定数でなければならないので、この根は認められない。
- $y = xv$ に対する y'' を誤って計算する（正しくは $2v' + xv''$ であり、$v' + xv''$ ではない）。v を含む項が打ち消し合わなければ、微分の計算が間違っている。
- $v' = Be^{-x}$ で止まってしまい、積分して v を求める際に 2 つ目の定数を忘れる。

STEP のその先へ

階数低下法は任意の 2 階線形微分方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ に対して有効である。解 y_1 が一つ与えられれば、置換 $y = y_1 v$ によって常に v' に関する 1 階線形微分方程式が得られ、2 つ目の解は y_1 と p を含む積分で表すことができる。これはロンスキアン（Wronskian）やアーベルの公式（Abel's formula）と密接に関係しており、また $x = 0$ のような点で x^{α} を試すことは、級数解を求めるフロベニウス法（Frobenius method）の第一歩である。これらはすべて Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。