解答例

STEP III 見本問題、第 6 問

純粋数学 ・ 双曲線関数の漸化式

STEP III 見本問題、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q6

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）$\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u$ は、$\sinh u$ と $\sinh u\operatorname{sech}^{n+2}u$ の積に自然に分けられる。しかも後者は、定数倍を除いて $\operatorname{sech}^{n+1}u$ の導関数（derivative）である。したがって、部分積分（integration by parts）を用いるのが自然な一手である。漸化式（reduction formula）については、恒等式 $\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$ を使うと、同じ積分を 2 つの I の差として書き直すことができる。

解答

積分の恒等式

まず、後で必要になる導関数を求めておく。$\operatorname{sech} u=(\cosh u)^{-1}$ であるから、連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{sech}^{n+1}u=-(n+1)\cosh^{-n-2}u\,\sinh u=-(n+1)\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u.$$

そこで、次のようにおいて部分積分を行う。

$$f=\sinh u,\qquad g'=\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u,\qquad \text{よって}\qquad f'=\cosh u,\qquad g=-\frac{\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}.$$

これより

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u\,\mathrm{d}u&=\Big[-\frac{\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}\Big]_0^\infty+\frac{1}{n+1}\int_0^\infty\cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u\,\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{n+1}\Big[\tanh u\operatorname{sech}^n u\Big]_0^\infty+\frac{1}{n+1}\int_0^\infty\operatorname{sech}^n u\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

を得る。ここで $\sinh u \operatorname{sech}^{n+1} u = \tanh u \operatorname{sech}^n u$ および $\cosh u \operatorname{sech}^{n+1} u = \operatorname{sech}^n u$ を用いた。

> **考えてみよう** 境界項（boundary term）はなぜ 0 になるのか。また、$n > 0$ はどこで使われるのか。

$u = 0$ では $\tanh 0 = 0$ である。$u \to \infty$ のとき $\tanh u \to 1$ であり、一方 $\operatorname{sech} u = 2/(e^u + e^{-u}) \to 0$ であるから、$n > 0$ なので $\operatorname{sech}^n u \to 0$ となる。（$n = 0$ ならば、この項は 0 ではなく 1 に近づく。）同じ事実 $\operatorname{sech}^n u < 2^n e^{-nu}$ から、$n > 0$ のとき I_n が収束（converge）することもわかる。よって境界項は 0 であり、

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1} I_n,$$

となって、示すべき式が得られた。

漸化式

次に、同じ積分を別の方法で計算する。$\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1$ であるから

$$\operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u = \operatorname{sech}^{n+2} u \cosh^2 u - \operatorname{sech}^{n+2} u = \operatorname{sech}^n u - \operatorname{sech}^{n+2} u.$$

（$n > 0$ なので）どちらの項も $[0, \infty)$ 上の積分が収束するから、

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = I_n - I_{n+2}.$$

最初の結果と比較すると

$$I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_n \quad \Longrightarrow \quad I_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) I_n = \frac{n}{n+1} I_n,$$

すなわち $(n+1) I_{n+2} = n I_n$ となり、示すべき式が得られた。

I_6 の値

漸化式は n を 2 ずつ進めるので、n が偶数である初期値が必要である。最も簡単なのは

$$I_2 = \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 u \, \mathrm{d}u = \Big[\tanh u\Big]_0^\infty = 1 - 0 = 1.$$

である。（I_0 から始めることはできない。I_0 は発散（diverge）し、$n = 0$ として漸化式を使うと $I_2 = 0$ という誤った式が出てしまう。まさにここで $n > 0$ が重要になる。）すると

$$I_4 = \frac{2}{3} I_2 = \frac{2}{3},$$
$$I_6 = \frac{4}{5} I_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

よって

$$I_6 = \frac{8}{15}.$$



検算

- 数列 $I_2, I_4, I_6 = 1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ は減少しており、そうでなければならない。$0 < \operatorname{sech} u \leq 1$ であるから、べきが高いほど値は小さくなる。
- 代わりに $I_1 = \int_0^\infty \operatorname{sech} u \, \mathrm{d}u = \left[2 \arctan(\mathrm{e}^u)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ から始めると、漸化式より $I_3 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}$ となり、直接の数値積分の結果と一致する。
- $[0, 60]$ 上でシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると $I_6 \approx 0.5333333$ となり、$\frac{8}{15}$ と一致する。また、積分の恒等式と漸化式はいずれも、$n = 0.5$ や $n = 2.5$ のような整数でない n に対しても数値的に確かめられる。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \operatorname{sech}^{n+1} u$ の符号や因子 $n+1$ を間違える。$u > 0$ で $\operatorname{sech} u$ は減少するので、導関数は負でなければならない。
- 無限遠で境界項が 0 になる理由を説明しない。条件 $n > 0$ が必要になるのはまさにこの 1 か所である。
- I_2 の値を求めずに、答えを $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_2$ のまま書く。

STEP のその先へ

このような漸化式は、ウォリス（Wallis）の公式と同じ構造をもっている。$t = \tanh u$（あるいはグーデルマン置換（Gudermannian substitution）$\sin\theta = \tanh u$）とおくと、I_n は $\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta \, \mathrm{d}\theta$ となり、漸化式はウォリスのものそのものになる。大学では、これらの積分はベータ関数（Beta function）の値 $I_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ として再び登場し、これによって漸化式はすべての実数 $n > 0$ に拡張される。また、境界項について払った注意は、広義積分（improper integral）の理論の出発点である。厳密な扱いについては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を、この種の問題をさらに多く解きた

い場合は Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。