解答例

STEP III 見本問題、第 5 問

純粋数学 ・ 方程式の解の個数

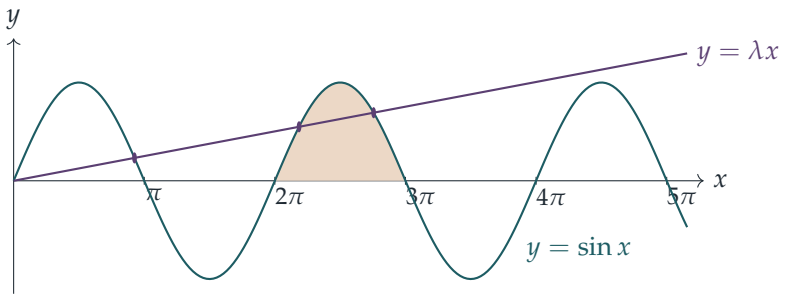
STEP III 見本問題、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q5

鍵となる考え方

直線 $y = \lambda x$ と曲線 $y = \sin x$ を同じ図に描いてみよう。解とは両者の交点である。直線が曲線と交わりうるのは $\sin x > 0$ となる部分、すなわち正の「山」$((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ の上だけである。さらに各山の上で $\sin x$ は凹（concave）であるから、直線は山と 2 回交わるか、まったく交わらないかのどちらかである（原点から始まる最初の山だけは例外である）。小さい ϵ に対する評価では、マクローリン級数（Maclaurin series）$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ が役に立つ。



（ここでは $\lambda = 0.08$ である。最初の山で 1 回、網掛けした 2 番目の山で 2 回交わり、3 番目の山が頂上に達する前に直線は高さ 1 を超えてしまうので、$N = 3$ となる。）

解答

小問 (i)

$\lambda > 1$ **のとき解は存在しない。**曲線 $y = \sin x$ の傾きは $\cos x \leq 1$ であり、曲線は原点を通り、直線 $y = x$ はそこでの接線（tangent）である。$x > 0$ のとき $\sin x < x$ が成り立つ（関数 $x - \sin x$ は 0 で値が o であり、その導関数（derivative）$1 - \cos x \geq 0$ が o になるのは孤立した点のみであるから、狭義単調増加（strictly increasing）である）。図でいえば、$x > 0$ において曲線は接線 $y = x$ の真下にあり、$\lambda > 1$ ならば直線 $y = \lambda x$ はそこで $y = x$ より上にある。したがって

$$\sin x < x < \lambda x \qquad \text{任意の} x > 0,$$

となり、o でない解は存在しない。

$\lambda = 1 - \epsilon^2$ **の場合。**$x > 0$ において、方程式は

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \epsilon^2.$$

と同値である。まず、解が存在してただ一つであることを示す。$(0, \pi]$ 上で関数 $\frac{\sin x}{x}$ は連続（continuous）であり、$x \to 0^+$ のとき 1 に近づき、$x = \pi$ で 0 に等しい。よって $(0, \pi)$ のどこかで値 $1 - \epsilon^2$ をとる。しかもこの区間で狭義単調減少である（原点と凹な山の上の点を結ぶ直線は、点が山に沿って進むにつれて傾きが緩やかになる）から、そのような点はただ一つである。$x \geq \pi$ では解はない。ϵ は小さいので $\lambda x \geq (1 - \epsilon^2)\pi > 1 \geq \sin x$ となるからである。

次に解の位置を求める。$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$ を用いると

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots = 1 - \epsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots = \epsilon^2.$$

? **考えてみよう** なぜ x^4 の項を捨ててよいのだろうか。x が小さいことはまだわかっていない。

$\epsilon \to 0$ のとき $\frac{\sin x}{x} \to 1$ であり、$\frac{\sin x}{x}$ は $(0, \pi)$ 上で 1 から狭義単調減少するので、解は 0 に近づかなければならない。したがって ϵ が小さければ解も小さく、そのとき x^4 は x^2 に比べて無視できる。主要項（leading order）までとると $x^2/6 = \epsilon^2$ であるから

$$x \approx \epsilon\sqrt{6}.$$

となる。（次の項まで残すと $x^2 \approx 6\epsilon^2 + \frac{6}{120}(6\epsilon^2)^2$ となり、より精密な近似 $x \approx \epsilon\sqrt{6}\left(1 + \frac{3}{20}\epsilon^2\right)$ が得られる。）

小問 (ii)

$g(x) = \sin x - \lambda x$ とおくと、解とは $x > 0$ における g の零点である。$x > 0$ では $\lambda x > 0$ であるから、どの解でも $\sin x > 0$ であり、解は次のいずれかの山の上にある。

$$A_n = \big((2n-2)\pi,\, (2n-1)\pi\big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

最初の山。原点において直線の傾きは $\lambda < 1$ であり曲線の傾きより小さいので、直線は曲線の下から出発する。一方 $x = \pi$ では直線のほうが上にある（$\lambda\pi > 0 = \sin\pi$）。$\sin x$ は A_1 上で凹であり直線はまっすぐなので、両者はそこでちょうど 1 回交わる。よって A_1 にはちょうど一つの解があり、それは x_1 でなければならず、$0 < x_1 < \pi$ である。

2 番目以降の山。$n \geq 1$ として $A_{n+1} = (2n\pi, (2n+1)\pi)$ 上では $g''(x) = -\sin x < 0$ であるから、g は凹であり零点は高々二つである。山の両端では $\sin x = 0 < \lambda x$ であるから、そこで $g < 0$ である。g の最大値は $g'(x) = \cos x - \lambda = 0$ となる点 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$ でとられ、$\lambda > 0$ のとき $\arccos\lambda < \frac{\pi}{2}$ であるから $c_n < (2n + \frac{1}{2})\pi$ である。よって g は $(2n\pi, c_n)$ で増加し $(c_n, (2n+1)\pi)$ で減少するので、次のことがわかる。

- $g(c_n) < 0$ ならば、直線は山と交わらない。
- $g(c_n) = 0$ ならば、直線は山に 1 点で接する。
- $g(c_n) > 0$ ならば、解はちょうど二つあり、一つは $(2n\pi, c_n)$ に、もう一つは $(c_n, (2n+1)\pi)$ にある。

また、直線がある山と交わらなければ、それ以降のすべての山とも交わらない。実際、$x \in A_{n+2}$ ならば $x - 2\pi \in A_{n+1}$ であるから、$\sin x = \sin(x - 2\pi) < \lambda(x - 2\pi) < \lambda x$ となる。

したがって直線が交わる山は $A_1, A_2, \ldots$ からある最後の山までであり、それぞれ $1, 2, 2, \ldots$ 個の解を与え、そのあとに接点が一つ続くこともありうる。$N = 2R + 1$ は奇数なので接点はなく、直線はちょうど山 $A_1, \ldots, A_{R+1}$ と交わる。解を小さい順に並べると、山 A_{n+1}（$1 \leq n \leq R$）には x_{2n} と x_{2n+1} が含まれ、

$$2n\pi < x_{2n} < c_n < (2n + \tfrac{1}{2})\pi, \qquad 2n\pi < x_{2n+1} < (2n+1)\pi.$$

が成り立つ。一つ目から、求める不等式の 2 行目が得られる。x_{2n+1} を $x_{2(n+1)-1}$ と書き直せば、二つ目と $0 < x_1 < \pi$ から、$m = 1, \ldots, R+1$ に対して $(2m-2)\pi < x_{2m-1} < (2m-1)\pi$ が得られる。これが求める結果である。

N の評価。λ が小さいとき直線は多くの山と交わるので、$R \geq 1$ である。x_{2R} では

$\lambda x_{2R} = \sin x_{2R} \le 1$ であり、上で示したように $x_{2R} > 2R\pi$ であるから

$$2R\pi\lambda < 1.$$

一方、直線は $A_{R+2} = \big((2R+2)\pi, (2R+3)\pi\big)$ とは交わらない。その中点 $(2R+\frac{5}{2})\pi$ では $\sin x = 1$ であるから、$\lambda(2R+\frac{5}{2})\pi > 1$ でなければならない（そうでなければそこで $g \ge 0$ となり、直線は山と交わってしまう）。これらを合わせると

$$\frac{1}{2\pi\lambda} - \frac{5}{4} < R < \frac{1}{2\pi\lambda}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{3}{2} < N < \frac{1}{\pi\lambda} + 1.$$

λ が非常に小さいとき $\frac{1}{\pi\lambda}$ は非常に大きく、有界な誤差はそれに比べて無視できるので

$$N \approx \frac{1}{\pi\lambda}.$$

となる。これは納得のいく結果である。直線は $x = 1/\lambda$ で高さ 1 に達し、それより手前には $\sin x$ のおよそ $\frac{1}{2\pi\lambda}$ 個の完全な周期があり、それぞれが 2 個の交点を与えるからである。

検算

- $\epsilon = 0.01$（$\lambda = 0.9999$）のとき、二分法（bisection）により解 0.0244953 が得られ、$\epsilon\sqrt{6} = 0.0244949$ と比べると比は 1.000015 であり、補正 $1 + \frac{3}{20}\epsilon^2$ にぴったり一致する。
- $\lambda = 0.001$ のとき、計算機は $N = 317$ 個の解を見つける。これに対し $\frac{1}{\pi\lambda} \approx 318.3$ である。$\lambda = 0.01$ のときは 31 個で、31.8 と比べられる。いくつかの λ について見つかった解はすべて (ii) の区間の不等式を満たし、N は上の範囲に収まっている。
- $\lambda = 1.0001$、1.1、2、5 のときは解は見つからなかった。

よくある間違い

- x_1 だけが最初の山にあることを忘れる。原点も交点の一つであり、そのためこの山が与える 0 でない解は二つではなく一つなのである。
- 理由を示さずに x_{2n} を山の前半に置いてしまう。要点は、g が減少し始めるのが $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$ より後であり、この点が $\sin x$ の頂上より手前にあることである。

STEP のその先へ

近似 $x \approx \epsilon\sqrt{6}$ は漸近展開（asymptotic expansion）の第一歩であり、級数を打ち切る前に解が小さくなければならないことを論証する部分は、解析学（analysis）の講義で求められる類の慎重さである。凹性、単調性（monotonicity）、中間値の定理（intermediate value theorem）を用いて解の個数を数えるのは大学 1 年次の解析学の定番であり、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。関連する古典的な例に $\tan x = x$ がある。その解は $(n + \frac{1}{2})\pi$ に近づき、熱伝導（heat conduction）や振動（vibration）の問題に現れる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。