解答例

# STEP III 見本問題、第 4 問

純粋数学 ・ 放物線の接線

**STEP III 見本問題、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q4

## 鍵となる考え方

直線が放物線（parabola）に接するのは、直線の式を放物線の方程式に代入して得られる二次方程式（quadratic）が重解（repeated root）をもつときであり、またそのときに限る。したがって前半は判別式（discriminant）を用いた一行の計算で済み、その結果として $t$ で番号づけられた接線（tangent）の族が得られる。後半では、与えられた点から引いた接線を、ある二次方程式を満たす $t$ の値として捉えるとよい。そうすれば $L$ と $M$ に関することはすべて解の和と積で表すことができ、それらは係数から直ちに求まる。

## 解答

### 接線

直線の式から $x = ty - at^2$ である。これを $y^2 = 4ax$ に代入すると

$$y^2 = 4aty - 4a^2t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 4aty + 4a^2t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y - 2at)^2 = 0.$$

となる。この $y$ についての二次方程式は重解 $y = 2at$ をもつので、直線は放物線とちょうど一点で、しかも重複度（multiplicity）2 で交わる。すなわち直線は放物線に接する。（放物線の軸に平行な直線も放物線と一度しか交わらないが、この直線は水平ではないので、そのような直線ではない。$t = 0$ のときは直線 $x = 0$ となり、これは頂点（vertex）における接線である。）対応する $x$ は $x = t(2at) - at^2 = at^2$ なので、接点は

$$(at^2,\ 2at).$$

である。検証として、$y^2 = 4ax$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると、この点で $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$ となり、これは $ty = x + at^2$ の傾きに一致する。

**軌跡**

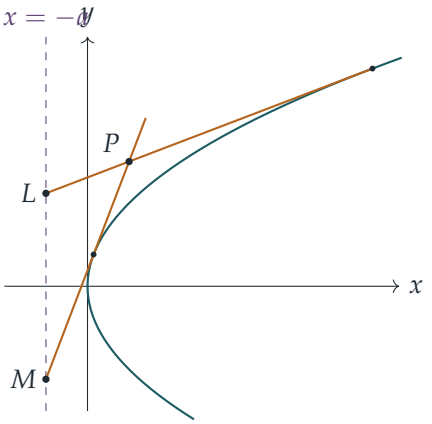
放物線上の各点は、ただ一つの $t$ によって $(at^2, 2at)$ と表されるので、接線はすべて直線 $ty = x + at^2$ のいずれかである。与えられた点を $P = (h, k)$ とする。パラメータ $t$ の接線が $P$ を通るための必要十分条件は

$$at^2 - kt + h = 0.$$

である。接線が二本引けるためには、異なる二つの実数解 $t_1, t_2$ が必要であり、それは $k^2 > 4ah$（$P$ が放物線の外側にあること）と同値である。このとき

$$t_1 + t_2 = \frac{k}{a}, \qquad t_1 t_2 = \frac{h}{a}.$$

が成り立つ。




パラメータ $t$ の接線は、$ty = -a + at^2$ となる点で準線（directrix）$x = -a$ と交わる。$t \neq 0$ ならば

$$y = a\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

である。（$t = 0$ のとき接線は $x = 0$ であり、準線と平行なので交点は存在しない。これが起こるのは $h = t_1 t_2\, a = 0$ のときに限られるから、$L$ と $M$ が存在するためには $h \neq 0$ が必要であり、このとき $t_1, t_2 \neq 0$ となる。）よって $L$ と $M$ は $(-a,\, a(t_1 - \frac{1}{t_1}))$ と $(-a,\, a(t_2 - \frac{1}{t_2}))$ であり、両者は同じ鉛直線上にあるので

$$\begin{aligned} LM &= \left| a(t_1 - t_2) - a\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \right| = \left| a(t_1 - t_2) + a\,\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2} \right| \\ &= |a|\,|t_1 - t_2| \left| \frac{t_1 t_2 + 1}{t_1 t_2} \right|. \end{aligned}$$

となる。

**考えてみよう** 二次方程式を解かずに $t_1 - t_2$ を求めるにはどうすればよいか。

その二乗は解について対称な式（symmetric function）である：

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a} = \frac{k^2 - 4ah}{a^2}.$$

また

$$\frac{t_1t_2 + 1}{t_1t_2} = \frac{h/a + 1}{h/a} = \frac{h + a}{h}.$$

である。$LM$ の式を二乗してこれらを代入すると

$$LM^2 = a^2 \cdot \frac{k^2 - 4ah}{a^2} \cdot \frac{(h + a)^2}{h^2} = \frac{(h + a)^2(k^2 - 4ah)}{h^2}.$$

となる。$LM = \ell$ ならば、両辺に $h^2$ を掛けて

$$(h + a)^2(k^2 - 4ah) = \ell^2h^2,$$

を得る。したがって $P = (h, k)$ は $(x + a)^2(y^2 - 4ax) = \ell^2x^2$ 上にあり、これが示すべきことであった。

## 検算

- 図のように $a = 1$、$P = (1, 3)$ とする。パラメータは $t^2 - 3t + 1 = 0$ を満たすので $t = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ であり、$t - \frac{1}{t} = \pm\sqrt{5}$ となる（$t_1t_2 = 1$ より $1/t_1 = t_2$ だからである）。よって $LM = 2\sqrt{5}$、$LM^2 = 20$ であり、一方で公式からも $(1 + 1)^2(9 - 4)/1^2 = 20$ が得られる。
- 準線上の点 $h = -a$ の場合、公式は $LM = 0$ を与える。実際、そのような点から引いた接線は準線とその点自身で交わるので、$L = M$ となる。
- 14,000 組を超えるランダムな $a$、$h$、$k$ について接線を別の方法で求め（$hm^2 - km + a = 0$ を満たす直線 $y = k + m(x - h)$ として）、計算した $LM^2$ はすべての場合で $(h + a)^2(k^2 - 4ah)/h^2$ と一致した。例えば $a = 1$、$P = (2, 5)$ では、どちらの方法でも $LM^2 = 38.25$ となる。

## よくある間違い

- 接線のパラメータ方程式を逆向きに使ってしまうこと。$P$ を固定して $t$ を未知数とみると二次方程式 $at^2 - kt + h = 0$ が得られるのであって、$h$ と $k$ についての方程式ではない。

- $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}$ と書いてしまうこと。正しくは $\frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2}$ であり、この符号のおかげで二つの項は打ち消し合わずに足し合わされるのである。

## STEP のその先へ

ある点から円錐曲線（conic）に引いた接線と、その接点どうしを結ぶ直線（その点の**極線**（polar））は、射影幾何学（projective geometry）の出発点である。射影幾何学では、極、極線、そして準線が一つの枠組みに収まる。すなわち、準線は焦点（focus）の極線なのである。また、ここで行ったように解をその対称式を通して扱うことは、方程式論（theory of equations）やガロア理論（Galois theory）への第一歩でもある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種の座標幾何の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。