解答例

STEP III 見本問題、第 3 問

純粋数学 • 複素数の三角不等式

STEP III 見本問題、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q3

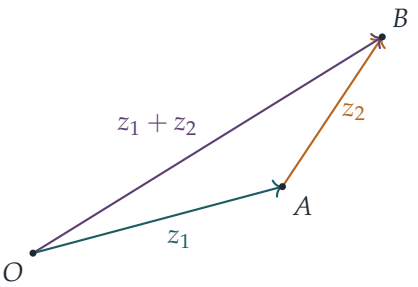
鍵となる考え方

この不等式は三角不等式（triangle inequality）である。すなわち、三角形のどの辺も、他の二辺の長さの和より長くはならない。これを繰り返し用いると、和全体の絶対値（modulus）を各項の絶対値の和で上から評価できる。$|z| \leq \frac{1}{3}$ のとき方程式の左辺の絶対値が常に 1 より真に小さいならば、左辺が 1 に等しくなることはありえない。そしてその評価を与えるのが等比級数（geometric series）である。

解答

幾何学的な意味

複素平面（Argand diagram）において、z_1 を原点 O から点 A への変位、z_2 を A から点 B への変位と考える。すると $z_1 + z_2$ は O から B へまっすぐ向かう変位である。



三角形 OAB の辺の長さは $|z_1|$、$|z_2|$、$|z_1 + z_2|$ である。この不等式は、O から B へまっすぐ進む道のりが、A を経由する道のりより長くなることはない、ということを述べ

ている。つまり、三角形の一辺の長さは他の二辺の長さの和以下である。等号が成り立つのは、三角形がつぶれて A が線分 OB 上にあるとき、すなわち z_1 と z_2 が同じ向きを指すとき（一方が他方の非負実数倍であるか、どちらかが 0 であるとき）に限る。

数学的帰納法（induction）により、有限個の項についても同じことが成り立つ：

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \leq |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|,$$

なぜなら $|w_1 + \cdots + w_{k+1}| \leq |w_1 + \cdots + w_k| + |w_{k+1}|$ だからである。幾何学的には、n 本の線分をつないだ道のりは、その始点から終点までの直線距離以上の長さをもつ、ということである。

$|z| \leq \frac{1}{3}$ を満たす解は存在しない

$|z| \leq \frac{1}{3}$ であり、すべての i について $|a_i| \leq 2$ であるとする。拡張した三角不等式と $|ab| = |a||b|$ を用いると、

$$\begin{aligned}\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| &\leq |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n \\ &\leq 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

となる。ここで二つ目の不等号では、各 k について $|a_i| \leq 2$ および $|z|^k \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k$ を用いた（現れる量はすべて非負なので、項ごとに評価してよい）。

括弧の中は初項 $\frac{1}{3}$、公比 $\frac{1}{3}$ の有限等比級数である：

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}\left(1 - 3^{-n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n} < 1.$$

考えてみよう 上の各段階では $\leq$ しか用いていないのに、なぜ不等号が真の不等号になるのか？

真の不等号は三角不等式からではなく、級数から生じる。和が n 項で止まっているため、無限和の値 1 にちょうど $3^{-n} > 0$ だけ届かないのである。したがって、a_i がどのようなものであっても、また $|z| \leq \frac{1}{3}$ を満たす z がどのようなものであっても、

$$\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| \leq 1 - 3^{-n} < 1.$$

が成り立つ。しかし z が解であれば、左辺は $|1| = 1$ となるはずである。これは矛盾であり、よって方程式は $|z| \leq \frac{1}{3}$ を満たす解をもたない。これが示すべきことであった。

検算

- 最悪の場合は $a_1 = \cdots = a_n = 2$ かつ $z = \frac{1}{3}$ のときであり、このときすべての不等式が等式となって、左辺は $1 - 3^{-n}$ となる。$n = 10$ ならこれは $0.99998\ldots$ であり、1 にわずかに届かない。
- 定数 $\frac{1}{3}$ はこれ以上改良できない。すべての $a_i = 2$ とすると、実関数 $2(x + x^2 + \cdots + x^n) - 1$ は $x = \frac{1}{3}$ で負であり、n が大きければ $\frac{1}{3}$ をわずかに超えたところで正になる。したがって、$\frac{1}{3}$ にいくらでも近い実数解が存在する。
- $n \leq 30$、$|a_i| \leq 2$ を満たす a_i、$|z| \leq \frac{1}{3}$ を満たす z を 200 000 通り無作為に選んで数値的に試したところ、左辺の絶対値が 1 以上になることは一度もなかった。

よくある間違い

- 無限級数で評価して ≤ 1 を得てしまうこと。これでは等号の可能性を排除できない。必要なのは真の不等号であり、それは級数が有限であることから得られる。
- 理由を述べずに $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| \leq |a_1 z| + \cdots$ と書くこと。これは n 項に拡張した三角不等式であり、最初の小問が置かれているのはまさにそのためである。

STEP のその先へ

これは**根の存在しない領域**（root-free region）の最も簡単な例である。すなわち、多項式の係数に対する評価によって、その根が円板の中に入らないことが保証される。同じ評価を逆向きに用いると、$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0$ のすべての根の絶対値は $1 + \max|c_k|$ より小さいというコーシー（Cauchy）の評価が得られる。また複素解析では、ルーシェ（Rouché）の定理によって、このような議論が円の内部にある根の個数を正確に数える方法へと発展する。美しく幾何学的な解説としては、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。