解答例

STEP III 見本問題、第 2 問

純粋数学 ・ 二項係数の不等式と極限

> **STEP III 見本問題、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q2

鍵となる考え方

$x > 0$ として $y = 1 + x$ と書くと、y のべき乗は二項展開（binomial expansion）に変わり、その展開のどの項も非負である。したがって、1 つの項だけを残して他をすべて捨てても、なお下界（lower bound）が得られる。x の項を残すと n のように増大する下界が得られ、これはどんな固定された K よりも大きくなる。n で割った後でも K を上回るには n^2 のように増大する下界が必要なので、今度は代わりに x^2 の項を残す。

解答

不等式

$x \geq 0$ とし、n を正の整数とする。二項定理（binomial theorem）より

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + x^n.$$

$x \geq 0$ であるから、最初の 2 項より後の項はすべて非負であり、したがって

$$(1+x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

最後の不等式が狭義（strict）の不等式になるのは 1 があるためであり、そのおかげで $x = 0$ のときにも結果が成り立つ（このときは $1 > 0$ となる）。

y^n がいずれ K を超えることを導く

$y > 1$ とし、$x = y - 1$ とおくと $x > 0$ である。前半の結果より、すべての正の整数 n に対して

$$y^n = (1+x)^n > n(y-1).$$

$K \leq 0$ ならば示すことは何もない。すべての n に対して $y^n > 0 \geq K$ であるから、$N = 1$ とすればよい。$K > 0$ ならば、次を満たす整数 N を選ぶ。

$$N > \frac{K}{y-1},$$

これは、$y - 1 > 0$ より右辺が定まった数であるから可能である。すると、すべての整数 $n \geq N$ に対して

$$y^n > n(y-1) \geq N(y-1) > K,$$

となる。ここで中央の不等号には $y - 1 > 0$ を用いた。これがまさに示すべきことであった。同じ N が、$n = N$ のときだけでなく**すべての** $n \geq N$ に対して有効であることに注意しよう。下界 $n(y-1)$ が n とともに増加するからである。

y^n/n がいずれ K を超えることを示す

評価 $y^n > n(y-1)$ からは $y^n/n > y - 1$ しか得られず、これは定まった数なので、大きな K に対しては役に立たない。n より速く増大する y^n の下界が必要である。

考えてみよう 今度は二項展開のどの項を残すべきだろうか？

x^2 の項を残す。$x = y - 1 > 0$ のとき展開のすべての項は正であるから、すべての正の整数 n に対して

$$y^n = (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

（$n = 1$ のときは x^2 の項は存在しないが、最後の不等式の右辺は 0 になるので、やはり成り立つ。）$n > 0$ で割ると

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2}.$$

今度は右辺が n の増加とともに限りなく大きくなり、これこそ必要なものである。$K \leq 0$ ならば、$y^n/n > 0$ であるから $N = 1$ とすればよい。$K > 0$ ならば、次を満たす整数 N を選ぶ。

$$N > 1 + \frac{2K}{(y-1)^2}.$$

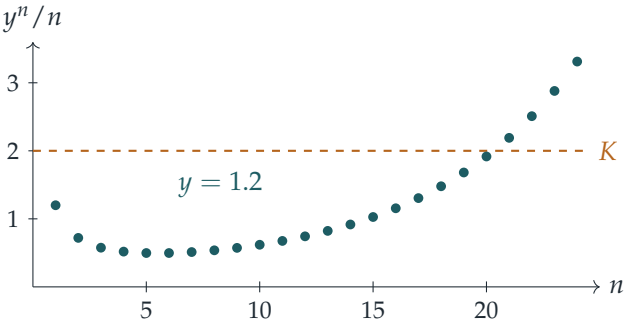
すると、すべての整数 $n \geq N$ に対して $n - 1 \geq N - 1 > 2K/(y-1)^2$ であり、したがって

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2} > \frac{2K}{(y-1)^2} \cdot \frac{(y-1)^2}{2} = K,$$

となり、求める結果が得られる。

ここでも下界は n とともに増加するので、この議論はすべての $n \geq N$ に対して成り立つ。このことはここで重要である。y^n/n 自身は常に増加するとは**限らない**からである。$y = 1.2$ の場合の図からわかるように、y が 1 に近いときは最初のうち減少する

（たとえば、$y < 2$ ならば常に $y^2/2 < y$ である）。したがって、$y^n/n > K$ となる n を 1 つ見つけて、それ以降の項はより大きいと論じるだけでは済まないのである。



検算

$y = 1.01$、$K = 1000$ として試してみよう。上の方法では、$y^n > K$ に対して $N = 100\,001$、$y^n/n > K$ に対して $N = 20\,000\,002$ が得られる。直接計算すると、$1.01^n/n > 1000$ はすべての $n \geq 1424$ に対して既に成り立つことがわかる。我々の N は可能な最小値からはほど遠いが、問題が求めているのは**何らかの** N にすぎない。また、無作為に選んだ数千組の x と n について、有理数の x を用いて両方の不等式を厳密に検証し、さらに無作為に選んだ数千組の $y > 1$ と K について、選んだ N（およびそれより大きい多くの n）を検証した。

よくある間違い

- 1 つの N について $y^N > K$ を示すだけで、なぜ**すべての** $n \geq N$ に対して $y^n > K$ となるのかを説明しない。
- 最後の部分で $y^n > n(y-1)$ を用いる。n で割ると定数しか残らず、任意の K を上回ることはできない。
- K が負またはゼロである可能性を忘れる。その場合、$K/(y-1)$ はそれだけでは意味のある下界にならない（ただし、そのときはどんな N でもよい）。

STEP のその先へ

これは、多くの学生が初めて出会う厳密な「ε–N」型の論法であり、$y > 1$ のとき $y^n \to \infty$ かつ $y^n/n \to \infty$ であることを証明している。同じ工夫で x^{k+1} の項を残せば、任意の固定された k に対して $y^n/n^k \to \infty$ であることが示され、指数関数（exponential

function）はどんな多項式（polynomial）よりも速く増大することがわかる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、まさにこの種の推論から数列（sequence）と極限（limit）の理論を築き上げている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。