解答例

STEP III 見本問題、第 15 問

確率・統計 ・ ランダムネットワークの連結性

STEP III 見本問題、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q15

鍵となる考え方

幾何的な配置は忘れてよい。問題になるのは、6 本の道のうちどれが通行可能かということだけである。どの村からも他のすべての村へ行けるのは、通行可能な道が 4 つの村の上で**連結**（connected）なネットワークをなすとき、かつそのときに限る。そこで、通行可能な道の集合を含まれる道の本数で分類し、各本数について連結なものがいくつあるかを数え、それぞれにその確率を掛けて足し合わせる。村が 4 つしかないので、数え上げは短く見通しがよい。

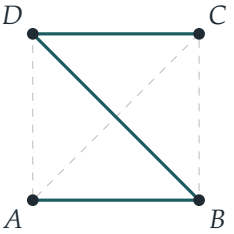
解答

ある道が通行可能である確率を $q = 1 - p$ とおく。雪が降った後、どの村からも他のすべての村へ行けるという事象を K とする。

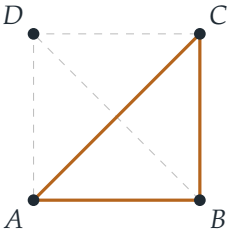
6 本の道は独立にふるまうので、特定の k 本の道が通行可能（残りの $6 - k$ 本は通行止め）である確率は $q^k p^{6-k}$ である。よって

$$\mathrm{P}(K) = \sum_{k=0}^{6} N_k \, q^k p^{6-k},$$

となる。ここで N_k は、4 つの村すべてをつなぐ k 本の道の集合の個数である。



道 3 本：全体をつなぐ木



道 3 本：三角形、D が孤立

連結な道の集合を数える

通行可能な道が 2 本以下の場合。各道は 2 つの村を結ぶので、1 つの村から出発すると、道 1 本につき新しい村は高々 1 つしか加わらない。他の 3 つの村すべてに到達するには少なくとも 3 本の道が必要である。よって $N_0 = N_1 = N_2 = 0$ である。

通行可能な道が 3 本の場合。3 本の道の集合は $\binom{6}{3} = 20$ 通りある。そのような集合が村々をつなげないと仮定する。ある村が孤立しているなら、3 本の道はすべて残りの 3 つの村の間にある。しかしその 3 つの村を結ぶ道は 3 本しかないので、その集合はちょうど三角形である。どの村も孤立していないなら、村は 2 組のペアに分かれ、通行可能な道は高々 2 本（各ペアの内部に 1 本ずつ）となり、矛盾する。したがってつながらないのは、孤立する村の選び方に対応する 4 個の三角形だけであり、

$$N_3 = 20 - 4 = 16.$$

? **考えてみよう** 通行可能な道が 4 本あれば、ネットワークが連結でなくなることは決してないのはなぜか。

通行可能な道が 4 本以上の場合。先ほどと同じ 2 通りの失敗の仕方を考える。ある村が孤立していれば、通行可能な道はすべて残りの 3 つの村の間になければならないが、そこには道が 3 本しかない。2 組のペアに分かれる場合は、通行可能な道は高々 2 本である。通行可能な道が 4 本以上あれば、どちらも起こりえないので、そのような集合はすべて連結である：

$$N_4 = \binom{6}{4} = 15, \qquad N_5 = \binom{6}{5} = 6, \qquad N_6 = 1.$$

確率

以上の個数をまとめると、

$$\mathrm{P}(K) = q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 16q^3p^3, \qquad q = 1 - p.$$

p のべきで展開すると、同値な形

$$\mathrm{P}(K) = 1 - 4p^3 - 3p^4 + 12p^5 - 6p^6.$$

が得られる。

$p = \frac{1}{2}$ の場合

このとき $p = q = \frac{1}{2}$ であるから、道の通行可能・通行止めの $2^6 = 64$ 通りのパターンはすべて同様に確からしく、それぞれの確率は $\frac{1}{64}$ である。したがって

$$\mathrm{P}(K) = \frac{1 + 6 + 15 + 16}{64} = \frac{38}{64} = \frac{19}{32},$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- **極端な値。** $p = 0$ のときはすべての道が通行可能で、公式は 1 を与える。$p = 1$ のときはすべての道が通行止めで、公式は $1 - 4 - 3 + 12 - 6 = 0$ を与える。
- **余事象。** ネットワークが連結でないのは、ある村が孤立しているとき、または村が 2 組のペアに分かれてペア間に道がないとき、かつそのときに限る。ある村が孤立する確率は p^3 である。4 つの村について包除原理（inclusion–exclusion）を用いると（特定の 2 つの村が孤立するには 5 本の道が通行止めである必要があり、3 つの村が孤立するのは 4 つすべてが孤立するときである）、$4p^3 - 6p^5 + 3p^6$ が得られる。ペアへの 3 通りの分け方それぞれについて、両方の内部の道が通行可能である場合が p^4q^2 ずつ加わる。1 からこの合計を引くと上の公式と一致する。実際 $p = \frac{1}{2}$ のとき、連結でない確率は $\frac{32-12+3+3}{64} = \frac{13}{32}$ である。
- **総当たり。** コンピュータで 64 通りの道の集合をすべて列挙すると、個数 $16, 15, 6, 1$ が確かめられる。$p = 0.3$ でのシミュレーションでは 0.893 となり、厳密な値 0.8925 とよく合う。

よくある間違い

- 3 本の道の集合 20 通りすべてを連結と数えてしまい、4 つの三角形を見落とす。
- 4 本の道の集合でも、ある村が孤立しうると思い込む。村が孤立するのは、その村につながる 3 本の道がすべて通行止めのときに限る。
- $q^k p^{6-k}$ を書くときに p（通行止め）と $1 - p$（通行可能）を取り違える。

STEP のその先へ

これは**ランダムグラフ**（random graph）のごく小さな例である。ネットワークの各辺が独立に生き残るとき、結果が連結かどうかを問うのである。p についてのこの多項式はネットワークの**信頼性多項式**（reliability polynomial）と呼ばれ、数 16 はケイリーの公式（Cayley's formula）の一例である。すなわち、ラベル付きの n 個の点を結ぶ木（tree）は n^{n-2} 個ある。大きなネットワークについて、エルデシュ（Erdős）とレーニイ（Rényi）は、道が通行可能である確率がある閾値を超えると、連結性が驚くほど急激に現れることを発見した。独立な事象から作られるランダムな構造についてさらに知りたければ、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。