解答例

STEP III 見本問題、第 14 問

力学 ・ 回転を伴う衝突

STEP III 見本問題、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s3-q14

鍵となる考え方

支点は棒に未知の力積（impulse）を及ぼすので、運動量（linear momentum）は保存**されない**。しかし、その力積は支点のまわりにモーメントをもたないので、中点のまわりの角運動量（angular momentum）は保存される。これと、接触点に適用したニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）（衝突は完全弾性的なので反発係数は 1）を合わせれば、すべてが決まる。後半では、粒子がその後どう動くかを求め、両方の物体を追跡する。棒の反対側の半分が回ってきて、粒子の通る直線に達するのである。

解答

モデル化。粒子は質点とする。台は滑らかなので、どちらの物体にも摩擦ははたらかない。棒は一様で、中点 O で滑らかに軸支されている。棒の O のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は

$$I = \tfrac{1}{12}m(4a)^2 = \tfrac{4}{3}ma^2.$$

である。衝突の間、力積は粒子の運動方向の直線に沿ってはたらく（棒は滑らかで、粒子は棒に直角に当たる）ので、粒子は同じ直線上を動き続ける。衝突後の粒子の速度を、もとの運動方向を正として v とおく。

角速度

O のまわりの角運動量。系（粒子と棒）にはたらく外部からの力積は O の支点によるものだけであり、それは O のまわりのモーメントが 0 である。衝突前、粒子の O のま

わりの角運動量は mua で、棒は静止しているので、

$$mua = mva + \tfrac{4}{3}ma^2\omega \qquad \Longrightarrow \qquad u = v + \tfrac{4}{3}a\omega. \tag{1}$$

反発。棒の打たれた点は O から距離 a にあるので、衝突直後には粒子のもとの運動方向に速さ $a\omega$ で動く。反発係数（coefficient of restitution）が 1 なので、遠ざかる速さは近づく速さに等しい。

$$a\omega - v = u. \tag{2}$$

> **考えてみよう** 回転する物体に対してニュートンの反発の法則を用いてよいのだろうか。

よい。この法則は、接触している 2 点の速度の共通法線方向の成分に対して成り立つ。代わりにエネルギーを用いてもよい。「完全弾性」（perfectly elastic）とは運動エネルギーが保存されることであり、$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\omega^2$ となる。これを $m(u-v)(u+v) = \frac{4}{3}ma^2\omega^2$ と書き直し、(1) より $u - v = \frac{4}{3}a\omega$ を用いると（$\omega \neq 0$ で割って）$u + v = a\omega$ が得られ、これはまさに (2) である。

(1) と (2) を加えると v が消去される。

$$2u = \tfrac{7}{3}a\omega \qquad \Longrightarrow \qquad a\omega = \frac{6u}{7},$$

これが示すべきことであった。さらに (2) より

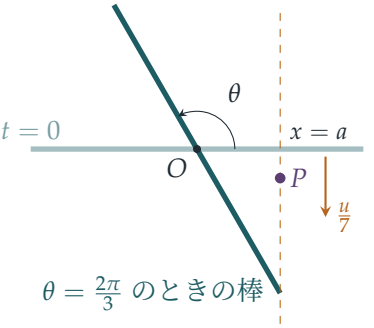
$$v = a\omega - u = -\frac{u}{7},$$

となるので、粒子はもとの直線に沿って速さ $u/7$ で跳ね返る。

2 回目の衝突

台の上に O を原点とする座標軸をとり、x 軸を棒の初期位置に沿ってとる。粒子ははじめ直線 $x = a$ 上を y 軸の正の向きに動いており、時刻 $t = 0$ に点 $(a, 0)$ で棒に当たるものとする。このとき $t > 0$ において、

- 粒子は $\left(a,\ -\frac{u}{7}t\right)$ にあり、y 軸の負の向きに一定の速さで動いている。
- 打たれた点は y 軸の正の向きに動いたので、棒は反時計回りに回転し、時刻 t には x 軸と角 $\theta = \omega t$ をなす。再び衝突するまでどちらの物体にもそれ以上力ははたらかないので、両方の運動は一様である。



棒の長さの半分は $2a$ なので、棒が直線 $x = a$ に達するのは、その直線上にある棒の点（O からの距離 $a/|\cos\theta|$）が O から $2a$ 以内にあるとき、すなわち $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$ のときに限る。そのとき、棒は高さ $y = a\tan\theta$ でこの直線と交わる。

- $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$ のとき、棒は x 軸より上の $y = a\tan\theta > 0$ で直線と交わるが、粒子は x 軸より下にある。よって接触しない。
- $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ のとき、棒はそもそも直線に届かない。
- $\frac{2\pi}{3} \leq \theta < \pi$ のとき、棒の**もう一方の**半分が、粒子と同じ側の $y = a\tan\theta < 0$ で直線と交わる。

ここで位置を比較する。$t = \theta/\omega = \frac{7a\theta}{6u}$ なので、角 θ のときの粒子の y 座標は $-\frac{u}{7}t = -\frac{a\theta}{6}$ である。次の関数を考える。

$$f(\theta) = (\text{棒の}y\text{座標、直線}x = a) - (\text{粒子の}y) = a\tan\theta + \frac{a\theta}{6}, \qquad \frac{2\pi}{3} \leq \theta < \pi.$$

- $\theta = \frac{2\pi}{3}$ のとき（棒の端が直線に達する）：$\frac{\pi}{9} < 1 < \sqrt{3}$ より $f = a\left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{9}\right) < 0$ である。粒子は $y = -\frac{\pi}{9}a \approx -0.35a$ にあり、x 軸と $y = -\sqrt{3}a$ にある棒の端との間にある。つまり、棒の端は粒子を**越えて**回り込んでいる。
- $\theta \to \pi^-$ のとき：$\tan\theta \to 0$ なので $f \to \frac{\pi}{6}a > 0$ である。棒は x 軸に向かって掃き戻ってくるが、粒子はおよそ $-0.52a$ にある。

f は $[\frac{2\pi}{3}, \pi)$ で連続なので、中間値の定理（intermediate value theorem）により、その間のある θ で $f(\theta) = 0$ となる。その瞬間、棒は粒子の位置にあり、両者は再び衝突する。（上の最初の 2 項目により、それより前に接触することはない。）以上で証明が完了する。

数値的には、衝突は $\tan\theta = -\theta/6$ となる $\theta \approx 2.716$（約 155.6°）、時刻 $t \approx 3.17\,a/u$ で起こり、そのとき粒子は $y \approx -0.45a$、棒に沿って O から約 $1.10a$ の位置にある。

検算

- エネルギー：$a\omega = \frac{6}{7}u$、$v = -\frac{1}{7}u$ のとき、衝突後の運動エネルギーは $\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{49} + \frac{4}{3}\cdot\frac{36}{49}\right)u^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{49}{49}u^2$ であり、ちょうどはじめのエネルギーに等しい。
- 慣性モーメント I の物体を距離 d の点で打つ場合に同じ議論を繰り返すと、$d\omega = 2u/(1 + I/md^2)$ が得られる。$I \to 0$ のとき、打たれた点は $2u$ で動き出し、非常に軽い物体との弾性衝突と同じになる。$I \to \infty$ のとき、棒はほとんど回らず、粒子は速さ u で跳ね返る。ここでは $I/ma^2 = \frac{4}{3}$ より $\frac{6}{7}u$ となる。
- $a\omega = \frac{6}{7}u$、$v = -\frac{1}{7}u$ が角運動量とエネルギーの両方を保存することを厳密な分数で確かめ、さらに両方の運動を時間に沿って進めてみた。衝突後最初の接触は $\theta \approx 2.7165$ で起こり、$\tan\theta + \theta/6 = 0$ を二分法で解いた結果と一致した。

よくある間違い

- **運動量**を保存させてしまう。支点が力積を与えるので、保存されるのは支点のまわりの角運動量だけである。
- $I = \frac{1}{3}m\ell^2$（端のまわりの値）を用いてしまう、あるいは棒の長さが $2a$ ではなく $4a$ であることを忘れる。
- 2 回目の衝突を、打たれた側の半分の棒で探してしまう。その半分は粒子の直線から遠ざかる。回り込んできて粒子に出会うのは、もう一方の半分である。

STEP のその先へ

定点のまわりの角運動量とエネルギーまたは反発の条件を組み合わせるのは、剛体（rigid body）の撃力による運動を扱う標準的な方法であり、**打撃の中心**（centre of percussion）という考え方につながる。これは、軸支された物体を打っても支点に力積が生じないような点のことである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の衝突と角運動量を丁寧に扱っており、まさにこの種の問題を数多く収めている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。