解答例

STEP III 見本問題、第 13 問

力学 ・ 転がる輪

STEP III 見本問題、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

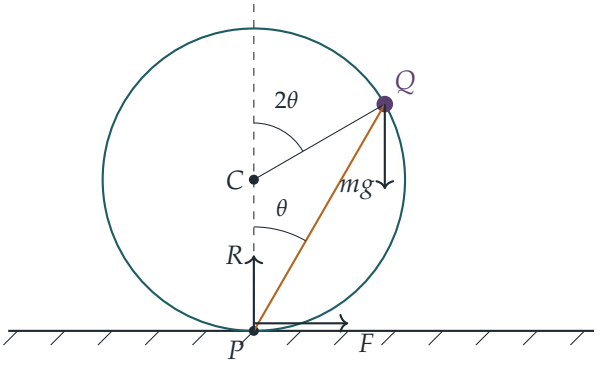
step.maths.org/questions/spec-s3-q13

鍵となる考え方

輪（hoop）は軽い（light、質量を無視できる）ので、系の運動エネルギー（kinetic energy）は質点（particle）のものだけであり、輪は転がるので摩擦（friction）は仕事をしない。したがって、エネルギー保存（energy conservation）からただちに速さが得られる。また、転がりという条件によって幾何学的な配置も完全に決まる。輪が 2θ だけ回転すると、その中心は距離 $2a\theta$ だけ移動するので、x と y が θ だけで表される。最後に、軽い輪には合力がはたらき得ないので、台からの抗力は質点の加速度が要求するものにほかならず、しかもそれは負にはなり得ない。

解答

輪を滑らずに転がる（rolling without slipping）軽い剛体（rigid body）の円とみなし、質点はその縁に固定された点質量とみなす。台との接触点を P、中心を C、質点を Q とする。輪は x 軸の正の向きに転がるものとし、θ は 0 から増加するとする。



ここで R と F は、点 P において台が輪に及ぼす垂直抗力（normal reaction）と摩擦力であり、弦（chord）PQ は鉛直方向と角 θ をなす（中心角 2θ の半分である）。

速さ

R と F はどちらも P にはたらき、輪は転がっているので P は瞬間的に静止している。よってどちらも仕事をしない。輪は軽いので、運動エネルギーは質点のものだけであり、位置エネルギー（potential energy）の変化も質点のものだけである。質点は高さ $2a$ からほぼ静止した状態で動き始め、半径 CQ が鉛直上向きと角 2θ をなすとき、その高さは $a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta$ である。エネルギー保存より

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\big(2a - 2a\cos^2\theta\big) = 2mga\sin^2\theta,$$

となるので $v^2 = 4ga\sin^2\theta$ であり、$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin\theta \ge 0$ であるから

$$v = 2(ga)^{1/2}\sin\theta,$$

となり、示すべき結果が得られる。

位置と $\dot\theta$

輪は角 2θ だけ回転しており、滑らずに転がるので、中心は弧の長さ $a\cdot 2\theta$ だけ前進している。C から見ると、質点は $a\sin 2\theta$ だけ前方、$a\cos 2\theta$ だけ上方にある。したがって

$$x = 2a\theta + a\sin 2\theta, \qquad y = a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta.$$

時間で微分すると

$$\dot x = 2a\dot\theta\,(1 + \cos 2\theta) = 4a\dot\theta\cos^2\theta,$$
$$\dot y = -2a\dot\theta\sin 2\theta = -4a\dot\theta\sin\theta\cos\theta,$$

であり、よって

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta.$$

考えてみよう $v = 4a\dot\theta\cos\theta$ をもっと手早く確かめる方法はないだろうか。

ある。P は瞬間回転中心（instantaneous centre of rotation）であり、輪は角速度 $2\dot\theta$ で回転している。弦 PQ が C において張る角は $\pi - 2\theta$ なので $PQ = 2a\cos\theta$ であり、$v = PQ\cdot 2\dot\theta = 4a\dot\theta\cos\theta$ となって、上の計算と一致する。

$\dot\theta > 0$ かつ $\cos\theta > 0$ のもとで、エネルギーから求めた速さと比較すると

$$4a\dot\theta\cos\theta = 2(ga)^{1/2}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta = \tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\tan\theta,$$

となり、これが最初に示すべき結果である。（左辺は θ ではなく変化率 $\dot\theta$ でなければならない。右辺の単位が s^{-1} だからである。）

鉛直方向の加速度

$\dot{y}$ に $\dot{\theta}$ を代入すると

$$\dot{y} = -4a\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2(ga)^{1/2}\sin^2\theta.$$

もう一度微分し、再び $\dot{\theta}$ を用いると

$$\ddot{y} = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2g\sin^2\theta,$$

となり、示すべき結果が得られる。同様にして $\dot{x} = 4a\cos^2\theta\,\dot{\theta} = (ga)^{1/2}\sin 2\theta$ であり、

$$\ddot{x} = 2(ga)^{1/2}\cos 2\theta\,\dot{\theta} = g\cos 2\theta\tan\theta.$$

転がりが止まる理由

輪は軽いので、輪と質点からなる系にはたらく力の合計は、m と質点の加速度の積に等しい。外力は下向きの mg、上向きの R、水平方向の F である。鉛直方向について考えると

$$R - mg = m\ddot{y} \quad\Longrightarrow\quad R = mg\left(1 - 2\sin^2\theta\right) = mg\cos 2\theta,$$

であり、水平方向については $F = m\ddot{x} = mg\cos 2\theta\tan\theta$ であるから、$R > 0$ である間は $F/R = \tan\theta$ となる。

? **考えてみよう** θ が $\pi/4$ を超えると何がおかしくなるのだろうか。

台は押すことはできても引くことはできないので、$R \geq 0$ である。ところが $R = mg\cos 2\theta$ は、質点が中心と同じ高さになる $\theta = \pi/4$ で 0 になり、それ以上転がり続けるには $R < 0$ が必要になる。言い換えれば、転がり続けるには $\ddot{y} = -2g\sin^2\theta < -g$ でなければならない。つまり質点は自由落下（free fall）よりも速く下向きに加速しなければならないが、重力だけではそれは実現できない。したがって $\theta = \pi/4$ で接触力が消え、輪は台から離れる。その後、質点は前向きに $(ga)^{1/2}$、下向きに $(ga)^{1/2}$ の速度成分をもって放物運動（projectile motion）を始め、軽い輪はそれに引きずられるように運ばれて、その最下点は台から浮き上がる。

それより前に摩擦が影響することもある。転がるためには $|F| \leq \mu R$、すなわち $\tan\theta \leq \mu$ が必要であり、$\tan\theta$ は $\theta \to \pi/4$ のとき 1 まで増加する。したがって摩擦係数（coefficient of friction）が $\mu < 1$ を満たすならば、$\theta = \pi/4$ に達する前の $\tan\theta = \mu$ となる時点で輪は滑り始める。$\mu \geq 1$ の場合に限り、輪は $\theta = \pi/4$ まで転がり続け、そこで跳ね上がる。

検算

- $\theta = 0$ では $\dot{\theta} = 0$ である。最上点の位置は平衡（equilibrium）の位置であり、だからこそ輪をわずかにずらす必要がある。
- $\theta = \pi/4$ では $v = (2ga)^{1/2}$ であり、これは高さ a だけ落下したときの速さである。実際、質点は高さ $2a$ から a まで下がっている。
- コンピュータを用いて、$\phi = 2\theta$ についての運動方程式を（ラグランジアン（Lagrangian）$ma^2(1+\cos\phi)\dot{\phi}^2 - mga(1+\cos\phi)$ から）独立に数値積分し、差分（finite difference）で求めた速度と加速度を上の公式と比較した。速さ、$\dot{\theta}$、$\ddot{y}$、$R = mg\cos 2\theta$、$F/R = \tan\theta$ はすべて 10^{-6} 以内で一致した。たとえば $\theta = \pi/4$ では $R = 0$ かつ $F/R = 1$ となる。

よくある間違い

- 中心の移動距離を $2a\theta$ ではなく $a\theta$ としてしまう。輪が回転した角は θ ではなく 2θ である。
- エネルギーの式に摩擦を含めてしまう。接触点は静止しているので、輪が転がっている間、摩擦は仕事をしない。
- 単に質点が「落ちる」とだけ述べてしまう。質点は輪に固定されている。台から離れるのは輪のほうであり、その理由は抗力が負にならなければならなくなるからである。

STEP のその先へ

転がる物体の接触点はその瞬間回転中心であり、滑らずに転がるという条件は、仕事をせずに自由度（degree of freedom）を一つ減らす束縛（constraint）である。このような束縛はラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）によって体系的に扱われる。そこでは θ のような一つの座標でエネルギーを書き表せば、運動方程式が自動的に導かれる。上の検算で行ったのはまさにこれである。束縛力がいつ消えるかという問題（球面から離れるビーズ、こぶから浮き上がる車など）は、大学 1 年次の力学の典型的な題材である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、転がり運動と束縛力が詳しく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。