解答例

STEP III 見本問題、第 12 問

力学 ・ 棒のつり合い

STEP III 見本問題、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

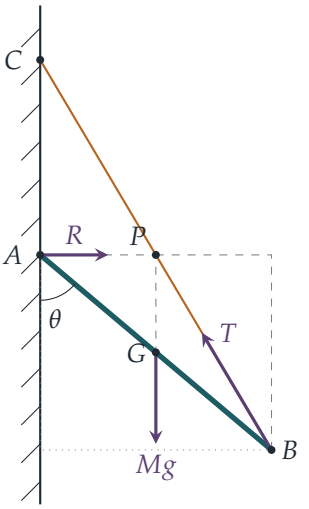
step.maths.org/questions/spec-s3-q12

鍵となる考え方

棒にはたらく力はちょうど 3 つ、すなわち重力、なめらかな壁からの抗力、そして糸の張力である。平行でない 3 力が物体をつり合わせているとき、それらの作用線は 1 点で交わらなければならない（三力のつり合い（three-force principle））。そしてこの問題では、その点の位置は容易に求まる。それによって図形の配置が完全に決まり、あとは 1 回の力の分解で張力が得られる。

解答

モデル化。棒は一様であるから、その重力 Mg は中点 G にはたらく。壁はなめらかであるから、A における抗力 R は水平（壁に垂直）である。糸は軽く伸び縮みしないので、B を BC の向きに張力 T で引く。



棒の傾き

抗力 R は A を通る水平線に沿ってはたらき、重力は G を通る鉛直線に沿ってはたらく。これらは、A と同じ高さで G の真上（または真下）にある点 P で交わる。3 力はつり合っているので、P のまわりの力のモーメント（moment）はつり合っていなければならない。R と Mg は P のまわりにモーメントをもたないから、T もモーメントをもたず、したがって糸の作用線は P を通らなければならない。

? **考えてみよう** 棒は A から上向きに伸びているか、それとも下向きか。

水平距離を壁から測る。棒と鉛直線のなす角を θ とすると、B は壁から距離 $L\sin\theta$ のところにあり、G（したがって P）はその半分の距離 $\frac{1}{2}L\sin\theta$ のところにある。糸は B から壁上の点 C まで一直線に張られているので、水平方向にちょうど半分進んだ点は糸のちょうど中間点である。すなわち P は BC の**中点**である。よって P の高さは B と C の高さの平均である。ところが P は A と同じ高さにあり、C は A より上にあるから、B は A より**下**に、ちょうど距離 AC だけ下になければならない。

したがって棒は A から下向きに垂れている。棒が鉛直下向きとなす角を θ とする。すると B は A より深さ $L\cos\theta$ だけ下にあり、よって $AC = L\cos\theta$ である。B から見ると、点 C は水平距離 $L\sin\theta$ だけ離れ、高さ $L\cos\theta + L\cos\theta = 2L\cos\theta$ だけ上にある。糸の長さは αL であるから、三平方の定理（Pythagoras' theorem）より

$$\alpha^2 L^2 = L^2\sin^2\theta + 4L^2\cos^2\theta = L^2\left(1 + 3\cos^2\theta\right),$$

となり、

$$\cos^2\theta = \frac{\alpha^2 - 1}{3}, \qquad \text{すなわち} \qquad \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{3}},$$

を得る。棒は A から**下向き**に、鉛直線とこの角をなしている。

α のとりうる値

C は A より真に上になければならないので、$\cos\theta > 0$ である。($\cos\theta = 0$ ならば C は A と一致し、棒は水平になる。このとき A、B、C は一直線上に並ぶ。) また A、B、C は一直線上にあってはならないので、棒は鉛直ではない。すなわち $\sin\theta \neq 0$、つまり $\cos^2\theta < 1$ である。したがって、$\alpha > 0$ を用いて

$$0 < \frac{\alpha^2 - 1}{3} < 1 \iff 1 < \alpha^2 < 4 \iff 1 < \alpha < 2,$$

となる。逆に、この範囲の任意の α に対して上の角は存在し、上の作図により 3 力が 1 点で交わる配置が得られるのでモーメントはつり合い、さらに以下の力の分解により T と R は正となる。よって、とりうる値の範囲は $1 < \alpha < 2$ である。

張力

鉛直方向に分解する。糸が鉛直線となす角の余弦は (鉛直方向の高さの差) / (糸の長さ) $= 2L\cos\theta/(\alpha L)$ であり、R は水平であるから、

$$T \cdot \frac{2\cos\theta}{\alpha} = Mg \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{Mg\alpha}{2\cos\theta} = \frac{Mg\alpha}{2}\left(\frac{3}{\alpha^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

となる。ここで $\cos\theta = \sqrt{(\alpha^2 - 1)/3}$ ($\cos\theta > 0$ より正の根) を代入した。これが求める結果である。

念のため水平方向に分解すると $R = T \cdot \dfrac{L\sin\theta}{\alpha L} = \frac{1}{2}Mg\tan\theta > 0$ となり、壁は確かに棒を外向きに押している。壁の抗力として当然そうでなければならない。

検算

- $\alpha \to 2^-$ のとき $\cos\theta \to 1$ である。棒は A の真下に鉛直に垂れ、糸は棒に沿って折り返された形になり、$T \to Mg$ となる。このとき糸が重さ全体を支えるからである。$\alpha \to 1^+$ のとき $\theta \to 90^\circ$ かつ $T \to \infty$ である。ほぼ水平な棒を支えるには非常に大きな張力が必要になる。
- $\alpha = 1.5$ とすると、$\cos\theta \approx 0.6455$ ($\theta \approx 49.8^\circ$)、$T \approx 1.162\,Mg$ を得る。$(1,2)$ 内の数千個のランダムな α について、A のまわりのモーメントがちょうど 1 つの角で 0 になり、それが公式と一致すること、張力も一致すること、そして $(1,2)$ の外の α ではつり合いが存在しないことを数値的に確認した。

よくある間違い

- はしごの問題のように、棒を A から**上向き**に傾けて描いてしまう。作用線が 1 点で交わるという議論から B は A より下でなければならず、誤った図のままでは方程式に矛盾のない解が得られない。
- なめらかな壁の抗力が水平であることを忘れ、不要な摩擦力や鉛直成分を持ち込んでしまう。
- $\alpha = 1$ や $\alpha = 2$ を含めてしまう。これらは一直線上に並ぶ（退化した）配置を与え、問題文で除外されている。

STEP のその先へ

三力のつり合いの原理は、静力学（statics）における一般的な事実の特別な場合である。すなわち、力の系がつり合うのは、その合力と、任意の 1 点のまわりの合モーメントがともに 0 になるとき、かつそのときに限る。P について行ったように点をうまく選ぶことが、多くの場合もっとも速い解法となる。同じ考え方は、工学の力学におけるトラス、ケーブル、骨組み構造の解析の基礎にもなっている。力とトルクについての詳しい扱いは、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。