解答例

STEP III 見本問題、第 11 問

力学 ・ 一階微分方程式

> **STEP III 見本問題、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.13 節「**除雪車問題**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/snowplough.html

鍵となる考え方

各除雪車の速さは雪の深さで与えられ、その深さは除雪車がある地点に**いつ**到達するかで決まる。そこで、時刻を位置の関数とみなし、速さの逆数（reciprocal）である $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ を書き下すのが自然である。1 台目の除雪車については、深さは元の深さに降り積もった分を加えたものにすぎない。2 台目については、その前方の雪は 1 台目がその地点を除雪した時点から降り始めたものにすぎない、という点に気づくことが鍵である。

解答

各除雪車を道路上を動く点とみなし、共通の出発点からの距離を測る。以下では一貫して、深さの単位はメートル、時間の単位は秒、距離の単位はメートルとする。

小問 (i)

時刻 t において 1 台目の除雪車が出会う雪は、$t = 0$ から乱されることなく降り続けたものであるから、その深さは

$$z = h + kt.$$

である。したがって速さは

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k} = \alpha t + \frac{\alpha h}{k}.$$

となる（速さは正なので x は t の狭義単調増加（strictly increasing）関数であり、逆関数をとってよい）。これは t について線形（linear）であり、次のように書くのが最もすっきりする。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(t + \frac{h}{k}\Big) = \alpha\Big(t + \frac{h}{k}\Big).$$

ゆえに、ある定数 C を用いて $t + h/k = C\mathrm{e}^{\alpha x}$ と表される。$x = 0$ のとき $t = 0$ であるから $C = h/k$ であり、x メートル進むのにかかる時間は

$$t_1(x) = \big(\mathrm{e}^{\alpha x} - 1\big)\frac{h}{k} \text{ 秒},$$

となり、求める結果が得られた。

小問 (ii)

方程式を立てる。 時刻 $t > T$ において 2 台目の除雪車が位置 y にあるとする。1 台目の除雪車は小問 (i) で求めた時刻 $t_1(y)$ にこの地点を通過し、そこの雪をすべて取り除いている。

> **考えてみよう** 2 台目の除雪車の前方にある雪の深さはいくらか。

$h + kt$ ではない。1 台目の除雪車の後ろには何もない路面が残されているからである。位置 y では、時刻 $t_1(y)$ から雪が 0 から速さ k で積もり始めているので、深さは

$$z = k\big(t - t_1(y)\big).$$

である（これには $t > t_1(y)$、すなわち 2 台目がまだ 1 台目の後ろにあることが必要であり、これは両者が出会うまでは成り立つ）。したがって 2 台目の除雪車の速さは

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha k\big(t - t_1(y)\big)} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = t - \big(\mathrm{e}^{\alpha y} - 1\big)\frac{h}{k},$$

となり、これが与えられた方程式である。2 台目の除雪車は時刻 T に原点を出発するので、初期条件（initial condition）は「$y = 0$ のとき $t = T$」である。

解の検証。 提示された解を

$$t = t_1(y) + g(y), \qquad g(y) = \Big(T - \frac{\alpha h y}{k}\Big)\mathrm{e}^{\alpha y}.$$

と書く。すると $t - t_1(y) = g(y)$ であるから、示すべきことは $\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t/\mathrm{d}y = g(y)$ である。g に積の微分法（product rule）を用いて微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} &= \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} - \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} + \alpha\left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y} \\ &= \alpha\, g(y),\end{aligned}$$

となる。ここで第 1 項が $t_1'(y)$、残りの 2 項が $g'(y)$ である。よって微分方程式（differential equation）は成り立つ。また $y = 0$ のとき $t = 0 + T \cdot 1 = T$ であるから、初期条件も成り立つ。

なぜこれが求める**唯一の**解なのか。この方程式は線形かつ一階（first order）である。t と $\tilde{t}$ がともにこれを満たすならば、その差 u は $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = \alpha u$ を満たすので、$u = u(0)\mathrm{e}^{\alpha y}$ である。両者とも $t(0) = T$ を満たすので $u(0) = 0$ であり、$u \equiv 0$ となる。ゆえに $(y,t) = (0,T)$ を通る解はちょうど 1 つであり、我々はそれを見つけたことになる。

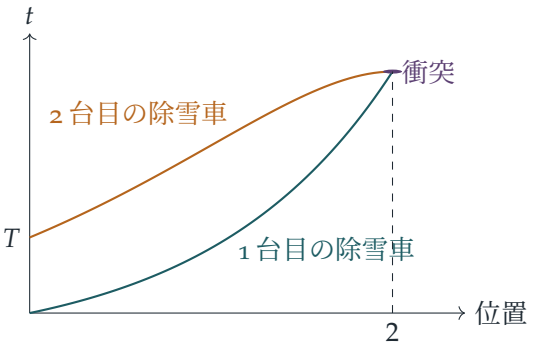
（自分で導きたい場合は、積分因子（integrating factor）$\mathrm{e}^{-\alpha y}$ を掛けると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(t\mathrm{e}^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha y}\right)$ が得られ、これを 0 から y まで積分すると同じ式が導かれる。）

衝突。 2 台の除雪車がある地点 y で衝突するのは、両者が同じ時刻にそこへ到達するとき、すなわち $t = t_1(y)$ のときであり、これは $g(y) = 0$ を意味する。$\mathrm{e}^{\alpha y} > 0$ であるから、これが起こるのはちょうど

$$T - \frac{\alpha h y}{k} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{kT}{\alpha h}.$$

のときである。$0 \le y < kT/(\alpha h)$ に対しては $g(y) > 0$ である（速さは正でなければならないので $\alpha, h, k > 0$ とする）。したがって 2 台目の除雪車はそのような各地点に 1 台目よりも真に遅れて到達し、それより前に両者が出会うことはない。ゆえに、除雪車は $kT/(\alpha h)$ メートル進んだところで衝突する。 ■

下の図は、$h = k = \alpha = 1$、$T = 2$ のときの 2 つの経路を (y,t) 平面に描いたものである。2 曲線の間の時間差 $g(y)$ は $y = 2$ で 0 まで縮む。



検算

- 単位：$k/(\alpha z)$ が速さであることから α の単位は m^{-1} である。よって αx は無次元（dimensionless）であり、h/k は時間、$kT/(\alpha h)$ は長さである。
- $T = 0$ ならば 2 台は同時に出発し、公式は距離 0 での衝突を与える。先行時間 T が大きいほど衝突地点は道路の先へ移る。これは当然そうあるべきである。
- h、k、α、T をさまざまにランダムに選び、各除雪車の運動を時間について数値的に進めてみると（2 台目については $t = T$ で $y = 0$ から $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1/\big(\alpha(t - t_1(y))\big)$ を用いる）、公式と 10^{-8} より高い精度で一致する。図と同じく $h = k = \alpha = 1$、$T = 2$ のとき、2 台はともに時刻 $\mathrm{e}^2 - 1 \approx 6.39\,\mathrm{s}$ に $y = 2$ に到達する。

よくある間違い

- 2 台目の除雪車についても深さを $h + kt$ としてしまう。2 台目が除雪しているのは時刻 $t_1(y)$ に一度除雪された道路なので、深さは $k(t - t_1(y))$ である。
- 解を確かめる際に、初期条件「$y = 0$ で $t = T$」を忘れる。微分方程式を満たすだけでは不十分である。
- $\mathrm{d}t/\mathrm{d}y$ の代わりに $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ を書いてしまう。時刻を従属変数とすることで、方程式は線形になり易しくなるのである。

STEP のその先へ

これは古典的な「除雪車問題（snowplough problem）」の一種である。方程式を線形にするために従属変数（dependent variable）と独立変数（independent variable）の役割を入れ替える技法は、大学 1 年の微分方程式で絶えず用いられる。上の一意性（uniqueness）の議論は、初期値問題（initial value problem）に対する存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）のごく簡単な場合である。また、前方の雪が薄くなって 0 に近づくと 2 台目の除雪車の速さが発散することにも注意しよう。これは現実の性質ではなく、モデルの限界を示すものである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、線形一階方程式、積分因子、一意性が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。