解答例

STEP III 見本問題、第 1 問

純粋数学 • 数学的帰納法

> **STEP III 見本問題、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q1

鍵となる考え方

(i) では、最初のいくつかの積を計算し、それを正しい見方で眺めることである。各値を分母 $2n$ の形に書き直すと、規則性がはっきりと見えてくる。$1-\frac{1}{m^2}=\frac{(m-1)(m+1)}{m^2}$ と因数分解すると、その理由がわかり、帰納法の段階も 1 行の計算で済む。(ii) では、n を固定して k についての数学的帰納法（induction）を用いる。和に項を 1 つ加える操作は、実はパスカルの法則（Pascal's rule）を形を変えて述べたものにほかならない。

解答

小問 (i)

$P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ とおく。最初のいくつかの値は

$$P_2=\frac{3}{4},\qquad P_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3},\qquad P_4=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5}{8},\qquad P_5=\frac{5}{8}\cdot\frac{24}{25}=\frac{3}{5}.$$

である。分母 $4, 8$ を見ると、すべてを分母 $2n$ で書くことを思いつく：$P_2=\frac{3}{4}$, $P_3=\frac{4}{6}$, $P_4=\frac{5}{8}$, $P_5=\frac{6}{10}$。そこで次のように予想する。

$$P_n=\frac{n+1}{2n}\qquad \text{ただし} n\geq 2.$$

数学的帰納法による証明。$S(n)$ を命題 $P_n=\dfrac{n+1}{2n}$ とする。

初期段階。$P_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$ であるから、$S(2)$ は成り立つ。

帰納段階。ある $n\geq 2$ について $S(n)$ が成り立つと仮定する。$P_{n+1}=P_n\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

であり、$1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ であるから、

$$\begin{aligned}P_{n+1}&=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\&=\frac{n+2}{2(n+1)},\end{aligned}$$

となり、これは $S(n+1)$ である。数学的帰納法により、すべての $n\geq 2$ について $S(n)$ が成り立つ。

（この因数分解は予想の根拠も説明する：$P_n=\prod_{m=2}^{n}\frac{m-1}{m}\cdot\prod_{m=2}^{n}\frac{m+1}{m}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}$ であり、どちらの積も項が次々に打ち消し合う（telescoping）。）

小問 (ii)

正の整数 n を固定し、$T(k)$ を次の命題とする。

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

$k=0,1,\ldots,n-1$ について、k に関する数学的帰納法で $T(k)$ を証明する。

初期段階。 $k=0$ のとき、両辺はともに $\binom{n}{0}=\binom{n-1}{0}=1$ に等しい。

帰納段階。 $0\leq k\leq n-2$ を満たすある k について $T(k)$ が成り立つと仮定する（こうしておけば $k+1$ もまだ範囲内にある）。次の項を加えると、

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}&=(-1)^k\binom{n-1}{k}+(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\\&=(-1)^{k+1}\left[\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}\right].\end{aligned}$$

考えてみよう $\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}$ は何か？

パスカルの法則によれば $\binom{n}{k+1}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}$ である。n 個のものから $k+1$ 個を選ぶとき、ある特定の 1 個が選ばれる（残りの k 個は他の $n-1$ 個から選ぶ）か、選ばれない（$k+1$ 個すべてを他の $n-1$ 個から選ぶ）かのどちらかだからである。したがって括弧の中は $\binom{n-1}{k+1}$ であり、

$$\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k+1},$$

となる。これは $T(k+1)$ である。数学的帰納法により、$k=0,1,\ldots,n-1$ について $T(k)$ が成り立ち、示すべきことが示された。

$n=1$ の場合は $k=0$ しかなく、これは初期段階で扱われているので、特別な扱いは必要ない。

検算

- $P_{300} = \frac{301}{600} \approx 0.5017$ である。また、コンピュータで分数を用いて各因数を厳密に掛け合わせたところ、2 から 300 までのすべての n について $\frac{n+1}{2n}$ と一致した。$n \to \infty$ のとき、この積は $\frac{1}{2}$ に収束する。
- $n = 4$ のとき、部分和（partial sum）$1, 1-4 = -3, -3+6 = 3, 3-4 = -1$ は $\binom{3}{0}, -\binom{3}{1}, \binom{3}{2}, -\binom{3}{3}$ と一致する。コンピュータで、すべての $n \leq 79$ とすべての $k \leq n-1$ について (ii) を厳密に確かめた。
- $k = n-1$ とし、最後の項 $(-1)^n\binom{n}{n}$ を加えると $(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$ となる。これはよく知られた事実 $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = (1-1)^n = 0$ である。

よくある間違い

- 完全に約分した分数（$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}$）から予想しようとして、規則性を見落とすこと。約分を戻して共通の形にそろえるのがこつである。
- (ii) で k ではなく n について帰納法を用いること（可能ではあるが、より煩雑になる）。あるいは、k から $k+1$ への段階は $k+1 \leq n-1$ である間だけ行えばよいことを忘れること。

STEP のその先へ

小問 (i) は、無限積（infinite product）$\prod_{m\geq 2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{2}$ の出発点である。これはオイラー（Euler）の積公式 $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{m\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)$ の特別な場合である：両辺を $m = 1$ の因数 $1 - x^2$ で割り、$x \to 1$ とすればよい。無限積に意味を与え、それがいつ収束するかを調べることは、大学 1 年次の解析学（analysis）で扱う話題である。小問 (ii) は、パスカルの法則や母関数（generating function）から導かれる数多くの二項係数の恒等式（binomial identity）の 1 つであり、$(1-x)^n \cdot \frac{1}{1-x} = (1-x)^{n-1}$ における x^k の係数にあたる。無限級数や無限積の収束について学ぶには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。