解答例

STEP II 見本問題、第 9 問

純粋数学 ・ 球、平面と鏡映

> **STEP II 見本問題、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q9

鍵となる考え方

どちらの小問も、ひとつの図に帰着する。平面と、その平面に下ろした垂線である。(i) では球面（sphere）の中心が原点にあるので、すべては原点から平面（plane）に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）で決まる。その点と O との距離によって両者が交わるかどうかが定まり、さらに三平方の定理（Pythagoras）から円が得られる。(ii) では、$\mathbf{x}$ を $\mathbf{c}$ に沿う部分と $\mathbf{c}$ に垂直な部分とに分け、与えられた式がそれぞれをどう変えるかを見ればよい。

解答

小問 (i)

平面 $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0$ は点 $\mathbf{a}$ を通り、法線ベクトル（normal）$\mathbf{b}$ をもつ。原点 O からこの平面に下ろした垂線の足を N とする。ON は法線方向なので、あるスカラー λ を用いて $\mathbf{n}=\lambda\mathbf{b}$ と書ける。また N は平面上にあるから、

$$(\lambda\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2},$$

となる。$\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ なので、この割り算は許される。よって

$$\mathbf{n}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad d=|\mathbf{n}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|},$$

である。ここで d は O から平面までの距離である。

次に、平面上の任意の点 $\mathbf{x}$ をとる。ベクトル $\mathbf{x}-\mathbf{n}$ は平面内にあるので $\mathbf{b}$ に垂直であ

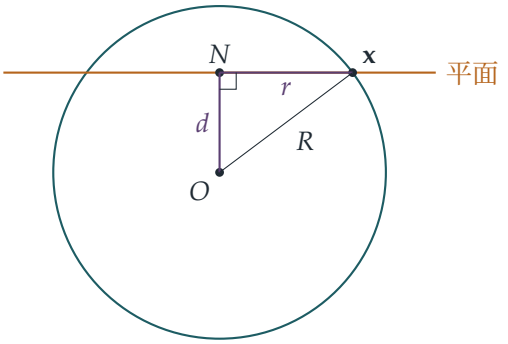
り、したがって $\mathbf{n}$ にも垂直である。三平方の定理より

$$|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{n}|^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = d^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2. \qquad (*)$$

したがって平面上の点は $|\mathbf{x}| \geq d$ を満たし、しかも $|\mathbf{x}| \geq d$ となるすべての値が実際に現れる（平面内で N から遠ざかればよい）。ゆえに球面 $|\mathbf{x}| = R$ が平面と交わるための必要十分条件は $R \geq d$、すなわち

$$\boxed{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq R\,|\mathbf{b}|} \qquad \text{同値な形で書けば} \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq R^2|\mathbf{b}|^2.$$

である。等号が成り立つ場合、平面は接平面（tangent plane）であり、「円」は一点 N に縮退する。



条件が成り立つとき、両方の曲面上にある点は $|\mathbf{x}| = R$ を満たし、$(*)$ より

$$|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = R^2 - d^2.$$

となる。よってこれらの点は、平面内で、平面上の点 N から一定の距離にある。すなわち N を中心とする円をなす。その中心と半径は

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2}} = \frac{\sqrt{R^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{|\mathbf{b}|}.$$

である。

小問 (ii)

単位ベクトル（unit vector）$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$ をとる（$\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ なので問題ない）。すると与えられた関係式は

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}.$$

となる。

考えてみよう $(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}$ は幾何学的には何を表すか。

これは $\mathbf{x}$ の $\mathbf{c}$ 方向の成分（component）、すなわち O を通り方向 $\mathbf{c}$ をもつ直線への $\mathbf{x}$ の射影（projection）である。そこで

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\parallel}+\mathbf{x}_{\perp},\qquad \mathbf{x}_{\parallel}=(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}},\qquad \mathbf{x}_{\perp}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\parallel},$$

と分解する。ここで $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})(\hat{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c})=0$ である。関係式は

$$\mathbf{x}'=\mathbf{x}_{\perp}-\mathbf{x}_{\parallel}.$$

となる。O を通り $\mathbf{c}$ に垂直な平面 Π（平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$）内の成分は変わらず、$\Pi$ に垂直な成分は向きが反転する。これはまさに鏡の働きである。**$\mathbf{x}'$ は、原点を通り法線ベクトル $\mathbf{c}$ をもつ平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$ に関する $\mathbf{x}$ の鏡映（reflection）である。**

これを鏡映の定義に照らして確かめておく。

- $\mathbf{x}'-\mathbf{x}=-2\mathbf{x}_{\parallel}$ は $\mathbf{c}$ のスカラー倍なので、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ を結ぶ線分は Π に垂直である。
- 中点 $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')=\mathbf{x}_{\perp}$ は $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c}=0$ を満たすので、Π 上にある。

いくつかの帰結を見ると、様子がより具体的になる。Π 上の点（$\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$ となる点）は動かない。$\mathbf{c}$ 自身は $-\mathbf{c}$ に移る。$|\mathbf{x}'|^2=|\mathbf{x}_{\perp}|^2+|\mathbf{x}_{\parallel}|^2$ なので $|\mathbf{x}'|=|\mathbf{x}|$ である。そして、二度鏡映すれば元に戻るはずのとおり、この写像を二回施すと $\mathbf{x}$ に戻る。また、$\mathbf{c}$ を任意の 0 でないスカラー倍 $k\mathbf{c}$ に置き換えても関係式は変わらない。これは理にかなっている。意味をもつのは平面だけであり、その法線ベクトルの長さや向きは関係ないからである。

検算

(i) で $\mathbf{a}=\mathbf{b}=(0,0,1)$、$R=2$ とすると、平面は $z=1$ であり、球面 $x^2+y^2+z^2=4$ と円 $x^2+y^2=3$、$z=1$ で交わる。公式からは中心 $(0,0,1)$、半径 $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ が得られ、確かに一致する。(ii) で $\mathbf{c}=(0,0,1)$ とすると、式は (x,y,z) を $(x,y,-z)$ に移す。これは $z=0$ に関する鏡映である。さらに、$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、R および $\mathbf{x}$、$\mathbf{c}$ を無作為に 20,000 通り選んで両小問を数値的に検証した。予測された円の上に構成した点は、10^{-9} の誤差の範囲で球面と平面の両方の上にあった。また (ii) の写像は Π 内のベクトルを動かさず、長さと内積（dot product）を保ち、それ自身が逆写像（inverse）になっていた。

よくある間違い

- 絶対値を忘れる。条件は $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le R|\mathbf{b}|$ であって、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le R|\mathbf{b}|$ ではない。O に関して反対側にある平面では $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$ となる。

- 円の中心を $\mathbf{a}$ と答える。点 $\mathbf{a}$ は平面上のある一点にすぎない。中心は O から下ろした垂線の足である。
- (ii) で「$\mathbf{c}$ に関する鏡映」あるいは「$\mathbf{c}$ 方向の直線に関する鏡映」と答える。その直線に関する鏡映は $\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}$ であり、これは $-\mathbf{x}'$ である。

STEP のその先へ

(ii) の写像は**ハウスホルダー変換**（Householder reflection）$\mathbf{x} \mapsto (I - 2\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{c}}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$ であり、直交（orthogonal）かつ対称（symmetric）で、行列式（determinant）が -1 の線形写像である。空間のあらゆる回転（rotation）は、このような鏡映二つの積として表される。また数値解析の研究者は、行列を安定に分解するためにこれを用いる（QR 分解（QR decomposition））。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）は、射影、鏡映、直交行列をまさにこの観点から扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。