解答例

STEP II 見本問題、第 7 問

純粋数学 ・ 階段関数の積分

> **STEP II 見本問題、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q7

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）$[\mathrm{e}^x]$ は階段関数（step function）である。すなわち、e^x が連続する二つの整数の間にとどまる各区間の上で一定である。そこで、それらの区間を求め、各区間で定数を積分し、それらを足し合わせる。得られる和は扱いにくそうに見えるが、等しい項をそろえて並べると、対数の大部分は二つずつ打ち消し合う。

解答

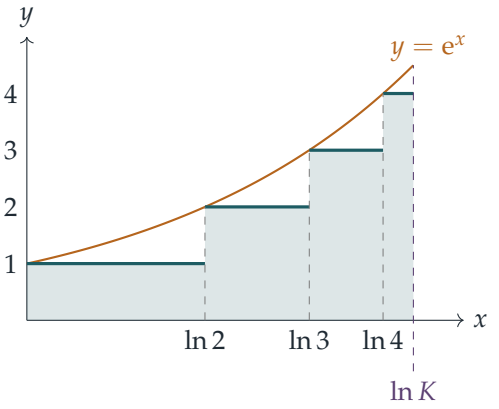
被積分関数が一定となる区間

$K \geq 1$ とする。このとき $\ln K \geq 0$ かつ $N = [K] \geq 1$ である。（$0 < K < 1$ の場合、x が $\ln K$ と 0 の間にあるとき $0 < \mathrm{e}^x \leq 1$ であり、ただ一点 $x = 0$ を除いて $[\mathrm{e}^x] = 0$ となるので $I = 0$ である。また $N = 0$ であり $N \ln K - \ln 0! = 0$ となる。よってこの場合も結果は成り立つ。）

整数 $k \geq 1$ に対して、ln は増加関数であるから

$$k \leq \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \leq x < \ln(k+1),$$

が成り立つ。したがって $[\ln k, \ln(k+1))$ 上で $[\mathrm{e}^x] = k$ である。積分区間 $0 \leq x \leq \ln K$ では $1 \leq \mathrm{e}^x \leq K$ であるから、$[\mathrm{e}^x]$ は値 $1, 2, \ldots, N$ をとり、最後の値 N は $[\ln N, \ln K]$ 上でとられる。そこでは $N \leq \mathrm{e}^x \leq K < N+1$ だからである。



網掛け部分の面積が I である（$K = 4.5$ として描いてあるので $N = 4$ である）。

各部分を足し合わせる

各区間で定数を積分すると、

$$I = \sum_{k=1}^{N-1} k(\ln(k+1) - \ln k) + N(\ln K - \ln N).$$

となる。（$N = 1$ のときは和は空であり、$K = N$ のときは最後の項は 0 である。どちらの場合も別に扱う必要はない。）

> **考えてみよう** $\sum k(\ln(k+1) - \ln k)$ はどう簡単にすればよいだろうか。このままでは望遠鏡和（telescoping sum）として打ち消し合わない。

これを二つの和に分け、一つ目の和で $j = k + 1$ とおいて添字をずらす：

$$\sum_{k=1}^{N-1} k \ln(k+1) = \sum_{j=2}^{N} (j-1) \ln j.$$

これで二つの和はどちらも $\ln j$ の定数倍の和となり、各 $\ln j$ の係数をまとめることができる。$\ln 1 = 0$ を用いると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} k(\ln(k+1) - \ln k) &= \sum_{j=2}^{N} (j-1) \ln j - \sum_{j=2}^{N-1} j \ln j \\ &= (N-1) \ln N + \sum_{j=2}^{N-1} ((j-1) - j) \ln j \\ &= (N-1) \ln N - \sum_{j=2}^{N-1} \ln j.\end{aligned}$$

最後の部分 $N\ln K - N\ln N$ を加えると、

$$\begin{aligned} I &= N\ln K - \ln N - \sum_{j=2}^{N-1} \ln j \\ &= N\ln K - \sum_{j=1}^{N} \ln j \\ &= N\ln K - \ln(N!), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

より鮮やかな見方

網掛け部分を縦の帯に切り分ける代わりに、横の層に切り分けてみる。$1 \le k \le N$ に対して、高さ $k-1$ と k の間の層が存在するのは、ちょうど $[\mathrm{e}^x] \ge k$ となるところ、すなわち $\mathrm{e}^x \ge k$ となるところ、つまり $\ln k \le x \le \ln K$ の範囲である。この層の面積は $\ln K - \ln k$ であるから、ただちに

$$I = \sum_{k=1}^{N} (\ln K - \ln k) = N\ln K - \ln(N!)$$

が得られる。形式的には、$1 \le y < N+1$ に対して $[y] = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}[y \ge k]$ が成り立つことを用い、項別に積分しているのである。これは上で行った添字のずらしと同じ並べ替えを、幾何的に行ったものである。

検算

- $K = 1$：積分区間の長さは 0 であり、公式は $1\cdot 0 - \ln 1 = 0$ を与える。
- $K = \mathrm{e}$：このとき $N = 2$ であり、直接計算すると $I = \ln 2 + 2(1 - \ln 2) = 2 - \ln 2 \approx 1.3069$ となって、$2\ln \mathrm{e} - \ln 2$ と一致する。
- $K = 10$ のとき公式は $10\ln 10 - \ln(10!) \approx 7.9214$ を与え、$[0, \ln 10]$ 上での $[\mathrm{e}^x]$ の中点則による数値積分（midpoint quadrature）と 5×10^{-6} の精度で一致する。$[1, 40]$ 内のランダムな K の値についても一致する。

よくある間違い

- 区間 $[\ln N, \ln(N+1)]$ を使って和を N まで取ってしまうこと。積分範囲の上端は $\ln(N+1)$ ではなく $\ln K$ であるから、最後の部分は別に扱わなければならない。
- 添字を付け替えるときに端の項を間違えること。$N = 3$ の場合に和を書き出して確かめるとよい。

STEP のその先へ

$\sum k(a_{k+1}-a_k)$ を $-\sum a_k$ と境界項の和に置き換える操作は**部分和分**（summation by parts）（アーベル（Abel）の総和法）と呼ばれ、部分積分の離散版である。$K=N$ とし、$\mathrm{e}^x-1<[\mathrm{e}^x]\le \mathrm{e}^x$ を用いると $N\ln N-N+1\le \ln(N!)\le N\ln N-N+1+\ln N$ が得られ、これはスターリング（Stirling）の近似（Stirling's approximation）への第一歩となる。同じ考え方をリーマン（Riemann）–スティルチェス（Stieltjes）積分（Riemann–Stieltjes integral）$\int f\,\mathrm{d}[t]$ の形で書くと、解析的整数論（analytic number theory）の至るところで和を積分に変換する道具となる。Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*（解析的整数論入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。