解答例

STEP II 見本問題、第 6 問

純粋数学 ・ 微分方程式から導く加法定理

> **STEP II 見本問題、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q6

鍵となる考え方

「f は e^x である」と言うことは許されていないので、すべては微分方程式（differential equation）そのものから導かなければならない。使ってよい道具はただ一つ、導関数（derivative）がいたるところで 0 である関数は定数である、という事実である。そこで、導関数が打ち消し合って 0 になるような式を作り、$x = 0$ を代入してその定数を決定するのが要点である。$a - x$ における値と x における値を組にするのは自然な発想である。二つの引数の和はつねに a であり、これはまさに加法定理（addition formula）の形だからである。

解答

指数関数の加法法則

a を固定し、$p(x) = \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x)$ とおく。合成関数の微分法（chain rule）により、$\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ を用いると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{f}(a-x)] = -\mathrm{f}'(a-x) = -\mathrm{f}(a-x)$ である。よって積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned} p'(x) &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}'(x) \\ &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = 0, \end{aligned}$$

となり、これが最初の結果である。

すべての x に対して $p'(x) = 0$ であるから、関数 p は定数である。$\mathrm{f}(0) = 1$ であるから、$x = 0$ における値は $\mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)$ である。したがって

$$\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(a) \qquad \text{すべての } x \text{ とすべての } a \text{ について.}$$

ここで任意の x と y をとり、$a = x + y$ と選ぶ。すると $a - x = y$ となり、この恒等式は

$$\mathrm{f}(y)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+y),$$

となって、示すべき式が得られる。

余弦の加法定理

同じ方針をなぞる。すなわち、$a - x$ と x で評価した c と s の組合せで、導関数が 0 になるものが必要である。

> **考えてみよう** どの組合せを微分すればよいだろうか？

答えの形を手がかりにしよう。$a = x + y$ のとき欲しいのは $\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$、すなわち $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x)$ である。そこで、これを試すべき関数とする。

a を固定し、

$$g(x) = \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{s}(x).$$

とおく。合成関数の微分法と与えられた導関数により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c}(a-x)] = -\mathrm{c}'(a-x) = \mathrm{s}(a-x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{s}(a-x)] = -\mathrm{s}'(a-x) = -\mathrm{c}(a-x).$$

である。よって積の微分法により、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \big[\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)\big] - \big[-\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x) + \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x)\big] \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって g は定数であり、その値は

$$g(0) = \mathrm{c}(a)\,\mathrm{c}(0) - \mathrm{s}(a)\,\mathrm{s}(0) = \mathrm{c}(a)\cdot 1 - \mathrm{s}(a)\cdot 0 = \mathrm{c}(a).$$

である。ゆえに、すべての x と a について $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x) = \mathrm{c}(a)$ が成り立つ。任意の x と y に対して $a = x + y$ とおけば $a - x = y$ となるから、

$$\mathrm{c}(x+y) = \mathrm{c}(x)\,\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\,\mathrm{s}(y),$$

となり、これが示すべき結果である。

$h(x) = \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) + \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)$ に同じ方法を用いると $h' = 0$ かつ $h(0) = \mathrm{s}(a)$ が得られるので、$\mathrm{s}(x+y) = \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y) + \mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$ も成り立つ。

検算

- $y = 0$ とおく。$\mathrm{f}(0) = \mathrm{c}(0) = 1$ と $\mathrm{s}(0) = 0$ を用いると、結果は $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x)$ と $\mathrm{c}(x) = \mathrm{c}(x)$ に帰着する。

- 余弦の結果に $y = -x$ を代入すると $1 = \mathrm{c}(0) = \mathrm{c}(x)\mathrm{c}(-x) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(-x)$ となる。これは姿を変えた $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ にほかならない。
- 微分方程式を数値的に解き（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用い、組み込みの指数関数や三角関数は一切使わない）、$[-3, 3]$ 内の無作為な 60 組で両方の恒等式を検証した。たとえば $x = 0.7$, $y = 1.1$ のとき、余弦の結果の両辺はいずれも小数第 4 位まで -0.2272 である。差はすべて 10^{-11} 未満であった。

よくある間違い

- $\mathrm{f}(a - x)$、$\mathrm{c}(a - x)$ または $\mathrm{s}(a - x)$ を微分するとき、合成関数の微分法から出てくるマイナス符号を忘れる。
- 「導関数が 0 である」で止まってしまい、$x = 0$ で定数を求めたうえで $a = x + y$ と選ぶところまで進まない。
- $\cos(x + y)$ の公式や $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ を引用してしまう。これは問題文で明確に禁じられている。

STEP のその先へ

大学では、これこそが指数関数と三角関数を誠実に定義する方法である。すなわち、これらを微分方程式の解として（あるいはべき級数（power series）として）定義し、よく知られた性質はすべてその定義から導くのである。ここで用いた事実、つまり導関数がいたるところで 0 ならばその関数は定数であるということは、平均値の定理（Mean Value Theorem）の帰結であり、これらの解が一意であることもこの事実から示される。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、この理論を丁寧に組み立てている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。