解答例

STEP II 見本問題、第 5 問

純粋数学 ・ 級数と積分による評価

STEP II 見本問題、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s2-q5

鍵となる考え方

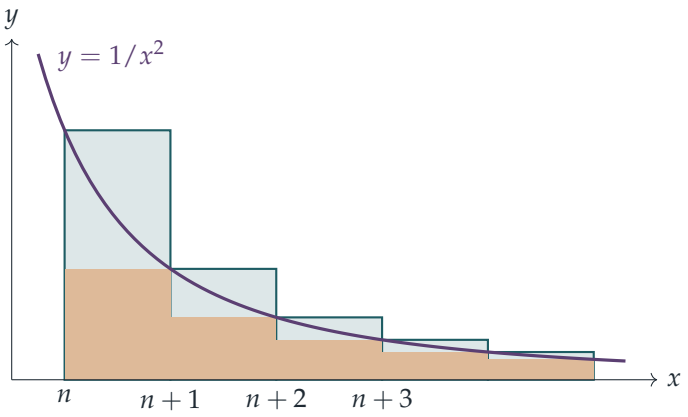
減少関数（decreasing function）の値の和は幅 1 の長方形の列として、積分は曲線の下の面積として図示できる。各標本点の右側に長方形を置くと長方形は曲線の上にはみ出し、左側に置くと曲線の下に収まる。これによって挟み撃ち（sandwich）が得られ、その後はすべて帳簿付けのような作業にすぎない。級数（series）の末尾部分（tail）は二つの簡単な分数の間に閉じ込められるので、末尾部分の推定値を加えることで近似は劇的に改善される。

解答

挟み撃ち

$f(x) = 1/x^2$ とおく。これは $x > 0$ において正であり、狭義単調減少（strictly decreasing）である。また次も必要になる。

$$\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^M = \frac{1}{n}.$$



上側の長方形（ティール色の枠線）。$[r, r+1]$ の上に高さ $f(r) = 1/r^2$ の長方形を置く。f は減少関数なので $r < x \leq r+1$ に対して $f(x) < f(r)$ であり、この長方形の面積 $1/r^2$ は $\int_r^{r+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ より真に大きい。これらを $r = n, n+1, \ldots$ について足し合わせると

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

を得る。

下側の長方形（琥珀色）。$[r-1, r]$ の上に高さ $f(r) = 1/r^2$ の長方形を置く。今度は $r-1 \leq x < r$ に対して $f(x) > f(r)$ なので、この長方形は曲線の下にあり、その面積 $1/r^2$ は $\int_{r-1}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$ より真に小さい。区間が $[n, \infty)$ を埋め尽くす $r = n+1, n+2, \ldots$ について足し合わせると

$$\int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}.$$

となる。（三つの量はいずれも有限である。積分は $1/n$ であり、二つの和はそれで上から抑えられる。）これが求める二つの不等式であり、念のため書いておくと次のようになる。

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}. \qquad (*)$$

末尾部分を閉じ込める

$S_n = \sum_{r=1}^{n} 1/r^2$ とおく。すると $A - S_n$ はちょうど末尾部分 $T = \sum_{r=n+1}^{\infty} 1/r^2$ に等しい。

$(*)$ の右側の不等式から、直ちに $T < 1/n$ が得られる。

考えてみよう $(*)$ の左側の不等式は和が $r = n$ から始まっているが、末尾部分は $r = n+1$ から始まる。T の下界はどうすれば得られるだろうか。

不等式 $(*)$ はすべての正の整数について成り立つので、その左半分を n の代わりに $n+1$ として適用すればよい。

$$T=\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}>\int_{n+1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{n+1}.$$

二つを合わせると

$$\frac{1}{n}>A-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2}>\frac{1}{n+1},$$

となり、示すべきことが示された。

最小の n

すべての項は正なので $S_n<A$ であり、誤差は $A-S_n$ である。

- $n\le 9999$ ならば $n+1\le 10^4$ なので、$A-S_n>\dfrac{1}{n+1}\ge 10^{-4}$ となり、誤差が大きすぎる。
- $n=10^4$ ならば $A-S_n<\dfrac{1}{n}=10^{-4}$ となり、誤差は十分小さい。

したがって最小値は $n=10\,000$ である。ここでは両方の不等式が狭義であることが重要である点に注意しよう。$n=9999$ のとき下界はちょうど 10^{-4} であり、$n=10^4$ のとき上界はちょうど 10^{-4} である。

改良された近似値

閉じ込めの不等式の各辺から $\frac{1}{n+1}$ を引くと

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>A-\left(\frac{1}{n+1}+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2}\right)>0.$$

となる。よって $\frac{1}{n+1}+S_n$ は依然として A を下回るが、その差は

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

より小さい。$n=10^4$ のとき、これは $\dfrac{1}{10^4\times 10\,001}<\dfrac{1}{10^4\times 10^4}=10^{-8}$ であるから、改良された近似値は 10^{-8} 未満の誤差で A を近似しており、示すべきことが示された。

追加した項 $1/(n+1)$ は末尾部分の推定値であり、末尾部分は幅わずか $1/(n(n+1))$ の区間に押し込められているので、この推定が大きく外れることはありえない。

検算

- 小さな場合：$n=1$ のとき $S_1=1$、$A=\pi^2/6\approx 1.6449$ なので $A-S_1\approx 0.645$ であり、確かに $\frac{1}{2}$ と 1 の間にある。

- $A = \pi^2/6$ を用いて数値的に和を計算すると、$A - S_{9999} \approx 1.00005 \times 10^{-4}$（わずかに大きすぎる）、$A - S_{10000} \approx 0.99995 \times 10^{-4}$（ぎりぎり十分小さい）となり、$n = 10\,000$ が確認できる。
- $n = 10^4$ のとき、改良された近似値の誤差は約 5.0×10^{-9} であり、上界 $1/(n(n+1)) \approx 1.0 \times 10^{-8}$ を下回る。図から予想されるとおり、誤差は上界のおよそ半分である（曲線は各長方形のはみ出し部分をほぼ半分に切る）。

よくある間違い

- 左側の不等式を $n+1$ ではなく n で用いてしまうこと。これでは末尾部分 $A - S_n$ ではなく $\sum_{r=n}^{\infty}$ の下界が得られるだけである。
- 狭義の不等式を広義の不等式として扱ったり、二つの評価の一方しか使わなかったりして、$n = 9999$ や $n = 10\,001$ と答えてしまうこと。$n \leq 9999$ を除外するには下界が、$n = 10^4$ を採用するには上界が必要である。
- 長方形を各標本点の逆側に描いてしまい、不等式の向きが逆になること。

STEP のその先へ

これは収束（convergence）の積分判定法（integral test）であり、さらに定量的な副産物も伴っている。級数が収束することを証明するのと同じ長方形が、その末尾部分の評価も与えるのである。和と積分を比較し、両端での導関数によって補正するという形でこの考えを精密化すると、オイラー＝マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）に至る。この公式は今の場合 $A - S_n \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$ を予測するものであり、オイラー（Euler）は $\sum 1/r^2$ が $\pi^2/6$ に等しいことを証明する前に、この方法でその値を小数点以下何桁にもわたって計算した。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、級数とその収束判定法を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。