解答例

STEP II 見本問題、第 4 問

純粋数学 ・ 双曲線関数

STEP II 見本問題、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s2-q4

鍵となる考え方

これらの恒等式（identity）はどれも、ただ一つの角（あるいはただ一つの双曲的な「角」）についての主張である。右辺に名前を付け、そこから一つの関数の値を読み取り、ピタゴラスの関係式（Pythagorean identities）$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ と $1+\sinh^2 u=\cosh^2 u$ を用いてもう一つの値を求めればよい。本当に注意が必要なのは平方根の符号だけであり、まさにそこで主値（principal value）の範囲が効いてくる。そして最後の小問では、そこで恒等式が成り立たなくなる。

解答

小問 (i)

$\theta=\tan^{-1}(\sinh x)$ とおく。すると $\tan\theta=\sinh x$ であり、θ は主値なので $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$ である。このとき

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\sinh^2 x=\cosh^2 x.$$

$(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上では $\cos\theta>0$ なので $\sec\theta>0$ である。また $\cosh x>0$ はつねに成り立つ。正の平方根をとって $\sec\theta=\cosh x$ となり、したがって

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x.$$

θ は $\sin^{-1}$ の主値の範囲 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ に属するので、これはまさに $\theta=\sin^{-1}(\tanh x)$ であることを意味する。よって、すべての実数 x について $\sin^{-1}(\tanh x)=\tan^{-1}(\sinh x)$ が成り立ち、示すべきことが示された。

考えてみよう なぜ $\sin\theta = \tanh x$ が得られた時点で議論は終わりにならないのか？

$\sin\theta = \tanh x$ を満たす θ は無数に存在するからである。θ が主値 $\sin^{-1}(\tanh x)$ であると結論できるのは、ここでの θ が、sin が一対一（one-to-one）となる区間 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ に属しているからにほかならない。$\sec\theta$ の符号を決めたのも、この同じ範囲である。

小問 (ii)

$u = \sinh^{-1}(\tan y)$ とおく。$-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ では $\tan y$ は有限なので、これは定義される。すると $\sinh u = \tan y$ であり、小問 (i) を $x = u$ として用いると

$$\sin^{-1}(\tanh u) = \tan^{-1}(\sinh u) = \tan^{-1}(\tan y) = y,$$

を得る。ここで最後の等号には、$\tan^{-1}$ の主値の範囲である $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ を用いた。両辺の sin をとると $\tanh u = \sin y$ となる。この区間では $|\sin y| < 1$ なので $\tanh^{-1}(\sin y)$ は定義され、さらに tanh は一対一であるから $u = \tanh^{-1}(\sin y)$ である。すなわち

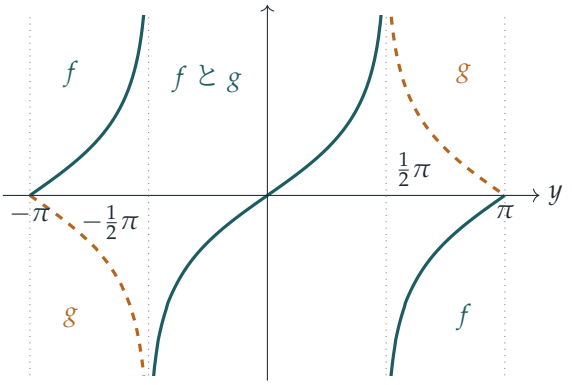
$$\sinh^{-1}(\tan y) = \tanh^{-1}(\sin y) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

（直接示すこともできる。$\cosh u = \sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$ であり、$\cos y > 0$ なのでこれは正である。よって $\tanh u = \tan y \cos y = \sin y$ となる。）

概形 $f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$、$g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$ とおく。どちらも $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ では定義されない。そこでは $\tan y$ が無限大となり、$\sin y = \pm 1$ となるからである。それ以外での振る舞いは、tan と sin の対称性から分かる。

- どちらも奇関数（odd function）であり、どちらも $y = 0$ と $y = \pm\pi$ で 0 になる。
- tan が周期（period）π をもつので、f も周期 π をもつ。よって $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上では $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 上と同じ値をとり、$-\infty$ から 0 まで増加する。
- $\sin(\pi - y) = \sin y$ なので、g は $y = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称である。$(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上では $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上の値を鏡に映したようにくり返し、$+\infty$ から 0 まで減少する。
- 微分すると $f'(y) = \dfrac{\sec^2 y}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = |\sec y|$、$g'(y) = \dfrac{\cos y}{1-\sin^2 y} = \sec y$ である。したがって f は定義されているどの区間でも増加し、一方 g は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ で増加し、その外側では減少する。原点ではどちらも傾き 1 をもつ。$y = \pi$ では、f の傾きは 1、g の傾きは -1 である。

$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上では二つのグラフは同じ曲線であり、外側の区間ではそれぞれが他方を横軸に関して折り返したものになっている。



実線：$f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$。破線：$f$ と異なる部分の $g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$。点線 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ は漸近線（asymptote）である。

$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ における関係 概形からは、そこで $f = -g$ となることが予想され、実際にこれは証明できる。$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ ならば $y - \pi$ は $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ に属するので、いま証明した恒等式を $y - \pi$ に適用できる：

$$\begin{aligned}\sinh^{-1}(\tan y) &= \sinh^{-1}\big(\tan(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}\big(\sin(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}(-\sin y) = -\tanh^{-1}(\sin y),\end{aligned}$$

ここで $\tan(y-\pi) = \tan y$、$\sin(y-\pi) = -\sin y$、および $\tanh^{-1}$ が奇関数であることを用いた。よって $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ に対して

$$\sinh^{-1}(\tan y) = -\tanh^{-1}(\sin y).$$

（奇関数であることから、同じ関係は $-\pi < y < -\frac{1}{2}\pi$ でも成り立つ。）

考えてみよう $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ では、小問 (ii) の議論はどこで破綻するのか？

$\tan^{-1}(\tan y) = y$ の段階である。$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ の外にある y については、主値は y ではなく $y - \pi$ になる。同じことだが、直接の議論では、そこでは $\cos y < 0$ なので $\sqrt{1+\tan^2 y} = |\sec y| = -\sec y$ となり、このマイナス符号こそが答えに現れる符号である。

検算

- $y = 1$ のとき：$\sinh^{-1}(\tan 1) = \tanh^{-1}(\sin 1) \approx 1.2262$。$y = 2$ のとき：$\sinh^{-1}(\tan 2) \approx -1.5235$ であるのに対し $\tanh^{-1}(\sin 2) \approx 1.5235$ であり、符号が反転することが確かめられる。

- 符号：$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ では $\tan y < 0$ だが $\sin y > 0$ なので、二つの式は逆の符号をもたなければならず、等しくはなり得ない。
- 小問 (i) で x が大きいとき：両辺とも $\frac{1}{2}\pi$ に近づき、期待どおりである。

両方の恒等式と、$\frac{1}{2}\pi < |y| < \pi$ における関係 $f = -g$ を、10^5 個の無作為な点で数値的に確かめた。

よくある間違い

- $\sec y$ の符号を確かめずに $\sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$ と書いてしまう。これこそが最後の小問の要点である。
- θ が主値である理由を述べずに、$\sin\theta = \tanh x$ から $\theta = \sin^{-1}(\tanh x)$ と結論してしまう。
- $\frac{1}{2}\pi$ より先で g を f と同じ形に描いてしまう。g が受け継ぐのは tan の周期性ではなく、$\frac{1}{2}\pi$ に関する sin の対称性である。

STEP のその先へ

関数 $\mathrm{gd}(x) = \tan^{-1}(\sinh x) = \sin^{-1}(\tanh x)$ は**グーデルマン関数**（Gudermannian function）と呼ばれる。これは複素数を使わずに三角関数と双曲線関数（hyperbolic function）を結びつけるものであり、小問 (ii) はその逆関数が $\sinh^{-1}(\tan y)$ であることを示している。この関数はメルカトル（Mercator）図法に現れ、地図上の縦方向の座標を緯度に変換する役割を果たす。ここで恒等式をつまずかせた逆関数とその分枝（branch）は、複素数 z に対する $\log z$ や $z^{1/2}$ を学ぶときに中心的な話題となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）は、これを見るのにうってつけの美しい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。