解答例

STEP II 見本問題、第 3 問

純粋数学 ・ ド・モアブルの定理

> **STEP II 見本問題、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q3

鍵となる考え方

ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）は、帰納法（induction）で自然に示せる。加法定理（compound-angle formulae）により、$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ をもう一つ掛けると偏角に θ が加わるからである。方程式のほうでは、x^k の隣に $\cos ky$、$\sin ky$ が並ぶ形が、「実部と虚部」を強く示唆している。第 1 式を実部（real part）、第 2 式を虚部（imaginary part）とみなし、$z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ についての一つの複素数の方程式として扱えば、二つの式は容易に根が見つかる z の 3 次方程式（cubic）にまとまる。

解答

ド・モアブルの定理

n についての帰納法を用いる。$n = 1$ のとき、両辺はともに $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ であるから、主張は成り立つ。

ある $n = k \geq 1$ で成り立つと仮定する。このとき

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + \mathrm{i}(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + \mathrm{i}\sin(k+1)\theta,\end{aligned}$$

となる。ここで、1 行目では帰納法の仮定を、2 行目では $\mathrm{i}^2 = -1$ を、3 行目では $\cos(A+B)$ と $\sin(A+B)$ の加法定理を用いた。よって $n = k+1$ でも主張は成り立ち、帰納法によりすべての正の整数 n について成り立つ。

方程式を解く

x、y を実数とし、

$$z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

とおく。ド・モアブルの定理により、$n = 1, 2, 3$ に対して

$$z^n = x^n(\cos y + \mathrm{i}\sin y)^n = x^n \cos ny + \mathrm{i}\, x^n \sin ny.$$

が成り立つ（これは x の符号によらず成り立つ。実数の因数 x は単に x^n として外に出るだけである）。x と y は実数であるから、二つの方程式の左辺はちょうど $z^3 + 2z^2 + 2z$ の実部と虚部である。したがって、二つの実数の方程式の組は、一つの複素数の方程式

$$z^3 + 2z^2 + 2z = -1, \qquad \text{すなわち} \qquad z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0.$$

と同値である。

考えてみよう なぜ一つの複素数の方程式が二つの実数の方程式と同じになるのか？

二つの複素数が等しいのは、実部どうしが等しく、かつ虚部どうしが等しいとき、またそのときに限る。右辺 -1 の実部は -1、虚部は 0 であり、これは与えられた二つの方程式の右辺そのものである。よって (x, y) が二つの実数の方程式をともに満たすことと、z がこの3次方程式を満たすことは同値である。

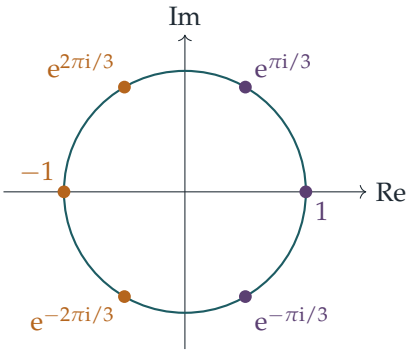
さて、$-1 + 2 - 2 + 1 = 0$ であるから $z = -1$ は根であり、因数で割ると

$$z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1).$$

を得る。2次方程式の根は $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})$ である。よって三つの根は

$$z = -1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi, \qquad z = \cos\tfrac{2\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi}{3},$$

であり、すべて単位円（unit circle）上にある。



残るは、各根を実数の組 (x,y) に戻すことである。$|z|=|x|$ であるから、どの解でも $|x|=1$ である。特に $x=0$ はありえない（$0=-1$ となってしまう）。

- $x=1$ のとき、$\cos y+\mathrm{i}\sin y=z$ であるから、y は三つの根のいずれかの偏角（argument）である。すなわち $y=\pi$、$\frac{2\pi}{3}$、$-\frac{2\pi}{3}$ のいずれかに 2π の任意の整数倍を加えたものである。
- $x=-1$ のとき、$\cos y+\mathrm{i}\sin y=-z$ であり、これは 1、$\cos\frac{\pi}{3}\mp\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ のいずれかである（図のプラム色の点）。よって $y=0$、$-\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{3}$ のいずれかに 2π の任意の整数倍を加えたものである。

これらはいずれも 3 次方程式の根を与えるので、すべて解である。k を任意の整数として、解は

$$x=1,\quad y=\pi+2k\pi \text{ または} y=\pm\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\qquad x=-1,\quad y=2k\pi \text{ または} y=\pm\tfrac{\pi}{3}+2k\pi.$$

である。$[0,2\pi)$ の範囲では、$(1,\frac{2\pi}{3})$、$(1,\pi)$、$(1,\frac{4\pi}{3})$、$(-1,0)$、$(-1,\frac{\pi}{3})$、$(-1,\frac{5\pi}{3})$ の 6 組となる。

検算

$x=-1$、$y=0$ を試すと、第 1 式は $-1+2-2=-1$、第 2 式は $0=0$ となる。$x=1$、$y=\frac{2\pi}{3}$ を試すと、余弦は $1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ で $1-1-1=-1$ を与え、正弦は $0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}$ で $0-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$ を与える。$x\in[-3,3]$、$y\in[0,2\pi)$ の細かい格子上でコンピュータ探索を行うと、近似解は（丸め誤差の範囲で）上の 6 点にしか見つからないので、見落としはない。

よくある間違い

- x を絶対値（modulus）とみなして $x\geq 0$ と仮定してしまうこと。問題は任意の実数 x を許しており、$x=-1$ の解もまったく同様に正しい。これらは同じ点 z を、y を π だけずらして表したものである。
- $+2k\pi$ を忘れること。y は 2π を法としてしか定まらないので、組 (x,y) は無数に存在する。

STEP のその先へ

二つの実数の方程式を一つの複素数の方程式にまとめるのは定石である。$z=re^{\mathrm{i}\theta}$ の多項式の実部と虚部は、まさにこの種の三角関数の連立方程式を満たし、因数分解

（factorisation）$z^3+2z^2+2z+1=(z+1)(z^2+z+1)$ によって根が単位円上に位置づけられる。大学の最初の講義では、$e^{i\theta}$ を冪級数（power series）で定義する方法に出会うだろう。これによりド・モアブルの定理はすべての整数について成り立ち、さらに（分枝（branches）に注意すれば）整数でない冪にも意味を与えられる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を図形的に解説した書）は、これらすべてを美しく幾何学的に描いている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。