解答例

STEP II 見本問題、第 2 問

純粋数学 • 対称な連立方程式

> **STEP II 見本問題、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q2

鍵となる考え方

3 つの方程式は巡回的（cyclic）であるから、2 つずつ引き算するのが自然であり、それぞれの差は $x+y+z$ を共通因数として因数分解（factorise）できる。差の 2 乗の和は、2 通りの意味で役に立つ。x, y, z で表すとそれは $a+b+c$ の定数倍であり、一方、最初の結果を使うとそれを $a-b, b-c, c-a$ と $x+y+z$ で表すことができる。$x+y+z$ と 2 つずつの差がわかれば、あとは 3 つの 1 次方程式で片がつく。

解答

等しい比

第 1 式から第 2 式を引くと、

$$\begin{aligned} a-b &= x^2-y^2-yz+zx \\ &= (x-y)(x+y)+z(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

まったく同様にして（あるいは $x \to y \to z \to x, a \to b \to c \to a$ と巡回的に置き換えて）、

$$b-c=(y-z)(x+y+z), \qquad c-a=(z-x)(x+y+z).$$

$S=x+y+z$ とおく。$a \neq b$ であるから積 $(x-y)S$ は 0 でなく、したがって $S \neq 0$ である（同様に x, y, z は相異なる）。a, b, c は相異なるので $a-b, b-c, c-a$ および S で割ることができ、

$$\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}=\frac{x-y}{a-b}=\frac{1}{x+y+z},$$

となって、示すべき式が得られる。

$x+y+z$ を求める

問題文で示唆されている和を展開すると、

$$\begin{aligned}(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 &= 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\ &= 2[(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)]\\ &= 2(a+b+c).\end{aligned}$$

一方、前半の結果から $y-z=(b-c)/S$ などが成り立つので、同じ和は

$$\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{S^2}=\frac{2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}{S^2}.$$

に等しい。2つの式を等しいとおき、a, b, c が正であることから正である $2(a+b+c)$ で両辺を割ると、

$$S^2=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a+b+c}.$$

よって、$\triangle^2$ をこの量とすると $x+y+z=\triangle$ となり、示すべきことが得られた。なお $\triangle^2>0$ である。実際、その分子は $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ の半分であり、これは a, b, c が相異なるとき正である。したがって $\triangle=\pm\sqrt{\triangle^2}$ という2つの可能性があり、ここまでの議論ではそのどちらかに決まることはない。

方程式を解く

ここまでで次のことがわかっている。

$$x+y+z=\triangle,\qquad x-y=\frac{a-b}{\triangle},\qquad x-z=\frac{a-c}{\triangle}.$$

3つをすべて足すと、

$$3x=\triangle+\frac{2a-b-c}{\triangle}=\frac{\triangle^2+2a-b-c}{\triangle}.$$

これはきれいに簡単になる。$s=a+b+c$, $Q=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ とおくと $\triangle^2=Q/s$ である。すると

$$\begin{aligned}s(\triangle^2+2a-b-c) &= Q+(a+b+c)(2a-b-c)\\ &= (a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+(2a^2+ab+ca-b^2-c^2-2bc)\\ &= 3(a^2-bc).\end{aligned}$$

ゆえに $x=\dfrac{a^2-bc}{s\triangle}$ であり、y, z も巡回的な置き換えによって得られる。ここで $(s\triangle)^2=sQ=a^3+b^3+c^3-3abc$ が成り立つ。これはよく知られた因数分解

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

による。$K=\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}>0$ とおくと $s\triangle=\pm K$ であり、解は

$$(x,y,z)=\pm\frac{1}{K}(a^2-bc,\ b^2-ca,\ c^2-ab),$$

である。ただし、符号はすべての成分で同じものをとる。

考えてみよう 示したのは、解があるとすれば必ずこの形になる、ということだけである。この 2 つは本当にどちらも解なのだろうか。

どちらも解である。上の議論はすべて結論を順に導いただけのものなので、元の式に代入して確かめる必要がある。未知数の 2 乗と 2 つの未知数の積しか現れないので、全体の符号は関係なく、

$$\begin{aligned}(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)&=a^4-2a^2bc+b^2c^2-(b^2c^2-ab^3-ac^3+a^2bc)\\&=a(a^3+b^3+c^3-3abc)=aK^2.\end{aligned}$$

K^2 で割ると $x^2-yz=a$ が得られる。残りの 2 式も巡回的な置き換えから従う。したがって解はちょうど 2 つあり、一方は他方の符号を反転させたものである。

検算

- $a=1,b=2,c=3$ とする。このとき $a^3+b^3+c^3-3abc=18$, $K=3\sqrt{2}$ であり、正の符号をとった解は $(x,y,z)=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-5,1,7)$ である。たとえば $x^2-yz=\frac{25-7}{18}=1$ であり、また $x+y+z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で、その 2 乗は $\frac{1}{2}=\frac{14-11}{6}=\triangle^2$ となる。
- 相異なる正の数 a,b,c の組を無作為に 20,000 個とり、両方の符号についてコンピュータで確かめた。公式は 3 つの方程式と等しい比のすべてを、相対誤差 10^{-11} 未満で満たしていた。

よくある間違い

- $\triangle$ として正の平方根だけをとってしまうこと。問題の $\triangle$ は $\triangle^2$ を通してしか定義されておらず、どちらの符号も実際に解を与える。
- $x+y+z$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまうこと。ここでは $a\neq b$ からそれが従う。

STEP のその先へ

恒等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ は、行が (a,b,c), (c,a,b), (b,c,a) である巡回行列（circulant matrix）の行列式（determinant）であり、

複素数の範囲では $\omega = e^{2\pi i/3}$ を用いて $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$ と完全に因数分解される。実は、写像 $(x,y,z) \mapsto (x^2-yz,\, y^2-zx,\, z^2-xy)$ はある巡回行列の余因子行列（adjugate）になっており、これがこの写像をたやすく逆に解ける理由である。巡回行列とその固有ベクトル（eigenvector）は、離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）への穏やかな入門となる。さらに学ぶには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。