解答例

STEP II 見本問題、第 16 問

確率・統計 ・ トーナメント戦の確率

> **STEP II 見本問題、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q16

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.7 節「勝ち抜き戦で誰と誰が当たるか」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/knockout.html

鍵となる考え方

選ばれた 2 人のプレイヤー A と B を、1 回戦ずつ追いかけていく。2 人がともに勝ち残っていて、まだ対戦していない回戦では、問題になるのは次の 2 点だけである。A の対戦相手が B になるかどうか、そしてそうでない場合に 2 人とも勝つかどうかである。どちらも単純な確率であり、現れる積は見事に次々と打ち消し合う（telescope）。最後の小問には、対称性（symmetry）を用いた鮮やかな議論もある。トーナメント全体の試合数を数えるのである。

解答

$N = 2^n$ とおく。選ばれた 2 人のプレイヤーを A、B とする。$r-1$ 回戦が終わった時点で残っているプレイヤーは 2^{n-r+1} 人なので、第 r 回戦のプレイヤー数は $M_r = 2^{n-r+1}$ であり、第 n 回戦（$M_n = 2$）が決勝戦である。

繰り返し用いる事実は次のとおりである。A と B がともに、無作為に組み合わせられる M 人のプレイヤーの中にいるならば、A の対戦相手は他の $M-1$ 人のうちの誰であるのも同様に確からしいので、

$$\mathrm{P}(A \text{ の対戦相手が } B \text{ になる}) = \frac{1}{M-1}.$$

（決勝戦では組み合わせの抽選はないが、$M = 2$ のときこの式は 1 を与え、これは正しい。）

小問 (i)

1 回戦では $M_1 = N$ なので、

$$\mathrm{P}(A \text{ と } B \text{ が } 1 \text{ 回戦で対戦する}) = \frac{1}{2^n - 1}.$$

小問 (ii)

S_r を、第 r 回戦の開始時点で A と B がともにまだトーナメントに残っているという事象とする（試合に負けた者は敗退するので、このとき 2 人はまだ対戦していないことになる）。S_r のもとで、2 人がそろって第 $r+1$ 回戦に進むのは、第 r 回戦で 2 人が対戦相手にならず、しかもそれぞれの（別々の）試合に 2 人とも勝つときであり、かつそのときに限る。2 つの試合の結果は独立（independent）で、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ なので、

$$\mathrm{P}(S_{r+1} \mid S_r) = \frac{M_r - 2}{M_r - 1} \cdot \frac{1}{4}.$$

考えてみよう これを実際に計算できる積の形にするには、どうすればよいだろうか？

$M = 2^k$ とおくと、$M - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$ であることに気づく。したがって

$$\frac{M-2}{M-1} = \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1}.$$

ある回戦の分子は（因数 2 を除けば）次の回戦の分母になっている。S_1 は確実に起こるので、$k = n, n-1, \ldots, n-r+2$ の各回戦にわたって掛け合わせると、次々と打ち消し合う積が得られる。

$$\mathrm{P}(S_r) = \frac{1}{4^{r-1}} \prod_{k=n-r+2}^{n} \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1} = \frac{2^{r-1}}{4^{r-1}} \cdot \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

S_r のもとで、2 人が第 r 回戦で対戦する確率は $1/(M_r - 1) = 1/(2^{n-r+1} - 1)$ なので、

$$\mathrm{P}(A \text{ と } B \text{ が第 } r \text{ 回戦で対戦する}) = \frac{1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

これは気持ちのよいほど簡単な式である。回戦が 1 つ進むごとに、その回戦で対戦する確率は半分になる。$r = 1$ とおけば小問 (i) の結果が再び得られる。決勝戦は $r = n$ なので、

$$\mathrm{P}(A \text{ と } B \text{ が決勝戦で対戦する}) = \frac{1}{2^{n-1}\,(2^n - 1)}.$$

対称性による妥当性の確認をしておこう。ルールはすべてのプレイヤーを同等に扱うので、決勝進出者の組は $\binom{N}{2} = 2^{n-1}(2^n - 1)$ 通りあるプレイヤーの組のどれであるのも同様に確からしい。これにより同じ答えが得られる。

小問 (iii)

$r = 1, \ldots, n$ に対する事象「第 r 回戦で対戦する」は互いに排反（mutually exclusive）である（負けた者は去るので、2 人のプレイヤーが対戦するのは高々 1 回である）。そこで、等比級数（geometric series）を用いてこれらを足し合わせる。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \text{ と } B \text{ が対戦する}) &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^n - 1} \cdot 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{2}{2^n} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n - 1} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

考えてみよう 和を一切計算せずに、この答えを見抜く方法はあるだろうか？

ある。どの試合でもちょうど 1 人のプレイヤーが敗退し、優勝者以外は全員敗退するので、試合数は常にちょうど $2^n - 1$ である。各試合は 1 組のプレイヤーによって行われ、対称性により $\binom{N}{2}$ 組のどの組も対戦する確率は同じ値 p である。試合数の期待値は、すべての組にわたるこれらの確率の和なので、

$$\binom{2^n}{2} p = 2^n - 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{2(2^n - 1)}{2^n(2^n - 1)} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

となり、和による計算と一致する。

検算

- $n = 1$：プレイヤーは 2 人で、2 人は必ず 1 回戦で対戦し、それが決勝戦である。3 つの式はいずれも 1 を与える。
- $n = 2$：プレイヤーは 4 人。小問 (i) は $\frac{1}{3}$、決勝戦は $\frac{1}{6}$ を与え、合計は $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ となって、小問 (iii) の結果と一致する。
- $n = 3$：すべての組み合わせとすべての結果を厳密に数え上げると、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{28}$、$\frac{1}{4}$ が得られる。16 人のプレイヤーによるトーナメントを 2×10^5 回シミュレーションしたところ、0.0664、0.0085、0.1247 となった。厳密な値は $\frac{1}{15} \approx 0.0667$、$\frac{1}{120} \approx 0.0083$、$\frac{1}{8}$ である。

よくある間違い

- 後の回戦で対戦するためには、2 人のプレイヤーはまずそれ以前のすべての回戦で互いを**避け**なければならないことを忘れる。因数 $\frac{M-2}{M-1}$ は落としやすい。
- 小問 (ii) の答えを $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$ とする。これは 2 人が**独立**であるとした場合に 2 人とも

決勝に進む確率である。実際には独立ではない。早い段階で 2 人が対戦相手になれば、勝ち進めるのは高々 1 人である。

STEP のその先へ

小問 (iii) の議論は、指示変数（indicator variables）を用いた**期待値の線形性**（linearity of expectation）である。試合数の期待値は、事象が独立であるかどうかにかかわらず、すべての組にわたってその組が対戦する確率を足し合わせたものに等しい。これは確率論と組合せ論（combinatorics）において最も強力な道具の一つであり、与えられた性質をもつ対象が存在することを証明する「確率論的手法」（probabilistic method）の土台となっている。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、指示変数を用いた議論の素晴らしい例を集めた章が丸ごと一つある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。