解答例

STEP II 見本問題、第 15 問

確率・統計 ・ 期待値と標本平均

STEP II 見本問題、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s2-q15

鍵となる考え方

王は毎日膨大な数の商人に罰金を科すので、大数の法則（law of large numbers）により、商人 1 人 1 日あたりの王の収入は事実上、罰金の**期待値**（expected value）に等しい。したがって、各方式における罰金の期待値を求めればよい。最初の二つの方式は正規分布に従う確率変数の標本の平均に関するものであり、その分布はまた正規分布（normal distribution）で、分散（variance）はより小さくなる。三つ目は待ち時間の問題なので、幾何分布（geometric distribution）を用いる。

解答

選ばれた箱に入っているキッパー（燻製ニシン）の重さ（グラム単位）を $W_1, W_2, \ldots$ とする。箱には実質的に無作為に選ばれたキッパーが入っているので、W_i は独立（independent）であり、それぞれ $W_i \sim \mathrm{N}(200, 10^2)$ に従う。箱からキッパーを無作為に選ぶことはその重さに依存しないので、どのキッパーをどの順に取り出しても、それらはやはり独立な $\mathrm{N}(200, 10^2)$ に従う確率変数である。

$W_1, \ldots, W_m$ が独立に $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うならば、その平均は

$$\overline{W} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} W_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right).$$

を満たす、という標準的な事実を用いる。

小問 (i)

ここでは $m = 625$ なので $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{625}\right)$ であり、標準偏差（standard deviation）は $\frac{10}{25} = 0.4$ である。すると

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 199) = \Phi\left(\frac{199 - 200}{0.4}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \approx 1 - 0.99379 = 0.00621.$$

罰金の期待値は

$$1500 \times 0.00621 \approx 9.3 \text{ クラウン}.$$

小問 (ii)

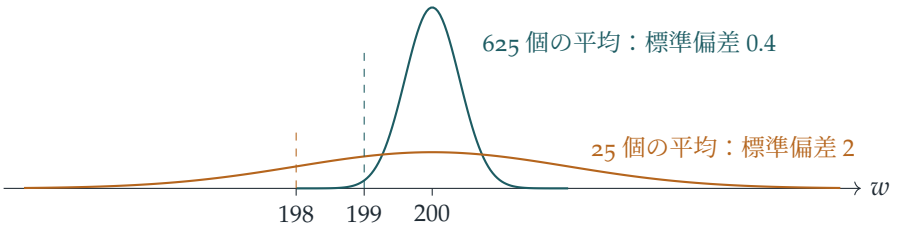
今度は $m = 25$ なので $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{25}\right)$ であり、標準偏差は 2 である。すると

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 198) = \Phi\left(\frac{198 - 200}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.84134 = 0.15866,$$

であり、罰金の期待値は

$$100 \times 0.15866 \approx 15.9 \text{ クラウン}.$$

小さい罰金のほうが有利になる理由は図を見ればわかる。平均より 1 グラム低い閾値は、625 個のキッパーの平均にとっては標準偏差の 2.5 倍だけ離れているが、2 グラム低い閾値は、25 個の平均にとっては標準偏差の 1 倍しか離れていない。



小問 (iii)

取り出されるキッパーの個数を N とする。200 は対称な分布の平均であり、$\mathrm{P}(W = 200) = 0$ であるから、各キッパーが 200 g より重い確率は $\frac{1}{2}$ である。取り出されるキッパーは独立なので、N は成功確率 $\frac{1}{2}$ の独立な試行において、最初の成功までの（最初の成功を含む）試行回数である。言い換えれば、N は幾何分布に従う：

$$\mathrm{P}(N = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

（厳密には箱のキッパーは 625 個で尽きるが、そのどれも 200 g を超えない確率は 2^{-625} であり、まったく無視できる。）

考えてみよう 先に $\mathrm{E}[N^2]$ を計算せずに、$\mathrm{E}[N(N-1)]$ を求めるにはどうすればよいか。

等比級数（geometric series）を 2 回微分する。$|x|<1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

両辺に x^2 を掛けて $x=\frac{1}{2}$ とおくと（$n=1$ の項はいずれにせよ 0 である）

$$\mathrm{E}[N(N-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

（同じことだが、$p=\frac{1}{2}$ として $\mathrm{E}[N]=2$、$\mathrm{Var}(N)=\frac{1-p}{p^2}=2$ であるから、$\mathrm{E}[N^2]=6$ となり、$\mathrm{E}[N^2]-\mathrm{E}[N]=4$ である。）よって罰金の期待値は

$$\mathrm{E}[3N(N-1)] = 3\times 4 = 12 \text{ クラウン}.$$

結論

商人 1 人 1 日あたりの罰金の期待値は、方式 (i)、(ii)、(iii) についてそれぞれ約 9.3、15.9、12 クラウンである。膨大な数の箱が検査されるので、王の総収入は検査回数に罰金の期待値を掛けたものに非常に近い。したがって王は**方式 (ii)** を選ぶべきである。この方式は方式 (i) よりおよそ 70% 多く、方式 (iii) よりおよそ 3 分の 1 多くの収入をもたらす。

検算

- 方式 (iii) は数表と照らし合わせることはできないが、級数を足し上げるのは簡単である：$\frac{3\cdot 2}{4}+\frac{3\cdot 6}{8}+\frac{3\cdot 12}{16}+\cdots = 1.5+2.25+2.25+1.875+\cdots$。部分和は速やかに 12 に近づいていく。
- 正規分布に従うキッパー 625 個入りの箱 10^5 個をシミュレーションし、三つの方式すべてに通したところ、平均罰金はおよそ 10.2（2×10^4 箱分なのでばらつきが大きい）、15.9、11.9 クラウンとなった。これらは 9.31、15.87、12 に近い。

よくある間違い

- 標本平均の標準偏差として $\frac{10}{625}$ や $\frac{100}{25}$ を用いてしまう。m で割られるのは**分散**であり、標準偏差は $\sqrt{m}$ で割られる。

- N が 0 から始まるものとして扱ってしまう（失敗の回数だけを数える）。ここでの n は重いキッパーを含むので、$\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{2}$ であり、そのとき罰金は 0 である。
- 罰金の期待値ではなく、罰金を科される確率を比較してしまう。方式 (iii) では半分の確率で商人に罰金が科される（$n \geq 2$ のとき）が、たいていは 6 クラウンにすぎない。

STEP のその先へ

「量が膨大なので期待値を用いる」という正当化は大数の法則であり、$\overline{W}$ が分散 σ^2/m の正規分布に従うという事実は中心極限定理（central limit theorem）と関連している。中心極限定理により、個々の重さが正規分布に従わない場合でも、これは近似的に成り立つ。慎重な王であれば、ばらつきも考慮するかもしれない。まれに大きな罰金が科される方式 (i) は、分散が群を抜いて大きい。$\mathrm{E}[N(N-1)]$ のような階乗モーメント（factorial moments）を級数の微分によって求めるという考え方は、確率母関数（probability generating functions）につながる。これは大学 1 年次の確率論における中心的な道具である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらすべてを明快に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。