解答例

STEP II 見本問題、第 14 問

力学 ・ 剛体の回転

> **STEP II 見本問題、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q14

鍵となる考え方

円板と質点はどちらも同じ固定された鉛直軸のまわりを回転するので、自然な道具は回転の運動方程式、すなわちトルク（torque）＝慣性モーメント（moment of inertia）× 角加速度（angular acceleration）であり、これをそれぞれの物体に別々に適用する。両者の間にはたらく摩擦は内力の対である。摩擦は一方を加速させるのと（角運動量で測って）ちょうど同じだけ、もう一方を減速させる。このことからただちに保存される組合せが得られ、二つの方程式の差をとると**相対**角速度についての一階の微分方程式が得られる。その解は指数関数的に減衰する。

解答

モデル

円板は一様な薄板であり、その中心 O を通るなめらかな固定軸のまわりを回転するので、軸のまわりの慣性モーメントは

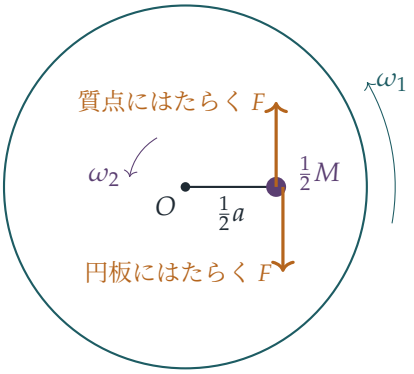
$$I_1 = \tfrac{1}{2}Ma^2.$$

である。質量 $\frac{1}{2}M$ の質点は軽い剛体の針金によって軸から一定の距離 $\frac{1}{2}a$ に保たれているので、半径 $\frac{1}{2}a$ の円周上を動き、軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_2 = \tfrac{1}{2}M\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{1}{8}Ma^2.$$

である。はじめ $\omega_1 = \Omega$、$\omega_2 = 0$ であるから、接触点において円板は質点より速く動いている。したがって摩擦は質点に対してその運動の向きに（半径 $\frac{1}{2}a$ の位置で接線

方向に）はたらき、ニュートン（Newton）の第三法則により、同じ点で大きさが等しく逆向きの力が円板にはたらく。



（上から見た図。$F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$ である。針金の張力は動径方向なので、軸のまわりのモーメントをもたない。）

運動方程式

摩擦力 $F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$ は軸から距離 $\frac{1}{2}a$ の位置で動径に垂直にはたらくので、軸のまわりのモーメントは

$$F \cdot \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2).$$

である。質点の重力と垂直抗力は鉛直方向なので鉛直軸のまわりのモーメントをもたず、軸そのものはなめらかである。円板については、摩擦は回転を妨げる向きにはたらく：

$$\tfrac{1}{2}Ma^2 \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -\tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -k(\omega_1 - \omega_2).$$

質点については、摩擦は回転を促す向きにはたらく：

$$\tfrac{1}{8}Ma^2 \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 4k(\omega_1 - \omega_2).$$

（質点については、接線方向にニュートンの第二法則を用いてもよい。$\frac{1}{2}M \cdot \frac{1}{2}a\dot{\omega}_2 = F$ となり、同じ方程式である。）

保存される組合せ

第一の方程式を 4 倍して第二の方程式に加えると、

$$4\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -4k(\omega_1 - \omega_2) + 4k(\omega_1 - \omega_2) = 0,$$

となるので、$4\omega_1 + \omega_2$ は一定である。$t = 0$ においてこれは $4\Omega + 0$ に等しいから、

$$4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega,$$

となり、示すべきことが得られた。これは軸のまわりの角運動量保存（conservation of angular momentum）にほかならない。実際 $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = \frac{1}{8}Ma^2(4\omega_1 + \omega_2)$ であり、外力（軸における反力、重力、鉛直方向の抗力）はいずれも軸のまわりのモーメントをもたない。

ω_1 を求める

考えてみよう 連立した二つの方程式がある。単独で一つの方程式を満たす量はどれか？

どちらの変化率も差 $u = \omega_1 - \omega_2$ のみに依存するので、これに注目する。二つの方程式の差をとると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -ku - 4ku = -5ku,$$

であり、$u(0) = \Omega - 0 = \Omega$ である。変数分離（separation of variables）により（あるいは指数関数的減衰であると見抜いて）、

$$\omega_1 - \omega_2 = u = \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}.$$

を得る。これを $4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega$ に加えると ω_2 が消去される：

$$5\omega_1 = 4\Omega + \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}, \qquad \text{よって} \qquad \omega_1 = \frac{\Omega}{5}\left(4 + \mathrm{e}^{-5kt}\right),$$

となり、示すべきことが得られた。これから $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1 = \frac{4}{5}\Omega\left(1 - \mathrm{e}^{-5kt}\right)$ も従う。別解として、$\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1$ を円板の方程式に代入すると $\dot{\omega}_1 = -5k\omega_1 + 4k\Omega$ という線形微分方程式が得られ、$\omega_1(0) = \Omega$ を満たすその解は同じものになる。

検算

- $t = 0$ のとき：$\omega_1 = \frac{1}{5}\Omega(4+1) = \Omega$、$\omega_2 = 0$ である。正しい。
- $t \to \infty$ のとき：$\omega_1, \omega_2 \to \frac{4}{5}\Omega$ となり、共通の角速度になる。摩擦があれば最終的にこうなるはずである。最終的な運動エネルギーは $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}Ma^2\cdot\frac{16}{25}\Omega^2 = \frac{1}{5}Ma^2\Omega^2$ であり、はじめの $\frac{1}{4}Ma^2\Omega^2$ と比べると、エネルギーの 5 分の 1 が摩擦によって失われている。これは「完全非弾性」的な結合で予想されるとおりである。
- 数値的には、$M = a = k = \Omega = 1$ として二つの運動方程式を $t = 1$ まで数値的に解き進めると $\omega_1 = 0.80135$、$\omega_2 = 0.79461$ となり、$\frac{1}{5}(4 + \mathrm{e}^{-5})$ および $\frac{4}{5}(1 - \mathrm{e}^{-5})$ と一致する。また $4\omega_1 + \omega_2$ は終始 4 のままである。

よくある間違い

- 質点の慣性モーメントを $\frac{1}{2}M(\frac{1}{2}a)^2$ ではなく、（縁にあるかのように）$\frac{1}{2}Ma^2$ としてしまう。
- 回転の方程式に、摩擦力のモーメント $F \cdot \frac{1}{2}a$ ではなく摩擦力そのものを用いてしまう。
- 二つの方程式で摩擦に同じ符号をつけてしまう。摩擦は円板を減速させ、質点を加速させる。

STEP のその先へ

ここでの摩擦は内力であり、$4\omega_1 + \omega_2$ の保存は衝突における運動量保存の回転版である。また、共通の速さへの指数関数的な接近は、粘性抵抗によって結合された二つの物体と同じ数学である。より一般に、線形系 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ は A の固有ベクトル（eigenvector）を用いて表すと分離される。ここではそれらは組合せ $4\omega_1 + \omega_2$（固有値（eigenvalue）0）と $\omega_1 - \omega_2$（固有値 $-5k$）である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は剛体の回転と角運動量を丁寧に展開しており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は固有ベクトルによる線形系の扱いを解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。